KỲ THI TRUNG HỌC QUỐC GIA 2019-2020

TUYỂN TẬP CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Th.s NGUYỄN CHÍN EM

MỤC LỤC

PHẦN I GIẢI TÍCH & ĐẠI SỐ 1

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀMĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 3

1 SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ 3
A Tóm tắt lý thuyết 3
B Các dạng toán 4
Dạng 1. Xét sự đồng biến - nghịch biến của hàm số 4
Dạng 2. Điều kiện của tham số để một hàm số đơn điệu trên mọi khoảng xác định 12
Dạng 3. Tìm các khoảng đơn điệu; chứng minh hàm số đơn điệu trên tập $\mathscr{K}$ 15
Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước 18
Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc ba có khoảng đơn điệu có độ dài cho trước 24
C Câu hỏi trắc nghiệm 35

2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 196
A Tóm tắt lí thuyết 196
B Các dạng toán 198
Dạng 1. Cực trị của hàm số 198
Dạng 2. Cực trị có tham số 203
C Câu hỏi trắc nghiệm 226

3 GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ 369
A Tóm tắt lí thuyết 369
B Các dạng toán 374
Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn 374
Dạng 2. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng 377
Dạng 3. Sử dụng GTLN, GTNN để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình 380
Dạng 4. Sử dụng GTLN, GTNN để chứng minh bất đẳng thức 386
Dạng 5. Ứng dụng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số vào bài toán thực tế 389
Dạng 6. Một số ứng dụng sự biến thiên của hàm số 412
C Câu hỏi trắc nghiệm 417

4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN 603
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 603
B Câu hỏi trắc nghiệm 609

5 KHẢO SÁT HÀM SỐ 713
A Các dạng toán 713
Dạng 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm bậc ba 713
Dạng 2. Khảo sát hàm số bậc 4 trùng phương và các bài toán liên quan 723
Dạng 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ 732

B Câu hỏi trắc nghiệm . . . 743
C Mức độ vận dụng cao . . . 858

CHƯƠNG 2 HÀM SỐ LŨY THỪAHÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT 917

1 LŨY THỪA . . . 917
A Tóm tắt lí thuyết . . . 917
B Các dạng toán . . . 918
Dạng 1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa . . . 918
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức lũy thừa . . . 922
Dạng 3. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa . . . 927
Dạng 4. Bài toán lãi kép . . . 931
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 934
2 HÀM SỐ LŨY THỪA . . . 980
A Lý thuyết cơ bản . . . 980
B Các dạng bài tập . . . 981
Dạng 1. Tính toán - Rút gọn biểu thức lũy thừa . . . 981
Dạng 2. So sánh lũy thừa hay căn số . . . 983
Dạng 3. Bài toán lãi kép . . . 985
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 990
3 LÔGARIT . . . 1035
A Tóm tắt lí thuyết . . . 1035
B Các dạng toán . . . 1036
Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức chứa logarit . . . 1036
Dạng 2. Biểu diễn logarit theo các tham số . . . 1039
Dạng 3. Tìm giá trị của x thỏa mãn hệ thức lôgarit . . . 1046
Dạng 4. Chứng minh đẳng thức chứa lôgarit . . . 1048
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 1051
4 HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT . . . 1147
A Tóm tắt lí thuyết . . . 1147
B Các dạng toán . . . 1147
Dạng 1. Tính giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit . . . 1147
Dạng 2. Các bài toán liên quan đến đạo hàm hàm số mũ và hàm số logarit . . . 1148
Dạng 3. Đồ thị hàm số mũ và đồ thị hàm số logarit . . . 1151
Dạng 4. Một số ứng dụng . . . 1155
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 1161
5 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT . . . 1320
A Phương trình mũ . . . 1320
B Các dạng toán . . . 1320
Dạng 1. Đưa về phương trình mũ cơ bản . . . 1320
Dạng 2. Đưa về cùng cơ số . . . 1322
Dạng 3. Lôgarit hóa . . . 1324
Dạng 4. Đặt một ẩn phụ . . . 1327
Dạng 5. Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp . . . 1331
Dạng 6. Đặt ẩn phu khi tích hai cơ số bằng 1 . . . 1334

Dạng 7. Đặt hai ẩn phụ và Đặt ẩn phụ không hoàn toàn . . . 1337
Dạng 8. Phương pháp hàm số giải phương trình mũ . . . 1342
Dạng 9. Phương trình mũ chứa tham số . . . 1346
Dạng 10. Phương trình logarit cơ bản . . . 1351
Dạng 11. Phương pháp đưa về cùng cơ số . . . 1352
Dạng 12. Đặt một ẩn phụ . . . 1357
Dạng 13. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn . . . 1360
Dạng 14. Mũ hóa . . . 1362
Dạng 15. Phương pháp hàm số giải phương trình lôgarit . . . 1364
Dạng 16. Phương trình lôgarit có chứa tham số . . . 1367
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 1374
6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT . . . 1523
A Tóm tắt lý thuyết . . . 1523
B Các dạng toán . . . 1523
Dạng 1. Bất phương trình mũ cơ bản . . . 1523
Dạng 2. Phương pháp đưa về cùng cơ số . . . 1526
Dạng 3. Giải bất phương trình logagit dạng cơ bản . . . 1528
Dạng 4. Giải bất phương trình logagit bằng cách đưa về cùng cơ số . . . 1530
Dạng 5. Bất phương trình mũ và logarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ . . . 1533
Dạng 6. Phương pháp đặt ẩn phụ trong bất phương trình logarit . . . 1541
Dạng 7. Phương pháp sử dụng hàm số và bất đẳng thức . . . 1545

CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂNVÀ ỨNG DỤNG 1709

1 NGUYÊN HÀM . . . 1709
A Tóm tắt lý thuyết . . . 1709
B Các dạng toán . . . 1711
Dạng 1. Nguyên hàm đổi biến số loại I . . . 1711
Dạng 2. Nguyên hàm đổi biến số loại II . . . 1714
Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần . . . 1723
Dạng 4. Nguyên hàm hàm phân thức . . . 1726
Dạng 5. Nguyên hàm của hàm vô tỷ . . . 1730
Dạng 6. Nguyên hàm có yếu tố mũ và lôgarit . . . 1735
Dạng 7. Sử dụng biến đổi lượng giác . . . 1739
Dạng 8. Phương pháp đổi biến . . . 1743
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 1747
2 TÍCH PHÂN . . . 1849
A Tóm tắt lí thuyết . . . 1849
B Các dạng toán . . . 1849
Dạng 1. Tính tích phân cơ bản . . . 1849
Dạng 2. Phương pháp đổi biến dạng 1 . . . 1852
Dạng 3. Phương pháp đổi biến dạng 2 . . . 1859
Dạng 4. Tích phân từng phần . . . 1864
Dạng 5. Tích phân của hàm phân thức hữu tỉ . . . 1872
Dạng 6. Lớp các tích phân đặc biệt . . . 1877

Dạng 7. Bài tập tổng hợp . . . 1884
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 1902
3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN . . . 2055
A Tóm tắt lí thuyết . . . 2055
B Các dạng toán . . . 2056
Dạng 1. Diện tích hình giới hạn bởi: đồ thị hàm số - trục hoành và hai cận . . . 2056
Dạng 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số . . . 2061
Dạng 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba hàm số . . . 2073
Dạng 4. Thể tích khối tròn xoay . . . 2080
Dạng 5. Bài toán thực tế . . . 2086
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2094

CHƯƠNG 4 SỐ PHỨC 2391

1 SỐ PHỨC . . . 2391
A Tóm tắt lí thuyết . . . 2391
B Các dạng toán . . . 2392
Dạng 1. Xác định phần thực - phần ảo của số phức . . . 2392
Dạng 2. Xác định mô-đun của số phức . . . 2393
Dạng 3. Hai số phức bằng nhau . . . 2394
Dạng 4. Tìm tập hợp điểm biểu diễn . . . 2395
Dạng 5. Số phức liên hợp . . . 2398
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2403
2 CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC . . . 2457
A Tóm tắt lí thuyết . . . 2457
B Các dạng toán . . . 2458
Dạng 1. Cộng trừ hai số phức . . . 2458
Dạng 2. Phép nhân hai số phức . . . 2462
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2472
3 PHÉP CHIA SỐ PHỨC . . . 2571
A Lý thuyết cơ bản . . . 2571
B Các dạng bài tập . . . 2571
Dạng 1. Phép chia số phức đơn giản . . . 2571
Dạng 2. Các bài toán tìm phần thực và phần ảo của số phức . . . 2573
Dạng 3. Một số bài toán xác định môđun của số phức . . . 2577
Dạng 4. Tìm tập hợp điểm-GTNN-GTLN . . . 2579
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2587
4 Phép chia số phức . . . 2623
5 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC . . . 2667
A Tóm tắt lí thuyết . . . 2667
Dạng 1. Giải phương trình bậc hai hệ số thực . . . 2667
Dạng 2. Phương trình bậc cao với hệ số thực. . . . 2669
Dạng 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HỆ SỐ PHỨC . . . 2672
B Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2678

PHẦN II HÌNH HỌC 2749

CHƯƠNG 1 KHỐI ĐA DIỆN 2751

1 KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN . . . 2751
A Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện . . . 2751
B Hai đa diện bằng nhau . . . 2752
C Phân chia và lắp ghép khối đa diện . . . 2754
D Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2758
2 KHỐI ĐA DIỆN LỒI, KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU . . . 2814
A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM . . . 2814
B CÁC VÍ DỤ . . . 2817
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2820
D Mức độ thông hiểu . . . 2841
E Mức độ thông hiểu . . . 2869
3 KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN . . . 2897
A Tóm tắt lí thuyết . . . 2897
B Các dạng toán . . . 2898
Dạng 1. Thể tích khối chóp tam giác . . . 2898
Dạng 2. Thể tích khối chóp tứ giác . . . 2901
Dạng 3. Thể tích khối lăng trụ đứng . . . 2903
Dạng 4. Thể tích khối lăng trụ xiên . . . 2905
Dạng 5. Tỉ số thể tích . . . 2909
Dạng 6. Ứng dụng thể tích để tính khoảng cách . . . 2912
Dạng 7. Thể tích khối đa diện liên quan đến giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất . . . 2917
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 2928

CHƯƠNG 2 MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU 3125

1 MẶT NÓN, MẶT TRỤ . . . 3125
A Tóm tắt lí thuyết . . . 3125
B Các dạng toán . . . 3126
Dạng 1. Thiết diện qua trục hình trụ, hình nón . . . 3126
Dạng 2. Thiết diện không qua trục hình trụ, hình nón . . . 3129
Dạng 3. Góc và khoảng cách trong nón và trụ . . . 3133
C Câu hỏi trắc nghiệm . . . 3143
2 MẶT CẦU . . . 3330
A Tóm tắt lí thuyết . . . 3330
B Các dạng toán . . . 3331
Dạng 1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy (hình chóp đều) . . . 3331
Dạng 2. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy (hình chóp khác) . . . 3335

Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp, nội tiếp hình chóp 3339
C Câu hỏi trắc nghiệm 3346

CHƯƠNG 3 PHƯƠNG PHÁPTỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 3523

1 HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 3523
A Tóm tắt lý thuyết 3523
Dạng 1. Sự cùng phương của hai véc-tơ. Ba điểm thẳng hàng 3527
Dạng 2. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước. 3534
Dạng 3. Một số bài toán về tam giác 3540
B Câu hỏi trắc nghiệm 3546
2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 3716
A Tóm tắt lí thuyết 3716
B Các dạng toán 3717
Dạng 1. Sự đồng phẳng của ba vec-tơ, bốn điểm đồng phẳng 3717
Dạng 2. Diện tích của tam giác 3723
Dạng 3. Thể tích khối chóp 3724
Dạng 4. Thể tích khối hộp 3726
Dạng 5. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có vectơ pháp tuyến cho trước 3727
Dạng 6. Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng 3727
Dạng 7. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có cặp vectơ chỉ phương cho trước 3728
Dạng 8. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và song song mặt phẳng cho trước 3729
Dạng 9. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng 3730
Dạng 10. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cho trước 3731
Dạng 11. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước 3731
Dạng 12. Lập phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và vuông góc với một mặt phẳng cắt nhau cho trước 3732
Dạng 13. Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm cho trước . . . 3733
Dạng 14. Viết phương trình của mặt phẳng liên quan đến mặt cầu và khoảng cách 3733
Dạng 15. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc hoặc liên quan đến tam giác 3740
Dạng 16. Các dạng khác về viết phương trình mặt phẳng 3745
Dạng 17. Ví trí tương đối của hai mặt phẳng 3750
Dạng 18. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu 3751
Dạng 19. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Tìm hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng. Tìm điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng. 3753
Dạng 20. Tìm tọa độ hình chiếu của điểm trên mặt phẳng. Điểm đối xứng qua mặt phẳng 3755
C Câu hỏi trắc nghiệm 3760

3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN 4014
A Tóm tắt lí thuyết 4014
B Các dạng toán 4014
Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng khi biết một điểm thuộc nó và một véc-tơ chỉ phương 4014
Dạng 2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm cho trước 4016
Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M cho trước và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước 4017
Dạng 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và song song với một đường thẳng cho trước 4018
Dạng 5. Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) 4019
Dạng 6. Đường thẳng d qua M song song với mp(P) và vuông góc với d' (d' không vuông góc với Δ) 4022
Dạng 7. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 4025
Dạng 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 4028
Dạng 9. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 4031
Dạng 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_1 4034
Dạng 11. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 4036
Dạng 12. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 4038
Dạng 13. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng song song cho trước và nằm trong mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó 4040
Dạng 14. Viết phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước 4042
Dạng 15. Viết phương trình tham số của đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) 4046
C Câu hỏi trắc nghiệm 4049

PHẦN III ĐỀ THI THQG 4365

PHẦN

I

GIẢI TÍCH & ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1 SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$ ($\mathscr{K} \subset \mathbb{R}$ là một khoảng). Ta nói

• Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên $\mathscr{K}$ nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc $\mathscr{K}$ mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ nhỏ hơn $f(x_x)$, tức là $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

• Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên $\mathscr{K}$ nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc $\mathscr{K}$ mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ lớn hơn $f(x_x)$, tức là $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Định lí 1. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathscr{K}$.*

- ☑ *Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathscr{K}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathscr{K}$.*
- ☑ *Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $\mathscr{K}$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathscr{K}$.*

Định lí 2. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathscr{K}$. Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc $\mathscr{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{K}$.*

2 Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

- ☑ Tìm tập xác định.
- ☑ Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, ..., n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ☑ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- ☑ Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Xét sự đồng biến - nghịch biến của hàm số

Phương pháp giải. Để xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước giải như sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính y'. Tìm các điểm thuộc $\mathscr{D}$ mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên của hàm số.
- **Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 12x - 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 3)$. □

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -4x^3 + 8x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(-x^2 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 0 \\ -x^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$,
hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$. □

Ví dụ 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x + 8 = 0 = 4(x-1)^2(x+2)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-23	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. □

Ví dụ 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+7}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{3-2x}{x+7} = \dfrac{-2x+3}{x+7}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-17}{(x+7)^2} < 0, \forall x \neq -7$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-2

Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -7)$ và $(-7; +\infty)$. □

Ví dụ 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \forall x \in \mathscr{D}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$. □

Ví dụ 6. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x + \sqrt{16-x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [-4;4]$.

Đạo hàm: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \dfrac{\sqrt{16-x^2}-x}{\sqrt{16-x^2}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16-x^2} = x \\ 16-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0 < 16-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		$2\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'			$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$		
y			-4	↗	$4\sqrt{2}$	↘	4		

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;2\sqrt{2})$ và nghịch biến trên khoảng $(2\sqrt{2};4)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -8x^3 + 8x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow 8x(-x^2+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8x = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$,
hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. □

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4-2x^2-3$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=0\\x^2-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$,
hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. □

Bài 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4+4x^3-1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3+12x^2=0=4x^2(x+3)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^2(x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-28	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$. □

Bài 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4+4x+6$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3+4$. Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+4=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. □

Bài 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^3-x^2-x+1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-2x-1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$, $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. □

Bài 6. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=x^3+3x^2+3x+2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+6x+3$. Cho $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x+3=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

Bài 7. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $x^2-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}, \forall x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ và $x=2$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \notin \mathscr{D}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖		‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. □

Bài 8. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. □

Bài 9. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}, \forall x \in \mathscr{D}$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$
Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$. □

Bài 10. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-x+3>0$ (đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$).
Hàm số đã cho xác định trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}-\dfrac{(x+2)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+3}}}{x^2-x+3}=\dfrac{-5x+8}{2(x^2-x+2)\sqrt{x^2-x+2}}$.
Cho $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-5x+8}{2(x^2-x+2)\sqrt{x^2-x+2}}=0\Leftrightarrow -5x+8=0\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{5}$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{8}{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$\dfrac{6}{\sqrt{11}}$	$\searrow$	1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{8}{5}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{8}{5};+\infty\right)$. □

Bài 11. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=(4-3x)\sqrt{6x^2+1}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có $y'=-3\sqrt{6x^2+1}+\dfrac{6x(4-3x)}{\sqrt{6x^2+1}}=\dfrac{-36x^2+24x-3}{\sqrt{6x^2+1}}$.
Cho $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-36x^2+24x-3}{\sqrt{6x^2+1}}=0\Leftrightarrow -36x^2+24x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{1}{6}.\end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{42}}{12}$	$\searrow$	$\frac{5\sqrt{10}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$. □

Bài 12. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=|x^2-2x-3|$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y=|x^2-2x-3|=\sqrt{(x^2-2x-3)^2}$ nên $y'=\dfrac{2(x^2-2x-3)(2x-2)}{2\sqrt{(x^2-2x-3)^2}}=\dfrac{(x^2-2x-3)(2x-2)}{|x^2-2x-3|}$

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{(x^2-2x-3)(2x-2)}{|x^2-2x-3|}=0\Leftrightarrow x=1$

(hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ và $x=3$)

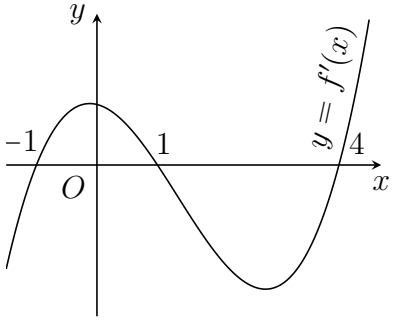
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$,
hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. □

Bài 13.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hãy xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(2-x)$.



Lời giải.

Ta có $(f(2-x))'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$ Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ thì

☑ $\big(f(2-x)\big)' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \hoac{2-x<-1\\1<2-x<4} \Leftrightarrow \hoac{x>3\\-2<x<1}$.

☑ $\big(f(2-x)\big)' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \hoac{-1<2-x<1\\2-x>4} \Leftrightarrow \hoac{1<x<3\\x<-2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;3)$. □

DẠNG 2. Điều kiện của tham số để một hàm số đơn điệu trên mọi khoảng xác định

Phương pháp giải.

A. Lý thuyết chung

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K (một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng) đồng thời phương trình $f'(x)$ vô nghiệm trên K hoặc có nghiệm rời rạc trên K. Khi đó

☑ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0, \forall x \in K$.

☑ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

B. Kiến thức bổ trợ

Cho tam thức bậc hai $h(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Khi đó

☑ $h(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \heva{a>0\\\Delta \leq 0.}$ ☑ $h(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \heva{a<0\\\Delta \leq 0.}$

Lưu ý: khi đã chắc chắn $a\neq 0$, hai công thức trên đây mới được sử dụng.

Ví dụ 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-1$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=3x^2-6x+3(m+2) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \heva{a>0\\\Delta' \leq 0} \Leftrightarrow \heva{3>0\\9-9(m+2)\leq 0} \Leftrightarrow m \geqslant -1$$

Vậy với $m \geqslant -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 8. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x-3$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Xét $a=3-m=0 \Leftrightarrow m=3$.

Khi đó hàm số trở thành $y=-6x^2+5x-3$. Đây là hàm số bậc hai, có lúc tăng, lúc giảm khi xét trên $\mathbb{R}$. Do đó ta loại $m=3$.

☑ Xét $a = 3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = (3-m)x^2 - 2(m+3)x + (m+2) \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - m > 0 \\ \Delta' = 2m^2 + 5m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -1.$$

Vậy với $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 9. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + m - 7}{5x - m + 3}$ đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m-3}{5}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 - 2m + 35}{(5x - m + 3)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mọi khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq \frac{m-3}{5} \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 35 > 0 \Leftrightarrow m \in (-7; 5).$$

Vậy, với $m \in (-7; 5)$ thì hàm số đồng biến trên mọi khoảng xác định của nó. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến tren $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 2mx + 4$ có $\Delta'_{y'} = m^2 - 12$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 : \text{hiển nhiên} \\ m^2 - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| \leq 2\sqrt{3}.$

Vậy, với $m \in \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

Bài 15. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = 9 + 3.3(m^2 - 1) = 9m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. □

Bài 16. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx - 2}{x - m + 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x-m+1}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m-1\}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'=\dfrac{-m^2+m+2}{(x-m+1)^2}<0, \forall x\neq m-1$

$$\Leftrightarrow -m^2+m+2<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2. \end{array}\right.$$

Vậy với $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. □

Bài 17. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x+m\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x+m\cos x$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=1-m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1-m\sin x\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\sin x\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Với $m=0$ thì (*) luôn đúng.

Với $m>0$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin x\leq\dfrac{1}{m}, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1\leq\dfrac{1}{m}\Leftrightarrow 0<m\leq 1$.

Với $m<0$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin x\geqslant\dfrac{1}{m}, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -1\geqslant\dfrac{1}{m}\Leftrightarrow -1\leq m<0$.

Vậy $-1\leq m\leq 1$ là các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu của bài toán. □

Bài 18. Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx+6m}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định hàm số.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta cần xét hai trường hợp

☑ **TH1:** Khi $m=-1$, ta có hàm số $y=\dfrac{2x-6}{x-1}$ và $y'=\dfrac{4}{(x-1)^2}>0$ với mọi $x\in\mathscr{D}$.

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Vậy, $m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

☑ **TH2:** Khi $m\neq -1$, ta có $y'=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}$.

Đặt $g(x)=(m+1)x^2-2(m+1)x-4m$ và ta có y' cùng dấu với $g(x)$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y'\geqslant 0, \forall x\in\mathscr{D}\Leftrightarrow g(x)\geqslant 0, \forall x\in\mathscr{D}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g=(m+1)^2+4m(m+1)\leq 0 \\ m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(5m+1)\leq 0 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq -\frac{1}{5}.$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu của bài toán là $\left[-1;-\dfrac{1}{5}\right]$.

□

Bài 19. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m+2)\dfrac{x^3}{3}-(m+2)x^2-(3m-1)x+m^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=(m+2)x^2-2(m+2)x-3m+1$.

Vì đạo hàm không thể triệt tiêu tại vô hạn điểm nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (m+2)x^2-2(m+2)x-3m+1\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}\ (1)$$

☑ TH1: Nếu $m=-2$ khi đó (1) luôn đúng với mọi $x \Rightarrow m=-2$ thỏa bài toán.

☑ TH2: Nếu $m \neq -2$ khi đó (1) thỏa với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=m+2>0 \\ \Delta'=(m+2)(4m+1) \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ 4m+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m \leq -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có $-2 \leq m \leq -\frac{1}{4}$ là những giá trị cần tìm. □

Bài 20. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+(m+1)x^2+3x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=(m^2-1)x^2+2(m+1)x+3$ và có $\Delta'=2(-m^2+m+2)$.

Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

☑ Xét $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

+ $m=1 \Rightarrow y'=4x+3$. Ta có $y' \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{4} \Rightarrow m=1$ không thoả yêu cầu.

+ $m=1 \Rightarrow y'=3>0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m=-1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

☑ Xét $m^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Trường hợp này, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a=m^2-1>0 \\ \Delta'=2(-m^2+m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m \geqslant 2. \end{array}\right.$$

Vậy với $m \leq -1$ hoặc $m \geqslant 2$ thì hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

DẠNG 3. Tìm các khoảng đơn điệu; chứng minh hàm số đơn điệu trên tập $\mathscr{K}$

Phương pháp giải. **Phương pháp**

☑ Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số hoặc xét hàm số trên tập $\mathscr{K}$.

☑ Bước 2: Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

☑ Bước 3: Xét dấu $f'(x)$.

☑ Bước 4: Kết luận.

Ví dụ 10. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{5-x}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=[-1;5]$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+1)(5-x)}};$$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	-1		2		5
y'		$+$	0	$-$	
y	2	↗	$2\sqrt{3}$	↘	$\sqrt{6}$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;5)$. □

Ví dụ 11. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x - 1 - \sqrt{3x-5}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \left[\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}} = \dfrac{4\sqrt{3x-5}-3}{2\sqrt{3x-5}}$;

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{89}{48}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{5}{3}$		$\frac{89}{48}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{7}{3}$	↘	$\frac{47}{24}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{89}{48}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{89}{48}; +\infty\right)$ □

.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ đồng biến trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{4x-x^2}$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $y' = \dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} > 0 \ \ \forall x \in [0;2]$.

Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[0;2]$.

□

Ví dụ 13. Chứng minh hàm số $y = \sqrt{x^2-1}$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;-1]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x^2-1}$ liên tục trên nửa khoảng $(-\infty;-1]$.

Ta có $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0 \ \ \forall x \in (-\infty;-1)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;-1]$.

□

Ví dụ 14. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \cos 2x + 4\cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos 2x + 4\cos x$ liên tục trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Ta có $y' = -2\sin 2x - 4\sin x = -4\sin x(\cos x + 1)$.

Trên đoạn $[0; 2\pi]$, $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Bảng biến thiên

x	0		π		2π
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$ và đồng biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}}{2\sqrt{4-x^2}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. □

Bài 22. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-1; 1]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên

x	-1		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right)$. □

Bài 23. Chứng minh hàm số $y=\sqrt{x^2-25}$ đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên khoảng $(5;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{x}{2\sqrt{x^2-25}}>0\ \forall x\in(5;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. □

Bài 24. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{x}{2}+\cos x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x}{2}+\cos x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2}-\sin x$.

Trên đoạn $[0;\pi]$, $y'=0$ có nghiệm $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\dfrac{\pi}{2}-1$

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\dfrac{5\pi}{6};\pi\right)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right)$. □

DẠNG 4. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước

Phương pháp giải. Có hai phương pháp chính để giải các bài toán.

- ☑ **Phương pháp 1:** Cô lập tham số, lập bảng biến thiên, từ đó rút ra điều kiện của tham số.
- ☑ **Phương pháp 2:** Lập bảng biến thiên trực tiếp để tìm các khoảng đơn điệu cụ thể, từ đó rút ra kết luận.

Ví dụ 15. Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6x+3m$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\leq 0, \forall x\in(0;+\infty)$.

Hay $-3x^2+6x+3m\leq 0, \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\leq x^2-2x, \forall x\in(0;+\infty)$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x)=2x-2; f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biên thiên ta có (1) $\Leftrightarrow m\leq -1$.

Vậy với $m\leq -1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

□

Ví dụ 16. Tìm m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)\,x^2+(m+3)\,x+4$ đồng biến trên $(0;3)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-x^2+(m-1)\,x+m+3$.

Hàm số đồng biến trên $(0;3)$ khi và chỉ khi $y'\geqslant 0, \forall x\in(0;3)$.

Hay $-x^2+2\,(m-1)\,x+m+3\geqslant 0, \forall x\in(0;3)\Leftrightarrow m\,(2x+1)\geqslant x^2+2x-3, \forall x\in(0;3)$.

Trên $(0;3)$ ta có $2x+1>0$ nên chia hai vế cho $2x+1$ được $m\geqslant \dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}, \forall x\in(0;3)$ (2).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}$ trên $[0;3]$ có $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}>0, \forall x\in[0;3]$.

Bảng biến thiên

x	0		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{12}{7}$

Từ bảng biến thiên ta có (2) $\Leftrightarrow m\geqslant \dfrac{12}{7}$.

Vậy với $m\geqslant \dfrac{12}{7}$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên $(0;3)$. □

Ví dụ 17. Tìm m để hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2+2m)x + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 2m$; $\Delta'_{y'} = (2m+1)^2 - 3(m^2+2m) = (m-1)^2$.

Với $m = 1$, ta có $y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 1$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2m+1-|m-1|}{3} \\ x_2 = \dfrac{2m+1+|m-1|}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $x_2 \leq 0$.

Hay $\dfrac{2m+1+|m-1|}{3} \leq 0 \Leftrightarrow |m-1| \leq -2m-1$.

Với $m > 1$, ta có $|m-1| \leq -2m-1 \Leftrightarrow m-1 \leq -2m-1 \Leftrightarrow m < 0$ (loại).

Với $m < 1$, ta có $|m-1| \leq -2m-1 \Leftrightarrow -m+1 \leq -2m-1 \Leftrightarrow m < -2$ (thỏa mãn).

Vậy với $m \leq -2$ hoặc $m = 1$, hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.

□

Ví dụ 18. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 2m^2 - 2}{x - m}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 2}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' \geqslant 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases}$.

Hay $m \leq 1$ và $x^2 - 2mx + 2 \geqslant 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x^2+2}{2x}, \forall x \in (1;+\infty)$ (4).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ trên $[1;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{2x^2-4}{4x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \sqrt{2} \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1.$

Vậy với $m \leq 1$, hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $y' \geqslant 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Hay $3x^2 + 6x - m \geqslant 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0)$ (1).

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên $(-\infty; 0]$ có $f'(x) = 6x + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Từ bảng biên thiên ta có $(1) \Leftrightarrow m \leq -3$.

Vậy với $m \leq -3$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

□

Bài 26. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6$.

Hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geqslant 0, \forall x \in [2; +\infty)$.

Hay $m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \geqslant 0, \forall x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{-2x + 6}{x^2 - 2x + 3}, \forall x \in [2; +\infty)$ (2).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-2x + 6}{x^2 - 2x + 3}$ trên $[2; +\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x + 6)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$.

x	2		$3+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	0

Từ bảng biên thiên ta có $(2) \Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{2}{3}$.

Vậy với $m \geqslant \dfrac{2}{3}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$. □

Bài 27. Tìm m để hàm số $y = x^4 - 8mx^2 + 9m$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 16mx = 4x\left(x^2 - 4m\right)$.

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geqslant 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Hay $4x\left(x^2-4m\right) \geqslant 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x^2}{4}, \forall x \in (2;+\infty)$ (3).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ trên $[2;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{x}{2} > 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow m \leq f(2) \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy với $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.

□

Bài 28. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' < 0, \forall x \in (-\infty;1)$.

Hay $\begin{cases} -m \notin (-\infty;1) \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geqslant 1 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$

Vậy với $m \in (-2;-1]$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định. □

Bài 29. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $[1;+\infty)$. Ta có $y' = \dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2} = \dfrac{m(x^2+4x)+14}{(x+2)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $[1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [1;+\infty)$.

Hay $\dfrac{m(x^2+4x)+14}{(x+2)^2} \leq 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{-14}{x^2+4x}, \forall x \in [1;+\infty)$ (5).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-14}{x^2+4x}$ trên $[1;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{28x+56}{(x^2+4x)^2} > 0, \forall x \in [1;+\infty)$.

Do đó (5) $\Leftrightarrow m \leq f(1) \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{14}{5}$.

Vậy với $m \leq -\dfrac{14}{5}$, hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $[1;+\infty)$. □

Bài 30. Tìm a để hàm số $y = \dfrac{x^2-2ax+4a^2}{x-2a}$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{2a\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2-4ax}{(x-2a)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Hay $\begin{cases} 2a \notin (2;+\infty) \\ x^2-4ax \geqslant 0, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \leq 2 \\ a \leq \dfrac{x}{4}, \forall x \in (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \leq \dfrac{1}{2}$.

Vậy với $m \leq \dfrac{1}{2}$, hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$. □

Bài 31. Tìm m để hàm số $y = x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2+6x+m+1$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geqslant 0, \forall x \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Hay $3x^2+6x+m+1 \geqslant 0, \forall x \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \Leftrightarrow m \geqslant -3x^2-6x-1, \forall x \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ (7).

Xét hàm số $f(x) = -3x^2-6x-1$ trên $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ có $f'(x) = -6x-6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1		-25	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có (7) $\Leftrightarrow m \geqslant -1$.

Vậy với $m \geqslant -1$, hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. □

Bài 32. Tìm a để hàm số $y = x^3-3(a-1)x^2+3(a-2)x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng có hoành độ thỏa $1 \leq |x| \leq 2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $1 \le |x| \le 2 \Leftrightarrow x \in [-2;-1] \cup [1;2]$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6(a-1)x + 3(a-2) = a(-6x+3) + 3x^2 + 6x - 6$.

Hàm số đồng biến trên $[-2;-1]$ và $[1;2]$ khi và chỉ khi $y' \geqslant 0, \forall x \in [-2;-1] \cup [1;2]$.

Trên $[-2;-1]$ ta có $y' \geqslant 0 \Leftrightarrow a(-6x+3) + 3x^2 + 6x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant \dfrac{x^2+2x-2}{2x-1}$ (1).

Trên $[1;2]$ ta có $y' \geqslant 0 \Leftrightarrow a(-6x+3) + 3x^2 + 6x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \le \dfrac{x^2+2x-2}{2x-1}$ (2).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{2x-1}$ trên $[-2;-1] \cup [1;2]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2x^2-2x+2}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \in [-2;-1] \cup [1;2]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow a \geqslant f(-1) \Leftrightarrow 1$ và (2) $\Leftrightarrow a \le f(1) \Leftrightarrow a \le 1$.

Kết hợp ta có $a = 1$, hàm số đồng biến khi $1 \le |x| \le 2$. □

DẠNG 5. Tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc ba có khoảng đơn điệu có độ dài cho trước

Phương pháp giải. Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến ($a < 0$); nghịch biến ($a > 0$) $(x_1; x_2)$ bằng l

- ☑ Bước 1: Tính y'.
- ☑ Bước 2: Tìm điều kiện của tham số để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0. \end{cases} \quad (1)$$

- ☑ Bước 3: Biến đổi $|x_2 - x_1| = l$ (2) thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = l^2$.
- ☑ Bước 4: Sử dụng định lí Vi-ét đưa (2) thành phương trình theo tham số.
- ☑ Bước 5: Giải phương trình, so sánh với điều kiện (1) để chọn kết quả thỏa mãn.

Ví dụ 19. Tìm a để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + ax + a$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + a$; $\Delta'_{y'} = 9 - 3a$.

Với $9 - 3a \le 0 \Leftrightarrow a \geqslant 3 \Rightarrow y' \geqslant 0, \forall \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, mâu thuẫn giả thiết.

Do đó $a \geqslant 3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $9 - 3a > 0 \Leftrightarrow a < 3 \Rightarrow y'$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 khi và chỉ khi $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{4a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy với $a = \dfrac{9}{4}$, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 33. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m+1)x^3 + (2m-1)x^2 - (3m+2)x + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Với $m = -1$, ta có $y = -3x^2 + x - 1$ nên không thể nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4.

Với $m \neq 1$, ta có $y' = (m+1)x^2 + 2(2m-1)x - (3m+2)$.

Suy ra $\Delta'_{y'} = (2m-1)^2 + (m+1)(3m+2) = 7m^2 + m + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó giả sử y' có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{2(2m-1)}{m+1}, x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{3m+2}{m+1}$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 khi và chỉ khi $m > -1$ và $|x_1 - x_2| = 4$.

Bình phương hai vế được $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{4(2m-1)^2}{(m+1)^2} + \dfrac{4(3m+2)}{m+1} = 16$.

Hay $4m^2 - 4m + 1 + 3m^2 + 5m + 2 = 4m^2 + 8m + 4 \Leftrightarrow 3m^2 - 7m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{7 \pm \sqrt{61}}{6}$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = \dfrac{7 \pm \sqrt{61}}{6}$, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4.

□

Bài 34. Tìm m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + (3m+2)x + m - 3$ đồng biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2x + 3m + 2$; $\Delta'_{y'} = 3m + 3$.

Với $m \leq -1$, ta có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > -1$, giả sử y' có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, ta có $x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = -3m - 2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4 khi và chỉ khi $|x_1 - x_2| \leq 4$.

Bình phương hai vế được $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 \leq 16 \Leftrightarrow 12m + 12 \leq 16 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{3}$.

Kết hợp ta có $m \in \left(-1; \dfrac{1}{3}\right]$, hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 35. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 0$. Các giá trị $y(0) = 4$, $y(2) = 8$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;2)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. □

Bài 36. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -1$.

Các giá trị $y(-1) = 4$, $y(1) = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. □

Bài 37. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-1;2]$

Đạo hàm $y' = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Giá trị $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$

Bảng biến thiên

x	-1		$\dfrac{1}{2}$		2
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$; nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ □

Bài 38. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathrm{R}\setminus\{1\}$

Đạo hàm $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ và $y'<0,\forall x\in\mathscr{D}$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^{\pm}}\dfrac{2x-1}{x-1}=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. □

Bài 39. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[1;3]$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{(x-1)(3-x)}}=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{(x-1)(3-x)}\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}\right)}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=2$; $y(2)=2$; y' không xác định tại $x=1$ và $x=3$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^{+}}y=\sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to3^{-}}y=\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		3
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;3)$. □

Bài 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-2x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=3x^2-4x+m\Rightarrow y'\geq0\Leftrightarrow3x^2-4x\geq-m$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $-m \le 3x^2 - 4x = g(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow -m \le \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = g\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow m \ge \dfrac{4}{3}$ □

Bài 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên tập xác định của nó.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Đạo hàm $y' = x^2 + 2(m+1)x - (m+1)$.
Hàm số đồng biến trên tập xác định khi $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x - (m+1) \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 + (m+1) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le -1$. □

Bài 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m-1)x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
Đạo hàm $y' = 3mx^2 + 2mx + m - 1$
Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ta xét các trường hợp sau:

- ☑ Trường hợp $m = 0 \Rightarrow y' = -1 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
  $\Rightarrow m = 0$ không thỏa yêu cầu.
- ☑ Trường hợp $m \ne 0$, khi đó điều kiện để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m(m-1) \le 0 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2m^2 + 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

□

Bài 43. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - (m+1)\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
Đạo hàm $y' = m + (m+1)\sin x \Rightarrow y' \ge 0 \Leftrightarrow m + (m+1)\sin x \ge 0 \quad (1)$
Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ta xét các trường hợp sau:

- ☑ Trường hợp 1: $m = -1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm $\Rightarrow m = -1$ không thỏa yêu cầu.
- ☑ Trường hợp 2: $m > -1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow \sin x \ge -\dfrac{m}{m+1}$
  Để $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-\dfrac{m}{m+1} \le -1 \Leftrightarrow m \ge m + 1$ (vô nghiệm).
- ☑ Trường hợp 3: $m < -1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow \sin x \le -\dfrac{m}{m+1}$
  Để $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-\dfrac{m}{m+1} \ge 1 \Leftrightarrow -m \le m + 1 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}$ (vô nghiệm)

□

Bài 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x + m(\sin x + \cos x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 1 + m(\cos x - \sin x)$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\sqrt{2}m\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $m = 0$, ta có kết luận đúng.

• Nếu $m > 0$, ta có $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq -\dfrac{1}{m}$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \geq -\dfrac{1}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• Nếu $m < 0$, ta có $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq -\dfrac{1}{m}$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq -\dfrac{1}{m} \Leftrightarrow 0 > m \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

◦ Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \leq 0 \\ y' < 0 \ \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Với $m \in (-\infty; -2)$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. □

Bài 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{x + m}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$y' = \dfrac{m^2 - 1}{(x + m)^2}$, $x \neq -m$.

Hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{x + m}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' > 0$ với mọi $x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 2 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \geq -2 \\ m < -1 \end{cases} \\ m > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in [-2; 1) \cup (1; +\infty).$$ □

Bài 47. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -mx^3 + x^2 - 3x + m - 2$ nghịch biến trên $(-3; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -3mx^2 + 2x - 3$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-3; 0)$

$y' \leq 0 \Leftrightarrow -3mx^2 + 2x - 3 \leq 0 \quad (1)$

Do $x \in (-3;0)$ nên $(1) \Leftrightarrow -3m \leq -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \left(\dfrac{3}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-3\right)+1$

Mặt khác $g(x) = \left(\dfrac{3}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-3\right) > 0$ với $\forall x \in (-3;0)$ và $\lim\limits_{x\to -3} g(x) = 0$.

Nên $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow -3m \leq 1 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{3}$

□

Bài 48. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+x+m \neq 0$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2-2x-1+m}{(x^2+x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ nếu: $\begin{cases} -x^2-2x-1+m \leq 0, \forall x \in (-1;1) & (1) \\ x^2+x+m \neq 0, \forall x \in (-1;1) & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow m \leq (x+1)^2$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \leq 0$.

Xét hàm số $g(x) = x^2+x$ trên khoảng $(-1;1)$, có $g'(x) = 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	2

$\Rightarrow$ Phương trình $g(x) = -m$ vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi $\left[\begin{array}{l} -m \geq 2 \\ -m \leq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Với $m \leq -2$ thì số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ □

Bài 49. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3+3x^2-mx-4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2+6x-m$, yêu cầu bài toán tương đương $m \leq 3x^2+6x$, $\forall x \in (-\infty;1] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(-\infty;1]}(3x^2+6x) = -3$ □

Bài 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3-2x^2-(m-1)x+2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x - (m-1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $3x^2 - 4x - m + 1 \geq 0 \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 4x + 1 \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(0;+\infty)} (3x^2 - 4x + 1)$.

Lập bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} (3x^2 - 4x + 1) = -\dfrac{1}{3}$. □

Bài 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải.

Ta có: TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 2 - m}{(x+1)^2}$.

Để $f(x)$ đồng biến trên TXĐ $\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \neq -1$.

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 - m > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$ □

Bài 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$, $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \vee m < -2 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$. □

Bài 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1} - mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} - m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{2x - 1}{\sqrt{(2x-1)^2 + 3}}; \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 3}}$ có $f'(t) = \dfrac{3}{\sqrt{(t^2+3)^3}} > 0; \forall t \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -1$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow m \leq -1$. □

Bài 54. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $\mathscr{D} = [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} \Rightarrow y' = m + \dfrac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$, y' xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

Nhận xét: khi x nhận giá trị trên $(2;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ nhận mọi giá trị trên $(0;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow (m+1)t + m \le 0, \forall t \in (0;+\infty)$ $\left(\text{đặt } t = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \le 0 \\ m + (m+1)\cdot 0 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$ □

Bài 55. 'Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{m - 2\sin x}{1+\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{-2\cos x\left(\sin^2 x + 2 - m\sin x\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$.

Vậy $y' \le 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 - m\sin x \ge 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{\sin^2 x + 2}{\sin x} \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy $\Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2+2}{t} = g(t) \forall t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right)} g(t) = \dfrac{9}{2}$. Vậy $m \le \dfrac{9}{2}$. □

Bài 56. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\cos x + 1}{2\cos x - m}$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

$y = \dfrac{\cos x + 1}{2\cos x - m} \Rightarrow y' = \dfrac{(m+2)sinx}{(2\cos x - m)^2}$.

Vì $\sin x \ne 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} m+2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2} \le 0 \\ \dfrac{m}{2} \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < m \le 0 \\ m > 2 \end{array}\right.$ □

Bài 57. Cho hàm số $y = \dfrac{(m-1)\sin x - 2}{\sin x - m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\sin x \ne m$.

Điều kiện cần để hàm số $y = \dfrac{(m-1)\sin x - 2}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le 0 \end{array}\right.$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2+m-m^2)\cos x}{(\sin x - m)^2}$.

Ta thấy $\dfrac{\cos x}{(\sin x - m)^2} > 0\ \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Để ham số $y=\dfrac{(m-1)\sin x-2}{\sin x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là $\begin{cases} y'<0 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m-m^2<0 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right.$. □

Bài 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=\dfrac{-\left(1+\cot^2 x\right)(m\cot x-1)+m\left(1+\cot^2 x\right)(\cot x-1)}{(m\cot x-1)^2}=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} m\cot x-1\neq 0, \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y'=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}>0, \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 0\vee m\geq 1 \\ 1-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq 0$ □

Bài 59. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi: $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\geq m, \forall x\in\mathbb{R}$. (1).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0, \forall\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. Từ đó, (1) $\Leftrightarrow m\leq -1$. □

Bài 60. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-x^2+2(m-1)x+m+3=g(x)$

Do y là hàm số bậc ba với hệ số $a<0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;3) \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1\leq 0<3\leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1\cdot g(0)\leq 0 \\ -1\cdot g(3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3\geq 0 \\ 7m-12\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq \dfrac{12}{7}$ □

Bài 61. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in [1;+\infty) \end{cases}$

$$x^2+2mx-4m \geq 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+4m \leq 0 \\ \begin{cases} m^2+4m > 0 \\ -m + \sqrt{m^2+4m} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \leq m \leq 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m \geq -1 \\ m \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $m > -1$ ta được $-1 < m \leq \dfrac{1}{2}$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(1;+\infty)$?

A. $y=x^4+2x^2+1$.
B. $y=-x^3+3x^2-3x+1$.
C. $y=\dfrac{x^3}{2}-x^2-3x+1$.
D. $y=\sqrt{x-1}$.

Lời giải.

Ta có: $y=-x^3+3x^2-3x+1 \Rightarrow y'=-3x^2+6x-3$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x-3=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'			$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+\dfrac{3}{4}$.

A. Đồng biến trên $(-2;3)$.
B. Nghịch biến trên $(-2;3)$.
C. Nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
D. Đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

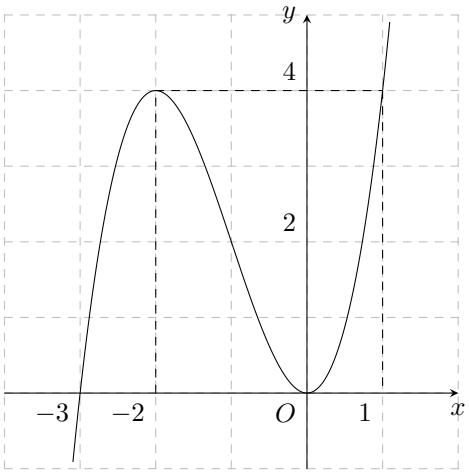
x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{97}{12}$	$\searrow$	$-\dfrac{51}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số.

A. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.
B. $(-3;+\infty)$.
C. $(-\infty;-3)$ và $(0;+\infty)$.
D. $(-2;0)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y=x^4-8x^2-4$. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng.

A. $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.
B. $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.
C. $(-2;0)$ và $(0;2)$.
D. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-16x$.

Ta có: $y'<0 \Leftrightarrow 4x^3-16x<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 0<x<2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$.
B. $(-1;1)$.
C. $(-\infty;0)$.
D. $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Ta có $y'<0, \forall x\in(-\infty;-1)\cup(0;1) \Rightarrow y'<0, \forall x\in(-\infty;-2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-4$ có bảng biến thiên sau, tìm a và b.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	a	↗	0	↘	b	↗	$+\infty$

A. $a=+\infty; b=2$. **B**. $a=-\infty; b=-4$. **C**. $a=-\infty; b=1$. **D**. $a=+\infty; b=3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính giới hạn của hàm số khi x tiến đến $-\infty$ để tìm a và tính giá trị của hàm số tại $x=0$ để tìm b.

Cách giải:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty, y(0)=-4 \Rightarrow a=-\infty; b=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $y=x^3-3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{x+1}{-x+2}=\dfrac{3}{(-x+2)^2}>0, \forall x\neq 2$. Do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$.

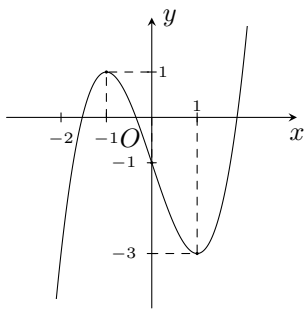
Chọn đáp án C □

Câu 10. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$. **B.** $(-1; 2)$.

C. $(-2; -1)$. **D.** $(-1; 1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Hàm số $y = \dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-5; 1)$. **B.** $(1; 4)$. **C.** $(-\infty; +\infty)$. **D.** $(-6; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ta có $y' = \dfrac{11}{(x+4)^2} > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}$.

Do đó hàm số $y = \dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và $(-4; \infty)$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 20$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(3; +\infty)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(-3; 1)$.

Lời giải.

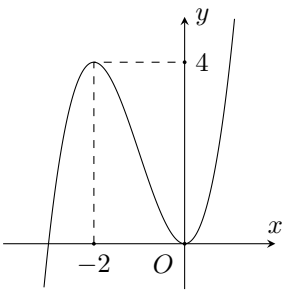
Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$; $y' > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 14.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số.



A. $(3; +\infty)$. **B**. $(-\infty; 1)$ và $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. **D**. $(-2; 0)$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề đúng là

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

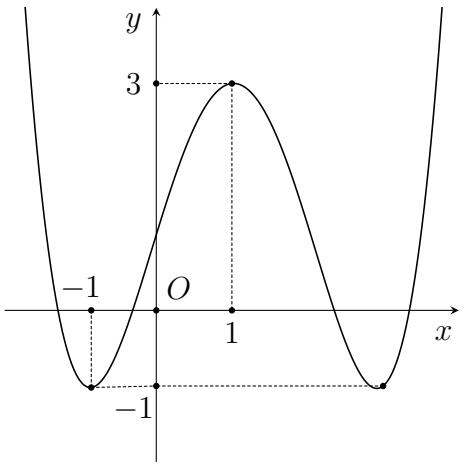
Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty; -1)$. **B**. $(0; 1)$. **C**. $(1; +\infty)$. **D**. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng cách đọc đồ thị hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

Xét từ trái qua phải trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị đi xuống thì hàm số nghịch biến trên$(a;b)$, nếu đồ thị đi lên thì hàm số đồng biến trên$(a;b)$.

Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy: Xét từ trái qua phải thì đồ thị hàm số đi lên trên khoảng $(-1;1)$.

Nên hàm số đồng biến trên $(-1;1)$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{8x-5}{x+3}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có $y'=\dfrac{29}{(x+3)^2}>0, \forall x\in\mathscr{D}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(0;1)$. **B**. $(-1;0)$. **C**. $(-\infty;1)$. **D**. $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B**. $(0;3)$. **C**. $(-1;0)$. **D**. $(0;1)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;+\infty)$. **B**. $(-\infty;0)$. **C**. $(-1;0)$. **D**. $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ nên chọn đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 21.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Do đó, khẳng định "Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$" sai.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Hàm số $y=x^4-x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B**. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C**. $(0;+\infty)$. **D**. $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=4x^3$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	1	↘		↗	$+\infty$
	0				-3		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 24. Hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+20$ đồng biến trên khoảng

A. $(-3;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-6x+9=-3(x^2+2x-3)$.

Khi đó $y'\geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 1 \Leftrightarrow x\in(-3;1)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 25.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	0	↘		↗	0	↘	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 26. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên toàn trục số?

A. $y=x^3-3x^2+4$. **B.** $y=-x^4-2x^2-3$.

C. $y=x^3+3x$. **D.** $y=-x^3+3x^2-3x+2$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3\left(x^2-2x+1\right)=-3\left(x-1\right)^2\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$ nghịch biến trên toàn trục số.

Chọn đáp án D ☐

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải.

① $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

② Bảng biến thiên

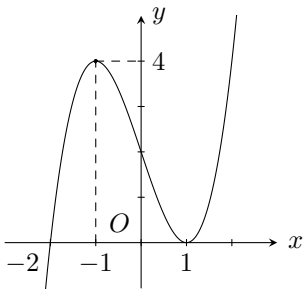
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 28.

Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. Hàm $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Trên $(-1;1)$ hàm $y=f(x)$ luôn tăng.

D. Hàm $y=f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có

☑ $f'(x)>0$ khi $-2<x<1$ hoặc $x>1$.

☑ $f'(x)<0$ khi $x<-2$.

Do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$, $(1;+\infty)$; nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	6	↘	$-\infty$

A. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$.

C. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;3)$; hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; -2)$. **B**. $(0; +\infty)$. **C**. $(-2; +\infty)$. **D**. $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có : $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$. **B**. $(-2; 2)$. **C**. $(-\infty; 3)$. **D**. $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa bào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	-1	↗	11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)\,; (11; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 11)$.

C. Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)\,; (1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1);(1;+\infty)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-1;0);(0;1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1);(1;+\infty)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-1;0);(0;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)$.

B. Nếu $f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)$.

D. Nếu $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

Lời giải.

Nếu $f'(x)>0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Hàm số $y=x^3-3x^2+5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$.

B. $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;2)$.

D. $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

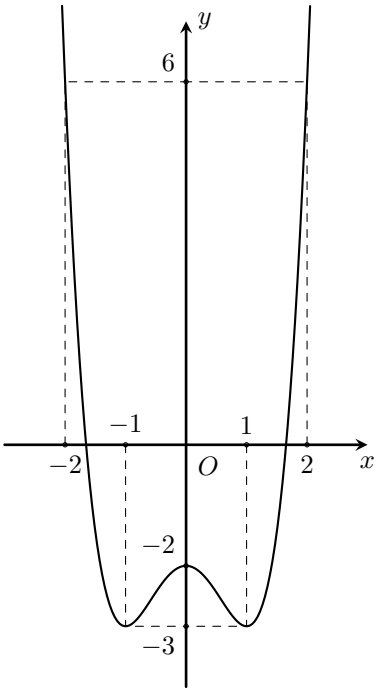
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 35.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Hàm số nào dưới đây luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 2018$. **B**. $y = x^4 + x^2 + 1$. **C**. $y = x + \sin x$. **D**. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x + \sin x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 1 + \cos x$.

Vì $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Dấu đẳng thức xảy ra tại đếm được điểm nên hàm số luông đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. $(-\infty;0)$. **B**. $(0;2)$.

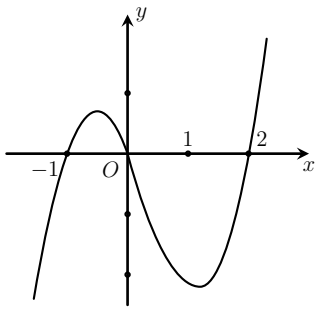
C. $(-2;0)$. **D**. $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y = f(x)$?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)>0, \forall x\in(-1;0)$. Suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{3-x}{2x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

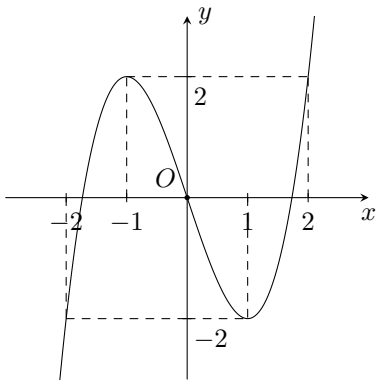
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-5}{(2x-1)^2}<0, \forall x\in\mathscr{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khẳng định nào **sai**?



A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào đồ thị hàm số xác định các khoảng đơn điệu của hàm số.

Cách giải: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+5x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-6x+5$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$. Dấu của y':



Từ dấu của y' suy ra hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+5x+2019$ nghịch biến trên $(1;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Hàm số $y=2x^4+3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Ta có $y'=8x^3$.

$y'<0\Leftrightarrow x^3<0\Leftrightarrow x<0$.

Chọn đáp án D □

Câu 43.

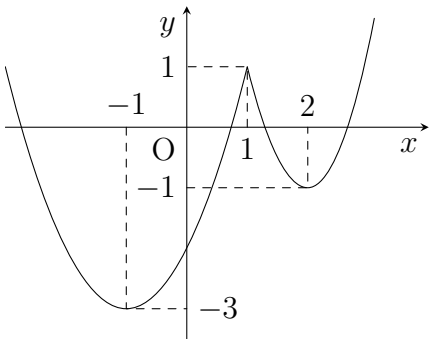
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số $y=f(x)$?

A. Đồng biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Đồng biến trên khoảng $(0;1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên miền $(-1;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

A. $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-3x^2+6x$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$. Tìm khoảng nghịch biến của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

A. $(-\infty;0)$ và $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	1	$-$	2	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. $(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(ad\neq bc)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số.

Công thức tính nhanh đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Cách giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{2\cdot(-1) - 1\cdot 1}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **B**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D**. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B**. $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C**. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D**. $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 8x^3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(0; 2)$.
C. $(0; 4)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 51.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. $(1; +\infty)$. **B.** $(0; 1)$.
C. $(-\infty; 3)$. **D.** $(-4; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên miền $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 5)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho các hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}, y = x^4 + 2x^2 + 2, y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$.

$y = x^4 + 2x^2 + 2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) \Rightarrow$ hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.

$y = -x^3 + x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 2x - 3 = -3(x^2 - \dfrac{2}{3}x + 1) = -3\left[(x - \dfrac{1}{3})^2 + \dfrac{8}{9}\right] < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

nên hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\sqrt{x^2-3x+2}$. **B.** $y=x^4+x^2+1$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y=x^3+5x+13$.

Lời giải.

Hàm số $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ có tập xác định là $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Hàm số $y=x^4+x^2+1$ là hàm số bậc bốn trùng phương.

Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Các hàm số trên đều không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đồng thời với $y=x^3+5x+13$ thì $y'=3x^2+5>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Hàm số $f(x)=-x^3+3x^2+9x+1$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải.

$f'(x)=-3x^2+6x+9>0\Leftrightarrow -1<x<3$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 56.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

x	-∞		0		2		+∞
y'		−	0	+	0	−	
y	+∞	↘	1	↗	5	↘	−∞

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;3)$. **B**. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;3)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;4)$. **D**. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta dễ dàng nhận thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Xác định số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

A. 3. **B**. 6. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x_1=-1$ và $x_2=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2-x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

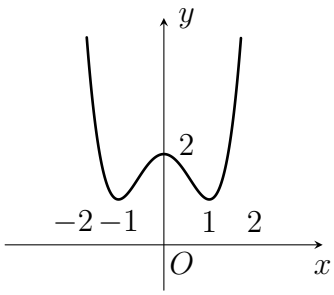
Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{3}{(2-x)^2}>0, \forall x\in\mathscr{D}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án B □

Câu 61.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $f(x)$ đồng biến trên các khoảng



A. $(-\infty;-1),(1;+\infty)$.

B. $(-\infty;-1),(-1;0)$.

C. $(-1;0),(1;+\infty)$.

D. $(-1;0),(0;1)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1;0),(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{1+x}{2-x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Lời giải.

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(2-x)^2}>0,\ \forall x\neq 2$.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số khoảng đồng biến của hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B**. 2. **C**. 1. **D**. vô số.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ nên nó sẽ đồng biến trên bất kì khoảng nào là tập con của một trong hai khoảng này.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y'<0,\ \forall x\in(-2;0)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(-1;7)$. **C**. $(1;3)$. **D**. $(-5;1)$.

Lời giải.

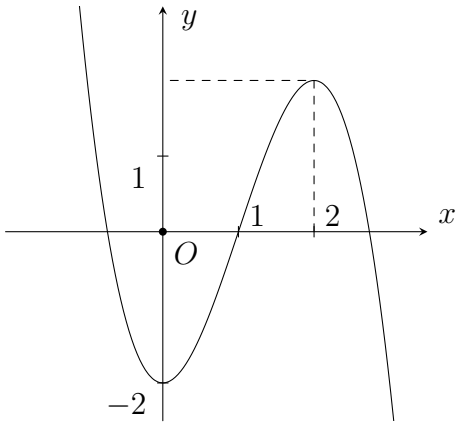
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ do đó cũng đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 67.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B**. $(-2;2)$. **C**. $(-\infty;0)$. **D**. $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Khoảng đồng biến là $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hàm số $y=\dfrac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H). Số đường tiệm cận của (H) là

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Câu 69. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $y\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0$ khi và chỉ khi $x=0$ nên $y=f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Ta có $y'=\dfrac{5}{(x+3)^2}>0,\ \forall x\in\mathscr{D}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ nên khẳng định hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ là **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;1)$. **B**. $(0;+\infty)$. **C**. $(-\infty;-2)$. **D**. $(-2;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' < 0$, $\forall x \in (-2;0)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	‖	$+\infty$		↗	$+\infty$
		$-\infty$	‖		2		

Hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;2)$. **B**. $(0;2)$. **C**. $(2;+\infty)$. **D**. $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0 : +\infty)$. **B**. $(0; 1)$. **C**. $(-\infty; 0)$. **D**. $(-1; 1)$.

Lời giải.

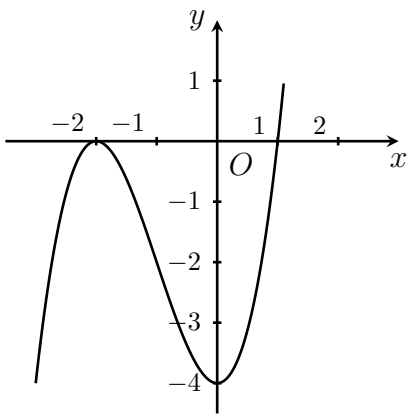
Dựa vào BBT ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 75.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$. **B**. $(-\infty; -2)$. **C**. $(-1; 0)$. **D**. $(-2; 1)$.



Câu 76. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$y' = -\dfrac{-1}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$. **B**. $(0; 1)$. **C**. $(-1; 1)$. **D**. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên khoảng nghịch biến là $(0; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. **B**. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **C**. $(0; +\infty)$. **D**. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^3$, suy ra

$y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên (như hình bên)

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 79. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2 + x$. **B**. $y = x^4 + x^2$. **C**. $y = x^3 + x$. **D**. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Câu 80. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \quad \forall x \neq 1$.

Từ đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$. **B**. $(0;+\infty)$. **C**. $(-\infty;-2)$. **D**. $(-2;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;4)$. **B**. $(-\infty;-1)$. **C**. $(2;+\infty)$. **D**. $(-1;2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số tăng trên khoảng $(-1;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 84. Hàm số $y=-x^3+3x-5$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B**. $(-1;1)$. **C**. $(1;+\infty)$. **D**. $(-\infty;1)$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-1;0)$. **B**. $(-1;1)$. **C**. $(-\infty;-1)$. **D**. $(0;+\infty)$.

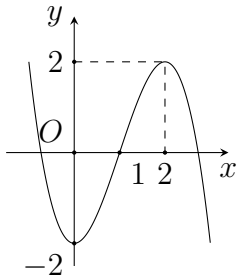
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 86.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-2;2)$. **B**. $(-\infty;0)$. **C**. $(0;2)$. **D**. $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Hàm số $y=x^2\ln x$ đạt cực trị tại điểm

A. $x=\sqrt{\mathrm{e}}$. **B**. $x=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. **C**. $x=0$. **D**. $x=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. Do đó

$$y'=0\Leftrightarrow x(1+2\ln x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Mặt khác y' đổi dấu khi x đi qua $x=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ nên $x=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B**. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2);(2;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2);(2;+\infty)$. **D**. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải.

① Sai vì khoảng $(-1;3)$ không nằm trong tập xác định.

② Sai vì trong khoảng $(2;+\infty)$ thì khoảng $(2;3)$ hàm nghịch biến.

③ Đúng.

④ Sai vì trong khoảng $(-1;0)$ hàm nghịch biến.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;-1)$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-4;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng xác định của chính nó?

A. $y=x^3+x^2-x-1$.

B. $y=x^3-x^2+2x-1$.

C. $y=x^4-2x^2+3$.

D. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^3-x^2+2x-1$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-2x+2=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu đạo hàm suy ra $y' < 0, \forall x \in (0; 2) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đồng biến trên khoảng?

A. $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
B. $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.
C. $(-1; 3)$ và $(3; +\infty)$.
D. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3. \end{array}\right.$

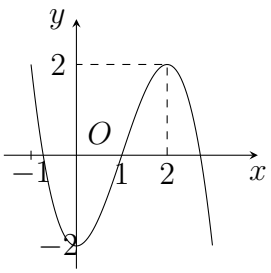
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 94.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.
B. $(-2; 2)$.
C. $(2; +\infty)$.
D. $(-\infty; 0)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$. Mệnh đề đúng là

A. Hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x + 1)^2} > 0, \quad \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải.

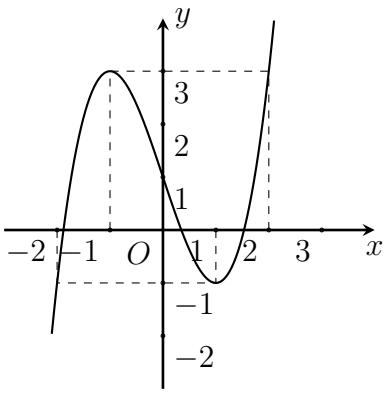
Theo bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 97.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-1;+\infty)$. **B**. $(-1;1)$. **C**. $(-\infty;1)$. **D**. $(-\infty;-1)$.



Lời giải.

Trên khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số "đi lên" từ trái sang phải nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên tập $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

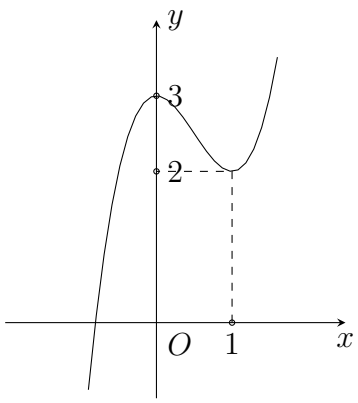
Chọn đáp án D □

Câu 99. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **B**. $y=x^3+3x+5$. **C**. $y=x^4+2x^2+3$. **D**. $y=\tan x$.

Câu 100.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. B	5. D	6. B	7. D	8. A	9. C	10. C
11. A	12. B	13. D	14. C	15. D	16. B	17. D	18. A	19. C	20. D
21. D	22. D	23. A	24. A	25. C	26. D	27. C	28. D	29. B	30. D
31. A	32. D	33. D	34. D	35. A	36. C	37. B	38. A	39. A	40. B
41. D	42. D	43. D	44. C	45. D	46. C	47. C	48. D	49. A	50. B
51. A	52. B	53. B	54. D	55. C	56. C	57. D	58. B	59. C	60. B
61. C	62. C	63. D	64. D	65. D	66. A	67. A	68. B	69. B	70. B
71. D	72. D	73. B	74. B	75. C	76. D	77. B	78. C	79. C	80. A
81. C	82. D	83. B	84. B	85. A	86. A	87. D	88. C	89. C	90. D
91. B	92. C	93. D	94. A	95. B	96. A	97. D	98. D	99. B	100. B

2 Mức độ nhận thông hiểu

Câu 1. Giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{\cot x}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $\begin{bmatrix} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{bmatrix}$. **B.** $1\le m<2$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m>2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2-m}{(\cot x-m)^2}\cdot(\cot x)'=\dfrac{2-m}{(\cot x-m)^2}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.
Khi $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cot x\in(0;1)$ Để hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\begin{cases}\cot x-m\neq 0\\ y'>0\end{cases},\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin(0;1)\\ 2-m>0,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\ 1\le m<2.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong hai hàm số $f(x)=x^4+2x^2+1$ và $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ Hàm số nào nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. Không có hàm số nào cả. **B.** Chỉ $g(x)$.

C. Cả $f(x)$ và $g(x)$. **D.** Chỉ $f(x)$.

Lời giải.

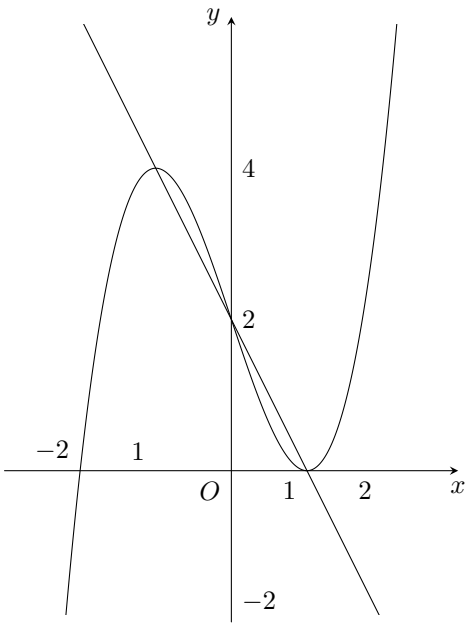
Ta có $f(x)=x^4+2x^2+1$ xác định trên $\mathbb{R}$, $f'(x)=4x^3+4x$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
Hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ xác định trên khoảng $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ và $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.
Do đó hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị của hàm $y=f'(x)$, $y=g'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y=f(x)-g(x)$.

A. $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

C. $(1;+\infty)$ và $(-2;-1)$. **D.** $(-2;+\infty)$.



Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) - g'(x)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta có BBT

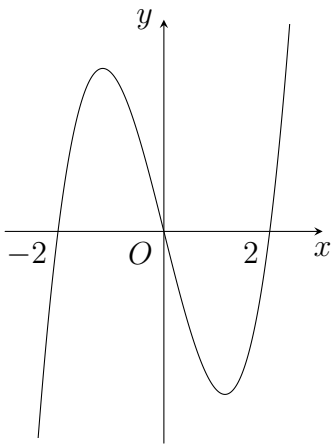
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

KL: Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$, ta có với $x \in (0;2)$, $f'(x) < 0$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0, \forall x\in\mathscr{D}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+20$ đồng biến trên các khoảng nào?

A. $(-3;1)$. **B**. $(-\infty;1)$. **C**. $(-3;+\infty)$. **D**. $(1;2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $D=R$.

$y'=-3x^2-6x+9$

$y'>0\Leftrightarrow -3x^2-6x+9>0\Leftrightarrow -3<x<1$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-3;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2+2$. Tìm khoảng đồng biến của hàm số đã cho?

A. $(0;2)$. **B**. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$.

C. $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **D**. $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$$y'=-x^3+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\\x=0\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2\left(2m+3\right)x+4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-1\leq m\leq 3$. **B**. $-3<m<1$. **C**. $-1<m<3$. **D**. $-3\leq m\leq 1$.

Lời giải.

Ta có $y'=-x^2+2mx-2m-3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'=-x^2+2mx-2m-3\leq 0\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\leq 0\Leftrightarrow m^2-2m-3\leq 0\leq\Leftrightarrow -1\leq m\leq 3$. Chọn A.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho các hàm số $f(x)=x^4+2018$, $g(x)=2x^3-2018$ và $h(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Trong các hàm số đã cho, có tất cả bao nhiêu hàm số ***không có*** khoảng nghịch biến?

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

$*f(x)=x^4+2018$ (TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x)=4x^3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$, do đó hàm số không thỏa mãn đề bài.

$*g(x)=x^3-2018$ (TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$) $\Rightarrow g'(x)=6x^2\geq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số thỏa mãn đề bài.

$*h(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$) $\Rightarrow h'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$ $(\forall x\in\mathscr{D})$.

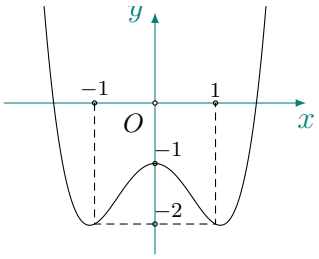
Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$, do đó hàm số thỏa mãn đề bài.

Vậy có hai hàm số ***không có*** khoảng nghịch biến.

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây



A. $(0;1)$. **B**. $(-\infty;-1)$. **C**. $(-1;1)$. **D**. $(-1;0)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in(-\infty;-5)$. **B**. $m\in[5;2)$. **C**. $m\in(2;+\infty)$. **D**. $m\in(-\infty;2]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4(m-1)x$.

☑ **Trường hợp 1**: $m\leq 1$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

☑ **Trường hợp 2**: $m>1$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m-1}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m-1}$		0		$\sqrt{m-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\sqrt{m-1})$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(\sqrt{m-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Suy ra $m \in (1;2]$ thì hàm số đồng biến trên $(1;3)$.

Vậy $m \in (-\infty;1] \cup (1;2] = (-\infty;2]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(1;3)$.

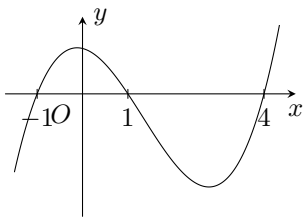
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$.

Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $y=f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

A. 5. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.



Lời giải.

Ta có $y'=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2x.f'\left(x^2\right)$. Ta có

$$y'<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ f'\left(x^2\right)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ f'\left(x^2\right)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ x^2<-1 \vee 1<x^2<4 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ -1<x^2<1 \vee x^2>4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2 \\ x<-2 \vee -1<x<0 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có 3 khoảng nghịch biến.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$. **B**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. **D**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ nên đồng biến trên $(-\infty;-3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B**. $y=\sin x$. **C**. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D**. $y=-x^3-2x$.

Lời giải.

Đáp án A sai vì hàm bậc bốn trùng phương không nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (nó luôn có cực trị).

Đáp án B sai vì hàm $y=\sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

Đáp án C sai và hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Đáp án D đúng vì hàm số $y=-x^3-2x$ có nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+4x-5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $0<m<1$. **B**. $-1\leq m\leq 1$. **C**. $0\leq m\leq 1$. **D**. $˘1<m<1$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-4mx+4$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'=(-2m)^2-4\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant m\leqslant 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $y=x^4-x^2+3$. **B**. $y=\dfrac{x-2}{2x-3}$. **C**. $y=-x^3+x-1$. **D**. $y=\dfrac{3-x}{x+1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm các khoảng đồng biến của mỗi hàm số ở các đáp án và đối chiếu kết quả.

Cách giải:

a) Xét hàm số $y=x^4-x^2+3$.

Ta có $y'=4x^3-2x=2x\left(2x^2-1\right)$

Khi đó $y'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<0\\ x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Nên hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ và $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right) \supset (1;+\infty)$, chúng ta nhận hàm số này.

b) Xét hàm số $y=\dfrac{x-2}{2x-3}$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{1}{(2x-3)^2}>0, \forall x \in \left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Cả hai khoảng này đều không chứa khoảng $(1;+\infty)$ nên không nhận hàm số này.

c) Xét hàm số $y=-x^3+x-1$

$\Rightarrow y'=-3x^2+1>0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Khoảng này không chứa khoảng$(1;+\infty)$ nên loại hàm số này.

d) Xét hàm số $y=\dfrac{3-x}{x+1}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{-4}{(x+1)^2}<0, \forall x \in (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

Do đó hàm số không đồng biến.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17.

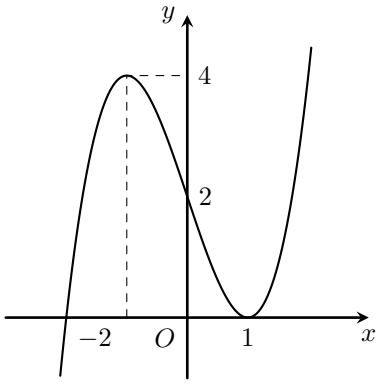
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗		↗	$+\infty$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$$

luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **B**. $-3\le m\le 1$.

C. $m\le 1$. **D**. $-3<m<1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$.

Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$\begin{aligned} y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m^2+2m-3\le 0 \\ &\Leftrightarrow -3\le m\le 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B**. $(-2;0)$. **C**. $(0;+\infty)$. **D**. $(-2;2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	2	↘	0

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^3+x^2-10x+1$. **B**. $y=x^4+2x^2-5$.

C. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **D**. $y=\cot 2x$.

Lời giải.

Ta xét $y=-x^3+x^2-10x+1$ có $y'=-3x^2+2x-10<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y = -x^3 + x^2 - 10x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;5)$. **B.** $(-\infty;5)$.

C. $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên miền $(-1;5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0;3]$.

Ta có $y' = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x}}$. Xét $y' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{3}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	0

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $-\dfrac{5}{4} \le m \le 1$. **B.** $-\dfrac{2}{7} \le m < 1$. **C.** $-\dfrac{7}{2} \le m < 1$. **D.** $-\dfrac{2}{7} \le m \le 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x - (2m+1)$.

+ Xét $m = 1$. Ta có $y' = -3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên tập xác định.

+ Xét $m \neq 1$. Để hàm số trên nghịch biến trên tập xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1<0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 3(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 7m^2 - 5m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \leq m < 1.$$

Vậy, với $-\frac{2}{7} \leq m < 1$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tìm tập các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + (m-1)\,x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 + 2x + m - 1$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \leq 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m < -3$. **D.** $m \leq -3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Có $y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$.

Hàm số nghịch bến trên mỗi khoảng của tập xác định $\Leftrightarrow \frac{m-1}{(x+1)^2} < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(-2x+m)^2}$. Hàm số $y = \frac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$$ Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1;0;1\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)\,x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-3 \leq m \leq 1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$. **D.** $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào BBT để kết luận tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách giải:

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (4m-8)x + 2$ nghịch biến trên toàn trục số?

A. 9. **B**. 7. **C**. Vô số. **D**. 8.

Lời giải.

$y' = -x^2 - 2(m+1)x + 4m - 8$. Hàm số nghịch biến trên toàn trục số $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 \le 0 \Leftrightarrow -7 \le m \le 1.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7; -6; \ldots; -1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 0)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải.

① Ta có $y' = -x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

② Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$. **B.** $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$.

C. $y = x^4 + x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Cả bốn hàm số trong bốn phương án đều có tập xác định là $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ khi $x = 1$. Vậy hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$ có $y' = -3x^2 + 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ có $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$ và $y' > 0$ khi $x \in (0; +\infty)$. Vậy hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ chỉ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

☑ Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có $y' = 3x^2 + 6x$ và $y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Vậy hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m + 15)x + 7$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3 \le m \le 5$. **B.** $m \le -3$ hoặc $m \ge 5$.

C. $-3 < m < 5$. **D.** $m < -3$ hoặc $m > 5$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m + 15$.

Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

$$x^2 - 2mx + 2m + 15 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 2m - 15 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 5.$$

Vậy $-3 \le m \le 5$ hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+15)x + 7$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0; +\infty)$. **B**. $(-1; 1)$. **C**. $(-\infty; 0)$. **D**. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2+1)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow -4x(x^2+1) > 0 \Leftrightarrow -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \ne 1$.

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x + \dfrac{3}{4}$

A. đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. **B**. nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$. **D**. đồng biến trên $(-2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - x - 6$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2; 3)$ và đồng biến trên $(-\infty; -2)$; $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Trong các hàm số sau, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $y = x^4 + 3x^2 - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$.

C. $y = x^4 - 3x^2 - 5$. **D.** $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ có $y' = 3x^2 - 6x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 2$ luôn đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(0; 4)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y = -x^3 + 6x^2 + 2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 12x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 = 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	34	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. $-2 \le m < -1$ hoặc $m > 1$. **B.** $m \le -1$ hoặc $m > 1$.

C. $-1 < m < 1$. **D.** $m < -1$ hoặc $m \ge 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \ \forall x \in (2; +\infty) \\ -m \notin (2; +\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ -m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hàm số có $f(x)$ đạo hàm trên khoảng I. Xét các mệnh đề sau

(I) Nếu$f'(x) < 0 \quad \forall x \in$ I, thì hàm số nghịch biến trên I.

(II) Nếu $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in I$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I) thì hàm số nghịch biến trên I.

(III) Nếu $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in I$ thì số nghịch biến trên khoảng I.

(IV) Nếu $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ tại vô số điểm trên I thì hàm số $f(x)$ không thể nghịch biến trên khoảng I.

Trong các mệnh đề trên. Mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào **sai**?

A. (I), (II) và (IV) đúng, còn (III) sai.
B. (I), (II), (III) và (IV) đúng.
C. (I) và (II) đúng, còn (III) và (IV) sai.
D. (I), (II) và (III) đúng, còn (IV) sai.

Lời giải.

☑ Câu (III) sai vì thiếu dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên I.

☑ Câu (IV) sai vì có thể vô số điểm trên I xuất hiện rời rạc thì vẫn có thể nghịch biến trên khoảng I.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm $y' = x^2(x-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên R.
B. Hàm số đồng biến trên $(0;2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (a;b)$.
Hàm số nghịch biến trên$(a;b) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (a;b)$.
Giải phương trình $y' = 0$ và lập BBT, từ đó chọn đáp án đúng.

Cách giải: Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ và đồng biến trên $(2;+\infty)$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B**. Vô số. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 + m(\cos x - \sin x) = 3 + m\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{\mathbb{R}} y' \ge 0 \Leftrightarrow 3 - |m\sqrt{2}| \ge 0 \Leftrightarrow |m| \le \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m \in \{0; -1; 1; -2; 2\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án D □

Câu 44.
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$.
C. $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên ta thấy $y'>0, \forall x>1$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án D □

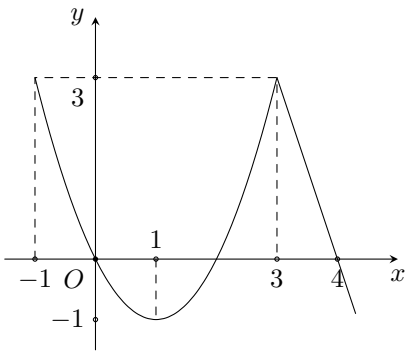
Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=2f(-x)$ đồng biến trên khoảng
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.
Ta có $y'=-2f'(-x)$.
Mà $f'(x)=x^2(x^2-1)\Rightarrow y'=-2(-x)^2[(-x)^2-1]=-2x^2(x^2-1)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1.\end{array}\right.$$

Kết luận hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 46.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(2;4)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-1;4)$.

Lời giải.
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trong $(1;3)$.
Từ đó suy ra trong khoảng $(2;3)$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.
$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0$, $\forall x\in(-\infty;-1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0,\ \forall x > 0$. Biết $f(1) = 2$, hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

A. $f(2) + f(3) = 4$. **B.** $f(-1) = 2$.

C. $f(2) = 1$. **D.** $f(2018) > f(2019)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Suy ra $2 = f(1) < f(2) < f(3)$ và $f(2018) < f(2019)$.
Do đó các khẳng định $f(2) + f(3) = 4$; $f(2) = 1$; $f(2018) > f(2019)$ là sai.
Vậy khẳng định $f(-1) = 2$ có thể xảy ra.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Số nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ là:

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Xem số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ với đường thẳng $y = 0$ Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$;
$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Bảng xét dấu:
Dựa vào bảng biến thiên thì số nghiệm là 2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

A. $m < -3$. **B.** $m \leq -3$. **C.** $m \leq 1$. **D.** $m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ta có $y' = \dfrac{-1 + m}{(x + 1)^2}$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} & y' = \frac{-1 + m}{(x + 1)^2} < 0; \forall x \in \mathscr{D} \\ \Leftrightarrow\ & -1 + m < 0 \\ \Leftrightarrow\ & m < 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x + 1}$ (với m là tham số) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-2

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Với $m = 3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Với $m = 9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Với $m = 6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác đinh.

D. Với $m = -2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác đinh.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m+4}{(x+1)^2}$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -2 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn $m > -4$).

Vậy $m = -2$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Xét hàm số $y = \sqrt{4 - 3x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$.

C. Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1; 1]$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

Câu 53. Trong bốn hàm số sau:$(1)y = \sin 2x; (2)y = \cos 4x; (3)y = \tan 2x; (4)y = \cot 3x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$?

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Câu 54. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$. **B**. $(1; +\infty)$. **C**. $(\infty; -1)$. **D**. $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $f'(x)>0$ với mọi x thuộc $(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $f'(x)\geq 0$ với mọi x thuộc $(a;b)$.

D. Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

Lời giải.

Mệnh đề "Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $f'(x)>0$ với mọi x thuộc $(a;b)$" là mệnh đề **sai** vì $f'(x)$ có thể bằng 0.

Xét hàm $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2\geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nhưng $f'(x)=0$ khi $x=0\in(-1;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x-\sin^2 x$. **B**. $y=\cot x$. **C**. $y=\sin x$. **D**. $y=-x^3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x-\sin^2 x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=1-2\sin x\cdot\cos x=1-\sin 2x\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó, hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y'=3-\dfrac{m^2+3m}{(x+1)^2}=\dfrac{3(x+1)^2-(m^2+3m)}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&y'>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\\ \Leftrightarrow&3(x+1)^2>m^2+3m,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\\ \Leftrightarrow&m^2+3m\leq 0\\ \Leftrightarrow&-3\leq m\leq 0.\end{aligned}$$

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0\}$. Vậy số giá trị nguyên của m thỏa mãn bài là 4.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^3-x-2$. **B**. $y=\dfrac{x-1}{x+3}$.

C. $y=x^4+2x^2+3$. **D**. $y=x^3+x^2+2x+1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^3+x^2+2x+1$. Ta có $y'=3x^2+2x+2=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nên hàm số $y=x^3+x^2+2x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4$ là

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

C. $(2; +\infty)$. **D.** $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên tập xác định?

A. $y = \dfrac{2 - 3x}{1 + 5x}$. **B.** $y = x^4 + 3x^2 + 18$.

C. $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 20$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 20$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 6x + 9 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 20$ đồng biến trên tập xác định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{x - m}{(m-1)x - 2}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

A. $m \in (-1; 2)$. **B.** $m \in (-1; 3]$. **C.** $m \in [1; 2)$. **D.** $m \in (1; 2]$.

Lời giải.

Với $m = 1$ thì $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Với $m \neq 1$. Ta có $y' = \dfrac{m^2 - m - 2}{[(m-1)x - 2]^2}$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - m - 2}{[(m-1)x - 2]^2} < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ \dfrac{2}{m-1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy $m \in [1; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62.

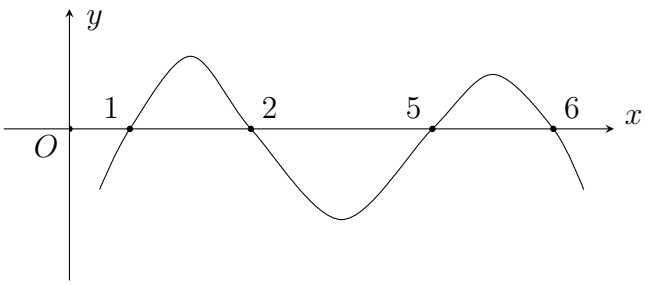
Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ (đồ thị $f'(x)$ cắt Ox ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng:

A. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

B. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

C. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

D. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		5		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trong khoảng $(5;6)$.

Chọn đáp án B □

Câu 63.

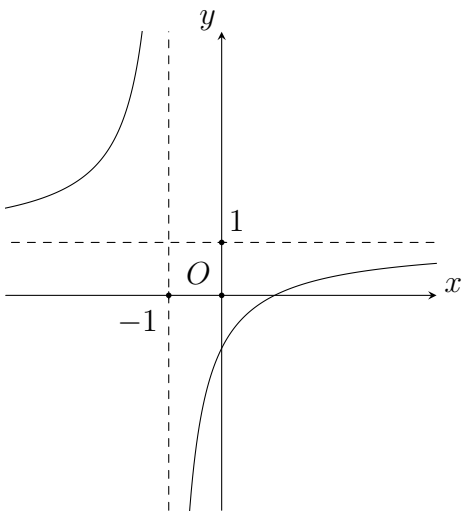
Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên tập xác định.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{mx^2}{2} + 2x + 2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-2\sqrt{2} \leqslant m \leqslant 2\sqrt{2}$.

B. $-2\sqrt{2} \leqslant m$.

C. $m \leqslant 2\sqrt{2}$.

D. $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2 + mx + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \Delta \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 8 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

A. $(-3; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
C. $(-\infty; -3)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^4 + x$. **B.** $y = x^4 - x$. **C.** $y = (x-1)^{2018}$. **D.** $y = (x-1)^{2019}$.

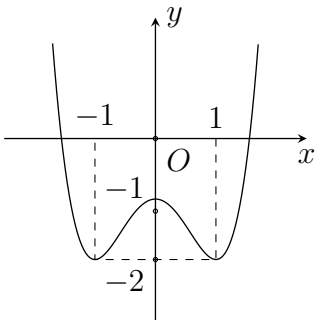
Lời giải.

Xét $y = (x-1)^{2019}$. TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $y' = 2019(x-1)^{2018} \geq 0$ và chỉ bằng 0 tại $x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 67.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $\begin{cases} a = b;\ c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a > 0;\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a=b=0;\ c>0 \\ a>0;\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=b=0;\ c>0 \\ a>0;\ b^2-3ac\ge 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp $a=0$ và $a\neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y=(x^2-1)^2-3x+2$. **D.** $y=\tan x$.

Lời giải.

Ta có phân tích các hàm số như sau

☑ Hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, xác định trên $\mathbb{R}$, ta tính đạo hàm như sau

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lưu ý. Hàm $y=\tan x$ tuần hoàn chu kì π, nên không thể luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)^2(x-2)^3(3-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu y' như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Lời giải.

y' không xác định tại $x = 3 \in (1;4)$ nên khẳng định: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Lời giải.

$y' = -x^2 + 6x - 5;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{28}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(5;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-1;3)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1), (3;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3), (1;+\infty)$; nghịch biến trên $(-3;1)$.
C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1), (3;+\infty)$; nghịch biến trên $(-1;3)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-1;3)$; nghịch biến trên $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	22	$\searrow$	$-\infty$

Chọn đáp án A □

Câu 74. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
B. $y = (x^2-1)^2 - 3x + 2$.
C. $y = \dfrac{x}{x+1}$.
D. $y = \tan x$.

Lời giải.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{x^2+1}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}>0(\forall x\in\mathbb{R}).$$

Nên hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Hàm số $y=x^4-2x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **B.** $y=-x^4-x^2-1$.

C. $y=-x^3+x^2-3x+11$. **D.** $y=\cot x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=-x^3+x^2-3x+11 \Rightarrow y'=-3x^2+2x-3<0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y=-x^3+x^2-3x+11$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+25}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. 11. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-25}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-25<0 \\ -m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5<m\leq -1$.

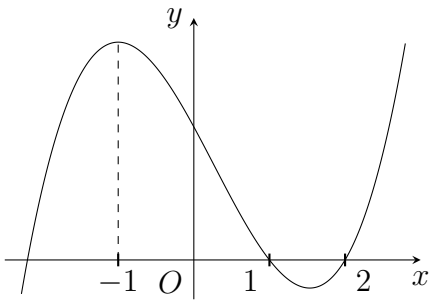
Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị ở hình bên. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(-\infty;0)$. **C**. $(1;2)$. **D**. $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Nhận thấy đồ thị đi xuống trong khoảng $(0;1)$, suy ra hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B**. $(-\infty;0)$. **C**. $(2;+\infty)$. **D**. $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. Ta có $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, nên $y'<0$ với mọi $x\in(-\infty;0)$. Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+x+m$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $0<m<2$. **B**. $m>2$ hoặc $m<0$. **C**. $m\geq 2$ hoặc $m\leq 0$. **D**. $0\leq m\leq 2$.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+1$.

YCBT$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2-1>0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow m>0$ hoặc $m<0$.

Chọn đáp án B □

Câu 81.

Cho bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	3	↘	0	↗	$+\infty$
	$-\infty$						

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có các kết luận sau:

- ☑ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;+\infty)$.
- ☑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.
- ☑ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 3.
- ☑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Do đó, xét hàm số trên khoảng $(0;3)$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$, $(2;3)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Giá trị m nguyên lớn nhất để hàm số $y=x^3+(3-2m)x^2+\left(m-\dfrac{2}{3}\right)x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $[1;2)$. **B.** $(-2;1]$. **C.** $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+2(3-2m)x+m-\dfrac{2}{3}$.

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'=(3-2m)^2-3\left(m-\dfrac{2}{3}\right)\le 0 \Leftrightarrow 4m^2-15m+11\le 0 \Leftrightarrow 1\le m\le \dfrac{11}{4}$.

Vậy giá trị m nguyên lớn nhất là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x^3+x-5$. **B.** $y=x^4+3x^2+4$. **C.** $y=x^2+1$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $y=x^3+x-5$ đồng biến trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Hàm số $y=x^3-3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}}x$. **C.** $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}$. **D.** $y=\log_5 x$.

Lời giải.

Ta có $0<\dfrac{\mathrm{e}}{3}<1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Khoảng đồng biến của hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ là

A. $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

C. $(-1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

$y' = -3x^2 + 6x + 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy y đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 87.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' > 0,\ \forall x \in (0;2)$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m+1)\,x^2 + (m+1)\,x - 1$ đồng biến trên tập xác định của nó.

A. $-1 < m < 0$. **B.** $m \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$.

C. $-1 \le m \le 0$. **D.** $m \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

☑ Ta có: $y' = x^2 + 2\,(m+1)\,x + (m+1)$.

☑ Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

☑ y' là tam thức bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$ nên

$$\begin{aligned} y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'_{y'} \le 0 &\Leftrightarrow (m+1)^2 - (m+1) \le 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \le m+1 \le 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \le m \le 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 89. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -\sqrt{2} \cdot x + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 + 3x + 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có đạo hàm $y' = 3x^2 + 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 90. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$, và $y'=\dfrac{-6}{(x-3)^2}>0\,\forall x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.
Do đó, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Hàm số $y=x^3+3x^2-4$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
A. $(-\infty;-2)$. **B**. $(0;+\infty)$. **C**. $(-2;0)$. **D**. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$y'=3x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2.\end{array}\right.$ Dễ thấy hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+5x-2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
A. $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$. **B**. $(-\infty;1)$. **C**. $(5;+\infty)$. **D**. $(1;5)$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5.\end{array}\right.$
Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.
Chọn đáp án D □

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx-\sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m>1$. **B**. $m\le-1$. **C**. $m\ge1$. **D**. $m\ge-1$.

Câu 94. Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. **B**. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 95. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?
A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B**. $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$. **C**. $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$. **D**. $y=\dfrac{x+5}{-x-1}$.

Lời giải.

☑ Với $y=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{2}{(x+1)}>0$.
☑ Với $y=\dfrac{2x+1}{x-3}\Rightarrow y'=\dfrac{-7}{(x-3)^2}<0\Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+\dfrac{3}{4}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$. **B**. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$. **D**. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$.

Lời giải.

Có $y' = x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm

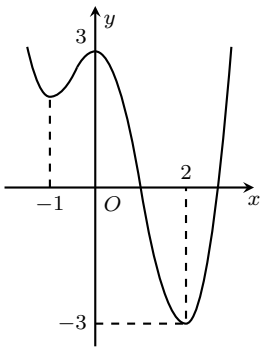
x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nhìn vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 97.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?



A. Nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$. **B**. Đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$. **D**. Nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải.

Theo chiều từ trái sang phải, đồ thị hàm số đồng biến là một đường "đi lên", đồ thị hàm số nghịch biến là một đường "đi xuống". Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B**. $(2;+\infty)$. **C**. $(-\infty;-2)$. **D**. $(-2;0)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -2f'(x) = -2x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$.

Suy ra hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B**. $(-\infty;-1)$. **C**. $(-\infty;0)$. **D**. $(0;+\infty)$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. D	5. B	6. A	7. B	8. A	9. A	10. D
11. D	12. B	13. A	14. D	15. B	16. A	17. C	18. C	19. B	20. A
21. A	22. A	23. B	24. D	25. D	26. B	27. C	28. A	29. B	30. B
31. A	32. D	33. A	34. A	35. C	36. A	37. C	38. B	39. C	40. A
41. C	42. D	43. D	44. D	45. C	46. C	47. C	48. B	49. C	50. D
51. D	52. D	53. B	54. D	55. B	56. A	57. A	58. D	59. D	60. D
61. C	62. B	63. B	64. D	65. D	66. D	67. A	68. C	69. B	70. A
71. D	72. C	73. A	74. A	75. A	76. C	77. B	78. A	79. B	80. B
81. B	82. D	83. A	84. D	85. A	86. C	87. C	88. C	89. D	90. B
91. C	92. D	93. C	94. A	95. B	96. D	97. C	98. A	99. C	100. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$. Giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ là?

A. $m>2$. **B.** $\hoac{m<-2\\m>2}$. **C.** $m\le -2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $x\neq m$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$y'>0,\ \forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow\heva{m^2-4>0\\-m\notin(2;+\infty)}\Leftrightarrow\heva{\hoac{m>2\\m<-2}\\-m\le 2}\Leftrightarrow\heva{\hoac{m>2\\m<-2}\\m\ge -2}\Leftrightarrow m>2.$$

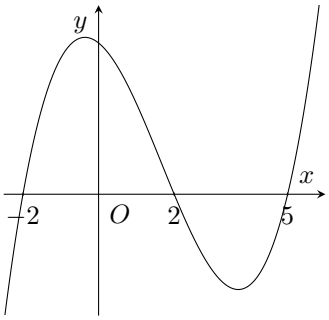
Vậy khi $m>2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-2;2)\cup(5;+\infty)$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(2;5)$.

Xét hàm số $y=f(3-2x)$ có $y'=-2\cdot f'(3-2x)$.

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow -2\cdot f'(3-2x)<0\Leftrightarrow f'(3-2x)>0$

$$\Leftrightarrow\hoac{-2<3-2x<2\\3-2x>5}\Leftrightarrow\hoac{\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}\\x<-1.}$$

Vậy hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $y=2x^3-3(3m+1)x^2+6(2m^2+m)x-12m^2+3m+1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$y'=6x^2-6(3m+1)x+6(2m^2+m)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 2m+1 \end{array}\right.$

Vì m nguyên dương nên $m < 2m+1$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow m \leqslant 1 < 3 \leqslant 2m+1 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S?

A. $T = -10$. **B.** $T = -9$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = -5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3m-2\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-14) \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5 > 0 \\ 3m-2 \notin (-\infty;-14) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 3m-2 \geq -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -4 \leq m < 1$.

Vậy $S = \{-4;-3;-2;-1;0\} \Rightarrow T = -4-3-2-1 = -10$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \tan x$. **B.** $y = \dfrac{x}{x+1}$.

C. $y = (x^2-1)^2 - 3x + 2$. **D.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y = f(x)$ có:

+ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

+ $y' \geq 0, \forall x$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm.

Cách giải:

$y = \tan x$: loại vì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$y = \dfrac{x}{x+1}$: loại vì $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = (x^2-1)^2 - 3x + 2$: loại vì $y' = 2.2x(x^2-1) - 3 = 4x^3 - 4x - 3$ có khoảng mang dấu dương, có khoảng mang dấu âm.

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$: thỏa mãn vì $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$. $y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2}\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2}\le 0 \\ \dfrac{-m}{2}\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2.$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{2x+m+1}{x+m+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$?

A. 13. **B**. 12. **C**. Vô số. **D**. 14.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq -m+1$, $y'=\dfrac{m-3}{(x+m-1)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$ thì hàm số phải xác định trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$, $\Rightarrow -4\le -m+1\le 11\Leftrightarrow -10\le m\le 5$.

Khi đó để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(11;+\infty)$ thì $m-3<0\Leftrightarrow m<3$, lấy giao với $-10\le m\le 5\Rightarrow -10\le m<3$.

Từ đó có các giá trị nguyên của $m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Suy ra đáp án A.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m\in[-1;1]$. **B**. $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D**. $m\in(-1;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm số bậc ba có $a=1>0$, có $y'=3x^2-6mx+3$. Do đó y đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=9m^2-9\le 0$.

Vậy $m\in[-1;1]$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $(-\infty;0]$. **B**. $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **C**. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **D**. $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ tương đương

$$\begin{aligned} & y'=-3x^2-12x+4m-9\le 0,\ \forall x\in(-\infty;-1) \\ \Leftrightarrow\ & 4m\le 3x^2+12x+9,\ \forall x\in(-\infty;\,-1). \end{aligned}$$

Đặt $g(x)=3x^2+12x+9\Rightarrow g'(x)=6x+12$, suy ra $\min\limits_{(-\infty;-1]}g(x)=g(-2)=-3$.

Vậy $4m\le -3\Leftrightarrow m\le -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3f'(x+2)-3x^2+3$, $y'=0\Leftrightarrow f'(x+2)-x^2+1=0$ (1)

Đặt $t=x+2$, khi đó (1) $\Leftrightarrow f'(t)+(-t^2+4t-3)=0$ Để hàm số đồng biến thì $y'>0$

Ta chọn t saor cho

$$\begin{cases} f'(t)>0 \\ -t^2+4t-3>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 1<t<2\vee 2<t<3\vee t>4 \\ 1<t<3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<t<2 \\ 2<t<3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 0<x<1. \end{array}\right.$$

vvhyuuruccc/

Chọn đáp án C □

Câu 11. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 2007. **B.** 2030. **C.** 2005. **D.** 2018.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-12x+m$.

Hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le -3x^2+12x,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;+\infty)}(-3x^2+12x)\Leftrightarrow m\ge 12$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $-2018\le m\le 2018$ nên $m\in\{12,13,14,\cdots,2018\}$.

Vậy có 2007 số nguên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = (m-1)x^3 + 3mx^2 + (4m+4)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4036. **B**. 2017. **C**. 2018. **D**. 4034.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3(m-1)x^2 + 6mx + 4m + 4$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ ($y' = 0$ tại hữu hạn điểm).

• TH1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $y' = 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$ (không thỏa mãn).

• TH2: $\begin{cases} a = m - 1 > 0 \\ \Delta'_{y'} = (3m)^2 - 3(m-1)(4m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -3m^2 + 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$

Vì m là số nguyên và $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m = \{2; 3; 4; \ldots; 2019\}$.

Vậy có 2018 số nguyên m thuộc khoảng $m \in [-2019; 2019]$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$. Tính tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x-1|) + m = 2$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. -2. **B**. -6. **C**. 8. **D**. 4.

Lời giải.

Phương pháp:

- Đặt $t = |x-1|$ $(t \geq 0)$ đưa phương trình về ẩn t.
- Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Cách giải:

Đặt $t = |x-1|$ $(t \geq 0)$ ta được $f(t) + m = 2 \Leftrightarrow f(t) = 2 - m$.

Có $f(t) = t^3 - 3t^2 + 8 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [0; +\infty) \\ t = 2 \in [0; +\infty) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 8$

t	0		2		$+\infty$
y'	0	$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2 - m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm có hoành độ bằng 0 và điểm còn lại có hoành độ dương.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $2 - m = 8 \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy tổng các giá trị của m là -6.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 7. **B**. 6. **C**. 5. **D**. 8.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad y'\le 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)\\
&\Leftrightarrow \quad -3x^2-2mx+4m+9\le 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -3<0\\ m^2+12m+27\le 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad -9\le m\le -3\\
&\Rightarrow \quad m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}\ (\text{vì } m \text{ là số nguyên})
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 15 (2D1K1-3). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}m^2x^2+2m$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Do hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nếu hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì cũng đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Ta có $y'=x^3-m^2x$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m^2\le \dfrac{x^3}{x},\ \forall x\in[1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m^2\le f(x)=x^2,\ \forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m^2\le \min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)$.

$\Leftrightarrow m^2\le 1\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Do m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}\Rightarrow S=-1+0+1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3-10x^2-\left(m^2-m-20\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tích giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. -2. **B**. -5. **C**. $\dfrac{3}{2}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2x^4-mx^2-20x-\left(m^2-m-20\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow (x-1)\left[m^2x^3+m^2x^2+\left(m^2-m\right)x+m^2-m-20\right]\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\qquad (*).
\end{aligned}$$

Xét $g(x)=m^2x^3+m^2x^2+\left(m^2-m\right)x+m^2-m-20$.

Nếu $g(x)=0$ không có nghiệm $x=1$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua 1, nên muốn $(*)$ thỏa thì điều

kiện cần là $g(1)=1 \Leftrightarrow 2m^2-m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{5}{2} \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Ta cần kiểm tra xem hai giá trị tìm được có thỏa $(*)$không.

Nếu $m=\dfrac{5}{2}$ thì $g(x)=\dfrac{25}{4}x^3+\dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{15}{4}x-\dfrac{65}{4}=\dfrac{5}{4}(x-1)(5x^2+10x+13)$, thỏa $(*)$.

Nếu $m=-2$ thì $g(x)=4x^3+4x^2+6x-14=(x-1)(4x^2+8x+14)$, thỏa $(*)$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{2};-2\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $y=\dfrac{mx+2}{2x+m} \Rightarrow y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'<0,\ \forall x\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -\dfrac{m}{2}\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\le 0 \\ -\dfrac{m}{2}\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$. Tính tổng P của các giá trị m của S.

A. $P=10$. **B**. $P=9$. **C**. $P=-9$. **D**. $P=-10$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x-m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi chỉ khi

$$\begin{cases} y'<0, \forall x\in(4;+\infty) \\ m\notin(4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m<0 \\ m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 4.$$

Vì m chỉ nhận giá trị nguyên nên $m=2;3;4$. Suy ra $P=2+3+4=9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sin 2x-1}{\sin 2x+m}$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\ge -1$. **B**. $m\ge \dfrac{1}{2}$. **C**. $m>-1$. **D**. $m>1$.

Lời giải.

Vì $-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{\pi}{4}$ nên $-\dfrac{\pi}{6}<2x<\dfrac{\pi}{2}$. Đặt $t=\sin 2x \Rightarrow -\dfrac{1}{2}<t<1$. Khi đó ta có $y=\dfrac{t-1}{t+m}$.

Điều kiện $t\ne -m$. Do $-\dfrac{1}{2}<t<1$ nên $\left[\begin{array}{l} -m\le -\dfrac{1}{2} \\ -m\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge \dfrac{1}{2} \\ m\le -1. \end{array}\right.$

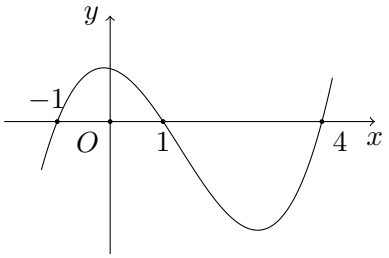
Ta có $y'_x = \dfrac{m+1}{(t+m)^2} \cdot t'_x$. Mà $t'_x = 2\cos 2x > 0$ với mọi $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên để hàm số $y = \dfrac{t-1}{t+m}$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \dfrac{m+1}{(t+m)^2} > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(4;7)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

☑ Với $x > 3$, ta có $g(x) = f(x-3) \Rightarrow g'(x) = f'(x-3)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x > 7. \end{array}\right.$$

Vì $x > 3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$ hoặc $(7;+\infty)$.

☑ Với $x < 3$, ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ -1 < x < 2. \end{array}\right.$$

Vì $x < 3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (5-2m)x - \dfrac{1}{x+1} - 3$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

A. $\forall m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \le 6$. **C.** $m \ge -3$. **D.** $m \le 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Khoảng cần xét thuộc vào tập xác định của hàm số với mọi số thực m.
Đạo hàm: $y' = 2x + 5 - 2m + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \ge 0,\ \forall x \in (-1;+\infty) \Leftrightarrow 2x + 5 - 2m + \frac{1}{(x+1)^2} \ge 0,\ \forall x \in (-1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2x+5+\frac{1}{(x+1)^2}\geq 2m,\ \forall x\in(-1;+\infty).$$

Để hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ thì $2m\leq \min\limits_{(-1;+\infty)} g(x)$ với $g(x)=2x+5+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Ta xét hàm số $g(x)=2x+5+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Đạo hàm: $g'(x)=2-\dfrac{2}{(x+1)^3}=\dfrac{2x^3+6x^2+6x}{(x+1)^3}$.

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3+6x^2+6x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow g(0)=6$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $2m\leq 6\Leftrightarrow m\leq 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2020)$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+2019$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2021. **B**. 2020. **C**. 2018. **D**. 2019.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m^2+6m$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$, có $\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2+m\right)=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$. Suy ra phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt: $x_1=m$; $x_2=m+1$. Dễ thấy $x_1<x_2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(m)$	↘	$y(m+1)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$; $(m+1;+\infty)$. Vì thế, hàm số đồng biến trên $(2:+\infty)$ khi $m+1\leq 2\Leftrightarrow m\leq 1$.

Suy ra có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ là

A. $S=\varnothing$. **B**. $S=[0;1]$. **C**. $S=[-1;0]$. **D**. $S=\{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(m)$	↘	$y(m+2)$	↗	$+\infty$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $\begin{cases} m \le -1 \\ m+2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \ge 0 \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $[4\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m+2)x - 6(m+2)$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow y' = -18x - 18 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$. Do đó $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu.

Nếu $m \ne 1$ thì

$$y' \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta = 9(m+2)^2 + 24(m-1)(m+2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2 \le m \le \dfrac{6}{33} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy $m \in \varnothing$.

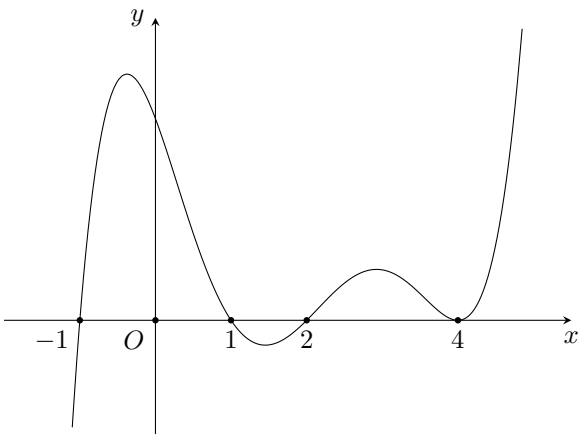
Chọn đáp án (B) □

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x)$.

Để hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đồng biến suy ra $g'(x) \ge 0$ hay $-2f'(1-2x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \le 0$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l} 1-2x \le -1 \\ 1 \le 1-2x \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le 0. \end{array}\right.$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-f'(1-x)+2018=-x(3-x)\cdot g(1-x)$.

Suy ra $y'\le 0\Leftrightarrow -x(3-x)\cdot g(1-x)\le 0\Leftrightarrow x(3-x)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0\\ x\ge 3.\end{array}\right.$

(do $g(1-x)<0$ nên $-g(1-x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3m^2-2mx+4m+9$.

Do phương trình $y'=0$ có hữu hạn nghiệm nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad -3x^2-2mx+4m+9\le 0,\forall x\in\mathbb{R}.\\ &\Leftrightarrow\quad \Delta'=m^2+12m+27\le 0\,(\text{do } a=-3<0)\\ &\Leftrightarrow\quad -9\le m\le -3.\end{aligned}$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-5;-4;-3\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2<m\le -1$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $-2\le m\le 2$. **D.** $-2<m<2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0\\ 1\le -m\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le -1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.

Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = f(-2) = 0$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

A. $(2;5)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Từ đó suy ra $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $g(x) = [f(3-x)]^2 \Rightarrow g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến suy ra $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Nhận xét: Bài này đề ra không chính xác vì chọn được cả phương án A và C.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} < m < 2$. **D.** $m \le 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m$.

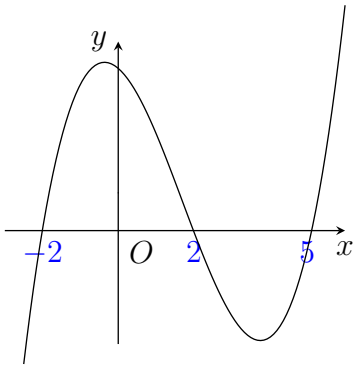
Hàm số đồng biến trên $[1;4]$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \ge 0, \forall x \in [1;4] &\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 4m \ge 0, \forall x \in [1;4] \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x \ge 2m(x+2), \forall x \in [1;4] \\ &\Leftrightarrow x \ge 2m, \forall x \in [1;4] \\ &\Leftrightarrow m \le \frac{x}{2}, \forall x \in [1;4] \\ &\Leftrightarrow m \le \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 31.

Cho hàm số $f(x)$ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(0;2)$. **B**. $(1;3)$. **C**. $(-\infty;-1)$. **D**. $(-l;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

Ta có:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$$

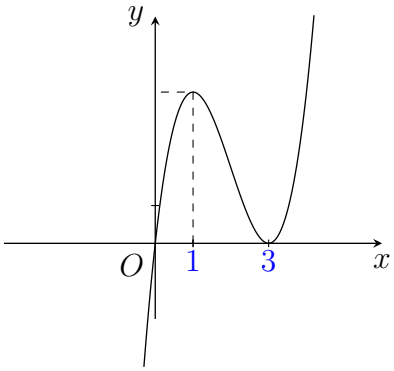
$$g'(x) = [f(3-2x)]' = -2f'(3-2x)$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2} \\ x < -1 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án C □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới . Để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có số điểm cực trị ít nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m = m_0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A. $m_0 \in (0;1)$. **B**. $m_0 \in (-1;0)$. **C**. $m_0 \in (-\infty;-1)$. **D**. $m_0 \in (1;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ sau đó xác định sự biến thiên của hàm số $h(x)$ và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

Xét hàm số: $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \Rightarrow g'(x) = 2f(x).f'(x) + f'(x) = f'(x)\,[2f(x)+1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ 2f(x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\begin{cases} f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \\ f(x)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=a \quad (a<0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1)=f^2(1)+f(1)+m=m>m \\ g(3)=f^2(3)+f(3)+m=m \\ g(a)=f^2(a)+f(a)+m=m-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow h(x)=|g(x)|=|f^2(x)+f(x)+m|=\left|\left[f(x)+\dfrac{1}{2}\right]^2+m-\dfrac{1}{4}\right|$ có điểm cực trị ít nhất là 3.

Đồ thị hàm số $g(x)$ nằm phía trên trục Ox (kể cả trường hợp tiếp xúc với Ox)

$\Rightarrow m \geq \dfrac{1}{4} \Rightarrow x_0=\dfrac{1}{4}$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B**. 17. **C**. 16. **D**. 20.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)$, suy ra $g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Hàm số đồng biến trên $(0;2)$ khi

$$\begin{aligned} & g'(x)\leq 0 \text{ với mọi } x\in(0;2) \\ \Leftrightarrow\ & (2x+1)f'\left(x^2+3x-m\right)\leq 0 \text{ với mọi } x\in(0;2) \\ \Leftrightarrow\ & f'\left(x^2+3x-m\right)\leq 0 \text{ với mọi } x\in(0;2) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\leq -3 \\ x^2+3x-m\geq 1 \end{array}\right. \text{với mọi } x\in(0;2) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2+3x+3\leq m \\ x^2+3x-1\geq m \end{array}\right. \text{với mọi } x\in(0;2) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m\geq 13 \\ m\leq -1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do m thuộc đoạn $[-10;20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 4. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-20<0 \\ -\dfrac{m}{2}\notin(0;2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{20}<m<\sqrt{20} \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\le 0 \\ -\dfrac{m}{2}\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{20}<m<\sqrt{20} \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{20}<m\le -4 \\ 0\le m<\sqrt{20}. \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-4;0;1;2;3;4;\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\dfrac{1}{3}$, với m là tham số, đồng biến trên $(2;+\infty)$ thì m thuộc tập nào sau đây?

A. $m\in\left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$. **B**. $m\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

C. $m\in(-\infty;-1)$. **D**. $m\in\left(-\infty;\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$.

☑ Với $m=0$ ta được $y'=2x-6$ và $y'>0$ khi $x>3$. Vậy hàm số chỉ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Do đó $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

☑ Với $m\neq 0$, ta có $\Delta'_{y'}=(m-1)^2-3m(m-2)=-2m^2+4m+1$.

- Dễ thấy $m<0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Xét trường hợp $m>0$.

  Nếu $\Delta'_{y'}\le 0$ hay $m\ge\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, cho nên nó đồng biến trên $(2;+\infty)$.

  Nếu $\Delta'_{y'}>0$ hay $0<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, thì yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$x_1<x_2\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ 4m-4(m-1)+3(m-2)\ge 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{2m}<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ 3m - 2 \geq 0 \\ \dfrac{-m-1}{m} < 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \leq m < \frac{2+\sqrt{6}}{2}.$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Phương trình $x^3 - \sqrt{1-x^2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B**. 6. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

$x^3 - \sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^6 + x^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Đặt $t = x^2$ khi đó $0 \leq t \leq 1$. Phương trình trở thành $t^3 + t - 1 = 0$. $(*)$

Nhận xét: Mỗi giá trị của t thuộc đoạn $[0;1]$ cho ta một nghiệm $x \in [0;1]$.

Xét $f(t) = t^3 + t - 1$ với $t \in [0;1] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \, \forall t \in [0;1]$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-1	↗	1

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $(*)$ có một nghiệm $t \in [0;1]$.

Nên phương trình đã cho có một nghiệm.

(Chú ý: Ta có thể xét hàm số $f(x) = x^6 + x^2 - 1$ trên đoạn $[0;1]$).

Chọn đáp án C □

Câu 37. Hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+m-3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi

A. $m < 1$. **B**. $m = 1$. **C**. $m \geq 3$. **D**. $m \neq 1$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{m-3+2}{(x+m-3)^2} = \dfrac{m-1}{(x+m-3)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1 > 0 \\ x = 3 - m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm là

A. $m < -\dfrac{1}{3}$. **B**. $-\dfrac{1}{3} < m \leq 1$. **C**. $-\dfrac{1}{3} \leq m < 1$. **D**. $-\dfrac{1}{3} < m < 1$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Ta có $3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow m = \dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{2\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}, (0 \leq t < 1)$, (vì $\dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$ mà $0 < \dfrac{2}{x+1} \leq 1, \forall x \geq 1$ nên $0 \leq \dfrac{x-1}{x+1} < 1$).

Ta được $m = 3t^2 - 2t = f(t), (0 \leq t < 1)$; $f'(t) = 6t - 2$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \leq m < 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a, b). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

B. Hàm số $y = -f(x) + 1$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

C. Hàm số $y = f(x) + 1$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

D. Hàm số $y = -f(x) - 1$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a, b) nên $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra hữu hạn điểm thuộc (a, b).

Hàm số $y = -f(x) + 1$ và $y = -f(x) - 1$ có đạo hàm bằng $f'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$ nên hai hàm số trên nghịch biến trên (a, b).

Hàm số $y = f(x) + 1$ có đạo hàm bằng $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$ nên hàm số đồng biến trên (a, b).

Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(a - 1; b - 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 6x - x^2 - 4$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

A. -6. **B**. 3. **C**. -3. **D**. 6.

Lời giải.

Phương pháp: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{(x-3)^2 + 3} \geq 3$ tìm GTLN của hàm số $f(t)$ với $t \geq 3$.

Cách giải: $\begin{array}{l} f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 6x - x^2 - 4 \\ f(x) = 6\sqrt{x^2 - 6x + 12} - (x^2 - 6x + 12) + 8 \end{array}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{(x-3)^2 + 3} \geq 3$, khi đó ta có $f(t) = -t^2 + 6t + 8, \forall x \geq 3$. Ta có $f'(t) = -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$. BBT:

x	3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	17	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow \max\limits_{[3;+\infty)} f(t) = 17 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+3} = 3 \Leftrightarrow x = 3$.

$\Rightarrow max f(x) = 17 = M \Leftrightarrow x = 3$

Vậy phương trình $f(x) = M$ có nghiệm duy nhất $x = 3$, do đó tích các nghiệm của chúng bằng 3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2 - 3x + m^2 + 5m + 6$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên $(3;5)$.

A. $m \in (-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$. **B.** $m \in (-\infty;-3] \cup [-2;+\infty)$.

C. $m \in [-3;-2]$. **D.** Với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$.

Cách giải: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(3;5) \Leftrightarrow y' > 0 \forall x \in (3;5)$.

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + m^2 + 5m + 6 \geq 0, \forall x \in (3;5)$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x \geq -m^2 - 5m - 6, \forall x \in (3;5) (*)$.

Đặt $g(x) = x^2 - 3x$.

$(*) \Leftrightarrow g(x) \geq -m^2 - 5m - 6, \forall x \in (3;5)$

$\Rightarrow -m^2 - 5m - 6 \leq \min\limits_{(3;5)} g(x)$

Khảo sát hàm số $g(x) = x^2 - 3x$ ta được:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	10	$\longrightarrow$	$+\infty$

$-m^2 - 5m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq -2 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m^2 + 2018m - 1) \cdot \frac{x^2}{2} - 2019m$ tăng trên $(-\infty;-2018)$. Tổng tất cả các giá trị của tập hợp S là

A. -2039189. **B.** -2039190. **C.** -2019. **D.** -2018.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 + (m^2 + 2018m - 1)\, x$.

Để hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;-2018)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \geq 0,\ \forall x \in (-\infty;-2018) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + \left(m^2 + 2018m - 1\right) x \geq 0,\ \forall x \in (-\infty;-2018) \\ \Leftrightarrow\ & x \leq -\left(m^2 + 2018m - 1\right),\ \forall x \in (-\infty;-2018). \end{aligned}$$

Suy ra $-\left(m^2 + 2018m - 1\right) \geq -2018 \Leftrightarrow -2019 \leq m \leq 1$.
Vậy tổng số các phần tử của tập hợp S là
$-2019 - 2018 - 2017 - \cdots - 1 + 0 + 1 = \dfrac{(-2019+1)\,2021}{2} = -2039189.$

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(1) - 2$. **B.** $m \leq f(1) - 2$. **C.** $m \leq f(-1) - \dfrac{1}{2}$. **D.** $m > f(-1) - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $f(x) > 2^x + m \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m$. Đặt $g(x) = f(x) - 2^x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2^x \ln 2 < 0, \forall x \in (-1,1)$ vì theo bảng biến thiên $f'(x) < 0, \forall x \in (-1,1)$ và $2^x \ln 2 > 0$.
Khi đó $g(x) > g(1) = f(1) - 2, \forall x \in (-1,1)$.
Do đó bất phương trình $f(x) > 2^x + m, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \leq g(1) = f(1) - 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + mx - 2019$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $m \leq -1$. **B.** $m < -1$. **C.** $m > -1$. **D.** $m \leq 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^2 + 2x + m$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0;+\infty)} \left(x^2 - 2x\right) \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le 2;\ f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Xét hàm số $y = f\left(x^2 - 2\right)$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2 - 2\right)\right]' = 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right)$.

$$y' \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x \le 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \ge 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 2 \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2 \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 0 \le x \le 2. \end{array}\right.$$

Vì vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2);\ (0; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx + 16}{x + m}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m \in (-\infty; -4)$. **B.** $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

C. $m \in [4; +\infty)$. **D.** $m \in (4; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số đã cho có đạo hàm là $y' = \dfrac{m^2 - 16}{(x + m)^2}$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ -m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 4. \\ -m \le 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)\,x - 5$. Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ là $[a; b]$. Khi đó $a - 3b$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 6. **D.** -1.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số bậc ba nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

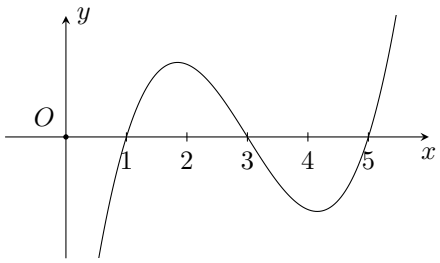
Cách giải: $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)\,x - 5 \Rightarrow y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số bậc ba nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -1<0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+3m+2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow -2 \le m \le -1$$
$$\Rightarrow a=-2, b=-1 \Rightarrow a-3b=1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x+1)$. Kết luận nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

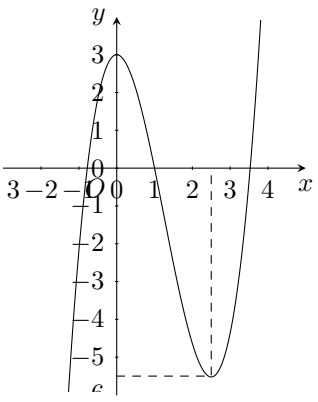
Phương pháp: Xét dấu của $g'(x)$ dựa vào dấu của $f'(x)$.
Cách giải: $g(x)=f(x+1) \Rightarrow g'(x)=f'(x+1)$.
Với $x \in (0;1)$ thì $x+1 \in (1;2)$, $f'(x+1)>0, \forall x \in (0;1) \Rightarrow g'(x)>0, \forall x \in (0;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 49 (2D1K1-4).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x^2)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A. 5. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.



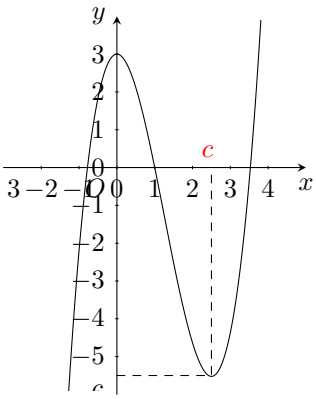
Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f'(x) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = c \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = c \end{bmatrix}.$$

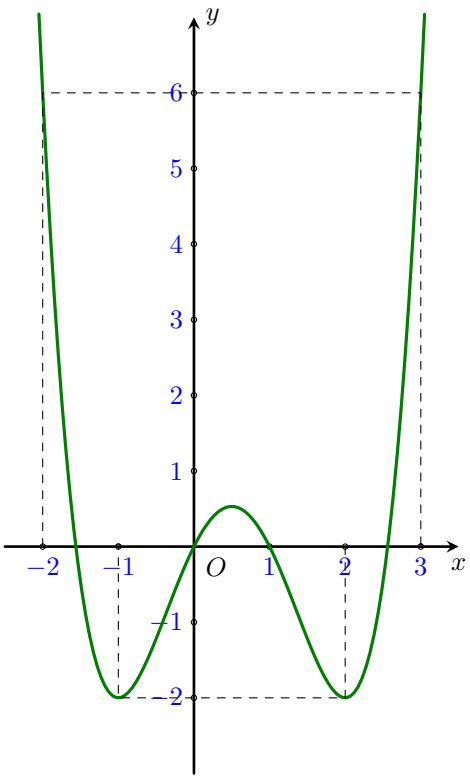
(với $2 < c < 3$ được biểu diễn bởi hình vẽ trên)

Vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm.



Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A. 2. **B**. 6. **C**. 3. **D**. 7.

Lời giải.

Đặt

$$t = g(x) = x^3 - 3x,\ x \in [-1; 2]$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -1 \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

Suy ra

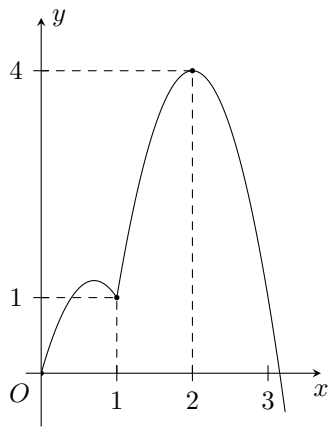
Với $t=-2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.
$t\in(-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện là: $m=0,\ m=-1$. (1)

Chọn đáp án A □

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



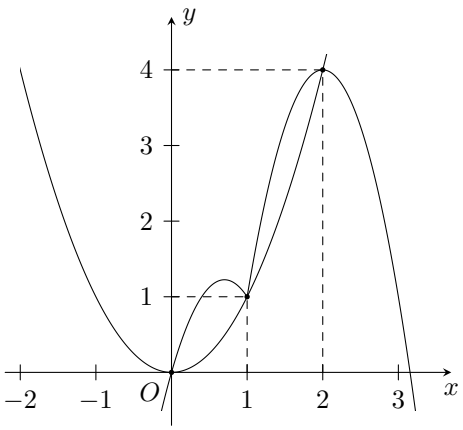
Hàm số $y=|3f(x)-x^3|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=3f(x)-x^3$. Hàm số ban đầu có dạng $y=|g(x)|$.

Ta có $g'(x)=3f'(x)-3x^2$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.



Dễ thấy $g(0)=0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0		0	$-$	
$y=\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗		↗		↘	0	↗	$+\infty$
					$y=0$					↘	$-\infty$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=|g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và $(a;+\infty)$ với $g(a)=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$, $y'=\dfrac{m+1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m\le 0 \\ m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=mx^2+14mx+14=m(x^2+14x)+14$.

Hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y'\le 0, \forall x\in[1;+\infty) \\ &\Leftrightarrow \quad m(x^2+14x)+14\le 0, \forall x\in[1;+\infty) \\ &\Leftrightarrow \quad m\le -\frac{14}{x^2+14x} \ \left(\text{vì } x^2+14x>0, \forall x\in[1;+\infty)\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = -\dfrac{14}{x^2+14x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. Ta có

$$g'(x) = \frac{14(2x+14)}{(x^2+14x)^2} > 0, \forall x \in [1;+\infty).$$

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\dfrac{14}{15}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(*) \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{14}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Tính số giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. 2020. **B.** 2. **C.** 2019. **D.** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y' \geq 0, \forall x \in (1;2) \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4mx \geq 0, \forall x \in (1;2). \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - m \geq 0, \forall x \in (1;2) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \geq m, \forall x \in (1;2). \end{aligned}$$

Mà $x^2 > 1, \forall x \in (1;2)$.

Do đó $m \leq 1$.

Lại có $m \in (-2019;2019)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2018;-2017;\ldots;-1;0;1\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $[-3;3]$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad m^2 - 9 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 \leq m \leq 3. \end{aligned}$$

Chú ý: Chỉ kết luận $\Delta' > 0$ là chưa đủ, học sinh có thể thử lại khi $m = \pm 3$ để chắc chắn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Tìm các giá trị thực của tham số m hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

A. $1 < m < 2$. **B.** $m < 1, m > 2$. **C.** $1 \leq m \leq 2$. **D.** $m \leq 1, m \geq 2$.

Lời giải.

Tập xác định của $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x - (m^2 - 3m + 2)$.

Để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0; 2)$ và dấu đẳng thức xảy ra tại hữu hạn điểm.

Suy ra $3x^2 + 6x - (m^2 - 3m + 2) \geq 0,\ \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq (m^2 - 3m + 2),\ \forall x \in (0; 2)$.

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x$ trên $(0; 2)$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		2
$g(x)$	0	↗	24

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

A. $(-\infty; 6]$. **B.** $(-\infty; 3)$. **C.** $(-\infty; 3]$. **D.** $[3; 6]$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên $(0; 4)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0,\ \forall x \in (0; 4)$.

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0, \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2 + 6}{2x + 1}, \forall x \in (0; 4)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6}{2x + 1}$, với $x \in [0; 4]$ ta có $f'(x) = \dfrac{6x^2 + 6x - 12}{(2x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0; 4]$.

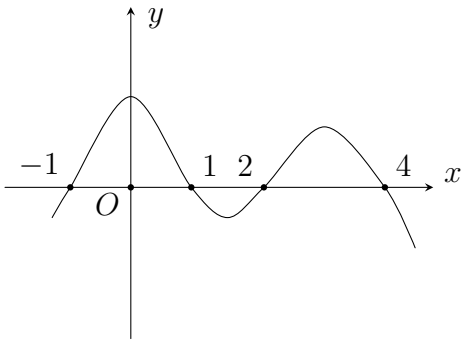
Ta có: $f(0) = f(4) = 6; f(1) = 3 \Rightarrow \min\limits_{x \in [0;4]} f(x) = 3$ và $\max\limits_{x \in [0;4]} f(x) = 6$.

Từ đó suy ra $m \leq \min\limits_{x \in [0;4]} f(x) \Rightarrow m \leq 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ (trên $\mathbb{R}$ thì đồ thị $y = f'(x)$ là một nét liền và chỉ có 4 điểm chung với Ox tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1, 1, 2, 4$). Đặt $g(x) = f(1-x)$. Chọn khẳng định đúng:



A. $g(x)$ đồng biến trên $(-3;0)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên $(-4;-3)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên $(-4;-3)$ và $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = -f'(1-x)$.

☑ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x < -1 \\ 1 < 1-x < 2 \\ 1-x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ -1 < x < 0 \\ x < -3. \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$, $(2;+\infty)$.

☑ $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 1-x < 1 \\ 2 < 1-x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ -3 < x < -1. \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$, $(-3;-1)$.

Ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-4;-3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho phương trình $2x^2 - 2(m+1)x + 4 - m = 0$ với m là tham số thực. Biết rằng đoạn $[a;b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thực thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính $a+b$.

A. $3+\sqrt{11}$. **B**. $2+\sqrt{11}$. **C**. $2+3\sqrt{11}$. **D**. $2-\sqrt{11}$.

Lời giải.

Trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$, phương trình tương đương với

$$m = \frac{2x^2 - 2x + 4}{2x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 4}{2x+1}$, trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Ta có

$$f'(x) = \frac{(4x-2)(2x+1) - 2(2x^2 - 2x + 4)}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 10}{(2x+1)^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{11}}{2} \notin \left[0;\dfrac{3}{2}\right] \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{11}}{2} \in \left[0;\dfrac{3}{2}\right] \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$		$\dfrac{3}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$-2+\sqrt{11}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ khi $-2+\sqrt{11} \le m \le 4$.

Do đó $a+b=2+\sqrt{11}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4x\left(\sqrt{4x-m}-2\right)=x^3+(m-8)\sqrt{4x-m}$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B**. 5. **C**. 8. **D**. 6.

Lời giải.

Điều kiện: $4x-m \ge 0$.

Ta có: $4x\left(\sqrt{4x-m}-2\right)=x^3+(m-8)\sqrt{4x-m} \Leftrightarrow x^3+8x=4x\sqrt{4x-m}-(m-8)\sqrt{4x-m}$.

$\Leftrightarrow x^3+8x=\sqrt{4x-m}(4x-m+8) \Leftrightarrow x^3+8x=\left(\sqrt{4x-m}\right)^3+8\sqrt{4x-m}$ (1).

Từ (1) suy ra $x \ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+8t$ trên $[0;+\infty)$ ta có:

$f'(t)=3t^2+8>0,\ \forall t \ge 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt{4x-m}\right) \Leftrightarrow x=\sqrt{4x-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-4x+m=0 \quad (2) \end{cases}$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt không âm, điều này tương đương với $\begin{cases} 4-m>0 \\ m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

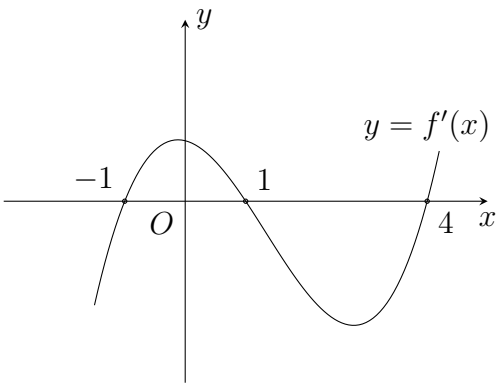
Chọn đáp án (A) □

Câu 61.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;+\infty)$. **B**. $(-1;1)$.

C. $(1;2)$. **D**. $(-2;-1)$.



Lời giải.

Ta có $y' = 2xf'(x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{[}x = 0 \\ f'(x^2) = 0\end{.} \Leftrightarrow \begin{[}x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4.\end{.}$

Để hàm số nghịch biến thì $y' \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 0 \\ f'(x^2) \le 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x \le 0 \\ f'(x^2) \ge 0.\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}x \ge 0 \\ f'(x^2) \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 0 \\ 1 \le x^2 \le 4\end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 2.$

và $\begin{cases}x \le 0 \\ f'(x^2) \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \le 0 \\ 0 \le x^2 \le 1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x \le 0 \\ x^2 \ge 4\end{cases} \Leftrightarrow x \le -2$ hoặc $-1 \le x \le 0.$

Chọn đáp án C □

Câu 62. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = -(m^2-1)x^3 - (m-1)x^2 + x - 7$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

☑ Ta có $y' = -3(m^2-1)x^2 - 2(m-1)x + 1$.
YCBT$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

☑ TH 1: $a = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

- Với $m = 1 \Rightarrow y' = 1 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow m = 1$ (nhận).
- Với $m = -1 \Rightarrow y' = 4x + 1 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)(sai)\Rightarrow m = -1$ (loại).

☑ TH 2: $a \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 1$.
YCBT$\Leftrightarrow \begin{cases}a > 0 \\ \Delta \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3(m^2-1) > 0 \\ 16m^2 - 8m + -8 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 < m < 1 \\ --\dfrac{1}{2} \le m \le 1\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le m \le 1.$

☑ Vậy $-\dfrac{1}{2} < m \le 1 \Rightarrow m = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	↗	$+\infty$	↗	-1
			$-\infty$		

Số nghiệm của phương trình $f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0$ là

A. vô số. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2$. (1)

Với $x > 1$ thì $f(x) < 0$ mà $(x-1)^2 \ge 0$ nên phương trình (1) không có nghiệm $x > 1$.

Với $x < 1$ thì hàm số $g(x) = f(x) - x^2 + 2x - 1$ có đạo hàm $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 > 0$ nên $g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên $(-\infty; 1)$. Lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ nên phương trình có một nghiệm duy nhất trên $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m}$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 2 để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m-1}{(x-m)^2}$, $\forall x\in\mathscr{D}$.

Hàm số nghịch biến trên $(2;3)\Leftrightarrow\begin{cases}y'<0 \quad \forall x\in(2;3)\\(2;3)\subset\mathscr{D}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m-1<0\\\left[\begin{array}{l}m\le 2\\m\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<m\le 2\\m\ge 3.\end{array}\right.$

Vậy có 2 trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx+2\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. $m\le -3$. **B**. $m\ge -3$. **C**. $m\ge 3$. **D**. $m\le 3$.

Lời giải.

Với $x\in(0;+\infty)$, ta có $y'=x^2+m+\dfrac{2}{x}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x>0\Leftrightarrow m\ge -x^2-\dfrac{2}{x},\forall x>0\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{x>0}\left\{-x^2-\dfrac{2}{x}\right\}$.

Mặt khác, với $x>0$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\ge 3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}}=3$.

Suy ra $\max\limits_{x>0}\left\{-x^2-\dfrac{2}{x}\right\}=-3$ (vì với $x\in(0;+\infty)$ thì $-x^2-\dfrac{2}{x}<0$).

Suy ra $m\ge -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên $(0;1)$.

A. $m>\dfrac{1}{3}$. **B**. $m<-1$.

C. $m\ge\dfrac{1}{3}$ hoặc $m\le -1$. **D**. $-1<m<\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx-9m^2=3(x+m)(x-3m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m\\x=3m.\end{array}\right.$

- ☑ Nếu $m=0$ thì $y'=3x^2>0,\forall x\in(0;1)$, nên hàm số đồng biến trên $(0;1)$. Do đó $m=0$ không thỏa mãn.
- ☑ Nếu $m<0$ thì $y'\le 0,\forall x\in[3m;-m]$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $3m\le 0<1\le -m\Rightarrow m\le -1$.
- ☑ Nếu $m>0$ thì $y'\le 0,\forall x\in[-m;3m]$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $-m\le 0<1\le 3m\Rightarrow m\ge\dfrac{1}{3}$.

Vậy: $m \geq \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 6. **B**. 5. **C**. 9. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{m}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{m}{2}; +\infty\right)$ và đạo hàm $y' = \dfrac{m^2-20}{(2x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (0;2) \subset \mathscr{D} \\ y' < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 \leq -\dfrac{m}{2} \\ -\dfrac{m}{2} \leq 0 \end{array}\right. \\ m^2 - 20 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m \geq 0 \end{array}\right. \\ -2\sqrt{5} < m < 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{5} < m \leq -4 \\ 0 \leq m < 2\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m là $\{-4;0;1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + 3x - 3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. 5.

Lời giải.

$y' = 3x^2 + 2(m+2)x + 3$. YCBT tương đương với $y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 1$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn YCBT.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. 2. **B**. Vô số. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq -m$.

$y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1)$ khi

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty;1) \\ -m \notin (-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 70.

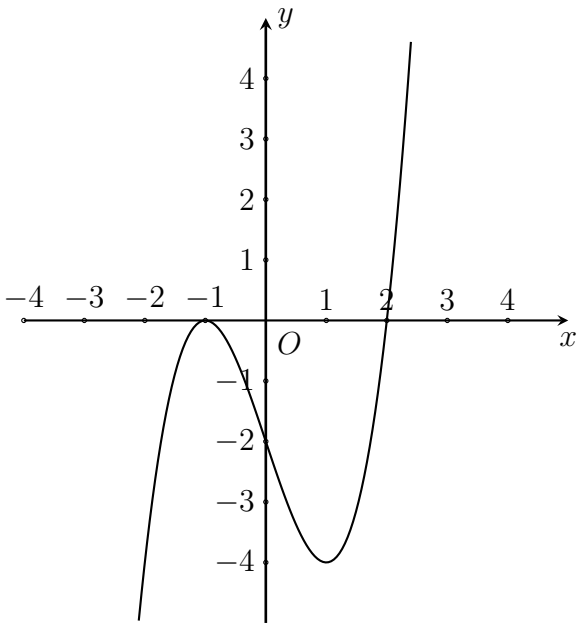
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = \left(x^2 - 2\right)' \cdot f'\left(x^2 - 2\right) = 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{bmatrix}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

A. $-2 < m < -1$. **B**. $-2 < m < 2$. **C**. $-2 \leq m \leq 1$. **D**. $-2 < m \leq -1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1) \Leftrightarrow y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x + m)^2} < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

A. $m \leq \dfrac{47}{64}$ hoặc $m \geq \dfrac{3}{2}$. **B**. $\dfrac{47}{64} < m < \dfrac{3}{2}$.

C. $\dfrac{47}{64} < m \leq \dfrac{3}{2}$. **D**. $\dfrac{47}{64} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 4x = m.$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2} + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 4x}{4} + \cos^2 4x = m.$

Đặt $t = \cos 4x$ thì $t \in [-1;1]$. Ngoài ra với mỗi $t \in [-1;1)$, phương trình $\cos 4x = t$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$. Còn với $t = 1$, phương trình $\cos 4x = t$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Phương trình trở thành $\dfrac{3}{4} + \dfrac{t}{4} + t^2 = m.$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{t}{4} + t^2, t \in [-1;1].$

$f'(t) = 2t + \dfrac{1}{4}0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{8}$

$f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{47}{64}$, $f(-1) = \dfrac{3}{2}$, $f(1) = 2.$

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{47}{64}$	$\nearrow$	2

Phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $[-1;1)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{47}{64} < m \leq \dfrac{3}{2}.$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m \neq 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m \leq 3$. **D.** $m < 3$.

Câu 74. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \geq \dfrac{1}{2}$. **B.** $m < \dfrac{1}{2}$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;1)$ khi chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0,\ \forall x \in (0;1) &\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx \leq 0,\ \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow x - 2m \leq 0,\ \forall x \in (0;1) \text{ (do } x > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq m,\ \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $1<m\leq 2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\leq m\leq 2$. **D.** $1\leq m<2$.

Lời giải.

$y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$

☑ $m=1$, $y'=3>0$

☑ $m\neq 1$

$$ycbt\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\ \Delta'=9(m-1)^2-3(m-1)\cdot 3\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m\leq 2.$$

Vậy $1\leq m\leq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7 . **D.** 4.

Lời giải.

Hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ là hàm bậc 3 có hệ số $a=-1<0$ nên điều kiện cần và đủ để $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ là $y'=-3x^2-2mx+4m+9\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=m^2+12m+27\leq 0\Leftrightarrow -9\leq m\leq -3$

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3 ↘	‖	1 ↘	‖	↗ 4
				2 ↗	
			-1		

Hàm số $y=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(2;4)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f'(x)=2$ có hai nghiệm phân biệt là $x=2$ và $x=a$ với $-1<a<0$.

Đặt $g(x)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ thì $g'(x)=-\dfrac{1}{2}f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+1$.

Ta có $g'(x)<0\Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)>2$.

☑ $f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)>2\Rightarrow 2<1-\dfrac{x}{2}<3\Leftrightarrow -4<x<-2$.

☑ $f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)>2\Rightarrow -1<1-\dfrac{x}{2}<a\Leftrightarrow 2-2a<x<4$.

Vì $-1<a<0$ nên $2<2-2a<4$. Do đó $(2-2a;4)\subset(2;4)$.

Vậy hàm số $y = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trên đoạn $[-1; 5]$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2x + m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\Delta_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Mặt khác, do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-1; 5]$ nên suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx + 2\ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m \leq -3$. **B.** $m \geq -3$. **C.** $m \geq 3$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + m + \dfrac{2}{x}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq -x^2 - \dfrac{2}{x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x>0}\left\{-x^2 - \dfrac{2}{x}\right\}$.

Mặt khác, với $x > 0$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}} = 3$.

Suy ra $\max\limits_{x>0}\left\{-x^2 - \dfrac{2}{x}\right\} = -3$. Suy ra $m \geq -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x - 1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0,\ \forall x \in (1; +\infty)$.

Ta có $x + \dfrac{1}{x - 1} \geq m,\ \forall x \in (1; +\infty)$.

Xét hàm $g(x) = x + \dfrac{1}{x - 1}\ (x > 1)$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Vậy điều kiện của m là $m \leq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m > 2$. **B.** $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$. **C.** $1 \leq m < 2$. **D.** $m \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m-2}{\sin^2 x(\cot x - m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$y' < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ \cot x - m \neq 0 \quad \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 82. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8-2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = -4$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 8 - 2m$, hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

$$y = x^3 - 2mx^2 - (m^2 - 5m + 6)x + m + 1$$

đồng biến trên trên $(-\infty; 0)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx - (m^2 - 5m + 6)$. $\Delta = 7m^2 - 15m + 18 > 0$ với mọi m Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $y' = 0$. Do đó để hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2;3).$$

Vậy không tồn tại m nguyên thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của X bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = (2m-1) + (3m+2)\sin x$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì: $y' \le 0, \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m(2+3\sin x) \le 1 - 2\sin x$

Đặt $t = \sin x$. Điều kiện $-1 \le t \le 1$. Bất phương trình trở thành : $m(2+3t) \le 1-2t$ (1)

Trường hợp 1: $t = -\dfrac{2}{3}$. Bất phương trình (1) luôn đúng.

Trường hợp 2: $t < -\dfrac{2}{3} \Rightarrow m \ge \dfrac{1-2t}{2+3t} = g(t)$

$g'(t) = \dfrac{-7}{(3t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right)$.

$g(-1) = -3; \lim\limits_{x \to -\left(\frac{2}{3}\right)^-} = -\infty \Rightarrow m \ge -3$ (2)

Trường hợp 3: $t > -\dfrac{2}{3} \Rightarrow m \le \dfrac{1-2t}{2+3t} = g(t)$

$g'(t) = \dfrac{-7}{(3t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right)$.

$g(-1) = -3; \lim\limits_{x \to -\left(\frac{2}{3}\right)^+} = +\infty \Rightarrow m \le -\dfrac{1}{5}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $-3 \le m \le -\dfrac{1}{5}$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Tổng các giá trị của m là -6.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Số giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

A. 2. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Chia cả hai vế của phương trình cho 2^{x^2} ta được: $\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (1)

Ta có $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$.

Đặt $t = \left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$. Điều kiện $0 < t \le 1$.

Lúc đó $\Rightarrow \left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{t}$.

Phương trình (1) tương đương với $t + \dfrac{m}{t} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}t - t^2 = f(t)$.

$f'(t) = \dfrac{1}{2} - 2t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Với mỗi giá trị của $t \neq 1, t > 0$ thì phương trình sẽ có 2 nghiệm của x.

Như vậy để phương trình có đúng 2 nghiệm thực phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{16} \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

Do m nguyên nên $m = 0$.

Thử lại: Khi $m = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Gọi K là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2 = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$. K là tập con của tập hợp nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(1-\sqrt{2}; 2\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **D.** $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

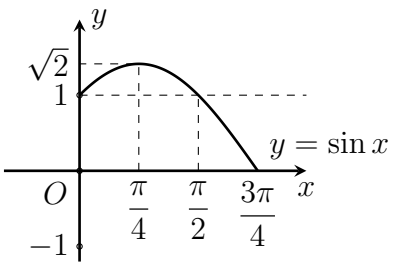
Ta có:

$$\begin{aligned} &\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2 = m \\ \Leftrightarrow\ &\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 3 = m \\ \Leftrightarrow\ &(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 3 = m \\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})\right)^2 + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 3 = m \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.

Điều kiện: Do $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ với $x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$.



Từ đồ thị ta thấy: Với mỗi giá trị của t mà $1 < t < \sqrt{2}$ thì sẽ có 2 giá trị của $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ thỏa mãn $t = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Với mỗi giá trị của t mà $0 < t \leq 1$ thì sẽ có một giá trị của $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ hoặc $t = \sqrt{2}$ thỏa mãn thỏa mãn $t = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Phương trình (1) tương đương với : $f(t) = t^2 + t - 3 = m$.

$f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(0; \sqrt{2}\right]$ Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(0; \sqrt{2}\right]$ Ta có bảng biến thiên của hàm $f(t)$ như sau:

t	0		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

Phương trình $m = f(t)$ chỉ có 1 nghiệm duy nhất.

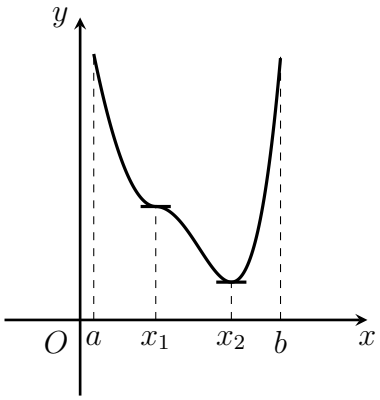
Để phương trình có đúng 2 nghiệm thì $t \in \left(1; \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow f(1) < m < f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow -1 < m < \sqrt{2} - 1$.

Vậy tập hợp của m là tập con của $\left(-\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 87.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau



A. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(x_1; x_2)$.

B. $f'(x) > 0, \forall x \in (x_2; b)$.

C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(a; x_2)$.

D. $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_2)$.

Lời giải.

Tại x_1 tiếp tuyến song song với trục hoành nên $f'(x_1) = 0$.

Suy ra khẳng định **sai** là $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 - mx + \dfrac{3}{28x^7}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m \leq -\dfrac{15}{4}$. **B**. $-\dfrac{15}{4} \leq m \leq 0$. **C**. $m \geq -\dfrac{15}{4}$. **D**. $-\dfrac{15}{4} < m \leq 0$.

Lời giải.

Ta cần có $y' \leq 0,\ \forall x > 0 \Leftrightarrow -3x^2 - \dfrac{3}{4x^8} - m \leq 0,\ \forall x > 0 \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \dfrac{3}{4x^8},\ \forall x > 0$

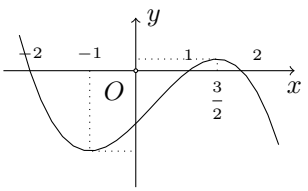
Như vậy $m \geq \max\limits_{x>0} f(x)$ với $f(x) = -3x^2 - \dfrac{3}{4x^8}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{6}{x^9} - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Nên $\max\limits_{x>0} f(x) = -\dfrac{15}{4}$. Vậy $m \geq -\dfrac{15}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 89.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau



A. $(1;2)$. **B.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

Suy ra $f(x)\le 0$ với mọi x và $f(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Ta có $y'=2f'(x).f(x)$. Dấu của y' chính là dấu của $-f'(x)$.

Do đó ta có $y'<0\Leftrightarrow x<-2$ hoặc $1<x<2$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên $(0;\pi)$

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** vô số.

Lời giải.

Ta có

$$y'=-\sin x.\cos^2 x+\frac{4}{\sin^2 x}+(m+1)\sin x=\sin^3 x+\frac{4}{\sin^2 x}+m\sin x.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0\ \forall x\in(0;\pi)$, hay

$$\sin^3 x+\frac{4}{\sin^2 x}+m\sin x\ge 0\ \forall x\in(0;\pi)\Leftrightarrow t^2+\frac{4}{t^3}\ge -m\ \forall t\in(0;1],$$

với $t=\sin x$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{4}{t^3},\ t\in(0;1]$,ta có

$$f'(t)=2t-\frac{12}{t^4}=\frac{2(t^5-6)}{t^4}<0\ \forall t\in(0;1]\Rightarrow\min_{(0;1]}f(t)=f(1)=5.$$

Do đó ta có $5\ge -m\Leftrightarrow m\ge -5$. Suy ra $m\in\{-5,-4,-3,-2,-1\}$ nên có 5 giá trị của m.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\in(-\infty;3]$. **B.** $m\in[-3;3]$. **C.** $m\in[3;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{32x}{16x^2+1} - m - 1$.

Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ thì $\dfrac{32x}{16x^2+1} - m - 1 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Hay $f(x) = \dfrac{32x}{16x^2+1} - 1 \le m,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{32(1-16x^2)}{(16x^2+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Ta xét bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

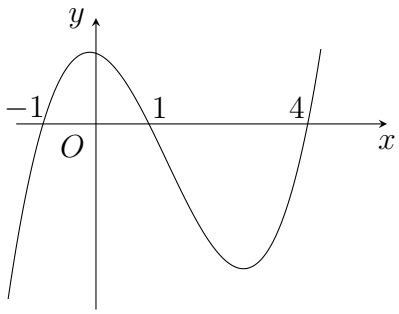
Từ bảng biến thiên thì $m \ge 3$. Vậy $m \ge 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 92.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(3-2x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng bên dưới?

A. $(1;2)$. **B**. $(2;+\infty)$. **C**. $(-\infty;1)$. **D**. $(-1;1)$.



Lời giải.

Đặt $g(x) = f(3-2x) + 2018$ ta có $g'(x) = [f(3-2x)+2018]' = -2f'(3-2x)$.

Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l} -1 < 3-2x < 1 \\ 3-2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

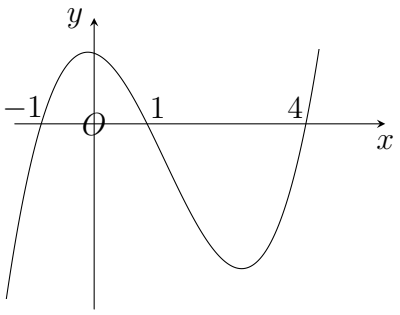
Vậy hàm số $y = f(3-2x) + 2018$ nghịch biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 93.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y=f(3-2x)+2018$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng bên dưới?

A. $(1;2)$. **B**. $(2;+\infty)$. **C**. $(-\infty;1)$. **D**. $(-1;1)$.



Lời giải.

Đặt $g(x)=f(3-2x)+2018$ ta có $g'(x)=[f(3-2x)+2018]'=-2f'(3-2x)$.

Ta có $g'(x)<0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x)<0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0$.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l} -1<3-2x<1 \\ 3-2x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2 \\ x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(3-2x)+2018$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+(m-2)\,x^2+(2m+3)\,x+1$. Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;3)$ là

A. -1. **B**. 0 . **C**. 1 . **D**. -2.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2+2(m-2)x+2m+3$, hàm số nghịch biến trên $(0;3)$ khi và chỉ khi

$$y'\le 0,\ \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow 2m\le \frac{-x^2+4x-3}{x+1},\ \forall x\in(0;3)$$
$$\Leftrightarrow 2m\le g(x)=\frac{-x^2+4x-3}{x+1},\ \forall x\in(0;3).$$

$g'(x)=\dfrac{-x^2-2x+7}{(x+1)^2}, g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{8} \\ x=-1+\sqrt{8} \end{array}\right.$.

x	0		$-1+\sqrt{8}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	↗	$6-2\sqrt{8}$	↘	0

Từ đó suy ra $m\le -\dfrac{3}{2}$. Vậy m nguyên lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)>0, \forall x>\dfrac{1}{2^{2018}}$. Biết $f(1)=3$, khi đó mệnh đề nào có thể xảy ra?

A. $f(2018\cdot 2020)>f(2019^2)$. **B**. $f(3)+f(4)=6$.

C. $f(2)=\sqrt{10}-1$. **D**. $f\left(-\dfrac{1}{2018}\right)=2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) > 0, \forall x > \dfrac{1}{2^{2018}}$ suy ra hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2^{2018}}; +\infty\right)$.

- ☑ $\begin{cases} f(3) > f(1) \\ f(4) > f(1) \end{cases} \Rightarrow f(3) + f(4) > 6$ nên loại đáp án $f(3) + f(4) = 6$.
- ☑ $f(2) > f(1)$ nên loại đáp án $f(2) = \sqrt{10} - 1$.
- ☑ $2018 \cdot 2020 < 2019^2 \Rightarrow f(2018 \cdot 2020) < f(2019^2)$ nên loại đáp án $f(2018 \cdot 2020) > f(2019^2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 96. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2; 4]$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 3$.

TH1: Với $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Khi $m = -1$ thì $y' = 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $m = 1$ thì $y' = 4x + 3 > 0 \forall x > \dfrac{-3}{4}$, suy ra hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH2: Với $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ (m+1)^2 - 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m < -1. \end{array}\right.$$

Từ hai trường hợp trên, suy ra $m \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Vì m nguyên và m thuộc $[-2; 4]$ nên $m \in \{-2; -1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1; 4]$.

A. $m \leq \dfrac{1}{2}$. **B.** $\forall m \in \mathbb{R}$. **C.** $\dfrac{1}{2} < m < 2$. **D.** $m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m$.

Điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[1;4]$ là

$$\begin{aligned} & y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m \geq 0, \forall x \in [1;4] \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x \geq 2m(x+2), \forall x \in [1;4] \\ \Leftrightarrow \quad & 2m \leq x, \forall x \in [1;4] \\ \Leftrightarrow \quad & 2m \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & m \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy, với $m \leq \dfrac{1}{2}$ thì hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.
Chọn đáp án A □

Câu 98. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. 2017. **B**. 2019. **C**. 2020. **D**. 2018.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số đã cho có hữu hạn nghiệm nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi đạo hàm của nó không âm trên $\mathbb{R}$ hay

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geq m, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ nên $f(x) \geq m, \ \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \leq -1$. Vậy có 2018 số nguyên m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 99. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & \text{Hàm số } y \text{ đồng biến trên } (0;+\infty) \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5} \geq 0, \forall\, x \in (0;+\infty) \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 2(m-1), \forall\, x \in (0;+\infty) \\ \Leftrightarrow \quad & 2(m-1) \leq \min_{(0;+\infty)} \left(3x^2 + \frac{1}{x^6}\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 3x^2 + \frac{1}{x^6} &= x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \\ &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^6}} \\ &\geq 4 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Từ (2) ta được $\min\limits_{(0;+\infty)}\left(3x^2+\dfrac{1}{x^6}\right)=4$.

Từ (1) ta được $2(m-1)\le 4 \Leftrightarrow m\le 3$.

Vậy $m\in\{1;2;3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(m+1)\dfrac{x^2}{2}+(m+1)x-3$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-(m+1)x+(m+1)$.

Do tam thức bậc 2 luôn có hữu hạn nghiệm nên để hàm số đồng biến trên đoạn $(1;+\infty)$ thì

$$\begin{aligned}&y'\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)\\ \Leftrightarrow&x^2-(m+1)x+(m+1)\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty)\\ \Leftrightarrow&x^2\ge(m+1)(x-1)\ \forall x\in(1;+\infty)\\ \Leftrightarrow&x+\dfrac{1}{x-1}\ge m\ \forall x\in(1;+\infty).\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$, ta có:

$g'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2=1\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Vậy $m\le 3$ hay có 3 giá trị nguyên dương của m.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. A	5. D	6. C	7. A	8. A	9. C	10. C
11. A	12. C	13. B	14. A	15. A	16. B	17. A	18. B	19. B	20. C
21. D	22. B	23. D	24. B	25. D	26. A	27. C	28. A	29. A	30. B
31. C	32. A	33. A	34. C	35. A	36. C	37. C	38. C	39. A	40. B
41. B	42. A	43. B	44. A	45. C	46. D	47. B	48. B	49. D	50. A
51. C	52. B	53. B	54. A	55. B	56. C	57. C	58. B	59. B	60. A
61. C	62. A	63. D	64. D	65. B	66. C	67. A	68. B	69. C	70. A
71. D	72. C	73. B	74. A	75. C	76. C	77. D	78. C	79. B	80. C
81. B	82. A	83. A	84. B	85. D	86. C	87. D	88. C	89. A	90. C
91. C	92. A	93. A	94. D	95. D	96. B	97. A	98. D	99. C	100. C

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho phương trình $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0$. Tập S là tập hợp các giá trị của m nguyên để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 15. **B**. 9. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có: $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0 \Leftrightarrow (2x^3+3x+m)+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=x^3+3x^2+5x+3$
$\Leftrightarrow (2x^3+3x+m)+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=(x+1)^3+2(x+1)$ (1)
Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$, TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$
có $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó: (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x^3+3x+m}\right)=f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3+3x+m}=x+1 \Leftrightarrow m=-x^3+3x^2+1$ (2).
Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có: $g'(x)=-3x^2+6x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<m<5$.
Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in S=\{2;3;4\} \Rightarrow \sum m=2+3+4=9$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y=|x^3-mx+1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B**. 10. **C**. 1. **D**. 9.

Lời giải.

Cách giải:
Xét hàm số $y=f(x)=x^3-mx+1, f'(x)=3x^2-m$.
Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|=|x^3-mx+1|$ được dựng từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách giữ lại phần đồ thị hàm số phái trên trục Ox và lấy đối xứng phần phái dưới Ox qua trục Ox (xóa bỏ phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phái dưới Ox).
TH1: Với $m=0$ ta có hàm số $y=f(x)=x^3+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Có $f(1)=2>0 \Rightarrow$ Hàm số $y=|f(x)|=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.
$\Rightarrow m=0$: thỏa mãn.
TH2: Với $m>0$ ta có:
$f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1<x_2)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{m}{3} + 1 \ge 0 \\ 2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 2.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{1; 2\}$.
Vậy, $S = \{0; 1; 2\}$. Số phần tử của S là 3.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2010. **B**. 2012. **C**. 2011. **D**. 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] \\ &= -(x-1)^2(-1-x)(x^2 + 4x + m - 5) = (x-1)^2(x+1)(x^2 + 4x + m - 5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow$ $g'(x) \le 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$
$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x^2 + 4x + m - 5) \le 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + 4x + m - 5 \ge 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$ (Do $x \in (-\infty; -1) \Rightarrow x + 1 < 0$)
$\Leftrightarrow$ $h(x) = x^2 + 4x - 5 \ge -m$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$
$\Leftrightarrow$ $-m \le \min\limits_{x \in (-\infty; -1]} h(x)$.

Ta có $h'(x) = 2x + 4$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	-9	↗	

Do đó $-m \leq -9 \Leftrightarrow m \geq 9$. Mặt khác $m \in [-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \cdots; 2019\}$ hay có $2019 - 9 + 1 = 2011$ giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x) \cdot f''(x) = [f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 1 nghiệm. **B**. 4 nghiệm. **C**. 3 nghiệm. **D**. 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét đa thức bậc 4 $g(x) = 2f(x)f''(x) - (f'(x)')^2$.

Ta có $g'(x) = 2f(x)f'''(x) = 12f(x)$.

Vì $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên $g(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm.

Vậy phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có tối đa bốn nghiệm.

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$ là ba nghiệm của $f(x) = 0$.

Mà các nghiệm này đều phân biệt nên ta có $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$ đều khác 0.

Ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= 2f(x_1)f''(x_1) - (f'(x_1))^2 = -(f'(x_1))^2 < 0 \\ g(x_2) &= 2f(x_2)f''(x_2) - (f'(x_2))^2 = -(f'(x_2))^2 < 0 \\ g(x_3) &= 2f(x_3)f''(x_3) - (f'(x_3))^2 = -(f'(x_3))^2 < 0 \end{aligned}$$

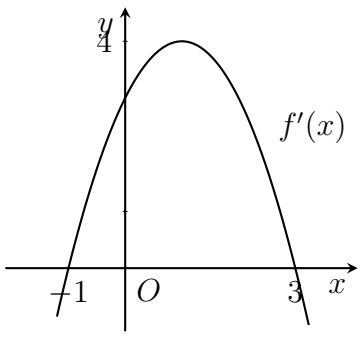
Nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Do đó phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1; +\infty)$. **B**. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **C**. $(-\infty; -1)$. **D**. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 8x^3 \cdot f'(2x^4 - 1)$

TH1: $x \geq 0$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$f'(2x^4-1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^4-1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$
$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \sqrt[4]{2}\right]$.

TH2: $x < 0$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$$f'(2x^4-1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x^4-1 \leq -1 \\ 2x^4-1 \geq 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 (L) \\ x^2 \geq \sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq \sqrt[4]{2} \\ x \leq -\sqrt[4]{2}. \end{bmatrix}$$

So sánh với điều kiện$x < 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[0; \sqrt[4]{2}\right]$ và $\left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị khác nhau của tham số m để hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

A. $m < -2$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $-2 < m \leq 1$. **D.** $-2 < m < 1$.

Lời giải.

ĐK: $5^{-x} \neq m$. Đặt $t = 5^{-x}$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ (1), suy ra $t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$, $f'(t) = \dfrac{-m-2}{(t-m)^2}$.

Do (1), để hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì hàm số $f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < 0 \\ m \notin (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như bên dưới

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 0)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3.f'(x+3) - 3x^2 + 12$.

Đặt $t = x+3 \Rightarrow x = t-3$ ta có $y' = 3f'(t) - 3(t-3)^2 + 12 = 3f'(t) - 3t^2 + 18t - 15$.

Để hàm số nghịch biến thì $y' < 0 \Leftrightarrow 3.f'(t) - 3t^2 + 18t - 15 < 0 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 - 6t + 5$.

Ta chọn t sao cho $\begin{cases} f'(t) < 0 \\ t^2 - 6t + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \vee t > 5 \\ t < 1 \vee t > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 < t < 1 \\ t > 5. \end{bmatrix}$

Mà $t = x+3$ nên $\begin{bmatrix} -1 < t < 1 \\ t > 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 < x+3 < 1 \\ x+3 > 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 < x < -2 \\ x > 2. \end{bmatrix}$

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên $(-4; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m^2+4m+5)x + 2019$ và $g(x) = (m^2+2m+5)x^3 - (2m^2+4m+9)x^2 - 3x + 2$ (với m là tham số). Hỏi phương trình $g(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có

$$g(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left((m^2+2m+5)x^2+x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (m^2+2m+5)x^2+x-1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 với $\forall m$ vì $\begin{cases} m^2+2m+5 > 0, \forall m \\ \Delta = 1+(m^2+2m+5) > 0, \forall m \\ (m^2+2m+5).2^2+2-1 \neq 0, \forall m \end{cases}$

Vậy $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt (1).

Mặt khác, xét hàm số $y=f(x)$ ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2-2(m+1)x+(3m^2+4m+5) \\ &= (x-(m+1))^2+2(m^2+m+2) > 0 \forall m \end{aligned}$$

$\Rightarrow y=f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với $\forall m$

Do $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và đồng biến trên nên phương trình $f(x)=k$ luôn có 1 nghiệm duy nhất với mỗi số $k \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(f(x))=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y}-2^y+x=2y \\ 2^x+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases}$ (1), m là tham số.

Gọi S là tập các giá trị nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ để đưa về dạng $f(u)=f(v)$ mà f là hàm đơn điệu nên suy ra $u=v$.

Từ đó ta tìm được mối liên hệ giữa x và y.

+ Thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình ẩn y. Lập luận phương trình này có nghiệm duy nhất thì hệ ban đầu sẽ có nghiệm duy nhất.

+ Biến đổi để chỉ ra nếu y_0 là nghiệm thì $-y_0$ cùng là nghiệm của phương trình ẩn y, từ đó suy ra

$y_0 = 0$.

Thay vào phương trình để tìm m.

+ Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để thử lại m.

Cách giải:

Điều kiện $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1;1]$.

+ Xét phương trình $2^{x-y} - 2^y + x = 2y \Leftrightarrow 2^{x-y} + x - y = 2^y + y$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0; \forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $2^{x-y} + x - y = 2^y + y \Rightarrow f(x-y) = f(y) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.

+ Thay $x = 2y$ vào phương trình $2^x + 1 = (m^2+2) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2}$, ta được

$$2^{2y} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 4^y + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} (*)$$

Để hệ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $y \in [-1;1]$

Giả sử $y_0 \in [-1;1]$ là một nghiệm của phương trình (*) thì ta có

$$4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^{y_0} \cdot sqrt1 - y_0^2 (**)$$

Xét với $-y_0$ ta có $4^{-y_0} + 1 = (m^2+2) \cdot 2^{-y_0} \cdot \sqrt{1-(-y_0)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4^{y_0}} + 1 = (m^2+2)\dfrac{1}{2^{y_0}}\sqrt{1-y_0^2}$

$\Leftrightarrow 4^{y_0} + 1 = (m^2+2) \cdot 2^{y_0} \cdot \sqrt{1-y_0^2}$ (đúng do (**) hay $-y_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

Do vậy để (*) có nghiệm duy nhất thì $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$.

Thay $y = 0$ vào (*) ta được $4^0 + 1 = (m^2+2) \cdot 2^0\sqrt{1-0^2} \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại: Thay $m = 0$ vào (*) ta được $4^y + 1 = 2 \cdot 2^y\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 2^y + \dfrac{1}{2^y} = 2\sqrt{1-y^2}$ (***)

Nhận thấy rằng vế trái (***) $= 2^y + \dfrac{1}{2^y} \overset{\text{Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{2^y} \cdot \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow VT(***) \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2^y = \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow y = 0$

Và $VP(***) = 2\sqrt{1-y^2} \leq 2 \Leftrightarrow VP(***) = 2 \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy phương trình (***) có nghiệm duy nhất $y = 0$.

Kết luận: Với $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất nên tập S có một phần tử.

Chú ý:

Các em có thể làm bước thử lại như sau:

Thay $m = 0$ vào (*) ta được

$4^y + 1 = 2.2^y\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow (2^y)^2 - 2.2^y\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^y - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + y^2 = 0$

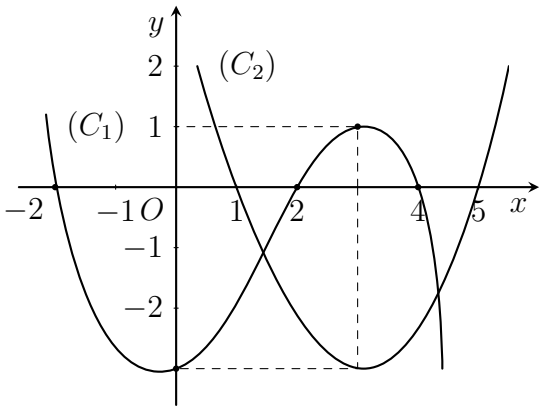
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y - \sqrt{1-y^2} = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^0 - \sqrt{1-0} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$

Chọn đáp án Ⓑ □

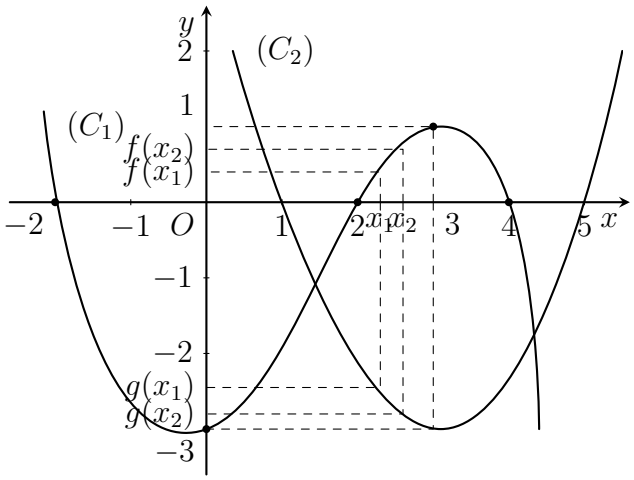
Câu 10.

Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B**. $(4;5)$. **C**. $(2;3)$. **D**. $(0;1)$.



Lời giải.



Ta xét khoảng $(2;3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;3), x_1 < x_2$ ta có:

$$\begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 > g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < -g(x_1) < -g(x_2). \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1).[-g(x_1)] < f(x_2).[-g(x_2)] \Rightarrow f(x_1).g(x_1) > f(x_2).g(x_2).$$

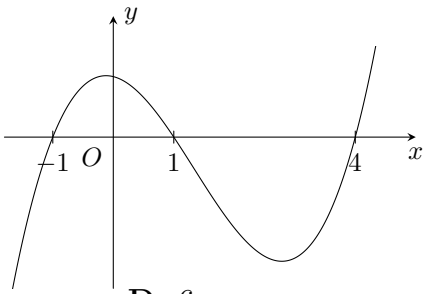
$$\Rightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

Hay hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11.

Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ trong đó m, n, p, q, $r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



A. 5. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 1 và 4. Suy ra $m \neq 0$.
Khi đó $f'(x)=4m(x+1)(x-1)(x-4)=4m(x^3-4x^2-x+4)$. Suy ra

$$f(x)=m\left(x^4-\frac{16}{3}x^3-2x^2+16x\right)+C.$$

Đồng nhất với $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ ta được $\begin{cases} n=-\dfrac{16m}{3} \\ p=-2m \\ q=16m \\ r=C \end{cases}$.

Từ đó, $f\,(x)=16m+8n+4p+2q+r$

$\Leftrightarrow mx^4-\dfrac{16m}{3}x^3-2mx^2+16mx+r=16m+8\cdot\left(-\dfrac{16m}{3}\right)+4\cdot(-2m)+2.16m+r$

$\Leftrightarrow mx^4-\dfrac{16m}{3}x^3-2mx^2+16mx+\dfrac{8}{3}m=0\Leftrightarrow x^4-\dfrac{16}{3}x^3-2x^2+16x+\dfrac{8}{3}=0$ (vì $m\neq 0$).

Xét hàm số $g(x)=x^4-\dfrac{16}{3}x^3-2x^2+16x+\dfrac{8}{3}$. Ta có

$$g'(x)=4\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$\dfrac{37}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{152}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $g(x)=0$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tìm các mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$. **B.** $a+2b\geq\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$. **C.** $a^2+b^2\leq 4$. **D.** $a+2b=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=2+a\cos x-b\sin x$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2+a\cos x+b\sin x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\quad(*)$$

Mà $2+a\cos x+b\sin x\geq 2-\sqrt{a^2+b^2},\forall x\in\mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{\cos x}=\dfrac{b}{\sin x}<0$).

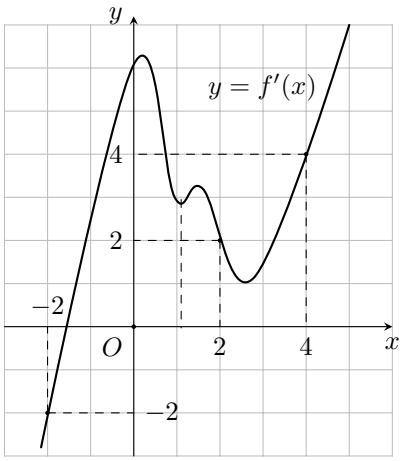
Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x)=2-\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 13.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x)=2f(3x+1)-9x^2-6x+4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

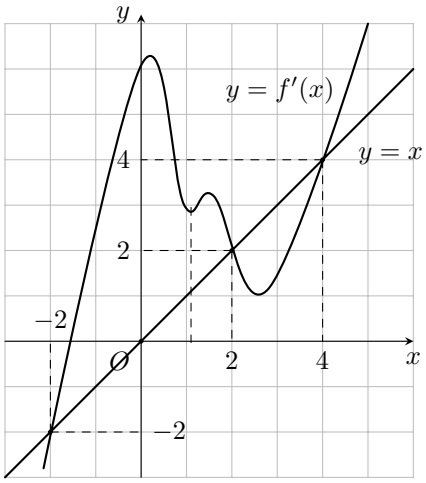
C. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $h'(x)=6f'(3x+1)-6(3x+1)$. Xét bất phương trình

$$h'(x)>0\Leftrightarrow 6f'(3x+1)-6(3x+1)>0\Leftrightarrow f'(3x+1)>3x+1\ (*).$$



Từ đồ thị trên ta vẽ thêm đường thẳng $y=x$.

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Xét trên khoảng $(-2;4)$ thì $f'(x)>x\Leftrightarrow -2<x<2$.

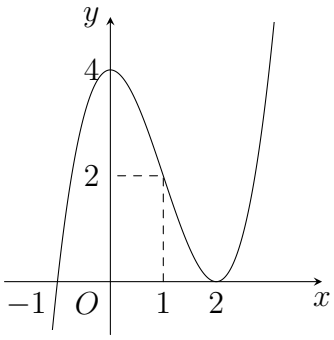
Do đó $(*)\Leftrightarrow -2<3x+1<2\Leftrightarrow -1<x<\dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 14.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt Ox tại điểm $(2;0)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;+\infty)$. **B**. $(-\infty;0)$. **C**. $(-2;0)$. **D**. $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Từ đồ thị đã cho ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

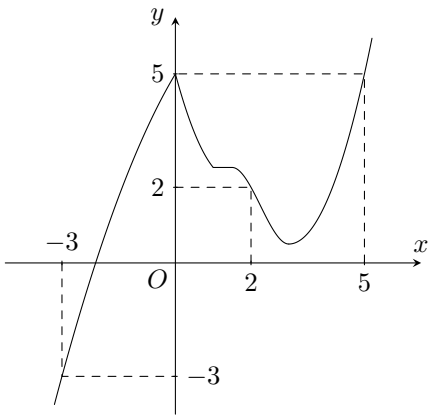
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta nhận thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

$(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 15.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$.

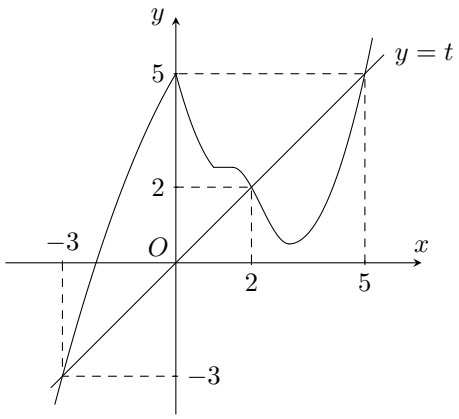
C. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$ nên

$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1 \Leftrightarrow f'(t)<t$.

Xét hàm số $y=f'(t)$ có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng $y=t$.



Ta có $f'(t)=t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=2 \\ t=5. \end{array}\right.$

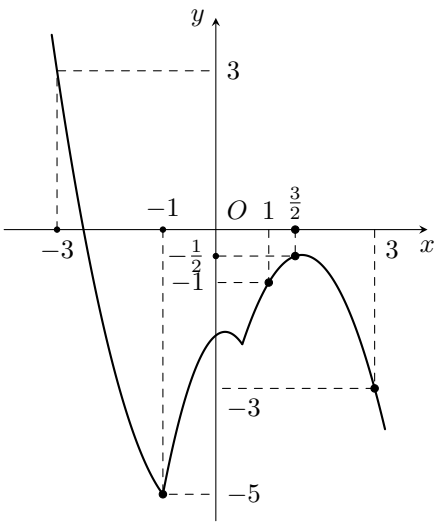
Dựa vào đồ thị, ta có $f'(t)<t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<t<5 \\ t<-3. \end{array}\right.$

Suy ra $g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<-2x+1<5 \\ -2x+1<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<-\frac{1}{2} \\ x>2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 16.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



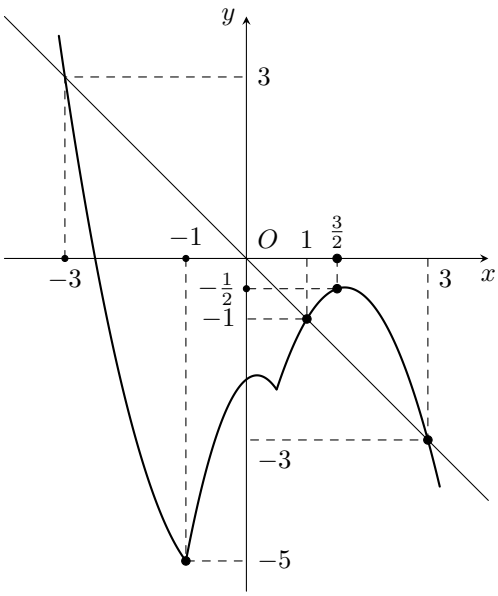
;

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -f'(1-x) + x - 1$.
Hàm số đã cho nghịch biến khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & -f'(1-x) + x - 1 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & f'(1-x) \ge -(1-x) \end{aligned}$$



;

Đặt $t = 1 - x$, ta có $f'(t) \le -t$.
Dựa vào đồ thị $f'(t) \ge -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -3 \\ 1 \le t \le 3. \end{array}\right.$

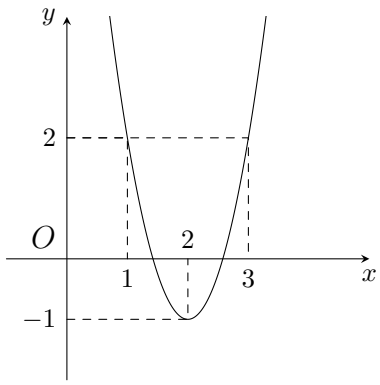
- ☑ $t \le -3 \Rightarrow 1 - x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 4$.
- ☑ $1 \le t \le 3 \Rightarrow 1 \le 1 - x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $[-2; 0]$ và $[4; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x-2) + 2$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

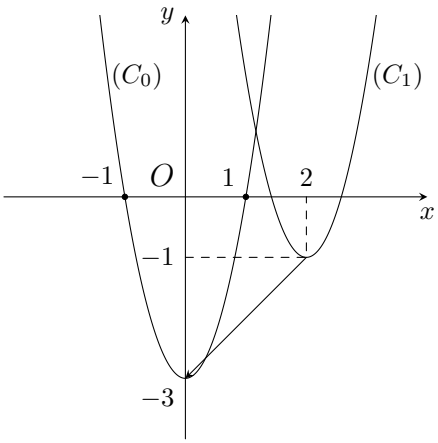


A. $(-1; 1)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

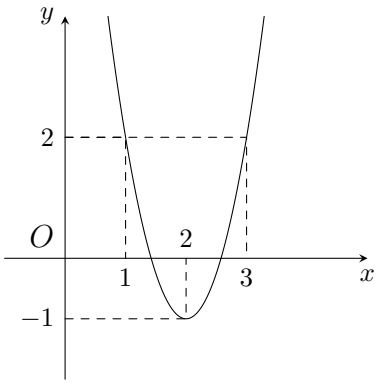
① Cách 1:

- ☑ Từ đồ thị (C_1) của hàm số $y = f'(x-2) + 2$ ta thu được đồ thị đồ thị (C_0) bằng cách tiện tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2; -2)$.
- ☑ Từ đồ thị (C_0) của $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.



② Cách 2:

Hàm số nghịch biến khi $f'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x+2-2)+2<2 \quad (1)$.
Đặt $t=x+2$ thì (1) trở thành $f'(t-2)+2<2 \Leftrightarrow 1<t<3$.
Ta được $1<x+2<3 \Leftrightarrow -1<x<1$.



Chọn đáp án A □

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= m^2x^4-mx^2+20x-m^2+m+20 \\ &= (x+1)\left[m^2x^3-m^2x^2+(m^2-m)x-m^2+m+20\right] \\ &= (x+1)\left[(x+1)(m^2x^2-2m^2x+3m^2-m)-4m^2+2m+20\right]. \end{aligned}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+1=0 & (1) \\ (x+1)(m^2x^2-2m^2x+3m^2-m)-4m^2+2m+20=0 & (2) \end{bmatrix}.$$

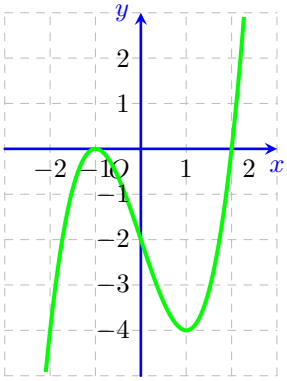
Hàm số đồng biến trên R tương đương với $y'\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra $x=-1$ là nghiệm kép của $y'=0$ tức là $x=-1$ là nghiệm của phương trình $(2) \Rightarrow -4m^2+2m+20=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} m=-2 \\ m=\frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Với $m=-2$, ta có $f'(x)=(x+1)^2\cdot(4x^2-8x+14)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Với $m=\frac{5}{2}$, ta có $f'(x)=\frac{5}{4}(x+1)^2\cdot(5x^2-10x+13)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Vậy $m=-2$ và $m=\frac{5}{2}$ đều thỏa yêu cầu bài toán. Do đó tổng cần tìm bằng $\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19.

Cho hàm số $y=f(x)$có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.
B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f\left(x^2-2\right)$

$g'(x) = f'\left(x^2-2\right).2x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f'\left(x^2-2\right) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2-2 = -1 \\ x^2-2 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{bmatrix}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

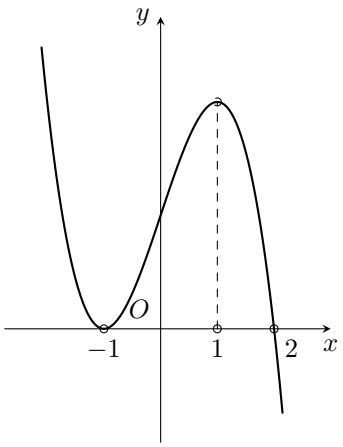
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ là sai.

Chọn đáp án D □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào đúng về hàm số $g(x) = f^2(x)$?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có

Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $\begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 2 \end{bmatrix}$ trong đó $x = -1$ là nghiệm kép.

Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $\begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 1 \end{bmatrix}$ và $f'(x) > 0$ khi $-1 < x < 1$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x)$ có $g'(x) = 2f(x).f'(x)$.

Giải phương trình

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x) > 0$ khi $x \in (-1;1) \cup (2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-9}+4\sqrt{3x+1}=25$.

A. 2 nghiệm. **B**. 3 nghiệm. **C**. 4 nghiệm. **D**. 1 nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-9}+4\sqrt{3x+1}$.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-9}}+\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}>0, \forall x \in \left(\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Lại có hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$, nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Do đó trên $\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$, phương trình $f(x)=25$ có tối đa một nghiệm.

Vì $x=5$ thỏa mãn phương trình nên $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 & (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0. & (2) \end{cases}$$

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2$. (3)

Do $-1 \le x \le 1$ nên $0 \le x+1 \le 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2$ trên $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-6t \le 0, \forall t \in [0;2]$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại $t=0$ hoặc $t=2$).

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[0;2]$.

Suy ra phương trình $(3) \Leftrightarrow f(x+1)=f(y) \Leftrightarrow y=x+1$.

Thay vào phương trình (2) ta được $x^2-2\sqrt{1-x^2}+m=0 \Leftrightarrow (1-x^2)+2\sqrt{1-x^2}=m+1$ $(*)$.

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}, (0 \le t \le 1)$. Khi đó $(*)$ có dạng $t^2+2t=m+1$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $t^2+2t=m+1$ có nghiệm $t \in [0;1]$.

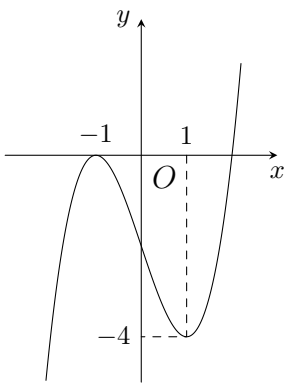
Ta có hàm $f(t)=t^2+2t$ đồng biến trên $[0;1]$ nên phương trình có nghiệm trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $0 \le m+1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$.

Vậy có 4 giá trị nguyên.

Chọn đáp án D □

Câu 23.

Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x^2-2)\cdot(x^2-2)'=2xf'(x^2-2)$.

Từ đồ thị ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow x>2$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x<2$ và $x\neq 1$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến thì

$$\begin{aligned}
g'(x)<0 &\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2-2\right)<0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'(x^2-2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'(x^2-2)>0\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x^2-2<2\\ x\neq -1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2-2>2\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ -2<x<2\\ x\neq -1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\ x<-2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ và $(-\infty;-2)$ nên D sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. 2009. **B**. 2010. **C**. 2011. **D**. 2012.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 6\left[x^2 + (m-1)x + (m-2)\right]$.

$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m \end{array}\right. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{l} -1 \neq 2 - m \\ |-1 - 2 + m| > 3 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} m \neq 3 \\ |m - 3| > 3 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m - 3 > 3 \\ m - 3 < -3 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{7; 8; 9 \ldots 2017\}$. Do đó có 2011 số m thỏa đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \in \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. **B**. $m \in \left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$. **C**. $m \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. **D**. $m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Cách 1:

$y' = -6\cos^2 x \sin x + 6\cos x \sin x + m\sin x = sin\left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right)$

Hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow \sin x\left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right) \leq 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (vì $\sin x > 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$)

$\Leftrightarrow \left(-6\cos^2 x + 6\cos x + m\right) \leq 0,\ \forall \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -6\cos^2 x + 6\cos x \leq -m,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

Xét $f(x) = -6\cos^2 x + 6\cos x,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0; 1)$.

Ta có $f(t) = -6t^2 + 6t$, $\forall t \in (0;1)$ là Parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và hệ số $a < 0$ nên có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$ tại $t = \frac{1}{2}$.

Để (1) xảy ra $\Leftrightarrow \max\limits_{(0;1} f(x) \le -m \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le -m \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}$

Cách 2: Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0;1)$.

Ta có $y = 2t^3 - 3t^2 - mt \Leftrightarrow y' = 6t^2 - 6t - m$.

Hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $y = 2t^3 - 3t^2 - mt$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0$, $\forall t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow 6t^2 - 6t - m \ge 0$, $\forall t \in (0;1) \Leftrightarrow f(t) = 6t^2 - 6t \ge m$, $\forall t \in (0;1)$.

Xét $f(t) = 6t^2 - 6t$, $\forall t \in (0;1)$; $f'(t) = 12t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)'$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \le -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

A. $m \ge -3$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m \le -3$. **D.** $m \le 0$.

Lời giải.

☑ Ta có $y = f(x) = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$ (1). Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;0]$.

☑ Hàm số (1) trở thành $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$. (2)

☑ Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số (2) nghịch biến trên $[-1;0] \Leftrightarrow g'(t) \le 0, \forall t \in [-1;0]$ ($g'(t) = 0$ tại hữa hạn điểm).

☑ Xét hàm số $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ trên $[-1;0]$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 6t - m$. Suy ra

$$\begin{aligned} g'(t) \le 0,\ t \in [-1;0] &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \le 0 \quad \forall t \in [-1;0] \\ &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t \le m, \quad \forall t \in [-1;0]. \end{aligned}$$

☑ Xét hàm số $y = h(t) = 3t^2 + 6t$ trên đoạn $[-1;0]$.

Ta có $h'(t) = 6t + 6 \ge 0$, $t \in [-1;0] \Rightarrow h(t)$ đồng biến trên $[-1;0]$. Vậy $\max\limits_{[-1;0]} h(t) = h(0) = 0$.

Tức là $g'(t) \le 0$, $t \in [-1;0] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;0]} h(t) \le m$, $t \in [-1;0]$. Do đó, $m \ge 0$.

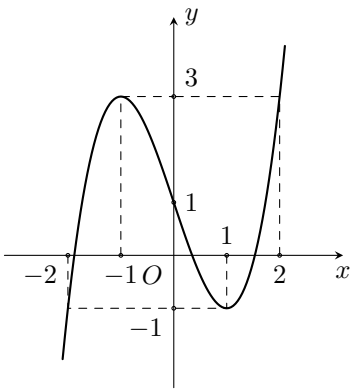
Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in [0;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2018$ giảm trên khoảng

A. $(-\infty; 1)$. **B**. $(2; +\infty)$. **C**. $(0; 1)$. **D**. $(1; 2)$.



Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2018$ khi đó $y' = 2(x-1) f'(x^2 - 2x + 1)$.

Để hàm số nghịch biến khi $y' \le 0 \Leftrightarrow 2(x-1) f'(x^2 - 2x + 1) \le 0$,

ở đó dấu đẳng thức xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

Nếu $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ suy ra

$$\begin{aligned} f'\left(x^2 - 2x + 1\right) \le 0 &\Leftrightarrow -1 \le x^2 - 2x + 1 \le 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 2x \le 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2. \end{aligned}$$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

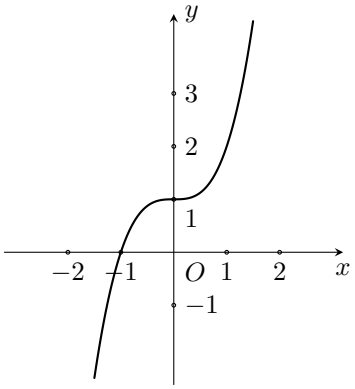
Câu 28.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$f\left(16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8\right) = f(m(m+1))$$

có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?

A. 10. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 6.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} & f\left(16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8\right) = f(m(m+1)) \\ \Leftrightarrow\ & 16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8 = m(m+1) \\ \Leftrightarrow\ & 8(\cos 2x + 1) + 6\sin 2x - 8 = m(m+1) \\ \Leftrightarrow\ & 8\cos 2x + 6\sin 2x = m(m+1). \end{aligned}$$

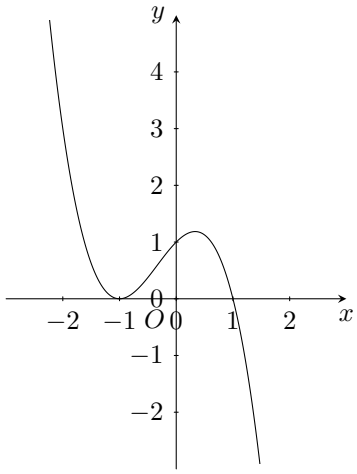
Để phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$m^2(m+1)^2 \le 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow m^2(m+1)^2 \le 100$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(m+1) \le 10 \\ m(m+1) \ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-10 \le 0 \\ m^2+m+10 \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad m^2+m-10 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{41}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{41}}{2}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 29.
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(1)=1, f(-1)=-\frac{1}{3}$. Đặt $g(x)=f^2(x)-4f(x)$. Cho biết đồ thị của $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số $g(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.
Từ hình vẽ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \le 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
Ta có $g(x)=f^2(x)-4f(x) \Rightarrow g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-4f'(x)=2f'(x)\cdot(f(x)-2)$.
Vì $f(x) \le 1 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)-2<0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘	-3	↗	

Từ bảng biên thiên suy ra hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $y=\left|\sin^3 x - m\sin x + 1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến.

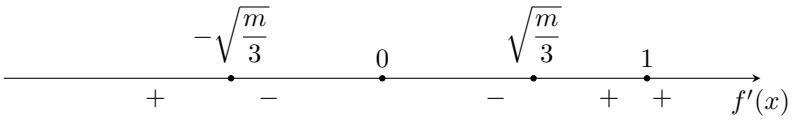
Đặt $t=\sin x, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\sin x+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y=f(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1)$.

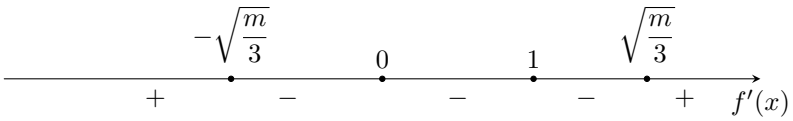
Xét hàm số $y=f(t)=|t^3-mt+1|$ trên khoảng $(0;1)$ có $f'(t)=3t^2-m$.

☑ Khi $m=0: f'(x)=3x^2>0,\forall x\Rightarrow y=f(x)=x^3+1$ đồng biến trên $(0;1)$.
Và đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+1$ cắt Ox tại điểm duy nhất $x=-1$.
$\Rightarrow y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1)\Rightarrow m=0$ thoả mãn.

☑ $m>0: f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1=-\sqrt{\frac{m}{3}}, x_2=\sqrt{\frac{m}{3}}$.
Hàm số $y=f(x)=x^3-mx+1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\frac{m}{3}};+\infty\right)$.
Nhận xét: $(0;1)\not\subset\left(\sqrt{\frac{m}{3}};+\infty\right),(0;1)\not\subset\left(-\infty;-\sqrt{\frac{m}{3}}\right),\forall m>0$.
TH1:$-\sqrt{\frac{m}{3}}<0<\sqrt{\frac{m}{3}}<1\Leftrightarrow 0<m<3$



Để $y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $x^3-mx+1=0$ có nghiệm (bội lẻ) là $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$
$\Rightarrow \frac{m\sqrt{m}}{3\sqrt{3}}-\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{3}}+1=0\Leftrightarrow -2m\sqrt{m}+3\sqrt{3}=0\Leftrightarrow m\sqrt{m}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow m=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$(TM).
TH2:$-\sqrt{\frac{m}{3}}<0<1\le\sqrt{\frac{m}{3}}\Leftrightarrow m\ge 3$

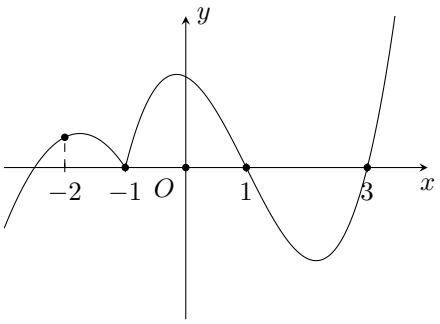


Để $y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $x^3-mx+1\le 0,\forall x\in(0;1)$
$\Rightarrow mx\le x^3+1,\forall x\in(0;1)\Rightarrow m\le x^2+\frac{1}{x},\forall x\in(0;1)$.
Xét hàm số $y=x^2+\frac{1}{x},\forall x\in(0;1)\Rightarrow y'=2x-\frac{1}{x^2}, y'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\in(0;1)$.
Hàm số liên tục trên $(0;1)$ và $y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}; y(1)=2; \lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty\Rightarrow \min\limits_{(0;1)} y=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.
Để $m\le x^2+\frac{1}{x},\forall x\in(0;1)$ thì $m\le\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow$ không có giá trị của m thoả mãn.
Vậy chỉ có giá trị $m=0$ thoả mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1\right) f(x) \geqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$?



A. 1. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Đặt $g(x) = mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1$.

Từ đồ thị của $y = f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x = 1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua $x = 1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 1$.

Kiểm tra: Với $m = -1$

Ta có $g(x) \cdot f(x) = \left(-x + \sqrt{5-x^2} - 1\right) f(x) = (1-x)\left(\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1\right) f(x)$.

Nhận xét: $\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1 = \dfrac{3+x+\sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}} > 0, \forall x[-2;2]$.

Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy

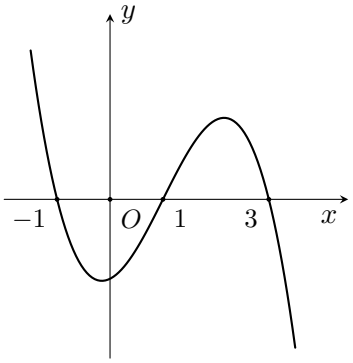
- ☑ Với $x \in [1;2]$ thì $f(x) \leqslant 0$ nên $(1-x)f(x) \geqslant 0$.
- ☑ Với $x \in [-2;1]$ thì $f(x) \geqslant 0$ nên $(1-x)f(x) \geqslant 0$.

Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x) \cdot f(x) \geqslant 0, \forall x \in [-2;2]$.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x-3)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(2;4)$. **B**. $(1;3)$. **C**. $(-1;3)$. **D**. $(5;6)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x-3)$.

Ta có $g'(x) = (x-3)' \cdot f'(x-3) = f'(x-3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3 < -1 \\ 1 < x-3 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ 4 < x < 6. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Tính số nghiệm của phương trình $\cot x = 2^x$ trong khoảng $\left(\dfrac{11\pi}{12}; 2019\pi\right)$.

A. 2020. **B**. 2019. **C**. 2018. **D**. 1.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ta có $\cot x = 2^x \Leftrightarrow \cot x - 2^x = 0$. (1)

Xét hàm số $f(x) = \cot x - 2^x$ trên $\left(\dfrac{11\pi}{12}\right), (\pi;2\pi), \ldots, (2018\pi;2019\pi)$.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} - 2^x \ln 2 < 0$ với $\forall x \in \left(\dfrac{11\pi}{12}\right), (\pi; 2\pi), \ldots, (2018\pi; 2019\pi)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Trên $\left(\dfrac{11\pi}{12}; \pi\right)$ ta có $f(x) < f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) \Rightarrow f(x) < \cot\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) - 2^{\dfrac{11\pi}{12}} < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm.

Ta có hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(\pi; 2\pi), \ldots, (2018\pi; 2019\pi)$ và trên mỗi khoảng đó hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Suy ra trên mỗi khoảng $(\pi; 2\pi), \ldots, (2018\pi; 2019\pi)$, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất. Vậy phương trình (1) có 2018 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$. **B.** $(-2; -1)$. **C.** $(-2; 1)$. **D.** $(-4; -3)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x)$ ta có:

$g'(x) = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = 2(x + 1)f'(x^2 + 2x)$.

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Xét đáp án A ta có: $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3f'\left(\dfrac{5}{4}\right) > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án A.

Xét đáp án C ta có: $g'\left(\dfrac{-3}{2}\right) = 2f'(0) > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án C.

Xét đáp án D ta có: $g'\left(-\dfrac{7}{2}\right) = -5f'\left(\dfrac{21}{4}\right) > 0 \Rightarrow$ Loại đáp án D.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 4037. **D.** 4038.

Lời giải.

Ta có: $2^x + 2^{-x} = 4 + 2cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\dfrac{\alpha x}{2} & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\dfrac{\alpha x}{2} & (2) \end{array}\right.$

Thay $x = 0$ vào phương trình (1) ta có $2^0 - 2^0 = 2\cos 0 \Leftrightarrow 0 = 1$ (Vô lí), kết hợp với giả thiết ta có phương trình (1) có 2019 nghiệm thực khác 0.

Với x_0 là nghiệm của phương trình (1)

$\Leftrightarrow 2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{-\frac{x_0}{2}} = 2\cos\dfrac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}} - 2^{\frac{-(-x_0)}{2}} = -2\cos\dfrac{\alpha(-x_0)}{2} \Rightarrow -x_0$ là nghiệm của phương trình (2).

Thay $x = -x_0$ vào phương trình (1) ta có:

$\Leftrightarrow 2^{-\frac{x_0}{2}} - 2^{\frac{x_0}{2}} = 2\cos\frac{\alpha(-x_0)}{2} = 2\cos\frac{\alpha x_0}{2} = 2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{\frac{-x_0}{2}}$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{\frac{x_0}{2}} = 2\cdot 2^{\frac{-x_0}{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x_0}{2}+1} = 2^{\frac{-x_0}{2}+1} \Leftrightarrow \frac{x_0}{1}+1 = -\frac{x_0}{1}+1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ (vô lí do $x_0 \neq 0$) $\Rightarrow -x_0$ không là nghiệm của phương trình (1), điều đó đảm bảo mọi nghiệm của phương trình (2) không trùng với nghiệm của phương trình (1).

Do đó phương trình (2) cũng có 2019 nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có $2019\cdot 2 = 4038$ nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\mathrm{e}^{3m} + \mathrm{e}^m = 2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm ?

A. $\left[\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{2}\ln 2\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\ln 2\right]$. **D.** $\left(0; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Lời giải.

Phương pháp:

- ☑ Đặt $x+\sqrt{1-x^2} = t$, tìm khoảng giá trị của t.
- ☑ Đưa bài toán về dạng $m = f(t)$. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Cách giải:

ĐKXĐ: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x+\sqrt{1-x^2} = t$ ta có $t^2 = x^2+1-x^2+2x\sqrt{1-x^2} = 1+2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$.

Ta có: $t(x) = x+\sqrt{1-x^2}, x\in[-1;1] \Rightarrow t'(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

BBT:

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$t'(x)$		$+$	0	$-$	
$t(x)$	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Từ BBT ta có: $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành: $\mathrm{e}^{3m}+\mathrm{e}^m = 2t\left(1+\frac{t^2-1}{2}\right) = t\left(t^2+1\right) = t^3+t\,(*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3+t$ ta có $f'(t) = 3t^2+1 > 0\ \forall t \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

Từ $(*) \Rightarrow f\left(\mathrm{e}^m\right) = f(t) \Leftrightarrow \mathrm{e}^m = t \Leftrightarrow m = \ln t \Rightarrow m\in\left(0;\ln\sqrt{2}\right) = \left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 2020. **B**. 2019. **C**. 2028. **D**. 2018.

Lời giải.

Phương pháp:

☑ Sử dụng công thức $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, đặt ẩn phụ $t = \sin x$.

☑ Để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b) \Rightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a;b)$.

Cách giải:

$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1 = \sin^3 x - 3\left(1 - \sin^2 x\right) - m\sin x - 1$.

$y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ đồng biến trên $[0;1]$.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow y' \geq 0\ \forall t \in [0;1] \Rightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0;1]$.

$\Rightarrow m \leq f(t) = 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;1]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$, ta có $f(0) = 0, f(1) = 9 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(t) = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in (-2019;0] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\Rightarrow$ Có 2019 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x}{x-m}$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

A. $m > 1$. **B**. $0 < m \leq 1$. **C**. $0 \leq m < 1$. **D**. $0 < m < 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $[1;+\infty)$ khi $m < 1$ $(*)$

$y' = \dfrac{-m}{(x-m)^2}$. Phải có $y' < 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta được $0 < m < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. $m > 0$. **B**. $m < -1$. **C**. $m \geq -1$. **D**. $m \geq 0$.

Lời giải.

$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow 0 < \sin x < 1$. Để hàm số xác định trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2} \leq 0 \\ -\dfrac{m}{2} \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ $(*)$.

$y' = \dfrac{-2(m+1)\cos x}{(2\sin x + m)^2}$.

Phải có $y' > 0, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $(*)$ được $m \geq 0$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài này bằng cách thử lần lượt $m = 0, m = -1$ để chọn được phương án đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

A. $m \geq \dfrac{13}{2}$. **B.** $m \leq 2\sqrt{3}$. **C.** $m \geq -\dfrac{13}{2}$. **D.** $m \geq -2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với $y' = 6x^2 - 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{3x^2+1}{x} = g(x), \forall x \in (-2;0) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(-2;0)} g(x) \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + 2017$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $2;3$ là đoạn $T = [a;b]$. Tính $a + 5b$.

A. $a + 5b = 0$. **B.** $a + 5b = 9$. **C.** $a + 5b = -2$. **D.** $a + 5b = 10$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-2m)x - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \neq 1$.

Lời giải.

$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1-2m)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x + 2\cos^2 x - (2m^2 - 5m + 2)\sin x - 2017$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x + 2(1 - \sin^2 x) - (2m^2 - 5m + 2)\sin x - 2017$.

$y' = \left[4\sin^2 x - 4\sin x - (2m^2 - 5m + 2)\right]\cos x$.

Ta có ycbt $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[4\sin^2 x - 4\sin x - (2m^2 - 5m + 2)\right]\cos x \geq 0, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0$, suy ra ycbt $\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x - (2m^2 - 5m + 2) \geq 0, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow 0 < t < 1$, ycbt $\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 \leq 4t^2 - 4t, \forall t \in (0;1)$.

$\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 \leq \min\limits_{t \in (0,1)} (4t^2 - 4t) \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$. Vậy S có 1 phần tử.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a + b$ có giá trị bao nhiêu?

A. 5. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} - 2\sqrt{3} = \sqrt{(x+2)(2x^2 - x + 18)} - \sqrt{4 - x} - 2\sqrt{3}$ với $x \in [-2;4]$

$f' = \dfrac{6x^2 + 6x + 6}{2\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0 \quad \forall x \in [-2;4]$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2;4]$.
Ta có: $f(1)=0 \Rightarrow$ Bất phương trình có nghiệm $x \in [1;4]$
$\Rightarrow a+b=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo thể tích không đổi bằng $V=\dfrac{40}{7}\text{m}^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $10\$/1\text{m}^2$, giá tôn làm mặt xung quanh thùng là $7\$/1\text{m}^2$. Hỏi người bán gạo đó đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu sao cho chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

A. 1 m. **B.** 2 m. **C.** 1,5 m. **D.** 3 m.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy, cạnh bên của hình hộp chữ nhật có độ dài lần lượt là là a (m) và b (m).
Khi đó thể tích hình hộp là $V=a^2.b=\dfrac{40}{7} \Rightarrow b=\dfrac{40}{7.a^2}$.
Diện tích một đáy hình hộp là $S_a=a^2$ m^2.
Diện tích một mặt bên của hình hộp chữ nhật là $S_b=a.b=a.\dfrac{40}{7.a^2}=\dfrac{40}{7.a}$ m^2.
Tổng kinh phí tiền mua tôn dùng để làm thùng là $T=10.a^2+4.7.\dfrac{40}{7a}=10a^2+\dfrac{160}{a} \Rightarrow \min T=120$ khi $a=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y=\dfrac{a\sin x-2}{2\sin x-a}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

A. $-2<a\leq\sqrt{3}$. **B.** $-2\leq a\leq 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a>2 \\ a<-2 \end{array}\right.$. **D.** $-2<a<2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(4-a^2)\cos x}{(2\sin x-a)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y'>0 \\ \dfrac{a}{2}\notin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>2 \\ a<-2 \end{array}\right.$.

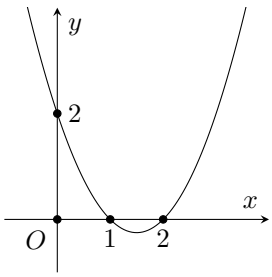
Chọn đáp án C □

Câu 47. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0, b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a=b=c=0, \\ a>0, b^2-3ac<0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0, b^2-3ac\geq 0 \end{array}\right.$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) f'\left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

☑ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (1)

☑ $0 < u = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2} + \sqrt{(x+1)^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$

$\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(u) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ -1 < m < 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ -1 < m \leq 0 \end{array}\right.$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m > -1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in (0;1)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t+1}{t-m}$ $(m \neq -1)$. Để hàm số y nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1) \Rightarrow f'(t) < 0$ với $\forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \dfrac{-m-1}{(t-m)^2} < 0$ với $\forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 < 0 \\ t - m \neq 0 \text{ với } \forall t \in (0;1) \end{cases}$

$\begin{cases} m > -1 \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + (3m-1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. $m \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{9}\right]$. **B.** $m \in \left[-\dfrac{1}{9};+\infty\right)$. **C.** $m \in (-\infty;8]$. **D.** $m \in \left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -3x^2 + 4x + 3m - 1$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì:

$-3x^2 + 4x + 3m - 1 \le 0$ với $\forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow m \le x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$ với $\forall x \in (-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)$, với $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ sao cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + mx - 1$ đồng biến $\mathbb{R}$.

A. 76. **B.** 75. **C.** 125. **D.** 124.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - 10x + m \Rightarrow \Delta' = 25 - m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \ge 25$.

Vậy $m = 25; 26; \ldots; 100 \Rightarrow$ số phần tử của S là 76.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \ne 0)$ có các điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-2; -1)$ và $x_2 \in (0; 1)$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải.

☑ $(C) \cap Oy$ tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$.

☑ Hàm số nghịch biến trên $(x_1;x_2) \Rightarrow a > 0$.

☑ Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1.x_2 < 0 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow c < 0$.

☑ Vì $x_1 \in (-2; -1), x_2 \in (0; 1) \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow -\dfrac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \ge -\dfrac{1}{2}$. **B.** $m > \dfrac{1}{2}$.

C. $-\dfrac{1}{2} < m < 0$ hoặc $m > 1$. **D.** $-\dfrac{1}{2} < m \le 0$ hoặc $m \ge 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $t \in (0; 1)$. Hàm số trở thành $g(t) = \dfrac{-2t - 1}{t - m}$. Do $t = \sin x$ là hàm số đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$, suy ra

$$\begin{cases} g'(t) > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Để phương trình $-2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = m$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ta phải có tập giá trị của m là

A. $\left[2;\dfrac{17}{8}\right)$. **B**. $\left(1;\dfrac{17}{8}\right)$. **C**. $\left(-\infty;\dfrac{17}{8}\right)$. **D**. $\left(\dfrac{17}{8};+\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, $t\in[0;1]$.

Khí đó, phương trình đã cho trở thành $-2t^2+3t+1=m$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để $-2t^2+3t+1=m$ có hai nghiệm phân biệt $t\in[0;1]$

Xét $f(t)=-2t^2+3t+1$; $t\in[0;1]$

$f'(t)=-4t+3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{3}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{17}{8}$	↘	2

$\Rightarrow m$ có tập giá trị là $\left[2;\dfrac{17}{8}\right)$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-4m+5}{x+3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

$y'=\dfrac{3m^2+4m-5}{(x+3m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến thì $3m+4m-5<0\Leftrightarrow\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}<m<\dfrac{2+\sqrt{19}}{3}$.

Vậy các giá trị nguyên của m là $0,1,2$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$, nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$, đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{-3x+3}{2(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	2	↘	1

Chọn đáp án C □

Câu 57. Có bao nhiêu số nguyên m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x+mx-1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

A. 11. **B**. 12. **C**. 10. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+mx-1. \Rightarrow y'=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+m.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+m\geq 0, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right).$

$\Leftrightarrow m\geq -2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right), \forall x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right).$

Xét hàm $g(x)=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right).$

$g'(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}.$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$-\sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\geq -1$.

Vì m nguyên và $m\in[-10;10]$ nên có 12 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Tìm m để hàm số $y=3m\sin^3 x-\sin^2 x+\sin x+m-2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$?

A. $m\leq -3$. **B**. $m\leq 0$. **C**. $m\geq\frac{1}{3}$. **D**. $m\geq -\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\Rightarrow t\in(-1;0).$

Khi đó, hàm số trở thành $y=3mt^3-t^2+t+m-2$, với $t\in(-1;0)$.

Để hàm số $y=3m\sin^3 x-\sin^2 x+\sin x+m-2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, và do hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=3mt^3-t^2+t+m-2$ đồng biến trên khoảng

$(-1;0) \Leftrightarrow y'(t) = 9mt^2 - 2t + 1 \geq 0, \forall t \in (-1;0) \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2t-1}{9t^2} = g(t), \forall t \in (-1;0).$

Ta có: $g'(t) = \dfrac{-18t^2+18t}{(9t^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -18t^2 + 18t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

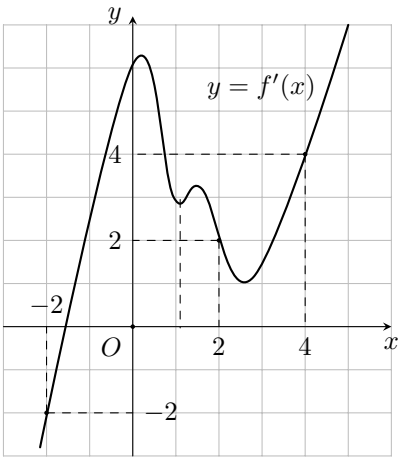
Mà: $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t\to(-1)^+} g(t) = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $m \geq \dfrac{2t-1}{9t^2} = g(t), \forall t \in (-1;0) \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 59.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x) = 2f(3x+1) - 9x^2 - 6x + 4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

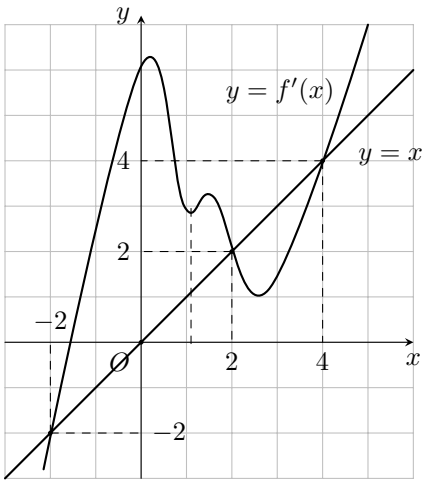
C. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $h'(x) = 6f'(3x+1) - 6(3x+1)$. Xét bất phương trình

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 6f'(3x+1) - 6(3x+1) > 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) > 3x+1$ $(*)$.



Từ đồ thị trên ta vẽ thêm đường thẳng $y = x$.

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Xét trên khoảng $(-2;4)$ thì $f'(x) > x \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

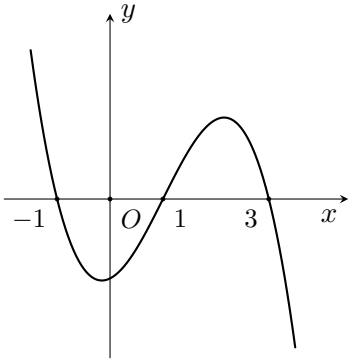
Do đó $(*) \Leftrightarrow -2 < 3x+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi hàm số $y = f(x-3)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(2;4)$. **B**. $(1;3)$. **C**. $(-1;3)$. **D**. $(5;6)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x-3)$.
Ta có $g'(x) = (x-3)' \cdot f'(x-3) = f'(x-3)$.
Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3 < -1 \\ 1 < x-3 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ 4 < x < 6. \end{array}\right.$
Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho x, y thỏa mãn $1 \le x \le y \le 2$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $T = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Chọn mệnh đề đúng
A. $M \cdot n = 12$. **B**. $M \cdot n = 18$. **C**. $M \cdot n = 9$. **D**. $M \cdot n = 24$.

Lời giải.

Ta có $1 \le x \le y \le 2 \Leftarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le t \le 2$.
$T = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + t + \frac{1}{t}$.
Xét $f(t) = 2 + t + \frac{1}{t}$, $1 \le t \le 2$.
$f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Ta có BBT:

t	1		2
$f'(t)$	0	+	
$f(t)$	4	↗	$\frac{9}{2}$

Vậy $M \cdot n = 18$.
Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(3m+1)x^2 + 6(2m^2+m)x - 12m^2 + 3m + 1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
A. 0. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 6\left[x^2 - (3m+1)x + (2m^2+m)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m \\ x_2 = 2m+1 \end{array}\right.$.
Vì $m \in \mathbb{Z}_+$ nên $x_1 < x_2$, tức là $m < 2m+1$.

x	$-\infty$		m		$2m+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Để hàm số nghịch biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in (1;3)$
$\Leftrightarrow m \le 1 < 3 \le 2m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ 2m+1 \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$
Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\hoac{m>-1\\m<-2}$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $\hoac{m\ge -1\\m\le -2}$. **D.** $-2<m<-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=-x^2+2mx+(3m+2)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $\Delta'\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Phương trình $x^3-\sqrt{1-x^2}=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

☑ Ta có

$$x^3-\sqrt{1-x^2}=0\Leftrightarrow x^3=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\heva{x\ge 0\\x^6=1-x^2}\Leftrightarrow\heva{x\ge 0\\x^6+x^2-1=0.}$$

☑ Xét hàm số $f(x)=x^6+x^2-1$ trên $[0;+\infty)$

$f'(x)=6x^5+2x\ge 0\ \forall\ x\in[0;+\infty)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x(6x^4+2)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$
	-1		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=0$ có duy nhất 1 điểm chung trên $[0;+\infty)$ hay phương trình $x^6+x^2-1=0$ có duy nhất 1 nghiệm trên $[0;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình $\heva{x^2+5x+4\le 0\\x^3+3x^2-9x-10>0}$ là

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $[-4;-1]$. **C.** $[-4;1]$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ $x^2+5x+4\le 0\Leftrightarrow x\in[-4;-1]$.

☑ Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ trên $[-4;-1]$.

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\hoac{x=1\notin[-4;-1]\\x=-3\in[-4;-1].}$

Bảng biến thiên $f(x)$ trên $[-4;-1]$:

x	-4		-3		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	↗	17	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) > 0,\ \forall\, x \in [-4;-1]$.

☑ Vậy hệ bất phương trình có tập nghiệm là $[-4;-1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \quad (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \quad (2) \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1)^2 = y^3 - 3y^2 \quad (3)$.

Do $-1 \le x \le 1$ nên $0 \le x+1 \le 2$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2$ trên $[0;2]$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 6t \le 0, \quad \forall\, t \in [0;2]$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại $t = 0$ hoặc $t = 2$).

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[0;2]$. Suy ra

$$(3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Thay vào (2) ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) + 2\sqrt{1-x^2} = m + 1 \qquad (*)$.

Đặt $u = \sqrt{1-x^2}, (0 \le u \le 1)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $u^2 + 2u = m + 1$ có nghiệm $u \in [0;1]$.

Ta có hàm $g(u) = u^2 + 2u$ đồng biến trên $[0;1]$ nên phương trình có nghiệm trên $[0;1]$ khi và chỉ khi

$$g(0) \le m + 1 \le g(1) \Leftrightarrow 0 \le m + 1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 3}{\sin x + m}$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $0 \le m < 3$. **B.** $m \le -1$. **C.** $m \ge 3$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ 0 \le m < 3 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(m-3)\cos x}{(\sin x + m)^2}$. Vì $\cos x > 0 \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

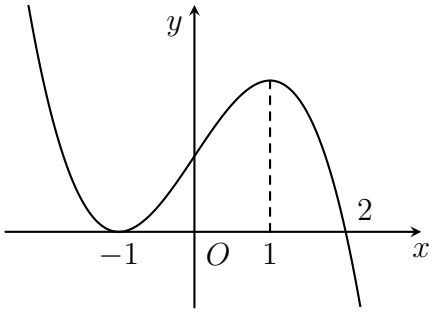
$$\frac{(m-3)\cos x}{(\sin x + m)^2} < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ \sin x = -m \quad \text{không có nghiệm thuộc } \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ \left[\begin{array}{l} |-m|>1 \\ -m=1 \\ -m\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ 0\le m<3 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án D □

Câu 68.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào sau đây đúng về hàm $g(x)=f^2(x)$?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra

☑ $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

☑ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)$ có $g'(x)=2f(x)f'(x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x)>0$ khi $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+(a-1)x^2+(a+3)x-4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $a\ge\dfrac{12}{7}$. **B**. $a<-3$. **C**. $a\le -3$. **D**. $a>\dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(0;3)$ khi và chỉ khi

$$y'=-x^2+2(a-1)x+a+3\ge 0 \quad \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow a\ge \frac{x^2+2x-3}{2x+1} \quad \forall x\in(0;3).$$

Xét hàm $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}$ có $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}>0 \quad \forall x\in[0;3]$.

Suy ra

$$a\geq \frac{x^2+2x-3}{2x+1} \quad \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow a\geq \max_{[0;3]} g(x) \Leftrightarrow a\geq g(3) \Leftrightarrow a\geq \frac{12}{7}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho phương trình $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0$. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 15. **B**. 9. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x^3+3x+m} \Rightarrow t^3=2x^3+3x+m$.

Ta có $\begin{cases} t^3=2x^3+3x+m \\ x^3-3x^2-2x+m-3+2t=0 \end{cases} \Rightarrow t^3+2t=(x+1)^3+2(x+1)$.

Xét hàm số $y=f(u)=u^3+2u \Rightarrow f'(u)=3u^2+2>0, \forall u\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $t=x+1 \Rightarrow 2x^3+3x+m=(x+1)^3 \Leftrightarrow x^3-3x^2-1=-m$.

Xét $g(x)=x^3-3x^2-1 \Rightarrow g'(x)=3x^2-6x$. Giải $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-5<-m<-1 \Rightarrow 1<m<5.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in S=\{2;3;4\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 9.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho phương trình

$$\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng một nghiệm x thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B**. . **C**. 4. **D**. 2.

3

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2-\cos 2x)=2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}+3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\sin^2 x+1)=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\left[2(2\cos^3 x+m+1)+3\right]\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\sin^2 x+1)=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\left[2(2\cos^3 x+m+2)+1\right]\\
\Leftrightarrow\ &2\sin^3 x+\sin x=2\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)^3+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ có $f'(t)=6t^2+1>0$ với mọi t nên hàm số f luôn đồng biến.
Do đó

$$\begin{aligned}
&f(\sin x)=f\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2 x=2\cos^3 x+m+2\\
\Leftrightarrow\ &1-\cos^2 x=2\cos^3 x+m+2\\
\Leftrightarrow\ &-2\cos^3 x-\cos^2 x-1=m. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $u=\cos x$, với $u\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$, phương trình $(*)$ trở thành $-2t^3-t^2-1=m$.

Xét hàm số $g(u)=-2u^3-u^2-1$ trên $\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$.

Ta có $g'(u)=-6u^2-2u$ và $g'(u)=0$ có các nghiệm $u=0$, $u=-\dfrac{1}{3}$.
Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-1	↘	$-\frac{28}{27}$	↗	-1	↘	-4

Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$ khi phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$. Dựa vào bảng biến thiên ta được $m=-1$ hoặc $-4\le m<-\dfrac{28}{27}$.
Vì m nguyên nên $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$.
B. $m\le 0$.
C. $1\le m<2$.
D. $m\ge 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - \dfrac{1}{\cos^2 x}(\tan x - 2)}{(\tan x - m)^2} = \dfrac{2-m}{\cos^2 x\,(\tan x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\Leftrightarrow$ hàm số xác định trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $y' \geq 0\ \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} m \neq \tan x\ \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 2-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 2. \end{array}\right.$

Khi $m = 2$ thì hàm số đã cho là hàm hằng trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m+5)x + 2m - 5$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

A. $m \leq 2$. **B.** $m > -2$. **C.** $m < 2$. **D.** $m \geq -2$.

Lời giải.

$y' = x^2 - 4x + m + 5$. Để hàm số đồng biến trên $(3;+\infty)$ thì $x^2 - 4x + m + 5 \geq 0$ với mọi $x \in (3;+\infty)$.

Hay $m \geq -x^2 + 4x - 5$ với mọi $x \in (3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x\in(3;+\infty)} (-x^2 + 4x - 5) = -2$

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{\cot 2x + m + 2}{\cot 2x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \in (-\infty;-1)$. **B.** $m \in (-1;+\infty)$.

C. $m \in (-1;0] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m \in (-1;0) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $u(x) = \cot 2x \in \left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $u'(x) < 0$ với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ta có $y' = -u(x).\dfrac{2m+2}{(u(x)-m)^2}$.

Do đó, để hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $\begin{cases} 2m+2 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \setminus \left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$.

Vậy $m \in (-1;0] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Giá trị m để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$. **B.** $1 \leq m < 2$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m > 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \cot x$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$.

Ta có $y=\dfrac{t-2}{t-m}$.

Để hàm số $y=\dfrac{\cot x-2}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$, thì hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ ta có $y'=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $\begin{cases} m\notin(0;1) \\ y'>0, \forall t\in(0;1). \end{cases}$

Suy ra $y'>0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ 1\leq m<2 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

A. $m\leqslant 1$. **B.** $m\geqslant -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m>-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\geqslant 1$.

Lời giải.

Vì $x\in(0;\pi)$ nên $\cos x\in(-1;1)$.

Điều kiện: $\cos x-m\neq 0\Leftrightarrow m\notin(-1;1)(*)$.

Ta có: $y'=\dfrac{-2\sin x(\cos x-m)+\sin x(2\cos x+1)}{(\cos x-m)^2}=\dfrac{(2m+1)\sin x}{(\cos x-m)^2}$.

Trên khoảng $(0;\pi)$ ta thấy, $\sin x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$ khi $y'>0\Leftrightarrow 2m+1>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta có: $m\geqslant 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-9;12)$ sao cho hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-6;+\infty)$?

A. 14. **B.** 16. **C.** 7. **D.** 6.

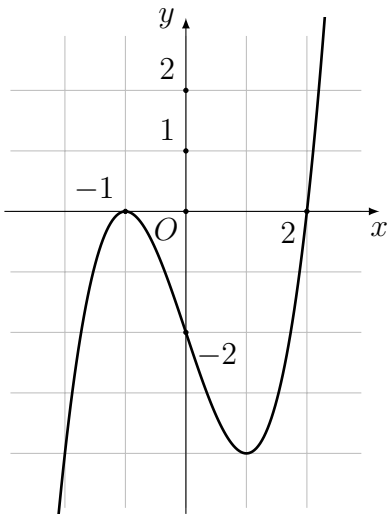
Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{[}x=-1\\x=2\end{.} \Rightarrow f'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{[}x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{.}$.

Từ $g(x)=f\left(x^2-2\right) \Rightarrow g'(x)=2xf'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{[}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{.} \Leftrightarrow \begin{[}x=0\\x=\pm 1\\x=\pm 2\end{.}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy $g'(x)>0, \forall x \in (-1;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$.

A. $-2 \leq m \leq 2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $m>2$. **D.** $1 \leq m<2$.

Lời giải.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ thì hàm số phải xác định trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ và $y'<0, \forall x \in \left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} y'=\dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}<0 \\ \dfrac{m}{4} \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m<2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Hàm số $y=\dfrac{m^2-1}{3}x^3+(m+1)x^2+3x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $m \in \varnothing$. **B.** $m \geq 2$. **C.** $\begin{[}m \leq -1\\m \geq 2\end{.}$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=(m^2-1)x^2+2(m+1)x+3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m^2-1)x^2+2(m+1)x+3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$.

Trường hợp 1: $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

– Với $m=1$ ta có: $(*) \Leftrightarrow 4x+3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$). Ta loại giá trị $m=1$.

– Với $m=-1$ ta có: $(*) \Leftrightarrow 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn đúng). Ta nhận giá trị $m=-1$.

Trường hợp 2:

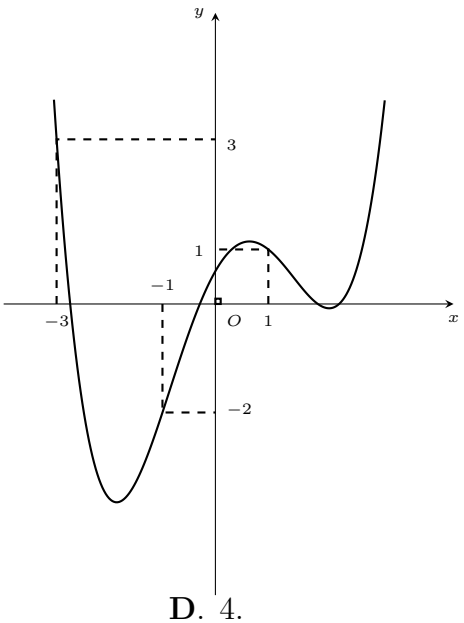
$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1>0 \\ (m+1)^2-3(m^2-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \vee m>1 \\ (m+1)(4-2m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{[}m<-1\\m \geq 2\end{.}$$

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được: $\begin{[}m \leq -1\\m \geq 2\end{.}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2017$.

Cho các mệnh đề dưới đây:

(I) $g(0)<g(1)$.

(II) $\min\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=g(-1)$.

(III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$.

(IV) $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=\max\{g(-3),g(1)\}$.

Số mệnh đề đúng là

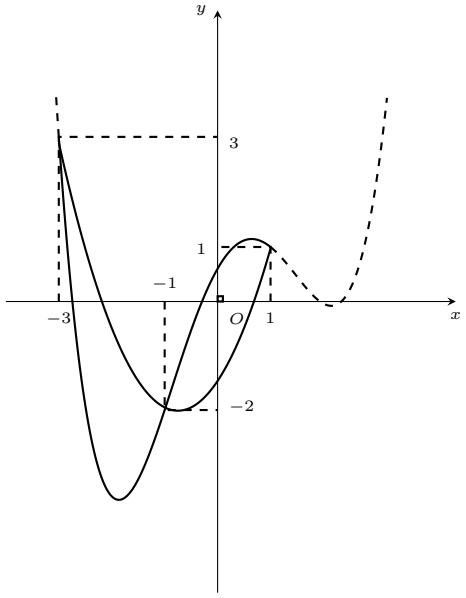
A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x-2017$.

Ta có $h'(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Trên đoạn $[-3;1]$, đồ thị của hàm số $f'(x)$ và $h'(x)$ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy có dạng như hình bên.



Mặt khác, ta có $g(x)=f(x)-h(x)$.

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-h'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=-3\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-3;1]$ như sau

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(1)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$ nên $g(0)<g(1)$.
- Hàm số $g(x)$ có $\min\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=g(-1)$.
- Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$.
- Hàm số $g(x)$ có $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=\max\{g(-3);g(1)\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m-1}{2}x^2+mx+m-1$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 1. Tính số phần tử của S.

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - (m-1)x + m$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 1 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 đồng thời $|x_1 - x_2| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - m > 0 \\ \sqrt{\Delta} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 1 > 0 \\ m^2 - 3m + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3. \end{array}\right.$$

Số phần tử của S bằng 2.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho a và b là hai số dương thỏa mãn $2(a^2+b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right)$ là $S = \dfrac{m}{n}$ (với m, n là các số nguyên, $n > 0$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Hãy tính $m + n$.

A. -18. **B**. -19. **C**. -20. **D**. -17.

Lời giải.

Với a, b là số dương ta có

$$\begin{aligned} & 2(a^2+b^2) + ab = (a+b)(ab+2) \\ \Leftrightarrow\ & 2(a^2+b^2) + ab = a^2b + ab^2 + 2(a+b) \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Mặt khác $(a+b) + 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2\right)}$.

Suy ra $2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2\right)} \Rightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq \dfrac{5}{2}$.

Đặt $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$, $t \geq \dfrac{5}{2}$ suy ra $P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$, với $t \geq \dfrac{5}{2}$.

Ta có $f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0$, với $\forall t \geq \dfrac{5}{2}$ suy ra $\min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)} f(t) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{-23}{4}$.

Vậy $\min P = \dfrac{-23}{4} \Rightarrow m + n = -19$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 1$. **B**. $m \leq -1$. **C**. $m \geq 1$. **D**. $m \geq -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = m - \cos x$.

Theo đề bài,

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \ & \Leftrightarrow m - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow m \geq \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow m \geq 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 85. Tập nghiệm của bất phương trình $(x+2)\left[\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right]+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)>0$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho có dạng
$f(x+2)>f(-x)$ trong đó $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$.
Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$, $t\in\mathbb{R}$;
Ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+1+t\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)=\sqrt{t^2+3}+1+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0\forall t\in\mathbb{R}$.
Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó $f(x+2)>f(-x)\Leftrightarrow x+2>-x\Leftrightarrow x>-1$
Chọn đáp án C □

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^4-2mx^2$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m\le -1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m\le -1$ hoặc $m\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m\le -1$ hoặc $m>1$.

Lời giải.

Ta có $y'=4(m^2-1)x^3-4mx$.

☑ Với $m=-1\Rightarrow y'=4x>0,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow y$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

☑ Với $m=1\Rightarrow y'=-4x<0,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow y$ giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

☑ Với $m\neq\pm1$, để hàm số tăng trên $(1;+\infty)$ thì $\left((m^2-1)x^2-m\right)x\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

+ Nếu $m^2-1<0,(*)\Leftrightarrow x^2\le\dfrac{m}{m^2-1},\forall x\in(1;+\infty)$ (không có m thỏa bài toán).

+ Nếu $m^2-1>0,(*)\Leftrightarrow x^2\ge\dfrac{m}{m^2-1},\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\dfrac{m}{m^2-1}\le 1$.

Giá trị m thỏa mãn hệ $\begin{cases}m^2-1>0\\ m^2-m-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ m<-1.\end{array}\right.$

Vậy $m\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $m\le -1$.
Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m<1$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m>-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(1-2m)\cos x}{(\sin x-m)^2}$. Vì $\cos x>0,\quad\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$\dfrac{(1-2m)\cos x}{(\sin x-m)^2}>0,\quad\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m>0\\ \sin x=m\quad\text{không có nghiệm thuộc }\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} |m| > 1 \\ m = 1 \\ m \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2) \cdot g(x) + 2018$ trong đó $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1; +\infty)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(-\infty; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = 1 - x$, ta được hàm số $h(t) = f(t) - 2018t + 4037$. Khi đó, ta có:

$$h'(t) = f'(t) - 2018 = (1-t)(t+2)g(t).$$

Suy ra $y' = -x(3-x) \cdot g(x)$; $y' < 0 \Leftrightarrow -x(3-x) \cdot g(x) < 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3. \end{array}\right.$

Do đó hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m < \dfrac{1}{2}$. **B.** $m \le \dfrac{1}{2}$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0; 1)$. Hàm số đã cho trở thành $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1-2m}{(t-m)^2}$.

Hàm số $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1-2m}{(t-m)^2} > 0, \quad \forall t \in (0; 1) \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 90. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \ge 0; b_2 > b_1 \ge 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018 \cdot a_n$ là

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên } [0;1] \\ f(1)+2=f(0). \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \le a_1 < a_2 \\ f(a_2)+2=f(a_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=1. \end{cases} \Rightarrow a_n = n-1.$

Ta có $\begin{cases} 1 \le b_1 < b_2 \\ f(\log_2 b_2)+2=f(\log_2 b_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 b_1=0 \\ \log_2 b_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=1 \\ b_2=2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}.$

Khi đó $b_n > 2018 \cdot a_n \Rightarrow 2^{n-1} > 2018 \cdot (n-1)$.

Xét $f(t) = 2^t - 2018 \cdot t$ với $t \ge 0$.

Ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 2018$. Ta được $f'(t)=0 \Leftrightarrow t = \log_2 \dfrac{2018}{\ln 2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

t	0		$\log_2 \frac{2018}{\ln 2} \approx 11{,}5$		14		t_0		15		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(t)$	1	↘	$\approx -20310{,}73$	↗	-11868	↗	0	↗	2498	↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta thấy giá trị $t=15$ là số nguyên dương nhỏ nhất để $f(t)>0$.

Vậy ta có $n=16$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018 \cdot a_n$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x)>1$ và

$$\frac{2f(x)-1}{2mx-1} = \frac{m^2x^2+\dfrac{1}{4}+m(1-x)}{f^2(x)-f(x)+m+\dfrac{1}{4}}$$

với $m>0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{f(x)-9m+8}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 8. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Với $m>0$, ta có $\dfrac{2f(x)-1}{2mx-1}=\dfrac{m^2x^2+\dfrac{1}{4}+m(1-x)}{f^2(x)-f(x)+m+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{(2mx-1)^2+4m}{[2f(x)-1]^2+4m}>0.$

Mà $2f(x)>1\Rightarrow 2mx-1>0.$

Ta lại có

$$\begin{aligned}\frac{2f(x)-1}{2mx-1}=\frac{m^2x^2+\frac{1}{4}+m(1-x)}{f^2(x)-f(x)+m+\frac{1}{4}}&\Leftrightarrow \frac{2f(x)-1}{2mx-1}=\frac{(2mx-1)^2+4m}{[2f(x)-1]^2+4m}\\ &\Leftrightarrow [2f(x)-1]^3+4m[2f(x)-1]=(2mx-1)^3+4m(2mx-1)\\ &\Leftrightarrow 2f(x)-1=2mx-1\\ &\Leftrightarrow f(x)=mx\ \ (\text{vì hàm số } g(t)=t^3+4mt \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Do đó hàm số đã cho trở thành $y=\dfrac{mx-9m+8}{x-m}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{mx-9m+8}{x-m}$, ta có $y'=\dfrac{-m^2+9m-8}{(x-m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow -m^2+9m-8>0$

$$\Leftrightarrow 1<m<8.$$

Suy ra giá trị nguyên của m là $2,3,4,5,6,7$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số thực m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}mx^2+2x+\dfrac{2}{x^2}$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có $y'=x^3-3mx+2-\dfrac{4}{x^3}$. Vì hàm số liên tục trên $[1;+\infty)$ và có đạo hàm trên $(1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ khi $y'\geq 0,\forall x>1$.

$x^3-3mx+2-\dfrac{4}{x^3}\geq 0,\forall x>1\Leftrightarrow x^2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^4}\geq 3m,\forall x>1$ (1).

Xét hàm số $g(x)=x^2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^4},x>1$, $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{16}{x^5}>0,\forall x>1$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra (1) $\Leftrightarrow 3m\leq -1\Leftrightarrow m\leq -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{-\cos x + m}{\cos x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

A. $m \geq 0$. **B.** $m \leq -1$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m < 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2m \sin x}{(\cos x + m)^2}$. Vì $\sin x < 0, \forall x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2m}{(\cos x + m)^2} > 0 \quad \forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m > 0 \\ \cos x = -m \quad \text{không có nghiệm thuộc} \quad \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \leq -1 \\ -m \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho hàm số $y = \dfrac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2018. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 0.

Lời giải.

Đặt $t = \cot x, t \in (0; 1)$.

Ta cần tìm m để $y = \dfrac{t^2 - 2mt + 2m^2 - 1}{t - m}$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Ta có $y' = \dfrac{t^2 - 2mt + 1}{(t - m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ thì

$$\begin{cases} y' \geq 0, \forall t \in (0; 1) \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 + 1}{t} \geq 2m, \forall t \in (0; 1) \qquad (1) \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1. \qquad (2) \end{cases}$$

Đặt $g(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t} \Rightarrow g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$.

Ta có

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Hàm số $g(t)$ bảng biến thiên trên $(0; 1)$ như hình bên.

t	0		1
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2

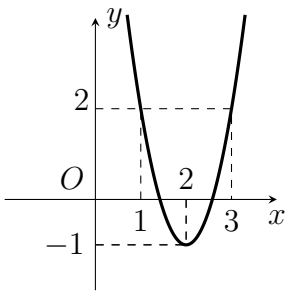
Từ (1) suy ra $2m \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$. Kết hợp (2) ta được $m \leq 0$ hoặc $m = 1$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m nằm trong đoạn $[-2018; 2018]$ thỏa bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 95.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y = f'(x-2)+2$ có dạng $y = g(x) = ax^2+bx+c$.

Theo đồ thị ta có

$$\begin{cases} g(1)=2 \\ g(2)=-1 \\ g(3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=-1 \\ 9a+3b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-12 \\ c=11 \end{cases}.$$

Vậy $f'(x-2)+2 = 3x^2-12x+11 \Leftrightarrow f'(x-2) = 3x^2-12x+9$.

Đặt $t = x-2 \Rightarrow f'(t) = 3(t+2)^2-12(t+2)+9 = 3t^2-3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2-3$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2-3<0 \Leftrightarrow x \in (-1;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

Hàm số $y = f(x^2-1)$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$. **B.** $(0;+\infty)$.

C. $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Lời giải.

Ta có $\left[f\left(x^2-1\right)\right]' = f'\left(x^2-1\right)(2x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có

$$\left[f\left(x^2-1\right)\right]' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'\left(x^2-1\right)=0 \\ x=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2-1=-1 \\ x^2-1=2 \\ x=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\pm\sqrt{3} \\ x=0. \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2-1$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-1	$+\infty$	↘	2	↘	-1	↗	2	↗	$+\infty$

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $\left[f\left(x^2-1\right)\right]'$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x^2-1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$[f(x^2-1)]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta có hàm số $y = f(x^2-1)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
A. 5. **B**. 4. **C**. 3. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 + m(\cos x - \sin x)$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 3 + m(\cos x - \sin x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}m\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -3, \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1). \end{aligned}$$

☑ Với $m = 0$, (1) luôn đúng.
☑ Với $m > 0$,

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \quad &\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{3}{\sqrt{2}m}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad &-1 \geq -\frac{3}{\sqrt{2}m} \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad &m = 1, \ m = 2 \ (\text{vì } m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

☑ Với $m < 0$,

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \quad &\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{3}{\sqrt{2}m}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad &1 \leq -\frac{3}{\sqrt{2}m} \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad &m = -2, \ m = -1 \ (\text{vì } m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tìm tổng các phần tử của S.
A. 3. **B**. 1. **C**. 9. **D**. 10.

Lời giải.

Ta có: $y = \begin{cases} f(x) = x^3 - mx + 1 & , \text{nếu } x^3 - mx + 1 \geq 0 \\ g(x) = -x^3 + mx - 1 & , \text{nếu } x^3 - mx + 1 < 0 \end{cases}$.
Để hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì mọi nghiệm của $f(x) = 0$ không lớn hơn 1, hay $f(x) \geq 0, \forall x \geq 1$.

Khi đó ta có: $m \le \dfrac{x^3+1}{x}, \forall x \ge 1 \Rightarrow m \le \min\limits_{x\ge 1} \dfrac{x^3+1}{x} = 2$.

Dễ dàng kiểm tra được với $m \in \{0;1;2\}$ thì hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên $S = \{0;1;2\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Biết rằng bất phương trình $m\left(|x| + \sqrt{1-x^2}+1\right) \le 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in \left(-\infty; a\sqrt{2}+b\right]$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T = a+b$.

A. $T = 0$. **B**. $T = 1$. **C**. $T = 2$. **D**. $T = 3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $-1 \le x \le 1$. Khi đó ta có

$$m \le \frac{2\sqrt{x^2-x^4}+1+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+1}{|x|+\sqrt{1-x^2}+1} = \frac{2\sqrt{x^2-x^4}+1}{|x|+\sqrt{1-x^2}+1} + 1. \quad (1)$$

Vì $-1 \le x \le 1$ nên ta có thể đặt $x = \sin t$, khi đó biểu thức (1) tương đương

$$m \le \frac{2\,|\sin t.\cos t|+1}{|\sin t|+|\cos t|+1} = \frac{(|\sin t|+|\cos t|)^2}{|\sin t|+|\cos t|+1}.$$

Đặt $u = |\sin t| + |\cos t|$. Xét hàm số $f(u) = \dfrac{u^2}{u+2}$ với $u \in \left(0, \sqrt{2}\right]$ có $f'(u) = \dfrac{u^2+4u}{(u+2)^2} > 0$.

Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(0;\sqrt{2}]$.

Suy ra $m \le f(u) \le f(\sqrt{2}) = \dfrac{2}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$.

Vậy $a = -1, b = 2$ nên $a+b = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x-m^2}{x-m-4}$ đồng biến trên khoảng $(2021;+\infty)$. Khi đó, giá trị của S bằng bao nhiêu?

A. 2035144. **B**. 2035145. **C**. 2035146. **D**. 2035143.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m+4\}$.

$y' = \dfrac{m^2-2m-8}{(x-m-4)^2}$. Theo đề $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 4. \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(2021;+\infty) \Leftrightarrow m+4 \le 2021$

$\Leftrightarrow m \le 2017$.

Kết hợp điều kiện ta được $m \in (4;2017]$.

Khi đó $S = 5+6+\cdots+2017$

$= \dfrac{(5+2017)\cdot 2013}{2} = 2035143.$

x	$-\infty$	$m+4$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	2 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 2	

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. B	5. D	6. C	7. D	8. C	9. B	10. C
11. C	12. C	13. C	14. A	15. A	16. B	17. A	18. C	19. D	20. C
21. D	22. D	23. D	24. C	25. D	26. B	27. D	28. D	29. B	30. A
31. A	32. D	33. C	34. B	35. D	36. B	37. B	38. D	39. D	40. D
41. D	42. C	43. B	44. A	45. B	46. C	47. A	48. A	49. B	50. A
51. A	52. B	53. D	54. A	55. C	56. C	57. B	58. C	59. C	60. D
61. B	62. C	63. B	64. C	65. B	66. D	67. D	68. C	69. A	70. B
71. B	72. A	73. D	74. C	75. A	76. D	77. D	78. D	79. D	80. C
81. D	82. C	83. B	84. C	85. C	86. C	87. B	88. D	89. D	90. A
91. C	92. C	93. C	94. B	95. B	96. D	97. A	98. A	99. B	100. D

BÀI 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}$.

- ✓ Điểm $x_0 \in \mathscr{D}$ được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b) \subset \mathscr{D}$ sao cho $x_0 \in (a;b)$ và $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.
- ✓ Điểm $x_1 \in \mathscr{D}$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b) \subset \mathscr{D}$ sao cho $x_1 \in (a;b)$ và $f(x_1) < f(x)$, $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.

2 Điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị

Định lí 1 (Điều kiện cần). *Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số có đạo hàm tại x_0, thì $f'(x_0) = 0$.*

Tuy nhiên hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn với hàm $y = |x|$, đại cực trị tại $x_0 = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó.

Định lí 2 (Điều kiện đủ). *Ta có*

- ✓ *Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, x_0)$ và $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0;b)$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*
- ✓ *Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, x_0)$ và $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0;b)$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

Tức là, nếu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Ta nói, đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(x_0, y_{\text{CT}})$.

Nếu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_1.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{\text{CĐ}}$	$\searrow$	$-\infty$

Ta nói đồ thị hàm số có điểm cực đại là $M\left(x_0; y_{\text{CD}}\right)$.

Chú ý: Không cần xét hàm số $y=f\left(x\right)$ có hay không đạo hàm tại x_0.

Ví dụ 1. Xét hàm số

$$y=|x|=\begin{cases}-x & \text{nếu } x\in(-\infty;0)\\ x & \text{nếu } x\in(0;+\infty)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}-1<0 & \text{nếu } x\in(-\infty;0)\\ 1>0 & \text{nếu } x\in[0;+\infty)\end{cases}$$

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_0=0$.

Định lí 3. *Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ chứa x_0 mà $f'(x_0)=0$ và $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác không tại x_0. Khi đó,*

- ✓ *Nếu $f''\left(x_0\right)>0$ thì hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại x_0.*
- ✓ *Nếu $f''\left(x_0\right)<0$ thì hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại x_0.*

Từ đây, ta có phương pháp tìm cực trị của hàm số.

- ✓ Tính đạo hàm y', tìm những điểm mà tại đó $y'=0$ hoặc y' không xác định.
- ✓ Xét dấu y' dựa vào định lí 2 để kết luận điểm cực đại, cực tiểu.
  Hoặc xét dấu $y''\left(x_0\right)$ (x_0 là nghiệm của y') dựa vào định lí 3 để kết luận.

Chú ý: Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Ta có $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

$y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Dấu của đạo hàm không phụ thuộc vào x, hay độc lập với x nên hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó. Do đó hàm số luôn không có cực trị.

3 Bài toán cực trị với hàm đa thức bậc ba

Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^3+cx+d\quad(a\neq 0)$ có đồ thị là (C).

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c\quad(a\neq 0)$.

Số lượng điểm cực trị

Hàm số bậc ba có đạo hàm là một tam thức bậc hai nên

- ☑ Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ có cực đại $\Leftrightarrow$ có cực tiểu $\Leftrightarrow$ có cả cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ có hai cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta>0$.
- ☑ Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow\Delta\leq 0$.

⚠ ***Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.***

Trong trường hợp hàm số có hai điểm cực trị, ta viết được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị như sau:

✓ ***Bước 1:*** *Thực hiện phép chia đa thức: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cho $y'=3ax^2+2bx+c$ được thương là $q\left(x\right)$ và phần dư là $r\left(x\right)=mx+n$, ta được:*

$$y=y'\cdot q\left(x\right)+r\left(x\right)$$

✓ ***Bước 2:*** *Chứng minh đường thẳng* $(d): y = r(x) = mx + n$ *là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.*

Giả sử hai điểm cực trị là $M(x_1; y_1)$, $N(x_2, y_2)$, *trong đó* x_1, x_2 *là nghiệm của phương trình* $y' = 0$ *nên* $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$.

Khi đó, vì M, N *thuộc* (C) *nên*

$$y_1 = y'(x_1) \cdot q(x_1) + r(x_1) = r(x_1) \Rightarrow y_1 = mx_1 + n \Rightarrow M \in (d).$$

$$y_2 = y'(x_2) \cdot q(x_2) + r(x_2) = r(x_2) \Rightarrow y_2 = mx_2 + n \Rightarrow N \in (d).$$

Tức là (d) *là đường thẳng đi qua hai cực trị.*

4 Bài toán cực trị với hàm bậc 4 trùng phương

Cho hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$ có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right. .$$

Số lượng điểm cực trị

Hàm số bậc bốn luôn luôn có cực trị

- ☑ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ có cả cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{-b}{2a} > 0$.
- ☑ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{-b}{2a} \leq 0$.

⚠ *Khi hàm số có 3 điểm cực trị* $A(0; c)$, $B\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; y_1\right)$, $C\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; y_2\right)$ *thì:*

- ☑ $y_1 = y_2$.
- ☑ *B và C đối xứng nhau qua trục Oy, điểm A nằm trên trục Oy. Do đó tam giác ABC cân tại A.*

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Cực trị của hàm số

Phương pháp giải. **Quy tắc 1. Lập bảng biến thiên suy ra kết luận về cực trị.**

- ☑ Tìm $f'(x)$.
- ☑ Tìm các điểm $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc tại đó hàm số f liên tục nhưng không có đạo hàm.
- ☑ Lập bảng biến thiên. Xét sự đổi dấu của $f'(x)$ khi x đi qua x_i, từ đó suy ra cực trị của hàm số.

Quy tắc 2: Dựa vào đạo hàm cấp 2.

- ☑ Tính $f'(x)$.
- ☑ Giải phương trình $f'(x) = 0$ và tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.
- ☑ Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$
  - + $f''(x_i) < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại x_i.

+ $f''(x_i) > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại x_i.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{\text{CĐ}} = 10$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3, y_{\text{CT}} = -22$. □

Ví dụ 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua điểm cực trị của $(C) : y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị là $A(1;2), B(3;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $M(-1;1)$ và vuông góc với AB là $d : 2(x+1) - 4(y-1) = 0$ $\Rightarrow d : x - 2y + 3 = 0$. □

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CĐ}} = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{\text{CT}} = 2$. □

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có: $y = x + \dfrac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{\text{CĐ}} = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{\text{CT}} = 4$.

□

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $y = 2\sin x + 1$ trong đoạn $[-\pi; \pi]$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2\cos x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $y' = 0$ có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

Ta có: $y'' = -2\sin x$.

Vì $y''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$ là điểm cực tiểu của hàm số và $y_{\text{CT}} = -1$.

Vì $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ là điểm cực đại của hàm số và $y_{\text{CĐ}} = 3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm cực trị của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-6	↗	-2	↘	$-\infty$

□

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y_{\text{CĐ}} = -2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1, y_{\text{CT}} = -6$.

Bài 2. Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $A(-1; 2), B(1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; -4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$. □

Bài 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x + 1}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2}$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y_{\text{CĐ}} = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3, y_{\text{CT}} = 8$. □

Bài 4. Tìm cực trị của hàm số $y = 2\sin 2x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4\cos 2x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $y'' = -8\sin 2x$.

Vì $y''\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = -8 < 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ là các điểm cực đại của hàm số và $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Vì $y''\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = 8 > 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ là các điểm cực tiểu của hàm số và $y_{\text{CT}} = -1$. □

Bài 5. Tìm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{2x - x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [0; 2]$.

Ta có: $y' = 1 + \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$, $x \in (0; 2)$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - x^2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$1 + \sqrt{2}$	$\searrow$	2

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y_{\text{CĐ}} = 1 + \sqrt{2}$. □

Bài 6. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x - 3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}; 1\right\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-20x - 5}{(2x^2 + x - 3)^2}$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	2	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$\frac{2}{5}$	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	2

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{1}{4}, y_{\text{CĐ}} = \dfrac{2}{5}$. □

DẠNG 2. Cực trị có tham số

Phương pháp giải.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4mx$. Xác định m để:

① Hàm số có cực đại và cực tiểu.

② Hàm số có các điểm cực đại và điểm cực tiểu $x_1, x_2 \in [2; +\infty)$.

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 4mx + 4m$. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 4mx + 4m = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua hai nghiệm đó, hay

$$\Delta' = 4m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 1.$$

② Trong trường hợp hàm số có cực đại, cực tiểu, ta có

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4mx + 4m = 0 \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow x = 2m \pm 2\sqrt{m^2 - m}, \text{ điều kiện } m^2 - m > 0. \end{aligned}$$

Gọi x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình (*), ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$y_{\text{CĐ}}$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu $x_1, x_2 \in [2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$2m - 2\sqrt{m^2-m} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-m} \leq m-1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m^2 - m \leq m^2 - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Mà $m = 1$ không thỏa mãn điều kiện $m^2 - m > 0$ nên không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

Ví dụ 8. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2.$$

Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6mx + m - 1$. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$ là $f'(2) = 0$, hay

$$12 - 12m + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 11m = 11 \Leftrightarrow m = 1.$$

Thử lại:

Cách 1. Khi $m = 1$, ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \ f''(x) = 6x - 6,$$
$$f'(2) = 0, \ f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0.$$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$. Vậy $m = 1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Cách 2. Khi $m = 1$, ta có

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \ f'(x) = 3x^2 - 6x, \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$y_{\text{CĐ}} = 2$	↘	$y_{\text{CT}} = -2$	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tiểu tại $x = 2$. Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Ví dụ 9. Xác định m để:

① Hàm số $y=\dfrac{x^2-mx+1}{x-m}$ đạt cực đại tại điểm $x=3$;

② Hàm số $y=-x^4-mx^2-2m^2$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có

$$y'=\frac{(2x-m)(x-m)-x^2+mx-1}{(x-m)^2}=\frac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2};$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0\Leftrightarrow x=m-1 \text{ hoặc } x=m+1.$$

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Vậy điều kiện để hàm số đạt cực đại tại $x=3$ là $m-1=3\Leftrightarrow m=4$.

Kết luận: hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$ khi và chỉ khi $m=4$.

② Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3-2mx$.

- Điều kiện cần: Nếu hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ thì

$$y'(1)=0\Leftrightarrow -4-2m=0\Leftrightarrow m=-2.$$

- Điều kiện đủ (thử lại): Với $m=-2$ ta có

$$y''=-12x^2+4, y''(1)=-8<0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Kết luận: Không có giá trị nào của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

□

Ví dụ 10. Xác định các hệ số a,b,c sao cho hàm số

$$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$$

đạt cực trị bằng 4 tại $x=2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $M(1;2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$; $f'(x)=-3x^2+2ax+b$. Yêu cầu bài toán là

$$\begin{cases}f'(2)=0\\f(2)=4\\f(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-12+4a+b=0\\-8+4a+2b+c=4\\-1+a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow(a;b;c)=(3;0;0).$$

Thử lại thấy thỏa mãn. □

⚠ *Đối với bài toán viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta tiến hành như sau:*

☑ **Cách 1.** *Tìm tọa độ hai điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Sau đó viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B.*

☑ **Cách 2.** *Tọa độ $(x; y)$ của điểm cực trị của đồ thị hàm số thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f'(x) = 0. \end{cases}$$

Từ hệ này ta dùng phép thế để dẫn tới phương trình $y = ax + b$, đó là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Ví dụ 11. Xét hàm số

$$(C_m) : y = \frac{-x^2 + mx - m^2}{x - m} \ (m \text{ là tham số}).$$

① Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

② Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C_m).

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x \neq m$. Hàm số viết lại: $y = -x - \dfrac{m^2}{x - m}$.

① Ta có $y' = -1 + \dfrac{m^2}{(x-m)^2} = \dfrac{-x^2 + 2mx}{(x-m)^2}$. Bởi vậy, hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là phương trình $g(x) = -x^2 + 2mx = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác m, hay

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ g(m) = m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

② **Cách 1.** Khi $m \neq 0$, hàm số có hai điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2mx = 0 \Leftrightarrow -x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m. \end{array}\right.$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $A(0; m)$, $B(2m; -3m)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2m; -4m)$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số sẽ đi qua điểm $A(0; m)$, nhận $\vec{n} = (2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến, có phương trình tổng quát

$$2(x - 0) + 1(y - m) = 0 \Leftrightarrow y = -2x + m.$$

Cách 2. Toạ độ $(x; y)$ của điểm cực trị của đồ thị thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -x - \dfrac{m^2}{x - m} \\ -1 + \dfrac{m^2}{(x-m)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - \dfrac{m^2}{x - m} & (1) \\ \dfrac{m^2}{x - m} = x - m & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $y = -x - (x - m) \Leftrightarrow y = -2x + m$. Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d : y = -2x + m$.

□

⚠

- ☑ *Thường thì cách 2 sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn, đặc biệt là khi nghiệm của phương trình $y' = 0$ "không đẹp".*
- ☑ *Cách 2 có ưu điểm là không cần tìm tọa độ điểm cực trị của đồ thị.*
- ☑ *Dù trong đề bài không yêu cầu, nhưng ta vẫn phải tìm điều kiện để hàm số có cực trị.*
- ☑ *Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$, nhận $\vec{n} = (A; B)$ làm vectơ pháp tuyến, có phương trình tổng quát:*

$$\Delta : \ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

đạt cực trị bằng 2 tại $x = 1$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1; 0)$. Điểm $x = 1$ là điểm cực đại hay điểm cực tiểu của hàm số ứng với a, b, c vừa tìm được.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Yêu cầu của bài toán:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 1 + a + b + c = 2 \\ -1 + a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-3}{2} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Khi $a = -\dfrac{3}{2},\ b = 0,\ c = \dfrac{5}{2}$, hàm số là $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 3x,\ f''(x) = 6x - 3,\ f''(1) = 3 > 0.$$

Vậy $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}$. □

Bài 8. Tìm m để hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$$

có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0. \quad (1)$$

- ☑ Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 là (1) có hai nghiệm phân biệt, hay $\Delta = 36 - 12m > 0$, tức là $m < 3$.

☑ Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên:

$$x_1 + x_2 = 2,\ x_1x_2 = \frac{m}{3}.$$

☑ Theo giả thiết:

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$$
$$\Leftrightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{2m}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn } m < 3).$$

Vậy yêu cầu bài toán là: $m = \frac{3}{2}$. □

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1$ có đồ thị $(C_m), m$ là tham số thực. Tìm $m > 0$ để hàm số đã cho có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn điều kiện $2y_{CĐ} + y_{CT} = 4$.

Lời giải.

Phân tích.

☑ Tính y'; phương trình $y' = 0$ có dạng $a - b + c = 0$ nên ta dễ dàng tìm được hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = m - 1$.

☑ Với điều kiện $m > 0$, ta có x_1, x_2 phân biệt và $x_1 < x_2$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số đã cho, ta suy ra $x_{CĐ} = x_1$ và $x_{CT} = x_2$, do đó

$$y_{CĐ} = y(x_1);\quad y_{CT} = y(x_2).$$

☑ Từ giả thiết $2y_{CĐ} + y_{CT} = 4$, ta suy ra một phương trình ẩn m, giải phương trình này tìm m.

Giải. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 3(m-2)x - 3(m-1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = m - 1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ (do } m > 0).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$m-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Khi đó, hàm số đạt cực đại tại $x_1 = -1$ và đạt cực tiểu tại $x_2 = m - 1$. Do đó:

$$y_{CĐ} = y(-1) = \frac{3m}{2},\quad y_{CT} = y(m-1) = -\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2 + 1.$$

Từ giả thiết, ta có:

$$2 \cdot \frac{3m}{2} - \frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 6m - 6 - (m+2)(m-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2+m-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với yêu cầu $m>0$, ta có giá trị của m là

$$m=1,\quad m=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}.$$

□

Bài 10. Cho hàm số: $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+6m=6[x^2-(m+1)x+m]$.

• Điều kiện để hàm số (1) có hai cực trị là phương trình $y'=0$ hay

$$x^2-(m+1)x+m=0 \tag{2}$$

có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta>0$, hay

$$(m+1)^2-4m>0 \Leftrightarrow m^2-2m+1>0 \Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1.$$

• Khi $m\neq 1$, ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=1. \end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị là $A(1;3m-1)$, $B(m;-m^3+3m^2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(m-1;-m^3+3m^2-3m+1)$. Đường thẳng $y=x+2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1)$.

Yêu cầu bài toán là

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 &\Leftrightarrow m-1-m^3+3m^2-3m+1=0 \\ &\Leftrightarrow m^3-3m^2+2m=0 \Leftrightarrow m\in\{0,1,2\}.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m=0$, $m=2$. □

Bài 11. Cho hàm số $y=x^3-3mx+1$, với m là tham số thực. Cho điểm $A(2;3)$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị B,C sao cho tam giác ABC cân tại A.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-3m$.

☑ Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m>0$.

☑ Khi đó: $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2=3m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{m} \\ x=-\sqrt{m}. \end{array}\right.$

Tọa độ các điểm cực trị B và C là:

$$B(-\sqrt{m};2\sqrt{m^3}+1),\ C(\sqrt{m};-2\sqrt{m^3}+1),\ \overrightarrow{BC}=(2\sqrt{m};-4\sqrt{m^3}).$$

Gọi I là trung điểm BC. Khi đó: $I(0;1)$, $\overrightarrow{AI}=(-2;-2)$. Điều kiện để tam giác ABC cân tại A là:

$$\begin{aligned}&AI\perp BC\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \Leftrightarrow&8\sqrt{m^3}-4\sqrt{m}=0\Leftrightarrow 2m\sqrt{m}-\sqrt{m}=0\\ \Leftrightarrow&\sqrt{m}(2m-1)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{m}=0\\ 2m-1=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=0 & \text{(loại)}\\ m=\dfrac{1}{2}. & \text{(nhận)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị B,C sao cho tam giác ABC cân tại A là $m=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 12. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Tìm m để trong hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, có một điểm cực trị nằm trong và một điểm cực trị nằm ngoài đường tròn:

$$(C_m):x^2+y^2-2mx-4my+5m^2-1=0.$$

Lời giải.

Phân tích.

☑ Ta nhớ lại rằng, đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R có phương trình:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

☑ Cho điểm $A(x_A;y_A)$ và đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R. Khi đó:

- A nằm trong $(C)\Leftrightarrow IA<R$.
- A nằm ngoài $(C)\Leftrightarrow IA>R$.

Giải. Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\ x=2.\end{bmatrix}$

Hai điểm cực trị của đồ thị là $A(0;2),B(2;-2)$. Ta có:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2mx-4my+5m^2-1=0\\ \Leftrightarrow&(x-m)^2+(y-2m)^2=1.\end{aligned}$$

Như vậy (C_m) có tâm $I(m;2m)$, bán kính $R=1$. Ta có:

$$\begin{aligned}IB=&\sqrt{(m-2)^2+(2m+2)^2}=\sqrt{5m^2+4m+8}\\ =&\sqrt{5\left(m+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{36}{5}}\geq\frac{6}{\sqrt{5}}>1.\end{aligned}$$

Do đó $IB>R$, suy ra B nằm ngoài (C_m). Như vậy:

$$\begin{aligned}&A\ \text{ nằm trong }\ (C_m)\Leftrightarrow IA<1\Leftrightarrow\sqrt{m^2+(2-2m)^2}<1\\ \Leftrightarrow&5m^2-8m+3<0\Leftrightarrow\frac{3}{5}<m<1.\end{aligned}$$

□

⚠ *Ta thường dùng định lí Viet sau đây: Nếu x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ thì $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.*

Bài 13. Cho hàm số $y=x^3-3(m-3)x^2+3(m^2-3m+5)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Tìm m để hàm số đã cho đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn:

$$|x_1+x_2-x_1x_2|<7.$$

Lời giải.

Phân tích.

- ☑ Tính y'. Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0$.
- ☑ Với điều kiện trên, phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.
- ☑ Để ý rằng biểu thức trong trị tuyệt đối có chứa x_1+x_2 và x_1x_2, do đó áp dụng định lí Vi-ét ta suy ra kết quả.

Giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-6(m-3)x+3(m^2-3m+5)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta'=9(4-3m)>0\Leftrightarrow m<\dfrac{4}{3}$. (*)

Khi đó, theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-3)\\ x_1\cdot x_2=m^2-3m+5.\end{cases}$

Do đó:

$$|x_1+x_2-x_1x_2|<7\Leftrightarrow |2(m-3)-m^2+3m-5|<7$$
$$\Leftrightarrow |m^2-5m+11|<7\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-5m+11<7\\ m^2-5m+11>-7\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-5m+4<0\\ m^2-5m+18>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<4.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta có giá trị phải tìm của m là $1<m<\dfrac{4}{3}$.

□

⚠ *Với $a>0$ thì $|f(x)|<a\Leftrightarrow -a<f(x)<a$.*

Bài 14. Cho hàm số

$$f(x)=x^3+2(m-1)x^2+(m^2-4m+1)x-2(m^2+1).$$

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=3x^2+4(m-1)x+(m^2-4m+1)$. Điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 là phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{aligned}&4(m-1)^2-3(m^2-4m+1)>0\\ \Leftrightarrow&m^2+4m+1>0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m<-2-\sqrt{3}\\&m>-2+\sqrt{3}.\end{aligned}\right.\end{aligned}\tag{1}$$

Khi đó $x_1+x_2=\dfrac{4(1-m)}{3}$, $x_1x_2=\dfrac{m^2-4m+1}{3}$. Xét điều kiện

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&x_1x_2\neq0\\&\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&x_1x_2\neq0\\&\left[\begin{aligned}&x_1+x_2=0\\&\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Tức là $\left\{\begin{aligned}&m^2-4m+1\neq0\\&\left[\begin{aligned}&1-m=0\\&m^2-4m+1=6\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&m^2-4m+1\neq0\\&\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=-1\\&m=5\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=-1\\&m=5.\end{aligned}\right.$

Kết hợp với điều kiện (1) ta được các giá trị m cần tìm là $m=5$, $m=1$. □

Bài 15. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\dfrac{1}{3}$. Tìm m để:

① Hàm số có cực trị.

② Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả mãn $x_1+2x_2=1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$.

① Khi $m=0$ thì $y'=2x-6$, $y'=0\Leftrightarrow2x-6=0\Leftrightarrow x=3$. Khi x đi qua điểm $x_0=3$ thì y' đổi dấu, do đó hàm số có cực trị, suy ra $m=0$ thoả mãn.

Xét $m\neq0$. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu, tức là

$$\begin{aligned}&\Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0\Leftrightarrow-2m^2+4m+1>0\\ \Leftrightarrow&2m^2-4m-1<0\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{6}}{2}<m<\frac{2+\sqrt{6}}{2}\ (\text{và } m\neq0).\end{aligned}$$

Tóm lại, hàm số có cực trị khi và chỉ khi $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$.

② Với $m=0$ thì $x_1=x_2=3\Rightarrow x_1+2x_2=7$, vậy $m=0$ không thoả mãn. Với $m\in\left(\dfrac{2-\sqrt{6}}{2};\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)\setminus\{0\}$ thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$ hay $mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$. Do đó

$$\left\{\begin{aligned}&x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m}&(1)\\&x_1x_2=\frac{3(m-2)}{m}.&(2)\end{aligned}\right.$$

Theo giả thiết $x_1+2x_2=1$, kết hợp với (1) ta được

$$x_1=\frac{3m-4}{m},\ x_2=\frac{2-m}{m}.$$

Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{3m-4}{m}\cdot\frac{2-m}{m}=\frac{3(m-2)}{m}\\ \Leftrightarrow&(3m-4)(2-m)=3m(m-2)\\ \Leftrightarrow&6m^2-16m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m=2$, $m=\dfrac{2}{3}$ thoả mãn các yêu cầu đề bài.

□

Bài 16. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+mx+4$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị sao cho tích khoảng cách từ hai điểm cực trị đó đến đường thẳng $\Delta: x+1=0$ bằng 10.

Lời giải.

Phân tích.

☑ Tính y'. Để ý rằng tam thức bậc hai y' có biệt thức $\Delta'>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho luôn có hai cực trị. Khi đó, phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{3(m+1)-\sqrt{9m^2+15m+9}}{3};\\ x_2&=\frac{3(m+1)+\sqrt{9m^2+15m+9}}{3}.\end{aligned}$$

☑ Với hai nghiệm có hình thức khá phức tạp như thế này, ta không nên thay trực tiếp vào hàm số đã cho để tính cụ thể tọa độ của hai điểm cực trị A,B. Trong những trường hợp như vậy, tốt nhất ta giả sử $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$, sau đó sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng để tính $d_1=d(A,\Delta);\ \ d_2=d(B,\Delta)$, suy ra $d_1\cdot d_2$. Biến đổi tích $d_1\cdot d_2$ theo x_1+x_2 và $x_1\cdot x_2$, rồi sử dụng định lí Vi-ét, suy ra kết quả.

Giải. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+m$.

Vì $\Delta'=9m^2+15m+9>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (C_m) luôn có hai điểm cực trị với mọi m. Lúc đó, với mọi m thì phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1+x_2=2(m+1)$ và $x_1\cdot x_2=\dfrac{m}{3}$. Giả sử (C_m) có hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$. Gọi d_1,d_2 lần lượt là khoảng cách từ A,B đến đường thẳng Δ thì $d_1=|x_1+1|;\ \ d_2=|x_2+1|$. Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned}&d_1\cdot d_2=10\Leftrightarrow|x_1+1|\cdot|x_2+1|=10\Leftrightarrow|(x_1+1)\cdot(x_2+1)|=10\\ \Leftrightarrow&|x_1x_2+x_1+x_2+1|=10\Leftrightarrow\left|\frac{m}{3}+2(m+1)+1\right|=10\\ \Leftrightarrow&|7m+9|=30\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7m+9=30\\ 7m+9=-30\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-\dfrac{39}{7}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Các giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $m=3, m=-\dfrac{39}{7}$. □

Bài 17. Cho hàm số

$$y=\frac{x^2+2(m+1)x+m^2+4m}{x+2} \ (m \text{ là tham số}).$$

Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Lời giải.

Hàm số được viết lại $y=x+2m+\dfrac{m^2}{x+2}$. Ta có

$$y'=1-\frac{m^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+4-m^2}{(x+2)^2}.$$

Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là phương trình

$$g(x)=x^2+4x+4-m^2=0$$

có hai nghiệm phân biệt khác -2, tức là

$$\begin{cases}\Delta'=4-(4-m^2)>0\\ g(-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\\ -m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0.$$

Khi đó

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x+4-m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2-m\\ x=-2+m.\end{array}\right.$$

Vậy hai điểm cực trị của đồ thị (1) là $A(-2-m;-2)$, $B(-2+m;4m-2)$. Do đó

$$\overrightarrow{OA}=(-2-m;-2)\neq\vec{0},\ \overrightarrow{OB}=(-2+m;4m-2)\neq\vec{0}.$$

Bởi vậy ba điểm O,A,B tạo thành tam giác vuông tại O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. Tức là

$$-m^2-8m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4-2\sqrt{6}\\ m=-4+2\sqrt{6}\end{array}\right. \ (\text{thỏa mãn } m \text{ khác } 0).$$

□

Bài 18. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-(3m+1)x^2+2(m+1)$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

Lời giải.

Phân tích.

☑ Ta có: $y'=x^3-2(3m+1)x=x[x^2-2(3m+1)]$. Do đó:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=2(3m+1).\end{array}\right.$$

- ☑ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 = 2(3m+1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 hay $2(3m+1) > 0$.
- ☑ Với điều kiện trên, phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\sqrt{6m+2}; \quad x_3 = \sqrt{6m+2}.$$

- ☑ Thay các nghiệm trên vào hàm số đã cho, ta tìm được tung độ của ba điểm cực trị A, B, C.
- ☑ ΔABC luôn cân tại A thuộc trục Oy; B, C đối xứng nhau qua trục Oy và trung tuyến kẻ từ A trùng với Oy. Như vậy O là trọng tâm của ΔABC khi và chỉ khi

$$y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow y_A + 2y_B = 0 \text{ (do } y_B = y_C).$$

Giải. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có:

$$y' = x^3 - 2(3m+1)x = x[x^2 - 2(3m+1)]; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1). \end{bmatrix}$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, tức là:

$$2(3m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}. \qquad (*)$$

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2(3m+1)}. \end{bmatrix}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{6m+2}$		0		$\sqrt{6m+2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó, (C_m) có ba điểm cực trị là:

$$A(0; 2m+2), B(-\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1), C(\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1).$$

Dễ thấy tam giác ABC cân tại A thuộc trục Oy; B, C đối xứng nhau qua trục Oy và trung tuyến kẻ từ A trùng với Oy. Do đó điều kiện để O là trọng tâm tam giác ABC là:

$$\begin{aligned} y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} &\Leftrightarrow y_A + 2y_B = 0 \text{ (do } y_B = y_C) \\ &\Leftrightarrow 2m + 2 + 2(-9m^2 - 4m + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 9m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -\frac{2}{3} \\ m = \frac{1}{3}. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta suy ra giá trị của m là $m = \frac{1}{3}$. □

⚠ *Xét phương trình $x^2 = a$:*

☑ *Nếu $a < 0$, phương trình vô nghiệm.*

☑ *Nếu $a = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 0$.*

☑ *Nếu $a > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$.*

Bài 19. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$.

① Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

② Tìm m để hàm số có $|y_{\text{CĐ}} - y_{\text{CT}}| = 4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Hàm số viết lại: $y = -x - 1 + \dfrac{m-4}{x-4}$.

① Ta có

$$y' = -1 - \frac{m-4}{(x-4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 16 - m + 4}{(x-4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - m - 12}{(x-4)^2}.$$

Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là phương trình

$$g(x) = -x^2 + 8x - m - 12 = 0 \tag{1}$$

có hai nghiệm phân biệt khác 4, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = 16 - m - 12 > 0 \\ g(4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4. \tag{2}$$

Với điều kiện (2), tọa độ $(x; y)$ của hai điểm cực trị của đồ thị hàm số thỏa mãn

$$\begin{cases} y = -x - 1 + \dfrac{m-4}{x-4} \\ -1 - \dfrac{m-4}{(x-4)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 + \dfrac{m-4}{x-4} \\ \dfrac{m-4}{(x-4)^2} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 + \dfrac{m-4}{x-4} \\ \dfrac{m-4}{x-4} = 4 - x \end{cases} \Rightarrow y = -x - 1 + 4 - x \Rightarrow y = -2x + 3.$$

Vậy khi $m < 4$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $\Delta : y = -2x + 3$.

② Khi $m < 4$, gọi điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị là A, B. Vì x_A và x_B là nghiệm của phương trình (1) nên theo định lí Viet, ta có

$$x_A + x_B = 8, \ x_A x_B = m + 12.$$

Vì Δ đi qua A, B nên

$$y_A = -2x_A + 3, \ y_B = -2x_B + 3.$$

Điều kiện để $|y_{\text{CĐ}} - y_{\text{CT}}| = 4$ là

$$\begin{aligned} &|y_A - y_B| = 4 \Leftrightarrow |2x_A - 2x_B| = 4 \Leftrightarrow |x_A - x_B| = 2 \\ \Leftrightarrow &(x_A - x_B)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B = 4 \\ \Leftrightarrow &8^2 - 4(m + 12) = 4 \Leftrightarrow 4m = 12 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn (2))}. \end{aligned}$$

□

⚠

☑ *Có thể sử dụng* $|x_A - x_B| = \left|\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{a}\right| = 2|\sqrt{4-m}|$ *mà không cần dùng định lí Viet. Cách này ngắn gọn hơn nhưng khó hiểu hơn.*

☑ *Nhiều khi ta tiến hành theo chiều ngược lại, sẽ thu được lời giải ngắn gọn hơn, đó là lập phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị, rồi từ đó suy ra tọa độ của điểm cực trị.*

Bài 20. Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1 \quad (1)\,(m \text{ là tham số thực}).$$

① Tìm m để hàm số (1) có hai cực trị cùng dấu.

② Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó.

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 3m(m+2)$. Hàm số (1) có hai cực trị cùng dấu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu, hay

$$\begin{cases} \Delta' = 9 + 9m(m+2) > 0 \\ P = -m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 > 0 \\ m(m+2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 \neq 0 \\ m \in (-2;0) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2;0) \setminus \{-1\}.$$

② Toạ độ $(x;y)$ của các điểm cực trị thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1 \\ 3x^2 - 6x - 3m(m+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = [3x^2 - 6x - 3m(m+2)]\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right) - 2(m+1)^2 x - (m+1)^2 \\ 3x^2 - 6x - 3m(m+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -2(m+1)^2 x - (m+1)^2.$$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là

$$\Delta : y = -2(m+1)^2 x - (m+1)^2.$$

□

⚠ *Qua bài tập trên ta thấy rằng đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đa thức bậc ba* $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *là* $y = \alpha x + \beta$, *trong đó* $f(x) = f'(x) \cdot P(x) + \alpha x + \beta$. *Còn cách trình bày thì ta trình bày như bài tập trên là ngắn gọn nhất.*

Bài 21. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 3x$.

① Chứng minh rằng hàm số có cực đại, cực tiểu với mọi m.

② Xác định m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $d : y = -4x + 1$.

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 + 6mx - 3$. Phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6mx - 3 = 0$$

có $\Delta' = 9m^2 + 9 > 0$ với mọi m nên luôn luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$, do đó hàm số đạt cực đại và cực tiểu tại các điểm $x_1,\ x_2$.

② Chia y cho y' ta được: $y = \dfrac{1}{3}(x+m)y' - 2(m^2+1)x + m$. Tọa độ $(x;y)$ của điểm cực trị của đồ thị hàm số thỏa mãn

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}(x+m)(3x^2+6mx-3) - 2(m^2+1)x + m \\ 3x^2 + 6mx - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -2(m^2+1)x + m.$$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$\Delta : y = -2(m^2+1)x + m.$$

Điều kiện để $\Delta \parallel d$ là

$$\begin{cases} -2(m^2+1) = -4 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

□

Bài 22. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$. (1)

① Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1).

② Tìm m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m^2$. Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $3x^2 - 6x + m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hay

$$\Delta' = 9 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}. \quad (2)$$

① Ta có $y = \dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2-6x+m^2) + \dfrac{2}{3}(m^2-3)x + \dfrac{m^2}{3} + m$. Khi m thoả mãn (2) thì toạ độ $(x;y)$ của điểm cực trị thoả mãn

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2-6x+m^2) + \dfrac{2}{3}(m^2-3)x + \dfrac{m^2}{3} + m \\ 3x^2 - 6x + m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(m^2-3)x + \frac{m^2}{3} + m.$$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $\Delta : y = \frac{2}{3}(m^2-3)x + \frac{m^2}{3} + m$.

② Giả sử hai điểm cực trị là $A(x_1, y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Khi đó $x_1 + x_2 = 2$ và

$$y_1 = \frac{2}{3}(m^2-3)x_1 + \frac{m^2}{3} + m,\ y_2 = \frac{2}{3}(m^2-3)x_2 + \frac{m^2}{3} + m,$$
$$y_1 + y_2 = \frac{4}{3}(m^2-3) + \frac{2m^2}{3} + 2m = 2m^2 + 2m - 4.$$

Trung điểm AB là $I(1; m^2+m-2)$. Yêu cầu bài toán là AB vuông góc với đường thẳng d và I thuộc đường thẳng d, nghĩa là

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(m^2-3)\cdot\frac{1}{2} = -1 \\ m^2+m-2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3 = -3 \\ m(m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn (2))}.$$

□

Bài 23. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-(3m+2)x+m+4}{x-1}$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Tìm m để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C_m) nhỏ hơn 3.

Lời giải.

Phân tích.

☑ Ta có $y' = \dfrac{x^2-2x+2m-2}{(x-1)^2}$.

☑ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow g(x) = x^2-2x+2m-2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0. \end{cases}$

☑ Để ý rằng nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ có hình thức khá phức tạp, do đó ta không nên thay trực tiếp các nghiệm đó vào hàm số đã cho để tìm tung độ của các điểm cực trị. Trong những tình huống như vậy, ta thường viết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m): Giả sử (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Lấy đạo hàm tử thức chia cho đạo hàm mẫu thức, ta được

$$y = \frac{(x^2-(3m+2)x+m+4)'}{(x-1)'} = 2x - 3m - 2.$$

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là

$$AB : y = 2x - 3m - 2.$$

☑ Do $A, B \in AB$ nên ta có thể biểu diễn y_1, y_2 lần lượt qua x_1, x_2:

$$y_1 = 2x_1 - 3m - 2;\quad y_2 = 2x_2 - 3m - 2.$$

☑ Dùng công thức tính độ dài đoạn thẳng để tính AB và biến đổi nó theo

$$x_1 + x_2,\ x_1x_2.$$

Sử dụng định lí Vi-ét, suy ra kết quả.

Giải. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + 2m - 2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + 2m - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ g(1) = 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{2}.$ (*)

Giả sử (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là

$$AB : y = 2x - 3m - 2.$$

Do $A, B \in AB$ nên $y_1 = 2x_1 - 3m - 2;\ \ y_2 = 2x_2 - 3m - 2.$

Theo định lí Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2;\ \ x_1x_2 = 2m - 2.$

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} &AB < 3 \Leftrightarrow AB^2 < 9 \\ \Leftrightarrow &(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < 9 \\ \Leftrightarrow &(x_1 - x_2)^2 + [(2x_1 - 3m - 2) - (2x_2 - 3m - 2)]^2 < 9 \\ \Leftrightarrow &5(x_1 - x_2)^2 < 9 \Leftrightarrow 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] < 9 \\ \Leftrightarrow &5[2^2 - 4(2m - 2)] < 9 \Leftrightarrow 60 - 40m < 9 \\ \Leftrightarrow &m > \frac{51}{40}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $\dfrac{51}{40} < m < \dfrac{3}{2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m, m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và hai điểm đó cách đều đường thẳng $x = 2$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m, m \in \mathbb{R}$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6mx + 3m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Áp dụng định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho. Vì các điểm cực trị cách đều đường thẳng $x = 2$ nên ta có

$$|x_1-2|=|x_2-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ x_1+x_2=4 \end{array}\right..$$

Vì đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nên ta chỉ xét trường hợp $x_1+x_2=4$. Ta có

$$x_1+x_2=4 \Leftrightarrow 2m=4 \Leftrightarrow m=2 \text{ (thỏa ycbt).}$$

□

Bài 25. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về hai phía của đường tròn

$$(\alpha): x^2+y^2-2ax-4ay+5a^2-1=0.$$

Lời giải.

Tập xác đinh $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $M_1(0;2)$ và điểm cực tiểu là $M_2(2;-2)$.

Đường tròn $(\alpha): x^2+y^2-2ax-4ay+5a^2-1=0 \Leftrightarrow (x-a)^2+(x-2a)^2=1$ có tâm $I(a,2a)$ và bán kính $R=1$.

$\overrightarrow{IM_1}=(-a;2-2a) \Rightarrow \overrightarrow{IM_1}^2=a^2+(2-2a)^2=5a^2-8a+4$.

$\overrightarrow{IM_2}=(2-a;-2-2a) \Rightarrow IM_2^2=(2-a)^2+(-2-2a)^2=5a^2+4a+8$.

Ta có một điểm M bất kì nằm phía trong đường tròn (α) thì $IM<R \Leftrightarrow IM^2<R^2 \Leftrightarrow IM^2-R^2<0$.

Tương tự, điểm M nằm phía ngoài (α) thì $IM>R \Leftrightarrow IM^2>R^2 \Leftrightarrow IM^2-R^2>0$.

Do đó, để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về hai phía của đường tròn thì

$$\begin{aligned} & \left({IM_1}^2-R^2\right)\left({IM_2}^2-R^2\right)<0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(5a^2-8a+4-1\right)\left(5a^2+4a+8-1\right)<0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(5a^2-8a+4-1\right)\left(5a^2+4a+8-1\right)<0 \\ \Leftrightarrow\ & 5a^2-8a+3<0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{5}<a<1. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{3}{5} < a < 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 26. Tìm giá trị tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ).

Lời giải.

$y' = -3x^2 + 3m$.

Đồ thị hàm số có 2 cực trị thì y' phải có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị x_1, x_2 là $y = 2mx + 1$.

Suy ra $y_1 = 2mx_1 + 1, y_2 = 2mx_2 + 1$.

Giả sử $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Khi đó, tam giác OAB là tam giác vuông tại O.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1x_2 + (2mx_1 + 1)(2mx_2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (4m^2 + 1)x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Theo định lí Vi-ét, ta có $x_1x_2 = -m$ và $x_1 + x_2 = 0$

Do đó $(4m^2 + 1)x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 1 = 0 \Leftrightarrow -4m^3 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn đk).

Vậy $m = \dfrac{1}{2}$. □

Bài 27. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1 \quad (C_m)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị là nhỏ nhất.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - 2mx - 1.$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 1 > 0$ (đúng $\forall m \in \mathbb{R}$).

Thực hiện phép chia y cho y' ta được $y = \dfrac{1}{3}(x - m) \cdot y' - \dfrac{2}{3}(m^2 + 1)x + \dfrac{2}{3}m + 1$.

Gọi $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của (C_m), ta có $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$. Do đó

$$y_1 = -\frac{2}{3}\left(m^2 + 1\right)x_1 + \frac{2}{3}m + 1$$

và

$$y_2 = -\frac{2}{3}\left(m^2 + 1\right)x_2 + \frac{2}{3}m + 1$$

Khi đó

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right]\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]}.$$

Theo định lí Vi-ét, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$.

Suy ra $M_1M_2 = \sqrt{\left[1 + \dfrac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right](4m^2 + 4)}$.

Để M_1M_2 nhỏ nhất thì $f(m)=\left[1+\dfrac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right]\left(4m^2+4\right)$ phải đạt giá trị nhỏ nhất.

$$f(m)=\left[1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right]\left(4m^2+4\right)\geq\left(1+\frac{4}{9}\right)\cdot 4=\frac{52}{9}.$$

Suy ra $\min f(m)=\dfrac{52}{9}$ khi $m=0$.

Vậy với $m=0$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 28. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. $y'=4x^3-4(m+1)x$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-m-1)=0\Leftrightarrow\hoac{x=0\\x^2=m+1}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m+1>0\Leftrightarrow m>-1.$$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;m^2)$, $B(\sqrt{m+1};-2m-1)$ và $C(-\sqrt{m+1};-2m-1)$.

Ta thấy điểm B và C đối xứng nhau qua trục Oy và điểm A nằm trên trục Oy. Do đó, tam giác ABC cân tại A.

Để tam giác ABC vuông thì nó phải vuông tại A. Do đó, $AB\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ (*)

$$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{m+1};-(m+1)^2);AC=(-\sqrt{m+1};-(m+1)^2).$$

$$(*)\Leftrightarrow-(m+1)+(m+1)^4=0\Leftrightarrow(m+1)\left[(m+1)^3-1\right]=0\Leftrightarrow\hoac{m=1 & \text{(loại)}\\m=0 & (\text{ thỏa mãn}).}$$

Vậy với $m=0$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 29. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị, sao cho đường tròn đi qua ba điểm cực trị đó có bán kính bằng 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

$y'=0\Leftrightarrow\hoac{x=0\\x^2=m}$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m-1)$, $B(-\sqrt{m};-m^2+m-1)$ và $C(\sqrt{m};-m^2+m-1)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-m^2+m-1$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$-m^2+m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy B và C đối xứng nhau qua trục Oy, Oy là đường trung trực của BC. Do đó, tâm I của đường tròn (C) qua ba điểm cực trị A , B , C sẽ nằm trên Oy và nằm bên dưới điểm A.
Giả sử $I(0;k)$, $(k<m-1)$. Để (C) có bán kính bằng 1 thì

$$IA=IB=IC=1\Leftrightarrow\begin{cases}IA=1\\IB=1\end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{IB}=(-\sqrt{m};m^2+m-1-k)\Rightarrow IB^2=m+(-m^2+m-1-k)^2$.
$IB=1\Rightarrow m+(-m^2+m-1-k)^2=1$.
$\overrightarrow{IA}=(0;m-1-k)\Rightarrow IA^2=(m-1-k)^2$.
$IA^2=1\Rightarrow(m-1-k)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}k=m-2<m-1 & \text{(thỏa mãn)}\\ k=m>m-1 & \text{(loại)}.\end{cases}$

Thế $k=m-2$ thế vào (*) ta được:

$$m+(-m^2+m-1-m+2)^2=1\Leftrightarrow m-1+(m^2-1)^2=0\Leftrightarrow(m^2-m)(m^2+m-1)=0$$

Giải phương trình kết hợp với điều kiện ta được $m=1$, $m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 30. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích $S=4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$y'=4x^3-4mx$.
$y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-m)=0\begin{cases}x=0\\x^2=m.\end{cases}$
Để hàm số có ba điểm cực trị thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;2m+m^4)$, $B(\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$ và $C(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$.

Ta thấy hai điểm B, C đối xứng nhau qua trục Oy, điểm A nằm trên trục Oy. Do đó, tam giác ABC cân tại A.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra AM là trung tuyến đồng thời là đường cao trong tam giác ABC

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AM\cdot BC=4\quad(*)$$

Ta có $M(0; m^4 - m^2 + 2m)$ và $\overrightarrow{AM} = (0; -m^2) \Rightarrow AM = m^2$
$\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{m}; 0) \Rightarrow BC = 2\sqrt{m}$.
$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 \cdot 2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = \sqrt[5]{16} & \text{(thỏa mãn)} \\ m = -\sqrt[5]{16} & \text{(loại).} \end{array}\right.$
Vậy với $m = \sqrt[5]{16}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 31. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $A(1; -1)$ và $B(-1; -1)$.
Đồ thị hàm số có một điểm cực đại $O(0; 0)$.
Phương trình đường thẳng Δ đi qua O nhận m là hệ số góc là $y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$
Tổng khoảng cách từ A, B đến Δ là:

$$d = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|m-1| + |m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = g(m).$$

☑ Nếu $m \geq 1$ thì $g(m) = \dfrac{2m}{\sqrt{m^2+1}}$.
Suy ra $g'(m) = \dfrac{2\sqrt{m^2+1} - \dfrac{2m^2}{\sqrt{m^2+1}}}{m^2+1} = \dfrac{2}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}} > 0, \forall m \geq 1$
Do đó, $\min\limits_{[1;+\infty)} g(m) = g(1) = \sqrt{2}$. (1)

☑ Nếu $m \leq -1$ thì $g(m) = \dfrac{-2m}{\sqrt{m^2+1}}$.
Suy ra $g'(m) = \dfrac{-2\sqrt{m^2+1} + \dfrac{2m^2}{\sqrt{m^2+1}}}{m^2+1} = \dfrac{-2}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}$.
Do đó, $g'(m) < 0, \forall m \leq -1 \Rightarrow \min\limits_{(-\infty;-1]} g(m) = g(-1) = \sqrt{2}$. (2)

☑ Nếu $-1 \leq m \leq 1$ thì $g(m) = \dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}$.
Suy ra $g'(m) = \dfrac{-2}{(m^2+1)} \cdot \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
$\min\limits_{[-1;1]} g(m) = g(-1) = g(1) = \sqrt{2}$. (3)
Từ (1), (2) và (3), ta có $m = \pm 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa x_0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

A. Nếu $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$.

B. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0$ thì $f''(x_0)<0$.

C. Nếu hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì $f'(x_0)=0$.

D. Hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $f'(x_0)=0$.

Lời giải.

Đáp án "Nếu $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$" và "Hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $f'(x_0)=0$" cùng **sai**. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^3$ có $f'(x)=3x^2, f'(0)=0 \Leftrightarrow x=0$ nhưng hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.

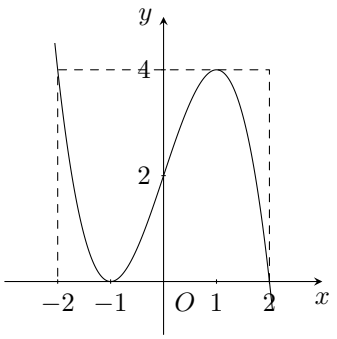
Đáp án "Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0$ thì $f''(x_0)<0$" **sai** vì ít nhất ta cần có $f'(x)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định chứ không phải $f''(x)<0$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B**. $x=-2$. **C**. $x=2$. **D**. $x=-1$.



Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị, ta có

$f'(x)<0,\ \forall x\in(-2;-1)$ và $f'(x)>0,\ \forall x\in(-1,0)$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

$f'(x)>0,\ \forall x\in(0;1)$ và $f'(x)<0,\ \forall x\in(1;2)$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{2}x^4-2mx^2+\dfrac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\geq 0$. **B**. $m\leq 0$. **C**. $m\geq 1$. **D**. $m=-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^3-4mx=2x(3x^2-2m)$.

Do đó hàm số trùng phương có cực tiểu mà không có cực đại khi phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$, tương đương $m\leq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Lời giải.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

C. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A. $x = 25$. **B**. $x = 3$. **C**. $x = 7$. **D**. $x = -1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Ta xét các khẳng định sau:

1) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in (a; b)$ thì $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
2) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in (a; b)$ thì $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$
3) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 và đạt cực tiểu tại điểm x_1 $(x_0, x_1 \in (a; b))$ thì ta luôn có $f(x_0) > f(x_1)$.

Số khẳng định đúng là?

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Chọn đáp án C.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho có đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên nó không có cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 + 4$?

A. $x_{CĐ} = -1$, $x_{CT} = 0$. **B**. $x_{CĐ} = 5$, $x_{CT} = 4$.

C. $x_{CĐ} = 0$, $x_{CT} = -1$. **D**. $x_{CĐ} = 4$, $x_{CT} = 5$.

Lời giải.

+Ta có $y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

+Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{CĐ} = 5$; $y_{CT} = 4$.

Trắc nghiệm: Bài toán hỏi cực trị hàm số nên loại A, C. Mặt khác $y_{CĐ} > y_{CT}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Giá trị cực đại của hàm số bằng

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 5.

Lời giải.

Giá trị cực đại của hàm số bằng 5.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

B. Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

C. Hàm số có 1 điểm cực trị.

D. Hàm số có 2 điểm cực trị.

Lời giải.

Do hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$ và $ab < 0$, suy ra hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là điểm

A. $M(1;3)$. **B.** $N(-1;7)$. **C.** $Q(3;1)$. **D.** $P(7;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.
$y'' = 6x$. Ta có $y''(1) = 6 > 0$ và $y(1) = 3$.
Do đó điểm cực tiểu của đồ thị là $M(1;3)$.
Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

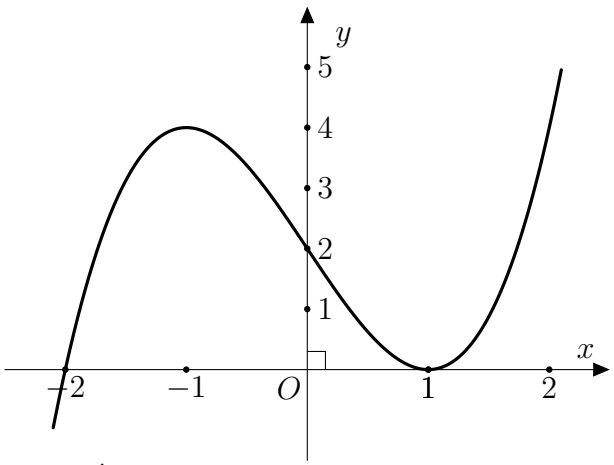
Tìm giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho

A. $y_{\text{CĐ}} = -2$ và $y_{\text{CT}} = 2$. **B.** $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
C. $y_{\text{CĐ}} = 2$ và $y_{\text{CT}} = 0$. **D.** $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = -2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $y_{\text{CĐ}} = 3$ và $y_{\text{CT}} = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 14.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận **đúng**



A. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 2$. **B.** Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là -1.
C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = 4$. **D.** Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là 0.

Lời giải.

Phương pháp:
Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số để tìm điểm cực trị.
Ở đây cần lưu ý giá trị cực trị của hàm số là trung độ điểm cực trị của đồ thị hàm số, điểm cực trị của hàm số là hoành độ điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Cách giải:

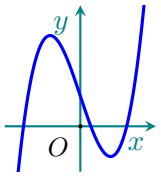
Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số nhận $(1;0)$ làm điểm cực tiểu và điểm $(-1;4)$ làm điểm cực đại.

Nên hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y_{\text{CT}}=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 15.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số không có cực trị. **B**. Giá trị cực đại dương.

C. Điểm cực tiểu âm. **D**. Giá trị cực tiểu dương.

Lời giải.

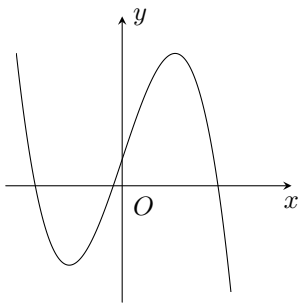
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

- Hàm số có hai cực trị $\Rightarrow A$ sai.
- Điểm cực đại nằm phía trên trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực đại dương $\Rightarrow B$ đúng.
- Điểm cực tiểu nằm phía bên phải trục tung $\Rightarrow$ Điểm cực tiểu dương $\Rightarrow C$ sai.
- Điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành $\Rightarrow$ Giá trị cực tiểu âm $\Rightarrow D$ sai.

Chọn đáp án B □

Câu 16.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?



A. 0. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 1.

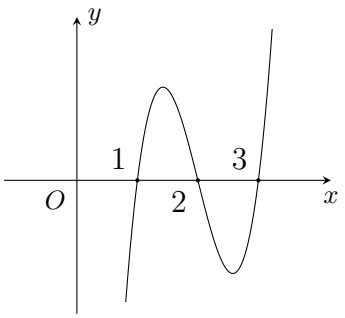
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 17.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **đúng**?



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

Lời giải.

Vì phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm và khi qua 3 nghiệm $f'(x)$ đều đổi dấu nên nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

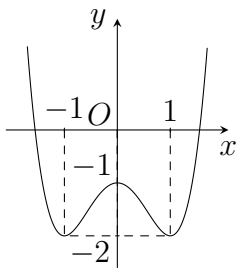
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 4$.
Chọn đáp án A □

Câu 19.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực đại của hàm số bằng

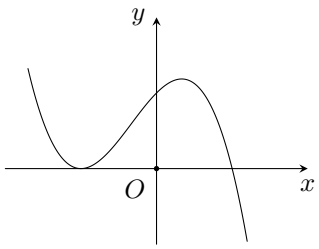


A. -2. **B**. 0. **C**. -1. **D**. 1.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra giá trị cực đại bằng -1.
Chọn đáp án C □

Câu 20.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.
Chọn đáp án A □

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ có điểm cực tiểu là
A. $(-1; 0)$. **B**. $(1; 0)$. **C**. $(1; -2)$. **D**. $(-1; -2)$.

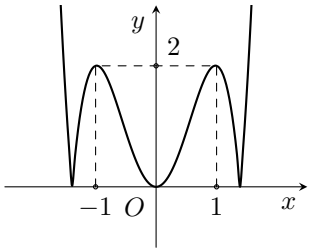
Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$.
Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 5 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Họ nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **B**. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. **C**. $x = \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi$. **D**. $x = k\pi$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

Câu 24.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

C. Hàm số có 3 cực tiểu.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	4	↘	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

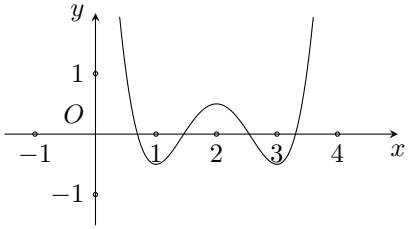
Đạo hàm đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực trị duy nhất của hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.



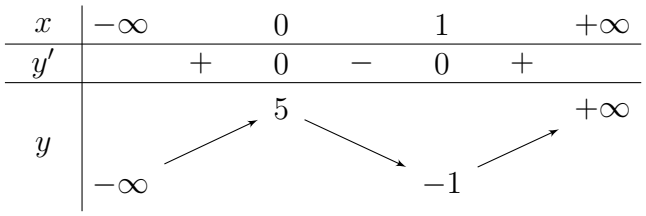
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số có 3 cực trị, trong đó có 2 cực tiểu và một cực đại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$.

B. Hàm số có điểm cực đại $x = 5$.

C. Hàm số có điểm cực tiểu $x = -1$.

D. Hàm số có điểm cực tiểu $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 1$.

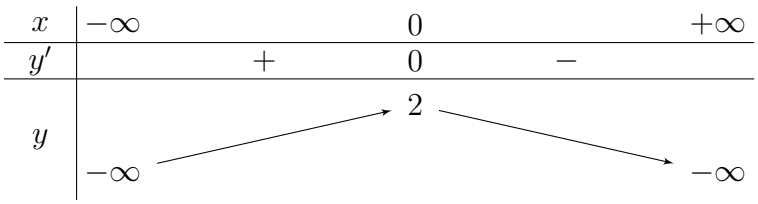
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = -x^3 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên



Vậy hàm số có một điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 1$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$.

A. 6. **B**. -106. **C**. 0. **D**. -107.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$. Vậy $x_1 + x_2 = 0 + 6 = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

① $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

② Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x=-1$ và $x=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘		↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

B. Hàm số có đúng hai cực trị.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 2.

D. Hàm số không xác định tại $x=1$.

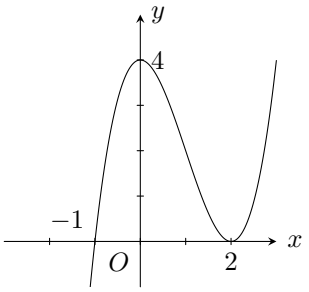
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

Chọn đáp án C □

Câu 32.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y=2x^4-4x^2+3$.

B. $y=(x^2+2)^2$.

C. $y=-x^4-3x^2$.

D. $y=x^3-6x^2+9x-5$.

Lời giải.

Hàm bậc ba chỉ có tối đa 2 điểm cực trị $\Rightarrow$ do đó loại hàm số $y=x^3-6x^2+9x-5$.

Hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a\cdot b<0$ do đó chọn đáp án $y=2x^4-4x^2+3$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 ‖ -1	↗	3	↘	2

A. Có một điểm. **B**. Có ba điểm. **C**. Có hai điểm. **D**. Có bốn điểm.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số có hai điểm cực trị là $x=-1$ và $x=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-x-11$. Giá trị cực tiểu của hàm số là

A. 2. **B**. $\dfrac{-1}{3}$. **C**. $\dfrac{-5}{3}$. **D**. -1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2-1$. Do đó $y'=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

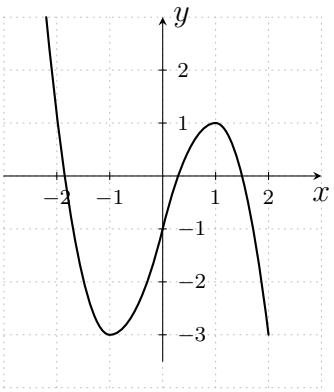
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số là $\dfrac{-5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B**. 0.

C. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\\ x=b\\ x=c \end{array}\right.$ (trong đó $-2<a<0<b<c<2$).

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 khi và chỉ khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0.

B. Nếu $f'(x)=0$ và $f''(x)<0$ thì x_0 là cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

C. Nếu $f'(x)=0$ và $f''(x)=0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số đã cho.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 khi và chỉ khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0

Chọn đáp án A □

Câu 38.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=5$. **C.** $x=2$. **D.** $x=0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+5x-5$ là

A. $(-1;-8)$. **B.** $(0;-5)$. **C.** $\left(\frac{5}{3};\frac{40}{27}\right)$. **D.** $(1;0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+2x+5$.

Xét $y'=0$ suy ra $-3x^2+2x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Xét dấu y'

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu y' suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ suy ra $y_{\text{CT}}=-8$.

Vậy tọa độ điểm cực tiểu là $(-1;-8)$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng:

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là 3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 bằng 1. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$. **D.** Hàm số có đúng hai điểm cực trị.

Lời giải.

Phương pháp: Đánh giá dấu của $f'(x)$ và chỉ ra cực đại, cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

☑ Cực tiểu là điểm mà tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

☑ Cực đại là điểm mà tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Cách giải: Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$ có giá trị cực tiểu lần lượt là y_1, y_2. Khi đó y_1+y_2 bằng

A. 7. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải.

Phương pháp: Lập bảng biến thiên của hàm số.

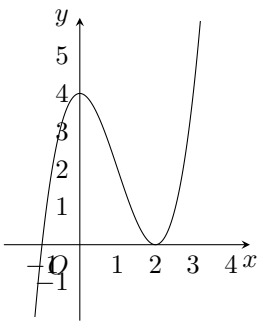
Cách giải: $y=-x^4+2x^2+3 \Rightarrow y'=-4x^3+4x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=-x^4+2x^2+3$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là $y_1=4, y_2=3 \Rightarrow y_1+y_2=7$.
Chú ý: Cần phân biệt điểm cực đại và giá trị cực đại cũng như điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu của hàm số.
Chọn đáp án A ☐

Câu 43.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.
Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án B ☐

Câu 44. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không có cực trị?
A. $y=x^3+2$. **B.** $y=x^4-x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+3$. **D.** $y=-x^4+3$.

Lời giải.
Xét hàm số $y=x^3+2$.
Ta có $y'=3x^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y=x^3+2$ không có cực trị.
Chọn đáp án A ☐

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $(-\infty;2]$ và bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đã cho ?

x	$-\infty$		-1		0		1		2
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	2	↘	1

A. Giá trị cực đại bằng 2. **B.** Hàm số có 2 điểm cực tiểu.
C. Giá trị cực tiểu bằng -1. **D.** Hàm số có 2 điểm cực đại.

Lời giải.
Dựa vào tập xác định và bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số có 1 điểm cực tiểu là $x=0$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 46. Giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ của hàm số $y=x^3-12x+20$ là
A. $y_{\text{CĐ}}=4$. **B.** $y_{\text{CĐ}}=36$. **C.** $y_{\text{CĐ}}=-4$. **D.** $y_{\text{CĐ}}=-2$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có $y'=3x^2-12$.

Xét $y'=0$ suy ra $3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

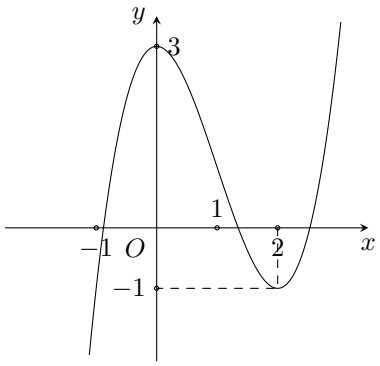
Xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ suy ra $y_{\text{CD}}=36$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
B. Điểm cực tiểu của hàm số là -1.
C. Điểm cực đại của hàm số là 3.
D. Giá trị cực đại của hàm số là 0.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

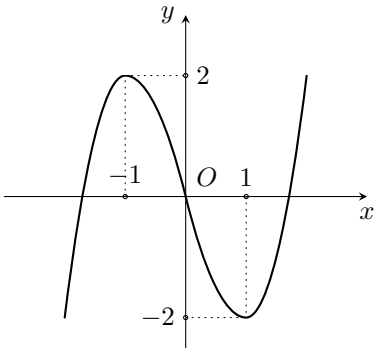
☑ Đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, giá trị cực đại bằng -1.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B**. $x=2$. **C**. $x=1$. **D**. $x=-2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Hàm số $y=-x^4-x^2+1$ có mấy điểm cực trị?

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 - 2x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -2x(2x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số có 1 cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số có đúng một cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có, dấu của y' đổi từ dương sang âm nên hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và dấu của y' đổi từ dương sang âm nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1, giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $x = -2$. **B**. $x = 3$. **C**. $x = 2$. **D**. $x = 4$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Nếu $f''(x_0)=0$ và $f'(x_0)=0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

B. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm $x_0$và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0.

C. Nếu $f''(x_0)>0$ và $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0)=0$.

Lời giải.

☑ Nếu $f''(x_0)=0$ và $f'(x_0)=0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số là phát biểu **sai**. Chẳng hạn, hàm số $y=x^4$ có $f'(0)=f''(0)=0$ và $x=0$ là điểm cực trị của hàm số.

☑ Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 là phát biểu đúng.

☑ Nếu $f''(x_0)>0$ và $f'(x_0)=0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 là phát biểu **sai** do không thỏa mãn dấu hiệu nhận biết điểm cực đại.

☑ Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0)=0$ là phát biểu **sai** vì khi $f'(x)=0$ thì $x=x_0$ chưa chắc là điểm cực trị vì $f'(x)$ có thể không đổi dấu khi x qua điểm x_0.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 5.

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=a\sqrt{3}$. Tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C**. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

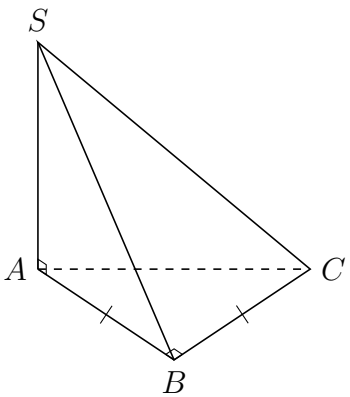
Trong tam giác ABC vuông cân tại B có:

$AB=BC=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$.

Đường cao hình chóp: $SA=a\sqrt{3}$.

Diện tích đáy $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=a^2$.

Vậy thể tích khối chóp: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 55. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Cực đại của hàm số bằng

A. 5. **B**. -1. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Chú ý cực đại là giá trị y_{CD}, dựa vào bảng biến thiên ta có 5 là cực đại của hàm số

Chọn đáp án A □

Câu 57. Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2 .

Câu 58. Hàm số $y = x^3 + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2 .

Câu 59. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x = -2$. **B**. $x = 2$. **C**. $x = 0$. **D**. $x = 3$.

Câu 60.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Chọn khẳng định **sai**.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu $y = -3$.

Câu 61. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2$. **B**. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C**. $y = 2x^4 + 4x^2 - 4$. **D**. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{mx^2}{3} + 4$ đạt cực đại tại $x = 2$.

A. $m = 1$. **B**. $m = 2$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = 4$.

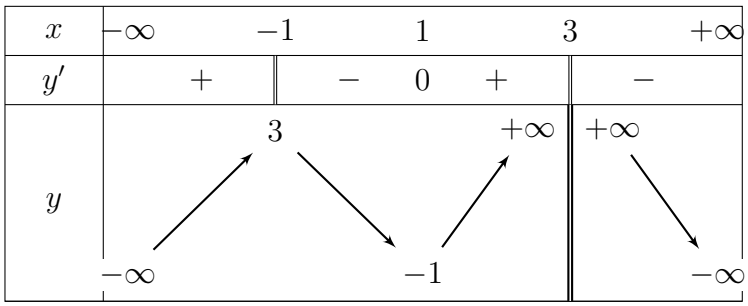
Câu 63. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = 2x^3 - 3x^2$. **B**. $y = x^4 + 2$. **C**. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. **D**. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ có giá trị cực tiểu y_{CT} bằng mấy?

A. $y_{CT} = -5$. **B**. $y_{CT} = -4$. **C**. $y_{CT} = -3$. **D**. $y_{CT} = 0$.

Câu 66. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$.

A. $x = 0$. **B**. $x = -2$. **C**. $x = -1$. **D**. $x = 1$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$. Phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ và y' đổi dấu từ âm sang dương qua điểm $x = 0$. Nên điểm cực tiểu của của hàm số là $x = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$. Hàm số có

A. một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại. **B**. một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

C. một điểm cực tiểu và một điểm cực đại. **D**. một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải.

Chú ý rằng hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đặc điểm về cực trị như sau

◇ Nếu $ab < 0$ thì hàm số có 3 điểm cực trị. Khi đó:

– Nếu hệ số $a > 0$ thì hàm số có 1 điểm cực đại (chính là điểm trên Oy), 2 điểm cực tiểu.

– Nếu hệ số $a < 0$ thì hàm số có 1 điểm cực tiểu (chính là điểm trên Oy), 2 điểm cực đại.

◇ Nếu $ab \geq 0$ thì hàm số có 1 điểm cực trị. Khi đó:

– Nếu hệ số $a > 0$ thì hàm số có 1 điểm cực tiểu.

– Nếu hệ số $a < 0$ thì hàm số có 1 điểm cực đại.

Từ hàm số đề bài, ta có $ab < 0$ và $a = \frac{1}{4} > 0$ nên chọn đáp án B.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

A. 1. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 2.

Câu 69. Hàm số nào sau đây có đúng một cực tiểu.

A. $y = x^3 - 1$. **B**. $y = x^4 - 5x^2 + 2$. **C**. $y = -x^2 + 2x + 1$. **D**. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 70. Cho hàm số $y = x^3$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
D. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.

Câu 71. Cho hàm số $y = 3x^4 + 4x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có cực đại mà không có cực tiểu.
B. Hàm số không có cực trị.
C. Hàm số có cả cực đại và cực tiểu.
D. Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Câu 72. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ là

A. -5.
B. -6.
C. -21.
D. 6.

Câu 73. Hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x-3}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.
B. 0.
C. 3.
D. 2.

Lời giải.

Có $y' = \dfrac{5}{(x-3)^2}$. Suy ra hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 3$ là

A. $(0;-3)$.
B. $x = 0$.
C. $x = \pm 2$.
D. $y = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 16x^2$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-19	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y_{CD} = 0$.
B. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 2$.
C. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -2$.
D. $y_{CT} = -2$.

Lời giải.

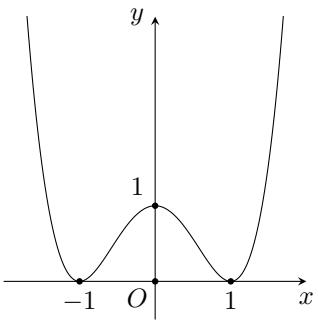
Dựa vào bảng biến thiên ta có: $y_{CD} = 2$, $y_{CT} = -2$.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất.

Do $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

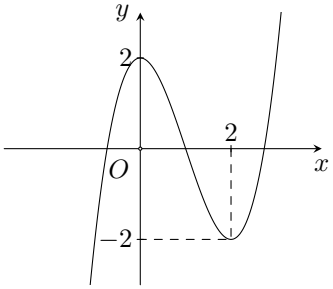
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 77.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng

A. 0. **B**. 1. **C**. -2. **D**. 2.



Lời giải.

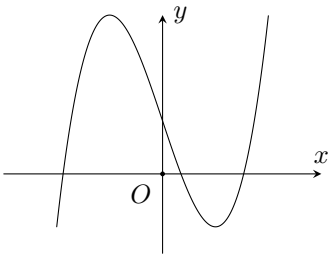
Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 78.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ của hàm số $y = x^3 - 12x + 20$ là

A. $y_{\text{CĐ}} = 4$. **B**. $y_{\text{CĐ}} = 36$. **C**. $y_{\text{CĐ}} = -4$. **D**. $y_{\text{CĐ}} = -2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 12$.

Xét $y' = 0$ suy ra $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ suy ra $y_{\text{CD}} = 36$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{x}$.

A. $N(-2;-2)$. **B**. $x = -2$. **C**. $M(2;2)$. **D**. $x = 2$.

Lời giải.

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{x}$ (TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$; y' không xác định $\Leftrightarrow x = 0$.

BBT

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2 \Rightarrow y = -2$.

Vậy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $N(-2;-2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

B. Hàm số có hai điểm cực đại.

C. Hàm số có ba điểm cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy mệnh đề "Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ có điểm cực tiểu là

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+3$, $y''=-6x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x thỏa mãn $\begin{cases}-3x^2+3=0\\-6x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$.

Với $x=-1\Rightarrow y=-2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1;-2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{lll}x=0 & ;y(0) & =3\\ x=\pm1 & ;y(\pm1) & =2\end{array}\right.$$

Như vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị: $(0;3)$, $(-1;2)$; $(1,2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Tìm giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ của hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $y_{\text{CĐ}}=0$. **B.** $y_{\text{CĐ}}=1$. **C.** $y_{\text{CĐ}}=-3$. **D.** $y_{\text{CĐ}}=2$.

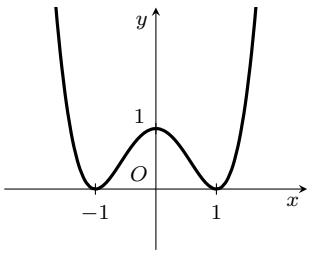
Lời giải.

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\cdot$$

Bằng cách sử dụng dạng đồ thị của hàm số, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{\text{CĐ}}=y(0)=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Quan sát hình vẽ, ta thấy điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ là $x=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Hàm số nào sau đây luôn có điểm cực trị?

A. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

B. $y=ax^3+bx^2+cx+d,\ a\neq 0$.

C. $y=ax^4+bx^2+c,\ a\neq 0$.

D. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{cx+d}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có thể không có cực trị. Ví dụ chọn $a=c=0,\ d\neq 0$, ta được hàm hằng.

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có thể không có cực trị. Ví dụ hàm số $y=x^3$ không có điểm cực trị.

Hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{cx+d}$ có thể không có cực trị. Ví dụ chọn $a=b=c=0,\ d\neq 0$ ta được hàm hằng.

Phương án **C** đúng: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ a\neq 0$ luôn có một điểm cực trị là $x=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$, có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-2	↗	5

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giá trị cực tiểu của hàm số là 0.

B. Giá trị cực đại của hàm số là 5.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có đạo hàm không xác định tại $x=1$ nhưng đổi dấu qua $x=1$ nên $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=x^3+3x^2+1$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+6x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Hàm số nào sau đây có hai điểm cực đại?

A. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-3$.

B. $y=-\dfrac{1}{2}x^4+2x^2-3$.

C. $y=2x^4+2x^2-3$.

D. $y=-x^4-2x^2+3$.

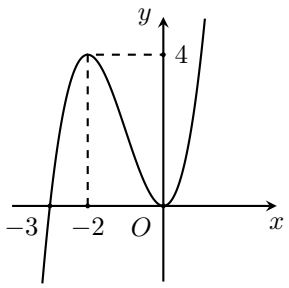
Lời giải.

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases}a<0\\ab<0\end{cases}$. Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^4+2x^2-3$ thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 90.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số



A. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.
B. $(-3;+\infty)$.
C. $(-3;+\infty)$ và $(0;+\infty)$.
D. $(-2;0)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho hàm số $y = x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\dfrac{2}{3}$ và $-\dfrac{5}{48}$.
B. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.
C. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.
D. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\dfrac{2}{3}$ và giá trị cực đại là $-\dfrac{5}{48}$.

Lời giải.

$f'(x) = 4x^3 - 2x^2 - 2x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 4x - 2$

Ta có $f''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3 > 0$, $f''(1) = 6 > 0$, $f''(0) = -2 < 0$.

Do đó, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = 1$, đạt cực đại tại $x = 0$. Các giá trị cực tiểu lần lượt là $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{48}$ và $f(1) = -\dfrac{2}{3}$. Giá trị cực đại là $f(0) = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \dfrac{2}{3}$. Tìm tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số.

A. $\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$.
B. $(-1;2)$.
C. $(1;2)$.
D. (1; -2).

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y(1) = 2 \\ x = 3 \Rightarrow y(3) = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên như hình bên.

Vậy tọa độ điểm cực đại là $(1; 2)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$\dfrac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ là

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$.

B. Hàm số có điểm cực đại $x = 5$.

C. Hàm số có điểm cực tiểu $x = -1$.

D. Hàm số có điểm cực tiểu $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^3 - 4x = -x(x^2 + 4)$. Vì $x^2 + 4 > 0$ với mọi số thực x nên y' chỉ đổi dấu khi qua $x = 0$.

Suy ra hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 1$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$.

A. 6. **B**. -106. **C**. 0. **D**. -107.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 18x$.

Hai điểm cực trị x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên $x_1 + x_2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Tìm tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 18$.

A. 38. **B**. 37. **C**. 40. **D**. 39.

Lời giải.

Ta có $y' = -6x^2 + 6x = -6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 18 \\ x = 1 \Rightarrow y = 19 \end{array}\right.$. Suy ra tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số là $18 + 19 = 37$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ là

A. $x = 2$. **B**. $x = \pm 2$. **C**. $x = \pm\sqrt{2}$. **D**. $x = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x^3 - 4x, y'' = 6x^2 - 4$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Mà $y''(0) = -4 < 0, y''(\sqrt{2}) = y''(-\sqrt{2}) = 8 > 0$.

Suy ra điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ là $x = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^3(x+1)^2(x-2)$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3 điểm cực trị. **B**. 2 điểm cực trị. **C**. 1 điểm cực trị. **D**. Không có cực trị.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. A	5. A	6. B	7. C	8. C	9. B	10. D
11. A	12. A	13. B	14. D	15. B	16. C	17. B	18. A	19. C	20. A
21. D	22. B	23. B	24. A	25. C	26. A	27. D	28. B	29. A	30. C
31. C	32. B	33. A	34. C	35. C	36. C	37. A	38. D	39. A	40. D
41. C	42. A	43. B	44. A	45. B	46. B	47. A	48. A	49. C	50. A
51. C	52. B	53. D	54. D	55. B	56. A	57. C	58. B	59. B	60. D
61. B	62. C	63. C	64. D	65. C	66. A	67. B	68. D	69. A	70. C
71. D	72. A	73. B	74. B	75. D	76. D	77. C	78. B	79. B	80. A
81. D	82. D	83. A	84. B	85. D	86. C	87. D	88. B	89. B	90. A
91. A	92. A	93. C	94. A	95. D	96. B	97. A	98. B	99. C	100. B

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 2x + 1$. Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1$, khi đó giá trị của tham số m thỏa mãn

A. $m \in (-1;0)$. **B.** $m \in (0;1)$. **C.** $m \in (-3;-1)$. **D.** $m \in (1;3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y = x^3 + 3mx^2 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6mx - 2$, $y'' = 6x + 6m$.

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Rightarrow 1 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{6}$.

Với $m = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + mx - 2$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

A. $m = -1$. **B.** $m = 1$. **C.** không có m. **D.** $m = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2(m+1)x + m$; $y'' = 2x - 2(m+1)$.

Vì hàm số đã cho là hàm số bậc ba nên

Hàm số có điểm cực đại là $x = -1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2(m+1) + m = 0 \\ -2 - 2(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m = -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là:

A. $y_{\text{CT}} = 3$. **B.** $y_{\text{CT}} = -3$. **C.** $y_{\text{CT}} = 4$. **D.** $y_{\text{CT}} = -4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Dấu y'

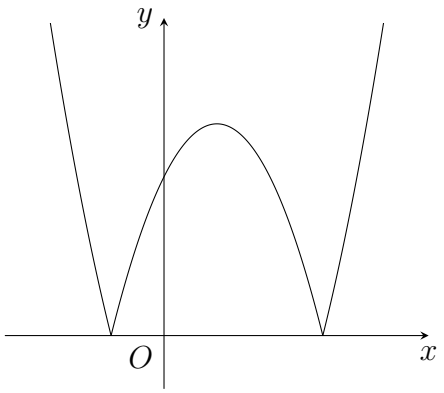
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$; $y_{\text{CT}} = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$.

A. $N(-2;-2)$. **B**. $x = -2$. **C**. $M(2;-2)$. **D**. $x = 2$.

Lời giải.

$y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$ (TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$; y' không xác định $\Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	-2	↘	‖	↘		↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2 \Rightarrow y = -2$.

Vậy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $N(-2;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ có 3 điểm cực trị

A. $m \geq \frac{2}{3}$. **B**. $m \leq \frac{2}{3}$. **C**. $m > \frac{2}{3}$. **D**. $m < \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ (1)

Để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị khi: $6m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?

A. $y = x^3 + 3x + 1$. **B**. $y = x^2 - 2x$. **C**. $y = x^4 + 4x^2 + 1$. **D**. $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 3x + 1$. Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$			

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong các hàm số sau đây hàm số nào có cực trị?

A. $y=\sqrt{x}$. **B**. $y=x^4-2x^2+3$.

C. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x-1$. **D**. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

Lời giải.

Do hàm số trùng phương $y=x^4-2x^2+3$ có hệ số $a=1>0$ và $ab=-2<0$, suy ra hàm số có cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $f(x)$ có giá trị cực đại là -3. **B**. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

C. $M(-2;-2)$ là điểm cực đại. **D**. $M(0;1)$ là điểm cực tiểu.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

☑ Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

☑ $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-3\\x=0\Rightarrow y=1\end{array}\right.$

☑ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy mệnh đề sai là $M(-2;-2)$ là điểm cực đại.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Gọi M, N là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-8x^2+3$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. 10. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 4.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Đạo hàm $y'=x^3-16x$.

☑ $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=3\\ x=\pm4\Rightarrow y=-61\end{array}\right.$

☑ Giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=+\infty$.

☑ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-61	$\nearrow$	3	$\searrow$	-61	$\nearrow$	$+\infty$

☑ Ta có $M(-4;-61)$, $N(4;-61)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(8;0)$ nên $MN=8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x+2)^3(2x-3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$.

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=-2\vee x=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2+(m^2-12)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-4;0)$. **B**. $(5;9)$. **C**. $(0;3)$. **D**. $(3;6)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+2mx+m^2-12$ và $y''=-6x+2m$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ là

$$y'(-1)=0\Leftrightarrow -3-2m+m^2-12=0\Leftrightarrow m^2-2m-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\ m=-3.\end{array}\right.$$

Với $m=-3$ thì $y'=-3x^2-6x-3=-3(x+1)^2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Với $m=5$ thì $y''(-1)=16>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=5\in(3;6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

A. $y=x^3-6x^2+9x-5$. **B**. $y=(x^2+1)^2$.

C. $y=2x^4-4x^2+1$. **D**. $y=-x^4-3x^2+4$.

Lời giải.

☑ Đáp án A: $y'=3x^2-6x+9=0$ vô nghiệm nên hàm số không có cực trị. Loại A.

☑ Đáp án B: $y'=4x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ nên hàm số có 1 cực trị. Loại B.

☑ Đáp án C: Đây là hàm trùng phương có $ab=-8<0$ nên hàm số có 3 cực trị. Chọn C.

☑ Đáp án D: Đây là hàm trùng phương có $ab=3>0$ nên hàm số có 1 cực trị. Loại D.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2\left(x+1\right)^3(x+2)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Do $f'(x)=x^2\left(x+1\right)^3(x+2)$ có các nghiệm $x=0$ (bội 2) nên loại.

Ngoài ra $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ, đó là $x_1=-1;x_2=-2$.

Vậy hàm số có có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Hàm số $y=2x^3-x^2+5$ có điểm cực đại là

A. $x=\dfrac{1}{3}$. **B**. $x=5$. **C**. $x=3$. **D**. $x=0$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Tính y' tìm nghiệm của $y'=0$.
- Tính y'' và tìm giá trị của y'' tại các điểm vừa tìm được.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 thì điểm x_0 là điểm cực đại của hàm số trên nếu $\begin{cases}f'\left(x_0\right)=0\\f''\left(x_0\right)<0.\end{cases}$

Cách giải:

Ta có $y'=6x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$

$y''=12x-2\Rightarrow y''(0)=-2<0;\ y''\left(\dfrac{1}{3}\right)=2>0.$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^3\left(x-3\right)^4$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình $f'\left(x\right)=0$, nếu x_0 là nghiệm bội bậc chẵn của phương trình thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số, nếu x_0 là nghiệm bội bậc lẻ của phương trình thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Xét phương trình $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Trong đó $x=0$, $x=2$ là các nghiệm bội bậc lẻ nên hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

(còn $x=1$; $x=3$ là các nghiệm bội bậc chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$).

Chú ý: Các em có thể lập bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ rồi kết luận số điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Hàm số $y = x^3 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi:

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - m - 2, y'' = 6x$.

Vì hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m=1$ ta có $y''(1) = 6 > 0$. Vậy hàm số $y = x^3 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi $m=1$

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 = 3x^2 - 9x + 2$. Chọn kết luận đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$, cho $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	-25	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hàm số $y = x - \sin 2x + 3$. Chọn kết luận đúng.

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{3}$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{\pi}{6}$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - 2\cos 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Và $y'' = 1 + 4\sin 2x$

☑ $y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{6}$.

☑ $y''\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x^2-x)(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta thấy $f'(x) = (x+1)(x^2-x)(x-1) = x(x+1)(x-1)^2$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{bmatrix}$$

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực trị tại hai điểm $x = -1$ và $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A. 7. **B**. -20. **C**. -25. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 3 \end{bmatrix}$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	-25	↗	$+\infty$

Nhìn vào BBT ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là -25.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y = 2x - 1$. **B**. $y = x - 2$. **C**. $y = -x + 2$. **D**. $y = -2x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Lấy y chia cho y' ta được $y = \frac{1}{3}x(3x^2-3) - 2x + 1$. Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)(x+5)^4$$

Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 4. **B**. 2. **C**. 5. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=2 \text{ (nghiệm kép bội chẵn)} \\ x=3 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=-5 \text{ (nghiệm kép bội chẵn)} \end{array}\right.$$

Vì $f'(x)$ đổi dấu khi x qua các điểm $x=-1$, $x=3$ nên hàm số có 2 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x+1$ là điểm $M(x_0;y_0)$. Tính tổng $T=x_0+y_0$.

A. $T=8$. **B**. $T=4$. **C**. $T=-11$. **D**. $T=3$.

Lời giải.

Ta có $y'=12x^3-12x^2-12x+12$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=1 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-10	↗		↗	$-\infty$

Dựa vào điểm biến thiên suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $M(-1;-10)$, suy ra $x_0=-1$, $y_0=-10$. Do đó, $T=-11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$ có tọa độ điểm cực tiểu là $(1;3)$. Khi đó, $m+n$ bằng

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-4mx+m^2$, $y''=6x-4m$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1;3)$, suy ra

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3=0 \\ m^2-2m+n+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases} \\ \begin{cases} m=3 \\ n=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases}$, ta có $y''(1)=2>0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. Do đó, $m=1$, $n=3$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $m+n=4$.

Với $\begin{cases} m=3 \\ n=-1 \end{cases}$, ta có $y''(1)=-6<0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=1$. Do đó, $m=3$, $n=-1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=x^3-1$. **B.** $y=x^3+3x^2+1$. **C.** $y=x^3-x$. **D.** $y=x^4+3x^2+2$.

Lời giải.

Ta xét

① $y=x^3-1$, có $y'=3x^2\geq 0$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$

Vậy $y=x^3-1$ không có cực trị.

② $y=x^3+3x^2+1$, có $y'=3x^2+6x$. Xét $y'=0 \Rightarrow x=0,\ x=-2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy $y=x^3+3x^2+1$ có 2 cực trị.

③ $y=x^3-x$, có $y'=3x^2-1$. Xét $y'=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$

Vậy $y=x^3-x$ có 2 cực trị.

④ $y=x^4+3x^2+2$, có $y'=4x^3+6x$. Xét $y'=0 \Rightarrow x=0$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Vậy $y=x^4+3x^2+2$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0)>0$ hoặc $f''(x_0)<0$.
B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0)=0$.
C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.
D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

Lời giải.

Trong các khẳng định trên thì khẳng định "Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0)=0$".
Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=2$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có $y'=3x^2-6x$. Xét $y'=0\Rightarrow x=0,\ x=2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.
Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. Hàm số không có cực trị.
B. Hàm số chỉ có đúng ba điểm cực trị.
C. Hàm số chỉ có đúng hai điểm cực trị.
D. Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4x$. Xét $y'=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm1$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Vậy hàm số có ba cực trị.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3$. Hỏi hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?
A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 5.

Lời giải.

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2(x-3)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-1)$	↘		↘	$f(3)$	↗	

Vậy hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y=2\sqrt{x}-x$. **B.** $y=x^5-5x^2+5x-13$.

C. $y=x^4-4x+3$. **D.** $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y=2\sqrt{x}-x$ có tập xác định $\mathscr{D}=[0;+\infty)$, liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=0 \Leftrightarrow x=1$ và $y''=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y''(1)<0$. Do đó $x_{\text{CĐ}}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2$ là

A. 7. **B.** -25. **C.** -20. **D.** 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-6x-9$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=-25 \\ x=-1 \Rightarrow y=7 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	-25	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là -25.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

A. $y = x^3 - 3x$. **B**. $y = x^3 - 3x - 1$. **C**. $y = x^3 + 3x$. **D**. $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 cực trị nên loại C và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;2)$ nên chọn A.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)\left(x^2-1\right)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B**. 1. **C**. 8. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2(x-1)\left[(x-1)(x+1)\right]^3 = x^2(x-1)(x-1)^3(x+1)^3 = x^2(x-1)^4(x+1)^3$.

Suy ra $f'(x)$ có $x = 0$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm bội 4 và $x = -1$ là nghiệm bội 3.

Do đó $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua điểm $x = -1$.

Vậy hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị $x = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại $x = 1$?

A. $m \leq 3$. **B**. $m = 3$. **C**. $m < 3$. **D**. $m > 3$.

Lời giải.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $\begin{cases} y'(1) = 3.1^2 - 2m.1 + 2m - 3 = 0 \\ y''(1) = 6.1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 1 điểm cực trị?

A. $y = -x^4 - 3x^2 + 4$. **B**. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$. **D**. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Lời giải.

Phương pháp

Số cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$

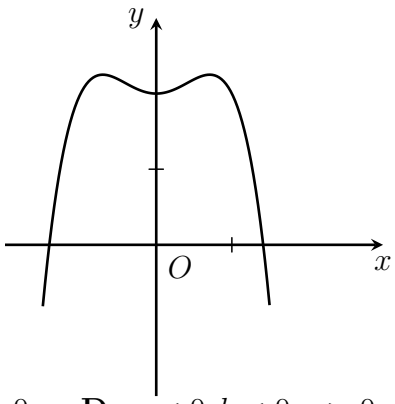
Cách giải:

+) Xét đáp án A ta có: $y' = -4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 38.

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0, b>0, c>0$. **B.** $a<0, b>0, c<0$. **C.** $a>0, b<0, c>0$. **D.** $a<0, b<0, c>0$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số nhận xét số điểm cực trị, các điểm thuộc đồ thị hàm số và các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số và đưa ra kết luận đúng.

Cách giải:

Ta thấy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu $\Rightarrow a<0$ và $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Có: $y'=4ax^3+2bx=0 \Leftrightarrow 2x\left(2ax^2+b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\dfrac{b}{a}(1) \end{array}\right.$

Phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Pt(1) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}>0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}<0$ mà $a<0 \Rightarrow b>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $0 \Rightarrow c>0$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $m \leq 3$. **B.** $m>3$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<3$.

Lời giải.

① TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

② $y'=3x^2-6x+m$.

③ Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=3>0 \\ \Delta'=9-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<3$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tính giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}}$ của hàm số $y=x^3-6x^2+9x+2$.

A. $y_{\text{CĐ}}=2$. **B.** $y_{\text{CĐ}}=1$. **C.** $y_{\text{CĐ}}=4$. **D.** $y_{\text{CĐ}}=6$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-12x+9$ và $y'=0$ có nghiệm $x=1$, $x=3$.

Mặt khác $y''=6x-12$ và $y''(1)=-6$, $y''(3)=6$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 6.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2x + 1$ nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. **B**. $m = \dfrac{5}{2}$. **C**. Có vô số m. **D**. $m = \dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 2$ và $y'' = 6x - 6m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $3 \cdot 1^2 - 6m \cdot 1 + 2 = 0$ hay $m = \dfrac{5}{6}$.

Với $m = \dfrac{5}{6}$ thì $y'' = 6x - 5$ và $y''(1) = 6 \cdot 1 - 5 = 1 > 0$, cho nên $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy $m = \dfrac{5}{6}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ có giá trị cực tiểu bằng

A. 2. **B**. 4. **C**. -4. **D**. -2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x$ và $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$, $x = -2$.

Mặt khác $y'' = -6x - 6$ và $y''(0) = -6$, $y''(-2) = 6$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ và giá trị cực đại của hàm số bằng -2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. **B**. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$. **D**. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Với mọi $x \in (-2; 2)$ ta có $y' = 1 + \dfrac{(12 - 3x^2)'}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = 1 - \dfrac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} = \dfrac{\sqrt{12 - 3x^2} - 3x}{\sqrt{12 - 3x^2}}$.

$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{12 - 3x^2} - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 12x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	-2		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	4	↘	2

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Đồ thị của hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ đạt cực tiểu tại $M(x_1; y_1)$. Khi đó giá trị của tổng $x_1 + y_1$ bằng bao nhiêu?

A. 6. **B**. 7. **C**. -13. **D**. -11.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow 12\left(x+1\right)\left(x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -10 \\ y = 6. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $M(-1;-10)$.

Vậy $x_1 + y_1 = -1 - 10 = -11$.

Chọn đáp án D □

Câu 45.

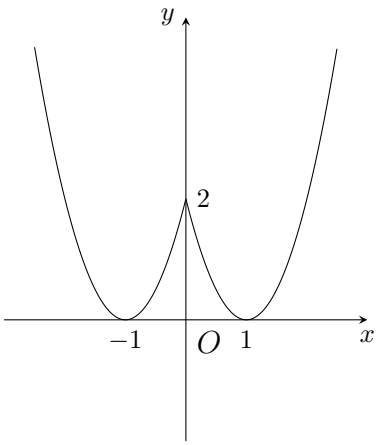
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên

(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.



Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

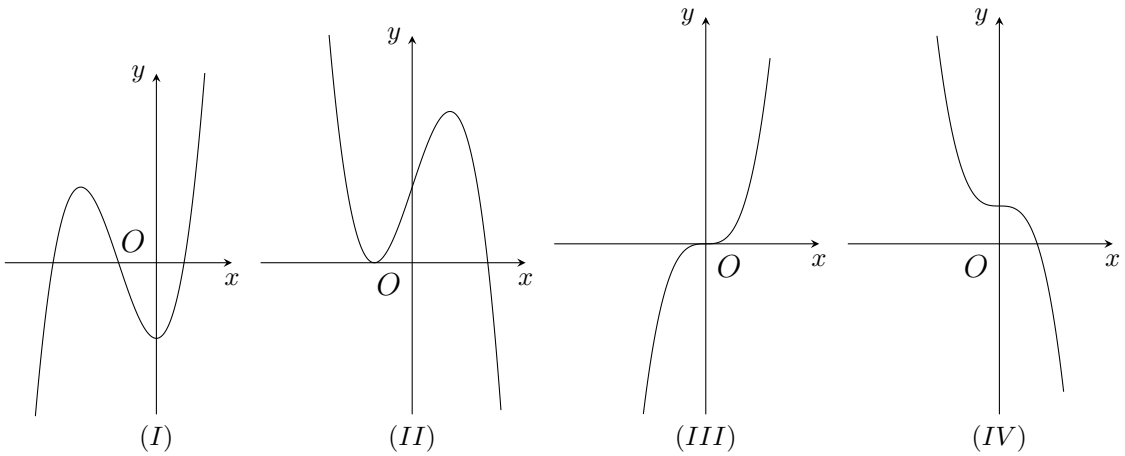
Từ đồ thị hàm số ta thấy

- ☑ Đồ thị đi xuống trên khoảng $(0;1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Do đó (I) đúng.
- ☑ Đồ thị đi lên trên khoảng $(-1;0)$, đi xuống trên khoảng $(0;1)$ và đi lên trên khoảng $(1;2)$ nên trên khoảng $(-1;2)$ hàm số không hoàn toàn đồng biến. Do đó (II) sai.
- ☑ Đồ thị hàm số có ba điểm hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên (III) đúng.
- ☑ Giá trị lớn nhất của hàm số là tung độ của điểm cao nhất của đồ thị hàm số nên (IV) sai.

Như vậy ta có hai mệnh đề đúng là (I) và (III).

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

B. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

C. Đồ thị (II) xảy ra khi $a\neq 0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

D. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đồ thị (III) đi lên từ trái qua phải nên $a>0$ và hàm số không có cực trị nên $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2$ là

A. -25. **B**. 3. **C**. 7. **D**. -20.

Lời giải.

$y'=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)=3\left(x+1\right)\left(x-3\right)$, từ đó $x_{CT}=3$ nên $y_{CT}=y\left(3\right)=-25$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^3(x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Hàm số có 2 điểm cực trị là $x=-1$ và $x=-2$. Chú ý rằng $f'(0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ không là cực trị của hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-6x^2+(m-2)x+11$ có hai điểm cực trị trái dấu là

A. $(-\infty;38)$. **B**. $(-\infty;2)$. **C**. $(-\infty;2]$. **D**. $(2;38)$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-12x+m-2$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu khi và chỉ khi $m-2<0\Leftrightarrow m<2$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Hàm số nào sau đây đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. $y=x^3+2$. **B**. $y=x^2+1$. **C**. $y=-x^3+x-1$. **D**. $y=x^3-3x^2+2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^2 + 1$ có $y' = 2x$ và $y'' = 2$.

Vì $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 > 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

A. $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y = x^4$. **C.** $y = -x^3 + x$. **D.** $y = |x+2|$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

☑ $y' = \dfrac{7}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$ nên hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Do đó hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4) = (x-1)(x^2-2)^2(x^2+2)$. Suy ra $f'(x)$ chỉ qua điểm và đổi dấu tại $x = 1$.

Vậy hàm số chỉ có một cực trị tại $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ nên không tồn tại cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 12x + 9, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số có tọa độ là $(1;4)$, nên tổng hoành độ và tung độ bằng 5.
Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x+1)(x+2)(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT		↗		$+\infty$

Vậy số cực trị của hàm số đã cho là 2.
Chọn đáp án C □

Câu 56. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$. Tính $b + 2a$.

A. 3. **B**. 15. **C**. -15. **D**. -3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$ nên suy ra

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9. \end{cases}$$

Thử lại ta thấy với $a = 3, b = -9$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
Vậy $b + 2a = -9 + 2 \cdot 3 = -3$.
Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	-3		-1		0		1		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây **sai** về hàm số đó?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy $f'(0)=0$ và đạo hàm không đổi dấu khi x qua $x_0=0$ nên hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Gọi x_1, x_2, x_3 là các điểm cực trị của hàm số $y=-x^4+4x^2+2019$. Tổng $x_1+x_2+x_3$ bằng

A. 0. **B**. $2\sqrt{2}$. **C**. -1. **D**. 2.

Lời giải.

$y'=-4x^3+8x$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $x_1+x_2+x_3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Trong tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4$ đạt cực đại tại $x=0$ là

A. $m<1$. **B**. $m>1$. **C**. Không tồn tại m. **D**. $m=1$.

Lời giải.

☑ Với $m=1$, hàm số trở thành $y=0$ không có cực trị, do đó $m=1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

☑ Với $m\neq 1$, ta có $y'=4(m-1)x^3$, $y'=0 \Leftrightarrow x=0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=0$ khi chỉ khi $\begin{cases} y'>0, \ \forall x\in(-\infty;0) \\ y'<0, \ \forall x\in(0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m-1<0 \Leftrightarrow m<1$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2-2x$. Giá trị của $x_1^2+x_2^2$ bằng

A. 13. **B**. 32. **C**. 40. **D**. 36.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=x^2-6x-2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x-2=0 \quad (*)$

Có $x_1;x_2$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$

$\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6^2-2\cdot(-2)=40$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Hàm số $f(x)=\mathrm{C}_{2019}^0+\mathrm{C}_{2019}^1x+\mathrm{C}_{2019}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B**. 2018. **C**. 1. **D**. 2019.

Lời giải.

Phương pháp

☑ Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x)=0$.

☑ Sử dụng công thức $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n=(x+1)^n$.

Cách giải

Ta có $f(x)=\mathrm{C}_{2019}^0+\mathrm{C}_{2019}^1x+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019}=(x+1)^{2019}$

$\Rightarrow f'(x)=[(x+1)^{2019}]=2019(x+1)^{2018}$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow 2019(x+1)^{2018}=0\Leftrightarrow x=-1$.

Vì $x=1$ là nghiệm bội 2018 nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$.

A. $y=x+1$. **B**. $y=-x+1$. **C**. $y=x-1$. **D**. $y=-x-1$.

Lời giải.

☑ TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ $y'=-6x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -6x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$. Giá trị cực tiểu $y_{\mathrm{CT}}=1$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$. Giá trị cực đại $y_{\mathrm{CD}}=2$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{2-1}\Leftrightarrow x=y-1\Leftrightarrow y=x+1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 63. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

B. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)>0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

C. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)=0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số $y=f(x)$ đã cho.

D. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại giá trị nào của x?

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Dự vào bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$. **B**. $T = 1$. **C**. $T = -2$. **D**. $T = -4$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$ nên

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 1 + a + b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = -6 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \end{cases}.$$

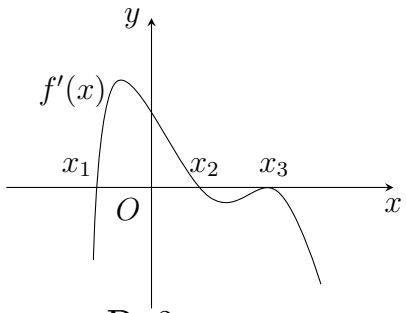
Vậy $T = a + b + c = 3 - 9 + 2 = -4$.

Đề bài cho thừa giả thiết vì chỉ cần sử dụng $f(1) = -3 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = -3 \Leftrightarrow a + b + c = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 66.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên. Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng?



(I). Trên K, hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3.

(III). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1.

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘		↘	$-\infty$

Khẳng định (I) đúng vì trên khoảng K, hàm số có 2 điểm cực trị.

Khẳng định (II) sai vì $x = x_3$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Khẳng định (III) đúng vì hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_1$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+2$ là

A. $\left(\sqrt{3};-\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{3};-\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;0)$.

Lời giải.

$y'=2x^3-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$

$y''=6x^2-6$.

• Với $x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow y''(\pm\sqrt{3})=12>0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Với $x=0\Rightarrow y''(0)=-6<0\Rightarrow x=0$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $(0;2)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có đồ thị là (C_m). Tìm m sao cho (C_m) có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=5$.

A. $m=\sqrt[3]{2}$. **B.** $m=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

$y'=3x^2-6x+m$. Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 9-3m>0\Leftrightarrow m<3$.

x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2-6x+m=0$. Theo hệ thức Vi-ét có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=\dfrac{m}{3}.\end{cases}$

$x_1^3+x_2^3=5\Leftrightarrow(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=5\Leftrightarrow 8-2m=5\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=-x^4+2x^2-3$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=-4x^3+4x$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	↗	-2	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Cách khác: Vì $a\cdot b<0$ nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ có đồ thị (C). Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là

A. $y=x+3$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. **C.** $y=\dfrac{-1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. **D.** $x-2y-3=0$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 12x + 9$, $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}\right)(3x^2 - 12x + 9) + (-2x + 4)$.

Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C) có phương trình là $y = -2x + 4$.

Đường thẳng vuông góc với $y = -2x + 4$ có phương trình là $y = \dfrac{1}{2}x + b$.

Đường thẳng qua $A(-1;1)$ suy ra $1 = \dfrac{1}{2} \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m-1)x^2 - (m^2-8)x + 2$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm $x = -1$.

A. $m = -2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -9$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 4(2m-1)x - (m^2-8) \Rightarrow f''(x) = -6x + 4(2m-1)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm $x = -1$ thì $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -9. \end{array}\right.$

☑ Với $m = 1$, ta có $f''(-1) = 10 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

☑ Với $m = -9$, ta có $f''(-1) = -70 < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Vậy $m = 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $B(-1;4)$. **B.** $D(2;4)$. **C.** $C(0;2)$. **D.** $A(1;0)$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, $y'' = 6x$, $y''(1) = 6 > 0$, $y''(-1) = -6 < 0$ nên $A(1;0)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -4$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Gọi (C) là parabol đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$, tìm m để (C) đi qua điểm $A(2;24)$.

A. $m = -4$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

$y' = x^3 - 2mx$

Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm $x = 0, x = \sqrt{2m}, x = -\sqrt{2m}$, với $m > 0$. Do đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $M(0; m^2), N(\sqrt{2m}; 0), P(-\sqrt{2m}; 0)$.

Giả sử phương trình parabol cần tìm có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Ta có: $\begin{cases} c = m^2 \\ a \cdot 2m + b \cdot \sqrt{2m} + c = 0 \\ a \cdot 2m - b \cdot \sqrt{2m} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{m}{2} \\ b = 0 \\ c = m^2 \end{cases}$.

Parabol có phương trình $y = mx^2 + m^2$, parabol đi qua điểm $A(2; 24)$ nên $m = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

☑ Với $m = -1$ hàm số có dạng: $y = 2x^2 + 1$.
$y' = 2x$; $y'' = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow m = -1$ (loại).

☑ Với $m \neq -1$ để hàm số có một cực đại không có cực tiểu thì

$$\begin{cases} -(m+1)(m-1) \geq 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in (-15; -7)$. **B**. $m_0 \in (-1; 7)$. **C**. $m_0 \in (7; 10)$. **D**. $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + m$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$.

Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 13 = 0 \Rightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng $\mathscr{K}$ và $x_0 \in \mathscr{K}$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$.

B. Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì tồn tại $a < x_0$ để $f'(a) > 0$.

C. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

D. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)\neq 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0.

Lời giải.

Ta có định lý "**Nếu** $f''(x_0)<0$ **thì** hàm số f đạt cực đại x_0". Chiều ngược lại không đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Tích các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số bằng

A. 0. **B**. 6. **C**. -6. **D**. -3.

Lời giải.

$y'=3x^2-6x;\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}=-3$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$ có hai điểm cực trị A,B. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB.

A. $(1;2)$. **B**. $(1;3)$. **C**. $(-1;-3)$. **D**. $(-1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2}$.

Ta được $x_A+x_B=\dfrac{-4}{2}=-2\Rightarrow x_I=-1$. (1)

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A,B là $y=4x+1$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $y_I=4\cdot x_I+1=-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Tìm m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+3x-1$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m>2$. **B**. $m<2$. **C**. $m<0\vee m>\dfrac{9}{4}$. **D**. $0<m<\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta thấy $m=0$ hàm số suy biến thành $y=3x-1$ không có cực trị.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0\\ 4m^2-9m>0\end{cases}\Leftrightarrow m<0\vee m>\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+\dfrac{2}{3}$. Toạ độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là

A. $(1;2)$. **B**. $(-1;2)$. **C**. $\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$. **D**. $(1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-4x+3,\quad y'=0\Leftrightarrow x=1\vee x=3$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Chọn đáp án A ☐

Câu 82. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = 21x^4 + 5x^2 + 2018$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 84x^3 + 10x = 2x \cdot (42x^2 + 5)$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu qua nghiệm này. Vậy hàm số có 1 cực trị.

Chọn đáp án A ☐

Câu 83. Trong các hàm số sau hàm số nào có cực đại, cực tiểu và $x_{\text{CT}} < x_{\text{CĐ}}$?

A. $y = -x^3 + 9x^2 + 3x + 2$. **B.** $y = -x^3 - 3x - 2$.

C. $y = x^3 - 9x^2 - 3x + 5$. **D.** $y = x^3 + 2x^2 + 8x + 2$.

Lời giải.

☑ Hàm số $y = -x^3 - 3x - 2$ và $y = x^3 + 2x^2 + 8x + 2$ không có cực trị.

☑ Hàm số $y = x^3 - 9x^2 - 3x + 5$ có hai cực trị, vì hệ số $a > 0$ nên $x_{\text{CT}} > x_{\text{CĐ}}$.

☑ Hàm số $y = -x^3 + 9x^2 + 3x + 2$ có hai cực trị, vì hệ số $a < 0$ nên $x_{\text{CT}} < x_{\text{CĐ}}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. Có ba điểm. **B.** Có bốn điểm. **C.** Có một điểm. **D.** Có hai điểm.

Lời giải.

Theo định nghĩa về cực trị, nhìn trên bảng biến thiên ta thấy chỉ có $x = -1$ và $x = 1$ là thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện. Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án D ☐

Câu 85. Tổng số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y_{\text{CĐ}} + y_{\text{CT}} = 1 + (-3) = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[-1; 1]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y	0	↗	1	↘	0

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
B. Hàm số có đúng một cực trị.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số chỉ có đúng một cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực).

A. 0. **B**. m. **C**. 2. **D**. $-4 + m$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $y'' = 6x - 6$.

☑ Do $y''(0) < 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, suy ra cực đại hàm số là $y(0) = m$.

☑ Do $y''(2) > 0$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số có 3 điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.

D. Điểm cực tiểu của hàm số là $x=0$.

Lời giải.

Do y' đổi dấu khi x qua 0 và 1 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Hàm số nào dưới đây chỉ có cực tiểu và không có cực đại?

A. $y=-x^4+x^2$.

B. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y=x^4+1$.

D. $y=x^3+x^2+2x-1$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^4+1$ có $y'=4x^3, y'=0\Leftrightarrow x=0$.

y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên hàm số chỉ có cực tiểu không có cực đại.

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Điểm cực đại của hàm số $y=x^3-3x+1$ là

A. $x=3$.

B. $x=1$.

C. $x=0$.

D. $x=-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$

Do $y''=6x$, suy ra $y''(-1)=-6<0$, từ đó ta được hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2018(x-1)^{2017}(x-2)^{2018}(x-3)^{2019}$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)$ có đổi dấu khi đi qua các điểm $x_1=1$, $x=3$ nên hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m-3)x+2018$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

A. $m\le 4$.

B. $m\le 3$.

C. $m\le 2018$.

D. $m\le 9$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'=x^2-(m-3)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Điều này tương đương $m-3\le 0$ hay $m\le 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

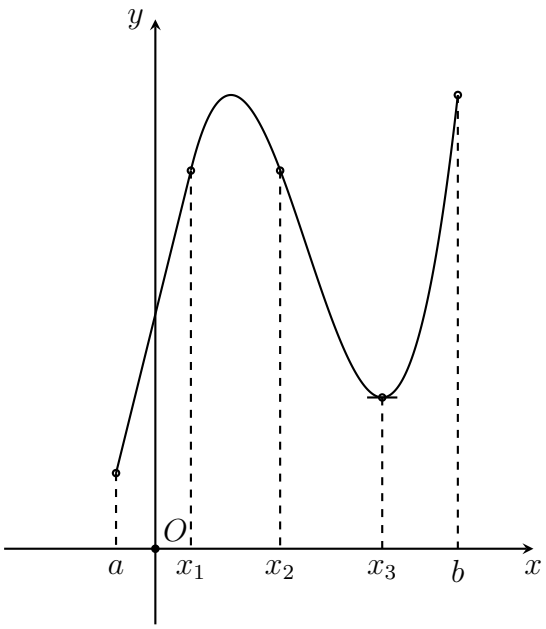
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

☑ Dấu của y' đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = 0$ (tính từ trái sang phải) nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

☑ Dấu của y' đổi từ âm sang dương khi qua điểm $x = 1$ (tính từ trái sang phải) nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?



A. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$.

B. $f'(x_1) > 0$.

C. $f'(x_2) > 0$.

D. $f'(x_3)=0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có đạo hàm và nghịch biến trong khoảng $(c;d)$ chứa x_2, suy ra $f'(x_2)\le 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho các hàm số $(I):y=x^2+3$; $(II):y=x^3+3x^2+3x-5$; $(III):y=x-\dfrac{1}{x+2}$; $(IV):y=(2x+1)^7$. Các hàm số không có cực trị là

A. $(I),(II),(III)$. **B**. $(II),(III),(IV)$. **C**. $(III),(IV),(I)$. **D**. $(IV),(I),(II)$.

Câu 96. Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x+7x+2$. **B**. $y=-x^4+2x^2$.

C. $y=-x^4-2x^2+1$. **D**. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Xét $y=-x^4+2x^2$ có $y'=-4x^3+4x$

$$y'=0\Leftrightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right. .$$

Chọn đáp án B □

Câu 97. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó, giá trị của m là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. 4. **C**. -4. **D**. $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$y'=\frac{-7}{(x-2)^2}<0,\quad \forall x\ne 2$$

$$y(1)=-4\ ;\ y(-1)=\frac{2}{3}.$$

Vậy $m=-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 98.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại giá trị nào sau đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

A. $x=-1$. **B**. $x=2$.

C. $x=0$. **D**. $x=-2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Trong các hàm số sau, hàm số nào có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

A. $y=-x^4-x^2+3$. **B**. $y=x^4-x^2+3$. **C**. $y=-x^4+x^2+3$. **D**. $y=x^4+x^2+3$.

Lời giải.

Hàm trùng phương có ba cực trị nên $a \cdot b < 0$ do đó ta loại hai hàm số $y = -x^4 - x^2 + 3$ và $y = x^4 + x^2 + 3$. Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu nên hệ số $a < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 - 1)(x - \sqrt{3})^2$. Số điểm cực trị của hàm số này là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Vì $f'(x)$ có 3 nghiệm $x = -1, x = 1, x = \sqrt{3}$. Trong đó, các nghiệm $x = -1, x = 1$ là các nghiệm đơn, còn nghiệm $x = \sqrt{3}$ là nghiệm kép nên đạo hàm không đổi dấu khi qua điểm $x = \sqrt{3}$. Vậy, hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

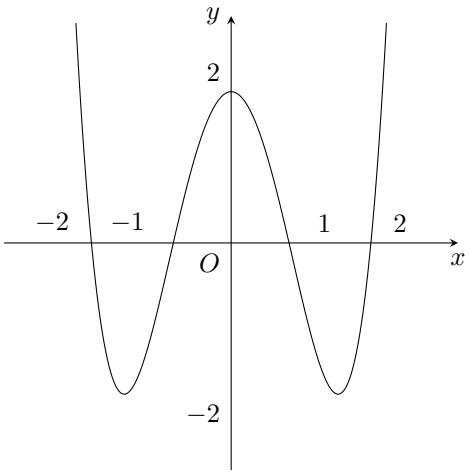
ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. D	4. C	5. A	6. D	7. A	8. C	9. B	10. C
11. C	12. B	13. D	14. C	15. B	16. D	17. A	18. D	19. A	20. D
21. C	22. C	23. D	24. B	25. C	26. A	27. A	28. B	29. B	30. B
31. A	32. A	33. B	34. A	35. B	36. D	37. A	38. A	39. D	40. D
41. D	42. D	43. B	44. D	45. B	46. A	47. A	48. C	49. B	50. B
51. A	52. B	53. C	54. A	55. C	56. D	57. D	58. A	59. A	60. C
61. A	62. A	63. D	64. C	65. D	66. D	67. C	68. C	69. C	70. B
71. C	72. D	73. C	74. B	75. D	76. A	77. A	78. D	79. C	80. C
81. A	82. A	83. A	84. D	85. D	86. B	87. B	88. B	89. C	90. D
91. A	92. B	93. D	94. C	95. B	96. B	97. C	98. C	99. C	100. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x) - 2m + 5|$ có 7 điểm cực trị.

A. 6. **B**. 3. **C**. 5. **D**. 2.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ có được bằng cách tịnh tiến theo trục Oy là $-2m + 5$ đơn vị.

Muốn đồ thị $y = |f(x) - 2m + 5|$ có đủ 7 cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x) - 2m + 5$ phải cắt Ox như vậy thì $-2 < -2m + 5 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < m < \dfrac{7}{2}$ do m nguyên nên chọn $m = 2; m = 3$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A. 1. **B**. 2. **C**. 6. **D**. 3.

Lời giải.

$$f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 (nghiemboichan) \\ x = 1 (nghiemdon) \\ x = -3 (nghiemdon) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3(m+2)^2$. Đồ thị của hàm số trên có ba cực trị tạo thành tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng.

A. $m \in (-1; 0)$. **B**. $m \in (0; 1)$. **C**. $m \in (1; 2)$. **D**. $m \in (-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+2)x$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+2)x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt(1)

Lại có $4x^3 - 4(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 2 \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow m+2>0 \Leftrightarrow m>-2$ (*)

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m+2} \end{array}\right.$

Gọi ba điểm cực trị đó là $A(0;3(m+2)^2), B\left(\sqrt{m+2};2(m+2)^2\right), C\left(-\sqrt{m+2};2(m+2)^2\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+2};-(m+2)^2\right) \\ \overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m+2};-(m+2)^2\right) \\ \overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{m+2};0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB=\sqrt{m+2+(m+2)^4} \\ AC=\sqrt{m+2+(m+2)^4} \\ BC=2\sqrt{m+2} \end{cases}$$

Như vậy $AB=AC$ nên ta chỉ cần ép cho $AB=BC$

$$\Rightarrow m+2+(m+2)^4=4(m+2) \Leftrightarrow (m+2)^4=3(m+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=\sqrt[3]{3}-2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với (*) ta được $m=\sqrt[3]{3}-2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+3)x+m-4$. Tìm m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. $-3<m<-1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>4$. **D.** $m>0$.

Lời giải.

Có $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn. Nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Xét $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m+3)x+m-4$. Có $f'(x)=x^2-2(m+1)x+(m+3)$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1>0; x_2>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-2>0 \\ m+1>0 \\ m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty) \\ m>-1 \\ m>-3. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m>1$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in(-1;7)$. **B.** $m_0\in(-15;-7)$. **C.** $m_0\in(7;10)$. **D.** $m_0\in(-7;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6x+m$.

Hàm số có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi y' có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 9-3m>0 \Leftrightarrow m<3$.

Khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của y'. Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m}{3}. \end{cases}$

Theo đề bài ra $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=13 \Leftrightarrow 4-m=13 \Leftrightarrow m=-9$.

Vậy $m_0=-9$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 5 của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 4.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\dfrac{2}{3}$đồng biến trên $(1;+\infty)$

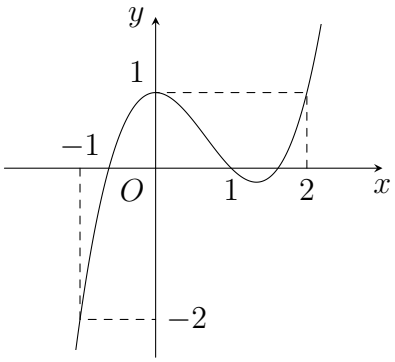
$$\Leftrightarrow y'=x^2+2(m-1)x+(2m-3)\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-3\geq -2mx-2m,\ \forall x\in(1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-3\geq -2m(x+1),\ \forall x\in(1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x+1}\geq -2m,\ \forall x\in(1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow x-3\geq -2m,\ \forall x\in(1;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow m\geq 1.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}, m<5\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$. Suy ra có 4 giá trị của tham số m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



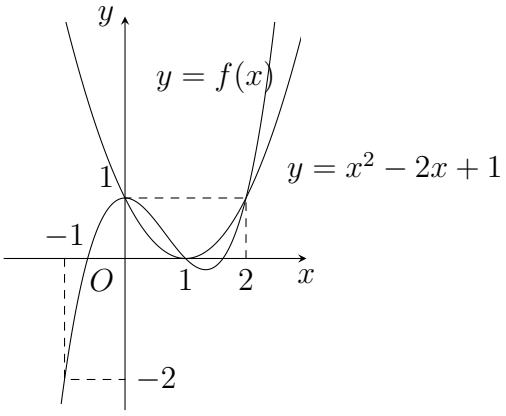
Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=2$. **B**. $x=0$. **C**. $x=1$. **D**. $x=-1$.

Lời giải.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$. (như hình vẽ).



Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+(m^2-3m+2)\,x+5$ đạt cực đại tại 0 là

A. $m=1$. **B**. $m=1$ hoặc $m=2$. **C**. $m=6$. **D**. $m=2$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính y' và y''.

Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $y'(x_0)=0 \Leftrightarrow m=m_i, i=1,2,\ldots$

Với các giá trị m_i tính $y''(x_0)$.

+ Nếu $y''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại.

+ Nếu $y''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

+ Nếu $y''(x_0)=0$ chưa kết luận gì, ta sẽ thay giá trị $m=m_i$ tương ứng vào hàm số kiểm tra.

Cách giải:

$$y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+\left(m^2-3m+2\right)x+5.$$

$$\Rightarrow y'=x^2-2(m-1)\mathrm{x}+m^2-3m+2.$$

$$\Rightarrow y''=2x-2(m-1).$$

Ta có $y'(0)=0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

+) Với $m=1$ ta có $y''(0)=0$ chưa thể kết luận nên ta thay $m=1$ vào đề bài được $y=\frac{1}{3}x^3+5$ hàm này không có cực trị nên $m=1$ loại.

+) Với $m=2$ ta có $y''(0)=-2<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$. Vậy $m=2$ nhận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. Hàm số $y=-x^3+3x^2+1$ có cực đại, cực tiểu.

B. Hàm số $y=x^3+3x+1$ có cực trị.

C. Hàm số $y=-2x+1+\dfrac{1}{x+2}$ không có cực trị.

D. Hàm số $y=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ có 2 cực trị.

Lời giải.

Phương pháp:

Quy tắc 1:

- Tìm TXĐ của hàm số.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc không xác định.
- Lập bảng xét dấu $f'(x)$.
- Đưa ra kết luận về cực trị.

Quy tắc 2:

- Tìm TXĐ của hàm số.

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ tìm các nghiệm $x_i, i=1,2,3,\ldots$
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- Dựa vào dấu $f''(x_i)$ đưa ra kết luận về cực trị.

Cách giải:

$+)\ y=-x^3+3x^2+1 \Rightarrow y'=-3x^2+6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$ Hàm số $y=-x^3+3x^2+1$ có cực đại, cực tiểu.

$+)\ y=x^3+3x+1 \Rightarrow y'=3x^2+3>0, \forall x \Rightarrow$ Hàm số $y=x^3+3x+1$ không có cực trị.

Vậy, khẳng định ở câu B là sai.

$+)\ y=-2x+1+\dfrac{1}{x+2}, (\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2\}) \Rightarrow y'=-2-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0, \forall x\in\mathscr{D} \Rightarrow$ Hàm số $y=-2x+1+\dfrac{1}{x+1}$ không có cực trị.

$+)\ y=x-1+\frac{1}{x-1}, (\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}) \Rightarrow y'=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}.$

$$y'=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in\mathscr{D} \\ x=2\in\mathscr{D}. \end{array}\right.$$

Dễ dàng kiểm tra $y'=0$ đổi dấu tại $x=0; x=2$. Suy ra hàm số $y=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ có 2 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba cực trị, đồng thời ba điểm cực trị với gốc tọa độ tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

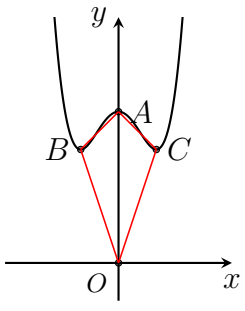
A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng dấu hiệu nhận biết của tứ giác nội tiếp.

Cách giải:



Ta có: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5 \Rightarrow y'=4x^3-4m^2x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \\ x=-m. \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.
Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0;m^4+5), B(-m;5), C(m;5)$.
Dễ dàng chứng minh: $\Delta ABO=\Delta ACO \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C}$.
Mà tứ giác $ABOC$ nội tiếp, nên $\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C}=90^\circ$.
Khi đó

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow (-m).(-m)+(-m^4).5=0-5m^4+m^2=0 \Leftrightarrow m^2(1-5m^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\,(\text{ktm}) \\ m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(\text{tm}). \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài có 2 phần tử là $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{(3m+2)x^2}{2}+(2m^2+3m+1)x+m-2$ (1). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số (1) có cực đại, cực tiểu $x_{\text{CĐ}}$, x_{CT} sao cho $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}}$. Khi đó, tổng các phần tử của tập S bằng

A. $S=\dfrac{-4-\sqrt{7}}{6}$. **B.** $S=\dfrac{4+\sqrt{7}}{6}$. **C.** $S=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{6}$. **D.** $S=\dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-(3m+2)x+(2m^2+3m+1)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2m+1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$.
Hàm số có cực đại, cực tiểu khi chỉ khi $m \neq 0$.

☑ Trường hợp $m>0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}}=m+1$, $x_{\text{CT}}=2m+1$.

Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}} \Leftrightarrow 3(m+1)^2=4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2-2m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\ (\text{nhận}) \\ m=-\dfrac{1}{3}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

☑ Trường hợp $m<0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}}=2m+1$, $x_{\text{CT}}=m+1$.

Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2=4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2+8m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{6}\ (\text{loại}) \\ m=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}\ (\text{nhận}) \end{array}\right.$.

Vậy $S=\{1;\dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}\}$. Do đó, tổng $1+\dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $a,b,c,d\in\mathbb{R}$; $a>0$ và $\begin{cases} d>2019 \\ 8a+4b+2c+d-2019<0 \end{cases}$

Số cực trị của hàm số $y=|f(x)-2019|$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có hàm số $g(x)=f(x)-2019$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $a>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Để ý $g(0)=d-2019>0; g(2)=8a+4b+2c+d-2019<0$.

Nên phương trình $g(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)=f(x)-2019$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)-2019|$ có đúng 5 cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tìm các số thực m để hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ có cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l} m\neq 2 \\ -3<m<1 \end{array}\right.$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$. **D.** $-2<m<1$.

Lời giải.

Với $m=-2$, hàm số trở thành $y=3x^2-2x-5$.

$y'=6x-2, y'=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

Vì $y'=0$ có nghiệm và đổi dấu khi đi qua nghiệm nên với $m=-2$ hàm số có cực trị.

Với $m\neq -2$, $y'=3(m+2)x^2+6x+m$.

Để hàm số có cực trị thì $\Delta'>0\Rightarrow 9-3m(m+2)>0\Leftrightarrow m^2+2m-3<0\Leftrightarrow -3<m<1$.

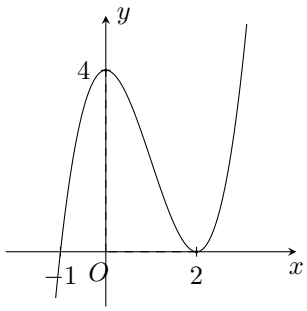
Kết hợp cả hai trường hợp suy ra $-3<m<1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-1;3)$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có trên khoảng $(-1;3)$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

A. 4 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** 2 .

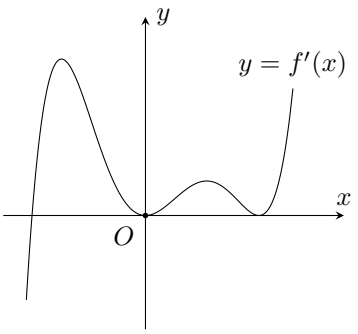
Lời giải.

$f'(x)=(x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu tại các điểm có hoành độ là $x=5$ và $x=-\dfrac{2}{3}$ nên số điểm cực trị của hàm số là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 16.
Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ bằng

A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 1.



Lời giải.
Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm lần lượt là x_1, x_2, x_3 (với $x_1<x_2<x_3$).
Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm qua dương khi qua điểm x_1 này nên số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ bằng 1.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=(m-2)\,x^3-2(2m-3)x^2+(5m-3)\,x-2m-2$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị?

A. 0. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.
Trường hợp 1: $m=2$ thì hàm số $f(x)=-2x^2+7x-6$ thì rõ ràng hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị. Ta loại trường hợp này.
Trường hợp 2: $m\neq 2$ thì hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3. Do đó, hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
$\Leftrightarrow f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
$\Leftrightarrow (x-2)\left[(m-2)\,x^2+(2-2m)\,x+m+1\right]=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
$\Leftrightarrow (m-2)\,x^2+(2-2m)\,x+m+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-(m-2)(m+1)>0 \\ (m-2)2^2+(2-2m)2+m+1\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m<3 \end{cases}.$$

Kết hợp cả 2 trường hợp trên và điều kiện m nguyên dương ta suy ra $m=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m-2)x+2m-3$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=18$. Tính tổng P của tất cả các giá trị m trong S.

A. $P=-4$. **B**. $P=1$. **C**. $P=-\dfrac{3}{2}$. **D**. $P=-5$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m-2)$, $\Delta' = (m+1)^2 - (m-2) = m^2 + m + 3$.

Hàm số đã cho là hàm bậc ba nên có hai điểm cực trị khi chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 3 > 0$ (luôn đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$).

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $x_1 x_2 = m - 2$.

Mà $x_1^2 + x_2^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 18 \Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Vì m chỉ nhận giá trị nguyên nên $m = 1$. Vậy $P = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m = 0$. (1)

Để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$

Mà $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \dfrac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn điều kiện $m < 3$).

Vậy $m = -3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho đồ thị (C) của hàm số $y' = (1+x)(x+2)^2(x-3)^3(1-x^2)$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai.

A. (C) có một điểm cực trị. **B.** (C) có ba điểm cực trị.

C. (C) có hai điểm cực trị. **D.** (C) có bốn điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có $y' = (1+x)^2(x+2)^2(x-3)^3(1-x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta thấy đạo hàm đổi dấu hai lần nên hàm số có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Trắc nghiệm: Ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 0$. **B**. $m = 1$. **C**. $m = 2$. **D**. $m = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Suy ra $y'(2) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 6.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy với $m = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - m$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Vô số. **B**. Không có. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi $m > 0 \quad (*)$. Khi đó hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; 2m^2 - m), B(\sqrt{m}; m^2 - m), C(\sqrt{m}; m^2 - m)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m}; m^2), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}; m^2) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{m + m^4}$.

Vậy ΔABC cân tại A nên ΔABC vuông cân tại A.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1. \end{array}\right.$

Kết hợp với $(*)$ ta có $m = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2018]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0; +\infty)$.

A. 2015. **B**. 2016. **C**. 2018. **D**. 4035.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Từ yêu cầu bài toán ta phải tìm m để hàm số có hai điểm cực trị dương hay phương trình $y' = 0$ có

hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} 1 \neq 0 \\ \triangle' = m^2 - m - 2 > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vì $m \in \mathbb{R}$ và $m \in [-2017; 2018] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; ...; 2018\}$ nên ta có $2018 - 3 + 1 = 2016$ giá trị m thỏa mãn ycbt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 999. **B.** 1001. **C.** 1998. **D.** 1000.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 6\left[x^2 - (2m+1)x + m(m+1)\right]$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$ có $\triangle = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{2m+1-1}{2} = m$; $x_2 = \dfrac{2m+1+1}{2} = m+1$.

Dễ thấy $x_1 = m < m+1 = x_2$ và $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trong khoảng $(m+1; +\infty)$ và $(-\infty; m)$.

Bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-1000; 1000)$ nên $m \in \{-999; -998; ...; 0; 1\}$.

Vậy có $[1 - (-999)] : 1 + 1 = 1001$ giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực tiểu của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k = -3$. **B.** $k = \dfrac{1}{3}$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$

Vì là hàm số bậc ba với hệ số $a = 1 > 0$ nên điểm cực tiểu của hàm số là $A(m+1; -3m-2)$.

Lại có $-3m - 2 = -3(m+1) + 1$ nên điểm cực tiểu của hàm số luôn thuộc đường thẳng $d : y = -3x + 1$, hệ số góc $k = -3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = 1$. **B.** $m \in \{-1; 1\}$. **C.** $m \in \{-1; 0; 1\}$. **D.** $m \in \{0; 1\}$.

Lời giải.

① $y' = 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt, suy ra $m \neq 0$.

② Khi đó, đồ thị có ba điểm cực trị là $A(0;1)$, $B\left(m; -m^4+1\right)$, $C\left(-m; -m^4+1\right)$.

③ Ta có $\overrightarrow{AB} = (m; -m^4)$, $\overrightarrow{AC} = (-m; -m^4)$. Suy ra $AB = \sqrt{m^2+m^8}$, $AC = \sqrt{m^2+m^8}$. Do đó tam giác ABC luôn cân ở A. Vậy để tam giac ABC vuông thì tam giác ABC phải vuông ở A.

④ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$, với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác nhận $G(0;2)$ làm trọng tâm.

A. $m = 1$. **B.** $m = -\sqrt{\dfrac{2}{7}}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -\sqrt{\dfrac{6}{7}}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2+m)$.

Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số đã cho có ba điểm cực trị hay phương trình $x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là $m < 0$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là $A(0;3m^2)$, $B\left(-\sqrt{-m}; 2m^2\right)$, $C\left(\sqrt{-m}; 2m^2\right)$.

Tam giác ABC nhận $G(0;2)$ làm trọng tâm nên

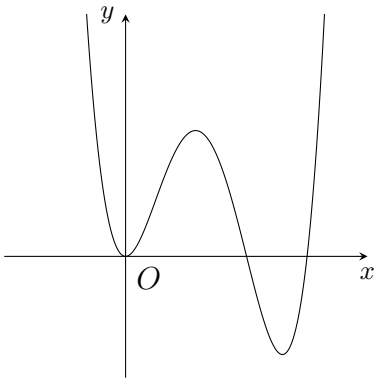
$$\begin{cases} \dfrac{0 + (-\sqrt{-m}) + \sqrt{-m}}{3} = 0 \\ \dfrac{3m^2 + 2m^2 + 2m^2}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 7m^2 = 6 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta được $m = -\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 28.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới. Khi đó trên $\mathbb{R}$ hàm số $y = f(x)$



A. có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu. **B.** có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

C. có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu. **D.** có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$,ta lập bảng biến thên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 17. **B**. 18. **C**. 15. **D**. 16.

Lời giải.

Ta có $[f(x^2-10x+m+9)]' = (2x-10)(x^2-10x+m+7)^2(x^2-10x+m+8)(x^2-10x+m+6)$.
Hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị điều kiện cần và đủ là các phương trình $x^2-10x+m+8=0$ (1) và $x^2-10x+m+6=0$ (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 5, điều kiện tương đương là
$$\begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ 25-50+m+8 \neq 0 \\ 25-50+m+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17-m>0 \\ 19-m>0 \\ m \neq 17 \\ m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2| \leq 5$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T = 2b-a$.

A. $T = \sqrt{51}+6$. **B**. $T = \sqrt{61}+3$. **C**. $T = \sqrt{61}-3$. **D**. $T = \sqrt{51}-6$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2-6mx+27$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx+27=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+9=0$. (1)
Để hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt. Điều đó tương đương với
$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2-9>0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<-3 \\ m>3. \end{bmatrix} \quad (2)$$
Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=9. \end{cases}$
Khi đó
$$\begin{aligned} |x_1-x_2| \leq 5 &\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \leq 25 \\ &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-25 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2-61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Kết hợp (2), (3) và m dương ta được

$$3 < m \le \frac{\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng K và $x_0 \in K$. *Mệnh đề nào sau đây đúng*?

A. Nếu $f''(x_0) = 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

B. Nếu x_0 thì là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x_0) \neq 0$.

C. Nếu x_0 thì là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$.

D. Nếu x_0 thì là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x_0) > 0$.

Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào lý thuyết về các điểm cực trị của hàm số.

Cách giải:

Nếu $x = x_0$ là điểm cực trị của hàm số thì $f'(x_0) = 0$. Nếu $x = x_0$ là điểm cực trị của hàm số thì $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x^2 + 2x)^3\left(x^2 - \sqrt{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 4. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Xét $f'(x) = 0$ suy ra

$$x\left(x^2 + 2x\right)^3\left(x^2 - \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^4(x+2)^3\left(x - \sqrt[4]{2}\right)\left(x - \sqrt[4]{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - \sqrt[4]{2} = 0 \\ x + \sqrt[4]{2} = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -2 \\ x = \sqrt[4]{2} \\ x = -\sqrt[4]{2}. \end{bmatrix}$$

Xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt[4]{2}$		0		$\sqrt[4]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa bảng xét dấu suy ra hàm số có 3 cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị $0; 1; 2$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(4x - 4x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $[f'(4x-4x^2)]' = (4x-4x^2)' \cdot f(4x-4x^2) = 4(1-2x) \cdot f'(4x-4x^2)$.

$$[f'(4x-4x^2)]' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{2} \\ 4x-4x^2 = 0 \\ 4x-4x^2 = 1 \\ 4x-4x^2 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 0; x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \quad \text{(kép)}. \end{bmatrix}$$

Do đó, hàm số $y = f(4x-4x^2)$ có ba điểm cực trị là $0; 1; \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 5. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 7.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Cách 1: Dựa vào BBT, vẽ BBT của đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ và suy ra số các điểm cực trị của hàm số.

+ Cách 2: Từ BBT suy ra công thức hàm số $y = f(x)$ từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ và suy ra số các điểm cực trị của hàm số.

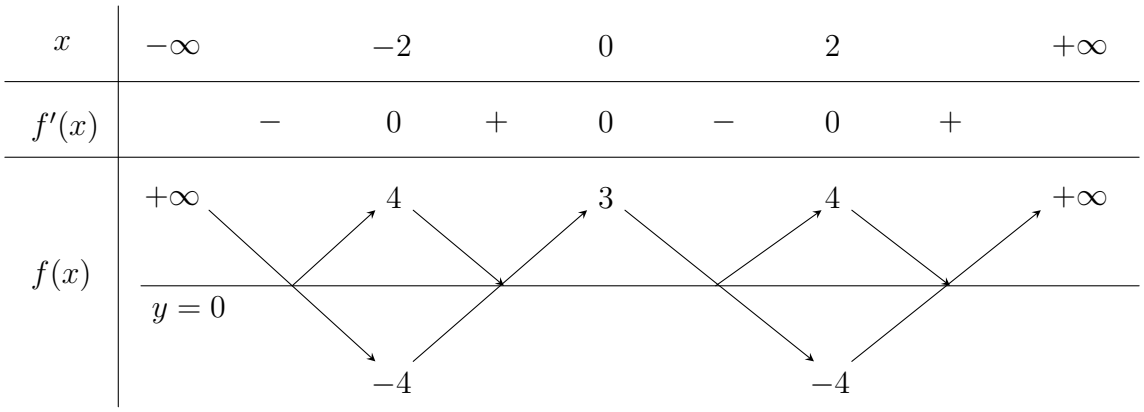
Cách giải:

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị $(-1;-2), (0;3), (2;-4)$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
			$y=0$		2		4		

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ là



Như vậy hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị?

A. 9. **B**. 7. **C**. 10. **D**. 11.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải: Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét $mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m - 0 \Leftrightarrow (x-1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} x = 1 \\ mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} m \neq 0 \\ m^2 - m(m-2) > 0 \\ m \cdot 1^2 - 2m \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ 2m > 0 \\ -2 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 0.$$

Mà $m \in [-10; 10], m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$. Có 10 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.

A. $m < 0$. **B**. $0 < m < \dfrac{1}{3}$. **C**. $m < \dfrac{1}{3}$. **D**. Không tồn tại.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 2x + m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \quad (1).$$

Khi đó phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2.
Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=-\dfrac{2}{3}$, $x_1x_2=\dfrac{m}{3}$.
Vì $x_1+x_2=-\dfrac{2}{3}<0$ nên để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.

$$\Leftrightarrow x_1x_2<0\Leftrightarrow \frac{m}{3}<0\Leftrightarrow m<0 \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $m<0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

☑ Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

☑ Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2n+1$.

☑ Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2 \quad (\text{ nghiệm bội lẻ })\\ x=-3\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2\cdot1+1=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=|x^3-3x+m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải.

Hàm số $y=|x^3-3x+m|$có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=x^3-3x+m$ có 2 cực trị nằm về hai phía của trục Ox.
Ta có:

$$y'=x^3-3x+m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-2+m\\ x=-1\Rightarrow y=2+m\end{array}\right.$$

Hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục Ox $\Leftrightarrow(-2+m)(2+m)<0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow-2<m<2$.
Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

$y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)\,x-m^2+3$ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(m+1)x+m^2-2$.

Để hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3\,(m^2-2)>0 \Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Mà $m\in Z \Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$.

Thử lại:

+) Với $m=-1$ ta có $y=x^3-x^2-x+2$.

Khi đó $y'=3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow y=\dfrac{59}{27}\end{array}\right.$ (ktm).

+) Với $m=0$ ta có $y=x^3-x^2-2x+3$.

Khi đó $y'=3x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{61-14\sqrt{7}}{27}>0 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{61+14\sqrt{7}}{27}>0\end{array}\right.$ (ktm).

+) Với $m=1$ ta có $y=x^3-x^2-x+2$.

Khi đó $y'=3x^3-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{20-14\sqrt{7}}{27}<0 \\ x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}<0\end{array}\right.$ (tm).

+) Với $m=2$ ta có $y=x^3-3x^2+2x-1$.

Khi đó $y'=3x^3-6x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=-\dfrac{9+2\sqrt{3}}{27}<0 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{-9+2\sqrt{3}}{9}<0\end{array}\right.$ (ktm).

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn là $m=1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ như sau

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

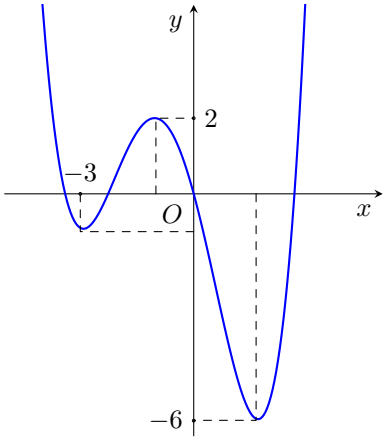
Khi đó từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y=|f(x-2019)+m-2|$ có 5 điểm cực trị. Số các phần tử của S bằng

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 5.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=f(x-2019)$ được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ theo chiều song song với trục Ox sang bên phải 2019 đơn vị.

Đồ thị hàm số $y=f(x-2019)+m-2$ được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x-2019)$ theo chiều song song với trục Oy lên trên $m-2$ đơn vị.

Đồ thị hàm số $y=|f(x-2019)+m-2|$ được tạo thành bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y=f(x-2019)+m-2$ phía trên trục Ox, lấy đối xứng toàn bộ phần đồ thị phía dưới trục Ox qua trục Ox và xóa đi phần đồ thị phía dưới trục Ox.

Do đó để đồ thị hàm số $y=|f(x-2019)+m-2|$ có 5 điểm cực tị thì đồ thị hàm số $y=f(x-2019)+m-2$ có

$$\begin{aligned} & y_{\text{CĐ}}\cdot y_{\text{CT}}\le 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3+m-2\ge 0>-6+m-2 \\ \Leftrightarrow\ & m-5\ge 0>m-8 \\ \Leftrightarrow\ & 5\le m<8. \end{aligned}$$

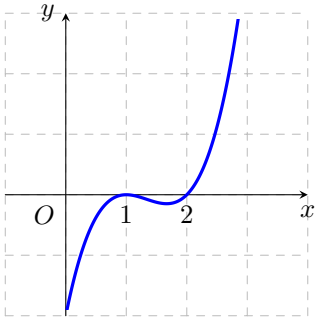
$\Rightarrow$ có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(2;+\infty)$.

C. $(1;2)$. **D**. $(0;1)$ và $(2;+\infty)$.



Lời giải.

☑ **Phương pháp:** Lập BXD của $f'(x)$ và kết luận các khoảng đơn điệu của hàm số.

☑ **Cách giải:** Ta có BXD của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

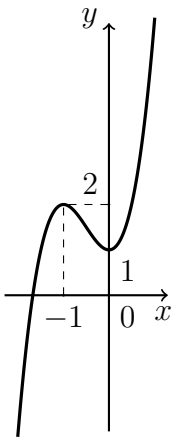
Dựa vào BXD ta có: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1),(1;2)$ và đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực tiểu và không có cực đại.

B. Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại và không có cực tiểu.

C. Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

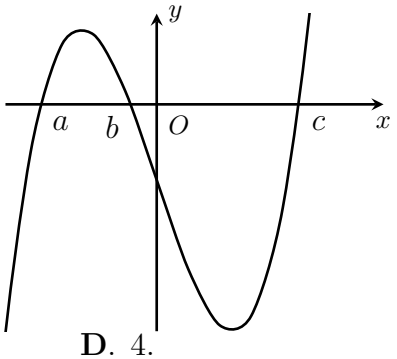
Phương pháp: Dựa vào đồ thị hàm số để xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ và số nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ để kết luận tính đơn điệu và số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Cách giải: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm qua điểm đó hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên điểm đó là điểm cực tiểu của hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 44.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại đúng ba điểm có hoành độ a, b, c như hình vẽ bên. Biết $f(a)\geq 0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 4.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-4), x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2$.

C. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 46. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực trị $A(0;2)$ và $B(2;-14)$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=-5$. **B.** $f(1)=5$. **C.** $f(1)=-6$. **D.** $f(1)=-7$.

Lời giải.

A, B thuộc đồ thị hàm số nên có $\begin{cases} c=2 & (1) \\ 16a+4b+c=-14 & (2) \end{cases}$

Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$. B là cực trị của đồ thị nên $f'(2)=0 \Leftrightarrow 32a+4b=0$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ tìm được $a=1, b=-8, c=2$.

Vậy $f(1)=a+b+c=-5$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Giá trị của m nằm trong khoảng nào để đồ thị hàm số $y=2x^4+mx^2+m$ có ba điểm cực trị và ba điểm này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $(-12;-6)$. **B.** $(-6;0)$. **C.** $(-6;-5)$. **D.** $(2;6)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $32a^3S^2+b^5=0$ ta có $32.2^3.2^2+m^5=0 \Leftrightarrow m^5=-1024 \Leftrightarrow m=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Tìm tham số m để các điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2mx^2+(4m^2-1)x+1$ đều nằm trong khoảng $(-5;3)$.

A. $-3<m<2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $-3<m<1$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-4mx+4m^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2m+1 \\ x=2m-1. \end{array}\right.$

Để các điểm cực trị của hàm số đều nằm trong khoảng $(-5;3)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -5<2m+1<3 \\ -5<2m-1<3. \end{cases}$

Giải ra ta được $-2<m<1$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Tính diện tích của tam giác ABC.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Vậy ta có $A(-1;1)$, $B(0;2)$; $C(1;1)$ và diện tích tam giác ABC là $S=|y_{\text{cđ}}-y_{\text{ct}}|.|x_{\text{ct}}|=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-mx+3$ có hai cực trị.

A. $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 51. Cho đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có hai điểm cực trị là A và B. Đường thẳng AB đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(4;3)$. **B.** $P(3;4)$. **C.** $Q(3;-4)$. **D.** $N(4;-3)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-2x+5$.
Khi đó đường thẳng đi qua $N(4;-3)$.
Chọn đáp án D □

Câu 52. Biết rằng hàm số $y=a\sin 2x+b\cos 2x-x \quad (0<x<\pi)$ đạt cực trị tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a-b$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\sqrt{3}-1$. **D.** $\sqrt{3}+1$.

Lời giải.

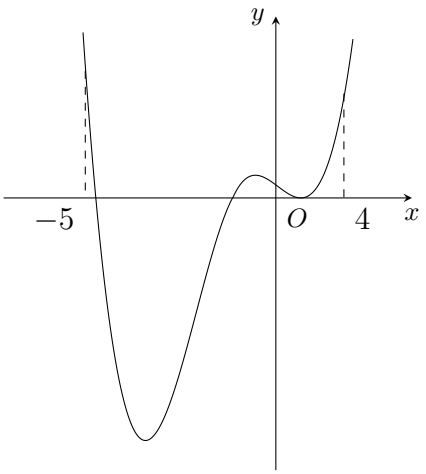
$y'=2a\cos 2x-2b\sin 2x-1$.
Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ nên ta có

$$\begin{cases} y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\sqrt{3}b-1=0 \\ -2a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $T=a-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 53.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-5;4]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-5;4]$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.



Lời giải.

Nhìn hình ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên có 2 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Áp dụng công thức giải nhanh cực trị, ta có:

$$\begin{cases} ab<0 \\ R=\dfrac{b^3-8a}{8\,|a|\,b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m<0 \\ 1=\dfrac{-8m^3-8}{8.(-2m)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -8m^3+16m-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán
Chọn đáp án B □

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m > 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \leq 3$.

Câu 56. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc toạ độ, A là điểm cực trị trên trục tung và B, C là hai điểm cực trị còn lại. Tích của tất cả các phần tử trong tập S bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.
Khi đó ta có $A(0; m)$, $BC = 2\sqrt{m+1}$.
Vậy $OA = BC \Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 + 2\sqrt{2} \\ m = 2 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thoả mãn $m > -1$).
Suy ra $S = \left\{2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}\right\}$ và tích các phần tử trong S bằng -4.
Chọn đáp án D □

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - m}{x + m}$ đối xứng qua điểm có tọa độ $(1; 2)$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -2$.

Lời giải.

- ☑ Trường hợp $m = 0$: hàm số trở thành $y = \dfrac{2x}{x}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus 0$, đồ thị không đối xứng qua điểm $(1; 2)$.
- ☑ Trường hợp $m \neq 0$: đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -m$, tiệm cận ngang là $y = 2$. Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(-m; 2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận $\Rightarrow -m = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$.
Chọn đáp án C □

Câu 58. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$.

A. $m = -2$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

$y' = 3mx^2 + 6x + 12$ và $y'' = 6mx + 6$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ khi và chỉ khi
$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$
Chọn đáp án A □

Câu 59. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ khi

A. $m = 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m \neq 0$.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -2017(x-1)(x+2)^3(x-3)^2$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$. Bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Hàm số $y=x-\sin 2x+3$ thỏa mãn tính chất nào sau đây

A. Nhận điểm $x=-\dfrac{\pi}{6}$ làm điểm cực tiểu. **B.** Nhận điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$ làm điểm cực đại.

C. Nhận điểm $x=-\dfrac{\pi}{6}$ làm điểm cực đại. **D.** Nhận điểm $x=-\dfrac{\pi}{2}$ làm điểm cực tiểu.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=1-2\cos 2x,\ y"=4\sin 2x$.

Vì $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0$ và $y'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0$ nên loại đáp án B, D.

Ta có $\begin{cases} y'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ y"\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}<0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m^4-3m^2+2017$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Hàm số có ba cực trị khi $-2(m-1)<0 \Leftrightarrow m>1$.

Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m-1} \end{array}\right.$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m^4-3m^2+2017)$, $B(\sqrt{m-1},-(m-1)^2+m^4-3m^2+2017)$, $C(-\sqrt{m-1},-(m-1)^2+m^4-3m^2+2017)$.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $H(0,-(m-1)^2+m^4-3m^2+2017)$.

Diện tích của tam giác ABC là $\dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC=\dfrac{1}{2}(m-1)^2 2\sqrt{m-1}=\left(\sqrt{m-1}\right)^5=32$.

Suy ra $m=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=-7$.

Lời giải.

Ta có, $y'=x^2-2mx+(m^2-4)$

$y''=2x-2m$

Để hàm số đạt cực đại tại $x=3 \Rightarrow y'(3)=0 \Leftrightarrow m^2-6m+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$

+ Với $m=1$ thử vào $y''(3)=6-2=4>0$ nên $m=1$ không thỏa đề bài.

$+$ Với $m=5$ thử vào $y''(3)=6-10=-4<0$ nên $m=5$ thỏa đề bài.

Vậy $m=5$ hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^{2017}.(x^2-1).(2x+3)^3$. Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$-3/2$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-3/2)$	↘	$f(-1)$	↗		↗	$+\infty$

Nên hàm số đã cho có hai cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Biết rằng đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức $P=m^2+2m-1$.

A. $P=1$. **B.** $P=3$. **C.** $P=0$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $-2m<0 \Leftrightarrow m>0$

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị lần lượt là: $A(0;2), B(-\sqrt{m};-m^2+2), C(\sqrt{m};-m^2+2)$

Để A,B,C là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow -m+m^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$

Theo điều kiện suy ra $m=1$;

Vậy $P=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Mà $x=0$ là nghiệm kép nên $f'(x)$ không đổi dấu qua $x=0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$?

A. $m = 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m; y'' = 6x - 6$.

Điều kiện cần:

Hàm số đã cho đạt cực tiểu $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Điều kiện đủ:

Với $m = 0$ ta có: $y'(2) = 0; y''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy $m = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hàm số $f(x) = \sin x - \cos x + 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. **D.** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \cos x + \sin x + 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = -2 \Rightarrow \sin x = \cos x = -1$ (vô nghiệm).

Do đó: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc 2 $\Rightarrow$ Có tối đa 2 nghiệm.

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có tối đa 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9m^2x - 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-1)x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = 1 - 2\sqrt[3]{3}$. **B.** $m = 1 + 2\sqrt[3]{3}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 1 \pm 2\sqrt[3]{3}$.

Câu 72.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

C. Hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\dfrac{1}{3}$.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 12$.

A. $m = \pm 4\sqrt{2}$. **B**. $m = 8$. **C**. $m = \pm 2\sqrt{2}$. **D**. $m = 0$.

Lời giải.

Có $y' = x^2 - 2mx + 4 \Rightarrow$ để có 2 cực trị thì $m^2 - 4 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 12 \Rightarrow m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)(x - 3)$. Hàm số có tất cả bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Câu 75. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + 3x - 2$. Tìm các giá trị của a và b, biết hàm số đạt cực trị tại $x = 3$ và $y(3) = -2$.

A. $a = \dfrac{1}{4}, b = 2$. **B**. $a = \dfrac{1}{3}, b = -2$. **C**. $a = 3, b = -2$. **D**. $a = 1, b = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + 3$. Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi:

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y(3) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27a + 6b = -3 \\ 27a + 9b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 76. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d) : y = (2m + 1)x - m + 3$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = -\dfrac{1}{2}$. **B**. $m = \dfrac{3}{2}$. **C**. $m = -\dfrac{1}{4}$. **D**. $m = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Khi đó $y = \dfrac{1}{3}(x - 1) \cdot y' - 2x + 1$.

Do đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là $y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m + 1)x - m + 3$ vuông góc với đường thẳng $y = -2x + 1$ khi:

$-2(2m + 1) = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ thì $y'(1)=0\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2.\end{array}\right.$

Thử lại ta nhận $m=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có điểm cực tiểu là $(0;3)$ và điểm cực đại là $(1;5)$. Khi đó tổng $S=a+2b+c$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+2017}}$ có tiệm cận ngang?

A. $m<0$. **B.** Đáp án khác. **C.** $m>0$. **D.** $m=0$.

Câu 80. Cho hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+(m+2)x-m$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 81. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $y=-2x+1$. **B.** $y=-x+2$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=2x-1$.

Câu 82. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+6x$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2. Tính $S=x_1^2+x_2^2$.

A. -8. **B.** -10. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 83. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m+3)x^2+4(m+3)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-\dfrac{7}{2}<m<-3$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $-\dfrac{7}{2}<m<-2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>1\end{array}\right.$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-1;m=1$. **B.** $m=1$.

C. $m\neq 0$. **D.** $m=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}},m=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Lời giải.

$y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2m\end{array}\right.$

Để hàm số có hai cực trị thì $m\neq 0$

. Với điều kiện $m\neq 0$, thì hàm số có hai cực trị $A(0;4m^3)$ và $B(2m;0)$.

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}.|4m^3|.|2m|=4\Leftrightarrow m^4=1\Leftrightarrow m=-1;m=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2-4)(x-5)^4, x \in \mathbb{R}$. Hàm số có mấy điểm cực trị?

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 5.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $x^2 \geq 0$ và $(x-5)^4 \geq$. Do đó $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua hai nghiệm của x^2-4. Suy ra hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Gọi m_0 là giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 4$ có 3 điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (1;3)$. **B**. $m_0 \in (-5;-3)$. **C**. $m_0 \in \left(-\frac{3}{2};0\right)$. **D**. $m_0 \in \left(-3;-\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x^2+m) = 0$.

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình $x^2 + m = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 0, tức là $m < 0$.

Khi đó, đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0;4), B(-\sqrt{-m}; m^2-4), C(\sqrt{-m}; m^2-4)$.

Nhận thấy rằng đồ thị hàm số luôn có điểm cực đại $A(0;4)$ thuộc Oy nên đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thuộc các trục tọa độ khi và chỉ khi $B, C \in Ox$, tức là $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Vì $m < 0$ nên $m = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Đồ thị hàm số $y = |x^3 + 3x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 2.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 + 2(m+2)x^2 - 4(m+3)x + 1$ có ba điểm cực trị.

A. $m > -\frac{13}{4}$. **B**. $m < \frac{13}{4}$.

C. $m \in (-\infty;-5) \cup \left(-5;-\frac{11}{4}\right)$. **D**. $m < -\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + (4m+8)x - 4m - 12$ và $y' = 0 \Leftrightarrow (x-1).4.(x^2 + x + m + 3) = 0$.

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình $x^2 + x + m + 3 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1, tức là $m \neq -5$ và $\Delta = 1 - 4(m+3) > 0$.

Vậy $m \neq -5$ và $m < -\frac{11}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 10$. **B**. $S = \frac{10}{3}$. **C**. $S = 9$. **D**. $S = 5$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Từ đó tìm được tọa độ hai điểm cực trị là $A(0;5), B(2;9)$.

Ta có $O, A \in Oy$ nên cạnh OA của tam giác nằm trên trục Oy.

Do đó $d(B, OA) = d(B, Oy) = |x_B| = 2 \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}.d(B, Oy).OA = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Tính khoảng cách d giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. $d = 2\sqrt{5}$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = \sqrt{10}$. **D.** $d = 2\sqrt{2}$.

Câu 91. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m - 1$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{5}$.

A. $m \in \left\{4; 1-\sqrt{5}\right\}$. **B.** $m \in \{4; 6\}$.

C. $m \in \left\{1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\right\}$. **D.** $m \in \left\{6; 1+\sqrt{5}\right\}$.

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2-1)x^2 + 2$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$. **B.** $m < -1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < 1$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x.(x+1)^2.(x+2)^3.(x+3)^{2017}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = -2, x = -3$. Lập bảng biến thiên ta có $f'(x)$ đổi dấu qua $x = 0, x = -2, x = -3$. Suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hàm số $y = 4x + \dfrac{1}{x}(1)$. Gọi y_1, y_2 lần lượt là giá trị cực tiểu và giá trị cực đại của hàm số (1). Tính $P = y_1 + 2y_2$.

A. $P = -4$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y_{\text{CT}} = 4, y_{\text{CĐ}} = -4 \Rightarrow P = -4$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m-1)x^2 - m + 7$ có ba điểm cực trị.

A. $m > 1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \leq 1$.

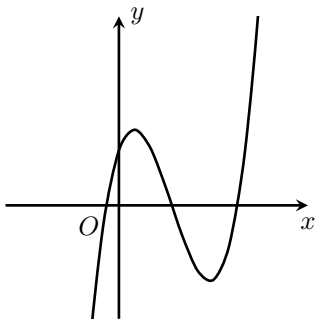
Lời giải.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4(m-1)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

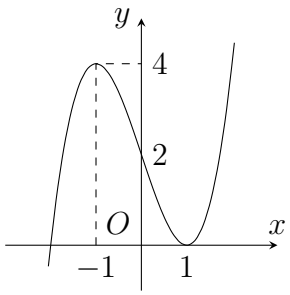
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là



A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 97.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x)-2x$.



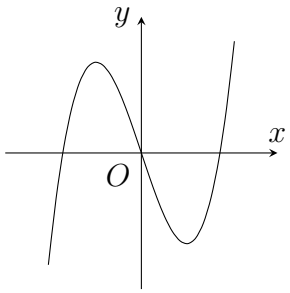
A. 3. **B**. 2.

C. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x)-2$ thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ xuống dưới hai đơn vị.

Từ đồ thị hàm số $g'(x)$ ta thấy $g'(x)$ có ba nghiệm phân biệt và đều đổi dấu qua các nghiệm đó nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.



Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2+m+1)x+1$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$?

A. $m=-1$, $m=-2$. **B**. Không tồn tại m.

C. $m=-2$. **D**. $m=1$, $-1<m<1$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ khi $\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2+3m+2=0 \\ 2m+2<0 \end{cases} \Rightarrow m=-2.$

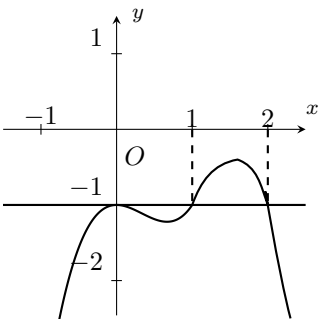
Chọn đáp án C □

Câu 99. Cho hàm số $y=x^5-2x^4+x^3-1$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 4.

Câu 100.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x)+x$ là



A. 2. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘			$g(1)$	↗	$g(2)$	↘	

Kết luận: Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 2.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. A	4. B	5. B	6. D	7. C	8. D	9. B	10. B
11. D	12. D	13. B	14. B	15. D	16. D	17. C	18. B	19. D	20. C
21. A	22. C	23. B	24. B	25. A	26. B	27. D	28. B	29. D	30. C
31. C	32. D	33. C	34. D	35. C	36. A	37. A	38. B	39. B	40. A
41. A	42. B	43. A	44. B	45. A	46. A	47. B	48. C	49. D	50. B
51. D	52. B	53. C	54. B	55. C	56. D	57. C	58. A	59. A	60. B
61. C	62. D	63. C	64. C	65. D	66. D	67. A	68. A	69. C	70. D
71. A	72. D	73. C	74. B	75. B	76. C	77. A	78. B	79. C	80. D
81. A	82. C	83. A	84. A	85. C	86. D	87. B	88. C	89. D	90. A
91. B	92. B	93. A	94. A	95. A	96. C	97. A	98. C	99. A	100. A

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho phương trình $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0$. Tập S là tập hợp các giá trị của m nguyên để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 15. **B**. 9. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có: $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0 \Leftrightarrow (2x^3+3x+m)+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=x^3+3x^2+5x+3$
$\Leftrightarrow (2x^3+3x+m)+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=(x+1)^3+2(x+1)$ (1)
Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$, TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$
có $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó: (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x^3+3x+m}\right)=f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3+3x+m}=x+1 \Leftrightarrow m=-x^3+3x^2+1$ (2).
Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có: $g'(x)=-3x^2+6x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<m<5$.
Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in S=\{2;3;4\} \Rightarrow \sum m=2+3+4=9$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hàm số $y=|x^3-mx+1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B**. 10. **C**. 1. **D**. 9.

Lời giải.

Cách giải:
Xét hàm số $y=f(x)=x^3-mx+1, f'(x)=3x^2-m$.
Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|=|x^3-mx+1|$ được dựng từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách giữ lại phần đồ thị hàm số phái trên trục Ox và lấy đối xứng phần phái dưới Ox qua trục Ox (xóa bỏ phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phái dưới Ox).
TH1: Với $m=0$ ta có hàm số $y=f(x)=x^3+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Có $f(1)=2>0 \Rightarrow$ Hàm số $y=|f(x)|=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.
$\Rightarrow m=0$: thỏa mãn.
TH2: Với $m>0$ ta có:
$f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1<x_2)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{m}{3} + 1 \ge 0 \\ 2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 2.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{1; 2\}$.
Vậy, $S = \{0; 1; 2\}$. Số phần tử của S là 3.
Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2010. **B**. 2012. **C**. 2011. **D**. 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] \\ &= -(x-1)^2(-1-x)(x^2 + 4x + m - 5) = (x-1)^2(x+1)(x^2 + 4x + m - 5). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow$ $g'(x) \le 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$
$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x^2 + 4x + m - 5) \le 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + 4x + m - 5 \ge 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$ (Do $x \in (-\infty; -1) \Rightarrow x + 1 < 0$)
$\Leftrightarrow$ $h(x) = x^2 + 4x - 5 \ge -m$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$
$\Leftrightarrow$ $-m \le \min\limits_{x \in (-\infty; -1]} h(x)$.

Ta có $h'(x) = 2x + 4$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	-9	↗	

Do đó $-m \le -9 \Leftrightarrow m \ge 9$. Mặt khác $m \in [-2019; 2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \cdots; 2019\}$ hay có $2019 - 9 + 1 = 2011$ giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x) \cdot f''(x) = [f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 1 nghiệm. **B**. 4 nghiệm. **C**. 3 nghiệm. **D**. 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét đa thức bậc 4 $g(x) = 2f(x)f''(x) - (f'(x)')^2$.

Ta có $g'(x) = 2f(x)f'''(x) = 12f(x)$.

Vì $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên $g(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm.

Vậy phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có tối đa bốn nghiệm.

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$ là ba nghiệm của $f(x) = 0$.

Mà các nghiệm này đều phân biệt nên ta có $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$ đều khác 0.

Ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= 2f(x_1)f''(x_1) - (f'(x_1))^2 = -(f'(x_1))^2 < 0 \\ g(x_2) &= 2f(x_2)f''(x_2) - (f'(x_2))^2 = -(f'(x_2))^2 < 0 \\ g(x_3) &= 2f(x_3)f''(x_3) - (f'(x_3))^2 = -(f'(x_3))^2 < 0 \end{aligned}$$

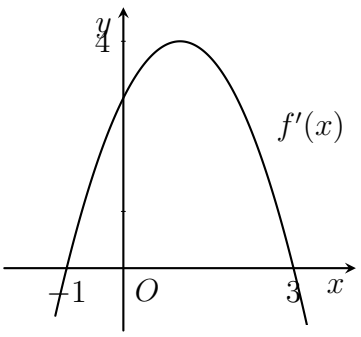
Nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Do đó phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1; +\infty)$. **B**. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **C**. $(-\infty; -1)$. **D**. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 8x^3 \cdot f'(2x^4 - 1)$

TH1: $x \ge 0$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$f'(2x^4-1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^4-1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$
$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \sqrt[4]{2}\right]$.

TH2: $x < 0$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$$f'(2x^4-1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x^4-1 \leq -1 \\ 2x^4-1 \geq 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 (L) \\ x^2 \geq \sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq \sqrt[4]{2} \\ x \leq -\sqrt[4]{2}. \end{bmatrix}$$

So sánh với điều kiện$x < 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[0; \sqrt[4]{2}\right]$ và $\left(-\infty; -\sqrt[4]{2}\right]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị khác nhau của tham số m để hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

A. $m < -2$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $-2 < m \leq 1$. **D.** $-2 < m < 1$.

Lời giải.

ĐK: $5^{-x} \neq m$. Đặt $t = 5^{-x}$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ (1), suy ra $t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$, $f'(t) = \dfrac{-m-2}{(t-m)^2}$.

Do (1), để hàm số $y = \dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì hàm số $f(t) = \dfrac{t+2}{t-m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < 0 \\ m \notin (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như bên dưới

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 0)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3.f'(x+3) - 3x^2 + 12$.

Đặt $t = x+3 \Rightarrow x = t-3$ ta có $y' = 3f'(t) - 3(t-3)^2 + 12 = 3f'(t) - 3t^2 + 18t - 15$.

Để hàm số nghịch biến thì $y' < 0 \Leftrightarrow 3.f'(t) - 3t^2 + 18t - 15 < 0 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 - 6t + 5$.

Ta chọn t sao cho $\begin{cases} f'(t) < 0 \\ t^2 - 6t + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \vee t > 5 \\ t < 1 \vee t > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 < t < 1 \\ t > 5. \end{bmatrix}$

Mà $t = x+3$ nên $\begin{bmatrix} -1 < t < 1 \\ t > 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 < x+3 < 1 \\ x+3 > 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 < x < -2 \\ x > 2. \end{bmatrix}$

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên $(-4; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m^2+4m+5)x + 2019$ và $g(x) = (m^2+2m+5)x^3 - (2m^2+4m+9)x^2 - 3x + 2$ (với m là tham số). Hỏi phương trình $g(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có

$$g(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left((m^2+2m+5)x^2+x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (m^2+2m+5)x^2+x-1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 với $\forall m$ vì $\begin{cases} m^2+2m+5 > 0, \forall m \\ \Delta = 1+(m^2+2m+5) > 0, \forall m \\ (m^2+2m+5).2^2+2-1 \neq 0, \forall m \end{cases}$

Vậy $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt (1).

Mặt khác, xét hàm số $y=f(x)$ ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2-2(m+1)x+(3m^2+4m+5) \\ &= (x-(m+1))^2+2(m^2+m+2) > 0 \forall m \end{aligned}$$

$\Rightarrow y=f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với $\forall m$

Do $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và đồng biến trên nên phương trình $f(x)=k$ luôn có 1 nghiệm duy nhất với mỗi số $k \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(f(x))=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y}-2^y+x=2y \\ 2^x+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases}$ (1), m là tham số.

Gọi S là tập các giá trị nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ để đưa về dạng $f(u)=f(v)$ mà f là hàm đơn điệu nên suy ra $u=v$.

Từ đó ta tìm được mối liên hệ giữa x và y.

+ Thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình ẩn y. Lập luận phương trình này có nghiệm duy nhất thì hệ ban đầu sẽ có nghiệm duy nhất.

+ Biến đổi để chỉ ra nếu y_0 là nghiệm thì $-y_0$ cùng là nghiệm của phương trình ẩn y, từ đó suy ra

$y_0 = 0$.

Thay vào phương trình để tìm m.

+ Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để thử lại m.

Cách giải:

Điều kiện $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1;1]$.

+ Xét phương trình $2^{x-y} - 2^y + x = 2y \Leftrightarrow 2^{x-y} + x - y = 2^y + y$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0; \forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $2^{x-y} + x - y = 2^y + y \Rightarrow f(x-y) = f(y) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.

+ Thay $x = 2y$ vào phương trình $2^x + 1 = (m^2+2) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2}$, ta được

$$2^{2y} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 4^y + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1-y^2} (*)$$

Để hệ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $y \in [-1;1]$

Giả sử $y_0 \in [-1;1]$ là một nghiệm của phương trình (*) thì ta có

$$4^{y_0} + 1 = \left(m^2+2\right) \cdot 2^{y_0} \cdot sqrt1 - y_0^2 (**)$$

Xét với $-y_0$ ta có $4^{-y_0} + 1 = (m^2+2) \cdot 2^{-y_0} \cdot \sqrt{1-(-y_0)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4^{y_0}} + 1 = (m^2+2)\dfrac{1}{2^{y_0}}\sqrt{1-y_0^2}$

$\Leftrightarrow 4^{y_0} + 1 = (m^2+2) \cdot 2^{y_0} \cdot \sqrt{1-y_0^2}$ (đúng do (**) hay $-y_0$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

Do vậy để (*) có nghiệm duy nhất thì $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$.

Thay $y = 0$ vào (*) ta được $4^0 + 1 = (m^2+2) \cdot 2^0\sqrt{1-0^2} \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại: Thay $m = 0$ vào (*) ta được $4^y + 1 = 2 \cdot 2^y\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 2^y + \dfrac{1}{2^y} = 2\sqrt{1-y^2}$ (***)

Nhận thấy rằng vế trái (***) $= 2^y + \dfrac{1}{2^y} \overset{\text{Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{2^y} \cdot \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow VT(***) \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2^y = \dfrac{1}{2^y} \Leftrightarrow y = 0$

Và $VP(***) = 2\sqrt{1-y^2} \leq 2 \Leftrightarrow VP(***) = 2 \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy phương trình (***) có nghiệm duy nhất $y = 0$.

Kết luận: Với $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất nên tập S có một phần tử.

Chú ý:

Các em có thể làm bước thử lại như sau:

Thay $m = 0$ vào (*) ta được

$4^y + 1 = 2.2^y\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow (2^y)^2 - 2.2^y\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^y - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + y^2 = 0$

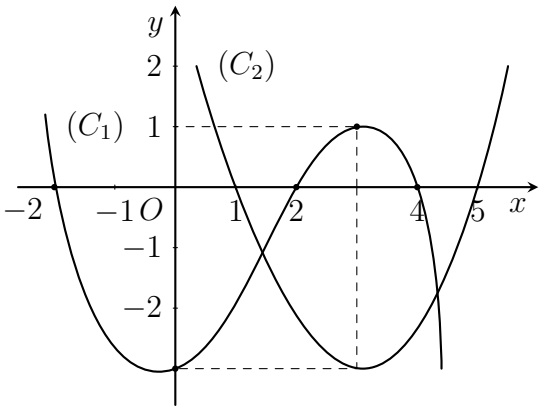
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y - \sqrt{1-y^2} = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^0 - \sqrt{1-0} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$

Chọn đáp án (B) □

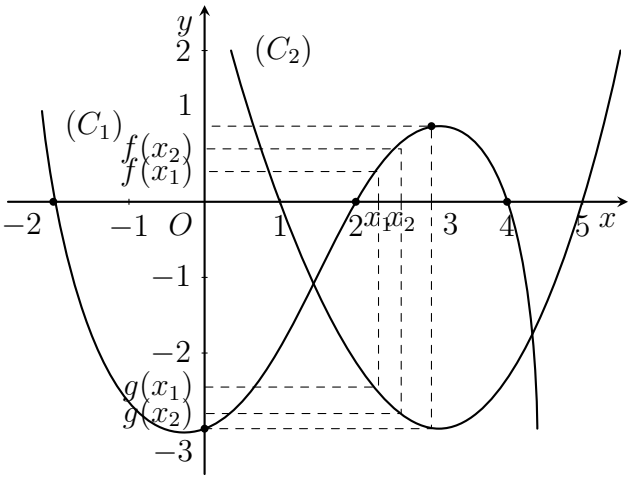
Câu 10.

Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B**. $(4;5)$. **C**. $(2;3)$. **D**. $(0;1)$.



Lời giải.



Ta xét khoảng $(2;3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;3), x_1<x_2$ ta có:

$$\begin{cases} 0<f(x_1)<f(x_2) \\ 0>g(x_1)>g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<f(x_1)<f(x_2) \\ 0<-g(x_1)<-g(x_2). \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1).[-g(x_1)]<f(x_2).[-g(x_2)] \Rightarrow f(x_1).g(x_1)>f(x_2).g(x_2).$$

$$\Rightarrow y(x_1)>y(x_2).$$

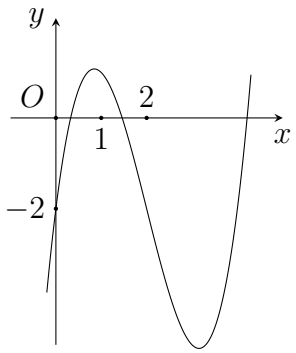
Hay hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

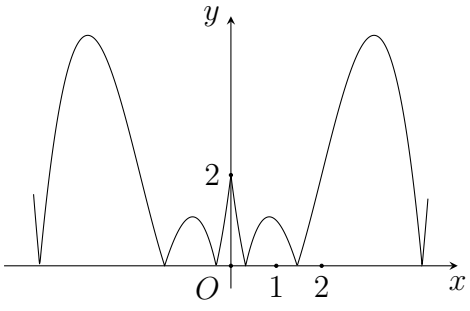
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b>1 \\ 3+2a+b<0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(|x|)|$ là

A. 9. **B**. 11. **C**. 2. **D**. 5.

Lời giải.





Dễ thấy $f(0)=-2<0$, $f(1)=a+b-1>0$, $f(2)=2(2a+b+3)<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$ nên phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị, một điểm nằm trên trục hoành một điểm nằm dưới trục hoành (xem hình vẽ). Từ đó, hàm số $y=|f(|x|)|$ có tất cả 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm các mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$. **B.** $a+2b\geq\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$. **C.** $a^2+b^2\leq 4$. **D.** $a+2b=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=2+a\cos x-b\sin x$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi

$$y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2+a\cos x+b\sin x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\quad(*)$$

Mà $2+a\cos x+b\sin x\geq 2-\sqrt{a^2+b^2},\forall x\in\mathbb{R}$ (dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{\cos x}=\dfrac{b}{\sin x}<0$).

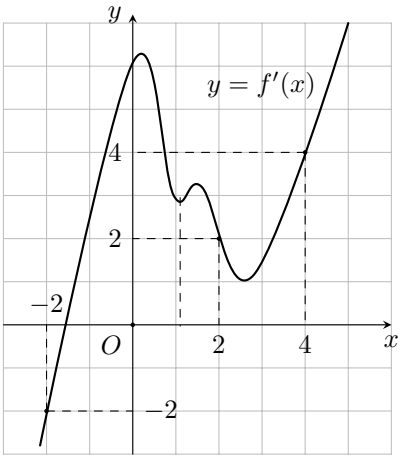
Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x)=2-\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x)=2f(3x+1)-9x^2-6x+4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

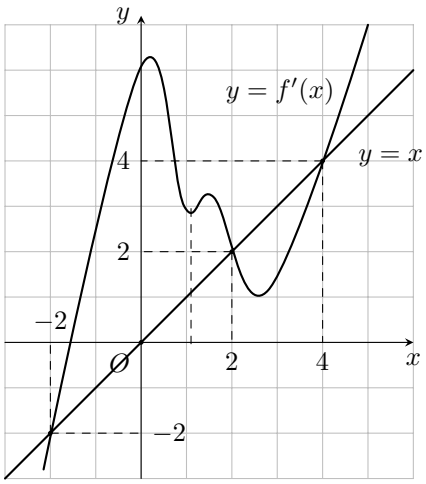
C. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $h'(x)=6f'(3x+1)-6(3x+1)$. Xét bất phương trình

$h'(x)>0\Leftrightarrow 6f'(3x+1)-6(3x+1)>0\Leftrightarrow f'(3x+1)>3x+1\ (*)$.



Từ đồ thị trên ta vẽ thêm đường thẳng $y=x$.

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Xét trên khoảng $(-2;4)$ thì $f'(x)>x\Leftrightarrow -2<x<2$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow -2<3x+1<2\Leftrightarrow -1<x<\dfrac{1}{3}$.

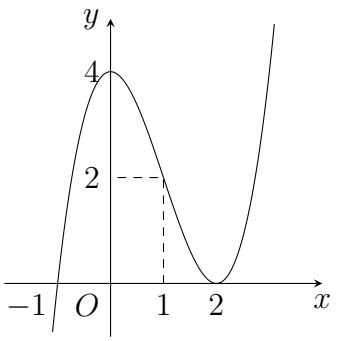
Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt Ox tại điểm $(2;0)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.



Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Từ đồ thị đã cho ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta nhận thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

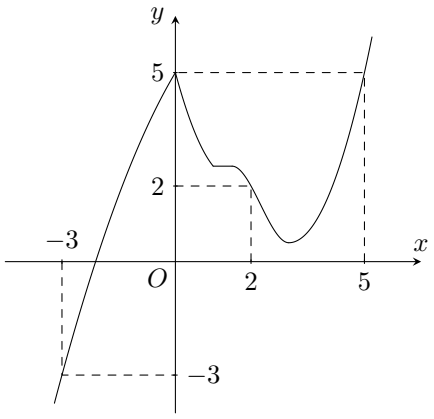
Chọn đáp án A □

Câu 15.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

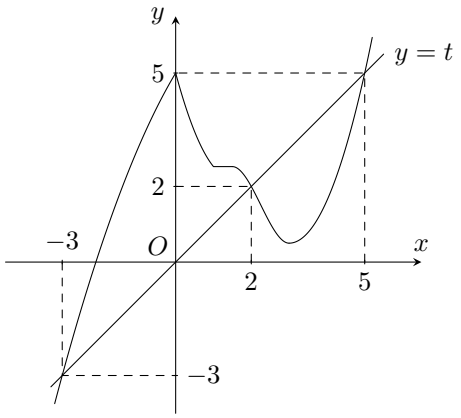
A. $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$.

C. $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$ nên
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) < -2x+1 \Leftrightarrow f'(t) < t$.
Xét hàm số $y = f'(t)$ có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng $y = t$.



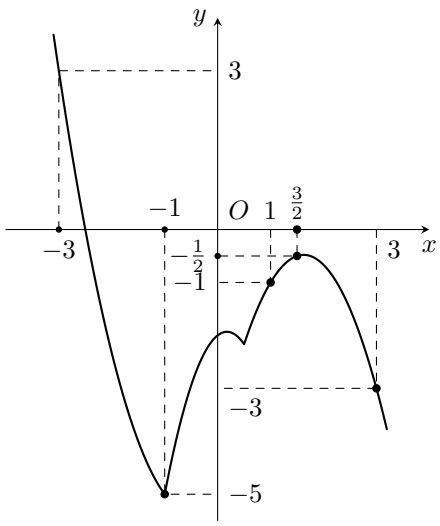
Ta có $f'(t) = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \\ t = 5. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < t < 5 \\ t < -3. \end{array}\right.$

Suy ra $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < -2x+1 < 5 \\ -2x+1 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -\dfrac{1}{2} \\ x > 2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 16.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



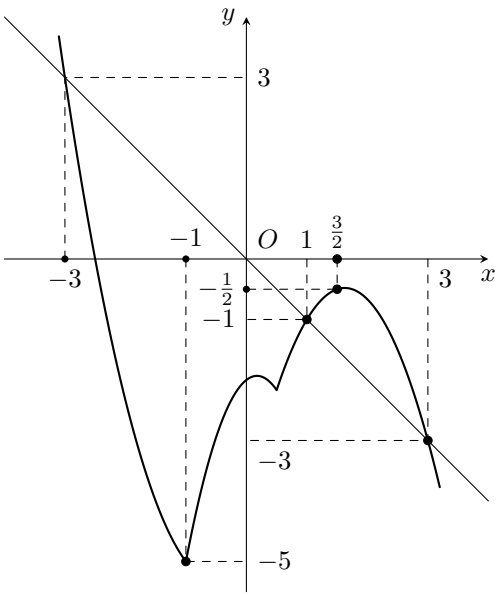
;

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -f'(1-x) + x - 1$.
Hàm số đã cho nghịch biến khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & -f'(1-x) + x - 1 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & f'(1-x) \ge -(1-x) \end{aligned}$$



;

Đặt $t = 1 - x$, ta có $f'(t) \le -t$.
Dựa vào đồ thị $f'(t) \ge -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -3 \\ 1 \le t \le 3. \end{array}\right.$

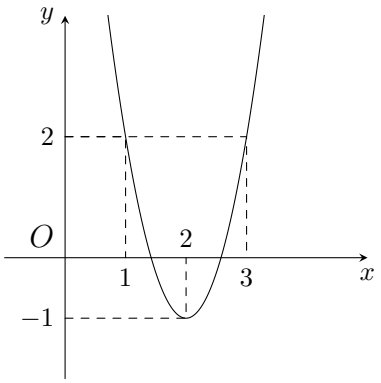
- ☑ $t \le -3 \Rightarrow 1 - x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 4$.
- ☑ $1 \le t \le 3 \Rightarrow 1 \le 1 - x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $[-2;0]$ và $[4;+\infty)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x-2)+2$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

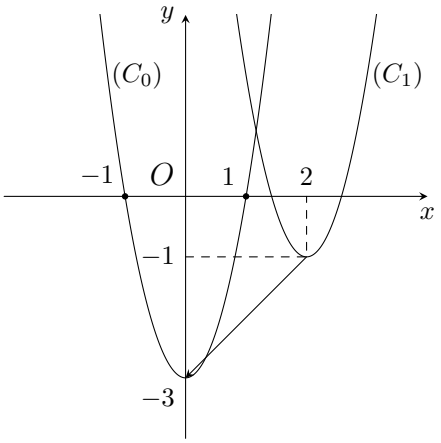


A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

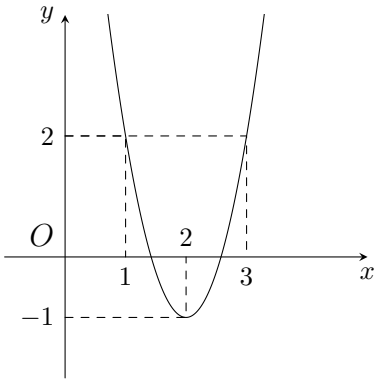
① **Cách 1:**

- ☑ Từ đồ thị (C_1) của hàm số $y = f'(x-2)+2$ ta thu được đồ thị đồ thị (C_0) bằng cách tiện tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2;-2)$.
- ☑ Từ đồ thị (C_0) của $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.



② **Cách 2:**

Hàm số nghịch biến khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+2-2)+2 < 2 \quad (1)$.
Đặt $t = x+2$ thì (1) trở thành $f'(t-2)+2 < 2 \Leftrightarrow 1 < t < 3$.
Ta được $1 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \\ &= (x+1)\left[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2-m)x - m^2 + m + 20\right] \\ &= (x+1)\left[(x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20\right]. \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+1 = 0 & (1) \\ (x+1)(m^2x^2 - 2m^2x + 3m^2 - m) - 4m^2 + 2m + 20 = 0 & (2) \end{bmatrix}.$$

Hàm số đồng biến trên R tương đương với $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $x = -1$ là nghiệm kép của $y' = 0$ tức là $x = -1$ là nghiệm của phương trình $(2) \Rightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} m = -2 \\ m = \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Với $m = -2$, ta có $f'(x) = (x+1)^2 \cdot (4x^2 - 8x + 14) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

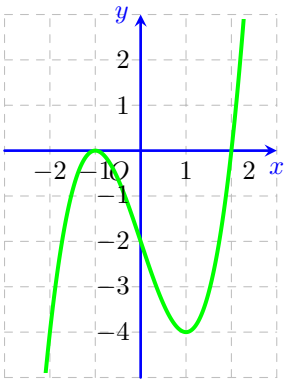
Với $m = \dfrac{5}{2}$, ta có $f'(x) = \dfrac{5}{4}(x+1)^2 \cdot (5x^2 - 10x + 13) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $m = -2$ và $m = \dfrac{5}{2}$ đều thỏa yêu cầu bài toán. Do đó tổng cần tìm bằng $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.
B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Lời giải.

Xét $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$

$g'(x) = f'\left(x^2 - 2\right).2x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{bmatrix}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ là sai.

Chọn đáp án D □

Câu 20.

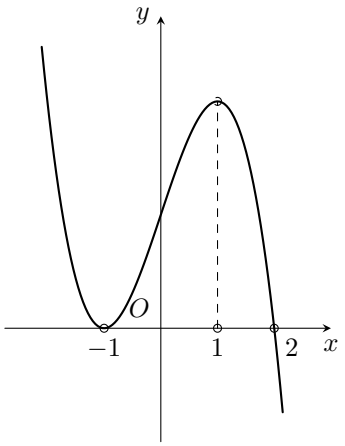
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.
Nhận xét nào đúng về hàm số $g(x)=f^2(x)$?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có

Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$ trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$ và $f'(x)>0$ khi $-1<x<1$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)$ có $g'(x)=2f(x).f'(x)$.

Giải phương trình

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x)>0$ khi $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-9}+4\sqrt{3x+1}=25$.

A. 2 nghiệm. **B**. 3 nghiệm. **C**. 4 nghiệm. **D**. 1 nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-9}+4\sqrt{3x+1}$.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-9}}+\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}>0, \forall x\in\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Lại có hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$, nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Do đó trên $\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$, phương trình $f(x)=25$ có tối đa một nghiệm.

Vì $x=5$ thỏa mãn phương trình nên $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 & (1)\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0. & (2)\end{cases}$$

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Điều kiện $-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2$. (3)

Do $-1\le x\le 1$ nên $0\le x+1\le 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2$ trên $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-6t\le 0, \forall t\in[0;2]$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại $t=0$ hoặc $t=2$).

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[0;2]$.

Suy ra phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=x+1$.

Thay vào phương trình (2) ta được $x^2-2\sqrt{1-x^2}+m=0\Leftrightarrow (1-x^2)+2\sqrt{1-x^2}=m+1$ $(*)$.

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}, (0\le t\le 1)$. Khi đó $(*)$ có dạng $t^2+2t=m+1$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $t^2+2t=m+1$ có nghiệm $t\in[0;1]$.

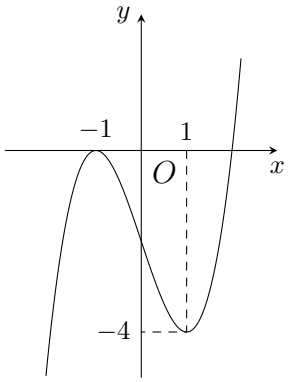
Ta có hàm $f(t)=t^2+2t$ đồng biến trên $[0;1]$ nên phương trình có nghiệm trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $0\le m+1\le 3\Leftrightarrow -1\le m\le 2$.

Vậy có 4 giá trị nguyên.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.

Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x^2-2)\cdot(x^2-2)'=2xf'(x^2-2)$.
Từ đồ thị ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow x>2$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x<2$ và $x\neq 1$.
Hàm số $g(x)$ nghịch biến thì

$$\begin{aligned}
g'(x)<0 &\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2-2\right)<0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'(x^2-2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'(x^2-2)>0\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x^2-2<2\\ x\neq -1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2-2>2\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ -2<x<2\\ x\neq -1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\ x<-2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ và $(-\infty;-2)$ nên D sai.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. 2009. **B**. 2010. **C**. 2011. **D**. 2012.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)=6\left[x^2+(m-1)x+(m-2)\right]$.

$$\begin{aligned}
&y'=0\\
\Leftrightarrow\ &x^2+(m-1)x+(m-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2-m\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -1 \neq 2-m \\ |-1-2+m|>3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ |m-3|>3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m-3>3 \\ m-3<-3 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty;0) \cup (6;+\infty)$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{7;8;9 \ldots 2017\}$. Do đó có 2011 số m thỏa đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hàm số $y=2\cos^3 x-3\cos^2 x-m\cos x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \in \left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $m \in \left(-2;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $m \in \left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $m \in \left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Cách 1:

$y'=-6\cos^2 x\sin x+6\cos x\sin x+m\sin x=sin\left(-6\cos^2 x+6\cos x+m\right)$

Hàm số $y=2\cos^3 x-3\cos^2 x-m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow \sin x\left(-6\cos^2 x+6\cos x+m\right)\leq 0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (vì $\sin x>0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$)

$\Leftrightarrow \left(-6\cos^2 x+6\cos x+m\right)\leq 0,\ \forall\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -6\cos^2 x+6\cos x\leq -m,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

Xét $f(x)=-6\cos^2 x+6\cos x,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\cos x$. Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x\in(0;1)$.

Ta có $f(t)=-6t^2+6t,\ \forall t\in(0;1)$ là Parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và hệ số $a<0$ nên có giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{2}$ tại $t=\dfrac{1}{2}$.

Để (1) xảy ra $\Leftrightarrow \max\limits_{(0;1} f(x)\leq -m \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\leq -m \Leftrightarrow m\leq -\dfrac{3}{2}$

Cách 2: Đặt $t=\cos x$. Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x\in(0;1)$.

Ta có $y=2t^3-3t^2-mt \Leftrightarrow y'=6t^2-6t-m$.

Hàm số $y=2\cos^3 x-3\cos^2 x-m\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $y=2t^3-3t^2-mt$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow 6t^2-6t-m\geq 0,\ \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow f(t)=6t^2-6t\geq m,\ \forall t\in(0;1)$.

Xét $f(t)=6t^2-6t,\ \forall t\in(0;1);\ f'(t)=12t^2-6=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)'$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \leq -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

A. $m \geq -3$. **B**. $m \geq 0$. **C**. $m \leq -3$. **D**. $m \leq 0$.

Lời giải.

☑ Ta có $y = f(x) = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$ (1). Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

☑ Hàm số (1) trở thành $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$. (2)

☑ Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số (2) nghịch biến trên $[-1; 0] \Leftrightarrow g'(t) \leq 0, \forall t \in [-1; 0]$ ($g'(t) = 0$ tại hữa hạn điểm).

☑ Xét hàm số $y = g(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ trên $[-1; 0]$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 6t - m$. Suy ra

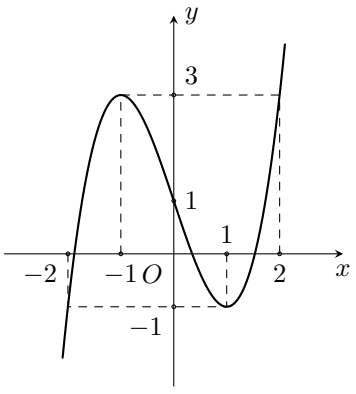
$$\begin{aligned} g'(t) \leq 0,\ t \in [-1; 0] &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \leq 0 \quad \forall t \in [-1; 0] \\ &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t \leq m, \quad \forall t \in [-1; 0]. \end{aligned}$$

☑ Xét hàm số $y = h(t) = 3t^2 + 6t$ trên đoạn $[-1; 0]$.
Ta có $h'(t) = 6t + 6 \geq 0, \quad t \in [-1; 0] \Rightarrow h(t)$ đồng biến trên $[-1; 0]$. Vậy $\max\limits_{[-1;0]} h(t) = h(0) = 0$.
Tức là $g'(t) \leq 0, \quad t \in [-1; 0] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;0]} h(t) \leq m, \quad t \in [-1; 0]$. Do đó, $m \geq 0$.
Hàm số (1) đồng biến trên $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $m \in [0; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2018$ giảm trên khoảng

A. $(-\infty; 1)$. **B**. $(2; +\infty)$. **C**. $(0; 1)$. **D**. $(1; 2)$.



Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2018$ khi đó $y' = 2(x - 1) f'(x^2 - 2x + 1)$.
Để hàm số nghịch biến khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) f'(x^2 - 2x + 1) \leq 0$,

ở đó dấu đẳng thức xảy ra tại một số hữu hạn điểm.
Nếu $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ suy ra

$$\begin{aligned} f'\left(x^2-2x+1\right) \leq 0 &\Leftrightarrow -1 \leq x^2-2x+1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2 \geq 0 \\ x^2-2x \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2-2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
Chọn đáp án (D) □

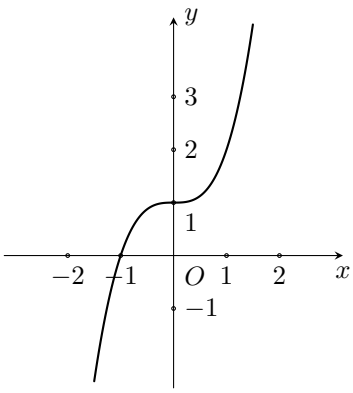
Câu 28.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(m\left(m+1\right)\right)$$

có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?

A. 10. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} & f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(m\left(m+1\right)\right) \\ \Leftrightarrow\ & 16\cos^2 x+6\sin 2x-8=m\left(m+1\right) \\ \Leftrightarrow\ & 8\left(\cos 2x+1\right)+6\sin 2x-8=m\left(m+1\right) \\ \Leftrightarrow\ & 8\cos 2x+6\sin 2x=m\left(m+1\right). \end{aligned}$$

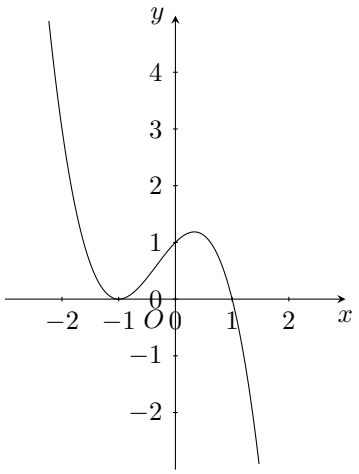
Để phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & m^2\left(m+1\right)^2 \leq 8^2+6^2 \Leftrightarrow m^2\left(m+1\right)^2 \leq 100 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m\left(m+1\right) \leq 10 \\ m\left(m+1\right) \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-10 \leq 0 \\ m^2+m+10 \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & m^2+m-10 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{41}}{2}. \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 29.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(1)=1, f(-1)=-\dfrac{1}{3}$. Đặt $g(x)=f^2(x)-4f(x)$. Cho biết đồ thị của $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $g(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 1 \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g(x)=f^2(x)-4f(x)\Rightarrow g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-4f'(x)=2f'(x)\cdot(f(x)-2)$.

Vì $f(x)\le 1\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)-2<0, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘	-3	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\sin x+1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến.

Đặt $t=\sin x, x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\sin x+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y=f(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Xét hàm số $y=f(t)=|t^3-mt+1|$ trên khoảng $(0;1)$ có $f'(t)=3t^2-m$.

☑ Khi $m=0: f'(x)=3x^2>0, \forall x \Rightarrow y=f(x)=x^3+1$ đồng biến trên $(0;1)$.
Và đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+1$ cắt Ox tại điểm duy nhất $x=-1$.
$\Rightarrow y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1) \Rightarrow m=0$ thoả mãn.

☑ $m>0: f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1=-\sqrt{\dfrac{m}{3}}, x_2=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$.
Hàm số $y=f(x)=x^3-mx+1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}};+\infty\right)$.
Nhận xét: $(0;1) \not\subset \left(\sqrt{\dfrac{m}{3}};+\infty\right), (0;1) \not\subset \left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right), \forall m>0$.
TH1:$-\sqrt{\dfrac{m}{3}}<0<\sqrt{\dfrac{m}{3}}<1 \Leftrightarrow 0<m<3$

$-\sqrt{\frac{m}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{m}{3}}$		1	
$+$	$-$		$-$		$+$	$+$	$f'(x)$

Để $y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $x^3-mx+1=0$ có nghiệm (bội lẻ) là $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$
$\Rightarrow \dfrac{m\sqrt{m}}{3\sqrt{3}}-\dfrac{m\sqrt{m}}{\sqrt{3}}+1=0 \Leftrightarrow -2m\sqrt{m}+3\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow m\sqrt{m}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$(TM).
TH2:$-\sqrt{\dfrac{m}{3}}<0<1\le\sqrt{\dfrac{m}{3}} \Leftrightarrow m\ge 3$

$-\sqrt{\frac{m}{3}}$		0		1		$\sqrt{\frac{m}{3}}$	
$+$	$-$		$-$		$-$	$+$	$f'(x)$

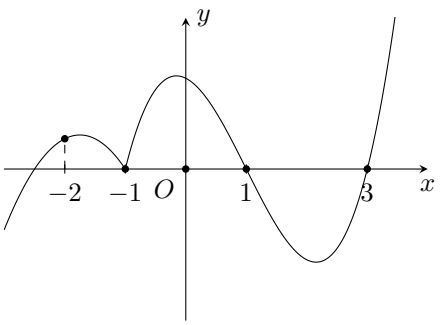
Để $y=g(x)=|x^3-mx+1|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $x^3-mx+1\le 0, \forall x\in(0;1)$
$\Rightarrow mx\le x^3+1, \forall x\in(0;1) \Rightarrow m\le x^2+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;1)$.
Xét hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;1) \Rightarrow y'=2x-\dfrac{1}{x^2}, y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\in(0;1)$.
Hàm số liên tục trên $(0;1)$ và $y\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}; y(1)=2; \lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty \Rightarrow \min\limits_{(0;1)} y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.
Để $m\le x^2+\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0;1)$ thì $m\le\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$ không có giá trị của m thoả mãn.
Vậy chỉ có giá trị $m=0$ thoả mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\geqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.



Lời giải.

Đặt $g(x)=mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1$.
Từ đồ thị của $y=f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua

$x=1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x)=0$ có nghiệm $x=1$.

Kiểm tra: Với $m=-1$

Ta có $g(x)\cdot f(x)=\left(-x+\sqrt{5-x^2}-1\right)f(x)=(1-x)\left(\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}}+1\right)f(x)$.

Nhận xét: $\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}}+1=\dfrac{3+x+\sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}}>0,\ \forall x[-2;2]$.

Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy

- ☑ Với $x\in[1;2]$ thì $f(x)\leqslant 0$ nên $(1-x)f(x)\geqslant 0$.
- ☑ Với $x\in[-2;1]$ thì $f(x)\geqslant 0$ nên $(1-x)f(x)\geqslant 0$.

Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x)\cdot f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[-2;2]$.

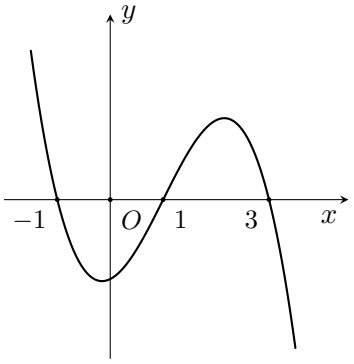
Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi hàm số $y=f(x-3)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(5;6)$.



Lời giải.

Đặt $g(x)=f(x-3)$.

Ta có $g'(x)=(x-3)'\cdot f'(x-3)=f'(x-3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x-3)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3<-1\\1<x-3<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2\\4<x<6.\end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Tính số nghiệm của phương trình $\cot x=2^x$ trong khoảng $\left(\dfrac{11\pi}{12};2019\pi\right)$.

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 1.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Ta có $\cot x=2^x\Leftrightarrow\cot x-2^x=0$. (1)

Xét hàm số $f(x)=\cot x-2^x$ trên $\left(\dfrac{11\pi}{12}\right),(\pi;2\pi),\ldots,(2018\pi;2019\pi)$.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}-2^x\ln 2<0$ với $\forall x\in\left(\dfrac{11\pi}{12}\right),(\pi;2\pi),\ldots,(2018\pi;2019\pi)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Trên $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$ ta có $f(x)<f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)\Rightarrow f(x)<\cot\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)-2^{\frac{11\pi}{12}}<0\Rightarrow f(x)=0$ vô nghiệm.

Ta có hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(\pi;2\pi),\ldots,(2018\pi;2019\pi)$ và trên mỗi khoảng đó hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Suy ra trên mỗi khoảng $(\pi;2\pi),\ldots,(2018\pi;2019\pi)$, phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất. Vậy phương trình (1) có 2018 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(-2;-1)$. **C**. $(-2;1)$. **D**. $(-4;-3)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f(x^2+2x)$ ta có:

$g'(x)=(2x+2)f'(x^2+2x)=2(x+1)f'(x^2+2x)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow g'(x)\leq 0, \forall x\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Xét đáp án A ta có: $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=3f'\left(\dfrac{5}{4}\right)>0 \Rightarrow$ Loại đáp án A.

Xét đáp án C ta có: $g'\left(\dfrac{-3}{2}\right)=2f'\left(0\right)>0 \Rightarrow$ Loại đáp án C.

Xét đáp án D ta có: $g'\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-5f'\left(\dfrac{21}{4}\right)>0 \Rightarrow$ Loại đáp án D.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho số thực α sao cho phương trình $2^x-2^{-x}=2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x)$ là

A. 2019. **B**. 2018. **C**. 4037. **D**. 4038.

Lời giải.

Ta có: $2^x+2^{-x}=4+2cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=2\cos\dfrac{\alpha x}{2} \quad (1) \\ 2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=-2\cos\dfrac{\alpha x}{2} \quad (2) \end{array}\right.$

Thay $x=0$ vào phương trình (1) ta có $2^0-2^0=2\cos 0 \Leftrightarrow 0=1$ (Vô lí), kết hợp với giả thiết ta có phương trình (1) có 2019 nghiệm thực khác 0.

Với x_0 là nghiệm của phương trình (1)

$\Leftrightarrow 2^{\frac{x_0}{2}}-2^{-\frac{x_0}{2}}=2\cos\dfrac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}}-2^{\frac{-(-x_0)}{2}}=-2\cos\dfrac{\alpha(-x_0)}{2} \Rightarrow -x_0$ là nghiệm của phương trình (2).

Thay $x=-x_0$ vào phương trình (1) ta có:

$\Leftrightarrow 2^{-\frac{x_0}{2}}-2^{\frac{x_0}{2}}=2\cos\frac{\alpha(-x_0)}{2}=2\cos\frac{\alpha x_0}{2}=2^{\frac{x_0}{2}}-2^{\frac{-x_0}{2}}$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{\frac{x_0}{2}}=2\cdot 2^{\frac{-x_0}{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x_0}{2}+1}=2^{\frac{-x_0}{2}+1} \Leftrightarrow \dfrac{x_0}{1}+1=-\dfrac{x_0}{1}+1 \Leftrightarrow x_0=0$ (vô lí do $x_0\neq 0$) $\Rightarrow -x_0$ không là nghiệm của phương trình (1), điều đó đảm bảo mọi nghiệm của phương trình (2) không trùng với nghiệm của phương trình (1).

Do đó phương trình (2) cũng có 2019 nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có $2019\cdot 2=4038$ nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\mathrm{e}^{3m}+\mathrm{e}^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm ?

A. $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$. **D.** $\left(0;\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Lời giải.

Phương pháp:

☑ Đặt $x+\sqrt{1-x^2}=t$, tìm khoảng giá trị của t.

☑ Đưa bài toán về dạng $m=f(t)$. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Cách giải:

ĐKXĐ: $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Đặt $x+\sqrt{1-x^2}=t$ ta có $t^2=x^2+1-x^2+2x\sqrt{1-x^2}=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Ta có: $t(x)=x+\sqrt{1-x^2}, x\in[-1;1]\Rightarrow t'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\1-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\x^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BBT:

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$t'(x)$		$+$	0	$-$	
$t(x)$	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Từ BBT ta có: $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành: $\mathrm{e}^{3m}+\mathrm{e}^m=2t\left(1+\dfrac{t^2-1}{2}\right)=t\left(t^2+1\right)=t^3+t\,(*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ ta có $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

Từ $(*)\Rightarrow f\left(\mathrm{e}^m\right)=f(t)\Leftrightarrow \mathrm{e}^m=t\Leftrightarrow m=\ln t\Rightarrow m\in\left(0;\ln\sqrt{2}\right)=\left(0;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2028. **D.** 2018.

Lời giải.

Phương pháp:

☑ Sử dụng công thức $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, đặt ẩn phụ $t=\sin x$.

☑ Để hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)\Rightarrow f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a;b)$.

Cách giải:

$y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1=\sin^3 x-3\left(1-\sin^2 x\right)-m\sin x-1$.

$y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$.

Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ đồng biến trên $[0;1]$.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow y' \geq 0\ \forall t \in [0;1] \Rightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0;1]$.

$\Rightarrow m \leq f(t) = 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;1]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$, ta có $f(0) = 0, f(1) = 9 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(t) = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in (-2019;0] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 2019 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x}{x-m}$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

A. $m > 1$. **B.** $0 < m \leq 1$. **C.** $0 \leq m < 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $[1;+\infty)$ khi $m < 1$ $(*)$

$y' = \dfrac{-m}{(x-m)^2}$. Phải có $y' < 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta được $0 < m < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. $m > 0$. **B.** $m < -1$. **C.** $m \geq -1$. **D.** $m \geq 0$.

Lời giải.

$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow 0 < \sin x < 1$. Để hàm số xác định trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2} \leq 0 \\ -\dfrac{m}{2} \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ $(*)$.

$y' = \dfrac{-2(m+1)\cos x}{(2\sin x + m)^2}$.

Phải có $y' > 0, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $(*)$ được $m \geq 0$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài này bằng cách thử lần lượt $m = 0, m = -1$ để chọn được phương án đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

A. $m \geq \dfrac{13}{2}$. **B.** $m \leq 2\sqrt{3}$. **C.** $m \geq -\dfrac{13}{2}$. **D.** $m \geq -2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với $y' = 6x^2 - 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{3x^2+1}{x} = g(x), \forall x \in (-2;0) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(-2;0)} g(x) \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + 2017$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $2;3$ là đoạn $T = [a;b]$. Tính $a + 5b$.

A. $a+5b=0$. **B**. $a+5b=9$. **C**. $a+5b=-2$. **D**. $a+5b=10$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Tìm m để hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-2m)x-1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 1$. **B**. $m\in\varnothing$. **C**. $m=1$. **D**. $m\neq 1$.

Lời giải.

$y'=-3x^2+6mx+3(1-2m)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{4}{3}\sin^3 x+2\cos^2 x-(2m^2-5m+2)\sin x-2017$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{4}{3}\sin^3 x+2(1-\sin^2 x)-(2m^2-5m+2)\sin x-2017$.

$y'=\left[4\sin^2 x-4\sin x-(2m^2-5m+2)\right]\cos x$.

Ta có ycbt $\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[4\sin^2 x-4\sin x-(2m^2-5m+2)\right]\cos x\geq 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x>0$, suy ra ycbt $\Leftrightarrow 4\sin^2 x-4\sin x-(2m^2-5m+2)\geq 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow 0<t<1$, ycbt $\Leftrightarrow 2m^2-5m+2\leq 4t^2-4t,\forall t\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow 2m^2-5m+2\leq\min\limits_{t\in(0,1)}(4t^2-4t)\Leftrightarrow 2m^2-5m+2\leq -1\Leftrightarrow 1\leq m\leq\dfrac{3}{2}$. Vậy S có 1 phần tử.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị bao nhiêu?

A. 5. **B**. -2. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}=\sqrt{(x+2)(2x^2-x+18)}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}$ với $x\in[-2;4]$

$f'=\dfrac{6x^2+6x+6}{2\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0\quad\forall x\in[-2;4]$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2;4]$.

Ta có: $f(1)=0\Rightarrow$ Bất phương trình có nghiệm $x\in[1;4]$

$\Rightarrow a+b=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo thể tích không đổi bằng $V=\dfrac{40}{7}\text{m}^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $10\$/1\text{m}^2$, giá tôn làm mặt xung quanh thùng là $7\$/1\text{m}^2$. Hỏi người bán gạo đó đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu sao cho chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

A. 1 m. **B**. 2 m. **C**. 1,5 m. **D**. 3 m.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy, cạnh bên của hình hộp chữ nhật có độ dài lần lượt là là a (m) và b (m).

Khi đó thể tích hình hộp là $V = a^2.b = \dfrac{40}{7} \Rightarrow b = \dfrac{40}{7.a^2}$.

Diện tích một đáy hình hộp là $S_a = a^2$ m^2.

Diện tích một mặt bên của hình hộp chữ nhật là $S_b = a.b = a.\dfrac{40}{7.a^2} = \dfrac{40}{7.a}$ m^2.

Tổng kinh phí tiền mua tôn dùng để làm thùng là $T = 10.a^2 + 4.7.\dfrac{40}{7a} = 10a^2 + \dfrac{160}{a} \Rightarrow \min T = 120$ khi $a = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \dfrac{a\sin x - 2}{2\sin x - a}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

A. $-2 < a \leq \sqrt{3}$. **B.** $-2 \leq a \leq 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a > 2 \\ a < -2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 < a < 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(4 - a^2)\cos x}{(2\sin x - a)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ \dfrac{a}{2} \notin \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 2 \\ a < -2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a = b = c = 0, \\ a > 0, b^2 - 3ac < 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \geq 0 \end{array}\right.$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ -1 < m < 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ -1 < m \leq 0 \end{array}\right.$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m > -1$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t + 1}{t - m}$ $(m \neq -1)$. Để hàm số y nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $f(t)$ nghịch biến trên $(0; 1) \Rightarrow f'(t) < 0$ với $\forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \dfrac{-m - 1}{(t - m)^2} < 0$ với $\forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 < 0 \\ t - m \neq 0 \text{ với } \forall t \in (0; 1) \end{cases}$

$\begin{cases} m > -1 \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+2x^2+(3m-1)x+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{9}\right]$. **B.** $m\in\left[-\dfrac{1}{9};+\infty\right)$. **C.** $m\in(-\infty;8]$. **D.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2+4x+3m-1$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì:

$-3x^2+4x+3m-1\le 0$ với $\forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\le x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ với $\forall x\in(-\infty;-1)$

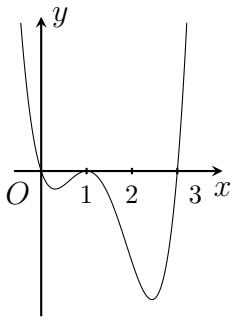
$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)$, với $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow m\le -\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=(f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, điểm cực tiểu?



A. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Lời giải.

Với $y=(f(x))^2$ ta có $y'=2\cdot f'(x)\cdot f(x)$.

Ta thấy $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0.\end{array}\right.$

Với $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(0;1)\\ x=1\\ x=x_2\in(1;3).\end{array}\right.$

Với $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\text{ (bội chẵn)}\\ x=3.\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=(f(x))^2$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m thuộc đoạn $[-100;100]$ sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-5x^2+mx-1$ đồng biến $\mathbb{R}$.

A. 76. **B.** 75. **C.** 125. **D.** 124.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-10x+m \Rightarrow \Delta'=25-m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \ge 25$.

Vậy $m=25;26;\ldots;100 \Rightarrow$ số phần tử của S là 76.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ có các điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\in(-2;-1)$ và $x_2\in(0;1)$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>0,b>0,c>0,d<0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d<0$.

C. $a<0,b>0,c<0,d<0$. **D.** $a>0,b<0,c<0,d<0$.

Lời giải.

☑ $(C)\cap Oy$ tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d<0$.

☑ Hàm số nghịch biến trên $(x;x_2) \Rightarrow a>0$.

☑ Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1.x_2<0 \Rightarrow ac<0 \Rightarrow c<0$.

☑ Vì $x_1\in(-2;-1), x_2\in(0;1) \Rightarrow x_1+x_2<0 \Rightarrow -\frac{2b}{3a}<0 \Rightarrow ab<0 \Rightarrow b>0$

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\ge -\frac{1}{2}$. **B.** $m>\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}<m<0$ hoặc $m>1$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $m\ge 1$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, $t\in(0;1)$. Hàm số trở thành $g(t)=\dfrac{-2t-1}{t-m}$. Do $t=\sin x$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0;1)$, suy ra

$$\begin{cases} g'(t)>0 \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Để phương trình $-2\sin^2 x+3\sin x+1=m$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta phải có tập giá trị của m là

A. $\left[2;\frac{17}{8}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{17}{8}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{17}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{17}{8};+\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, $t\in[0;1]$.

Khí đó, phương trình đã cho trở thành $-2t^2+3t+1=m$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để

$-2t^2+3t+1=m$ có hai nghiệm phân biệt $t\in[0;1]$

Xét $f(t)=-2t^2+3t+1;\ t\in[0;1]$

$f'(t)=-4t+3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{3}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{17}{8}$	$\searrow$	2

$\Rightarrow m$ có tập giá trị là $\left[2;\dfrac{17}{8}\right)$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-4m+5}{x+3m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

$y'=\dfrac{3m^2+4m-5}{(x+3m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến thì $3m+4m-5<0\Leftrightarrow\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}<m<\dfrac{2+\sqrt{19}}{3}$.

Vậy các giá trị nguyên của m là $0,1,2$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$, nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$, đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{-3x+3}{2(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Chọn đáp án C □

Câu 57. Có bao nhiêu số nguyên m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x+mx-1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+mx-1. \Rightarrow y'=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+m.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+m\geq 0, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right).$

$\Leftrightarrow m\geq -2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right), \forall x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right).$

Xét hàm $g(x)=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right).$

$g'(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}.$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$-\sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\geq -1$.

Vì m nguyên và $m\in[-10;10]$ nên có 12 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Tìm m để hàm số $y=3m\sin^3 x-\sin^2 x+\sin x+m-2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$?

A. $m\leq -3$. **B.** $m\leq 0$. **C.** $m\geq\frac{1}{3}$. **D.** $m\geq -\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\Rightarrow t\in(-1;0).$

Khi đó, hàm số trở thành $y=3mt^3-t^2+t+m-2$, với $t\in(-1;0)$.

Để hàm số $y=3m\sin^3 x-\sin^2 x+\sin x+m-2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, và do hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\Leftrightarrow$ Hàm số $y=3mt^3-t^2+t+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)\Leftrightarrow y'(t)=9mt^2-2t+1\geq 0, \forall t\in(-1;0)\Leftrightarrow m\geq\frac{2t-1}{9t^2}=g(t), \forall t\in(-1;0).$

Ta có: $g'(t)=\frac{-18t^2+18t}{(9t^2)^2}=0\Leftrightarrow -18t^2+18t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ (\text{loại})\\ t=0\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

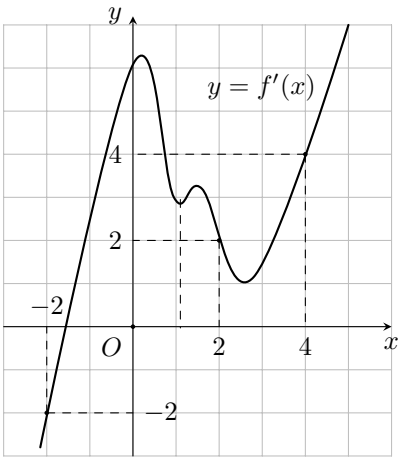
Mà: $\lim\limits_{t\to 0^-}g(t)=-\infty;\ \lim\limits_{t\to(-1)^+}g(t)=\frac{1}{3}.$

Vậy $m\geq\frac{2t-1}{9t^2}=g(t), \forall t\in(-1;0)\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{3}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 59.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x)=2f(3x+1)-9x^2-6x+4$. Hãy chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

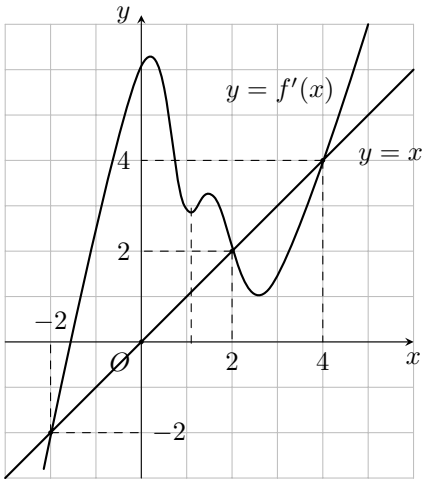
C. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $h'(x)=6f'(3x+1)-6(3x+1)$. Xét bất phương trình

$$h'(x)>0\Leftrightarrow 6f'(3x+1)-6(3x+1)>0\Leftrightarrow f'(3x+1)>3x+1\ (*).$$



Từ đồ thị trên ta vẽ thêm đường thẳng $y=x$.

Quan sát hình vẽ ta thấy:

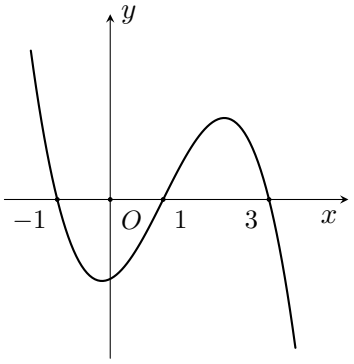
Xét trên khoảng $(-2;4)$ thì $f'(x)>x\Leftrightarrow -2<x<2$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow -2<3x+1<2\Leftrightarrow -1<x<\dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x-3)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(2;4)$. **B**. $(1;3)$. **C**. $(-1;3)$. **D**. $(5;6)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f(x-3)$.

Ta có $g'(x)=(x-3)'\cdot f'(x-3)=f'(x-3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x-3)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3<-1\\1<x-3<3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<2\\4<x<6.\end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho x,y thỏa mãn $1\le x\le y\le 2$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $T=(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$. Chọn mệnh đề đúng

A. $M\cdot n=12$. **B**. $M\cdot n=18$. **C**. $M\cdot n=9$. **D**. $M\cdot n=24$.

Lời giải.

Ta có $1 \le x \le y \le 2 \Leftarrow 1 \le \dfrac{x}{y} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le t \le 2$.

$T = (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) = 2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2 + t + \dfrac{1}{t}$.

Xét $f(t) = 2 + t + \dfrac{1}{t}$, $1 \le t \le 2$.

$f'(t) = \dfrac{t^2-1}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có BBT:

t	1		2
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	4	↗	$\dfrac{9}{2}$

Vậy $M \cdot n = 18$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(3m+1)x^2 + 6(2m^2+m)x - 12m^2 + 3m + 1$. Tính tổng tất cả giá trị nguyên dương của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 6\left[x^2 - (3m+1)x + (2m^2+m)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m \\ x_2 = 2m+1 \end{array}\right.$.

Vì $m \in \mathbb{Z}_+$ nên $x_1 < x_2$, tức là $m < 2m+1$.

x	$-\infty$		m		$2m+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Để hàm số nghịch biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow m \le 1 < 3 \le 2m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ 2m+1 \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 \le m \le -1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge -1 \\ m \le -2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 < m < -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -x^2 + 2mx + (3m+2)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $\Delta' \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \le m \le -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Phương trình $x^3-\sqrt{1-x^2}=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B**. 6. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

☑ Ta có

$$x^3-\sqrt{1-x^2}=0\Leftrightarrow x^3=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x^6=1-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x^6+x^2-1=0.\end{cases}$$

☑ Xét hàm số $f(x)=x^6+x^2-1$ trên $[0;+\infty)$

$f'(x)=6x^5+2x\geq 0\ \forall\ x\in[0;+\infty)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x(6x^4+2)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$
	-1		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=0$ có duy nhất 1 điểm chung trên $[0;+\infty)$ hay phương trình $x^6+x^2-1=0$ có duy nhất 1 nghiệm trên $[0;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2+5x+4\leq 0\\x^3+3x^2-9x-10>0\end{cases}$ là

A. $(-\infty;-4)$. **B**. $[-4;-1]$. **C**. $[-4;1]$. **D**. $[-1;+\infty)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ $x^2+5x+4\leq 0\Leftrightarrow x\in[-4;-1]$.

☑ Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ trên $[-4;-1]$.

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin[-4;-1]\\x=-3\in[-4;-1].\end{array}\right.$

Bảng biến thiên $f(x)$ trên $[-4;-1]$:

x	-4		-3		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	17	$\searrow$	
	10				1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x)>0$, $\forall\ x\in[-4;-1]$.

☑ Vậy hệ bất phương trình có tập nghiệm là $[-4;-1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\quad(1)\\x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0\quad(2)\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1)^2 = y^3 - 3y^2 \quad (3)$.

Do $-1 \le x \le 1$ nên $0 \le x+1 \le 2$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2$ trên $[0;2]$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 6t \le 0, \quad \forall t \in [0;2]$ (dấu bằng chỉ xảy ra tại $t = 0$ hoặc $t = 2$).

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[0;2]$. Suy ra

$$(3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1.$$

Thay vào (2) ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) + 2\sqrt{1-x^2} = m+1 \qquad (*)$.

Đặt $u = \sqrt{1-x^2}, (0 \le u \le 1)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $u^2 + 2u = m+1$ có nghiệm $u \in [0;1]$.

Ta có hàm $g(u) = u^2 + 2u$ đồng biến trên $[0;1]$ nên phương trình có nghiệm trên $[0;1]$ khi và chỉ khi

$$g(0) \le m+1 \le g(1) \Leftrightarrow 0 \le m+1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 3}{\sin x + m}$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $0 \le m < 3$. **B**. $m \le -1$. **C**. $m \ge 3$. **D**. $\begin{cases} m \le -1 \\ 0 \le m < 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(m-3)\cos x}{(\sin x + m)^2}$. Vì $\cos x > 0 \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\frac{(m-3)\cos x}{(\sin x + m)^2} < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ \sin x = -m \quad \text{không có nghiệm thuộc } \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ \left[\begin{array}{l} |-m| > 1 \\ -m = 1 \\ -m \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ 0 \le m < 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 68.

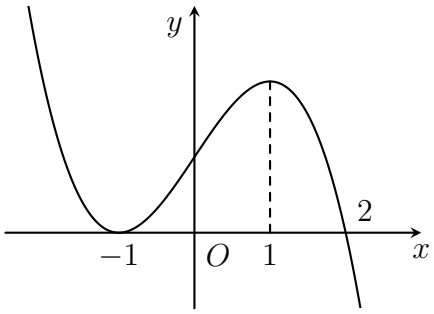
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Nhận xét nào sau đây đúng về hàm $g(x) = f^2(x)$?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 2)$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra

☑ $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

☑ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)$ có $g'(x)=2f(x)f'(x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x)>0$ khi $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+(a-1)x^2+(a+3)x-4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $a\geq\dfrac{12}{7}$. **B.** $a<-3$. **C.** $a\leq -3$. **D.** $a>\dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(0;3)$ khi và chỉ khi

$$y'=-x^2+2(a-1)x+a+3\geq 0 \quad \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow a\geq \frac{x^2+2x-3}{2x+1} \quad \forall x\in(0;3).$$

Xét hàm $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}$ có $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}>0 \quad \forall x\in[0;3]$.

Suy ra

$$a\geq \frac{x^2+2x-3}{2x+1} \quad \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow a\geq \max_{[0;3]} g(x) \Leftrightarrow a\geq g(3) \Leftrightarrow a\geq \frac{12}{7}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho phương trình $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0$. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 15. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x^3+3x+m} \Rightarrow t^3=2x^3+3x+m$.

Ta có $\begin{cases} t^3=2x^3+3x+m \\ x^3-3x^2-2x+m-3+2t=0 \end{cases} \Rightarrow t^3+2t=(x+1)^3+2(x+1)$.

Xét hàm số $y = f(u) = u^3 + 2u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Suy ra $t = x + 1 \Rightarrow 2x^3 + 3x + m = (x + 1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 1 = -m$.
Xét $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x$. Giải $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-5 < -m < -1 \Rightarrow 1 < m < 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in S = \{2; 3; 4\}$.
Vậy tổng các phần tử của S bằng 9.
Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Cho phương trình

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng một nghiệm x thuộc $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** . **C.** 4. **D.** 2.

3

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2 - \cos 2x) = 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} + 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\sin^2 x + 1) = \sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\left[2(2\cos^3 x + m + 1) + 3\right] \\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\sin^2 x + 1) = \sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\left[2(2\cos^3 x + m + 2) + 1\right] \\
\Leftrightarrow\ &2\sin^3 x + \sin x = 2\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right)^3 + \sqrt{2\cos^3 x + m + 2}.
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$ với mọi t nên hàm số f luôn đồng biến.
Do đó

$$\begin{aligned}
&f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right) \\
\Leftrightarrow\ &\sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \\
\Leftrightarrow\ &\sin^2 x = 2\cos^3 x + m + 2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x = 2\cos^3 x + m + 2$$
$$\Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = m. \quad (*)$$

Đặt $u = \cos x$, với $u \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$, phương trình $(*)$ trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m$.

Xét hàm số $g(u) = -2u^3 - u^2 - 1$ trên $\left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(u) = -6u^2 - 2u$ và $g'(u) = 0$ có các nghiệm $u = 0$, $u = -\frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\frac{28}{27}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4

Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ khi phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm thuộc $\left(-\frac{1}{2}; 1\right]$. Dựa vào bảng biến thiên ta được $m = -1$ hoặc $-4 \le m < -\frac{28}{27}$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$. **B.** $m \le 0$.

C. $1 \le m < 2$. **D.** $m \ge 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - \frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - 2)}{(\tan x - m)^2} = \dfrac{2-m}{\cos^2 x\,(\tan x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ $\Leftrightarrow$ hàm số xác định trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $y' \ge 0\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} m \ne \tan x\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m \le 2. \end{array}\right.$

Khi $m = 2$ thì hàm số đã cho là hàm hằng trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m+5)x + 2m - 5$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

A. $m \le 2$. **B.** $m > -2$. **C.** $m < 2$. **D.** $m \ge -2$.

Lời giải.

$y' = x^2 - 4x + m + 5$. Để hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$ thì $x^2 - 4x + m + 5 \ge 0$ với mọi $x \in (3; +\infty)$.

Hay $m \ge -x^2 + 4x - 5$ với mọi $x \in (3; +\infty)$.

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x\in(3;+\infty)} (-x^2+4x-5) = -2$

Chọn đáp án D □

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{\cot 2x + m + 2}{\cot 2x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \in (-\infty; -1)$. **B.** $m \in (-1; +\infty)$.

C. $m \in (-1; 0] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$. **D.** $m \in (-1; 0) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $u(x) = \cot 2x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $u'(x) < 0$ với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ta có $y' = -u(x).\dfrac{2m+2}{(u(x)-m)^2}$.

Do đó, để hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $\begin{cases} 2m+2 > 0 \\ m \in \mathbb{R} \setminus \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$.

Vậy $m \in (-1; 0] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Giá trị m để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$. **B.** $1 \leq m < 2$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m > 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \cot x$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Ta có $y = \dfrac{t-2}{t-m}$.

Để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, thì hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Xét hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ ta có $y' = \dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên $(0; 1)$ thì $\begin{cases} m \notin (0; 1) \\ y' > 0, \forall t \in (0; 1). \end{cases}$

Suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

A. $m \leqslant 1$. **B.** $m \geqslant -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m > -\dfrac{1}{2}$. **D.** $m \geqslant 1$.

Lời giải.

Vì $x \in (0; \pi)$ nên $\cos x \in (-1; 1)$.

Điều kiện: $\cos x - m \neq 0 \Leftrightarrow m \notin (-1; 1)(*)$.

Ta có: $y' = \dfrac{-2\sin x\,(\cos x - m) + \sin x\,(2\cos x + 1)}{(\cos x - m)^2} = \dfrac{(2m+1)\sin x}{(\cos x - m)^2}$.

Trên khoảng $(0;\pi)$ ta thấy, $\sin x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$ khi $y' > 0 \Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta có: $m \geqslant 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-9;12)$ sao cho hàm số $y = \dfrac{mx+9}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-6;+\infty)$?

A. 14. **B**. 16. **C**. 7. **D**. 6.

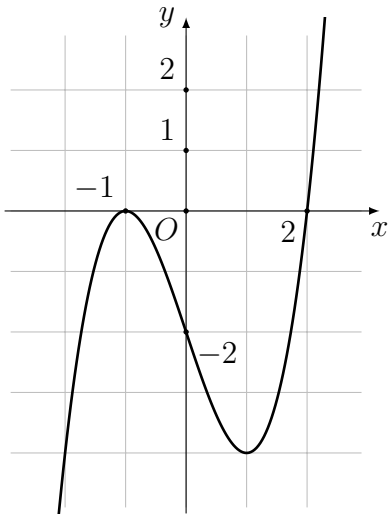
Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2 = -1 \\ x^2-2 = 2 \end{array}\right.$.

Từ $g(x) = f\left(x^2-2\right) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-2 = -1 \\ x^2-2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy $g'(x) > 0, \forall x \in (-1;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$.

A. $-2 \leq m \leq 2$. **B**. $-2 < m < 2$. **C**. $m > 2$. **D**. $1 \leq m < 2$.

Lời giải.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ thì hàm số phải xác định trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ và $y' < 0, \forall x \in$

$\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} y'=\dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}<0 \\ \dfrac{m}{4}\geq\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2\leq m<2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Hàm số $y=\dfrac{m^2-1}{3}x^3+(m+1)x^2+3x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\geq 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **D.** $m\leq -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=(m^2-1)x^2+2(m+1)x+3$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (m^2-1)x^2+2(m+1)x+3\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $(*)$.
Trường hợp 1: $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.
– Với $m=1$ ta có: $(*)\Leftrightarrow 4x+3\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$). Ta loại giá trị $m=1$.
– Với $m=-1$ ta có: $(*)\Leftrightarrow 3\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (luôn đúng). Ta nhận giá trị $m=-1$.
Trường hợp 2:

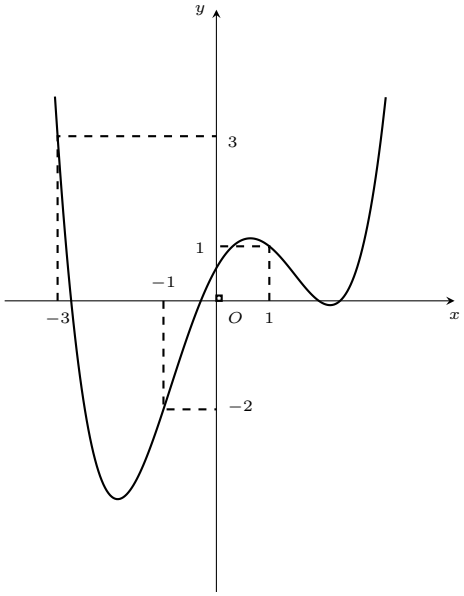
$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1>0 \\ (m+1)^2-3(m^2-1)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1\vee m>1 \\ (m+1)(4-2m)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được: $\left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.
Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2017$.
Cho các mệnh đề dưới đây:
(I) $g(0)<g(1)$.
(II) $\min\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=g(-1)$.
(III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$.
(IV) $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=\max\{g(-3),g(1)\}$.
Số mệnh đề đúng là



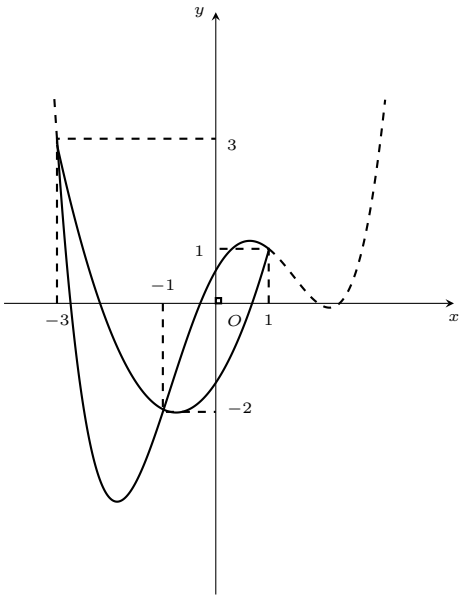
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x-2017$.

Ta có $h'(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Trên đoạn $[-3;1]$, đồ thị của hàm số $f'(x)$ và $h'(x)$ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy có dạng như hình bên.



Mặt khác, ta có $g(x)=f(x)-h(x)$.

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-h'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=-3\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-3;1]$ như sau

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$ nên $g(0)<g(1)$.
- Hàm số $g(x)$ có $\min\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=g(-1)$.
- Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$.
- Hàm số $g(x)$ có $\max\limits_{x\in[-3;1]} g(x)=\max\{g(-3);g(1)\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m-1}{2}x^2+mx+m-1$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 1. Tính số phần tử của S.

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-(m-1)x+m$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng $1\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 đồng thời $|x_1-x_2|=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2-m>0\\ \sqrt{\Delta}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-3m+1>0\\ m^2-3m+1=1\end{cases}\Leftrightarrow m^2-3m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3.\end{array}\right.$$

Số phần tử của S bằng 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Cho a và b là hai số dương thỏa mãn $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ là $S=\dfrac{m}{n}$ (với m,n là các số nguyên, $n>0$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Hãy tính $m+n$.

A. -18. **B**. -19. **C**. -20. **D**. -17.

Lời giải.

Với a, b là số dương ta có

$$\begin{aligned} & 2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2) \\ \Leftrightarrow\ & 2(a^2+b^2)+ab=a^2b+ab^2+2(a+b) \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Mặt khác $(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, $t \geq \frac{5}{2}$ suy ra $P=4(t^3-3t)-9(t^2-2)=4t^3-9t^2-12t+18$.

Xét hàm số $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$, với $t \geq \frac{5}{2}$.

Ta có $f'(t)=6(2t^2-3t-2)>0$, với $\forall t \geq \frac{5}{2}$ suy ra $\min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{-23}{4}$.

Vậy $\min P=\frac{-23}{4} \Rightarrow m+n=-19$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx-\sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m>1$. **B.** $m \leq -1$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải.

Ta có $y'=m-\cos x$.

Theo đề bài,

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow m-\cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow m \geq \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow m \geq 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Tập nghiệm của bất phương trình $(x+2)\left[\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right]+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)>0$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho có dạng

$f(x+2)>f(-x)$ trong đó $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$.

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$, $t \in \mathbb{R}$;

Ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+1+t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)=\sqrt{t^2+3}+1+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó $f(x+2)>f(-x) \Leftrightarrow x+2>-x \Leftrightarrow x>-1$

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^4-2mx^2$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m \le -1$. **B.** $m = -1$ hoặc $m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $m \le -1$ hoặc $m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m \le -1$ hoặc $m > 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4(m^2-1)x^3 - 4mx$.

☑ Với $m = -1 \Rightarrow y' = 4x > 0, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow y$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

☑ Với $m = 1 \Rightarrow y' = -4x < 0, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow y$ giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

☑ Với $m \ne \pm 1$, để hàm số tăng trên $(1;+\infty)$ thì $\left((m^2-1)x^2 - m\right)x \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

+ Nếu $m^2-1 < 0, (*) \Leftrightarrow x^2 \le \dfrac{m}{m^2-1}, \forall x \in (1;+\infty)$ (không có m thỏa bài toán).

+ Nếu $m^2-1 > 0, (*) \Leftrightarrow x^2 \ge \dfrac{m}{m^2-1}, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{m}{m^2-1} \le 1$.

Giá trị m thỏa mãn hệ $\begin{cases} m^2-1 > 0 \\ m^2-m-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m < -1. \end{array}\right.$

Vậy $m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $m \le -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m < 1$. **B.** $m \le 0$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m > -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(1-2m)\cos x}{(\sin x - m)^2}$. Vì $\cos x > 0, \quad \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\frac{(1-2m)\cos x}{(\sin x - m)^2} > 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m > 0 \\ \sin x = m \quad \text{không có nghiệm thuộc } \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} |m| > 1 \\ m = 1 \\ m \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2) \cdot g(x) + 2018$ trong đó $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = 1-x$, ta được hàm số $h(t) = f(t) - 2018t + 4037$. Khi đó, ta có:

$$h'(t) = f'(t) - 2018 = (1-t)(t+2)g(t).$$

Suy ra $y' = -x(3-x) \cdot g(x)$; $y' < 0 \Leftrightarrow -x(3-x) \cdot g(x) < 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3. \end{array}\right.$

Do đó hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m < \dfrac{1}{2}$. **B.** $m \leq \dfrac{1}{2}$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0; 1)$. Hàm số đã cho trở thành $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1-2m}{(t-m)^2}$.

Hàm số $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1-2m}{(t-m)^2} > 0, \quad \forall t \in (0;1) \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 90. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0; b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018 \cdot a_n$ là

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên } [0;1] \\ f(1) + 2 = f(0). \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 \\ f(a_2) + 2 = f(a_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow a_n = n - 1.$

Ta có $\begin{cases} 1 \leq b_1 < b_2 \\ f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 b_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}.$

Khi đó $b_n > 2018 \cdot a_n \Rightarrow 2^{n-1} > 2018 \cdot (n-1)$.

Xét $f(t) = 2^t - 2018 \cdot t$ với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 2018$. Ta được $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_2 \dfrac{2018}{\ln 2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

t	0	$\log_2 \dfrac{2018}{\ln 2} \approx 11{,}5$	14	t_0	15	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$			
$f(t)$	1	$\searrow$	-11868	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 2498	$\nearrow +\infty$
		$\approx -20310{,}73$				

Theo bảng biến thiên, ta thấy giá trị $t = 15$ là số nguyên dương nhỏ nhất để $f(t) > 0$.
Vậy ta có $n = 16$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018 \cdot a_n$.
Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) > 1$ và

$$\frac{2f(x)-1}{2mx-1} = \frac{m^2x^2 + \dfrac{1}{4} + m(1-x)}{f^2(x) - f(x) + m + \dfrac{1}{4}}$$

với $m > 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{f(x) - 9m + 8}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 8. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Với $m > 0$, ta có $\dfrac{2f(x)-1}{2mx-1} = \dfrac{m^2x^2 + \dfrac{1}{4} + m(1-x)}{f^2(x) - f(x) + m + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{(2mx-1)^2 + 4m}{[2f(x)-1]^2 + 4m} > 0.$

Mà $2f(x) > 1 \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.
Ta lại có

$$\frac{2f(x)-1}{2mx-1} = \frac{m^2x^2 + \dfrac{1}{4} + m(1-x)}{f^2(x) - f(x) + m + \dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{2f(x)-1}{2mx-1} = \frac{(2mx-1)^2 + 4m}{[2f(x)-1]^2 + 4m}$$

$$\Leftrightarrow [2f(x)-1]^3 + 4m[2f(x)-1] = (2mx-1)^3 + 4m(2mx-1)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) - 1 = 2mx - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = mx \quad (\text{vì hàm số } g(t) = t^3 + 4mt \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}).$$

Do đó hàm số đã cho trở thành $y = \dfrac{mx - 9m + 8}{x - m}$.
Xét hàm số $y = \dfrac{mx - 9m + 8}{x - m}$, ta có $y' = \dfrac{-m^2 + 9m - 8}{(x-m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow -m^2 + 9m - 8 > 0$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 8.$$

Suy ra giá trị nguyên của m là $2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số thực m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}mx^2 + 2x + \dfrac{2}{x^2}$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có $y' = x^3 - 3mx + 2 - \dfrac{4}{x^3}$. Vì hàm số liên tục trên $[1; +\infty)$ và có đạo hàm trên $(1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x > 1$.

$x^3 - 3mx + 2 - \dfrac{4}{x^3} \geq 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^4} \geq 3m, \forall x > 1$ (1).

Xét hàm số $g(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^4}, x > 1$, $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{16}{x^5} > 0, \forall x > 1$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra (1) $\Leftrightarrow 3m \leq -1 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{-\cos x + m}{\cos x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

A. $m \geq 0$. **B**. $m \leq -1$. **C**. $m \geq 1$. **D**. $m < 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2m \sin x}{(\cos x + m)^2}$. Vì $\sin x < 0, \forall x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2m}{(\cos x + m)^2} > 0 \quad \forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \cos x = -m \quad \text{không có nghiệm thuộc} \quad \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1. \\ -m \geq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho hàm số $y = \dfrac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2018. **B**. 2020. **C**. 2019. **D**. 0.

Lời giải.

Đặt $t=\cot x, t\in(0;1)$.

Ta cần tìm m để $y=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Ta có $y'=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;1)$ thì

$$\begin{cases} y'\geq 0, \forall t\in(0;1) \\ m\leq 0 \text{ hoặc } m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2+1}{t}\geq 2m, \forall t\in(0;1) \qquad (1) \\ m\leq 0 \text{ hoặc } m\geq 1. \qquad (2) \end{cases}$$

Đặt $g(t)=\dfrac{t^2+1}{t}\Rightarrow g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$.

Ta có

$$g'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1.$$

Hàm số $g(t)$ bảng biến thiên trên $(0;1)$ như hình bên.

t	0		1
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2

Từ (1) suy ra $2m\leq 2\Leftrightarrow m\leq 1$. Kết hợp (2) ta được $m\leq 0$ hoặc $m=1$.

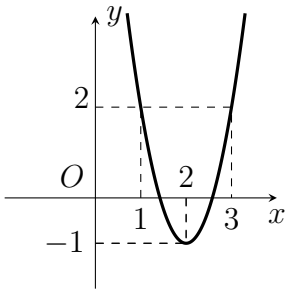
Vậy có 2020 giá trị nguyên của m nằm trong đoạn $[-2018;2018]$ thỏa bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 95.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=f'(x-2)+2$ có dạng $y=g(x)=ax^2+bx+c$.

Theo đồ thị ta có

$$\begin{cases} g(1)=2 \\ g(2)=-1 \\ g(3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=-1 \\ 9a+3b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-12 \\ c=11 \end{cases}.$$

Vậy $f'(x-2)+2=3x^2-12x+11\Leftrightarrow f'(x-2)=3x^2-12x+9$.

Đặt $t=x-2\Rightarrow f'(t)=3(t+2)^2-12(t+2)+9=3t^2-3\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi $f'(x)<0\Leftrightarrow 3x^2-3<0\Leftrightarrow x\in(-1;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$. **B**. $(0;+\infty)$.

C. $(-2;0)$. **D**. $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\left[f\left(x^2-1\right)\right]'=f'\left(x^2-1\right)(2x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có

$$\left[f\left(x^2-1\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x^2-1\right)=0\\x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=-1\\x^2-1=2\\x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{3}\\x=0.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^2-1$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-1	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $\left[f\left(x^2-1\right)\right]'$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'\left(x^2-1\right)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\left[f\left(x^2-1\right)\right]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta có hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B**. 4. **C**. 3. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y'=3+m(\cos x-\sin x)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y'\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 3+m(\cos x-\sin x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}m\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq -3,\ \forall x\in\mathbb{R}\qquad(1).\end{aligned}$$

☑ Với $m=0$, (1) luôn đúng.

☑ Với $m>0$,

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq -\frac{3}{\sqrt{2}m},\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow -1\geq -\frac{3}{\sqrt{2}m}\Leftrightarrow m\leq\frac{3}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow m=1,\ m=2\ (\text{vì } m\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

☑ Với $m<0$,

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq -\frac{3}{\sqrt{2}m},\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow 1\leq -\frac{3}{\sqrt{2}m}\Leftrightarrow m\geq -\frac{3}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow m=-2,\ m=-1\ (\text{vì } m\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Cho hàm số $y=|x^3-mx+1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tìm tổng các phần tử của S.

A. 3. **B**. 1. **C**. 9. **D**. 10.

Lời giải.

Ta có: $y=\begin{cases}f(x)=x^3-mx+1 & ,\text{nếu } x^3-mx+1\geq 0\\ g(x)=-x^3+mx-1 & ,\text{nếu } x^3-mx+1<0\end{cases}$.

Để hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì mọi nghiệm của $f(x)=0$ không lớn hơn 1, hay $f(x)\geq 0,\forall x\geq 1$.

Khi đó ta có: $m\leq\dfrac{x^3+1}{x},\forall x\geq 1\Rightarrow m\leq\min\limits_{x\geq 1}\dfrac{x^3+1}{x}=2$.

Dễ dàng kiểm tra được với $m\in\{0;1;2\}$ thì hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên $S=\{0;1;2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Biết rằng bất phương trình $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right)\leq 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left(-\infty;a\sqrt{2}+b\right]$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=0$. **B**. $T=1$. **C**. $T=2$. **D**. $T=3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $-1\leq x\leq 1$. Khi đó ta có

$$m\leq\frac{2\sqrt{x^2-x^4}+1+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+1}{|x|+\sqrt{1-x^2}+1}=\frac{2\sqrt{x^2-x^4}+1}{|x|+\sqrt{1-x^2}+1}+1. \quad (1)$$

Vì $-1\leq x\leq 1$ nên ta có thể đặt $x=\sin t$, khi đó biểu thức (1) tương đương

$$m\leq\frac{2\left|\sin t.\cos t\right|+1}{|\sin t|+|\cos t|+1}=\frac{(|\sin t|+|\cos t|)^2}{|\sin t|+|\cos t|+1}.$$

Đặt $u=|\sin t|+|\cos t|$. Xét hàm số $f(u)=\dfrac{u^2}{u+2}$ với $u\in\left(0,\sqrt{2}\right]$ có $f'(u)=\dfrac{u^2+4u}{(u+2)^2}>0$.

Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(0;\sqrt{2}]$.

Suy ra $m\leq f(u)\leq f(\sqrt{2})=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$.

Vậy $a=-1,b=2$ nên $a+b=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 100. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x - m^2}{x - m - 4}$ đồng biến trên khoảng $(2021; +\infty)$. Khi đó, giá trị của S bằng bao nhiêu?

A. 2035144. **B**. 2035145. **C**. 2035146. **D**. 2035143.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m + 4\}$.

$y' = \dfrac{m^2 - 2m - 8}{(x - m - 4)^2}$. Theo đề $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 4. \end{array}\right.$

x	$-\infty$	$m+4$	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	2 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗ 2

Hàm số đồng biến trên $(2021; +\infty) \Leftrightarrow m + 4 \leq 2021$

$\Leftrightarrow m \leq 2017$.

Kết hợp điều kiện ta được $m \in (4; 2017]$.

Khi đó $S = 5 + 6 + \cdots + 2017$

$= \dfrac{(5 + 2017) \cdot 2013}{2} = 2035143.$

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. B	5. D	6. C	7. D	8. C	9. B	10. C
11. B	12. C	13. C	14. A	15. A	16. B	17. A	18. C	19. D	20. C
21. D	22. D	23. D	24. C	25. D	26. B	27. D	28. D	29. B	30. A
31. A	32. D	33. C	34. B	35. D	36. B	37. B	38. D	39. D	40. D
41. D	42. C	43. B	44. A	45. B	46. C	47. A	48. B	49. A	50. B
51. A	52. B	53. D	54. A	55. C	56. C	57. B	58. C	59. C	60. D
61. B	62. C	63. B	64. C	65. B	66. D	67. D	68. C	69. A	70. B
71. B	72. A	73. D	74. C	75. A	76. D	77. D	78. D	79. D	80. C
81. D	82. C	83. B	84. C	85. C	86. C	87. B	88. D	89. D	90. A
91. C	92. C	93. C	94. B	95. B	96. D	97. A	98. A	99. B	100. D

BÀI 3 GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$.

① Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathscr{D}$ nếu

i) $\forall x \in \mathscr{D} : f(x) \le M$;

ii) $\exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

② Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathscr{D}$ nếu

i) $\forall x \in \mathscr{D} : f(x) \ge m$;

ii) $\exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số có giá trị cực tiểu duy nhất, đó cũng là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = -3$ tại $x = 1$. Không có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. □

2 Cách tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Định lí 1. *Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.*

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Nhận xét. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các

đầu mút của đoạn.

Quy tắc Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ta làm như sau:

- ☑ Tìm $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $[a;b]$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- ☑ Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)$.
- ☑ Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó

$$M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 2. [Cao Thành Thái][2D1B3] Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[-1;2]$ ta có: $y(-1) = 15$; $y(1) = -5$; $y(2) = 6$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y = 15$ tại $x = -1$ và $\min\limits_{[-1;2]} y = -5$ tại $x = 1$. □

⚠ *Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.*

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;1)$, ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Bảng biến thiên

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;1)$ hàm số không có giá trị lớn nhất, cũng không có giá trị nhỏ nhất. □

Một số phương pháp khác tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$.

① Phương pháp miền giá trị

- ☑ Xem $y = f(x)$ là phương trình đối với ẩn số x và y là tham số;
- ☑ Tìm điều kiện của y để phương trình $y = f(x)$ có nghiệm;
- ☑ Từ điều kiện trên, biến đổi đưa đến dạng $m \le y \le M$. Xét dấu "=" xảy ra và kết luận.

② Phương pháp đạo hàm

- ☑ Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$;
- ☑ Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

③ Phương pháp dùng bất đẳng thức

- ☑ Dùng các bất đẳng thức quen thuộc để chứng minh $f(x) \le M$ hoặc $f(x) \ge m$.
- ☑ Phải chỉ ra tồn tại $x_1, x_2 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Khi đó

$$M = \max_{\mathscr{D}} f(x); m = \min_{\mathscr{D}} f(x).$$

❸ Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 36x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x &= 0 \\ x &= \pm 3. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[-1; 4]$ ta có: $f(-1) = -15$; $f(3) = -79$; $f(4) = -30$.

Vậy $\max\limits_{[-1;4]} f(x) = -15$ tại $x = -1$ và $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -79$ tại $x = 3$. □

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^6 - 3x^4 + \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x^5 - 12x^3 + \dfrac{9}{2}x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^5 - 12x^3 + \frac{9}{2}x = 0 \Leftrightarrow x(12x^4 - 24x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x &= 0 \\ x^2 &= \dfrac{3}{2} \\ x^2 &= \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x &= 0 \\ x &= \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x &= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[-1;1]$ ta có: $y(-1)=\dfrac{1}{2}$; $y\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$; $y(0)=\dfrac{1}{4}$; $y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$; $y(1)=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=\dfrac{3}{4}$ tại $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=\dfrac{1}{4}$ tại $x=0$. □

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{1}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lời giải.

Với $x\neq 0$ ta có: $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ ta có: $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$; $y(1)=2$; $y(2)=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y=\dfrac{5}{2}$ tại $x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=2$ và $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y=2$ tại $x=1$. □

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ trên đoạn $[-2;3]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Trên đoạn $[-2;3]$ ta có: $f(-2)=\sqrt{17}$; $f(2)=1$; $f(3)=\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=\sqrt{17}$ tại $x=-2$ và $\min\limits_{[-2;3]} f(x)=1$ tại $x=2$. □

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$. □

Ví dụ 9. Cho bất phương trình $(x+2)(x+4)(x^2+6x+10) \geq m$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = (x+2)(x+4)(x^2+6x+10) = (x^2+6x+8)(x^2+6x+10)$.
Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có: $f'(x) = (2x+6)(2x^2+12x+18) = 4(x+3)^3$.

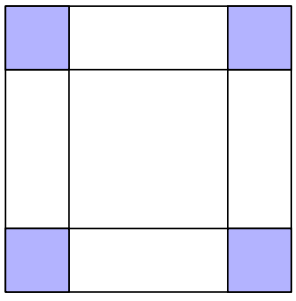
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

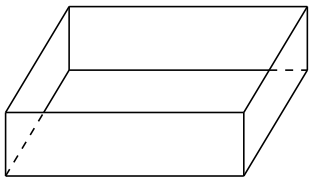
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq -1$. □

Ví dụ 10. Cho một tấm nhôm hình vuông có chu vi là 36 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Khi đó, khối hộp nhận được có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?





Lời giải.

Gọi x (cm) là độ dài cạnh hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \dfrac{9}{2}\right)$.
Khi đó, thể tích khối hộp nhận được là $V(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$.
Ta có $V'(x) = 12x^2 - 72x + 81$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow$
Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	27	↘	

□

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Phương pháp giải. Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ta thực hiện như sau:

- ☑ Tìm các điểm $x_i \in (a;b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định.
- ☑ Tính các giá trị $f(a), f(x_i), f(b)$.
- ☑ Tìm số lớn nhất M, số nhỏ nhất m trong các số trên.
  Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x), m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 6x - 12; y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (-1;2) \\ x = -2 \notin (-1;2). \end{array}\right.$

Ta có $y(-1) = 15, y(1) = 5, y(2) = 6$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y = 15 = y(-1), \min\limits_{[-1;2]} y = 5 = y(1)$. □

Ví dụ 12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ trên đoạn $[-2;3]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-2;3]$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-2;3) \\ x = \pm 1 \in (-2;3). \end{array}\right.$

Ta có $y(-2) = 8, y(3) = 63, y(0) = 0, y(\pm 1) = -1$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y = 63 = y(3), \min\limits_{[-2;3]} = -1 = y(\pm 1)$. □

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};4\right]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};4\right]$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Ta có $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}, y(0)=-2, y(4)=\frac{6}{5}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};4\right]} y=\frac{6}{5}=y(4)$, $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};4\right]}=-2=y(0)$. □

Ví dụ 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ với m là tham số thực. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} y+\min\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Do hàm số đã cho liên tục và đơn điệu trên $[1;2]$ nên $\max\limits_{[1;2]} y+\min\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{2+m}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow$ $m=5$. □

Ví dụ 15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}; y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $y(-1)=0, y(1)=\sqrt{2}, y(2)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y=\sqrt{2}=y(1)$, $\min\limits_{[-1;2]} y=0=y(1)$. □

Ví dụ 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1$. Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=t+\sqrt{2-t^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Đạo hàm: $y'=1-\dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}=\dfrac{\sqrt{2-t^2}-t}{\sqrt{2-t^2}}; y'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-t^2}=t\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0\\2-t^2=t^2\end{cases}\Leftrightarrow t=1$.

Ta có $y(-1)=0, y(1)=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng 0. □

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a$ với a là tham số thực. Tìm a để $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=2$.

Lời giải.

Đạo hàm: $f'(x)=8x-4a; f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$. Xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu $\dfrac{a}{2}>0\Leftrightarrow a>0$ thì $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(0)=a^2-2a$.

Theo đề ta có $a^2-2a=2\Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{3}$. Vì $a>0$ nên chọn $a=1+\sqrt{3}$.

TH2: Nếu $\dfrac{a}{2}<-2\Leftrightarrow a<-4$ thì $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(-2)=a^2-6a+16$.

Theo đề ta có $a^2-6a+16=0\Leftrightarrow a^2-6a+14=0$ (vô nghiệm).

TH3: Nếu $0\le\dfrac{a}{2}\le 0\Leftrightarrow -4\le a\le 0$ thì $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-2a$.

Theo đề ta có $-2a=2\Leftrightarrow a=-1$ thỏa $-4\le a\le 0$.

Vậy $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=2$ khi $a=1+\sqrt{3}$ và $a=-1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải.

Ta có $\max\limits_{[-1;2]} y=3=y(2)$, $\min\limits_{[-1;2]} y=-1=y(1)$. □

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ trên tập xác định $\mathscr{D}$ của nó.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Ta có $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-2$. □

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^6+4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2, 0\le t\le 1$ ta đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t)=t^3+4(1-t)^3$ trên đoạn $[0;1]$.

Đáp số: Giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{4}{9}$. □

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\left(\cos x-1\right)}{\cos 2x+2\cos x+5}$.

Lời giải.

Biến đổi hàm số đã cho thành $y=\dfrac{\cos x-1}{\cos^2 x+\cos x+2}$.

Đặt $t=\cos x, -1\le t\le 1$, ta đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{t-1}{t^2+t+2}, -1\le t\le 1$.

Đáp số: Giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. □

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\sin^6 x+\dfrac{3}{4}\cos 2x$.

Lời giải.

Đưa hàm số về dạng $f(x)=2\sin^6 x+\dfrac{3}{4}\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^6 x-\dfrac{3}{2}\sin^2 x+\dfrac{3}{4}$.

Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1$ ta được hàm số $g(t)=2t^3-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{4}$.

Từ đó tìm được giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{5}{4}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{4}$. □

Bài 6. Cho $x\ge 0, y\ge 0$ thỏa $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}$$

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{x^2+x+y^2+y}{xy+x+y+1}=\dfrac{(x+y)^2-2xy+x+y}{x+y+1+xy}=\dfrac{2-2xy}{2+xy}$.

Đặt $t=xy$, vì $0\le xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$ nên $0\le t\le\dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2-2t}{2+t}$ với $0\le t\le\dfrac{1}{4}$. Ta có $f'(t)=\dfrac{-6}{(2+t)^2}<0, \forall t\in 0\le t\le\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\max P=\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=1, \min P=\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=\dfrac{2}{3}$. □

DẠNG 2. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

Phương pháp giải. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ ta lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$.

Ví dụ 18. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-6$ trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, ta chỉ xét trên khoảng $(-1;1)$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-4x+1; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{1}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-10	↗	$-\frac{158}{27}$	↘	-6

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(-1;1)} y = -\dfrac{158}{27} = y\left(\dfrac{1}{3}\right)$. □

Ví dụ 19. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3(1-x)^2$ trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, ta chỉ xét trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Đạo hàm: $f'(x) = x^2(1-x)(3-5x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = \dfrac{3}{5}$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{32}$	↗	$\frac{108}{3215}$	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên cho ta:

$\min\limits_{\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(x) = f(1) = 0$ và $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(x)$ không tồn tại vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. □

Ví dụ 20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(-2) = -\dfrac{1}{4}$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(2) = \dfrac{1}{4}$. □

Ví dụ 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [2; +\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} = \dfrac{2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}}, x > 2$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4(x-2)=x+1 \Leftrightarrow x=3>2$.
Bảng biến thiên:

x	2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	3	↗	

Vậy $\min\limits_{[2;+\infty)} f(x)=f(3)=3$. □

Ví dụ 22. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2+6z^3$.

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2+y^2 \geq 2xy=\dfrac{2}{z}$. Khi đó $T \geq \dfrac{2}{z}+6z^3$.
Xét hàm số $f(z)=\dfrac{2}{z}+6z^3$ với $z>0$.
Đạo hàm $f'(z)=-\dfrac{2}{z^2}+18z^2$; $f'(z)=0 \Leftrightarrow 18z^2=\dfrac{2}{z^2} \Leftrightarrow z^4=\dfrac{1}{9} \Rightarrow z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (vì $z>0$).
Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		↘	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(z) \geq f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ nên $T \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \min T=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
Dấu "=" xảy ra khi $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x=y=\sqrt[4]{3}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x^4-4x^3+1$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

Đáp số: $\min\limits_{\mathbb{R}} y=y(1)=0$. □

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Đáp số: $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=3$. □

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{6x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Đạo hàm: $f'(x)=\dfrac{x+6}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Đáp số: $\min\limits_{[2;+\infty)} f(x)=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}=f(2)$. □

Bài 10. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$.

Lời giải.

TH1: nếu $x=0,y=0$ (loại).

TH2: nếu $x\neq 0,y=0$ thì $P=4$.

TH3: nếu $y\neq 0$ thì $P=\dfrac{4(x-y)^2}{x^2+2xy+3y^2}=\dfrac{4\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{2x}{y}+3}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta có $P=\dfrac{4(t-1)^2}{t^2+2t+3}$. Suy ra $\max P=12$. □

DẠNG 3. Sử dụng GTLN, GTNN để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

Phương pháp giải. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$. Khi đó:

1. Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[a;b]\Leftrightarrow \min\limits_{[a;b]} f(x)\le m\le \max\limits_{[a;b]} f(x)$.
2. Bất phương trình $f(x)\ge m$ có nghiệm thuộc đoạn $[a;b]\Leftrightarrow \max\limits_{[a;b]} f(x)\ge m$.
3. Bất phương trình $f(x)\le m$ có nghiệm thuộc đoạn $[a;b]\Leftrightarrow \min\limits_{[a;b]} f(x)\le m$.
4. Bất phương trình $f(x)\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[a;b]\Leftrightarrow \min\limits_{[a;b]} f(x)\ge m$.
5. Bất phương trình $f(x)\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[a;b]\Leftrightarrow \max\limits_{[a;b]} f(x)\le m$.

Ví dụ 23. Giải phương trình $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}$ với $2\le x\le 4$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{(4-x)^3}}\right]=0\Leftrightarrow x-2=4-x\Leftrightarrow x=3$.

Bảng biến thiên:

x	2		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(2)$	↗	2	↘	$f(4)$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \le f(3) = 2, \forall x \in [2;4]$
$\Rightarrow$ phương trình $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$ có nghiệm duy nhất $x = 3$. □

Ví dụ 24.
a) Tìm m để phương trình $x + \sqrt{2x^2+1} = m$ có nghiệm.
b) Tìm m để $x + \sqrt{2x^2+1} > m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x + \sqrt{2x^2+1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	↗	$+\infty$

a) Nhìn bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
b) $f(x) = x + \sqrt{2x^2+1} > m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m < \min f(x) \Leftrightarrow m < f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

□

Ví dụ 25. Tìm nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $\pi^2 x - \dfrac{16}{3}x^3 = \dfrac{\pi^2}{6\sin 2x}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \pi^2 x - \dfrac{16}{3}x^3$ và $g(x) = \dfrac{\pi^2}{6\sin 2x}$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Ta có $f'(x) = \pi^2 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi^3}{6}$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $\max f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi^3}{6}$.

Mặt khác $g(x) = \dfrac{\pi^2}{6\sin 2x} \geq \dfrac{\pi^3}{6}, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \leq \dfrac{\pi^3}{6} \leq g(x)$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = g(x)$ có đúng 1 nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4}$. □

Ví dụ 26. Tìm m để bất phương trình $m\sqrt{2x^2+9} < x + m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$m\sqrt{2x^2+9} < x + m \Leftrightarrow m\left(\sqrt{2x^2+9} - 1\right) < x \Leftrightarrow m < f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9} - 1}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{9 - \sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x^2+9}\left(\sqrt{2x^2+9} - 1\right)}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+9} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 6.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2 + \dfrac{9}{x^2}} - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{2 + \dfrac{9}{x^2}} - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}.$

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $\min f(x) = f(-6) = -\dfrac{3}{4}$.

Để $f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > m \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{4}$. □

Ví dụ 27. Tìm m để phương trình $2 + 2\sin 2x = m(1+\cos x)^2$ (1) có nghiệm $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải.

Do $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \dfrac{x}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên đặt $\tan\dfrac{x}{2} = t \in [-1; 1]$

$\Rightarrow \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)^2 = (1+\cos x)^2$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = m\left(1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \Leftrightarrow f(t) = (2t+1-t^2)^2 = 2m$ (2)

Ta có $f'(t) = 2(2t+1-t^2)(2-2t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1-\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Nhìn bảng biến thiên suy ra: Để (2) có nghiệm $t \in [-1;1]$ thì $\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t) \le 2m \le \max\limits_{t\in[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow 0 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

Vậy để (1) có nghiệm $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $m \in [0;2]$. □

Ví dụ 28. Tìm $m \ge 0$ để hệ $\begin{cases} \sin x\cos y = m^3 - m^2 - 6m + \dfrac{35}{4} \\ \cos x \sin y = m^2 - 6m + \dfrac{33}{4} \end{cases}$ (1) có nghiệm.

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\cos y + \cos x\sin y = m^3 - 12m + 17 \\ \sin x\cos y - \cos x\sin y = m^3 - 2m^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = m^3 - 12m + 17 \\ \sin(x-y) = m^3 - 2m^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Xét $f(m) = m^3 - 12m + 17$. Ta có: $f'(m) = 3m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 2 > 0$.

Bảng biến thiên:

m	0		2		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	17	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(m) \ge f(2) = 1, \forall m \ge 0$. Mặt khác do $\sin(x+y) \le 1$ nên để hệ (2) có nghiệm thì $m = 2$, khi đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (3).

Ta thấy hệ (3) nhận $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ làm nghiệm. Vậy (1) có nghiệm khi $m = 2$. □

Ví dụ 29. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ x^3 - 2x\,|x-2| - m^2 + 4m \ge 0 \end{cases}$ (1) có nghiệm.

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ f(x) = x^3 - 2x\,|x-2| \ge m^2 - 4m \end{cases} \quad (2)$$

Ta có $f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x-4\ ,\forall x\in[0;2)\\ 3x^2-4x+4\ ,\forall x\in(2;3]\end{cases}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{3}$		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	CT	↗		↗	21

Nhìn bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{x\in[0;3]}f(x)=f(3)=21$.

Để (2) có nghiệm thì $\max\limits_{x\in[0;3]}f(x)\geq m^2-4m\Leftrightarrow m^2-4m\leq 21\Leftrightarrow -3\leq m\leq 7$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Tìm m để phương trình $4x-2+3\sqrt{21-4x-x^2}=m$:

a) Có nghiệm.

b) Có đúng 1 nghiệm.

c) Có 2 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=[-7;3]$. Xét hàm số $f(x)=4x-2+3\sqrt{21-4x-x^2}$, ta có $f'(x)=4-\dfrac{3(2+x)}{\sqrt{21-4x-x^2}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\\ x=2.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-7		-6		2		3
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗	15	↘	
	-30						10

Nhìn bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta suy ra:

a) Phương trình đã cho có nghiệm khi $\min\limits_{x\in[-7;3]}f(x)\leq m\leq\max\limits_{x\in[-7;3]}f(x)\Leftrightarrow -30\leq m\leq 15$.

b) Phương trình có đúng 1 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}-30\leq m<10\\ m=15.\end{array}\right.$

c) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $10\leq m<15$.

□

Bài 12. Tìm m để phương trình $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+(5-2m)\cos 2x+9-3m=0$:

a) Có nghiệm.

b) Có đúng 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Lời giải.

Đặt $t=\cos 2x$ với $-1\le t\le 1$. Phương trình trở thành $\dfrac{2t^2+5t+11}{2t+3}=m$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+5t+11}{2t+3}, -1\le t\le 1$. Ta có $f'(t)=\dfrac{4t^2+12t-7}{(2t+3)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{7}{2}\ \text{(loại)} \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	-1		$\dfrac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	8	$\searrow$	$\dfrac{7}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{18}{5}$

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra:

a) Phương trình có nghiệm khi $\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)\Leftrightarrow \dfrac{7}{2}\le m\le 8$.

b) Khi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ thì $2x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ hay $-\dfrac{1}{2}\le t\le 1$. Phương trình có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ khi phương trình ẩn t có 2 nghiệm t thuộc đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$ hay $\dfrac{7}{2}<m\le\dfrac{18}{5}$.

□

Bài 13. Tìm m để bất phương trình: $-x^3+3mx-2<\dfrac{-1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$.

Lời giải.

BPT $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\dfrac{1}{x^3}+2, \forall x\ge 1\Leftrightarrow 3m<x^2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x}=f(x), \forall x\ge 1$.

Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0, \forall x\ne 0$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m, \forall x\ge 1\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m\Leftrightarrow m<\dfrac{2}{3}$. □

Bài 14. Tìm m để phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)$ có nghiệm.

Lời giải.

Đối với bài toán này, nếu ta tính $f'(x)$ rồi xét dấu thì thao tác rất phức tạp, dễ dẫn đến sai sót. Để đơn giản, ta làm như sau:

TXĐ: $\mathscr{D}=[0;4]$.

Đặt $g(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}>0\Rightarrow g'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}>0,$

$h(x)=\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}>0\Rightarrow h'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}<0.$

Suy ra $g(x)>0$ và tăng còn $h(x)>0$ và giảm hay $\dfrac{1}{h(x)}>0$ và tăng

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ tăng $\Rightarrow f(x)=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in[0;4]}f(x)\le m\le \max\limits_{x\in[0;4]}f(x)\Leftrightarrow f(0)\le m\le f(4)\Leftrightarrow$ $2\left(\sqrt{15}-\sqrt{12}\right)\le m\le 12.$ □

Bài 15. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10.\end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=u\\ y+\dfrac{1}{y}=v\end{cases}$. Ta có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=u^3-3u$

và $|u|=\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=|x|+\left|\dfrac{1}{x}\right|\ge 2\sqrt{|x|\cdot\left|\dfrac{1}{x}\right|}=2,\ |v|=\left|y+\dfrac{1}{y}\right|=|y|+\left|\dfrac{1}{y}\right|\ge 2\sqrt{|y|\cdot\left|\dfrac{1}{y}\right|}=2.$

Khi đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases}u+v=5\\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ uv=8-m\end{cases}\Leftrightarrow u,v$ là nghiệm của phương trình bậc hai $f(t)=t^2-5t+8=m.$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=m$ có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $\begin{cases}|t_1|\ge 2\\ |t_2|\ge 2.\end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘		↘	22	↘	$\dfrac{7}{4}$	↗	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra: Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{7}{4}\le m\le 2\\ m\ge 22.\end{array}\right.$ □

DẠNG 4. Sử dụng GTLN, GTNN để chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp giải. Kiến thức lý thuyết sử dụng trong dạng này tương tự như trong phần sử dụng GTLN, GTNN để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.

Ví dụ 30. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $T=\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}=\dfrac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}+\dfrac{b^2}{b\left(1-b^2\right)}+\dfrac{c^2}{c\left(1-c^2\right)}$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(1-x^2\right)$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=1-3x^2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}>0$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x)\leq\dfrac{2}{3\sqrt{3}},\forall x>0$.

Khi đó ta có $T=\dfrac{a^2}{f(a)}+\dfrac{b^2}{f(b)}+\dfrac{c^2}{f(c)}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. □

Ví dụ 31. Cho $\begin{cases} 2y\geq x^2 \\ y\leq -2x^2+3x \end{cases}$. Chứng minh rằng $x^2+y^2\leq 2$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2y\geq x^2 \\ y\leq -2x^2+3x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y\geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2}\leq -2x^2+3x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y\geq 0 \\ 5x^2-6x\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y\geq 0 \\ 0\leq x\leq\dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Ta có $x^2+y^2\leq f(x)=x^2+\left(-2x^2+3x\right)^2$. Ta sẽ chứng minh $f(2)\leq 2$. Thật vậy, biến đổi $f(x)=4x^4-12x^3+10x^2\Rightarrow f'(x)=4x(x-1)(x-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$\dfrac{6}{5}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f\left(\dfrac{6}{5}\right)$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $\max f(x)=f(1)=2\Rightarrow x^2+y^2\leq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Cho $x, y, z \in (0; 4]$, $x \le y; x \le z$ và thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$$

Lời giải.

Xét $P = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$.

Ta có $f(x, y, z) - f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) = y^2 + z^2 + y + z - 2(yz + xy + zx) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz} = (y - z)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 = \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left(y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right) \ge 0$, vì $x \le y; x \le z$.

Đặt $t = \sqrt{yz} \Rightarrow x = \dfrac{1}{t^2}, t = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ge \dfrac{1}{2}$. Khi đó $f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) = f\left(\dfrac{1}{t^2}, t, t\right) = \dfrac{1}{t^4} + \dfrac{1}{t^2} + 2t - \dfrac{4}{t} = g(t)$.

Ta có $g'(t) = \left(2 + \dfrac{4}{t^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{t^3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(t)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min P = \min g(t) = g(1) = 0$ xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

Bài 17. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \ge 4$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min(x, y, z) \Rightarrow 3x \le x + y + z = 3 \Rightarrow x \le 1$.

Khi đó ta có $P - 4 = x^2 + (y + z)^2 - 2yz + xyz - 4 = (x - 2)yz + x^2 + (3 - x)^2 - 4 = f(t) = (x - 2)t + 2x^2 - 6x + 5; 0 \le t = yz \le \left(\dfrac{y + z}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3 - x}{2}\right)^2$.

Vậy ta tìm GTNN của $f(t)$ trên đoạn $\left[0; \left(\dfrac{3 - x}{2}\right)^2\right]$, ta có $f(t)$ là hàm số nghịch biến do $x - 2 < 0$.

Vậy $P - 4 = f(t) \ge f\left[\left(\dfrac{3 - x}{2}\right)^2\right] = \dfrac{1}{4}(x - 1)^2(x + 2) \ge 0 \Rightarrow P \ge 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. □

Bài 18. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2+b^2+c^2=5$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4$ $(*)$.

Đặt vế trái của BĐT $(*)$ là P.

Nếu $ab+bc+ca<0$ thì $P \leq 0$, ta có điều phải chứng minh.

Xét $ab+bc+ca \geq 0$, đặt $x=ab+bc+ca$.

Ta có: $(a-b)(b-c) \leq \left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \dfrac{1}{4}(a-c)^3$.

Mặt khác ta có: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \dfrac{1}{2}(a-b)^2+\dfrac{1}{2}(b-c)^2+\dfrac{1}{2}(a-c)^2 \geq \dfrac{1}{2}(a-c)^2+\dfrac{1}{4}(a-b+b-c)^2$.

Suy ra $5-x \geq \dfrac{3}{4}(a-c)^2 \Rightarrow a-c \leq \sqrt{\dfrac{4}{3}(5-x)}$; $0 \leq x \leq 5$.

Suy ra $P \leq \dfrac{1}{4}x\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}(5-x)}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0;5]$

Ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{5-x}\cdot\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{5}{3}x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(2)=4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$. □

DẠNG 5. Ứng dụng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số vào bài toán thực tế

Phương pháp giải. Để giải quyết được các bài toán ở dạng này, ta cần thực hiện các bước sau:

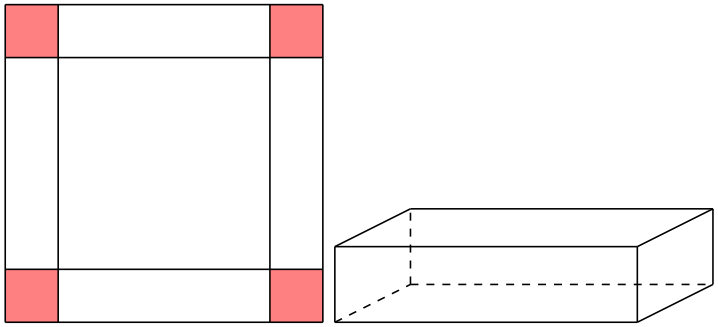
Bước 1: Phân tích giả thiết và gọi biến (chẳng hạn x) có liên quan.

Bước 2: Tìm điều kiện của x.

Bước 3: Lập hàm $f(x)$ theo giả thiết.

Bước 4: Tìm max, min của $f(x)$ và kết luận.

Ví dụ 32. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được thể tích lớn nhất.



Lời giải.

Khi gập tấm nhôm lại lại như hình vẽ ta được một cái hộp không nắp có đáy là hình vuông cạnh $12-2x\,(0<x<6)$. Khi đó, thể tích hình hộp nhận được là:

$$V=x\,(12-2x)\,(12-2x)=x(12-2x)^2, \forall x\in(0;6)$$

Xét hàm $f(x)=x\,(12-2x)^2\,, \forall x\in(0;6)$.

Ta có: $f'(x)=(12-2x)^2-4x\,(12-2x)=(12-2x)\,(12-6x)$.

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in(0;6)\\ x=6\notin(0;6)\,.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	128	$\searrow$	$f(6)$

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra $V_{\max}=128$ cm^3 khi $x=2$. □

Ví dụ 33. Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài d (m) và chiều rộng r (m) với $d=2r$. Chiều cao bể nước là h (m) và thể tích bể là 2 m^3. Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

Lời giải.

Gọi $x\,(x>0)$ là chiều rộng của đáy. Suy ra thể tích bể nước bằng

$$V=2x^2\cdot h=2\Leftrightarrow h=\frac{1}{x^2}$$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là $S = 6x \cdot h + 2x^2 = \dfrac{6}{x} + 2x^2\ (x > 0)$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6}{x} + 2x^2$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-6}{x^2} + 4x = \dfrac{-6 + 4x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$. Vậy chiều cao cần xây là

$$h = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\ (\text{m})$$

□

Ví dụ 34. Một đại lý xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ có đáy hình tròn bằng thép có thể tích 49π (m^3) và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi giá tiền thấp nhất mà đại lý phải trả gần đúng với số tiền nào nhất?

Lời giải.

Gọi bán kính đáy là x (m) $(x > 0)$, chiều cao bồn chứa là h (m).

Khi đó thể tích chứa của bồn là $V = \pi x^2 \cdot h = 49\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{49}{x^2}$ (m).

Do là bồn chứa dầu nên phải có nắp nên diện tích cần xây của bồn chứa là:

$$2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h = 2\pi x^2 + \frac{98\pi}{x}\ (\text{m}^2)$$

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì diện tích xây cũng phải thấp nhất.

Xét hàm số $f(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{98\pi}{x}\ (x > 0)$.

Ta có $f'(x) = 4\pi x - \dfrac{98\pi}{x^2} = \dfrac{4\pi x^3 - 98\pi}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{49}{2}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{49}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{49}{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra GTNN của $f(x)$ là $f\left(\sqrt[3]{\dfrac{49}{2}}\right) \approx 159{,}005$ (m^2). □

Ví dụ 35. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng là $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm với giá x là: $\dfrac{(x-400)\cdot 2}{20} = \dfrac{x-400}{10}$ (phòng).

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \dfrac{x-400}{10} = 90 - \dfrac{x}{10}$ (phòng).

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x) = x\left(90 - \dfrac{x}{10}\right) = -\dfrac{x^2}{10} + 90x$ (ngàn đồng).

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{x}{5} + 90 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(400)$	$\nearrow$	20250	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$. Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 20.250.000 đồng. □

Ví dụ 36. Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu

thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe $(0 \le x \le 4)$.
Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $200x + 600$ (chiếc).
Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là:

$$(200x + 600)(4 - x)$$

Xét hàm số $f(x) = (200x + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ $(0 \le x \le 4)$.
Ta có $f'(x) = 200(-2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	2450	$\searrow$	$f(4)$

Nhìn bảng biến thiên ta suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x (triệu đồng) là giá tua. Điều kiện: $0 < x < 2$.
Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$.
Số người tham gia tăng thêm nếu bán với giá x là: $\dfrac{(2 - x)\,20}{0{,}1} = 400 - 200x$.
Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150 + (400 - 200x) = 550 - 220x$.
Tổng doanh thu là: $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$.
Ta có: $f'(x) = -400x + 550 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{8}$.
Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{11}{8}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$378{,}125$	↘	$f(2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{11}{8} = 1{,}375$.
Vậy công ty cần đặt giá tua 1.375.000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378.125.000 đồng. □

Bài 20. Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 384 m^2 để xây nhà. Nhưng vợ ông muốn có khuôn viên sân vườn đẹp nên ông mua thêm về hai phía chiều dài mỗi chiều 3 m và về hai phía chiều rộng mỗi chiều 2 m. Vậy, để ông A mua được mảnh đất có diện tích nhỏ nhất (tiết kiệm chi phí) thì mảnh đất đó chu vi là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi x, y là chiều dài, chiều rộng phần đất xây nhà. Ta có

$$\begin{cases} S = (x+6)(y+4) \\ x \cdot y = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = (x+6)\left(\dfrac{384}{x} + 4\right) \\ y = \dfrac{384}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $S(x) = (x+6)\left(\dfrac{384}{x} + 4\right)$ với $x > 0$.
Ta có $S'(x) = \dfrac{384}{x} + 4 - \dfrac{384}{x^2}(x+6) = \dfrac{384x + 4x^2 - 384x - 2304}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 2304}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 24$.
Bảng biến thiên:

x	0		24		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	↘	600	↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra $S(x)$ nhỏ nhất bằng 600 khi $x = 24 \Rightarrow y = 16$.
Vậy mảnh đất cần mua có chiều dài là: $24 + 6 = 30$ (m).
Chiều rộng là: $16 + 4 = 20$ (m).
Khi đó chu vi mảnh đất là 100 (m). □

Bài 21. Một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính bằng R. Người ta phải cắt đĩa theo một hình quạt, sau đó gấp lại thành hình nón để làm một cái phễu. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để thể tích cái phễu lớn nhất?

Lời giải.

Gọi $0 < x < 2\pi R$ là độ dài đường tròn đáy của cái phễu (bằng chu vi đĩa tròn trừ đi độ dài cung hình quạt bị cắt đi) $\Rightarrow x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$ (r là bán kính đường tròn đáy hình nón).

Đường sinh của hình nón chính bằng bán kính đĩa là R.

Đường cao hình nón: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}} = \dfrac{x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}.$

$V'(x) = \dfrac{-3x^3 + 8\pi^2R^2x}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}}$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{2\sqrt{6}\pi R}{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{2\sqrt{6}\pi R}{3}$		$2\pi R$
$V'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$V\left(\dfrac{2\sqrt{6}\pi R}{3}\right)$	$\searrow$	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy V đạt GTLN khi $x = \dfrac{2\sqrt{6}\pi R}{3}$.

Suy ra, độ dài cung hình quạt bị cắt là: $2\pi R - \dfrac{2\sqrt{6}\pi R}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi R - \dfrac{2\sqrt{6}\pi R}{3}}{2\pi R} \cdot 360^\circ \approx 66^\circ.$ □

Bài 22. Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/h) thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu $\Rightarrow$ thời gian tàu đi 1 km là $\dfrac{1}{x}$ giờ.

Phần chi phí thứ nhất là: $480 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{480}{x}$ (ngàn).

Giả sử phần chi phí thứ 2 kí hiệu là y thì $y = kx^3 \Rightarrow k = \dfrac{y}{x^3}$.

Với $x = 10 \Rightarrow y = \dfrac{1}{10} \cdot 30 = 3$ (ngàn) $\Rightarrow k = \dfrac{3}{1000} = 0{,}003 \Rightarrow y = 0{,}003x^3$.

Do đó, tổng chi phí là $T = \dfrac{480}{x} + 0{,}003x^3$.

Ta có $T'(x) = \dfrac{-480 + 0{,}009x^4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\dfrac{160000}{3}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[4]{\frac{160000}{3}}$		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$T\left(\sqrt[4]{\frac{160000}{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta ta thấy T đạt GTNN khi $x = \sqrt[4]{\dfrac{160000}{3}} \approx 15$ (km/h). □

Bài 23. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \dfrac{-1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải.

Ta có vận tốc $v(t) = S'(t) = -t^3 + 6t - 2 \Rightarrow v'(t) = -3t^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} < 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	$v(0)$	$\nearrow$	$v\left(\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = \sqrt{2}$. □

Bài 24. Một tấm thiếc hình chữ nhật dài 45 (cm), rộng 24 (cm) được làm thành một cái hộp không nắp bằng cách cắt bốn hình vuông bằng nhau từ mỗi góc và gấp mép lên. Hỏi các hình vuông được cắt ra có cạnh là bao nhiêu để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x (cm) $(0 < x < 12)$ là cạnh của các hình vuông bị cắt rời ra. Khi đó, chiều cao của hộp là x, chiều dài là $45 - 2x$ và chiều rộng là $24 - 2x$.

Thể tích $V(x) = x\,(45 - 2x)\,(24 - 2x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x$.

Suy ra $V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080$.

Cho $V'(x) = 0$, suy ra được giá trị x cần tìm là $x = 5$.

$V''(x) = 24x - 276 \Rightarrow V''(5) = -156 < 0$. Do đó $x = 5$ là điểm cực đại. Vậy các hình vuông được cắt ra có cạnh bằng 5 cm thì hộp nhận được có thể tích lớn nhất. □

Bài 25. Một sợi dây có chiều dài 28 (m) được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

Lời giải.

Gọi l $(0 < l < 28)$ là chiều dài đoạn dây làm thành hình vuông. Khi đó đoạn dây làm thành hình tròn có chiều dài là $28 - l$.

Cạnh hình vuông là $\dfrac{l}{4}$, bán kính hình tròn là $\dfrac{1}{2\pi}(28 - l)$.

Tổng diện tích $S(l) = \dfrac{l^2}{16} + \dfrac{1}{4\pi}(28 - l)^2$, suy ra $S'(l) = \dfrac{l}{8} - \dfrac{1}{2\pi}(28 - l)$.

Cho $S'(l) = 0$, ta được $l = \dfrac{112}{4 + \pi}$, suy ra chiều dài đoạn dây còn lại là $\dfrac{28\pi}{4 + \pi}$.

Kiểm tra lại bằng đạo hàm cấp 2, $S''\left(\dfrac{112}{\pi + 4}\right) > 0$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{196}{4 + \pi}$ khi $l = \dfrac{112}{4 + \pi}$. □

Bài 26. Một hãng dược phẩm cần một số lọ đựng thuốc dạng hình trụ với dung tích 16π (cm^3). Tính bán kính đáy R của lọ để ít tốn nguyên liệu sản xuất lọ nhất?

Lời giải.

Ta có $V = \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \dfrac{16}{R^2}$ (cm^2).

Để ít tốn nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần của lọ phải nhỏ nhất. Do đó ta có:

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R^2}$$

Xét hàm số $S(R) = 2\pi R^2 + \dfrac{32\pi}{R^2}$ với $R > 0$.

Ta có $S'(R) = \dfrac{4\pi x^4 - 64\pi}{x^3} = 0 \Leftrightarrow R = 2$.

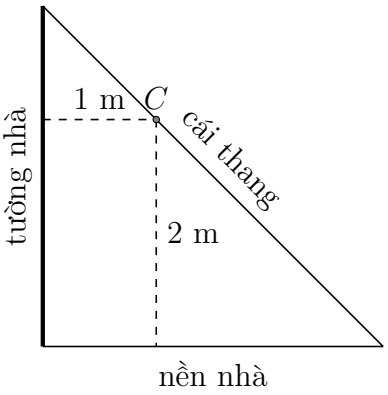
Bảng biến thiên:

R	0		2		$+\infty$
$S'(R)$		$-$	0	$+$	
$S(R)$	$+\infty$	$\searrow$	16π	$\nearrow$	$+\infty$

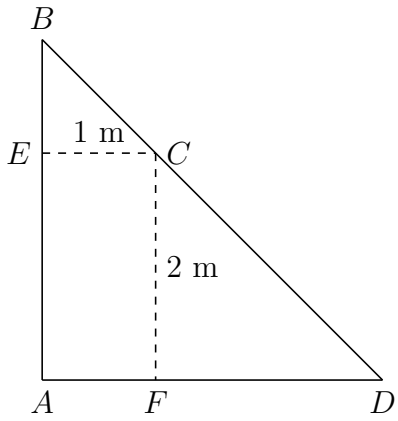
Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra $S(R)$ nhỏ nhất bằng $16\pi \approx 50{,}24$ (cm^2) khi $R = 2$. □

Bài 27.

Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao 2 m so với nền nhà và điểm C cách tường nhà 1 m (như hình vẽ bên). Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).



Lời giải.



Đặt $BC = x$.

Ta có $\triangle BCE \backsim \triangle CDF \Rightarrow \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{CE}{DF} \Leftrightarrow \dfrac{x}{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{CD^2-4}} \Leftrightarrow x^2\left(CD^2-4\right) = CD^2 \Leftrightarrow CD^2 = \dfrac{4x^2}{x^2-1} \Leftrightarrow CD = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Vậy chi phí sản xuất thang là $f(x) = \left(x + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\right).3.10^5$ với $x > 1$.

Ta có $f'(x) = 3 \cdot 10^5 \left(1 + \dfrac{2\sqrt{x^2-1} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\right) = 3 \cdot 10^5 \left(1 + \dfrac{-2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-1\right)^3} = 2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt[3]{4}+1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt[3]{4}+1}$.

Bảng biến thiên:

x	1		$\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left[\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}\right]$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra chi phí thấp nhất để sản xuất thang là $f\left[\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}\right] \approx 1.249.000$ đồng. □

Bài 28. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m. Hãy tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ là nhỏ nhất.

Lời giải.

$y = x^4 - 2x^2$. TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là gốc tọa độ $O(0;0)$. Các điểm cực tiểu là $A(-1;-1)$ và $B(1;-1)$.
Phương trình đường thẳng Δ thỏa đề bài có dạng $y = mx$, hay $mx - y = 0$.
$S = d[A;(\Delta)] + d[B;(\Delta)] = \dfrac{|-m+1|}{\sqrt{m^2+1}} + \dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{|-m+1| + |m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$.
$S^2 = \dfrac{2(m^2+1) + 2|-m^2+1|}{m^2+1} = 2 + 2.\dfrac{|-m^2+1|}{m^2+1} \geq 2 + 2.\dfrac{0}{m^2+1} = 2$.
Vậy S^2 đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $-m^2 + 1 = 0$ hay $m = \pm 1$. Vì $S > 0$ nên ta kết luận S đạt giá trị bé nhất là $\sqrt{2}$ khi $m = \pm 1$. □

Bài 29. Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25$ km, $BC = 20$ km và M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C. Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là 15 km/h, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là 30 km/h. Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?

Lời giải.

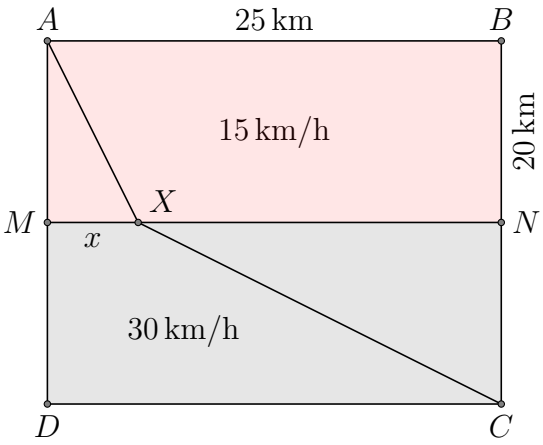
Gọi $MX = x$ (km) với $0 \le x \le 25$.

Quãng đường $AX = \sqrt{x^2 + 10^2}$ $\Rightarrow$ thời gian tương ứng $\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{15}$ h.

Quảng đường $CX = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$ $\Rightarrow$ thời gian tương ứng $\dfrac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}$ h.

Tổng thời gian $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+100}}{15} + \dfrac{\sqrt{x^2-50x+725}}{30}$ với $x \in [0;25]$, ta tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$:

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{15\sqrt{x^2+100}} + \dfrac{x-25}{30\sqrt{x^2-50x+725}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.



Tính các giá trị $f(0) = \dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \approx 1{,}56$; $f(25) = \dfrac{1+\sqrt{29}}{3} \approx 2{,}13$; $f(5) = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1{,}49$.

Vậy hàm số đạt GTNN bằng $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ tại $x = 5$. □

Bài 30. Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3 - \dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Hỏi một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất là bao nhiêu?

Lời giải.

Số tiền của chuyến xe buýt chở x hành khách là

$$f(x) = 20x \cdot \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 = 20\left(9x - \frac{3x^2}{20} + \frac{x^3}{1600}\right) \quad (0 < x \le 50)$$

Ta có

$$f'(x) = 20\left(9 - \frac{3x}{10} + \frac{3x^2}{1600}\right) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = 120. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		40		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	3200	↘	$f(50)$

Vậy một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất là 3.200.000 (đồng). □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[-1; 1]$ ta có: $y(-1) = -9$; $y(0) = 2$; $y(1) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y = 3$ tại $x = 1$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = -9$ tại $x = -1$. □

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2}; 3\right]$.

Lời giải.

Với $x \neq 1$ ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2}; 3\right]$ ta có: $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$; $y(2) = 3$; $y(3) = \dfrac{7}{2}$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{3}{2};3\right]} y = \dfrac{7}{2}$ tại $x = \dfrac{3}{2}$ hoặc $x = 3$ và $\min\limits_{\left[\frac{3}{2};3\right]} y = 3$ tại $x = 2$. □

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$.

Lời giải.

Với $x \neq -\dfrac{1}{2}$ ta có: $y' = 2 - \dfrac{2}{(2x+1)^2} = \dfrac{8x^2 + 8x}{(2x+1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2 + 8x}{(2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 8x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[1; 2]$ ta có: $y(1) = \dfrac{10}{3}$; $y(2) = \dfrac{26}{5}$.

Vậy $\max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{26}{5}$ tại $x = 2$ và $\min\limits_{[1;2]} y = \dfrac{10}{3}$ tại $x = 1$. □

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=[-1;6]$.

Với $-1<x<6$ ta có: $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}}\Leftrightarrow -2x+5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Trên đoạn $[-1;6]$ ta có: $f(-1)=0$; $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$; $f(6)=0$.

Vậy $\max\limits_{[-1;6]}f(x)=\dfrac{6}{2}$ tại $x=\dfrac{5}{2}$ và $\min\limits_{[-2;3]}f(x)=0$ tại $x=-1$ hoặc $x=6$. □

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+6}}$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho luôn xác định trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $y'=-\dfrac{\left(\sqrt{-x^2+x+6}\right)'}{-x^2+x+6}=\dfrac{2x-1}{2(-x^2+x+6)\sqrt{-x^2+x+6}}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{2(-x^2+x+6)\sqrt{-x^2+x+6}}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Trên đoạn $[0;1]$ ta có: $y(0)=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$; $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$; $y(1)=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\max\limits_{[0;1]}y=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ tại $x=0$ hoặc $x=1$ và $\min\limits_{[0;1]}y=\dfrac{2}{5}$ tại $x=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Với $-2<x<2$ ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\2x^2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Trên đoạn $[-2;2]$ ta có: $y(-2)=-2$; $y\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$; $y(2)=2$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]}y=2\sqrt{2}$ tại $x=\sqrt{2}$ và $\min\limits_{[-2;2]}y=-2$ tại $x=-2$. □

Bài 7. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x^2}-x$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.
Với điều kiện $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, ta có: $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} - 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Trên đoạn $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ ta có: $y(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$; $y(-1) = 2$; $y(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
Vậy $\max\limits_{\mathscr{D}} y = 2$ tại $x = -1$ và $\min\limits_{\mathscr{D}} y = -\sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}$.
Do đó, tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $2 - \sqrt{2}$. □

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{5 - x^2}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.
Với điều kiện $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Trên đoạn $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ ta có: $y\left(-\sqrt{5}\right) = -\sqrt{5}$; $y\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$; $y\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right) = \sqrt{10}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} y = \sqrt{10}$ tại $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$. □

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sin^2 x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 + \sin 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $x = \dfrac{3\pi}{4}$.
Trên đoạn $[0; \pi]$ ta có: $y(0) = 0$; $y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$; $y(\pi) = \pi$.
Vậy $\max\limits_{[0;\pi]} y = \pi$ tại $x = \pi$. □

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$, với $x > 0$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1} = \frac{9x^2 + 1 - x^2}{(8x^2 + 1)\left(\sqrt{9x^2 + 1} - x\right)} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}.$$

Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi hàm số $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.
Ta có: $f'(x)=\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+1}=9x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\72x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ tại $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$. Do đó hàm số đã cho có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{(0;+\infty)}y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ tại $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$. □

Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất $y=|x^3-3x^2+1|$ trên đoạn $[-2;1]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.
Đặt $g(x)=x^3-3x^2+1$, với $x\in[-2;1]$.
Ta có: $g'(x)=3x^2-6x$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x&=0\\x&=2.\end{array}\right.$$

Trên đoạn $[-2;1]$ ta có: $g(-2)=-19$; $g(0)=1$; $g(1)=-1$.
Vậy $\max\limits_{[-2;1]}g(x)=1$ tại $x=0$ và $\min\limits_{[-2;1]}g(x)=-19$ tại $x=-2$.
Như vậy với $x\in[-2;1]$ thì $g(x)\in[-19;1]$. Suy ra $y=|g(x)|\in[0;19]$.
Do đó $\max\limits_{[-2;1]}y=19$ và $\min\limits_{[-2;1]}y=0$. □

Bài 12. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ (với m là số thực). Tìm m để hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;4]$ bằng 1.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2+1}{(x+m)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$ nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Do đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (nếu có) tại $x = 4$, tức là

$$\frac{4m-1}{4+m} = 1 \Leftrightarrow 4m - 1 = 4 + m \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}.$$

Thử lại ta thấy $m = \dfrac{5}{3}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 13. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng -4.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $[0;2]$ ta có: $f(0) = m$, $f(1) = 4 + m$, $f(2) = 2 + m$.

Vì $m < m + 2 < m + 4$ (với mọi số thực m) nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là m.

Theo bài ta có $m = -4$. □

Bài 14. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

$$y = \left|x^2 + 2x + a - 4\right| = \left|(x+1)^2 + a - 5\right|.$$

Đặt $t = (x+1)^2$. Với $x \in [-2;1]$ thì $t \in [0;4]$.

Xét hàm số $f(t) = |t + a - 5|$ trên đoạn $[0;4]$. Vì $f(t) \geq 0, \forall t \in [0;4]$ nên ta có:

$$\max_{x\in[-2;1]} y = \max_{t\in[0;4]} f(t) = \max_{t\in[0;4]} \{f(0), f(4)\} = \max_{t\in[0;4]} \{|a-5|, |a-1|\}.$$

- ☑ $|a-5| \geq |a-1| \Leftrightarrow a \leq 3$ thì $\max\limits_{t\in[0;4]} f(t) = |a-5| = 5 - a$.
- ☑ $|a-5| \leq |a-1| \Leftrightarrow a \geq 3$ thì $\max\limits_{t\in[0;4]} f(t) = |a-1| = a - 1$.

Mặt khác

$$\begin{cases} 5 - a \geq 5 - 3 = 2, \forall a \leq 3 \\ a - 1 \geq 3 - 1 = 2, \forall a \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \max_{t\in[0;4]} f(t) \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in[0;4]} f(t)$ bằng 2 khi $a = 3$. □

Bài 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + \sin x + 1$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + \sin x + 1$ tuần hoàn với chu kì 4π nên ta chỉ cần xét hàm số trên đoạn $[0; 4\pi]$.

Ta có: $y' = -\sin\dfrac{x}{2} + \cos x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\sin\frac{x}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2} = -1\\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vì $x \in [0; 4\pi]$ nên $x \in \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}; 3\pi\right\}$.

Trên đoạn $[0; 4\pi]$ ta có: $y(0) = 3$; $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}$; $y\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}$; $y(3\pi) = 1$; $y(4\pi) = 3$.

Vậy $\min y = \dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 16. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m = 3$ thì $f(x) = 2$, $\forall x \in [1; 2]$ (không thỏa bài toán).

Nếu $m < 3$ thì $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1; 2]$. Do đó $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = \dfrac{m+1}{2} = 1 \Rightarrow m = 1$ (nhận).

Nếu $m > 3$ thì $f'(x) < 0$, $\forall x \in [1; 2]$. Do đó $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{m+3}{3} = 1 \Rightarrow m = 0$ (loại).

Vậy $m = 1$. □

Bài 17. Cho bất phương trình $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) > m$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x > -1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) > m\\ \Leftrightarrow&(x^2+4x-5)(x^2+4x+3) > m \quad (1).\end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = t + 8$, ta được bất phương trình

$$t(t+8) > m \Leftrightarrow t^2 + 8t > m \quad (2).$$

Ta có: $t = x^2 + 4x - 5$ nên $t' = 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$$t' = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Bảng biến thiên

x	-1		$+\infty$
t'		$+$	
t	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Với $x > -1$ thì $t > -8$, do đó (1) đúng với mọi $x > -1$ khi và và chỉ khi (2) đúng với mọi $t > -8$.
Xét $f(t) = t^2 + 8t$.
Ta có: $f'(t) = 2t + 8$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -4.$$

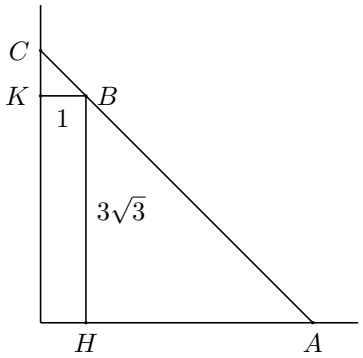
Bảng biến thiên

x	-8		-4		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t > -8$ khi $\min\limits_{t\in(-8;+\infty)} f(t) > m \Leftrightarrow m < -16$.
Vậy $m < -16$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 18.

Cần bắc một chiếc thang tựa vào tường tại vị trí C và mặt đất tại vị trí A thông qua một cột đỡ có đỉnh là vị trí B. Cột đỡ có chiều cao $3\sqrt{3}$ m và khoảng cách từ tường đến cột đỡ bằng 1 m, như hình vẽ bên.
Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể có của chiếc thang là bao nhiêu?



Lời giải.

Gọi $CK = x > 0$, $AH = y > 0 \Rightarrow AC^2 = (x + 3\sqrt{3})^2 + (y + 1)^2$.
Mặt khác: $\dfrac{x}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{3}}{x} \Rightarrow AC^2 = (x + 3\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{x} + 1\right)^2$.
Đặt $f(x) = (x + 3\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{x} + 1\right)^2$

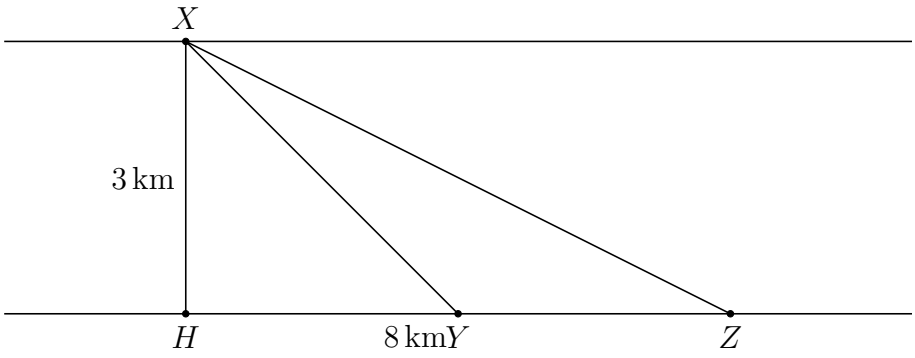
$$\Rightarrow f'(x) = 2(x + 3\sqrt{3}) + 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{x} + 1\right).\left(-\frac{3\sqrt{3}}{x^2}\right) = 2(x + 3\sqrt{3})\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{x^3}\right)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$. Lập bảng biến thiên suy ra $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 64 tại $x = \sqrt{3}$.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	64	$\nearrow$	$+\infty$

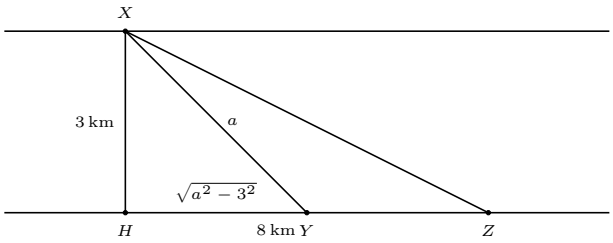
Vậy AC nhỏ nhất bằng 8. □

Bài 19. Một người đàn ông muốn chèo thuyền từ vị trí X đến vị trí Z về phía hạ lưu bờ đối diện càng nhanh càng tốt, trên một dòng sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông để đến H rồi sau đó chạy đến Z, hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến Z, hoặc anh ta có thể chèo thuyền từ một điểm Y giữa H và Z và sau đó chạy đến Z. Biết anh ấy chèo thuyền với vận tốc 6 km/h, chạy với vận tốc 8 km/h, quãng đường $HZ = 8$ km và tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đó đến Z.



Lời giải.

Độ dài $XZ = \sqrt{XH^2 + HZ^2} = \sqrt{73}$.
Đặt $a = XY$. Với $3 \le a \le \sqrt{73}$.
Thời gian để người đó đi từ X đến Y là: $\dfrac{a}{6}$ (giờ).



Thời gian để người đó đi từ Y đến Z là $\dfrac{8-\sqrt{a^2-3^2}}{8}$ (giờ).
Thời gian để người đó đi tới Z được tính theo hàm số
$f(a) = \dfrac{a}{6} + \dfrac{8-\sqrt{a^2-3^2}}{8}$.
$f'(a) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{a}{8\sqrt{a^2-3^2}}$.
$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} - \dfrac{a}{8\sqrt{a^2-3^2}} = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{a^2-9} = 6a \Leftrightarrow a = \dfrac{12\sqrt{7}}{7}$.
Ta có $f(3) = \dfrac{3}{2}, f(3\sqrt{2}) = 1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8}, f(\sqrt{73}) = \dfrac{\sqrt{73}}{6}$.

Vậy thời gian ngắn nhất đề người đó đi tới Z là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$ giờ. □

Bài 20. Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}=\dfrac{4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right)^3}$.

Đặt $t=\sqrt{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}, t\geq 1$ thì $4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=t^2-1$. Khi đó, $P=\dfrac{t^2-1}{(1+t)^3}=\dfrac{t-1}{(t+1)^2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t-1}{(t+1)^2}, t\geq 1$.

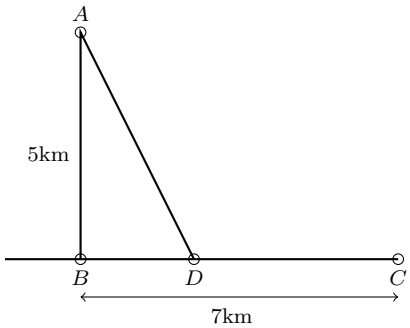
Ta có $f'(t)=\dfrac{-t^2+2t+3}{(t+1)^4}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t & -1 \text{ (loại)} \\ t & =3. \end{array}\right.$

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\dfrac{1}{8}$	↘	0

Vậy $\max P=\max\limits_{t\in[1;+\infty)} f(t)=\dfrac{1}{8}$. □

Bài 21.

Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men, phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên, do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc 4km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h.



Biết A cách B một khoảng 5km, B cách C một khoảng 7km. Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?

Lời giải.

Gọi x (đơn vị km) là độ dài đoạn BD. Khi đó thời gian y (đơn vị giờ) để đoàn cứu trợ đi theo lộ trình từ A qua D đến C là $y=\dfrac{\sqrt{25+x^2}}{4}+\dfrac{(7-x)}{6}$ với $x\in[0;7]$.

Ta có $y' = \dfrac{x}{4\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{6}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Thay các giá trị vào kiểm tra ta được thời gian ngắn nhất khi $x = 2\sqrt{5}$ tức là $AD = 3\sqrt{5}$. □

Bài 22. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có: $v = s' = -\dfrac{3}{2}t^2 + 12t$, $t \in [0;6]$.
Đạo hàm: $v'(t) = -3t + 12 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.
Ta có: $\Rightarrow \max\limits_{[0;6]} v = 24$.

□

Bài 23. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$. Tìm m để $\min\limits_{[2;4]} y = 4$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Ta có $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$. Xét các trường hợp

- ☑ Xét $-1-m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn YCBT).
- ☑ Xét $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = 4 \Leftrightarrow y(2) = 4 \Leftrightarrow 2+m = 4 \Leftrightarrow m = 2$(Loại).
- ☑ Xét $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = 4 \Leftrightarrow y(4) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{4+m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 8$ (Thỏa mãn).

Vậy để thỏa mãn bài ra thì $m = 8$.

□

Bài 24. Tìm m để bất phương trình $x - \sqrt{x-1} < m$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét $f(x) = x - \sqrt{x-1}$ với $x \geq 1$
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$
Bất phương trình có nghiệm
$\Leftrightarrow m > \min f(x) \Leftrightarrow m > f\left(\dfrac{5}{4}\right) \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{4}$. □

Bài 25. Biết rằng các số thực a, b thay đổi sao cho hàm số $f(x) = -x^3 + (x+a)^3 + (x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 - 4a - 4b + 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) =& 3x^2 + 3(x+a)^2 + 3(x+b)^2 \\ =& 3(x^2 + 2(a+b)x + a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow ab \le 0$.
Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge 0, b \le 0$.
Khi đó $b(b-4) \ge 0$, nên

$$\begin{aligned} P =& (a-2)^2 + b(b-4) - 2 \\ \ge& -2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2, b = 0$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -2. □

Bài 26. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y} + \dfrac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \dfrac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2) \\ \Leftrightarrow\ & 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = 5^{xy-1} + \frac{1}{3^{x+2y}} + xy - 2y \\ \Leftrightarrow\ & 5^{x+2y} - \frac{1}{3^{x+2y}} + x + 2y = 5^{xy-1} - \frac{1}{3^{xy-1}} + xy - 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t - \dfrac{1}{3^t} + t$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 5^t.\ln 5 + 3^{-t}.\ln 3 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x+2y) = f(xy-1) \Leftrightarrow x + 2y = xy - 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y+1}{y-1}$
với $x > 0 \Rightarrow y > 1$. Khi đó $T = x + 2y = \dfrac{1 + 2y^2}{y-1}$.
Xét hàm số $f(y) = \dfrac{1+2y^2}{y-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có
$f'(y) = \dfrac{2y^2 - 4y - 1}{(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

y	1		$\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min T = 4 + 2\sqrt{6}$. □

Bài 27. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ bằng 2 khi

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$. Các giá trị cực trị tương ứng là 6 và $-4m^3 + 6$.

Trường hợp 1: $m \geq \dfrac{3}{2}$.

Khi đó, hàm số nghịch biến trên $[0;3]$, do đó GTNN đạt được khi $x = 3$, và là $33 - 27m$.

Giải phương trình $33 - 27m = 2$, ta thu được $m = \dfrac{31}{27}$ (loại).

Trường hợp 2: $m \leq 0$. Khi đó, hàm số đồng biến trên $[0;3]$, suy ra GTNN đạt được khi $x = 0$, và là 6 (loại).

Trường hợp 3: $0 < m < \dfrac{3}{2}$. Hàm số khi đó đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = 2m$.

Ta có $f(0) = 6$, $f(3) = 33 - 27m$, $f(2m) = -4m^3 + 6$.

Khi $0 < m < \dfrac{3}{2}$ thì $-4m^3 + 6 < 33 - 27m < 6$. Do đó GTNN đạt được là $-4m^3 + 6$. Giải phương trình $-4m^3 + 6 = 2$, ta thu được $m = 1$ (thỏa).

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP DẠNG ĐƠN ĐIỆU, CỰC TRỊ VÀ GTLN, GTNN

DẠNG 6. Một số ứng dụng sự biến thiên của hàm số

Phương pháp giải. Ứng dụng sự biến thiên của hàm số ta có thể xác định số nghiệm của phương trình trong một số trường hợp, hỗ trợ giải phương trình, bất phương trình và chứng minh bất đẳng thức.

① Xác định số nghiệm của phương trình: trước hết ta đưa phương trình về dạng $f(x) = c$ với c là hằng số; sau đó lập bảng biến thiên, để ý các giá trị cực trị của hàm số trong khoảng cho trước để xác định số nghiệm phương trình.

② Giải phương trình: trước hết ta cần đoán được các nghiệm của phương trình; sau đó dùng tính chất biến thiên để xác nhận đủ nghiệm đối với phương trình đã cho.

③ Giải bất phương trình: trước hết ta cũng đưa về dạng $f(x) > c$ (tương tự với các dấu bất phương trình khác) với c là hằng số; sau đó dựa vào bảng biến thiên để đánh giá và lấy tập nghiệm của bất phương trình.

④ Chứng minh bất đẳng thức: chẳng hạn $f(x) > 0$, ứng dụng cách làm bài giá trị lớn nhất, nhỏ nhất để xác định giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên khoảng đã cho và chứng tỏ giá trị nhỏ

nhất đó lớn hơn 0.

Ví dụ 37. Tìm m để phương trình $x^3-6x^2-4m=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3-6x^2=4m$, là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2$ và $y=4m$.

Ta có $f'(x)=3x^2-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$, $f(0)=0,\ f(4)=-32$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$

Mặt khác $y=4m$ là đường thẳng song song với trục hoành cắt trục tung tại điểm có tung độ $4m$.

Từ bảng biến thiên ta suy ra để phương trình $f(x)=4m$ có 3 nghiệm thì $-32<4m<0\Leftrightarrow -8<m<0$. □

Ví dụ 38. Giải phương trình $x=\sin x$.

Lời giải.

Với $x\le -1$ hoặc $x\ge 1$ thì phương trình vô nghiệm. Ta xét phương trình đã cho trên $(-1;1)$. Ta có $x=\sin x\Leftrightarrow x-\sin x=0$.

Nhận xét $x=0$ là nghiệm của phương trình.

Đặt $f(x)=x-\sin x$, ta có $f'(x)=1-\cos x\ge 0$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$. Với $x\in(-1;1)$ thì phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất 1 nghiệm $x=0$.

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(-1;1)$ vì thế có duy nhất 1 nghiệm trên $(-1;1)$ là $x=0$. □

Ví dụ 39. Giải bất phương trình $2x+\cos^2 x\ge 1$

Lời giải.

Đặt $f(x)=2x+\cos^2 x$, ta có $f'(x)=2-\sin 2x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, lại có $f(0)=1$, do đó $f(x)\ge 1\Leftrightarrow x\ge 0$. □

Ví dụ 40. Chứng minh bất đẳng thức $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ $(x\ne 0)$.

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1>0$. Đặt $f(x)$ bằng vế trái. Ta có $f'(x)=-\sin x+x=0\Leftrightarrow x=0$ (xem ví dụ trên). Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m - 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x) = m - 1$ có 3 nghiệm phân biệt thì $-4 < m - 1 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$. □

Bài 29. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$, $f(0) = 2$, $f(1) = f(-1) = 4$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra được để $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $m > 4$. □

Bài 30. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm

$$x^3 + 3x^2 - 1 \leq m\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)^3$$

Lời giải.

$x^3+3x^2-m \le m\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3.\left(x^3+3x^2-1\right) \le m$, khi $x \ge 1$ hàm số $f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3.\left(x^3+3x^2-1\right)$ đồng biến nên bất phương trình có nghiệm khi $m \ge f(1)=3$. □

Bài 31. Giải phương trình $\tan x = x$ với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\tan x - x = 0$

Đặt vế trái bằng $f(x)$.

Ta có $f'(x)=\tan^2 x+1-1=\tan^2 x \ge 0\ \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Do đó, $f(x)$ là hàm số luôn tăng trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ mà ta có $x=0$ thỏa mãn phương trình nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình. □

Bài 32. Giải bất phương trình $\cos 2x - 3x \ge 1$.

Lời giải.

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có $f'(x)=-2\sin 2x-3<0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0)=1$ nên $f(x) \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow x \le 0$. □

Bài 33. Chứng minh rằng với mọi $x \in (-2;2)$ thì ta luôn có $x+\sqrt{4-x^2} \le 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$, ta có $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Từ bảng biến thiên, suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 34. Chứng minh rằng với mọi $x \in \left(0;\dfrac{1}{9}\right]$, ta luôn có $9x+\dfrac{9}{x} \ge 82$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=9x+\dfrac{9}{x}$.

Ta có $f'(x)=9-\dfrac{9}{x^2}<0\ \forall x \in \left(0;\dfrac{1}{9}\right]$ tức là $f(x)$ giảm trên $\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$, suy ra $f(x) \ge f\left(\dfrac{1}{9}\right)=82$. □

Bài 35. Phương trình $\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}=m$ có hai nghiệm phân biệt khi

Lời giải.

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$.

Đặt $t = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} \Rightarrow t' = -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} < 0$ với $-2 < x < 2 \Rightarrow -2 \le t \le 2$ và $\sqrt{4-x^2} = \dfrac{4-t^2}{2}$.

Xét $f(t) = \dfrac{t^2}{2} + t - 2$ trên đoạn $[-2;2]$, có

$f'(t) = t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		-1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-2	$\searrow$	$-\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	2

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $-\dfrac{5}{2} < m < -2$. □

Bài 36. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \cos^3 x + \cos^2 x - m\cos x - 4$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$.

Ta có hàm $\cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên để $y = f(x)$ đồng biến trên $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ tức là $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $g(t) = t^3 + t^2 - mt - 4$ phải nghịch biến trên $(0;1)$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 2t - m$.

Đặt $h(t) = 3t^2 + 2t$ xét trên $(0;1)$. Ta có $h'(t) = 6t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$, $h\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$, $h(0) = 0$, $h(1) = 5$. Ta được bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{1}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	5

$g(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$ tương đương với $g'(t) < 0$ trên $(0;1)$, tức là $h(t) < m$ trên $(0;1)$, dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \ge 5$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(5-2x)^2$ trên $[0;3]$ là

A. $\dfrac{250}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{250}{27}$. **D.** $\dfrac{125}{27}$.

Lời giải.

Ta có $y = 4x^3 - 10x^2 + 25x \Rightarrow y' = 12x^2 - 40x + 25$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \in [0;3] \\ x = \dfrac{5}{6} \in [0;3] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 0; y\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0; y\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{250}{27}; y(3) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y = y\left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{250}{27}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ xác định trên tập $\mathscr{D} = [0;1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

B. Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $\mathscr{D}$.

D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathscr{D}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sqrt{x - x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \in [0;1]$.

Ta có $f(0) = 0; f(1) = 0; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{[0;1]} y = 0$ khi $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $[1;2]$. Khi đó tổng $M + N$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;2] \\ x = 2 \in [1;2]. \end{array}\right.$

$f(1) = -1, f(2) = -3$.

Suy ra $N = \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = -3, N = \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = -1$.

Vậy $M + N = -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ trên $\mathscr{D}=[0;3]$.

$y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\notin\mathscr{D} \\ x=1\in\mathscr{D}. \end{array}\right.$

Ta có: $y(0)=y(3)=0, y(1)=-1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$ bằng 0.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min\limits_{[2;4]} y=3$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=7$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=5$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=0$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\notin[2;4] \\ x=-1\notin[2;4] \end{array}\right.$ mà $\begin{cases} f(2)=7 \\ f(4)=57 \end{cases}\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=7.$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	2	↘	-2	↗	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=0$. **B.** $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=2$. **C.** $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=2\sqrt{5}$. **D.** $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên có $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-8}{(x-3)^2}<0, \forall x\in[0;2]$ mà $y(0)=\dfrac{1}{3}$, $y(2)=-5$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y=y(0)=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+1$ trên $[1;2]$. Khi đó tổng $M+N$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$.

Do $f(1)=-1$, $f(2)=-3$ suy ra $\max\limits_{x\in[1;2]} y=y(1)=-1$ và $\min\limits_{x\in[1;2]} y=y(2)=-3$.

Vậy $M+N=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=-5$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	↗	0	↘	-2	↗	3

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-3;2)$.

B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-3;2)$ bằng 0.

D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $(-3;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M+m$.

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Phương pháp:

Quan sát bảng biến thiên và tìm $GTLN$, $GTNN$ của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ rồi kết luận.

Cách giải:

Quan sát bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[-1;2]$ thì hàm số đạt $GTNN$ bằng 0 tại $x=0$ và đạt $GTLN$ bằng 3 tại $x=-1$.

Do đó $M=3; m=0 \Rightarrow M+m=3+0=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+4$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. 10. **B**. 6. **C**. 24. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2-3; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Mặt khác: $f(-2)=-2; f(2)=6; f(1)=2; f(-1)=6$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là 6.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{13}{27}$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-6$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=0$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$. Ta có

$$f'(x)=3x^2-16x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \notin [1;3] \\ x=\dfrac{4}{3} \in [1;3] \end{array}\right.$$

Mà $f(1)=0$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$, $f(3)=-6$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{13}{27}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$

A. $\min\limits_{[2;3]} y=-3$. **B.** $\min\limits_{[2;3]} y=3$. **C.** $\min\limits_{[2;3]} y=2$. **D.** $\min\limits_{[2;3]} y=4$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;3]$.

Suy ra $\min\limits_{[2;3]} y=y(3)=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $4M-2m$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{7}{(x+2)^2}>0, \forall x \neq -2$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

Suy ra $m=y(0)=-\dfrac{1}{2}; M=y(2)=-\dfrac{5}{4}$. Do đó $4M-2m=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ bằng

A. $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y=4$. **B.** $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y=6$. **C.** $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y=3$. **D.** $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y=5$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Ta có $y' = 6x^2 + 6x$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

☑ Ta có $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $y(0) = -1$, $y(1) = 4$.

☑ Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};1\right]} y = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$. Giá trị $T = 2M + m$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;3] \\ x = 2 \in [1;3]. \end{array}\right.$

Ta tính được $y(1) = 1$, $y(3) = 3$, $y(2) = -1$.

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[1;3]$.

Do đó, $M = \max\limits_{x\in[1;3]} y = 3 = y(3)$, $m = \min\limits_{x\in[1;3]} y = -1 = y(2)$.

Vậy $T = 2M + m = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+3}{2x-3}$ trên đoạn $[2;5]$ bằng

A. $\dfrac{7}{8}$. **B.** $\dfrac{8}{7}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Phương pháp: Để tìm GTNN, GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ta làm như sau:

☑ Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

☑ Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)$.

☑ So sánh các giá trị vừa tìm được. Số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Cách giải: $y = \dfrac{x+3}{2x-3} \Rightarrow y' = -\dfrac{9}{(2x-3)^2} < 0, \forall x \in [2;5]$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = \dfrac{x+3}{2x-3}$ nghịch biến trên $[2;5]$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[2;5]} y = y(5) = \dfrac{8}{7}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 5$ trên nửa khoảng $[-4;\infty)$ là

A. $\min\limits_{[-4;\infty)} y = 5$. **B.** $\min\limits_{[-4;\infty)} y = -17$. **C.** $\min\limits_{[-4;\infty)} y = 4$. **D.** $\min\limits_{[-4;\infty)} y = -9$.

Lời giải.

Ta có: $y = x^2 + 2x + 5 \Rightarrow y' = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Hàm số $y = x^2 + 2x + 5$ liên tục trên $[-4;+\infty)$ có $y(-4) = 13, y(-1) = 4, \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Vậy $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

A. 57. **B**. 55. **C**. 56. **D**. 54.

Lời giải.

Hàm số y liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đạo hàm $y' = 4x^3 - 6x$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{array}\right.$

Ta có $y(0) = 2$, $y(3) = 56$, $y\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

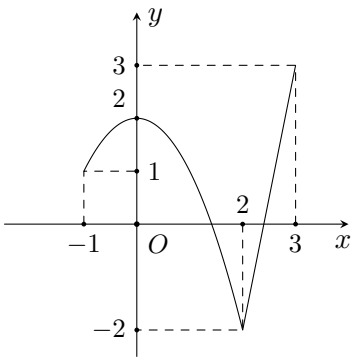
Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 56.

Chọn đáp án C □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tên đoạn $[-1;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $M = 3$, $m = -2$. Do đó $M - m = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 8}$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $M = 7$. **B**. $M = 9$. **C**. $M = 3 + 2\sqrt{2}$. **D**. $M = 3 + \sqrt{7}$.

Lời giải.

☑ $y' = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 8}}$.

☑ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra $M = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng -1.
B. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x=0$.
C. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2;-5)$.
D. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x=2$.

Lời giải.

Từ BBT suy ra khẳng định đúng là: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2;-5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $\max\limits_{[-1;2]} y=10$. **B**. $\max\limits_{[-1;2]} y=6$. **C**. $\max\limits_{[-1;2]} y=11$. **D**. $\max\limits_{[-1;2]} y=15$.

Lời giải.

$y'=6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=2\in[-1;2] \end{array}\right.$.

$f(-1)=15, f(1)=-5, f(2)=6$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y=15$.

Chọn đáp án D □

Câu 24.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số nghiệm của phương trình $3|f(x)|-7=0$.

A. 0. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 6.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Lời giải.

$3|f(x)|-7=0 \Leftrightarrow |f(x)|=\dfrac{7}{3} \quad (*)$.

Từ bảng biến thiên của $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		2		x_3		$+\infty$
$(\lvert f(x)\rvert)'$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

Từ BBT của $y=|f(x)|$ suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho a là số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a^3=3\log_2 a$. **B**. $\log_2 a^3=\dfrac{1}{3}\log_2 a$. **C**. $\log_2 a^3=\dfrac{3}{2}\log a$. **D**. $\log_2 a^3=3\log a$.

Lời giải.

Ta có công thức $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$. Do đó $\log_2 a^3=3\log_2 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-5x^2+3x-1$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $M=-10$. **B**. $M=-7$. **C**. $M=-5$. **D**. $M=1$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $[2;4]$

$$y'=3x^2-10x+3,\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}\notin[2;4] \\ x=3\in[2;4] \end{array}\right. .$$

$f(2)=-7,\ f(4)=-5,\ f(3)=-10$ nên $M=\max\limits_{[2;4]} y=-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+x^2-x-2$ trên đoạn $[-1;100]$.

A. $m=-2$. **B**. $m=-\dfrac{59}{4}$. **C**. $m=-4$. **D**. $m=-\dfrac{17}{8}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên cho dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$-\dfrac{9}{20}$	↘	$\dfrac{3}{5}$	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{9}{20}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\dfrac{3}{5}$.

B. Hàm số có ba cực trị.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ bằng

A. 1. **B**. 0. **C**. -1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $y=\sqrt{1-x^2}\le 1, \forall x\in[-1;1]$.

Do vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ là 1 tại $x=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-2x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ là

A. -3. **B**. -1. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Trên khoảng $(-1;1)$: $y'=3x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ -1<x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

Ta có: $y(-1)=-3$, $y(0)=0$, $y(1)=-1$.
Do hàm số liên tục trên $[-1;1]$ nên $\max\limits_{x\in[-1;1]} y=y(0)=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=-\dfrac{2}{3}$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Vì hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu trên một đoạn không chứa $x=-\dfrac{d}{c}$ nên hàm số đạt GTLN, GTNN tại các điểm đầu mút của đoạn đó.
Ta có $y'=\dfrac{-7}{(x-2)^2}<0,\ \forall x\neq 2$. Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y=y(1)=\dfrac{3\cdot 1+1}{1-2}=-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	2	↘	-2	↗	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y=0$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y=2$. **C.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y=2\sqrt{5}$. **D.** $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y=1$.

Lời giải.

Dựa vào BBT có $\min\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y=-2$, $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]} y=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và luôn nghịch biến trên $[a;b]$. Hỏi hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào sau đây?

A. $x=\dfrac{b-a}{2}$. **B.** $x=a$. **C.** $x=b$. **D.** $x=\dfrac{a+b}{2}$.

Lời giải.

$f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]\Rightarrow \forall x_1,\ x_2\in[a;b],\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
Như vậy $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$. Tìm tổng bình phương của M và m.

A. 250. **B.** 100. **C.** 509. **D.** 289.

Lời giải.

$$y'=0\Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right..$$

Ta có: $y(-1)=15;\ y(2)=6;\ y(1)=-5$.
Vậy $m=-5,\ M=15$ và $M^2+m^2=250$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+12x+2$ trên đoạn $[1;4]$ là bao nhiêu?
A. 18. **B**. 13. **C**. 2. **D**. -14.

Lời giải.

$$y'=0\Leftrightarrow -3x^2+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;4] \\ x=-2\notin[1;4] \end{array}\right. .$$

Ta có: $y(1)=13,\ y(4)=-14,\ y(2)=18$.
Vậy $\min\limits_{[1;4]} y=-14$.
Chọn đáp án D □

Câu 36. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ là
A. 15. **B**. 66. **C**. 11. **D**. 10.

Lời giải.

$f'(x)=6x^2+6x-12$
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ (nhận) $\vee\ x=-2$ (loại)
Ta có $f(-1)=15, f(1)=-5, f(2)=6$. Vậy $\max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=15$, đạt tại $x=-1$.
Chọn đáp án A □

Câu 37. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó, giá trị của $M-m$ bằng
A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}, \mathscr{D}=[-1;1]$.
$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ta có: $f(-1)=0, f(1)=0, f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}, f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.
Do đó $M=\dfrac{1}{2}, m=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $M-m=1$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$.
A. 1. **B**. -2. **C**. 0. **D**. -5.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}>0$ trên $[2;3]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến nên $\min\limits_{[2;3]} y=y(2)=-5$.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

- ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- ☑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là -1 và hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. 1. **B**. 3. **C**. -1. **D**. 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-1;1]$, ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn đó là 0, đạt khi $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên $[1;5]$.

A. 52. **B**. -2. **C**. 56. **D**. 2.

Lời giải.

Trên $[1;5]$ ta có:

- ☑ $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;5] \\ x = 2 \in [1;5] \end{array}\right.$.
- ☑ $f(1) = 0$;
- ☑ $f(2) = -2$;

☑ $f(5) = 52$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1;5]$ là 52.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

A. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng 0.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng -1.

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x+2|$ trên đoạn $[-3;3]$.

A. -1. **B**. 0. **C**. -5. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $|x+2| \geq 0, \forall x \in [-3;3]$. $\min y = 0$ khi $x = -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ trên đoạn $[0;2018]$ bằng

A. -5. **B**. $-\dfrac{5}{3}$. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Từ $y' = x^2 + 4x - 5 = 0$ ta được $x = 1$ (nhận) và $x = -5$ (loại).

$f(0) = 1, f(1) = -\dfrac{5}{3}, f(2018) = 2747451170$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2018]$ là $-\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $M = 2$. **B**. $M = -2$. **C**. $M = 0$. **D**. $M = 4$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 2 \notin [-1;1]. \end{array}\right.$

$y(-1) = -3$; $y(0) = 0$; $y(1) = -2$.

Vậy $M = \max\limits_{[-1;1]} y = y(0) = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=\dfrac{2}{3}$. **C.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=1$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}>0,\forall x\in[1;4]$ nên hàm số đồng biến trên $[1;4]$ và $\max\limits_{[1;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** -5. **C.** $-\dfrac{7}{2}$. **D.** -3.

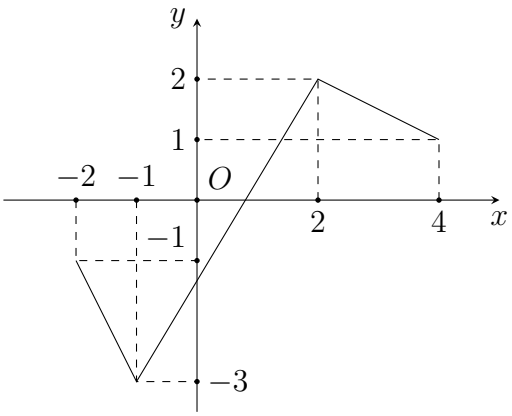
Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có $y(2)=-5$, $y(3)=-\dfrac{7}{2}$. Suy ra $\min\limits_{x\in[2;3]} y=-5$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|$.



A. $|f(0)|$.
B. 2.
C. 3.
D. 1.

Lời giải.

Ta có $m=\min\limits_{[-2;4]} f(x)=-3$, $M=\max\limits_{[-2;4]} f(x)=2$. Do đó $\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=\max\{|m|,|M|\}=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x}{x+2}$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}>0,\forall x\neq -2$ nên hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Do đó $\max\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Hàm số $y=x^4+2x^2-3$

A. không có cả giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. **B.** không có cực trị.
C. có giá trị nhỏ nhất. **D.** có giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3+6x=2x(x^2+3)$.

$y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có giá trị nhỏ nhất là -3 khi $x=0$, có cực trị và không có giá trị lớn nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 8, giá trị nhỏ nhất bằng 4.

B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $y=8$, cực tiểu tại điểm $y=4$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=2$.

D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$, cực tiểu tại điểm $x=0$.

Lời giải.

Dễ dàng nhận thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$, đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} y=2$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y=1$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} y=-2$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} y=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+3$. Trên đoạn $[0;2]$, $y'=0$ có nghiệm $x=1$.

Mà $y(0)=0, y(1)=2, y(2)=-2$ nên $\max\limits_{[0;2]} y=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-2x^2$ trên đoạn $[0;1]$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

Hàm số $y=x^4-2x^2$ liên tục trên $[0;1]$.

$$y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;1] \\ x=-1\notin[0;1] \\ x=1\in[0;1] \end{array}\right.\!.$$

$y(0)=0, y'(1)=-1$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} y=y(0)=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Tìm giá trị nhỏ nhất K của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $K=-3$. **B.** $K=-2$. **C.** $K=0$. **D.** $K=2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$ nên $K=y(0)=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $\dfrac{51}{2}$. **B.** 13. **C.** $\dfrac{51}{4}$. **D.** $\dfrac{49}{4}$.

Lời giải.

• $y'=4x^3-2x$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right.$.

• $y(-2)=25$, $y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{51}{4}$, $y(0)=13$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{51}{4}$, $y(3)=85$. Vậy $\min\limits_{[-2;3]}y=\dfrac{51}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$.

A. $\min y=2$. **B.** $\min y=1$. **C.** $\min y=-1$. **D.** $\min y=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;1]$.

$$\begin{aligned}y'&=0\\\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}&=0\\\Rightarrow 1-2x^2&=0\\\Leftrightarrow x&=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Có $y(\pm1)=0$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$, $y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $\min y=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+1+\dfrac{4}{x}$ trên $[1;3]$.

A. $\min\limits_{x\in[1;3]}y=4$. **B.** $\min\limits_{x\in[1;3]}y=\dfrac{16}{3}$. **C.** $\min\limits_{x\in[1;3]}y=5$. **D.** $\min\limits_{x\in[1;3]}y=6$.

Lời giải.

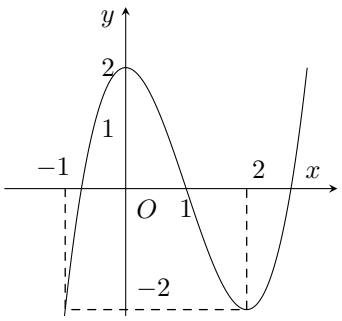
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-2,\\&x=2.\end{aligned}\right.$

Ta có $y(1)=6; y(2)=5; y(3)=\dfrac{16}{3}$ nên $\min\limits_{x\in[1;3]}y=y(2)=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$.



A. $\max\limits_{[0;1]} y = 2; \min\limits_{[0;1]} y = 1$.

B. $\max\limits_{[0;1]} y = 0; \min\limits_{[0;1]} y = -2$.

C. $\max\limits_{[0;1]} y = 2; \min\limits_{[0;1]} y = -2$.

D. $\max\limits_{[0;1]} y = 2; \min\limits_{[0;1]} y = 0$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên nó có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Theo đồ thị ta có hàm số hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ hay $f'(x) \le 0$ với mọi x thuộc $[0;1]$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]} y = 2$ tại $x = 0$ và $\min\limits_{[0;1]} y = 0$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 59.

Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng đã cho.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$		‖ $+\infty$			-4		$+\infty$

A. $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x) = 5$..

B. $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x) = -4$.

C. $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x) = 1$.

D. $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x) = 2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x) = -4$.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên $[-1;2]$.

A. 6. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 11.

Lời giải.

Có $y' = 6x^2 + 6x - 12$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ta có $f(-1) = 15$, $f(1) = -5$, $f(2) = 6$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $f(-1) = 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Giả sử M, m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};3\right]$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{35}{6}$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ xác định và liên tục với mọi $x \in \left[\dfrac{1}{2};3\right]$.

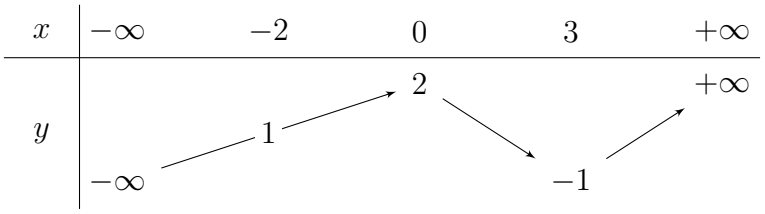
$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2};3\right] \\ x = -1 \notin \left[\dfrac{1}{2};3\right] \end{array}\right.$$

$y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$; $y(3) = \dfrac{10}{3}$; $y(1) = 2$. Suy ra $M = \dfrac{10}{3}$, $m = 2$ và do đó $M + m = \dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 62.

Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Gọi $M = \max\limits_{[-2;3]} y$ và $m = \min\limits_{[-2;3]} y$. Tìm giá trị của M và m.



A. $\begin{cases} M = 3 \\ m = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} M = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} M = 2 \\ m = -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $m = -1$ và $M = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 + 3x^2 - 5$ trên đoạn $[-2; \sqrt{2}]$ là

A. $M = 23$. **B.** $M = 25$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = 28$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $\begin{cases} y(-2) = 23 \\ y(0) = -5 \\ y(\sqrt{2}) = 5. \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $M = 23$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

A. có giá trị nhỏ nhất là -1. **B.** có giá trị lớn nhất là -1.

C. có giá trị lớn nhất là 3. **D.** có giá trị nhỏ nhất là 3.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	3	↘	$-\infty$

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} y = 3$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1, và có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{3}$.

C. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

Lời giải.

Khẳng định đúng là "Hàm số có hai điểm cực trị".

Chọn đáp án A □

Câu 66. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -4\sqrt{3-x}$ là

A. -4. **B**. 0. **C**. 3. **D**. -3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 3]$.

Ta có $-4\sqrt{3-x} \le 0$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$. Vậy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 0.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ trên $[-2; 2]$ lần lượt là

A. 7 và -20. **B**. 7 và 2. **C**. 7 và -1. **D**. 7 và 0.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 3 \notin [-2; 2]. \end{array}\right.$

$y(-2) = 0; y'(-1) = 7; y'(2) = -20$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = 7; \min\limits_{[-2;2]} y = -20$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Hàm số nào sau đây **không** có GTLN, GTNN trên $[-2; 2]$?

A. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **B**. $y = x^2$. **C**. $y = -x + 1$. **D**. $y = x^3 + 2$.

Lời giải.

Xét

① $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Điều kiện xác định $x \ne -1$.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$, với mọi $x \ne -1$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		-1		2
y'		$+$		$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Vậy hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ không có GTLN và GTNN trên đoạn $[-2;2]$.

② $y = x^2$.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2x$. Do đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Do đó trên đoạn $[-2;2]$, GTLN của hàm số là 4 và GTNN của hàm số là 0.

③ $y = -x + 1$.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -1 < 0$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		2
y'		$-$	
y	3	$\searrow$	-1

Do đó trên đoạn $[-2;2]$, GTLN của hàm số là 3 và GTNN của hàm số là -1.

④ $y = x^3 + 2$.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 \geq 0$. Ta có bảng biến thiên

x	-2		2
y'		$+$	
y	-6	$\nearrow$	10

Do đó trên đoạn $[-2;2]$, GTLN của hàm số là 10 và GTNN của hàm số là -6.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$. Khi đó $M - m$ nhận kết quả nào sau đây?

A. $M - m = 1$. **B.** $M - m = 86$. **C.** $M - m = 76$. **D.** $M - m = 81$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-4;4] \\ x = 3 \in [-4;4] \end{array}\right.$.

$y(-1) = 40$, $y(3) = 8$, $y(-4) = -41$, $y(4) = 15$.

$\Rightarrow M = 40$, $m = -41$.

Vậy $M - m = 81$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** -5. **C.** $-\dfrac{7}{2}$. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(1-x)^2} > 0$, $\forall x \neq 1$, suy ra hàm số đồng biến trên $[2;3]$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[2;3]$ là $f(2) = -5$.

Chọn đáp án B □

Câu 71.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

Tìm khẳng định **đúng**?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .

C. Hàm số có đúng một cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$..

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - \dfrac{2}{3}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** -9. **C.** $-\dfrac{11}{3}$. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 6x + 5$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Có $f(0) = -\dfrac{2}{3}$, $f(1) = \dfrac{5}{3}$, $f(3) = -\dfrac{11}{3}$.

Vậy $\min\limits_{x\in[0;3]} f(x) = -\dfrac{11}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Tìm giá trị nhỏ nhất N của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $N = 3$. **B.** $N = 2$. **C.** $N = 4$. **D.** $N = -5$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ với mọi $x \in [1;2]$. $y(1) = 3$, $y(2) = 4$. Vậy $N = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	
y	0	↗	3	↘	$-\infty$ | -3	↗	10

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 10. **B.** Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 10$.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{\text{CT}} = -3$. **D.** Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số xác định và có đạo hàm đổi dấu từ + sang − tại $x = 0$ nên hàm số đại cực đại tại $x = 0$, $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 14$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 13$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = -4$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 23$.

Lời giải.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

$y(0) = 5$; $y(-1) = y(1) = 4$; $y(-2) = y(2) = 13$. Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó $M - m$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 77. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $\min\limits_{[-1;1]} y = -2$. **B.** $\min\limits_{[-1;1]} y = 4$. **C.** $\min\limits_{[-1;1]} y = -1$. **D.** $\min\limits_{[-1;1]} y = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -1 \in [-1;1]. \end{array}\right.$$

Ta có: $y(-1) = 0, y(0) = -1, y(1) = 4$ suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y = y(0) = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 3$. **B.** $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 2$. **C.** $\max\limits_{x\in[0;2]} y = \dfrac{5}{3}$. **D.** $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-3)^2} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[0;2] \Rightarrow \max\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 79. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 0$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = 7$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [2;4] \\ x = -1 \notin [2;4] \end{array}\right.$.

Lại có $y(1) = 3$; $y(2) = 7$; $y(4) = 57$.

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y = y(1) = 3$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 80. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;1]$ đạt tại $x = x_0$. Giá trị x_0 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 81. Đồ thị của hàm số nào dưới đây không có tiệm cận đứng?

A. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x}$. **B.** $y = \dfrac{2}{x-2}$. **C.** $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x+1}$.

Lời giải.

① Hàm số $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x}$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

② Hàm số $y = \dfrac{2}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x = 2$.

③ Hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x+1}$ không có tiệm cận đứng.

④ Hàm số $y = \dfrac{x^3 - 1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 82. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \notin [-1;2]. \end{array}\right.$$

Và $y(-1) = 2$; $y(0) = 5$; $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$; $y(2) = 5 \Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y = 1$ khi $x = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 83. Tìm GTLN của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;4]$.

A. 2. **B.** 20. **C.** 18. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Ta có $y(0) = 2$; $y(4) = 18$; $y(2) = -2$.

Vậy GTLN của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ là 18.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+5}$ trên đoạn $[-1;3]$ là

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{11}{(x+5)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Xét trên đoạn $[-1;3]$ thì $\max\limits_{x\in[-1;3]} y = y(3) = \dfrac{5}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Tìm giá trị m nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m = -2$. **B.** $m = 11$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{11}{3} \end{array}\right.$.

Khi đó $y(0) = -2, y(1) = 3$ và $y(2) = 0 \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 1$ trên đoạn $[-1;3]$.

A. $m = -11$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = -10$. **D.** $m = -26$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x$.

Phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = \sqrt{3} \text{ (nhận)} \\ x = -\sqrt{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi đó

$$y(0) = -1;\ y\left(\sqrt{3}\right) = -10;\ y(-1) = -6;\ y(3) = 26.$$

Vậy $m = \min\limits_{x\in[-1;3]} y = -10$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2} < 0$ với mọi $x \in [0;2]$ nên hàm số nghịch biến trên $[0;2]$. Từ đó suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+1$ trên $[1;2]$. Khi đó tổng $M+N$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin [1;2] \\ x=2 \in [1;2] \end{array}\right.$.

Ta lại có $y(1)=-1$ và $y(2)=-3$ nên $\min\limits_{[1;2]} y=-3$ và $\max\limits_{[1;2]} y=-1$. Do đó $M+N=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là

A. 6 và -12. **B.** 6 và -13. **C.** 5 và -13. **D.** 6 và -31.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-8x^3+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Nhận thấy $f(0)=3$, $f(1)=5$ và $f(2)=-13$, từ đó suy ra trên đoạn $[0;2]$ giá trị lớn nhất của hàm số là 5 và giá trị nhỏ nhất là -13.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4-3x^2+2017$ trên $\mathbb{R}$.

A. $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2017$. **B.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2016$. **C.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2015$. **D.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2014$.

Lời giải.

Ta có $f(x)\le 2017, \forall x\in\mathbb{R}$. Dẳng thức xảy ra khi $x=0$.

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2017$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

A. $\min\limits_{x\in[2;3]} y=-3$. **B.** $\min\limits_{x\in[2;3]} y=3$. **C.** $\min\limits_{x\in[2;3]} y=2$. **D.** $\min\limits_{x\in[2;3]} y=4$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

Ta có $y'=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Dễ thấy $y'<0$, $\forall x\in[2;3]$ do đó hàm số nghịch biến trên $[2;3]$.

Khi đó $\min\limits_{x\in[2;3]} y=y(3)=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+3$ trên đoạn $\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$ là

A. -20. **B.** 5. **C.** -15. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

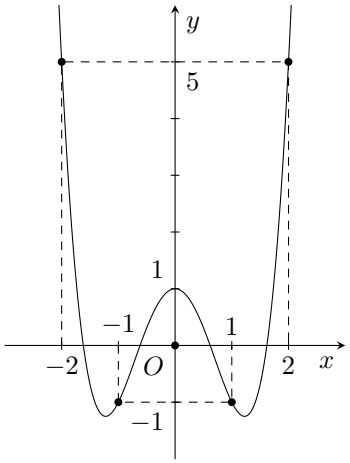
$y(-3) = -15$; $y(-1) = 5$; $y(1) = 1$; $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{15}{8}$.

Vì hàm số liên tục trên $\left[-3; \dfrac{3}{2}\right]$, Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \dfrac{3}{2}\right]$ là: -15.

Chọn đáp án C □

Câu 93.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1; 2]$ bằng



A. 5. **B**. 2.

C. 1. **D**. Không xác định.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B**. -5. **C**. 5. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \neq 3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ là $y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. 0. **B**. 5. **C**. 7. **D**. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[2; 4]$ như sau

x	2		4
y'		$+$	
y	7	↗	57

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[2;4]$ là $y(2)=7$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2+12$ trên đoạn $[-3;1]$.

A. 66. **B.** 72. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+6x$. Trên $(-3;1)$, $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ -3<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.

$f(-3)=66$, $f(0)=12$, $f(2)=14$.

Do hàm số liên tục trên $[-3;1]$ nên giá trị lớn nhất của hàm số là $f(-3)=66$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $\min\limits_{[-1;1]} y=-2$. **B.** $\min\limits_{[-1;1]} y=4$. **C.** $\min\limits_{[-1;1]} y=-1$. **D.** $\min\limits_{[-1;1]} y=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2+6x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-1\in[-1;1]. \end{array}\right.$

Ta có: $y(-1)=0, y(0)=-1, y(1)=4$ suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=y(0)=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ trên $[0;2]$. Tính giá trị biểu thức $M+m$.

A. $M+m=-\dfrac{4}{3}$. **B.** $M+m=-\dfrac{2}{3}$. **C.** $M+m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $M+m=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-4x+3$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Lại có $y(0)=-1$, $y(1)=\dfrac{1}{3}$, $y(2)=-\dfrac{1}{3}$.

Do đó $m=\min\limits_{[0;2]} y=-1$, $M=\max\limits_{[0;2]} y=\dfrac{1}{3}$. Suy ra $M+m=-\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[-5;7)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ liên lục và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hãy chọn mệnh đề đúng.

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	
y		6 ↘	2	↗ 9	

A. $M=9$, $m=2$. **B.** M và m không tồn tại.

C. $M = 6$, $m = 2$. **D**. M không tồn tại, $m = 2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m = 2$ và M không tồn tại.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ trên đoạn $[1; 3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} y = 2$. **B**. $\max\limits_{[1;3]} y = -3$. **C**. $\max\limits_{[1;3]} y = -1$. **D**. $\max\limits_{[1;3]} y = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Lại có $y(1) = -3$, $y(2) = -5$, $y(3) = -1$ nên $\max\limits_{[1;3]} y = y(3) = -1$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. C	5. B	6. C	7. D	8. B	9. C	10. A
11. B	12. B	13. C	14. B	15. A	16. B	17. B	18. C	19. C	20. D
21. A	22. C	23. D	24. C	25. A	26. C	27. B	28. C	29. A	30. D
31. C	32. C	33. B	34. A	35. D	36. A	37. A	38. D	39. D	40. D
41. A	42. B	43. B	44. B	45. C	46. B	47. B	48. C	49. A	50. C
51. D	52. A	53. B	54. B	55. C	56. D	57. C	58. D	59. B	60. C
61. D	62. C	63. A	64. C	65. A	66. B	67. A	68. A	69. D	70. B
71. D	72. C	73. A	74. D	75. B	76. D	77. C	78. C	79. D	80. A
81. C	82. B	83. C	84. D	85. A	86. C	87. D	88. B	89. C	90. A
91. C	92. C	93. A	94. D	95. C	96. A	97. C	98. B	99. D	100. C

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tìm tập giá trị T của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$.

A. $T=[1;9]$. **B.** $T=[0;2\sqrt{2}]$. **C.** $T=(1;9)$. **D.** $T=[2\sqrt{2};4]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[1;9]$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}, \forall x\in(1;9)$.

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x=5\in(1;9)$.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathscr{D}$, có $y(1)=2\sqrt{2}, y(9)=2\sqrt{2}, y(5)=4$.

Do đó tập giá trị của hàm số là $T=[2\sqrt{2};4]$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+2$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$. Tính $(M+m)$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(0;3)\\x=2\in(0;3)\end{array}\right.$

$y(0)=2; y(2)=6; y(3)=2$. Vậy $M=6; m=2\Rightarrow M+m=8$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Kết luận nào là đúng về GTLN và GTNN của hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$?

A. Không có GTLN và không có GTNN. **B.** Có GTLN và không có GTNN.

C. Có GTLN và GTNN. **D.** Có GTNN và không có GTLN.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Tìm TXĐ: $\mathscr{D}=[a;b]$ của hàm số.

+ Tính y', giải phương trình $y'=0$ tìm các nghiệm $x_i\in\mathscr{D}$ với $i=1,2,\ldots$

+ Tính $y(a), y(b), y(x_i)$. So sánh các kết quả và kết luận.

Cách giải: TXĐ $\mathscr{D}=[0;1]$.

Ta có $y=\sqrt{x-x^2}\Rightarrow y'=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 1-2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\in[0;1]$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$ có $y(0)=y(1)=0, y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số có GTNN là 0 và GTLN là $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]}y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$. **B.** $m>6$. **C.** $m<1$. **D.** $3<m\le 6$.

Lời giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Với $m=1\Rightarrow y=1, \forall x\in[0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]}y\neq 3$. Suy ra $m\neq 1$.

Khi đó $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại)

TH2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn)

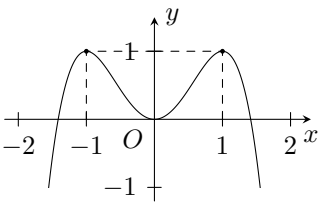
Chọn đáp án D □

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Phương trình $1 - 2f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B**. 3. **C**. Vô nghiệm. **D**. 2.



Lời giải.

Phương trình $1 - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$ (1).

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $(d): y = \dfrac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt

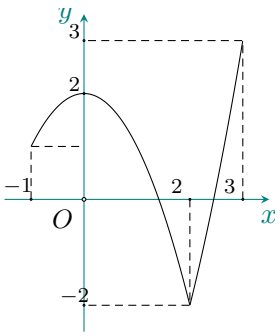
Nên phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta được $M = 3$, $m = -2$ nên $M - m = 3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M - m$.

A. 4. **B**. 9. **C**. 1. **D**. 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 1$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -2 \notin [1;3]. \end{array}\right.$

Ta tính được $f(1) = 6$, $f(2) = 5$, $f(3) = \dfrac{16}{3}$.

Kết hợp với $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ nên $M = \max\limits_{x\in[1;3]} f(x) = 6 = f(1)$ và $m = \min\limits_{x\in[1;3]} f(x) = 5 = f(2)$.

Vậy $M - m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tính $M - m$.

A. $M-m=2\sqrt{2}$. **B.** $M-m=2\sqrt{2}+2$. **C.** $M-m=4$. **D.** $M-m=2\sqrt{2}-2$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Ta có $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Do $y(-2)=-2, y(2)=2, y\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Vậy $M=2\sqrt{2}, m=-2$, suy ra $M-m=2\sqrt{2}+2$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$. Tính $3M+2m$.

A. $3M+2m=\dfrac{16}{3}$. **B.** $3M+2m=15$. **C.** $3M+2m=14$. **D.** $3M+2m=12$.

Lời giải.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left[\dfrac{1}{3};3\right]\\x=-1\notin\left[\dfrac{1}{3};3\right]\end{array}\right.$.

Lại có $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{10}{3}; y(1)=2, y(3)=\dfrac{10}{3}$.

Vậy $M=\dfrac{10}{3}$, $m=2$ suy ra $3M+2m=3\cdot\dfrac{10}{3}+2\cdot 2=14$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{65}{3}$. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $\dfrac{52}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ xác định và liên tục trên $[1;3]$. Khi đó

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}; f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2.\end{array}\right.$$

Nhận thấy: $-2\notin[1;3]\Rightarrow x=-2$ (loại).

$f(1)=5$; $f(2)=4$; $f(3)=\dfrac{13}{3}$. Khi đó: $\max\limits_{[1;3]}f(x)=5$; $m=\min\limits_{[1;3]}f(x)=4$. Vậy $M.m=20$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 15.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=6x^2+6x-12\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[-1;2]\\x=-2\notin[-1;2].\end{array}\right.$

Mà $f(-1)=15, f(1)=-5, f(2)=6$.

Do đó $\max\limits_{[-1;2]}f(x)=f(-1)=15$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$.

$y(0)=1; y(1)=3; y(2)=-1$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} y=3; \min\limits_{[0;2]} y=-1$. Vậy $\max\limits_{[0;2]} y+\min\limits_{[0;2]} y=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};3\right]$.

Khi đó, $3M+m$ bằng

A. 12. **B.** $\dfrac{35}{6}$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** 10.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};3\right]$. Ta có $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in\left[\dfrac{1}{2};3\right] \\ x=-1\notin\left[\dfrac{1}{2};3\right] \end{array}\right.$

Mà $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$, $y(1)=2$, $y(3)=\dfrac{10}{3}$.

Suy ra $M=\max\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y=\dfrac{10}{3}$ và $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y=2$.

Vậy $3M+m=12$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x^2}-x$ bằng

A. $2+\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $2-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Ta có $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}-1=\dfrac{-x-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}$.

$y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y=2$, $\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y=-\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y+\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} y=2-\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

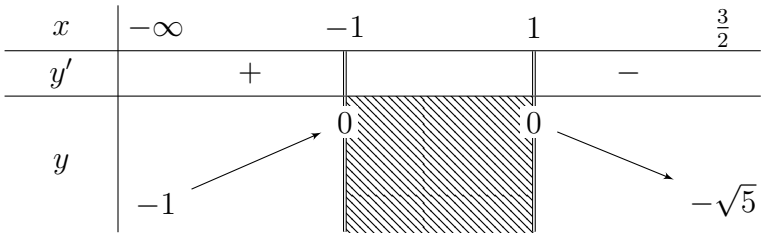
Câu 15. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính $P=M+m$.

A. $P=2$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-\sqrt{5}$. **D.** $P=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1-2x}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$, $y'=0\Leftrightarrow 1-2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\notin\mathscr{D}$.

Bảng biến thiên



Vậy $M=\max\limits_{\mathscr{D}} y=0$ và $m=\min\limits_{\mathscr{D}} y=-\sqrt{5}$.

Do đó $P=-\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+3x+1$ trên đoạn $[1;3]$ là

A. $\min\limits_{[1;3]} f(x)=3$. **B.** $\min\limits_{[1;3]} f(x)=6$. **C.** $\min\limits_{[1;3]} f(x)=37$. **D.** $\min\limits_{[1;3]} f(x)=5$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2+3>0$ với mọi x. Lại có $f(1)=5$, $f(3)=37$ nên $\min\limits_{[1;3]} f(x)=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên đoạn $[a;b]$.

B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

C. Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

D. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu trên đoạn $[a;b]$.

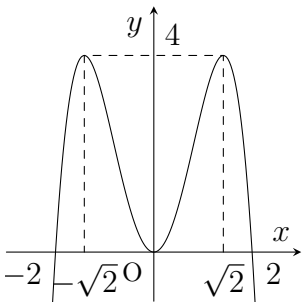
Lời giải.

Theo định lý về tính liên tục trên một đoạn thì hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

Chọn đáp án C □

Câu 18.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là



A. $\max\limits_{[0;2]} f(x)=\sqrt{2}$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} f(x)=2$.

C. $\max\limits_{[0;2]} f(x)=0$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} f(x)=4$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(\sqrt{2})=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m?

A. $m = 5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$.

$y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

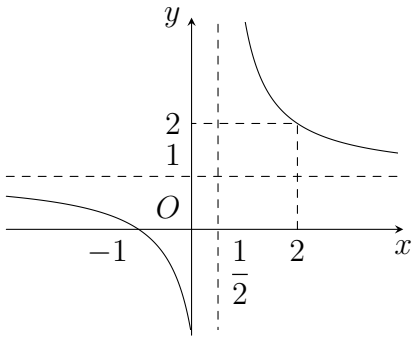
x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	$+\infty$	↘	‖	↘	4	↗	$+\infty$

$\Rightarrow m = \min\limits_{(1;+\infty)} y = 4$ khi $x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2$. **B.** $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 0$.

C. $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$. **D.** $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải.

Từ đồ thị dễ thấy hàm số nghịch biến và liên tục trên $[-3; 0]$ nên $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 4x^2 + 1$ trên $[-1; 3]$. Tính giá trị của $2M + m$.

A. 4. **B.** -5. **C.** 12. **D.** -6.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - 4x^2 + 1$ trên [-1;3].

Ta có: $y' = 2x^3 - 8x$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin [-1; 3] \\ x = 0 \in [-1; 3] \\ x = 2 \in [-1; 3] \end{array}\right.$.

Lại có: $y(0) = 1$, $y(-1) = -\dfrac{5}{2}$, $y(3) = \dfrac{11}{2}$ và $y(2) = -7$.

Do đó $M = \dfrac{11}{2}$ và $m = -7 \Rightarrow 2M + m = 11 - 7 = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 18$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

A. 2. **B.** 11. **C.** 27. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 16x$.

$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^3 - 16x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \quad \text{(loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta có $y(-1) = 11, y(0) = 18, y(1) = 11, y(2) = 2, y(3) = 27$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \subset [1; \dfrac{3}{2}]$. Khi đó $T = m \cdot M$ bằng

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \{2\}$.
Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \dfrac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$.
Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$.
Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$4-2\sqrt{2}$	↘		↗	$4+2\sqrt{2}$
			1		

Từ bảng biến thiên suy ra $M = 0; m = \sqrt{5}$.
Vậy $T = m \cdot M = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -7$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -4$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -2$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{67}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \\ & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 4x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \quad \text{(nhận)} \\ x = -\dfrac{2}{3} \quad \text{(loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta lại có $f(1) = -4, f(2) = -7, f(3) = -2$.
Vậy : $\max\limits_{[1;3]} f(x) = -2$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-3; -1]$ là
A. -5. **B.** -6. **C.** -4. **D.** 5.

Lời giải.

Hàm số đã xác định và liên tục trên $[-3; -1]$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \in [-3; -1] \\ \\ x = 2 \notin [-3; -1] \end{array}\right.$

Lại có $y(-3) = -\dfrac{10}{3}; y(-1) = -4; y(-2) = -3 \Rightarrow \min y = -4$.
Chọn đáp án C □

Câu 26. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$. Khi đó $M - m$ bằng
A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$. **C.** $2 - \sqrt{2}$. **D.** $2\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.
Ta có $y' = 1 - \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -1 \Leftrightarrow -x = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

Khi đó $y(2) = 2; y(-2) = -2; y\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$.
Suy ra $m = y\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}, M = y(2) = 2$. Vậy $M - m = 2 + 2\sqrt{2} = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại:
A. $x = \pm 2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 0; x = 2$. **D.** $x = 0; x = -2$.

Lời giải.

TXĐ: $D = [-2; 2]$.
Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó: $y(-2)=0; y(0)=2; y(2)=0$

$\Rightarrow$Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x=\pm 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng:

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $\dfrac{13}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ bằng cách:

☑ Giải phương trình $y'=0$ tìm các nghiệm x_i .

☑ Tính các giá trị $f(a); f(b); f(x_i)\quad (x_i\in[a;b])$. Khi đó:

$\min\limits_{[a;b]} f(x)=\min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

$\max\limits_{[a;b]} f(x)=\max\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

Cách giải:

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-2\notin[1;3]\end{array}\right.$

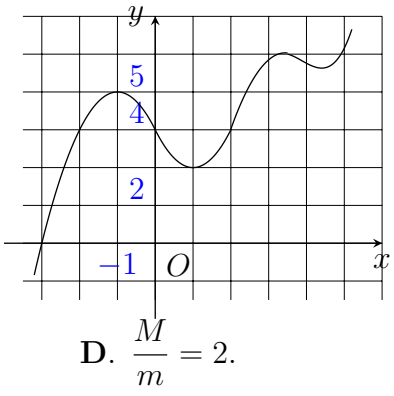
$f(1)=5; f(2)=4; f(3)=\dfrac{13}{3}$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=4.$

Chọn đáp án B □

Câu 29.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau.



A. $M+m>7$. **B.** $Mm>10$. **C.** $M-m=3$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho và biến đổi, đặt ẩn phụ để tìm đáp án đúng.

Cách giải:

Đặt $t=x^2-2x, x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]\Rightarrow t\in\left[-1;\dfrac{21}{4}\right]$

Từ đồ thị hàm số ta xét hàm số $y=f(t),\quad t\in\left[-1;\dfrac{21}{4}\right]$

$m=\min\limits_{\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t)=f(2)=2$

$M=\max\limits_{\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t)>f\left(\dfrac{21}{4}\right)=5$

$M+m>7.$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4-x^2}$. Tính tổng $M + m$.

A. $2 - \sqrt{2}$. **B.** $2\left(1 - \sqrt{2}\right)$. **C.** $2\left(1 + \sqrt{2}\right)$. **D.** 4.

Lời giải.

Điều kiện $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

Mà $y(2) = 2$, $y(-2) = -2$, $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. Suy ra $M + m = 2 - 2\sqrt{2} = 2\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \dfrac{1}{x}$ trên $(0; 3]$ bằng

A. $\dfrac{28}{9}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \in (0; 3]$. Do đó $\max\limits_{(0;3]} y = y(3) = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là m. Tính giá trị biểu thức $P = M^2 + m^2$.

A. $P = \dfrac{1}{4}$. **B.** $P = \dfrac{1}{2}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

① Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

② $y' = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

③ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

④ Từ bảng biến thiên ta có $m = -\dfrac{1}{2}$ và $M = \dfrac{1}{2}$. Vậy $P = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0$, $\forall x \in [-1; 1]$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 2]$ bằng -4?

A. $m = -8$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = -\dfrac{80}{27}$.

Lời giải.

① Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = 3 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

② Ta có $y(1) = m + 4$, $y(0) = m$, $y(2) = m + 2$. Rõ ràng $m < m + 2 < m + 4$ nên $\max\limits_{[0;2]} y = m + 4$.

③ Theo giả thiết ta có $m + 4 = -4 \Leftrightarrow m = -8$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ trên đoạn $\left[-1; \dfrac{1}{2}\right]$. Khi đó tích $M \cdot m$ bằng

A. $\dfrac{45}{4}$. **B.** $\dfrac{212}{27}$. **C.** $\dfrac{125}{36}$. **D.** $\dfrac{100}{9}$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ xác định và liên tục trên $\left[-1; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có $y' = -3x^2 + 4x - 1$ và $y' = 0$ có một nghiệm thuộc $\left[-1; \dfrac{1}{2}\right]$ là $x = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác $y(-1) = 6$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{50}{27}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{15}{8}$.

Vậy $M = \max\limits_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]} y = 6$, $m = \min\limits_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]} y = \dfrac{50}{27}$.

Do đó $M \cdot m = \dfrac{100}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{-3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. -2. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{-3x - 1}{x + 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$.

Lại có $y(1) = -2$, $y(3) = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} y = -2$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng -1.
B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.
C. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3.
D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3.

Lời giải.

Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có $y' = -3x^2 + 3$.

Phương trình $y' = 0$ chỉ có nghiệm $x = 1$ thuộc $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	3	↘	$-\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 tại $x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

A. 2. **B**. $\sqrt{2}$. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Với $x > 0$ ta luôn có $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ (hệ quả bất đẳng thức AM-GM).

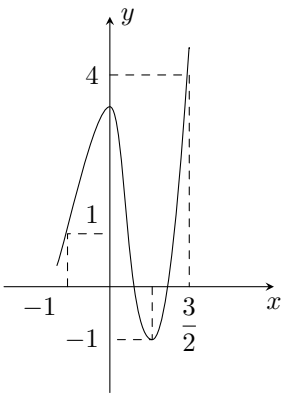
Suy ra $\sqrt{x + \dfrac{1}{x}} \geq \sqrt{2}$ với mọi $x > 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $x > 0$ và $x = \dfrac{1}{x}$ hay $x = 1$.

Do đó giá nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$ trên $(0; +\infty)$ bằng $\sqrt{2}$ khi $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \dfrac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \dfrac{3}{2}\right]$ là



A. $M + m = \dfrac{7}{2}$. **B**. $M + m = -3$.

C. $M + m = \dfrac{5}{2}$. **D**. $M + m = 3$.

Lời giải.

Theo đồ thị ta có

$$M = \max_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = 4;\ m = \min_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = -1.$$

Do đó $M + m = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$, một học sinh làm như sau:

(1). Tập xác định $\mathscr{D} = [-1; 4]$ và $y' = \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$.

(2). Hàm số không có đạo hàm $x = -1, x = 4$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

(3). Kết luận. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{5}{2}$ khi $x = \dfrac{3}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1, x = 4$.

Cách giải trên

A. Cả ba bước (1),(2),(3) đều đúng. **B**. Sai từ bước (2).

C. Sai ở bước (3). **D**. Sai từ bước (1).

Lời giải.

☑ Tập xác định :

$$\begin{aligned} & -x^2+3x+4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 4 \\ \Rightarrow\ & \mathscr{D}=[-1;4]. \end{aligned}$$

☑ $y'=\dfrac{-3x+2}{2\sqrt{-x^2+3x+4}}$.

Nên cách giải trên sai từ bước 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là

A. 6 và -12. **B**. 6 và -13. **C**. 5 và -13. **D**. 6 và -31.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-8x^3+8x=-8x(x^2-1)=-8x(x-1)(x+1)$.

Xét $f(0)=3$, $f(1)=5$ và $f(2)=-13$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Gọi A, B lần lượt là các giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+2m}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B=\dfrac{19}{2}$.

A. $m=1; m=-3$. **B**. $m=-1; m=3$. **C**. $m=\pm 3$. **D**. $m=-4$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất đơn điệu trên trên từng khoảng xác định của nó.

Cách giải:

TXĐ: $D=R\backslash\{2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-2.1-1.(m^2+2m)}{(x-2)^2}=\dfrac{-m^2-2m-2}{(x-2)^2}=\dfrac{-(m+1)^2-1}{(x-2)^2}<0\forall x\in D\Rightarrow y'<0\forall x\in[3;4]$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[3;4]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[3;4]} y=y(4)=\dfrac{m^2+2m+4}{2}; \max\limits_{[3;4]} y=y(3)=m^2+2m+3$

$\Rightarrow A=\dfrac{m^2+2m+4}{2}; B=m^2+2m+3$

Theo bài ra ta có $A+B=\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow\dfrac{m^2+2m+4}{2}+m^2+2m+3=\dfrac{19}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{m^2+2m+4+2m^2+4m+6}{2}=\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow 3m^2+6m-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{16}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ bằng:

A. 24. **B**. 20. **C**. 12. **D**. $\dfrac{155}{12}$.

Lời giải.

Phương pháp: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ bằng cách:

+) Giải phương trình $y'=0$ tìm các nghiệm x_1.

+) Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_i)\,(x_i\in[a;b])$.

Khi đó: $\min\limits_{[a;b]} f(x)=\min\{f(a),f(b),f(x_i)\}$, $\max\limits_{[a;b]} f(x)=max\{f(a),f(b),f(x_i)\}$.

Cách giải: Ta có: $y'=2x-\dfrac{16}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 2x^3=\dfrac{16}{x^2}\Leftrightarrow 2x^3=16\Leftrightarrow x=2\in\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{155}{12}; y(2)=12; y(4)=20$ Vậy $\max\limits_{\left[\frac{3}{4};4\right]} y=20$ khi$x=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2+12$ trên đoạn $[-3;1]$.

A. 66. **B**. 72. **C**. 10. **D**. 12.

Lời giải.

Xét hàm số $y=-x^3+3x^2+12$ trên đoạn $[-3;1]$.

Ta có $y'=-3x^2+6x$.

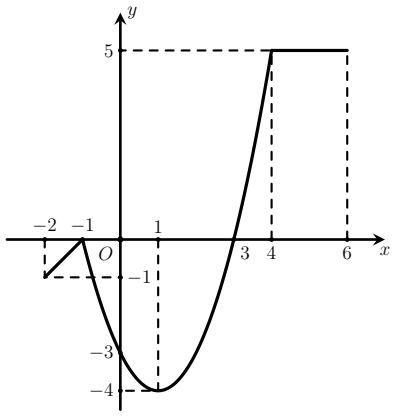
Xét $y'=0$ suy ra $-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$

x	-3		0		1
y'		$+$	0	$-$	
y	66	↗	12	↘	14

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{x\in[-3;1]} y=66$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$.

Giá trị của $M-m$ bằng:

A. 9. **B**. -8. **C**. -9. **D**. 8.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số trên đoạn từ $[-2;6]$ ta có $M=5$ và $m=-4$. Do đó $M-m=9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2-1$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính $M+m$.

A. 0. **B**. -9. **C**. -10. **D**. -1.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

$y'(-2) = -9$; $y'(-1) = 0$; $y'(0) = -1$; $y'(1) = 0$.

Hàm số có đạo hàm trên $(-2;1)$ và liên tục trên $[-2;1]$ suy ra $M = 0$, $m = -9$ và $M + m = -9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ là

A. $\left[2; 2\sqrt{2}\right]$. **B.** $[3;7]$. **C.** $\left[0; 2\sqrt{2}\right]$. **D.** $(3;7)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm Tập xác định của hàm số sau đó xét sự biến thiên, lập bảng biến thiên và tìm tập giá trị của hàm số.

Cách giải:

TXD $\mathscr{D} = [3;7]$.

Xét hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{7-x}}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{7-x} \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 7 - x \\ &\Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	3		5		7
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y		↗	$2\sqrt{2}$	↘	
	2				2

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $0 < m < 4$. **B.** $4 < m < 8$. **C.** $8 < m < 10$. **D.** $m > 10$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a;b]$ bằng cách:

+) Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i.

+) Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_i)$ $(x_i \in [a;b])$. Khi đó:

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}$

Cách giải:

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \dfrac{x+1-x-m}{(x+1)2} = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho là hàm bậc nhất trên bậc nhất nên hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định của hàm số.

Xét trên $[1;2]$ ta có: $y(1) = \dfrac{1+m}{2}$; $y(2) = \dfrac{2+m}{3}$ là các GTNN và GTLN của hàm số.

$\Rightarrow y(1) + y(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow 3m + 3 + 2m + 4 = 48 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5}$.

$\Rightarrow 8 < m < 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ trên đoạn $[1;3]$ bằng.

A. 2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x - 4; y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -\dfrac{2}{3} \notin [1;3] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(1) = 0;\ y(2) = -3;\ y(3) = 2$.

Nên $\max\limits_{[1;3]}\ y = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[1;4]$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. $\dfrac{65}{4}$. **B.** 16. **C.** $\dfrac{49}{4}$. **D.** 10.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in (1;4) \\ x = -3 \notin (1;4). \end{array}\right.$

Mặt khác $y(1) = 10, y(3) = 6, y(4) = \dfrac{25}{4}$, suy ra $m = 6$ và $M = 10$, nên $m + M = 16$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 1$ trên đoạn $[-3;2]$?

A. $\min\limits_{[-3;2]} y = 3$. **B.** $\min\limits_{[-3;2]} y = -3$. **C.** $\min\limits_{[-3;2]} y = -1$. **D.** $\min\limits_{[-3;2]} y = 8$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $y' = 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-3;2].$$

Có $y(-3) = 8$, $y(0) = -1$, $y(2) = 3$ nên $\min\limits_{[-3;2]} y = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $m + 2M$.

A. $m + 2M = 17$. **B.** $m + 2M = -37$. **C.** $m + 2M = 51$. **D.** $m + 2M = -24$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [0;4] \\ x = 3 \in [0;4]. \end{array}\right.$

$y(0) = 1$, $y(3) = -26$, $y(4) = -19$.

Vậy $M = \max\limits_{[0;4]} y = 1$, $m = \min\limits_{[0;4]} y = -26$ nên $m + 2M = -24$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x + 1}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $-\dfrac{15}{4}$. **B.** $-\dfrac{7}{2}$. **C.** -3. **D.** -4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $x = -1 \notin [1;3]$.

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -4 \notin [1;3]. \end{array}\right.$

Mà $f(1) = -\dfrac{7}{2}$; $f(3) = -\dfrac{15}{4}$; $f(2) = -4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[1;3]$ là $-\dfrac{7}{2}$

Chọn đáp án B □

Câu 54. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6 - x}$ trên $[-3;6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là

A. -12. **B.** -6. **C.** 18. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{6 - x}} > 0$, $\forall x \in [-3;6]$, suy ra hàm số đồng biến trên $[-3;6]$.

Do đó $M = f(6) = 12$, $m = f(-3) = -18$. Vậy $M + m = -6$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'	‖	$-$	0	$+$	‖
y	6	↘	2	↗	9

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{\text{CD}} = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = -1$.

Chú ý khi giải: Hàm số $y = f'(x)$ không xác định tại $x = 3$, nhưng $x = 3$ vẫn là điểm cực tiểu của hàm số vì qua điểm $x = 3$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m = 6$. **B**. $m = 4$. **C**. $m = 0$. **D**. $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(0) = m \\ y(-1) = m - 2 \\ y(1) = m - 4 \end{array}\right. \Rightarrow \min_{[-1;1]} y = m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 58.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

B. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.

C. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$.

D. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$, ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $f(-1) = 0$, $f(0) = 5$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$.

Mặt khác hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ nên $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$

A. $\max\limits_{[-1;2]} y = 11$. **B**. $\max\limits_{[-1;2]} y = 6$. **C**. $\max\limits_{[-1;2]} y = 15$. **D**. $\max\limits_{[-1;2]} y = 10$.

Lời giải.

Ta có : $y' = 6x^2 + 6x - 12$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

$y(-1) = 15; y(1) = -5; y(2) = 6$. Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y = 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 7$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 9. **B**. 7. **C**. 5. **D**. 6.

Câu 61. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là

A. $(-1;4)$. **B**. $(1;4)$. **C**. $(-1;-4)$. **D**. $(1;0)$.

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x) = |x + 2|$, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x = -2$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 0.

Lời giải.

Câu A sai, các câu còn lại đúng.

Vì Xét hàm số $y = f(x) = |x + 2|$, TXĐ : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$. Ta có $f(-x) = |-x + 2| = |x - 2| \neq \pm f(x)$. Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ trên $\mathbb{R}$.

$y = f(x) = |x + 2| = \sqrt{x^2 + 4x + 4} \Rightarrow y' = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}, \forall x \neq -2$

Chọn đáp án A □

Câu 63. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

A. $\min\limits_{[-4;2)} y=4$. **B.** $\min\limits_{[-4;2)} y=5$. **C.** $\min\limits_{[-4;2)} y=\dfrac{15}{2}$. **D.** $\min\limits_{[-4;2)} y=7$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=[-4;-2)$; $y'=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$;

$y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[-4;-2)\\x=-3\in[-4;-2)\end{array}\right.$.

Ta có

x	-4		-3		-2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

$y(-4)=\dfrac{15}{2}; y(-3)=7; \lim\limits_{x\to-2^-} y=+\infty$. Vậy $\min\limits_{[-4;2)} y=7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-3;2)$, có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-3		-1		1		2
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
y	-2 ‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3 ‖

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max\limits_{[-3;2)} y=3$. **B.** $\min\limits_{[-3;2)} y=-2$.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là 1. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số là -5 và $\min\limits_{[-3;2)} y=-5$ nên ta loại phương án B, C.

Vì $\max\limits_{[-3;2)} y=y(-1)=0$ nên ta loại phương án A và chọn phương án D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sin^2 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

A. π. **B.** 0. **C.** $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

$y'=1+\sin 2x$. $y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{R})$.

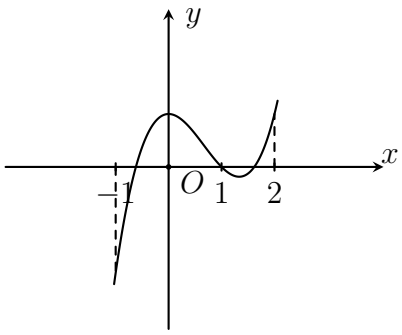
Vì $x\in[0;\pi]$ nên $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Ta có $y(0)=0; y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}; y(\pi)=\pi$, suy ra $\max\limits_{[0;\pi]} y=y(\pi)=\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 66.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ như trong hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $M=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

B. $M=\max\{f(-1);f(1);f(2)\}$.

C. $M=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

D. $M=f(0)$.

Lời giải.

Theo hình vẽ, hàm số $y'=f(x)$ đổi dấu 3 lần trên đoạn $[-1;2]$. Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$.

x	-1		x_1		1		x_2		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-1)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(2)$

Dựa vào bảng thiên trên ta suy ra $M=\max\{f(-1);f(1);f(2)\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-8x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $M=3;m=0$. **B.** $M=3;m=-13$. **C.** $M=5;m=0$. **D.** $M=5;m=-1$.

Câu 68. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $\max\limits_{[1;4]} y=\dfrac{7}{3}$. **B.** $\max\limits_{[1;4]} y=\dfrac{23}{5}$. **C.** $\max\limits_{[1;4]} y=-1$. **D.** $\max\limits_{[1;4]} y=\dfrac{7}{2}$.

Câu 69. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-4x+2$ trên đoạn $[-1;3]$ là

A. $y(-1)$. **B.** $y(2)$. **C.** $y(3)$. **D.** $y(0)$.

Câu 70. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-3x^4+4x^3+3$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-4;0]$ là

A. $y(-3)$. **B.** $y(0)$. **C.** $y(-1)$. **D.** $y(-4)$.

Câu 72. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=2$. **B.** $m=4$. **C.** $m=6$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$, khi đó bảng biến thiên

x	-1		0		1
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$ $m-2$		$m-4$ $\searrow$	

Từ đó ta có $m=2$ hoặc $m=4$, thử lại ta được $m=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho biết hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-2;2)$ là

A. 0. **B.** -1. **C.** -7. **D.** 3.

Câu 74. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-2x^2+8x+1$.

A. 2. **B.** 9. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 75. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$.

A. $\max=40;\min=-41$. **B.** $\max=15;\min=-41$.

C. $\max=40;\min=8$. **D.** $\max=40;\min=15$.

Câu 76. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+1$ trên $[-1;5]$?

A. -6. **B.** -3. **C.** -4. **D.** -5.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên tập $\mathscr{D}$, $x_\circ\in\mathscr{D}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 mà $x_1<x_2$ thì x_1 là điểm cực tiểu và x_2 là điểm cực đại.

B. Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathscr{D}$ chính là giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathscr{D}$.

C. Nếu $f'(x_\circ)=0$ và $f''(x_\circ)>0$ thì $x_\circ$ là điểm cực đại của hàm số.

D. Nếu $x_\circ$ là điểm cực đại của hàm số thì $f'(x_\circ)=0$.

Lời giải.

Đáp án A sai vì không xác định được điểm nào là cực đại, điểm nào là cực tiểu.

Đáp án B sai. Ví dụ hàm số $y=x^4-x^2$ đạt cực đại tại $x=0$ nhưng không có GTLN.

Đáp án C sai và x_0 là điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ là

A. 0. **B.** $\dfrac{6}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$. Do đó $\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} y = y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{6}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -x - \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-8;-1]$

A. $m = \dfrac{17}{2}$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = -4$.

Câu 80. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m = -\dfrac{1}{3}$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -\dfrac{13}{6}$.

Câu 81. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $m = \dfrac{9}{4}$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 0$.

Câu 82. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;4]$. Tìm M, m.

A. $M = 40, m = -8$. **B.** $M = 15, m = -41$. **C.** $M = 40, m = 8$. **D.** $M = 40, m = -41$.

Câu 83. Hàm số $\dfrac{x^3}{3} - x^2 - x$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[-1;3]$ tại hai điểm $x_1; x_2$. Tính giá trị của biểu thức $M = x_1 + x_2 + x_1.x_2$.

A. $M = \dfrac{11}{10}$. **B.** $M = \dfrac{9}{10}$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Xét trên $[-1;3]$ ta có: $y' = x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Tính: $y(-1) = -\dfrac{1}{3}; y(3) = -3; y\left(1-\sqrt{2}\right) = \dfrac{-5+4\sqrt{2}}{3}, y\left(1+\sqrt{2}\right) = -\dfrac{5+4\sqrt{2}}{3}$

Do vậy giá trị lớn nhất tại $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ và giá trị nhỏ nhất tại $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

Vậy $M = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1000$ trên $[-1;0]$.

A. 1000. **B.** -996. **C.** 1001. **D.** 1002.

Câu 85. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ bằng bao nhiêu?

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 86. Cho các số thực a và b với $a < b$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

B. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

C. Hàm số $y = f(x)$ luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(a;b)$ tùy ý.

D. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$ thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{18 - x^2}$ là:

A. 0. **B.** 6. **C.** $-3\sqrt{2}$. **D.** -6.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{18 - x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có: $y(3) = 6; y\left(3\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}; y\left(-3\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $-\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $N = \max\limits_{[a;b]} g(x)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\max\limits_{[a;b]}[7f(x)] = 7M$. **B.** $\max\limits_{[a;b]}[f(x).g(x)] = M.N$.

C. $\max\limits_{[a;b]}[f(x) - g(x)] = M - N$. **D.** $\max\limits_{[a;b]}[f(x) + g(x)] = M + N$.

Câu 89. Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng mấy?

A. $M = 2$. **B.** $M = \dfrac{10}{3}$. **C.** $M = 3$. **D.** $M = \dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{(x + 1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

$y(0) = 2, y(2) = \dfrac{8}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng $\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \dfrac{51}{2}$. **B.** $m = 13$. **C.** $m = \dfrac{51}{4}$. **D.** $m = \dfrac{49}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 2x$.

$$4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

Vì $f(-2) = 25, f(0) = 13, f(3) = 85, f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{51}{4}, f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{51}{4}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 3]$ bằng $\dfrac{51}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x} - 1$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

A. $m = \dfrac{13}{4}$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

$y' = 2x - \dfrac{2}{x^2}$.

$2x - \dfrac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có: $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{4}, y(1) = 2, y(2) = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ trên đoạn $[-3; 0]$ có giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m. Khi đó giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. -6. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 16.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$. Cho $y' = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 1 & \notin [-3; 0] \\ x = -1 & \in [-3; 0] \end{bmatrix}$.

$y(-3) = 16, y(-1) = -4, y(0) = -2$. Vậy $M = 16, m = -4$. Do đó $M + m = 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$. Tính giá trị $M + m$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + x)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 - 4x^4 - 4x^3 - 4x^2)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^3} = \frac{(1 - x^2)(1 + x^2) + 2x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{(1 - x^2)(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 1. \end{bmatrix}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} = 0$.

Suy ra $M = \dfrac{3}{4}, m = -\dfrac{1}{4}$. Vậy $M + m = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $-2\sqrt{2}$. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 95. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ trên đoạn $\left[-1; \dfrac{3}{2}\right]$ là

A. $-\dfrac{10}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 96. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$.

A. $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = 0$. **B.** $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -50$. **C.** $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = 15$. **D.** $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -41$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

$f(-4) = -41, f(4) = 15, f(-1) = 40, f(3) = 8$. Vậy $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -41$

Chọn đáp án D □

Câu 97. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$

A. $\min\limits_{[0;3]} y = -3$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y = -1$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y = 1$.

Câu 98. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$. Tính $M.n$.

A. 0. **B.** $\dfrac{513}{512}$. **C.** $\dfrac{1}{512}$. **D.** 1.

Câu 99. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = -2\sqrt{4-x}$.

A. $M = -4$. **B.** $M = -2$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \leq 4$.

Ta có $y = -2\sqrt{4-x} \leq 0, \forall x \leq 4$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 4$. Do đó $M = \max\limits_{(-\infty;4]} y = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{(x+3)^2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 2. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 12.

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. C	4. D	5. A	6. D	7. C	8. B	9. C	10. B
11. D	12. A	13. A	14. D	15. C	16. D	17. C	18. D	19. B	20. C
21. A	22. A	23. B	24. C	25. C	26. D	27. A	28. B	29. A	30. B
31. C	32. B	33. B	34. A	35. D	36. A	37. C	38. B	39. D	40. D
41. C	42. A	43. B	44. A	45. A	46. B	47. A	48. C	49. A	50. B
51. C	52. D	53. B	54. B	55. A	56. C	57. B	58. D	59. C	60. A
61. A	62. A	63. D	64. D	65. A	66. B	67. B	68. D	69. B	70. A
71. B	72. B	73. D	74. B	75. A	76. A	77. D	78. B	79. B	80. D
81. D	82. D	83. C	84. D	85. A	86. A	87. C	88. A	89. D	90. C
91. D	92. B	93. D	94. A	95. B	96. D	97. C	98. C	99. D	100. D

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Giá trị lớn nhất cả hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}-\sqrt{(x-1)(5-x)}+5$ là

A. Không tồn tại. **B**. 0. **C**. 7. **D**. $3+2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $1\le x\le 5$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x},\ t\ge 0$.

Ta có $t^2=4+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{5-x}\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(5-x)}=\dfrac{t^2-4}{2}$.

Do $\sqrt{(x-1)(5-x)}\ge 0,\ \forall x\in[1;5]$ nên $\dfrac{t^2-4}{2}\ge 0\Rightarrow t\ge 2$.

$t=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.\Rightarrow t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Khi đó ta có hàm số $g(t)=t-\dfrac{t^2-4}{2}+5=\dfrac{-t^2+2t+14}{2}$ với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $g'(t)=-t=1<0,\ \forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ suy ra $\max\limits_{t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]}g(t)=g(2)=7$.

Vậy $\max\limits_{x\in[1;5]}f(x)=7\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(5-x)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tính tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[-1;1]$?

A. 121. **B**. 64. **C**. 73. **D**. 22.

Lời giải.

Ta có $y'=(x^4+4x^2+3)'=4x^3+8x$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+8x=0\Leftrightarrow x=0\in(-1;1)$.

Đặt $m=\min\limits_{[-1;1]}y;\ M=\max\limits_{[-1;1]}y$.

Do $y(-1)=y(1)=8;\ y(0)=3$ nên $M=\max\limits_{[-1;1]}y=y(\pm1)=8;\ m=\min\limits_{[-1;1]}y=y(0)=3$.

$\Leftrightarrow M^2+m^2=8^2+3^2=73$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=2x+\sqrt{8-2x^2}$ trên tập xác định của nó?

A. $M=2\sqrt{5}$. **B**. $M=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **C**. $M=2\sqrt{6}$. **D**. $M=4$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Ta có $y'=2+\dfrac{-2x}{\sqrt{8-2x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{8-2x^2}=x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\8-2x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\8=3x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\in[-2;2]$.

$y(-2)=-4;\ y(2)=4;\ y\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất M của hàm số là $M=2\sqrt{6}$. Chọn C.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1?

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq m$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}$ nhận thấy $m^2-m+2>0$ với mọi m nên $y'>0$ với mọi m.

Hay hàm số đồng bến trên từng khoảng xác định.

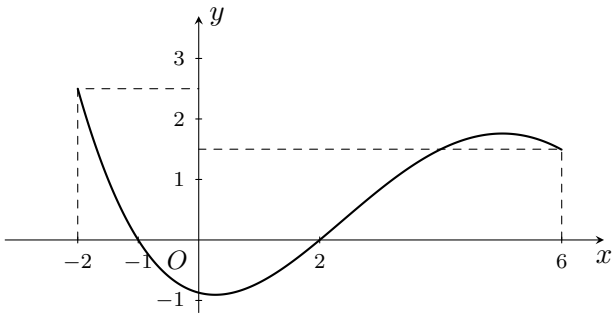
Để hàm số đạt GTLN trên $[0;4]$ thì $m\in\mathbb{R}\backslash[0;4]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m>4\end{array}\right.$. Suy ra $\max\limits_{x\in[0;4]}y(4)=\dfrac{4-m^2-2}{4-m}$.

Theo bài ra ta có $\dfrac{4-m^2-2}{4-m}=-1\Rightarrow m^2+2=m-4\Rightarrow m^2+m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\text{ (loại)}\\m=-3.\end{array}\right.$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A. $\max\limits_{[-2;6]}f(x)=f(-2)$.

B. $\max\limits_{[-2;6]}f(x)=f(6)$.

C. $\max\limits_{[-2;6]}f(x)=\max\{f(-1),f(6)\}$.

D. $\max\limits_{[-2;6]}f(x)=f(-1)$.

Lời giải.

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$
	$f(-2)$						

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

☑ Hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;6)$ do $f'(x)>0$, suy ra
$$f(-1)>f(-2)\text{ và }f(6)>f(2)\ (1).$$

☑ Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ do $f'(x)<0$, suy ra
$$f(-1)>f(2)\ (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $\max\limits_{[-2;6]}f(x)=\max\{f(-2),f(-1),f(2),f(6)\}=\max\{f(-1),f(6)\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]}y+\max\limits_{[0;1]}y=\dfrac{7}{6}$. Vậy m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số liên tục và đơn điệu trên đoạn $[0;1]$.

Do đó $\min\limits_{[0;1]} y+\max\limits_{[0;1]} y=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow f(0)+f(1)=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow m=-1$

Chọn đáp án B □

Câu 7. Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3ax+b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1, giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+3a$.

Tiếp tuyến tại M và N của (C) có hệ số góc bằng 3 nên tọa độ của M và N thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}3x^2+3a=3 & (1)\\ y=x^3+3ax+b & (2).\end{cases}$$

Từ $(1)\Rightarrow x^2=1-a$. (1) có hai nghiệm phân biệt nên $a<1$.

Từ $(2)\Rightarrow y=x(1-a)+3ax+b$ hay $y=(2a+1)x+b$.

Tọa độ M và N thỏa mãn phương trình $y=(2a+1)x+b$ nên phương trình đường thẳng MN là

$$y=(2a+1)x+b\Leftrightarrow(2a+1)x-y+b=0.$$

Ta có

$$d(O,MN)=1\Leftrightarrow\frac{|b|}{\sqrt{(2a+1)^2+1}}=1\Leftrightarrow b^2=4a^2+4a+2\Leftrightarrow a^2+b^2=5a^2+4a+2.$$

Xét $f(a)=5a^2+4a+2$ với $a<1$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{6}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó a^2+b^2 có gia trị nhỏ nhất là $\dfrac{6}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng 120 cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

A. 40 cm. **B.** $40\sqrt{3}$ cm. **C.** 80 cm. **D.** $40\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x$, $0 < x < 60$.

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \dfrac{1}{2}x.\sqrt{120^2 - 240x}$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0; 60)$.

Ta có $S'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{-240}{\sqrt{120^2 - 240x}} = \dfrac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$.

Lập bảng biến thiên:

x	0		40		60
$S'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$S(x)$	‖	$\nearrow$	$S(40)$	$\searrow$	‖

$S(0)$ $S(60)$

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $\dfrac{65}{3}$. **B.** 6. **C.** 20. **D.** $\dfrac{52}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Ta có $f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \dfrac{13}{3}$.

Suy ra $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 4; \max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$.

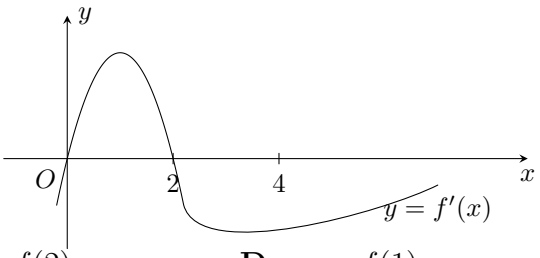
Do đó tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4 \cdot 5 = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 10.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ dưới đây và

$$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3).$$



Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 4]$.

A. $m = f(4)$. **B.** $m = f(0)$. **C.** $m = f(2)$. **D.** $m = f(1)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	0		1		2		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên, ta thấy GTNN của hàm số đạt được bằng $f(0)$ và $f(4)$.
Ta sẽ so sánh $f(0)$ và $f(4)$ như sau

$$\begin{aligned} & f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3) \\ \Leftrightarrow\ & f(0)-f(4)=2f(2)-f(1)-f(3) \\ \Leftrightarrow\ & f(0)-f(4)=[f(2)-f(1)]+[f(2)-f(3)]>0 \ (\text{do } f(2)>f(1), f(2)>f(3)). \end{aligned}$$

Do đó $f(0)-f(4)>0 \Leftrightarrow f(0)>f(4)$.
Vậy $m=f(4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Một trang trại mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết sạch rau, nếu giá bán cứ tăng thêm 1000 đồng/kg thì số rau thừa lại tăng thêm $20kg$. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi số tiền bán rau nhiều nhất mà trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

A. 32420000 đồng. **B**. 32400000 đồng. **C**. 34400000 đồng. **D**. 34240000 đồng.

Lời giải.

Phương pháp:
- Gọi $x, (x \geq 0)$ (nghìn đồng) là số tiền tăng lên cho mỗi kg rau.
- Biểu diễn các điều kiện còn lại theo x thu được hàm số ẩn x.
- Tìm GTLN của hàm số trên và kết luận.

Cách giải:
Gọi $x, (x \geq 0)$ (nghìn đồng) là số tiền tăng lên cho mỗi kg rau.
Số tiền bán mỗi một kg rau sau khi tăng là $x+30$ (nghìn đồng).
Số kg rau thừa là $20x\,(x \leq 50)$.
Tổng số kg rau bán được là $1000-20x\,(kg)$.
Tổng số tiền thu được là $T=(1000-20x)(30=x)+20x.2=-20x^2+440x+30000$.
Mà $-20x^2+440x+30000=32420-20(x-11)^2 \leq 32420$.
Do đó $T \leq 32420 \Rightarrow \max T=32420$, dấu "=" xảy ra khi $x=11$.
Vậy số tiền nhiều nhất bán được là 32420000 đồng.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3\cos 2x-4\sin x$ là

A. 1. **B**. -7. **C**. -5. **D**. $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y=3(1-2\sin^2 x)-4\sin=-6\sin^2-4\sin x+3$.
Đặt $\sin x=t, t \in [-1;1]$.
Khi đó, $f(t)=-6t^2-4t+3, t \in [-1;1]$, có $f'(t)=-12t-4=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3} \in (-1,1)$.
$f(-1)=1, f(1)=-7, f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{3} \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(t)=\min y=-7$.
Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x-m}{\sin x+1}$. Tìm giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ bằng -2?

A. $m=5$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x, x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in(0;1)$.

Ta được hàm số $g(t)=\dfrac{t-m}{t+1}, t\in[0;1]$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{1+m}{(t+1)^2}$.

☑ $m+1>0\Leftrightarrow m>-1\Rightarrow g'(t)>0\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} g(t)=-2\Leftrightarrow g(1)=-2\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2}=-2\Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

☑ $m+1<0\Leftrightarrow m<-1\Rightarrow g'(t)<0\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} g(t)=-2\Leftrightarrow g(0)=-2\Leftrightarrow \dfrac{-m}{1}=-2\Leftrightarrow m=2$ (không thỏa mãn).

Vậy $m=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Một xưởng sản xuất cần làm 100 chiếc hộp inox bằng nhau, hình dạng là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông (hợp không có nắp), với thể tích là 108 dm^3/1 hộp. Giá inox là 47000 đồng/1dm^2. Hãy tính toán sao cho tổng tiền chi phí cho 100 chiếc hộp là ít nhất, và số tiền tối thiểu đó là bao nhiêu (nếu chỉ tính số inox vừa đủ để sản xuất 100 chiếc hộp, không có phần dư thừa, cắt bỏ)?

A. 1692000000 đồng. **B.** 507666000 đồng. **C.** 1015200000 đồng. **D.** 235800000 đòng.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy của hộp là x dm $\Rightarrow$ Chiều cao của hộp là $h=\dfrac{108}{x^2}$ dm.

$\Rightarrow$ Số inox cần thiết để làm 1 hộp là $S=x^2+4x\cdot h=x^2+\dfrac{432}{x}$ dm^2.

Tổng số tiền chi phí cho 100 chiếc hộp là $T=47000\cdot 100\cdot S=4700000\cdot\left(x^2+\dfrac{432}{x}\right)$.

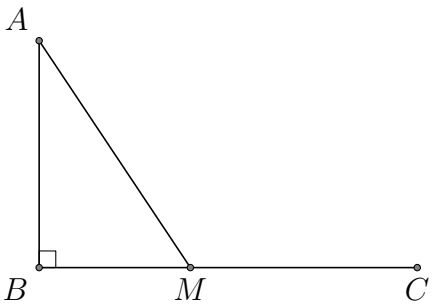
Ta có $T'=4700000\cdot\left(2x-\dfrac{432}{x^2}\right)\Rightarrow T'=0\Leftrightarrow x=6$.

x	0		6		$+\infty$
T'		$-$	0	$+$	
T		↘	507600000	↗	

Chọn đáp án B □

Câu 15.

Một ngọn hải đăng đạt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng bằng $BC = 7$ km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến C nhanh nhất?



A. 0 km. **B**. $\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$ km.

C. $2\sqrt{5}$ km. **D**. 7 km.

Lời giải.

Gọi khoảng cách từ M đến B là x km $(0 \le x \le 7)$.

Khi đó, $MC = 7 - x$ và $AM = \sqrt{x^2+25}$.

Người đó đi từ A đến C hết khoảng thời gian là $f(x) = \dfrac{7-x}{6} + \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ giờ.

Hàm số $f(x) = \dfrac{7-x}{6} + \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ liên tục trên $[0;7]$ và

$$f'(x) = -\frac{1}{6} + \frac{x}{4\sqrt{x^2+25}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Mà $f(0) = \dfrac{29}{12}$, $f(2\sqrt{5}) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$, $f(7) = \dfrac{\sqrt{74}}{4}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;7]} f(x) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy M cách B một khoảng $2\sqrt{5}$ km.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + x + m|$ trên đoạn $[2;4]$ và m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < m_0 < 5$. **B**. $m_0 < -8$. **C**. $-4 < m_0 < 0$. **D**. $-7 < m_0 < -5$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + m$ trên đoạn $[2;4]$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 > 0$ với mọi $x \in [2;4]$.

Suy ra $f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[2;4]$, do vậy

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = m-2 \text{ và } \max_{[2;4]} f(x) = f(4) = m+20 \Rightarrow M = \max_{[2;4]} |f(x)| = \max\{|m-2|, |m+20|\}.$$

Ta có

$$2M \ge |m-2| + |m+20| \ge |m-2-m-20| = 22 \Rightarrow M \ge 11.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |m-2| = |m+20| \\ (m-2)(m+20) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9$.

Vậy $m_0 = -9$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \ge 1$. **B**. $m \ge -1$. **C**. $m \le -1$. **D**. $m \le 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

$y' = \dfrac{-x^2-2mx+1-m}{(x^2+x+1)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2mx+m-1=0$. (1)

Ta có $\Delta' = m^2-m+1 > 0$ với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x_2 = -m+\sqrt{m^2-m+1}$. Khi đó

$$\frac{1}{-2m+2\sqrt{m^2-m+1}+1} \le 1 \Leftrightarrow 1-2m+2\sqrt{m^2-m+1} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+1} \ge m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ m^2-m+1 \end{cases} \ge m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2.

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Gọi y_0 thuộc tập giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0 = \dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$ có nghiệm x.

$\Leftrightarrow m\sin x + y_0\cos x = 1-2y_0$ có nghiệm x.

$\Leftrightarrow m^2+y_0^2 \ge (1-2y_0)^2$

$\Leftrightarrow 3y_0^2-4y_0+1-m^2 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \le y_0 \le \dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}$

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 thì $\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -2$

$\Leftrightarrow 8 < \sqrt{1+3m^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{21} < m \\ m < -\sqrt{21} \end{array}\right.$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[0;10]$ nên $m \in \{5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 .

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

A. 1375000. **B**. 3781250. **C**. 2500000. **D**. 3000000.

Lời giải.

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Số tiền được giảm đi so với ban đầu là $2-x$.

Số người tham gia được tăng thêm nếu bán với giá x là $\dfrac{(2-x)20}{0,1}=400-200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là $150+(400-200x)=550-220x$.

Tổng doanh thu là $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$.

$f'(x)=-440x+550=0\Leftrightarrow x=\dfrac{11}{8}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3025}{8}$	$\searrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\dfrac{11}{8}=1,375$.

Vậy công ty cần đặt gói tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=-\dfrac{1}{4}t^4+3t^2-2t-4$. Trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

A. $t=1$. **B**. $t=\sqrt{2}$. **C**. $t=2$. **D**. $t=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có vận tốc $v(t)=S'(t)=-t^3+6t-2\Rightarrow v'(t)=-3t^2+6$.

$v'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}-3x^2+6x$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -1. **B**. Một giá trị khác. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Điều kiện $x\in[-3;5]$. Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}, x\in[-3;5]$.

$t^2=8+2\sqrt{(3+x)(5-x)}\geq 8\Rightarrow t\geq 2\sqrt{2}, t=1\sqrt{3+x}+1\sqrt{5-x}\leq\sqrt{(1^2+1^2)(3+x+5-x)}=4$.

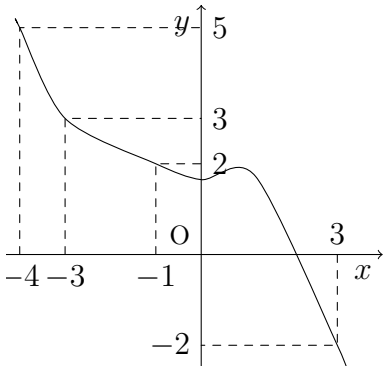
Suy ra $t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$ và $-x^2+2x=\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right)^2-15$. Khi đó $f(t)=t+3\left[\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right)^2-15\right], t\in[2\sqrt{2};4]$.

$f'(t)=1+6t(t^2-8)>0, \forall t\in[2\sqrt{2};4]\Rightarrow\max\limits_{[2\sqrt{2};4]}f(t)=f(4)$. Với $t=4\Rightarrow x=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22.

Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên $[-4;3]$ hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?



A. $x_0=-4$.
B. $x_0=3$.
C. $x_0=-3$.
D. $x_0=-1$.

Lời giải.

Trên $[-4;3]$, ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1-x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \quad x=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên.

x	-4		0		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-m\sqrt{x^2+1}+m+4=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m>6$.
B. $m\geq 6$.
C. $m\in\varnothing$.
D. $m\geq 6$ hoặc $m\leq -2$.

Lời giải.

① Đặt $\sqrt{x^2+1}=t\Leftrightarrow x^2=t^2-1$ $(t\geq 1)$.

② Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-1-mt+m+4=0\Leftrightarrow t^2-mt+m+3=0\ (1).$$

③ Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 lớn hơn 1. Do đó ta có

$$\left\{\begin{array}{l} a=1\neq 0 \\ \Delta=m^2-4(m+3)>0 \\ t_1>1 \\ t_2>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-4m-12>0 \\ t_1-1> \\ t_2-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ (t_1-1)+(t_2-1)>0 \\ (t_1-1)(t_2-1)>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ t_1+t_2-2>0 \\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m-2>0 \\ m+3-m+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>6.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1.$$

A. $\min P=\frac{17}{3}$. **B.** $\min P=5$. **C.** $\min P=\frac{115}{3}$. **D.** $\min P=\frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $x+y=2\Rightarrow y=2-x$.

Do đó $P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1=\frac{1}{3}x^3+x^2+(2-x)^2-x+1=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$.

Từ giả thiết ta có $x,y\in[0;2]$.

Đặt $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$ với $x\in[0;2]$.

$f'(x)=x^2+4x-5$.

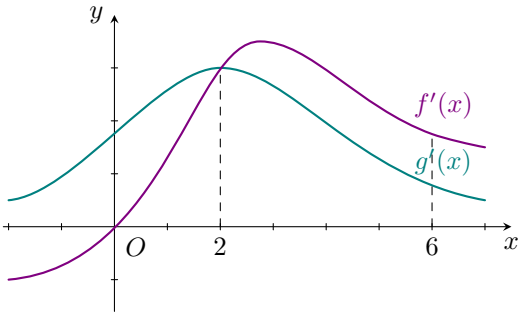
Ta có $\begin{cases}f'(x)=0\\0<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.\\0<x<2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

$f(0)=5$; $f(1)=\frac{7}{3}$; $f(2)=\frac{17}{3}$.

$\Rightarrow\min\limits_{x\in[0;2]}f(x)=\frac{7}{3}$. Vậy $\min P=\frac{7}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là

A. $h(2)$, $h(6)$. **B.** $h(6)$, $h(2)$. **C.** $h(0)$, $h(2)$. **D.** $h(2)$, $h(0)$.

Lời giải.

Có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$.

Từ đồ thị đã cho ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0;6]$

x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	↘	$h(2)$	↗	$h(6)$

Do đó $\min\limits_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Giả thiết ta có $f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x) = h(6)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 2018]$ để hệ phương trình $\begin{cases} x - y + m = 0 \\ \sqrt{xy} + y = 1 \end{cases}$ có nghiệm?

A. 2016. **B**. 2018. **C**. 2019. **D**. 2017.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{xy} + y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 1 - y \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 - y \\ y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 - 2y + y^2 \\ y \le 1. \end{cases}$ (1)

☑ Nếu $y = 0$, hiển nhiên không thỏa mãn hệ.

☑ Nếu $y \neq 0$, khi đó hệ(1) trở thành $\begin{cases} x = \dfrac{1}{y} - 2 + y \\ y \le 1. \end{cases}$

Thế vào $x - y + m = 0$, ta có $\dfrac{1}{y} - 2 + y - y + m = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = 2 - m$, (2).

Để hệ có nghiệm thì (2) có nghiệm $y \in (-\infty; 1] \setminus \{0\}$. Xét hàm $f(y) = \dfrac{1}{y}$ có $f'(y) = -\dfrac{1}{y^2} < 0$ với mọi $y \in (-\infty; 1] \setminus \{0\}$ nên ta có bảng biến thiên hàm $f(y)$ như sau

y	$-\infty$		0		1
$f'(y)$		$-$		$-$	
$f(y)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\quad +\infty$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy (2) có nghiệm $y \in (-\infty; 1] \setminus \{0\}$ khi và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} 2 - m < 0 \\ 2 - m \ge 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > 2 \\ m \le 1. \end{bmatrix}$$

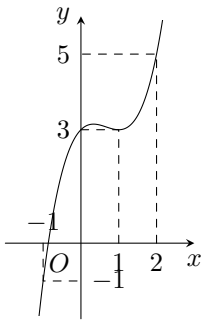
Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [0; 2018]$ nên $m \in \{0; 1; 3; 4; 5; 6; \cdots; 2018\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(2-\sqrt{2x-x^2}\right)=m$ có nghiệm?

A. 6. **B**. 7. **C**. 3. **D**. 2.



Lời giải.

Xét hàm số $t(x)=2-\sqrt{2x-x^2}, x\in[0;2]$, có $t'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}, t'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Hàm số $t(x)$ liên tục trên $[0;2]$ có $t(0)=t(2)=2, t(1)=1\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} t(x)=1, \max\limits_{[0;2]} t(x)=2$.

Do đó $x\in[0;2]\Rightarrow t\in[1;2]$. Khi đó bài toán trở thành có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in[1;2]$.

Quan sát đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[1;2]$ ta thấy phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3\le m\le 5$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in 3;4;5$: có 3 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $f(-1)$. **B**. $f(0)$. **C**. $f(3)$. **D**. $f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x(x+1)(x-2)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1 \text{ với } x=2 \text{ là nghiệm kép.}\\ x=2\end{array}\right.$

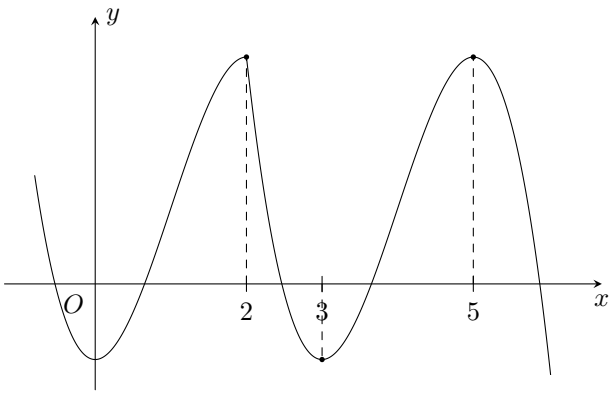
Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;2]$ tại $x=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho số thực m và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(2^x+2^{-x})=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1; 2]$.

Hàm $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-2} \ln 2$, $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$

Do đó $x \in [-1; 2] \Rightarrow t \in \left[2; \dfrac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t \in \{2\} \cup \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có $t_1 \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right]$, $t_2 \in \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{17}{4}\right]$.

Khi đó, phương trình có $f(2^x + 2^{-2}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		0		0	

A. $f(-1)$. **B**. $f(0)$. **C**. $f(2)$. **D**. $f(1)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(2x) + \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có $h(t) = f(t) + \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = f'(t) - \dfrac{1}{2}\sin t$.

Từ bảng biến thiên ta thấy

- ☑ Với $t \in (-2; 0)$ thì $f'(t) > 0$ và $\sin t < 0 \Rightarrow h'(t) > 0$.
- ☑ Với $t \in (0; 2)$ thì $f'(t) < 0$ và $\sin t > 0 \Rightarrow h'(t) < 0$.

☑ Với $t=0$ thì $f'(t)=0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên sau

t	-2		0		2
h'		$+$	0	$-$	
h		↗		↘	

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\max\limits_{[-2;2]} h(t)=h(0)=f(0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho $x,\,y>0$ thỏa mãn $x+y=\dfrac{3}{2}$ và biểu thức $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính x^2+y^2.

A. $\dfrac{25}{16}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{2313}{1156}$. **D.** $\dfrac{153}{100}$.

Lời giải.

☑ **Cách 1.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}=\frac{4^2}{4x}+\frac{1^2}{4y}\geq\frac{(4+1)^2}{4x+4y}=\frac{25}{4\cdot\dfrac{3}{2}}=\frac{25}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{4}{4x}=\dfrac{1}{4y}\Leftrightarrow x=4y$ mà $x+y=\dfrac{3}{2}$ nên $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{153}{100}$.

☑ **Cách 2.** Ta có $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}=\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{25}{9}x\right)+\left(\dfrac{1}{4y}+\dfrac{25}{9}y\right)-\dfrac{25}{9}(x+y)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\dfrac{4}{x}+\dfrac{25}{9}x\geq 2\sqrt{\dfrac{4}{x}\cdot\dfrac{25x}{9}}=\dfrac{20}{3}$; $\dfrac{1}{4y}+\dfrac{25}{9}y\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{4y}\cdot\dfrac{25y}{9}}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow P\geq\dfrac{20}{3}+\dfrac{5}{3}-\dfrac{25}{9}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{25}{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{4}{x}=\dfrac{25}{9}x\\ \dfrac{1}{4y}=\dfrac{25}{9}y\end{cases}$ mà $\begin{cases}x>0;y>0\\ x+y=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{153}{100}$.

☑ **Cách 3.** Do $x>0$ và $x+y=\dfrac{3}{2}$ nên $x\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{6-4x}$ trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{(6-4x)^2}$;

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (6-4x)^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6-4x=x\\6-4x=-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{6}{5}\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\\x=2\notin\left(0;\dfrac{3}{2}\right).\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖		‖	$-$	0	$+$	‖		
$f(x)$	‖	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{25}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$		‖

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$; $f\left(\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{25}{6}$.

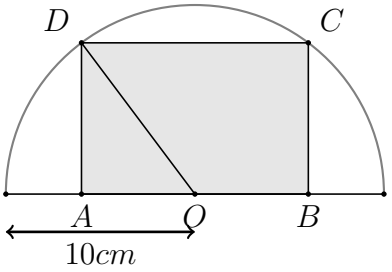
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có $\min\limits_{x\in\left(0;\frac{3}{2}\right)} f(x)=f\left(\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{25}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{3}{10}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{153}{100}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10 cm (hình vẽ)

A. $160\,\text{cm}^2$. **B.** $100\,\text{cm}^2$. **C.** $80\,\text{cm}^2$. **D.** $200\,\text{cm}^2$.



Lời giải.

Đặt $OA=x$ $(0<x<10)\Rightarrow AB=2x$ $(x>0)$.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OAD ta có: $AD=\sqrt{OD^2-OA^2}=\sqrt{100-x^2}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=AB\cdot AD=2x\cdot\sqrt{100-x^2}\le x^2+100-x^2=100$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là $100\,\text{cm}^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2=100-x^2\Leftrightarrow x=5\sqrt{2}\,(\text{cm})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương trình

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$$

nghiệm đúng với $\forall x\in[-3;6]$ là

A. 19. **B.** 20. **C.** 4. **D.** 28.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}$.

Để bất phương trình $f(x)\le m^2-m+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;6]$

thì $m^2-m+1\geq \max\limits_{x\in[-3;6]} f(x)$.

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}=9+2\sqrt{18+3x-x^2}\geq 9$.

Mặt khác $t^2=\left[\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\right]^2\leq (1^2+1^2)(3+x+6-x)=18$.

Vậy $3\leq t\leq 3\sqrt{2}$.

Khi đó $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}=t-\dfrac{t^2-9}{2}=g(t)$.

Ta có $g'(t)=1-t<0$ với $t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]$, nên $g(t)$ là hàm số nghịch biến trong khoảng $[-3;6]$.

Suy ra $\max\limits_{t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]} g(t)=g(3)=3=\max\limits_{x\in[-3;6]} f(x)$.

Để bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x\in[-3;6]$ thì

$$m^2-m+1\geq 3\Leftrightarrow m^2-m-2\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 2\\ m\leq -1.\end{array}\right.$$

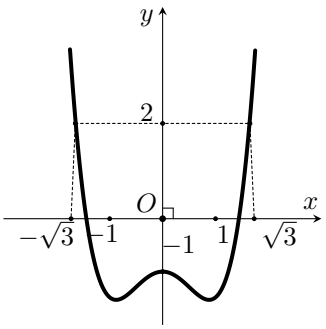
Vì $m\in[-10;10]$ nên $m\in[-10;-1]\cup[2;10]$ nên $m\in\{-10;\ldots;-1;2;\ldots;10\}$.

Vậy số các giá trị nguyên của m là 19.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

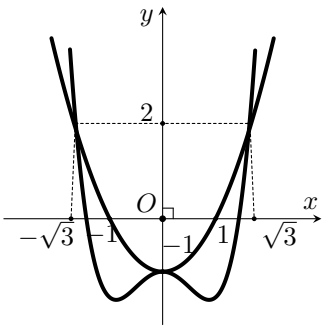
A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(1)$.

B. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(\sqrt{3}\right)$.

D. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(0)$.

Lời giải.



Ta có: $h'(x)=3f'(x)-3x^2+3\Leftrightarrow h'(x)=3\left[f'(x)-(x^2-1)\right]$.

Đồ thị hàm số $y=x^2-1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0;-1)$, đi qua $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.

Từ đồ thị hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=x^2-1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$.

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$h(-\sqrt{3})$	↘	$h(0)$	↘	$h(\sqrt{3})$

Với $h\left(-\sqrt{3}\right)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$, $h\left(\sqrt{3}\right)=3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hàm số $y=x^3+ax+b\,(a,b\in\mathbb{R})$ có hai điểm cực trị x_1,x_2. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tổng giá trị cực trị của hàm số bằng $2b$.

B. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua trục hoành.

C. Tổng giá trị cực trị của hàm số bằng 0.

D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua trục tung.

Câu 36. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$. Giá trị của tỉ số $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B**. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **C**. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D**. $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

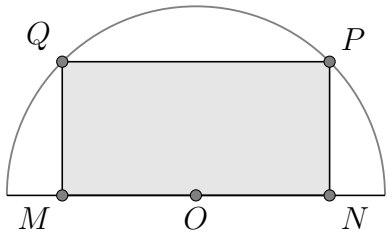
Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 12^t \\ x+y = 16^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{12}\right)^t + 1 = \left(\dfrac{16}{12}\right)^t \Leftrightarrow$
$\left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (thỏa mãn) hoặc $\left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (loại) hay $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37.

Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp nửa đường tròn có bán kính 10 cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của nửa đường tròn.



A. $160\,\text{cm}^2$. **B**. $80\,\text{cm}^2$. **C**. $200\,\text{cm}^2$. **D**. $100\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Giả sử $NO = x$ suy ra $PN = \sqrt{100-x^2}$. Từ đó ta có $S_{MNPQ} = 2ON.PN = 2x.\sqrt{100-x^2} \le x^2 + 100 - x^2 = 100$ (Cauchy).

Vậy $S_{\max} = 100$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Tính giá trị của $M^2 + m^2$.

A. 6. **B**. 2. **C**. $2+\sqrt{2}$. **D**. $6+2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-1;1]$.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra $y_{\max} = f(0) = 2$ và $y_{\min} = f(\pm 1) = \sqrt{2}$.

Vậy $M^2 + m^2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1-x}$ trên khoảng $(0;1)$ là

A. 1. **B**. $\dfrac{2}{3}$. **C**. 9. **D**. 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-4}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = 0 \Leftrightarrow (2-2x)^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 2. \end{array}\right.$

Suy ra $f_{\min} = f(\dfrac{2}{3}) = 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ trên đoạn $[-1;3]$.

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{3}$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow x = 1$.

$f(-1) = \sqrt{2}; f(3) = 2; f(1) = 2\sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \sqrt{5-x^2}$.

A. 5. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** -3. **D.** $-2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$y(1) = 4; y(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}; y(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x^2+3}$.

A. $\dfrac{7}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 43. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$. Hãy tính $P = M + m$.

A. $P = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $P = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$. **C.** $P = \sqrt{2}+1$. **D.** $P = \sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [-2;2]$.

$y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$y(-2) = -2; y(2) = 2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $m = -2; M = 2\sqrt{2}$.

Vậy $P = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng 11.

A. $m=\pm 3$. **B.** $m=\pm\sqrt{19}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=\sqrt{19}$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{-1-m^2}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$.

Do hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $[2;3]$.

Suy ra $y(2)$ là giá trị lớn nhất.

Theo đề bài $y(2)=11\Leftrightarrow 2+m^2=11\Leftrightarrow m=\pm 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ lần lượt là

A. π và $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

C. $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$y'=1-2\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

Xét $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ ta được $x=\pm\dfrac{\pi}{6};x=\dfrac{5\pi}{6}$.

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2};f(\pi)=\pi;$

$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2};f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2};f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)=\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên đoạn $[-2;0]$. Tìm M, m.

A. $M=2,m=0$. **B.** $M=4,m=0$. **C.** $M=4,m=-1$. **D.** $M=2,m=-1$.

Câu 47. Cho hàm số $y=x+\dfrac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};1\right]$.

A. $y_{\min}=0$. **B.** $y_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $y_{\min}=-2$. **D.** $y_{\min}=\dfrac{4}{3}$.

Câu 48. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $min=2$. **B.** $\min=3$. **C.** $\min=4$. **D.** $\min=0$.

Câu 49. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos 2x+2\sin x-3$ trên $\left[\dfrac{-\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$

A. $\max=\dfrac{-3}{2}$. **B.** $\max=\dfrac{-7}{2}$. **C.** $\max=\dfrac{3}{2}$. **D.** $\max=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y=1-2\sin^2 x+2\sin x-3=-2\sin^2 x+2\sin x+3$.

Đặt $t=\sin x,x\in\left[\dfrac{-\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]\Rightarrow t\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Khi đó hàm số trở thành $y=-2t^2+2t-2$ với $t\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có: $y'=-4t+2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

$y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị số m để $\min\limits_{-1\le x\le 1}(-x^3-3x^2+m)=0$.

A. $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2-6x$.

Cho $y'=0 \Rightarrow -3x^2-6x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(0)=m$, $y(-1)=m-1$, $y(1)=m-4$.

$\Rightarrow \min\limits_{-1\le x\le 1}(-x^3-3x^2+m)=m-4 \Leftrightarrow m-4=0 \Leftrightarrow m=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Hãy chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

B. Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(1;5)$.

C. Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng -1.

D. Hàm số đạt GTLN bằng 5 khi $x=1$.

Câu 52. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{2}\cos x$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $1+\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=1-\sqrt{2}\sin x$.

Trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $y'=0 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$.

Ta có $y(0)=\sqrt{2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}=1+\dfrac{\pi}{4}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Từ một tờ giấy hình tròn bán kính 5 cm, ta có thể cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu cm^2?

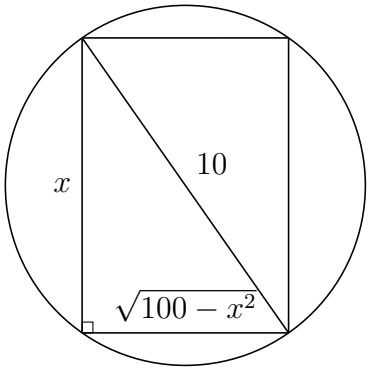
A. $\dfrac{25\pi}{2}$. **B.** 50. **C.** 25. **D.** 100.

Lời giải.

Gọi x là độ dài một cạnh của hình chữ nhật, cạnh còn lại có độ dài là $\sqrt{100-x^2}$. Diện tích của hình chữa nhật là $S(x)=x\cdot\sqrt{100-x^2},\ x\in(0;10)$.

Ta có $S'(x)=\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}, S'(x)=0\Leftrightarrow x=5\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên của $S(x)$ là



x	0		$5\sqrt{2}$		10
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	50	↘	

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$, trên đoạn $[1;2]$ giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thỏa mãn $\max\limits_{[1;2]}y+\min\limits_{[1;2]}y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0<m\le 2$. **B.** $2<m\le 4$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m>4$.

Lời giải.

Ta có $\max\limits_{[1;2]}y+\min\limits_{[1;2]}y=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{2+m}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow 5m+7=32\Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Tìm m để phương trình $\cos 2x+2\sin x+m=0$ có đúng bốn nghiệm $x\in[0;\pi]$.

A. $-\dfrac{3}{2}\le m\le -1$. **B.** $-\dfrac{3}{2}<m<-1$.

C. $-\dfrac{3}{2}\le m<1$. **D.** Không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=-x^3-x^2+(m+1)x+2m$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\le -1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m>3$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'=-3x^2-2x+m+1\le 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^2+2x-1\ge m,\forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2+2x-1$ với $x\in(0;+\infty)$. Ta có $f'(x)=6x+2>0,\forall x\in(0;+\infty)$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$

Vậy $f(x)\ge m,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\le -1$

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $-\dfrac{1}{2}$.

A. $m=\pm\sqrt{3}$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2+m^2}{(x+2)^2} > 0,\ \forall x \in [0;2]$. Do đó $\min\limits_{[0;2]} y = y(0) = -\dfrac{m^2}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Vậy $m = \pm 1$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 58. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-2}$. Tìm khẳng định đúng.

A. $\min\limits_{[-1;2]} y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\max\limits_{[-1;1]} y = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\max\limits_{[-1;0]} y = 0$. **D.** $\min\limits_{[3;5]} y = \dfrac{11}{4}$.

Câu 59. Cho bài toán: "Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên $\left[-2; \dfrac{3}{2}\right]$?"

Một học sinh giải như sau:

Bước 1: $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} \forall x \neq 1$ **Bước 2:** $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 (L) \\ x = 0 \end{array}\right.$

Bước 3: $f(-2) = \dfrac{-7}{3}; f(0) = -1; f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$. Vậy $\max\limits_{\left[-2;\frac{3}{2}\right]} f(x) = \dfrac{7}{2}; \min\limits_{\left[-2;\frac{3}{2}\right]} = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Lời giải trên hoàn toàn đúng. **B.** Lời giải trên sai từ bước 1.

C. Lời giải trên sai từ bước 2. **D.** Lời giải trên sai từ bước 3.

Lời giải.

Học sinh làm bước 1, bước 2 đều đúng. Tuy nhiên, trên $\left[-2; \dfrac{3}{2}\right]$, hàm số gián đoạn tại $x = 1$. Do đó, không thể kết luận được min, max của hàm số ngay được.

Chọn đáp án D ☐

Câu 60. Số các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \neq -1$.

$\Rightarrow y' > 0 \quad \forall x \in [0;1]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$.

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;1]$ là $y(0) = -m^2 + m$.

$\Rightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Có 2 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án A ☐

Câu 61. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[1;3]$. Khi đó, giá trị $M - m$ bằng:

A. 12. **B.** 14. **C.** 2. **D.** 16.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} y = y(3) = 14; \min\limits_{[1;3]} y = y(1) = -2$.

$\Rightarrow M = 14; m = -2 \Rightarrow M - m = 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x + 3x + 2017$ trên đoạn $[0; \pi]$.

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 63. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính tổng $S = M + m$.

A. $S = -3$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = -\frac{1}{3}$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Có $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow S = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Tìm độ dài hai cạnh kề của hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích là 48 m^2.

A. $\sqrt{84}$ m. **B.** $\sqrt{50}$ m. **C.** $\sqrt{48}$ m. **D.** $\sqrt{45}$ m.

Lời giải.

Gọi a, b $(a > 0, b > 0)$ là độ dài hai cạnh kề của hình chữ nhật. Ta có diện tích hình chữ nhật là $S = ab = 48$ và chu vi hình chữ nhật là $P = 2(a + b) \geq 4\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Do đó $ab = a^2 = 48 \Leftrightarrow a = \sqrt{48}$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90| + m$ trên đoạn $[-5; 5]$ là 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $m = 400$. **B.** $m < 1618$. **C.** $1600 < m < 1700$. **D.** $1500 < m < 1600$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên $[-5; 5]$.

TXD: $D = \mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \notin [-5; 5] \\ x = 4 \in [-5; 5]. \end{array}\right.$

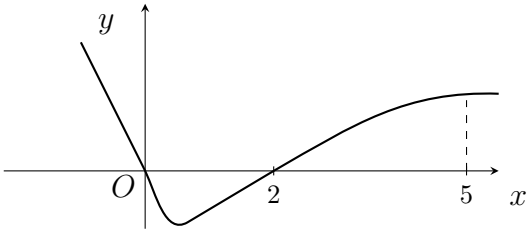
$g(-5) = 400, g(5) = -70, g(4) = -86 \Rightarrow \max\limits_{[-5;5]} |g(x)| = 400$

Do đó $\max\limits_{[-5;5]} f(x) = 400 + m = 2018 \Rightarrow m = 1618$.

Chọn đáp án C □

Câu 66.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$. **B**. $f(2), f(0)$. **C**. $f(1), f(5)$. **D**. $f(2), f(5)$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[0;5] \Rightarrow f(x)$ đạt GTLN và GTNN trên $[0;5]$.
Trên đoạn $[0;5]$, $f'(x)$ có hai nghiệm $x=0$,$x=2$ và $f'(x)<0, \forall x \in (0;2)$; $f'(x)>0, \forall x \in (2;5)$.
Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$.
Do $f'(x)>0, \forall x \in (2;5)$ nên $f(3)>f(2)$. Mặt khác, theo giả thiết $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$, suy ra $f(5)-f(0)=f(3)-f(2)>0$.
Do đó $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng -2.

A. $m=4$. **B**. $m=3$. **C**. $m=2$. **D**. $m=1$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq m$. Vì $x \in [1;2] \Rightarrow m \notin [1;2]$.
Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m)^2}<0$ với mọi $x \in [1;2] \Rightarrow \max y = y(1) = \dfrac{m+1}{1-m} = -2 \Rightarrow m=3$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2017 vừa kết thúc, Nam đỗ trường đại học Bách Khoa Hà Nội. Do hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, vì vậy gia đình quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50 m để lấy tiền lo việc học của Nam. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất biết rằng giá tiền 1 m^2 đất khi bán là 1500000 VND.

A. 115687500 VND. **B**. 114187500 VND. **C**. 112687500 VND. **D**. 117187500 VND.

Câu 69. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Tổng $M+m$ bằng.

A. 0. **B**. -1. **C**. 1. **D**. 2.

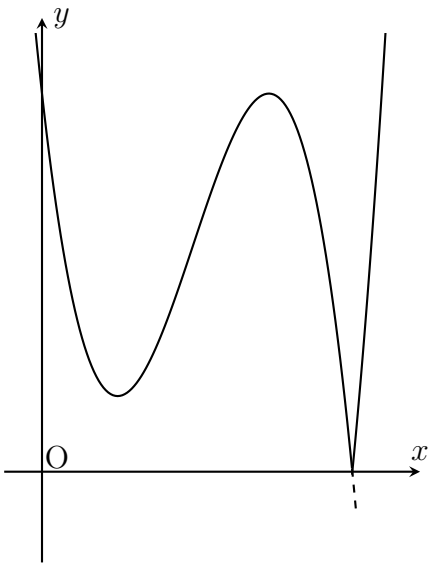
Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;1]$, ta có $y'=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.
$y(\pm 1)=0$, $y(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{1}{2}$ và $y(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $M=\dfrac{1}{2}$ và $m=-\dfrac{1}{2}$. Do đó $M+m=0$.

Chọn đáp án (A) □

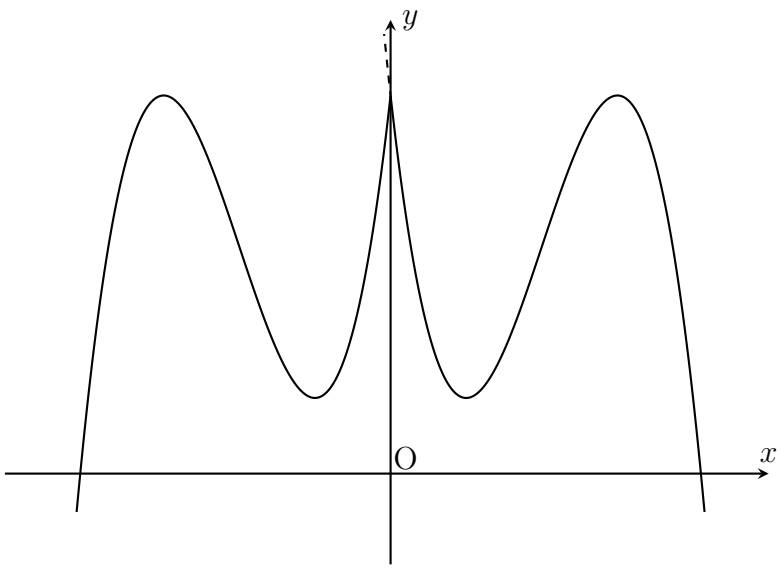
Câu 70.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời hàm số $y=|f(x)|$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định số cực trị của hàm số $y=f(|x|)$.



A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.



Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số có 5 cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx+1}{x-m}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1;2]$ bằng -2. Khi đó giá trị m bằng bao nhiêu?

A. $m=3$. **B**. $m=1$. **C**. $m=2$. **D**. $m=4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-m^2-1}{(x-m)^2}<0\ \forall x\in[1;2]$.

$\max\limits_{[1;2]}f(x)=f(1)=-2\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{1-m}=-2\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ là

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B**. 2. **C**. -2. **D**. $-\dfrac{10}{3}$.

Câu 73. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên a để giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - 2a + 11 + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-4;-1]$ là một số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

∘ Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2}; y' = 0 \Longleftrightarrow x = -2$ (do $x \in [-4;-1]$).

∘ $y(-4) = y(-1) = 6 - 2a < 7 - 2a = y(-2)$. Suy ra $\max\limits_{[-4;-1]} y = 7 - 2a; \max\limits_{[-4;-1]} y > 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{7}{2}$.

∘ Do a là số tự nhiên nên $a \in \{0;1;2;3\}$.

∘ Vậy có 4 số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{16 - x^2} + 1$. Tính $P = M + 2m$.

A. $P = 4\sqrt{2} - 5$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 8\sqrt{2} - 1$. **D.** $P = 7$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{16 - x^2} = x \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Mà $y(-4) = -3; y(4) = 5; y(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1 \Rightarrow M = 4\sqrt{2} + 1; m = -3 \Rightarrow P = 4\sqrt{2} - 5$

Chọn đáp án A □

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $m = -1$. **B.** $m \in \{-1;2\}$.

C. $m \in \left\{\dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}\right\}$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2}$.

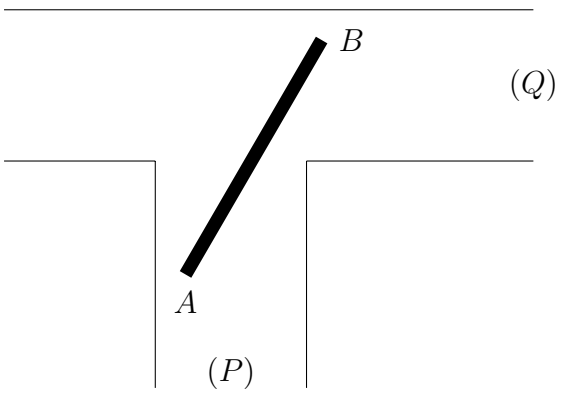
Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \in [0;1]$. Do đó $\min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = -m^2 + m$. Suy ra

$$-m^2 + m = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án B □

Câu 76. Mương nước (P) thông với mương nước (Q), bờ của mương nước (P) vuông góc với bờ của mương nước (Q). Chiều rộng của hai mương nước bằng nhau và bằng 8 m. Một thanh gỗ AB, thiết diện nhỏ không đáng kể, trôi từ mương nước (P) sang mương nước (Q). Trong các phương án cho dưới đây, đâu là độ dài dài nhất của thanh AB sao cho thanh AB trôi không bị vướng?



A. 23,62 m. **B**. 22,62 m. **C**. 22,63 m. **D**. 23,26 m.

Lời giải.

Thanh AB trôi không bị vướng khi nó tạo với bờ mương nước (Q) một góc 45° và đầu A, B lần lượt chạm vào bờ của mương nước (P), (Q). Suy ra độ dài thanh AB khi đó là $16\sqrt{2} \approx 22{,}62741$.

Chọn đáp án B □

Câu 77. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ là

A. $-2\sqrt{2}$. **B**. -2 . **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. $a\sqrt{2}$.

Câu 78. Cho hàm số $y = x^5 + 2x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 1]$.

A. 3. **B**. 7. **C**. 0. **D**. 2.

Câu 79. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(m^2 - 2m + 2)x^2 + m$. Xác định tập giá trị tham số m sao cho giá trị lớn nhất hàm số trên $[-2; -1]$ bằng $\dfrac{1}{6}$.

A. $m \in \{1; 3\}$. **B**. $m \in \{-1; 3\}$. **C**. $m \in \{1; -3\}$. **D**. $m \in \{-1; -3\}$.

Lời giải.

$y' = x^2 - (m^2 - 2m + 2)x, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m^2 - 2m + 2 \geq 1 \end{array}\right.$.

Do đó hàm số chỉ đạt giá trị lớn nhất tại một trong hai giá trị sau:

$f(-1) = -\dfrac{1}{2}m^2 + 2m - \dfrac{4}{3} \geq f(-2) = -2m^2 + 5m - \dfrac{20}{3}$. Xét

$-\dfrac{1}{2}m^2 + 2m - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow m \in \{1; 3\}$.

Chọn đáp án A □

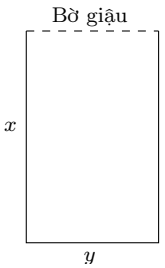
Câu 80. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 4050m^2. **B**. 4500m^2. **C**. 4200m^2. **D**. 4300m^2.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là kích thước hai cạnh của mảnh vườn cần rào như hình bên. Khi đó ta có $\begin{cases} x + y = 180 \\ S = xy \end{cases}$ $(0 < x, y < 180)$. Do đó, $S = 180x - x^2$.

Giá trị lớn nhất đạt tại $x = 45$m. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 4040m^2.



Chọn đáp án A □

Câu 81. Kết luận nào là đúng về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$:

A. Có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

B. Có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

C. Có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

D. Không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 82. Tìm giá trị của m để hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=2$. **B**. $m=6$. **C**. $m=4$. **D**. $m=0$.

Câu 83. Bạn Minh có một đoạn dây dài 20 m, bạn ấy chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều và phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{60}{9+4\sqrt{3}}$ m. **B**. $\dfrac{120}{9+4\sqrt{3}}$ m. **C**. $\dfrac{40}{9+4\sqrt{3}}$ m. **D**. $\dfrac{180}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Câu 84. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=5$ s. **B**. $t=6$ s. **C**. $t=3$ s. **D**. $t=1$ s.

Lời giải.

Vận tốc của chất điểm có phương trình $v=S'=-6t^2+36t+2$.

$v'=-12t+36$.

$v'=0\Rightarrow t=3$.

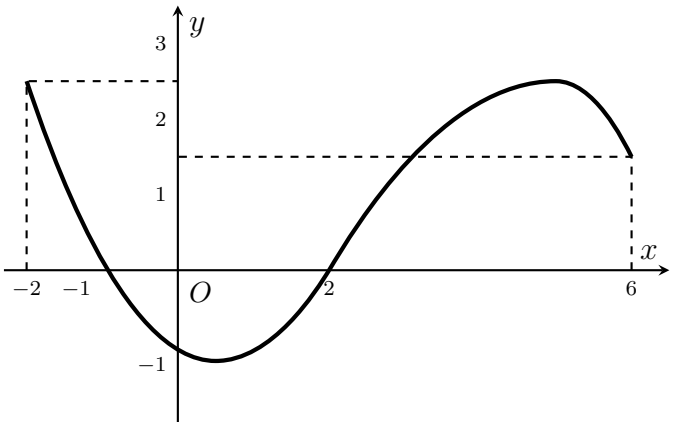
Bảng biến thiên: (hình bên).

Vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t=3$ s.

t	0		3		$+\infty$
v'		$+$	0	$-$	
v		↗	56	↘	

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)$. **B**. $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(6)$.

C. $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=\max\{f(-1);f(6)\}$. **D**. $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- ☑ Hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;6)$.
  Suy ra, $f(-1) > f(-2)$ và $f(6) > f(2)$ (1)
- ☑ Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ suy ra $f(-1) > f(2)$ (2).
  Từ (1) và (2) suy ra $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-2); f(-1); f(2); f(6)\} = \max\{f(-1); f(6)\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Trong tam giác vuông có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền là a $(a > 0)$, tam giác có diện tích lớn nhất là

A. $\dfrac{a^2}{5\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{3\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{a^2}{6\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Giả sử ΔABC vuông tại A và có $AB+BC=a$. Đặt $AB=x \Rightarrow BC=a-x$. Vì $BC>AB \Rightarrow 0<x<\dfrac{a}{2}$.
Ta có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}$.
Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2x^2-2ax^3}$.
Xét hàm số $y=a^2x^2-2ax^3, 0<x<\dfrac{a}{2}$

$y'=2a^2x-6ax^2, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{a}{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{a}{3}$		$\dfrac{a}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	$y\left(\dfrac{a}{3}\right)$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra tam giác có diện tích lớn nhất là $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $\dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Cho hàm số $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y=4$. Khi đó, giá trị thực của tham số m thuộc tập hợp nào?

A. $[-2;0)$. **B.** $[2;4)$. **C.** $[0;2)$. **D.** $[4;6)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-3-5m}{(x-3)^2}$.

☑ Trường hợp $-3-5m>0\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow y'>0$ thì $\min\limits_{[1;2]} y=y(1)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(1+5m)=4\Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{5}$ (nhận vì $-\dfrac{9}{5}<-\dfrac{3}{5}$).

☑ Trường hợp $-3-5m<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow y'<0$ thì $\min\limits_{[1;4]} y=y(2)\Leftrightarrow -(2+5m)=4\Leftrightarrow m=-\dfrac{6}{5}$ (loại vì $-\dfrac{6}{5}<-\dfrac{3}{5}$).

Vậy $m\in[-2;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Một người cần làm một hình lăng trụ tam giác đều từ tấm nhựa phẳng để thể tích là $6\sqrt{3}$ cm^3. Để ít hao tốn vật liệu nhất thì người ta tính toán được độ dài cạnh đáy bằng a cm, cạnh bên bằng b cm. Khi đó tích ab là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là độ dài của cạnh đáy và cạnh bên của hình lăng trụ tam giác đều.

Theo giả thiết ta có thể tích của khối lăng trụ là: $V=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot y=6\sqrt{3}\Leftrightarrow x^2\cdot y=24\Leftrightarrow y=\dfrac{24}{x^2}$.

Để ít tốn hao vật liệu nhất khi làm nguyên liệu thì diện tích toàn phần của hình lăng trụ $\left(S_{tp}=2\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}+3xy\right)$ phải là nhỏ nhất.

$S_{tp}=2\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}+3xy=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}+3x\cdot\dfrac{24}{x^2}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{72}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{72}{x}$, với $x>0$.

Ta có: $f'(x)=x\sqrt{3}-\dfrac{72}{x^2}=\dfrac{x^3\sqrt{3}-72}{x^2}$. Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta xét $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{24\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{24\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f\left(\sqrt[3]{24\sqrt{3}}\right)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\sqrt[3]{24\sqrt{3}}$.

Khi đó: $a=\sqrt[3]{24\sqrt{3}}$ và $b=\dfrac{24}{\left(\sqrt[3]{24\sqrt{3}}\right)^2}=2$. Vậy $ab=4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều là 1 cm^3. Khi đó diện tích toàn phần nhỏ nhất của lăng trụ là

A. 3 cm^2. **B**. 6 cm^2. **C**. 4 cm^2. **D**. 5 cm^2.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là độ dài cạnh đáy và cạnh bên của hình lăng trụ tứ giác đều.
Theo giả thiết ta có: $V = x^2y = 1$ nên $y = \dfrac{1}{x^2}$
Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là: $S_{tp} = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + 4x\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4}{x} + 2x^2$
Ta xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$, với $x > 0$.
Trên đoạn $(0; +\infty)$, ta xét: $f'(x) = 4x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f(0) = 6$ nên diện tích toàn phần nhỏ nhất của hình lăng trụ là: 6cm^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Bất phương trình $2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right) < m + x^2 - 1$ có tập nghiệm là $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq 2\sqrt{3}$. **B**. $m \geq 3$. **C**. $m \geq 4$. **D**. $m \leq 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với:
$2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right) < m + \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2 - 3$
$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right) < \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right)^2 + m - 3$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right) - 3 > -m$, (1)
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$, với $x > -1$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-x+1}}$.

$$\text{Trên khoảng } (-1;+\infty):\ f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-x+1}=(1-2x)\sqrt{x+1}\\ x>-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ 1-2x>0\\ x^2-x+1=\left(4x^2-4x+1\right)(x+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\ 4x^3-x^2-2x=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	-1		$\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↗	$f\left(\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$	↘	2	↗	$+\infty$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$, dựa vào bảng biến thiên ta được điều kiện của t là $t>\sqrt{3}$. Khi đó bất phương trình (1) thành: $t^2-2t-3>-m$, (2). Để bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-1;+\infty)$ thì bất phương trình (2) phải có tập nghiệm $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, tức là bất phương trình (2) luôn đúng với mọi $t>\sqrt{3}$, (4).

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(t)=t^2-2t-3$, với $t>\sqrt{3}$:

x	$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để (4) xảy ra thì $-m\le-2\sqrt{3}\Leftrightarrow m\ge2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{52}{3}$. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $\dfrac{65}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$; $f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \dfrac{13}{3}$. Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = 5$ và $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 4$. Vì vậy tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên $[1;3]$ bằng 20.

Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

A. $\min\limits_{[2;3]} = -3$. **B.** $\min\limits_{[2;3]} = 2$. **C.** $\min\limits_{[2;3]} = 4$. **D.** $\min\limits_{[2;3]} = 3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in [2;3]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$ là $y(3) = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 - 6t$, với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24 m/s. **B.** 108 m/s. **C.** 64 m/s. **D.** 18 m/s.

Lời giải.

Vận tốc của vật là $v(t) = s'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 12t$, với $t \in [0;6]$.

Ta có $v'(t) = -3t + 12$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0;6]$.

Ta có $v(0) = 0$, $v(4) = 24$, $v(6) = 18$. Vậy $\max\limits_{[0;6]} v(t) = 24$ khi $t = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + x + m|$ trên đoạn $[2;4]$ và m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < m_0 < 5$. **B.** $m_0 < -8$. **C.** $-4 < m_0 < 0$. **D.** $-7 < m_0 < -5$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + m$ trên đoạn $[2;4]$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 > 0$ với mọi $x \in [2;4]$. Suy ra $f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[2;4]$, do vậy

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = m - 2 \text{ và } \max_{[2;4]} f(x) = f(4) = m + 20 \Rightarrow M = \max_{[2;4]} |f(x)| = \max\{|m-2|, |m+20|\}.$$

Ta có

$$2M \geq |m-2| + |m+20| \geq |m - 2 - m - 20| = 22 \Rightarrow M \geq 11.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |m-2| = |m+20| \\ (m-2)(m+20) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9$.

Vậy $m_0 = -9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \geq 1$. **B**. $m \geq -1$. **C**. $m \leq -1$. **D**. $m \leq 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

$y' = \dfrac{-x^2-2mx+1-m}{(x^2+x+1)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2mx+m-1 = 0$. (1)

Ta có $\Delta' = m^2-m+1 > 0$ với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x_2 = -m+\sqrt{m^2-m+1}$. Khi đó

$$\frac{1}{-2m+2\sqrt{m^2-m+1}+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1-2m+2\sqrt{m^2-m+1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+1} \geq m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2-m+1 \geq m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 96. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $D = \left[\dfrac{-\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right]$

A. $\max\limits_D f(x) = 1; \min\limits_D f(x) = \dfrac{19}{27}$. **B**. $\max\limits_D f(x) = \dfrac{3}{4}; \min\limits_D f(x) = -3$.

C. $\max\limits_D f(x) = 1; \min\limits_D f(x) = -3$. **D**. $\max\limits_D f(x) = \dfrac{3}{4}; \min\limits_D f(x) = \dfrac{19}{27}$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow t \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t) = 2t^3-2t^2+1, t \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$

Có $g'(t) = 6t^2-4t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3} \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$

Do đó $\max\limits_D f(x) = 1; \min\limits_D f(x) = \dfrac{19}{27}$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Tính tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[-1; 1]$?

A. 121. **B**. 64. **C**. 73. **D**. 22.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^4+4x^2+3)' = 4x^3+8x$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3+8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1; 1)$.

Đặt $m=\min\limits_{[-1;1]} y$; $M=\max\limits_{[-1;1]} y$.

Do $y(-1)=y(1)=8$; $y(0)=3$ nên $M=\max\limits_{[-1;1]} y=y(\pm 1)=8$; $m=\min\limits_{[-1;1]} y=y(0)=3$.

$\Rightarrow M^2+m^2=8^2+3^2=73$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ (với m là số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[1;4]} y=1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $-4<m<0$. **B**. $m>2$. **C**. $1<m\leq 2$. **D**. $m\leq -4$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$ do đó hàm số tăng hoặc giảm trên đoạn $[1;4]$, suy ra hoặc $\max\limits_{[1;4]} y=y(1)=1$ hoặc $\max\limits_{[1;4]} y=y(4)=1$ suy ra $m=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(2x-1)x^2(1-x)^2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đã cho có đúng một cực trị. **B**. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có hai cực trị. **D**. Hàm số đã cho có ba cực trị.

Lời giải.

$f'(x)$ đổi dấu đúng một lần khi x đi qua $x=\dfrac{1}{2}$ nên chỉ có một cực trị. Các nghiệm còn lại của $f'(x)=0$ đều là nghiệm kép nên khi đi qua các điểm này $f'(x)$ không đổi dấu.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^3 x-\dfrac{9}{2}\cos^2 x+3\cos x+\dfrac{1}{2}$ là

A. 1. **B**. -24. **C**. -12. **D**. -9.

Lời giải.

Đặt $f(x)=2\cos^3 x-\dfrac{9}{2}\cos^2 x+3\cos x+\dfrac{1}{2}$, $t=\cos x\Rightarrow g(t)=2t^3-\dfrac{9}{2}t^2+3t+\dfrac{1}{2}$, $t\in[-1;1]$. Khi đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\min\limits_{[-1;1]} g(t)$. Ta có

+/ Hàm số $y=g(t)$ xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

+/ $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

+/ $g(1)=1; g(-1)=-9; g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{8}$.

Vậy $\min\limits_{[-1;1]} g(t)=-9=g(-1)$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. C	4. C	5. C	6. B	7. C	8. C	9. C	10. A
11. A	12. B	13. A	14. B	15. C	16. B	17. D	18. D	19. A	20. B
21. C	22. D	23. A	24. D	25. B	26. B	27. C	28. B	29. B	30. B
31. D	32. B	33. A	34. B	35. A	36. A	37. D	38. A	39. C	40. B
41. D	42. D	43. A	44. A	45. B	46. B	47. A	48. B	49. A	50. D
51. B	52. C	53. B	54. D	55. B	56. A	57. D	58. C	59. D	60. A
61. D	62. B	63. D	64. C	65. C	66. D	67. B	68. D	69. A	70. D
71. A	72. C	73. C	74. A	75. B	76. B	77. B	78. A	79. A	80. A
81. C	82. C	83. D	84. C	85. C	86. D	87. A	88. A	89. B	90. A
91. B	92. B	93. A	94. B	95. D	96. A	97. C	98. C	99. A	100. D

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 11.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ có $y'=3x^2-6x-9$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$	$\nearrow$	$m+5$	$\searrow$	$m-27$	$\nearrow$	$m-20$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16 khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+5=16\\27-m\le 16\end{cases}\\\begin{cases}m-27=16\\m+5\le 16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=11.$$

Vậy $m=11$ là giá trị duy nhất thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{2x-x^3}-3m+4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Gọi $A=\max y$. Ta đặt $t=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow t=\sqrt{1-(x-1)^2}$ do đó $0\le t\le 1$.

Khi đó hàm số được viết lại là $y=|t-3m+4|$ với $t\in[0;1]$ ta suy ra

$A=\max\limits_{[0;1]}|t-3m+4|=\max\{|-3m+4|,|5-3m|\}\ge\dfrac{|-3m+4|+|5-3m|}{2}$.

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có: $|-3m+4|+|5-3m|=|3m-4|+|5-3m|\ge|3m-4+5-3m|\ge 1$.

Do đó $A\ge\dfrac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}|-3m+4|=|5-3m|\\(3m-4)(5-3m)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho x,y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$ là

A. $\min P = 5$. **B.** $\min P = \dfrac{115}{3}$. **C.** $\min P = \dfrac{7}{3}$. **D.** $\min P = \dfrac{17}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đưa biểu thức P về hàm số 1 ẩn x.

Khảo sát, tìm GTNN của hàm số đó.

Cách giải:

x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x, (0 \le x \le 2)$.

Khi đó: $P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1 = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + (2-x)^2 - x + 1 = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$.

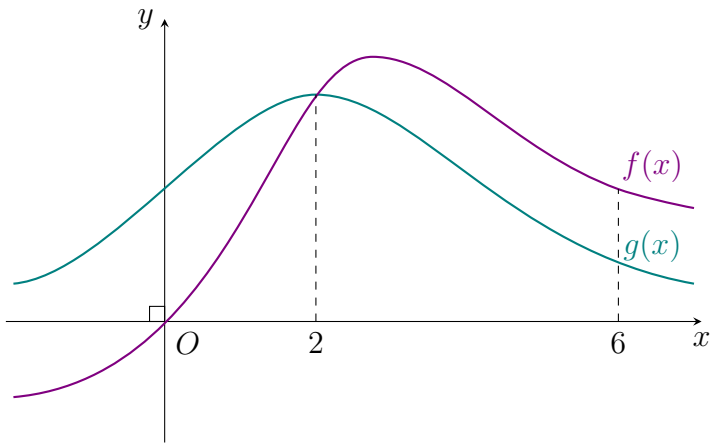
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5, x \in [0;2]$ có $f'(x) = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0 \left[\begin{array}{l} x = 1\,(\text{tm}), \\ x = -5\,(\text{ktm}). \end{array}\right.$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$, có $f(0) = 5, f(1) = \dfrac{7}{3}, f(2) = \dfrac{17}{3} \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = \dfrac{7}{3}$.

Vậy $\min P = \dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x), g'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là

A. $h(6), h(2)$. **B.** $h(0), h(2)$. **C.** $h(2), h(6)$. **D.** $h(2), h(0)$.

Lời giải.

Cách giải:

Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, \forall x \in (0;2) \\ h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0, \forall x \in (2;6). \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Lại có: $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)\Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6)\Leftrightarrow h(0)<h(6)$.
$\Rightarrow \min\limits_{[0;6]} h(x)=h(2); \max\limits_{[0;6]} h(x)=\max\{h(0);h(6)\}=h(6)$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M\geq 2m$.

A. 15. **B**. 14. **C**. 17. **D**. 16.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$
Do đó $f(1)\leq f(x)\leq f(2),\forall x\in[1;2]$ hay $a+\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq a+\dfrac{16}{3},\forall x\in[1;2]$
Ta xét các trường hợp sau:
TH1: Nếu $a+\dfrac{1}{2}>0\Leftrightarrow a>-\dfrac{1}{2}$ thì $M=a+\dfrac{16}{3}; m=a+\dfrac{1}{2}$ Theo đề bài $a+\dfrac{16}{3}\geq 2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a\leq\dfrac{13}{3}$.
Do a nguyên nên $a\in\{0;1;2;3;4\}$.
TH2: Nếu $a+\dfrac{16}{3}<0\Leftrightarrow a<-\dfrac{16}{3}$ thì $m=-\left(a+\dfrac{16}{3}\right); M=-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$.
Theo đề bài $-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\geq -2\left(a+\dfrac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\geq-\dfrac{61}{6}$. Do a nguyên nên $a\in\{-10;-9;...;-6\}$.
TH3: Nếu $a+\dfrac{1}{2}\leq 0\leq a+\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{16}{3}\leq a\leq -\dfrac{1}{2}$ thì $M\geq 0; m=0$ (Luôn thỏa mãn). Do a nguyên nên $a\in\{-5;-4;...;-1\}$.
Vậy có 15 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho các số thực x,y thay đổi thoả mãn $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\dfrac{1}{e^{3x^2-3}}$. Gọi m_0 là giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|x^2+2xy-y^2+3m-2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, m_0 thuộc vào khoảng nào?

A. $m_0\in(1;2)$. **B**. $m_0\in(-1;0)$. **C**. $m_0\in(2;3)$. **D**. $m_0\in(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\dfrac{1}{e^{3x^2-3}}$.
$\Leftrightarrow e^{(x+y)^2}+(x+y)^2=e^{3-3x^2}+3-3x^2\quad(*)$.
Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(t)=e^t+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mà $(*)\Leftrightarrow f\left[(x+y)^2\right]=f\left(3-3x^2\right)$.
Suy ra $(x+y)^2=3-3x^2$.
Vì $(x+y)^2\geq 0\Leftrightarrow 3-3x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} & (x+y)^2 = 3-3x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2+2xy+y^2 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 16x^2+8xy+y^2 = 12-3y^2 \\ \Leftrightarrow\ & (4x+y)^2 = 12-3y^2 \end{aligned}$$

Vì $(4x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 12-3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4$.
Mặt khác, ta có $(x+y)^2 = 3-3x^2 \Leftrightarrow 4x^2+2xy+y^2 = 3$.
Ta có

$$\begin{aligned} & P = \left|3x^2+2y^2-(3m+1)\right| \\ \Leftrightarrow\ & 3P = \left|9x^2+6y^2-3\cdot(3m+1)\right| \\ \Leftrightarrow\ & 3P = \left|9x^2+6y^2-\left(4x^2+2xy+y^2\right)(3m+1)\right| \\ \Leftrightarrow\ & 3P = \left|(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2\right| \\ \Leftrightarrow\ & P = \left|\frac{(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2}{3}\right| \\ \Leftrightarrow\ & P = \left|\frac{(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2}{4x^2+2xy+y^2}\right| \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $y=0$. Ta có $P = \left|\dfrac{5-2m}{4}\right| = \dfrac{|5-2m|}{4}$.
Trường hợp 2: $y \neq 0$. Đặt $t = \dfrac{x}{y}$.
Suy ra $P = \left|\dfrac{(5-2m)\,t^2-(6m+2)\,t+(5-3m)}{4t^2+2t+1}\right|$.
Đặt $f(t) = \dfrac{(5-2m)\,t^2-(6m+2)\,t+(5-3m)}{4t^2+2t+1}$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{18t^2-30t-12}{(4t^2+2t+1)^2}$.
Ta có $f'(t)=0 \Leftrightarrow 18t^2-30t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & \Rightarrow f(2)=1-3m \\ t=-\dfrac{1}{3} & \Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=8-3m \end{array}\right.$

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{5-2m}{4}$	↗	$8-3m$	↘	$1-3m$	↗	$\frac{5-2m}{4}$

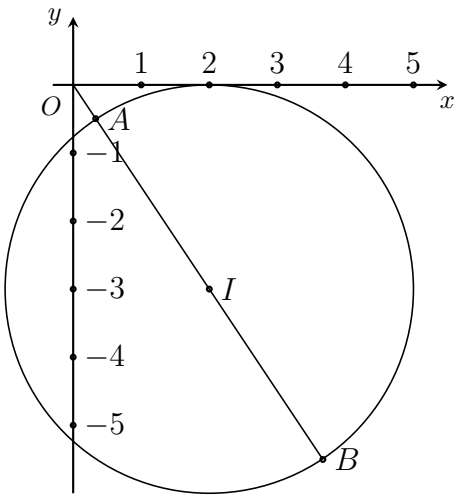
Suy ra $\max P \in \{|1-3m|\,;|8-3m|\} = \{|3m-1|\,;|8-3m|\} \geq \dfrac{|3m-1+8-3m|}{2} = \dfrac{7}{2}$.
Suy ra giá trị lớn nhất đạt giá trị nhỏ nhất khi $3m-1=8-3m \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.
Vậy $m=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|\sqrt{x^2+y^2}-a|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M\geq 2m$?

A. 17. **B**. 16. **C**. 15. **D**. 18.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}-\sqrt{6+4x-x^2}=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4+\frac{y^2+6y+10-(6+4x-x^2)}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4+\frac{x^2+y^2-4x+6y+4}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}=0\\
\Leftrightarrow\ & (x^2+y^2-4x+6y+4)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}\right)=0.
\end{aligned}$$

Vì $1+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+6y+10}+\sqrt{6+4x-x^2}}>0$, ta có

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x+6y+4=0\\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2+(y+3)^2=9.
\end{aligned}$$

Phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ là phương trình đường tròn (C) tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3$.
Gọi $N(x;y)\in(C)$ ta suy ra $ON=\sqrt{x^2+y^2}$ suy ra $T=|ON-a|$.
Gọi A,B là giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng OI. Khi đó $OA=OI-R=\sqrt{13}-3$ và $OB=\sqrt{13}+3$ Suy ra $\sqrt{13}-3\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{13}+3$.
TH1: Nếu $\sqrt{13}-3\leq a\leq\sqrt{13}+3$ thì $\left|\sqrt{x^2+y^2}-a\right|\geq 0\Rightarrow \min T=0\Rightarrow M\geq 2m\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5;6\}$
TH2: Nếu $a<\sqrt{13}-3\Rightarrow a<\sqrt{13}$ nên $\left|\sqrt{13}+3-a\right|>\left|\sqrt{13}-3-a\right|$, do đó $M=\left|\sqrt{13}+3-a\right|$;

$m = \left|\sqrt{13} - 3 - a\right|$. Vì

$$\begin{aligned} & M \geq 2m \Rightarrow \left|\sqrt{13} + 3 - a\right| \geq 2\left|\sqrt{13} - 3 - a\right| \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{13} + 3 - a)^2 - (2\sqrt{13} - 6 - 2a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{13} - 9 \leq a \leq \sqrt{13} + 1 \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -3; -1; 0\}. \end{aligned}$$

TH3: Nếu $a > \sqrt{13} + 3 \Rightarrow a > \sqrt{13}$ nên $\left|\sqrt{13} + 3 - a\right| < \left|\sqrt{13} - 3 - a\right|$, do đó $M = \left|\sqrt{13} - 3 - a\right|$; $m = \left|\sqrt{13} + 3 - a\right|$. Vì

$$\begin{aligned} & M \geq 2m \Rightarrow \left|\sqrt{13} - 3 - a\right| \geq 2\left|\sqrt{13} + 3 - a\right| \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{13} - 3 - a)^2 - (2\sqrt{13} + 6 - 2a)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{13} + 1 \leq a \leq \sqrt{13} + 9 \Rightarrow m \in \{7; 8; 9; 10\}. \end{aligned}$$

Vậy có 16 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tìm m để hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$

A. $m = 2\sqrt{2}$. **B.** $m = \sqrt{2}$. **C.** $m = -\sqrt{2}$. **D.** $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Tính được $y\left(\sqrt{2}\right) = m + 2\sqrt{2}$, $y(-2) = m - 2$ và $y(2) = m + 2$.

Để ý rằng $m - 2 < m + 2 < m + 2\sqrt{2}$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y = m + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên $[1; 3]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (1; 3) \\ x = 2 \in (1; 3) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-2$	↘	$m-4$	↗	m

Vì $m - 4 < m - 2 < m$ nên $\max\limits_{[1;3]} |f(x)| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 4 \\ |m - 4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 4 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

$\Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. $\max P = 1$. **B.** $\max P = 4$. **C.** $\max P = 2$. **D.** $\max P = 3$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}
&\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy \\
\Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right) = x^2+y^2+xy-3(x+y) \\
\Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy \\
\Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y)+2 = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right) \\
\Leftrightarrow\ &\log_{\sqrt{3}}[3(x+y)]+3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2.
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$ với $t > 0$, ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó

$$\begin{aligned}
&f(3(x+y)) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \\
\Leftrightarrow\ &3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \quad (1) \\
\Leftrightarrow\ &xy = (x+y)^2-3(x+y)+2.
\end{aligned}$$

Ta có $x = x+xy-xy = x(y+1)-xy \le \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = y+1$.

Do đó từ (1), suy ra

$$x \le \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$$

Đặt $t = x+y$, $t > 0$. Suy ra

$$P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \le \frac{2t+1+\dfrac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$

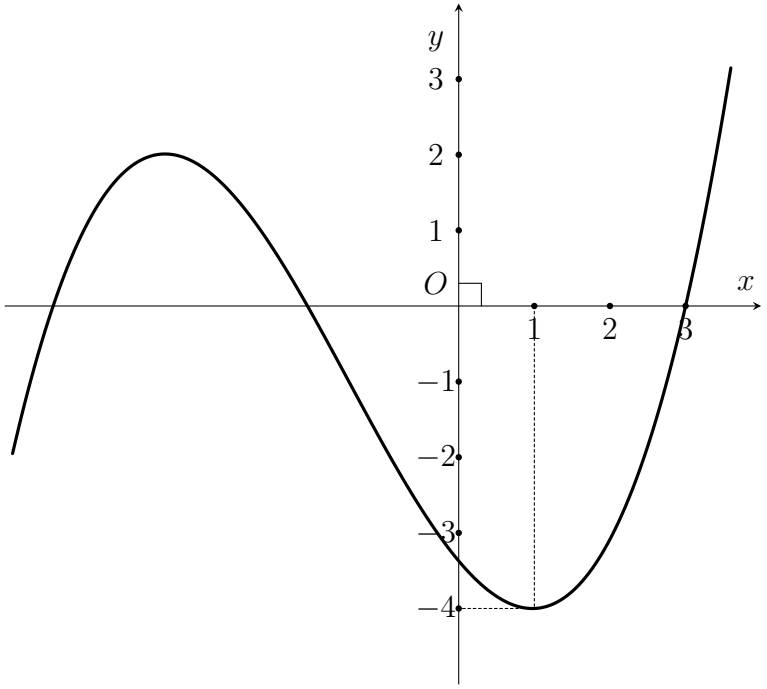
Ta có $f'(t) = \dfrac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Suy ra bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\dfrac{1}{8}$	↗	1	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max P = \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0;1)$ khi và chỉ khi



A. $m > -\dfrac{4}{1011}$. **B.** $m \geq \dfrac{4}{3e+2019}$. **C.** $m > -\dfrac{2}{1011}$. **D.** $m > \dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đặt $t = e^x$, $(t > 0)$.

Ta đưa bất phương trình đã cho thánh bất phương trình ẩn t, từ đó lập luận để có phương trình ẩn t có nghiệm thuộc $(1;e)$.

Ta chú ý rằng hàm số $y = f(x)$ và $y = f(t)$ có tính chất giống nhau nên từ đồ thị hàm số đã cho ta suy ra tính chất hàm $f(t)$.

Sử dụng phương pháp hàm số để tìm m sao cho bất phương trình có nghiệm.

Bất phương trình $m > f(X)$ có nghiệm trên $(a;b)$ khi $m > \min\limits_{[a;b]} f(X)$. *Cách giải:*

Xét bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ (*)

Đặt $e^x = t, (t > 0)$,.

Với $x \in (0;1) \Rightarrow t \in (e^0; e^1) \Rightarrow t \in (1;e)$.

Ta được bất phương trình $f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow m > \dfrac{f(t)}{3t+2019}(1)$ (vì $3t + 2019 > 0$ với $t \in (1;e)$).

Để bất phương trình (*) có nghiệm $x \in (0;1)$ thì bất phương trình (1) có nghiệm $t \in (1;e)$.

Ta xét hàm $g(t) = \dfrac{f(t)}{3t+2019}$ trên $(1;e)$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t+2019) - 3f(t)}{(3t+2019)^2}$.

Nhận xét rằng đồ thị hàm số $y = f(t)$ có tính chất giống với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên xét trên khoảng $(1;e)$ ta thấy rằng $f(t) < 0$ và đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải hay hàm số đồng biến trên $(1;e)$ nên $f'(t) > 0$.

Từ đó $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t+2019) - 3f(t)}{(3t+2019)^2} > 0$ với $t \in (1;e)$ hay hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(1;e)$.

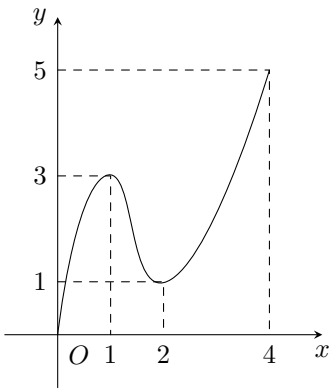
Ta có bảng biến thiên của $g(t)$ trên $[1;e]$

t	1		e
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	$-\dfrac{2}{1011}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy để bất phương trình $m > \dfrac{f(t)}{3t+2019}$ có nghiệm $t \in (1;e)$ thì $m > \min\limits_{[1;e]} g(t) \Leftrightarrow m > -\dfrac{2}{1011}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị trên đoạn $[0;4]$ như hình vẽ bên dưới.



Đặt $M = \max f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$, $m = \min f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$. Khi đó $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $t \in [0;2]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;2]$ ta thấy $M = \max\limits_{x\in[0;2]} f(t) = 3$ và $M = \min\limits_{x\in[0;2]} f(t) = 0$.

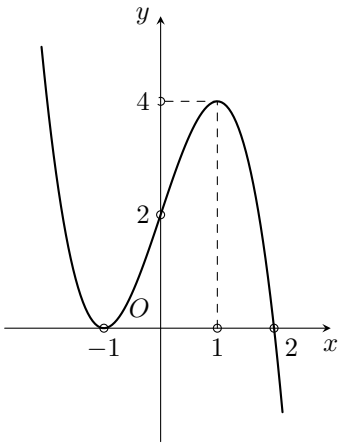
Vậy $M + m = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(-1) = \dfrac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{1573}{64}$. **B.** 198. **C.** $\dfrac{37}{4}$. **D.** $\dfrac{14245}{64}$.



Lời giải.

Bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x) = 3f^2(x).f'(x) - 3f'(x)$.
Xét trên đoạn $[-1;2]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	

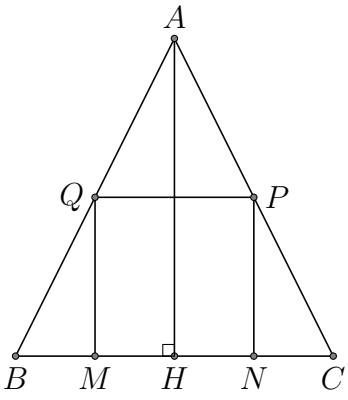
$$\Rightarrow \min_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \frac{1573}{64}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho tam giác đều ABC có cạnh 8 cm. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ với cạnh MN nằm trên cạnh BC và hai đỉnh P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB của tam giác. Tính BM sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

A. $BM = 2$ cm. **B.** $BM = 8\sqrt{3}$ cm. **C.** $BM = 4$ cm. **D.** $BM = 4\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.



① Đặt $BM = x$ $(x > 0) \Rightarrow MN = 8 - 2x$ $(x < 4)$.

② Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABH có $MQ \parallel AH \Rightarrow \dfrac{QM}{AH} = \dfrac{BM}{BH} \Rightarrow QM = \dfrac{4\sqrt{3}x}{4} = \sqrt{3}x$.

③ Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S = MQ \cdot MN = \sqrt{3}x(8 - 2x) = -2\sqrt{3}\,(x^2 - 4x) = -2\sqrt{3}\,(x-2)^2 + 8\sqrt{3} \le 8\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$. Vậy $BM = 2$ cm.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \le 0 \\ x^3 + 3x^2 - 9x - 10 > 0 \end{cases}$ là

A. $(-\infty; -4)$. **B.** $[-4; -1]$. **C.** $[-4; 1]$. **D.** $[-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x^2+5x+4 \le 0 & (1) \\ x^3+3x^2-9x-10>0. & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta được $-4 \le x \le -1$.

Giải (2). Đặt $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$. Ta có bảng biến thiên

x	-4		-3		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	↗	17	↘	1

Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;-1]$ và $\max\limits_{[-4;-1]} f(x)=17$; $\min\limits_{[-4;-1]} f(x)=1$ nên $f(x)>0, \forall x \in [-4;-1]$.

Nghiệm của hệ đã cho là nghiệm chung của (1) và (2).

Do đó nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=[-4;-1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 1. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$ trên $[1;2]$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}>0, \forall x \in [1;2]$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$. Do đó $\max\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=\dfrac{3m+4}{3}, \min\limits_{[1;2]} f(x)=f(1)=\dfrac{2m+1}{2}$.

Trường hợp 1: $\dfrac{2m+1}{2} \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}$.

Trong trường hợp này ta có $\max\limits_{[1;2]} |f(x)|=\dfrac{3m+4}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{3m+4}{3}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 1: $\dfrac{3m+4}{3} \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{4}{3}$.

Trong trường hợp này ta có $\max\limits_{[1;2]} |f(x)|=\dfrac{-2m-1}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{-2m-1}{2}=2 \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 1: $\dfrac{2m+1}{2}<0<\dfrac{3m+4}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}<m<-\dfrac{1}{2}$.

+) Nếu $\dfrac{-2m-1}{2} \le \dfrac{3m+4}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{12} \le m < -\dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{[1;2]} |f(x)|=\dfrac{3m+4}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{3m+4}{3}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$ (không thỏa mãn).

+) Nếu $\dfrac{-2m-1}{2} \ge \dfrac{3m+4}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{12} \ge m > -\dfrac{4}{3}$ thì $\max\limits_{[1;2]} |f(x)|=\dfrac{-2m-1}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{-2m-1}{2}=2 \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy $S=\left\{\frac{2}{3};-\frac{5}{2}\right\} \Rightarrow |S|=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Biết đồ thị hàm số $y=(3a^2-1)x^3-(b^3+1)x^2+3c^2x+4d$ có hai điểm cực trị là $(1;-7)$, $(2;-8)$. Tính tổng $M=a^2+b^2+c^2+d^2$.

A. $M=-18$. **B**. $M=18$. **C**. $M=15$. **D**. $M=8$.

Lời giải.

Ta có $y'=3(3a^2-1)x^2-2(b^3+1)x+3c^2$.

Từ giả thiết ta có : $\begin{cases}8(3a^2-1)-4(b^3+1)+6c^2+4d=-8\\(3a^2-1)-(b^3+1)+3c^2+4d=-7\\3(3a^2-1)-2(b^3+1)+3c^2=0\\3(3a^2-1)\cdot 2^2-2\cdot 2(b^3+1)+3c^2=0.\end{cases}$

Đặt $A=3a^2-1, B=b^3+1, C=3c^2, D=4d$ ta có hệ mới

$$\begin{cases}8A-4B+2C+D=0\\A-B+C+D=0\\3A-2B+C=0\\12A-4B+C=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A=2\\B=9\\C=12\\D=-12\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3a^2-1=2\\b^3+1=9\\3c^2=12\\4d=-12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2=1\\b^2=4\\c^2=4\\d^2=9.\end{cases}$$

Vậy : $M=1+4+4+9=18$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Với $a,b,c>0$ thỏa $c=8ab$ thì biểu thức $P=\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{c}{4bc+3c+2}+\frac{c}{2ac+3c+4}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{m}{n}$ ($m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản). Tính $2m^2+n$.

A. 9. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có

$$P=\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{c}{4bc+3c+2}+\frac{c}{2ac+3c+4}$$

$$= \frac{1}{4a+2b+3} + \frac{1}{4b+3+\frac{2}{c}} + \frac{1}{2a+3+\frac{4}{c}}.$$

Đặt $2a = x, 2b = y, \frac{2}{c} = z \Rightarrow xyz = 2a \cdot 2b \cdot \frac{8ab}{c} = 1$ (vì $c = 8ab$).

Khi đó $P = \frac{1}{2x+y+3} + \frac{1}{y+z+3} + \frac{1}{2z+x+3}$.

Mặt khác $2x + y + 3 = x + x + y + 1 + 2 \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{x} + 2 = 2\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1\right)$.

Tương tự :

$$\begin{aligned} 2y + z + 3 &\geq 2\left(\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1\right) \\ 2z + x + 3 &\geq 2\left(\sqrt{xz} + \sqrt{z} + 1\right). \end{aligned}$$

Do đó :

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{xz}+\sqrt{z}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$, nên $\max P = \frac{1}{2}$.

Vậy $m = 1, n = 2 \Rightarrow 2m^2 + n = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi Mvà m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là

A. $A = 17 - 2\sqrt{6}$. **B.** $A = 17 - \sqrt{6}$. **C.** $A = 17 + \sqrt{6}$. **D.** $A = 17 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đặt $xy + 2 = t$, ta có $x^2 + y^2 = 1 + xy = t - 1$.

Từ $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow t - 1 \geq 2(t-2) \Rightarrow t \leq 3$.

Mặt khác $(x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Rightarrow t - 1 + 2(t-2) \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{5}{3}$.

Các dấu bằng đều xảy ra nên $t \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$.

Ta có $x^2 + y^2 + 1 = 2 + xy = 2 + (t-2) = t$;

$x^4 + y^4 + 1 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1 = (t-1)^2 - 2(t-2)^2 + 1 = -t^2 + 6t - 6$.

Do đó $P = -t + 6 - \frac{6}{t}$; xét hàm $f(t) = -t - \frac{6}{t} + 6$.

Có $f'(t) = -1 + \dfrac{6}{t^2} = \dfrac{(\sqrt{6}-t)(\sqrt{6}+t)}{t^2}$.

$f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{11}{15}$; $f(3) = 1$; $f(\sqrt{6}) = 6 - 2\sqrt{6}$.

Do đó $m = \min\limits_{\left[\frac{5}{3};3\right]} P = \dfrac{11}{15}$; $M = \max\limits_{\left[\frac{5}{3};3\right]} P = 6 - 2\sqrt{6}$.

Vậy $A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho các số thực không âm x, y thay đổi. M, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$. Giá trị của $8M + 4m$ bằng

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2} = \dfrac{x-y-x^2y+xy^2}{(x+1)^2(y+1)^2} = \dfrac{x+xy^2+2xy-(y+x^2y+2xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$

$= \dfrac{x(y+1)^2 - y(1+x)^2}{(x+1)^2(y+1)^2} = \dfrac{x}{(x+1)^2} - \dfrac{y}{(y+1)^2}$.

Đặt $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ với $t \geq 0$. $\Rightarrow f'(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t)^4}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của $f(t) = \dfrac{1}{4}$ khi t = 1, giá trị nhỏ nhất của $f(t) = 0$ khi $t = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của $M = \max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) - \min\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $x = \dfrac{1}{4}$, $y = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $m = \min\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) - \max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) = 0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$ đạt được khi $x = 0$, $y = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $8M + 4m = 8.\dfrac{1}{4} + 4\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Tính giá trị của $M + m$.

A. $M + m = -4$. **B**. $M + m = -\dfrac{1}{2}$. **C**. $M + m = -6$. **D**. $M + m = 1 - 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P = 2(x^3+y^3) - 3xy &= 2(x+y)(x^2+y^2-xy) - 3xy \\ &= 2(x+y)(2-xy) - 3xy. \end{aligned}$$

Đặt $x+y=t$, khi đó

$$x^2+y^2=2 \Leftrightarrow xy=\frac{(x+y)^2}{2}-1 \Leftrightarrow xy=\frac{t^2}{2}-1.$$

Do

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow t^2 \geq 4\left(\frac{t^2}{2}-1\right) \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2.$$

Xét hàm số $f(t)=P=2t\left(2-\left(\frac{t^2}{2}-1\right)\right)-3\left(\frac{t^2}{2}-1\right)=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+3$ trên đoạn $[-2;2]$. Ta có $f'(t)=-3t^2-3t-6$ và $f'(t)=0 \Leftrightarrow -3t^2-3t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \in [-2;2] \\ t=-2 \in [-2;2] \end{array}\right.$. Khi đó

$$f(-2)=-7;\ f(1)=\frac{13}{2};\ f(2)=1.$$

Suy ra $M=\max\limits_{t\in[-2;2]} f(t)=\frac{13}{2}$ và $m=\min\limits_{t\in[-2;2]} f(t)=-7$.

Vậy $M+m=\frac{13}{2}-7=-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 108. **B.** 120. **C.** 210. **D.** 136.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=x^3-28x+48$. Với mọi $x\in[0;2]$, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Mặt khác, $f(0)=m-30$, $f(2)=m+14$. Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề bài, suy ra

$$\max_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}\leq 30 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(0)|\leq 30 \\ |f(2)|\leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30|\leq 30 \\ |m+14|\leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30\leq m-30\leq 30 \\ -30\leq m+14\leq 30. \end{cases}$$

Từ đó, ta có $0\leq m\leq 16$, hay là $m\in S=\{0;1;2;3;\ldots;15;16\}$.

Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là $\frac{17(0+16)}{2}=136$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3, f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;-2017)$. **C.** $(-2017;0)$. **D.** $(2017;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

- ☑ Từ BXD của $f"(x)$ ta suy ra BBT của $f'(x)$ và suy ra BBT của hàm số $f'(x+2017)+2018$.
- ☑ Giải phương trình $f'(x+2017)+2018=0$, lập BBT của hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ và xác định GTNN.

Cách giải:

Ta có: $y'=f'(x+2017)+2018=0$

Từ BXD của $f"(x)$ ta suy ra BBT của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f"(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2018	↗	$+\infty$

Từ BBT ta có: $f'(x+2017)=-2018 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2017=2 \\ x+2017=a<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2015 \\ x_2<-2017 \end{array}\right.$.

Từ đó ta suy ra BBT của hàm số $f'(x+2017)+2018$ như sau:

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ lên trên 2018 đơn vị.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sang trái 2017 đơn vị.

x	$-\infty$		x_2	-2017		-2015		$+\infty$
$f"(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x+2017)+2018$	$-\infty$	↗	‖	2021	↘	0	↗	$+\infty$

Suy ra BBT của hàm số $y=f(x+2017)+2018x$

x	$-\infty$		$x_2<-2017$		-2015		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt GTNN tại $x_2<-2017$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=6$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

$y' = -3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Ta có $y(-1) = -2 + m; y(1) = -4 + m; y(0) = m$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ là $-4 + m$. Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $m = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày cho số tiền lãi là $x^2 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày cho số tiền lãi là $-27y^2 + 326y$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày để số tiền lãi thu được nhiều nhất? Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc và máy B làm việc không quá 6 ngày.

A. 6. **B**. 5. **C**. 7. **D**. 4.

Lời giải.

Theo đề $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

Bài toán tở thành tìm x để hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất với

$$f(x) = -27(10 - x)^2 + 326(10 - x) + x^2 + 2x = -26x^2 + 216x + 560.$$

Vì $f(x)$ là hàm bậc hai có $a < 0$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{54}{13} \simeq 4$ do $(y \leq 6)$.

Vậy máy A cần được sử dụng trong 4 ngày, máy B cần được sử dụng trong 6 ngày.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$x^4 + \frac{16}{x^4} - 4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 12\left(x - \frac{2}{x}\right) = m$$

có nghiệm $x \in [1; 2]$.

A. $-13 \leq m \leq 11$. **B**. $-15 \leq m \leq 9$. **C**. $-15 < m < 9$. **D**. $-16 \leq m \leq 9$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^4 + \dfrac{16}{x^4} - 4\left(x^2 + \dfrac{4}{x^2}\right) - 12\left(x - \dfrac{2}{x}\right)$.

Đặt $t = t(x) = x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2 - 2}{x}$ với $x \in [1; 2]$.

Ta có $t'(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Ta có $t(x)$ liên tục trên $[1; 2]$ và $t'(x)$ đồng biến trên $(1; 2)$ nên $\min\limits_{[1;2]} t(x) = t(1) = -1, \max\limits_{[1;2]} t(x) = 1$.

Với $t = x - \dfrac{2}{x}$, $f(x)$ thành $g(t) = t^4 + 4t^2 - 12t - 8$.

Ta tìm GTLN, GTNN của $g(t)$ trên $[-1; 1]$.

Ta có $g'(t) = 4t^3 + 8t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 + 4t + 12) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (do $4t^2 + 4t + 12 > 0 \quad \forall t$).

Ta có $g(-1) = 9, g(1) = -15$.

Do đó, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = \max\limits_{[-1;1]} g(t) = 9; \min\limits_{[1;2]} f(x) = \min\limits_{[-1;1]} g(t) = -15$.

Vậy $-15 \leq m \leq 9$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Ông A cắt một sợi dây có chiều dài 6 m thành hai đoạn rồi làm như sau. Ông lấy một đoạn trong hai đoạn dây đó chia làm ba phần bằng nhau rồi xếp thành tam giác đều, đoạn dây còn lại ông chia làm bốn phần bằng nhau rồi xếp thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được nhỏ nhất?

A. $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{18}{4+\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi x (m) là độ dài đoạn dây ông A chọn để xếp thành tam giác đều. Ta có tổng diện tích hai hình là $S(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{36}+\dfrac{1}{16}\right)x^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{4}$. Do đó, tổng diện tích có giá trị nhỏ nhất tại $x=\dfrac{54}{9+4\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{2x-x^3}-3m+4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Gọi $A=\max y$. Ta đặt $t=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow t=\sqrt{1-(x-1)^2}$ do đó $0\le t\le 1$.
Khi đó hàm số được viết lại là $y=|t-3m+4|$ với $t\in[0;1]$ ta suy ra
$A=\max\limits_{[0;1]}|t-3m+4|=\max\{|-3m+4|,|5-3m|\}\ge\dfrac{|-3m+4|+|5-3m|}{2}$.
Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có: $|-3m+4|+|5-3m|=|3m-4|+|5-3m|\ge|3m-4+5-3m|\ge 1$.
Do đó $A\ge\dfrac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}|-3m+4|=|5-3m|\\(3m-4)(5-3m)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2+y^2)+xy=(x+y)(xy+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{25}{4}$. **B.** 5. **C.** -13. **D.** $-\dfrac{23}{4}$.

Lời giải.

Có $2(x^2+y^2)+xy=(x+y)(xy+2)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1=(x+y)\left(1+\dfrac{2}{xy}\right)=x+\dfrac{2}{y}+y+\dfrac{2}{x}$.
$\Rightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$ $(*)$
Đặt $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}>0$, ta có $t^2=\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+2\Rightarrow\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=t^2-2$
và $t^3=\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}+3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\Rightarrow\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}=t^3-3t$.
$(*)\Leftrightarrow\left(2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1\right)^2\ge 8\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right)\Leftrightarrow(2t+1)^2\ge 8(t+2)\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\ge 0\Leftrightarrow t\ge\dfrac{5}{2}$.
$P=4(t^3-3t)-9(t^2-2)=4t^3-9t^2-12t+18=f(t)$, $f'(t)=12t^2-18t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗		↘		↗	

TỪ bảng biến thiên ta suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$, vậy $P \geq f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{23}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2+4x+13} - \sqrt{x^2-2x+5}$. Hỏi M gần giá trị nào nhất dưới đây?

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 0.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$?

A. $m \leq 6\sqrt{2}-4$. **B.** $m \geq 6\sqrt{2}-4$. **C.** $m \leq 6$. **D.** $m \geq 6$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}$ với $x \in [-1;3]$.

$\Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Rightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

$t' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$

$t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$t(-1) = 2; t(1) = 2\sqrt{2}; t(3) = 2$

Vậy $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Bất phương trình đã cho tương đương:

$3t + 4 - t^2 \geq m$ với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

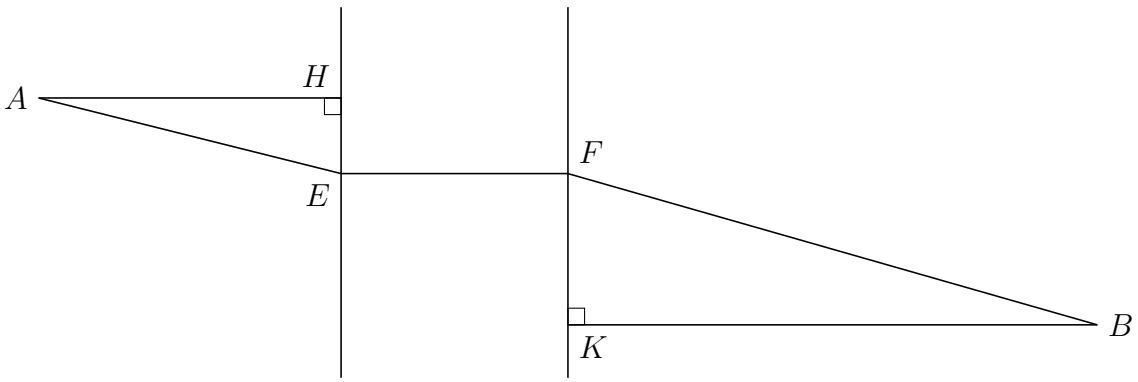
Đặt $f(t) = -t^2 + 3t + 4$ với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$ $f' = -2t + 3; f' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

$f(2) = 6; ; f(2\sqrt{2}) = -4 + 6\sqrt{2}$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow m \leq 6\sqrt{2} - 4$

Chọn đáp án (A) □

Câu 32.



Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách bờ sông một khoảng là 5 km và thành phố B cách bờ sông một khoảng là 7 km (như

hình vẽ), biết tổng độ dài $HE+KF=24$ km. Hỏi cây cầu cách thành phố A một khoảng là bao nhiêu để đường đi $AEFB$ từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất.

A. $7,5$ km. **B**. $5\sqrt{5}$ km. **C**. $5\sqrt{3}$ km. **D**. $10\sqrt{2}$ km.

Lời giải.

Đặt $HE=x$ $(0<x<24)\Rightarrow KF=24-x\Rightarrow AE=\sqrt{x^2+25}$ và $BF=\sqrt{x^2-48x+625}$.

Xét $f(x)=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2-48x+625}$ trên khoảng $(0;24)$. Ta có

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+25}}+\dfrac{x-24}{\sqrt{x^2-48x+625}}=0\Rightarrow x=10$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		10		24
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ 30	↘	$12\sqrt{5}$	↗	$\sqrt{601}$ ‖

Vậy $AE_{\min}=5\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $3(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})-2\sqrt{(1+x)(3-x)}\geq m$.

A. $m\leq 6\sqrt{2}-4$. **B**. $m\geq 6$. **C**. $m\geq 6\sqrt{2}-4$. **D**. $m\leq 6$.

Câu 34. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

A. 50 ngàn. **B**. 80 ngàn. **C**. 450 ngàn. **D**. 480 ngàn.

Câu 35. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (không nắp trên, các bề mặt là phẳng), có đáy là một hình vuông. Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể và thể tích của hộp là 4 dm^3

A. 1 dm. **B**. $0,5$ dm. **C**. 2 dm. **D**. $1,5$ dm.

Lời giải.

Gọi chiều cao hình hộp là h, cạnh hình vuông đáy là a.

Ta có thể tích khối hộp $V=4=a^2.h\Rightarrow h=\dfrac{4}{a^2}$.

Do hộp có 4 mặt bên và 1 mặt đáy nên tổng diện tích các mặt cần mạ vàng $S=a^2+4ah=a^2+\dfrac{16}{a}$.

Để lượng vàng cần dùng ít nhất thì S phải nhỏ nhất.

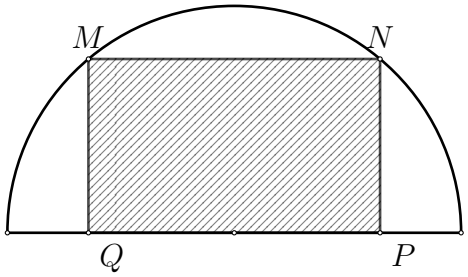
Xét hàm số $f(x)=a^2+\dfrac{16}{a}, a>0$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 12 tại $a=2\Rightarrow h=1$.

Nhận xét, sử dụng bất đẳng thức Cô-si, $a^2+\dfrac{16}{a}=a^2+\dfrac{8}{a}+\dfrac{8}{a}\geq 3\sqrt[3]{a^2.\dfrac{8}{a}.\dfrac{8}{a}}\Longleftrightarrow a^2+\dfrac{16}{a}\geq 12$, dấu bằng xảy ra khi $a=2$.

Chọn đáp án (A) □

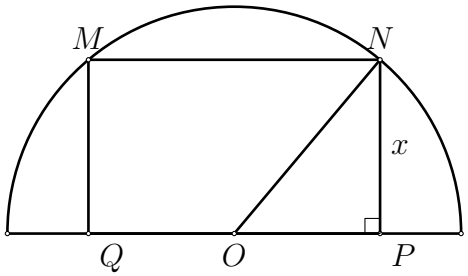
Câu 36.

Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện lớn nhất có thể có của miếng tôn hình chữ nhật là



A. 9. **B**. $6\sqrt{2}$. **C**. $6\sqrt{3}$. **D**. 6.

Lời giải.



Gọi $x = NP$. Xét tam giác vuông NPO ta có:
$OP = \sqrt{ON^2 - NP^2} = \sqrt{9 - x^2}$.
Diện tích của hình chữ nhật là:
$S = MN.NP = 2\sqrt{9 - x^2}.x = 2\sqrt{9x^2 - x^4}$ $(0 < x < 3)$.
Xét hàm số $f(x) = 9x^2 - x^4$ trên khoảng $(0; 3)$
$\Rightarrow \max\limits_{(0;3)} f(x) = \dfrac{81}{4}$ khi $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $S = 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hàm số $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm $M(a; b)$ (với $a > 0$) trên đồ thị hàm số đến trục hoành.

A. $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. 2.

Lời giải.

∘ Do $M(a; b) \in (C)$ nên $b = a^2 + \dfrac{1}{a}$.

∘ Do $a > 0$ nên $d(M, Ox) = a^2 + \dfrac{1}{a} = a^2 + \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2a} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, dấu " = " xảy ra khi $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. $\max\limits_{[-1;2]} y = 11$. **B**. $\max\limits_{[-1;2]} y = 6$. **C**. $\max\limits_{[-1;2]} y = 15$. **D**. $\max\limits_{[-1;2]} y = 10$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$
Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y = \max f(-1); f(-2); f(1) = f(-1) = 15$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. GTLN và GTNN của hàm số $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

A. $\max y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \min y = -1$. **B**. $\max y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \min y = 0$.

C. $\max y = \dfrac{2}{3}, \min y = 0$. **D**. $\max y = 2, \min y = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $t \in [0; 1]$. Khi đó $y = 2t - \dfrac{4}{3}t^3$
Ta có $y' = 2 - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} y = \max\{y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right); y(0); y(1)\} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\min\limits_{[0;1]} y = \min\{y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right); y(0); y(1)\} = 0$

Chọn đáp án B □

Câu 40. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 nghìn đồng thì lại có 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 nghìn đồng. **B**. 460 nghìn đồng. **C**. 470 nghìn đồng. **D**. 450 nghìn đồng.

Lời giải.

Gọi x là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x là $\dfrac{(x-400)2}{20} = \dfrac{x-400}{10}$

Số phòng cho thuê với giá x là $f(x) = x\left(90 - \dfrac{x}{10}\right) = -\dfrac{x^2}{10} + 90x$.

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{x}{5} + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 450$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	20250	↘	$-\infty$

$\Rightarrow f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 20250 tại $x = 450$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

A. -83. **B**. -91. **C**. -86. **D**. -79.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $(x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{array}\right.$

Mặt khác $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \leq \sqrt{2(x+y)} \Rightarrow x + y \leq 8$

Từ $(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9$.

Ta có $Q = 4(x+y)^2 + 7xy \geq Q \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63$.

Đặt $t = x + y$ ($t \in [4; 8]$). Khi đó, $Q = 4t^2 - 21t - 63$. Vậy $Q_{\min} = Q(7) = -83$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của con kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức: $h = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) + 3$. Thời điểm mực nước của kênh cao nhất là

A. $t = 14$. **B**. $t = 13$. **C**. $t = 15$. **D**. $t = 16$.

Câu 43. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của $x+y$ là

A. 7. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2, y \geq -3 \Rightarrow x+y+1 \geq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right) &\Leftrightarrow (x+y+1)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{(x-2)(y+3)}\right) \\ &\Leftrightarrow (x+y+1)^2-4(x+y+1)=8\sqrt{(x-2)(y+3)} \quad (*) \end{aligned}$$

Lại có $\sqrt{(x-2)(y+3)} \leq \dfrac{x-2+y+3}{2}=\dfrac{x+y+1}{2}$. Kết hợp với $(*)$ ta được

$$\begin{aligned} (x+y+1)^2-4(x+y+1) \leq 4(x+y+1) &\Leftrightarrow (x+y+1)^2-8(x+y+1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x+y+1 \leq 8 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x+y \leq 7. \end{aligned}$$

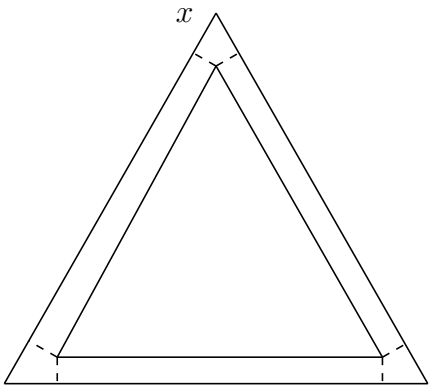
Giá trị lớn nhất của $x+y=7$ khi $\begin{cases} x-2=y+3 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$.

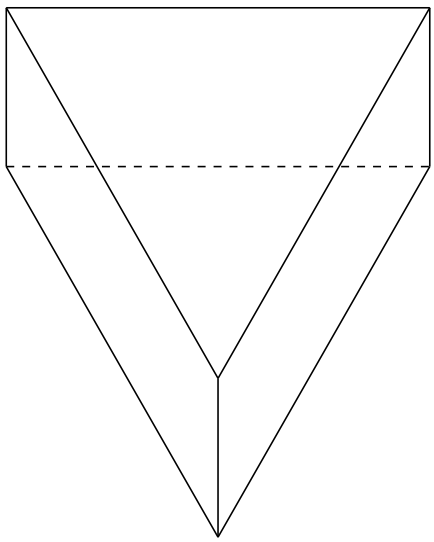
Vậy GTLN của $x+y$ bằng 7.

Chọn đáp án (A) □

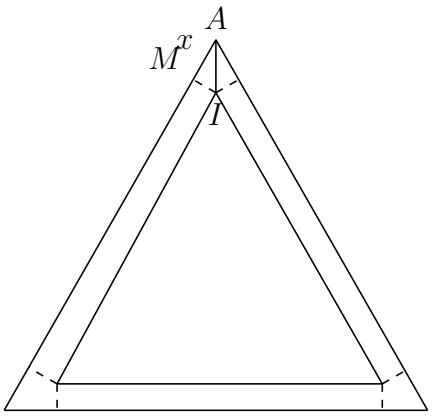
Câu 44. Cắt ba góc của một tam giác đều bằng a các đoạn bằng x, $\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại thành khối lăn trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăn trụ lớn nhất.

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{6}$.





Lời giải.



Xét tam giác AMI như hình vẽ, đặt $AM = x > 0$, $\widehat{MAI} = 30^\circ \Rightarrow MI = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy $a - 2x$, $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$, chiều cao $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ nên thể tích khối lăng trụ là $V = \dfrac{(a-2x)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{4}$

Ta cần tìm $x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$ để thể tích V đạt giá trị lớn nhất.

Xét $f(x) = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, có $f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{6} \\ x = \dfrac{a}{2} \text{(loại)} \end{array}\right.$.

x	0		$\dfrac{a}{6}$		$\dfrac{a}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{6}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị của $M + m$.

A. 41. **B**. 44. **C**. 42. **D**. 43.

Lời giải.

Áp dụng BĐT B-C-S ta có $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2}.\sqrt{y+1} \le \sqrt{3(x+y)} \Longrightarrow 0 \le x + y \le 3$. Đặt $t = x + y$, ta có $P = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$, $P'(t) = 2t + 2 - \dfrac{4}{\sqrt{4-t}} \ge 0$ với mọi $t \in (0; 3)$, mặt khác $P(t)$ liên tục

trên đoạn $[0;3]$ suy ra hàm số $P(t)$ đồng biến trên $[0;3]$ và $P_{\max} = P(3) = 25$, $P_{\min} = P(0) = 18$. Vậy $M + m = 43$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + \sqrt{2x^2+1}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

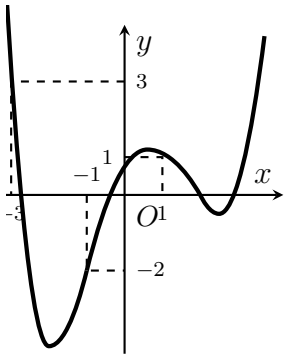
$y' = -1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $\min y = y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho đồ thị $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Lập Bảng biến thiên:

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ (tham số m, n) đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(n^2+m^2) - m - n$ bằng

A. -16. **B.** 4. **C.** $-\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $y=(x+m)^3+(x+n)^3-x^3=x^3+3(m+n)x^2+3\left(m^2+n^2\right)x+m^3+n^3$.

$y'=3x^2+6(m+n)x+3\left(m^2+n^2\right)$. Hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow m.n\le 0$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(n^2+m^2\right)-m-n$.

☑ TH1: $m=n=0\Rightarrow P=0$ (1).

☑ TH2: $m.n\le 0$. Ta có: $P=\left(2m-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}+4n^2+(-n)\ge-\dfrac{1}{16}$ (2).

Từ (1); (2) $\Rightarrow P_{\min}=-\dfrac{1}{16}$. Dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi $m=\dfrac{1}{8};n=0\vee m=0;n=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho các số thực dương x,y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}$.

A. $\max P=1$. **B.** $\max P=\dfrac{1}{10}$. **C.** $\max P=\dfrac{1}{8}$. **D.** $\max P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}=\dfrac{4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right)^3}$.

Đặt $t=\sqrt{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}, t\ge 1$ thì $4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=t^2-1$. Khi đó, $P=\dfrac{t^2-1}{(1+t)^3}=\dfrac{t-1}{(t+1)^2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t-1}{(t+1)^2}, t\ge 1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-t^2+2t+3}{(t+1)^4}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=3$.

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\dfrac{1}{8}$	↘	0

Vậy $\max P=\max\limits_{t\in[1;+\infty)} f(t)=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos\dfrac{x}{2}+\sin x+1$.

A. $1-2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{2-5\sqrt{3}}{2}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì hàm số $y=2\cos\dfrac{x}{2}+\sin x+1$ tuần hoàn với chu kì 4π nên ta chỉ cần xét hàm số trên đoạn $[0;4\pi]$.

Ta có $y'=-\sin\dfrac{x}{2}+\cos x$, $x\in(0;4\pi)$; $y'=0\Leftrightarrow-\sin\dfrac{x}{2}+1-2\sin^2\dfrac{x}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2}=-1\\ \sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\pi+k4\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k4\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{3}+k4\pi \end{array}\right. \text{ Vì } x\in(0;4\pi) \text{ nên } x\in\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3};3\pi\right\}$$

$y(0)=3,\ y(3\pi)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2},\ y\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2},\ y(4\pi)=3$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy$.

A. $P_{\min}=-18$. **B.** $P_{\min}=-63$. **C.** $P_{\min}=-83$. **D.** $P_{\min}=-91$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 3, y\geq -3$, từ đó ta có $x+y\geq 0$ và

$$(x+3)(y+3)\geq 0 \Leftrightarrow xy\geq -3(x+y)-9.$$

Trường hợp $x+y=0$, từ giả thiết suy ra $x=-y=3$ suy ra $P=-63$. (1)

Trường hợp $x+y>0$, từ giả thiết suy ra

$$(x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{(x-3)(y+3)}\geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x+y\geq 4 \,(\text{do } x+y>0).$$

Đánh giá P ta được

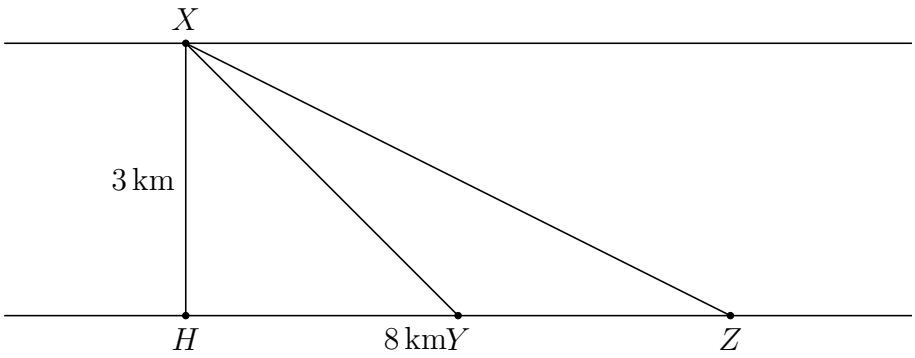
$$P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy\geq 4(x+y)^2-21(x+y)-63.$$

Do hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{21}{8};+\infty\right)$ suy ra $P=f(x+y)\geq f(4)=-83$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P_{\min}=-83$ khi $x=7, y=-3$.

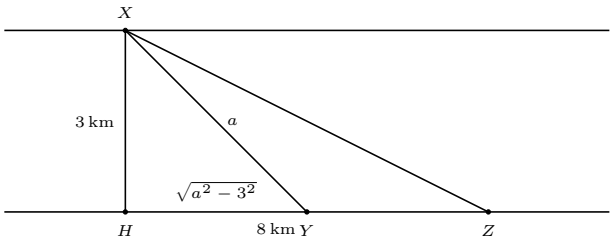
Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Một người đàn ông muốn chèo thuyền từ vị trí X đến vị trí Z về phía hạ lưu bờ đối diện càng nhanh càng tốt, trên một dòng sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông để đến H rồi sau đó chạy đến Z, hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến Z, hoặc anh ta có thể chèo thuyền từ một điểm Y giữa H và Z và sau đó chạy đến Z. Biết anh ấy chèo thuyền với vận tốc 6 km/h, chạy với vận tốc 8 km/h, quãng đường $HZ=8$ km và tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đó đến Z.



A. $\dfrac{9}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{73}}{6}$. **C.** $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Với $3 \le a \le \sqrt{73}$.

Thời gian để người đó đi tới Z được tính theo hàm số $f(a) = \dfrac{a}{6} + \dfrac{8-\sqrt{a^2-3^2}}{8}$.

$f'(a) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{a}{8\sqrt{a^2-3^2}}$.

$f' = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{12\sqrt{7}}{7}$.

Ta có $f(3) = \dfrac{3}{2}, f(3\sqrt{2}) = 1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}, f(\sqrt{73}) = \dfrac{\sqrt{73}}{6}$.

Vậy thời gian ngắn nhất đề người đó đi tới Z là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Chọn đáp án C □

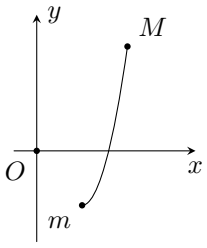
Câu 53. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

A. $[-1;0]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$.

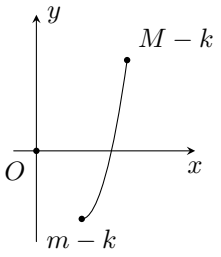
Lời giải.

• Xét bài toán tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m. Tìm hệ số k sao cho hàm số $y = |f(x) - k|$ có giá trị lớn nhất đạt giá trị nhỏ nhất.

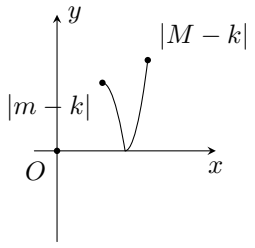
Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình a. Khi đó ta di chuyển đồ thị xuống một đoạn có giá trị là k như hình b và lấy đối xứng đối xứng phần đồ thị dưới trục Ox qua trục Ox như hình c thì ta được đồ thị hàm số $y = |f(x) - k|$.



a)



b)



c)

Ta thấy nếu $|m-k| = |M-k|$ thì $\max\limits_{[a;b]} |f(x)-k| = \max\limits_{[a;b]} \{|m-k|; |M-k|\}$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất vì ngược lại hai đại lượng này chênh lệch nhau thì sẽ tồn tại một trong hai giá trị này cao hơn vị trí trung

bình của chúng.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow M-k=k-m \Leftrightarrow k=\dfrac{m+M}{2}$.

• Áp dụng công thức trên cho hàm số $y=|x^3-3x+2m-1|=|x^3-3x-(1-2m)|$ thì ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[0;2]$. Ta có $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$ và bảng xét dấu của $f'(x)$ là

x	0		1		2
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

Mặt khác $f(0)=0$, $f(1)=-2$, $f(2)=2$. Do đó $\max\limits_{[0;2]} f(x)=M=2$, $\min\limits_{[0;2]} f(x)=m=-2$.

Vậy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $1-2m=\dfrac{m+M}{2}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

A. 115.250.000. **B.** 101.250.000. **C.** 100.000.000. **D.** 100.250.000.

Lời giải.

Gọi x là số lần tăng giá cho thuê căn hộ, với $0\le x\le 50$.

Khi đó số tiền thu được sau x lần tăng giá là $T=(50-x)(2\,000\,000-50\,000x)$, với $0\le x\le 50$.

Hay $T=-50\,000x^2+500\,000x+100\,000\,000$ với $x\in[0;50]$.

Ta có $T'=-100\,000x+500\,000$. Suy ra $T'=0 \Leftrightarrow -100\,000x+500\,000=0 \Leftrightarrow x=5\in[0;50]$.

Khi đó $T(0)=50\cdot 2\,000\,000=100\,000\,000; T(5)=101\,250\,000; T(50)=0$.

Suy ra $\max\limits_{[0;50]} T=101\,250\,000$.

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là 101 250 000 đồng

Chọn đáp án B □

.

Câu 55. Cho x,y thỏa mãn $\sqrt{2x+3}+\sqrt{y+3}=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{x+2}+\sqrt{y+9}.$$

A. $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{21}$. **B.** $\sqrt{6}+\sqrt{\dfrac{17}{2}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt{2x+3}, b=\sqrt{y+3} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2-3}{2} \\ y=b^2-3 \end{cases}$, theo giả thiết $a+b=4$ (1).

Yêu cầu bài toán đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{\dfrac{a^2-3}{2}+2} + \sqrt{b^2+6}$

$$\begin{aligned} P =& \sqrt{\frac{a^2-3}{2}+2} + \sqrt{b^2+6} \\ =& \sqrt{\frac{a^2-3}{2}+2} + \sqrt{(4-a)^2+6}. \end{aligned}$$

Ta có $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Do đó giá trị nhỏ nhất cần tìm $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Một cửa hàng bán lẻ mũ bảo hiểm Honda với giá 20 USD. Với giá bán này cửa hàng chỉ bán được khoảng 25 chiếc. Cửa hàng dự định sẽ giảm giá bán, ước tính mỗi lần giảm giá bán đi 2 USD thì số mũ bán được tăng thêm 40 chiếc. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá mua về của một mũ bảo hiểm Honda là 10 USD.

A. $16,625$ USD. **B**. $15,625$ USD. **C**. $16,575$ USD. **D**. $15,575$ USD.

Lời giải.

Gọi x (USD) là giá bán để cửa hàng thu lợi nhuận nhiều nhất, khi đó $10 < x < 20$.

Số mũ bảo hiểm (xấp xỉ)bán được là $25 + \dfrac{(20-x)}{2} \cdot 40 = 425 - 20x$ (chiếc).

Lợi nhuận thu được là:

$y = (425 - 20x) \cdot x - (425 - 20x) \cdot 10$

Hay: $y = -20x^2 + 625x - 4250$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số y với $10 < x < 20$.

Ta có: $y' = -40x + 625 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{125}{8}$

Ta có bảng biến thiên:

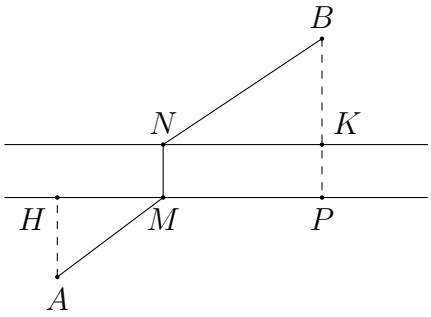
x	10		$\frac{125}{8}$		20
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{10125}{16}$	↘	250

Vậy, giá bán để có lợi nhuận cao nhất là $x = \dfrac{125}{8} \approx 15,625$ USD.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57.

Người ta muốn làm một con đường đi từ thành phố A đến thành phố B ở hai bên bờ sông như hình vẽ, thành phố A cách bờ sông $AH = 3$km, thành phố B cách bờ sông $BK = \sqrt{28}$km, $HP = 10$km. Con đường làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm B nhiều gấp $\dfrac{16}{15}$ lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ A, chi phí



làm cầu ở đoạn nào cũng như nhau. M là vị trí để xây cầu sao cho chi phí ít tốn kém nhất. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $AM \in \left(\dfrac{17}{4};5\right)$. **B.** $AM \in \left(\dfrac{10}{3};4\right)$. **C.** $AM \in \left(\dfrac{16}{3};7\right)$. **D.** $AM \in \left(4;\dfrac{16}{3}\right)$.

Lời giải.

Đặt $HM = x$, $0 < x < 10$. Khi đó, $NK = MP = 10 - x$.

Ta có $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2+9}$, $BN = \sqrt{BK^2 + NK^2} = \sqrt{28 + (10-x)^2}$.

Gọi m là giá thành xây dựng một km đường bên A, suy ra giá thành xây dựng một km bên B là $\dfrac{16}{15}m$.

Vậy giá thành xây dựng hai đoạn đường AM và BN là

$$T = m\sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}m\sqrt{28+(10-x)^2} = m\left(\sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}\sqrt{28+(10-x)^2}\right).$$

Để giá thành xây dựng thấp nhất thì hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+9} + \dfrac{16}{15}\sqrt{28+(10-x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{16}{15}\cdot\dfrac{10-x}{\sqrt{28+(10-x)^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{16}{15}\cdot\frac{10-x}{\sqrt{28+(10-x)^2}} \Leftrightarrow 15x\sqrt{28+(10-x)^2} = 16(10-x)\sqrt{x^2+9} \\ &\Leftrightarrow 225x^2\left(128-20x+x^2\right) = 256\left(100-20x+x^2\right)\left(x^2+9\right) \\ &\Leftrightarrow 31x^4 - 620x^3 - 896x^2 - 46080x + 230400 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)\left(31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ 31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x \approx 23,375 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy khi $x = 4$ thì giá thành sẽ nhỏ nhất, khi đó $AM = \sqrt{4^2+9} = 5$km. Nên $AM \in \left(4;\dfrac{16}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m = 3$ thì $f(x) = 2$, $\forall x \in [1;2]$ (không thỏa bài toán).

Nếu $m < 3$ thì $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1;2]$. Do đó $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = \dfrac{m+1}{2} = 1 \Rightarrow m = 1$ (nhận).

Nếu $m > 3$ thì $f'(x) < 0$, $\forall x \in [1;2]$. Do đó $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{m+3}{3} = 1 \Rightarrow m = 0$ (loại).

Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Một trang chữ của một quyển sách tham khảo Toán học cần diện tích 384 cm^2. Biết rằng trang giấy được canh lề trái là 2 cm, lề phải là 2 cm, lề trên 3 cm và lề dưới là 3 cm. Trang sách đạt diện tích nhỏ nhất thì có chiều dài và chiều rộng là

A. 40 cm và 25 cm. **B**. 40 cm và 20 cm. **C**. 30 cm và 25 cm. **D**. 30 cm và 20 cm.

Lời giải.

Gọi x, y $(x, y > 0)$ lần lượt là hai kích thước của trang chữ.

$(x = MF = NE,\ y = MN = EF)$.

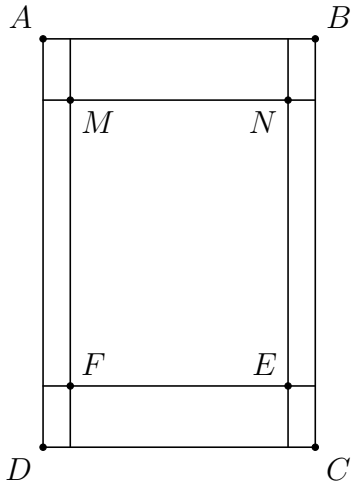
Diện tích trang chữ: $xy = 384 \Rightarrow y = \dfrac{384}{x}$.

Ta có hai kích thước của trang sách là $x + 6$ và $y + 4$.

$(x + 6 = AD = BC,\ y + 4 = AB = CD)$.

Diện tích trang sách:

$$S = (x+6)(y+4) = (x+6)\left(\frac{384}{x} + 4\right) = 408 + 4x + \frac{2304}{x}.$$



Ta có $S \geq 408 + 2\sqrt{4x \cdot \dfrac{2304}{x}} \Leftrightarrow S \geq 600$.

S có giá trị nhỏ nhất là 600 xảy ra khi $4x = \dfrac{2304}{x} \Leftrightarrow x = 24$.

Suy ra $y = 16$.

Vậy trang sách đạt diện tích nhỏ nhất thì chiều dài và chiều rộng lần lượt là $24 + 6 = 30$ cm và $16 + 4 = 20$ cm.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$.

A. $\min P = \dfrac{17}{3}$. **B**. $\min P = 5$. **C**. $\min P = \dfrac{115}{3}$. **D**. $\min P = \dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

☑ Từ $x + y = 2$, ta có $y = 2 - x$. Do $x, y \geq 0$ nên $0 \leq x \leq 2$. Khi đó

$$P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2-x)^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5, \quad x \in [0;2].$$

☑ Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ trên $[0;2]$

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$f'(x) = x^2 + 4x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -5 \notin [0;5]. \end{array}\right.$

$f(0) = 5$, $f(1) = \dfrac{7}{3}$, $f(2) = \dfrac{17}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = \dfrac{7}{3} = \min P$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$ trên $[1;2]$. Ta có $f'(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}>0,\quad \forall x\in[1;2].$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$. Do đó $\max\limits_{[1;2]}f(x)=f(2)=\dfrac{3m+4}{3}$, $\min\limits_{[1;2]}f(x)=f(1)=\dfrac{2m+1}{2}$.

Khi đó $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\max\left\{\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|,\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|\right\}$. Ta có

$$\left|\frac{3m+4}{3}\right|\geq\left|\frac{2m+1}{2}\right|\Leftrightarrow 4(3m+4)^2\geq 9(2m+1)^2\Leftrightarrow m\geq-\frac{11}{12}.$$

☑ Với $m\geq-\dfrac{11}{12}$, ta có $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|$. Theo đề bài, ta có

$$\left|\frac{3m+4}{3}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\frac{3m+4}{3}=2\\&\frac{3m+4}{3}=-2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=\frac{2}{3}\quad\text{(thỏa mãn)}\\&m=-\frac{10}{3}\quad\text{loại.}\end{aligned}\right.$$

☑ Với $m<-\dfrac{11}{12}$, ta có $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|$. Theo đề bài, ta có

$$\left|\frac{2m+1}{2}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\frac{2m+1}{2}=2\\&\frac{2m+1}{2}=-2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=-\frac{5}{2}\quad\text{(thỏa mãn)}\\&m=\frac{3}{2}\quad\text{loại.}\end{aligned}\right.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{2}{3};-\dfrac{5}{2}\right\}\Rightarrow$ Số phần tử của S là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+(a-1)x^2+(a+3)x-4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $a\geq\dfrac{12}{7}$. **B.** $a<-3$. **C.** $a\leq-3$. **D.** $a>\dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(0;3)$ khi và chỉ khi

$$y'=-x^2+2(a-1)x+a+3\geq 0\quad\forall x\in(0;3)\Leftrightarrow a\geq\frac{x^2+2x-3}{2x+1}\quad\forall x\in(0;3).$$

Xét hàm $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}$ có $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}>0\quad\forall x\in[0;3]$.

Suy ra

$$a\geq\frac{x^2+2x-3}{2x+1}\quad\forall x\in(0;3)\Leftrightarrow a\geq\max_{[0;3]}g(x)\Leftrightarrow a\geq g(3)\Leftrightarrow a\geq\frac{12}{7}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})^3-6\sqrt{16-x^2}+2m+1=0.$$

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\dfrac{41}{2}\le m\le\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{41}{2}$.

Lời giải.

Xét $(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})^3-6\sqrt{16-x^2}+2m+1=0$ (1). TXĐ: $D=[-4;4]$.

Đặt $t=\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\Rightarrow t^2=8+2\sqrt{16-x^2}\Rightarrow\sqrt{16-x^2}=\dfrac{t^2-8}{2}$.

Ta có $0\le\sqrt{16-x^2}\le 4, t\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{2}\le t\le 4$.

Khi đó (1) trở thành

$$t^3-3t^2+24=-2m-1\quad(2), t\in[2\sqrt{2};4].$$

Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[2\sqrt{2};4]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[2\sqrt{2};4]} f(t)\le -2m-1\le \max\limits_{[2\sqrt{2};4]} f(t)$ $(*)$ với $f(t)=t^3-3t^2+24$.

Hàm số $y=f(t)$ liên tục trên $[2\sqrt{2};4]$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=0 & \text{(loại)}\\ t=2 & \text{(loại)}\end{array}\right.$

$f(2\sqrt{2})=16\sqrt{2}; f(4)=40$.

Suy ra $\min\limits_{[2\sqrt{2};4]} f(t)=16\sqrt{2}; \max\limits_{[2\sqrt{2};4]} f(t)=40$.

Vậy $(*)\Leftrightarrow 16\sqrt{2}\le -2m-1\le 40\Leftrightarrow -\dfrac{41}{2}\le m\le\dfrac{-1-16\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Một nhà sản xuất độc quyền một loại bánh gia truyền đặc biệt để bán ra thị trường dịp Tết năm nay. Qua thăm dò và nghiên cứu thị trường biết lượng cầu về loại hàng này là một hàm số $Q_D(P)=656-\dfrac{1}{2}P$ theo đơn giá bán P. Nếu sản xuất loại bánh này ở mức sản lượng Q thì tổng chi phí là $C(Q)=Q^3-77Q^2+1000Q+100$. Tìm mức sản lượng Q để doanh nghiệp có lợi nhuận cao nhất sau khi bán hết loại bánh này với đơn giá P, biết lợi nhuận bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí, doanh thu bằng đơn giá nhân sản lượng bán được.

A. $Q=62$. **B.** $Q=200$. **C.** $Q=52$. **D.** $Q=2$.

Lời giải.

Gọi Q là mức sản lượng để doanh nghiệp có lợi nhuận cao nhất sau khi bán hết loại bánh này với đơn giá P. Khi đó ta có $Q=Q_D(P)=656-\dfrac{1}{2}P\Rightarrow P=1312-2Q$.

Doanh thu của doanh nghiệp là $R(Q)=P\times Q=(1312-2Q)Q=1312Q-2Q^2$.

Lợi nhuận của doanh nghiệp là $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-Q^3+75Q^2+312Q-100$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3+75x^2+312x-100$ với $x>0$.

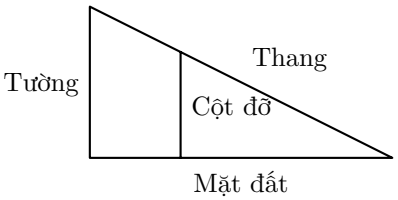
Ta có $f'(x)=-3x^2+150x+312$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=52\\ x=-2.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	0		52		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(52)$	$\searrow$	

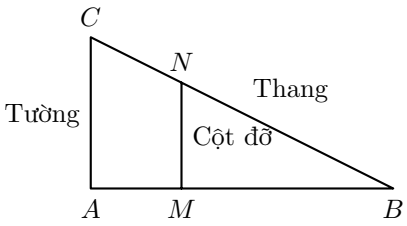
Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 52$.
Vậy $Q = 52$.
Chọn đáp án C □

Câu 65.
Tính chiều dài nhỏ nhất l_{min} của cái thang để nó có thể dựa vào tường và mặt đất, bắc ngang qua cột đỡ cao 4 m. Biết cột đỡ song song và cách tường $0,5$ m, mặt phẳng chứa tường vuông góc với mặt đất - như hình vẽ, bỏ qua độ dày của cột đỡ.



A. $l_{min} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **B.** $l_{min} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. **C.** $l_{min} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $l_{min} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $O \equiv A$, $Oy \equiv AC$, $Ox \equiv AB$. Giả sử $B(b;0), C(0;c), (b,c>0)$. Khi đó, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = 1$, điểm $N(0,5;4) \in BC$ nên $\dfrac{1}{2b} + \dfrac{4}{c} = 1$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{\dfrac{c^2}{4(c-4)^2} + c^2}, c > 0,5$.

Bằng cách khảo sát hàm số ta thu được kết quả: $\min P = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$, tương ứng khi $B(2,5;0), C(0;5)$. Vậy cái thang có độ dài ngắn nhất phải bằng $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ m.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa các điều kiện $2\sqrt[2017]{m} + 2\sqrt[2017]{n} + 3\sqrt[2017]{p} \le 7$ và $4a + 4b + 3c \ge 42$. Đặt $S = \dfrac{2(2a)^{2018}}{m} + \dfrac{2(2b)^{2018}}{n} + \dfrac{3c^{2018}}{p}$ thì khẳng định đúng là

A. $42 < S \le 7 \cdot 6^{2018}$. **B.** $S > 6^{2018}$. **C.** $7 \le S \le 7 \cdot 6^{2018}$. **D.** $4 \le S \le 42$.

Lời giải.

Cho các số x, y, a, b dương và n nguyên dương. Ta chứng minh

$$\frac{x^{n+1}}{a^n} + \frac{y^{n+1}}{b^n} \ge \frac{(x+y)^{n+1}}{(a+b)^n}.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{a^n} + \dfrac{y^{n+1}}{b^n} - \dfrac{(x+y)^{n+1}}{(a+b)^n}$, $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\frac{x^n}{a^n} - (n+1)\frac{(x+y)^n}{(a+b)^n} \Leftrightarrow x = \frac{ay}{b}.$$

Dễ thấy $f'(x) < 0$ nếu $0 < x < \dfrac{ay}{b}$ và $f'(x) > 0$ nếu $x > \dfrac{ay}{b}$ nên $f(x) \geq f\left(\dfrac{ay}{b}\right) = 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức trên $k-1$ lần, với $2k$ số dương $x_1, \ldots, x_k$; $a_1, \ldots, a_k$ và số nguyên dương n, ta có

$$\begin{aligned}\frac{x_1^{n+1}}{a_1^n} + \frac{x_2^{n+1}}{a_2^n} + \cdots \frac{x_k^{n+1}}{a_k^n} &\geq \frac{(x_1+x_2)^{n+1}}{(a_1+a_2)^n} + \cdots + \frac{x_k^{n+1}}{a_k^n} \\ &\cdots \\ &\geq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1}}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n}. \qquad (*)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(*)$, ta có

$$\begin{aligned}S &= \frac{(2a)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{m}\right)^{2017}} + \frac{(2a)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{m}\right)^{2017}} + \frac{(2b)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{n}\right)^{2017}} + \frac{(2b)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{n}\right)^{2017}} \\ &\quad + \frac{(c)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{p}\right)^{2017}} + \frac{(c)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{p}\right)^{2017}} + \frac{(c)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{p}\right)^{2017}} \\ &\geq \frac{(2a+2a+2b+2b+c+c+c)^{2018}}{\left(\sqrt[2017]{m}+\sqrt[2017]{m}+\sqrt[2017]{n}+\sqrt[2017]{n}+\sqrt[2017]{p}+\sqrt[2017]{p}+\sqrt[2017]{p}\right)^{2017}} \\ &\geq \frac{(4a+4b+3c)^{2018}}{\left(2\sqrt[2017]{m}+2\sqrt[2017]{n}+3\sqrt[2017]{p}\right)} \geq 7 \cdot 6^{2018}.\end{aligned}$$

Vậy $S > 6^{2018}$.

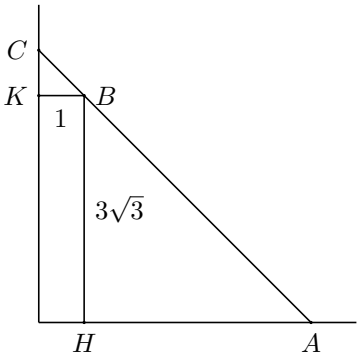
Chọn đáp án (B) □

Câu 67.

Cần bắc một chiếc thang tựa vào tường tại vị trí C và mặt đất tại vị trí A thông qua một cột đỡ có đỉnh là vị trí B. Cột đỡ có chiều cao $3\sqrt{3}$ m và khoảng cách từ tường đến cột đỡ bằng 1 m, như hình vẽ bên.

Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể có của chiếc thang là bao nhiêu?

A. 8 m. **B.** $1+3\sqrt{3}$ m. **C.** 7 m. **D.** 6 m.



Lời giải.

Gọi $CK = x > 0$, $AH = y > 0 \Rightarrow AC^2 = (x+3\sqrt{3})^2 + (y+1)^2$.

Mặt khác: $\dfrac{x}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{3}}{x} \Rightarrow AC^2 = (x+3\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{x}+1\right)^2$.

Đặt $f(x) = (x+3\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{x}+1\right)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2(x+3\sqrt{3}) + 2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{x}+1\right).\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{x^2}\right) = 2(x+3\sqrt{3})\left(1-\dfrac{3\sqrt{3}}{x^3}\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$. Lập bảng biến thiên suy ra $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 64 tại $x = \sqrt{3}$.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	64	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy AC nhỏ nhất bằng 8.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Cho hàm số f thỏa mãn $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x,\ \forall x \in (0;\pi)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x)$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $\dfrac{6}{125}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{19}{500}$. **D.** $\dfrac{1}{25}$.

Lời giải.

Đặt $u = \cot x$. Khi $x \in (0;\pi)$ thì $u \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x,\ \forall x \in (0;\pi) \Rightarrow f(u) = \dfrac{2u}{u^2+1} + \dfrac{u^2-1}{u^2+1} = \dfrac{u^2+2u-1}{u^2+1},\ \forall u \in \mathbb{R}$.

Đặt $P = f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x)$ và $t = \sin^2 x$ thì $t \in [0;1]$.

Khi đó $P = f(t)f(1-t) = \dfrac{(t^2+2t-1)}{t^2+1} \cdot \dfrac{(1-t)^2+2(1-t)-1}{(1-t)^2+1} = \dfrac{[t(1-t)]^2+8t(1-t)+2}{(t^2+1)\left((1-t)^2+1\right)}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có $(t^2+1)\left((1-t)^2+1\right) \geq (t(1-t)+1)^2$.

Suy ra $P \leq \dfrac{[t(1-t)]^2+8t(1-t)-2}{(t(1-t)+1)^2}$.

Đặt $z = t(1-t)$, khi đó $z = t(1-t) \leq \left(\dfrac{t+1-t}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ và $P \leq \dfrac{z^2+8z-2}{(z+1)^2}$.

Xét hàm số $h(z) = \dfrac{z^2+8z-2}{(z+1)^2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Ta có $h'(z) = \dfrac{12-6z}{(z+1)^3} > 0,\ \forall z \in \left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ nên $P = h(z) \leq h\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{25}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z = \dfrac{1}{4}$ hay $t = \dfrac{1}{2}$ hay $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

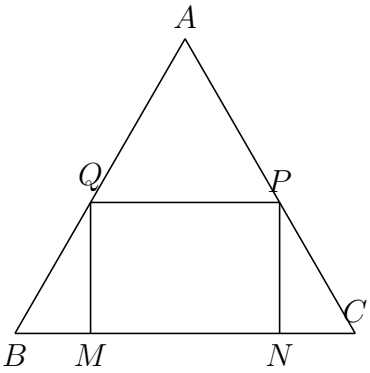
Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 100. Người ta muốn dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai điểm P, Q lần lượt trên cạnh AC và AB. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$.

A. $1250\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{625\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{625\sqrt{3}}{4}$. **D.** $625\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $AQ = x \Rightarrow BQ = 100 - x (0 < x < 100)$,
$BM = \dfrac{BC - x}{2} = \dfrac{100 - x}{2} \Rightarrow MQ = \sqrt{BQ^2 - BM^2} = \dfrac{3}{2}(100 - x)$.
Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là $S = PQ.MQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x(100 - x)$.
Xét ham số $f(x) = 100x - x^2$ với $(0 < x < 100)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50$.
Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhất $MNPQ$ là $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}50(100 - 50) = 1250\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc của dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 6 km/h. **B**. 9 km/h. **C**. 12 km/h. **D**. 15 km/h.

Lời giải.

Vận tốc bơi ngược dòng là $v - 6$ km/h. Điều kiện $v > 6$.
Thời gian bơi ngược dòng để vượt 300 km là $\dfrac{300}{v - 6}$ h.
Suy ra $E(v) = 300 \cdot c \cdot \dfrac{v^3}{v - 6}$.
Ta có $E'(v) = 600 \cdot c \cdot \dfrac{v^3 - 9v^2}{(v - 6)^2}$. Cho $E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$.
Bảng biến thiên

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Vậy $v = 9$ km/h thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Biết rằng các số thực a, b thay đổi sao cho hàm số $f(x) = -x^3 + (x + a)^3 + (x + b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 - 4a - 4b + 2$.

A. -4. **B**. -2. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 3(x + a)^2 + 3(x + b)^2 \\ &= 3(x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow ab \leq 0$.
Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq 0, b \leq 0$.

Khi đó $b(b-4) \geq 0$, nên

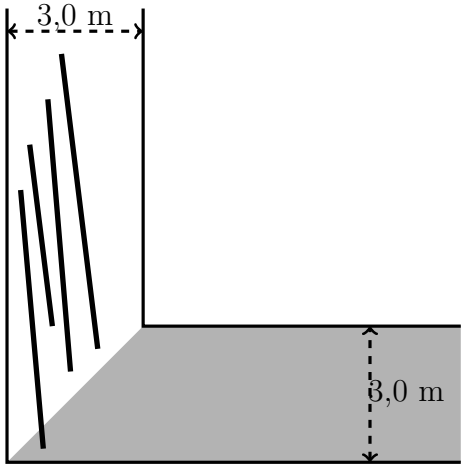
$$\begin{aligned} P =& (a-2)^2 + b(b-4) - 2 \\ \geq& -2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0. \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Một kênh dẫn nước theo góc vuông có bề rộng $3,0$ m như hình vẽ. Cho 4 cây luồng (thẳng) có độ dài là $6,2$ m; $8,1$ m; $8,5$ m; $9,0$ m trôi tự do trên kênh. Hỏi số cây luồng có thể trôi tự do qua góc kênh là bao nhiêu?



A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Chiều dài cây luồng phải nhỏ hơn độ dài đoạn AB tro
vẽ bên. Gọi α là góc hợp bởi AB và AC. Ta có

$$\begin{aligned} AB &= AD + BD = \frac{3}{\sin\alpha} + \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \\ &= \frac{3}{\sin\alpha} + \frac{3}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

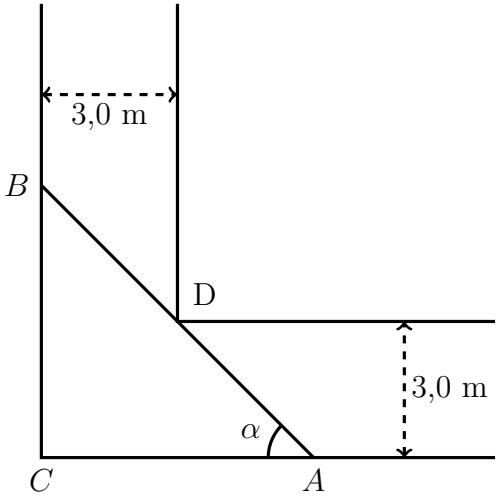
Đặt $f(\alpha) = \dfrac{3}{\sin\alpha} + \dfrac{3}{\cos\alpha}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$f' = \frac{3\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right)}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Từ đó tìm được $\min\limits_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \simeq 8,48$

Vậy có 2 cây luồng có thể trôi qua góc kênh.



Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y} + \dfrac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \dfrac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$.

A. $T_{\min} = 6 - 2\sqrt{3}$. **B**. $T_{\min} = 4 + 2\sqrt{6}$. **C**. $T_{\min} = 4 - 2\sqrt{6}$. **D**. $T_{\min} = 6 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2) \\ \Leftrightarrow\ & 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = 5^{xy-1} + \frac{1}{3^{x+2y}} + xy - 2y \\ \Leftrightarrow\ & 5^{x+2y} - \frac{1}{3^{x+2y}} + x + 2y = 5^{xy-1} - \frac{1}{3^{xy-1}} + xy - 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t - \dfrac{1}{3^t} + t$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 5^t.\ln 5 + 3^{-t}.\ln 3 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x+2y) = f(xy-1) \Leftrightarrow x + 2y = xy - 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y+1}{y-1}$

với $x > 0 \Rightarrow y > 1$. Khi đó $T = x + 2y = \dfrac{1 + 2y^2}{y-1}$.

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{1+2y^2}{y-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có

$f'(y) = \dfrac{2y^2 - 4y - 1}{(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

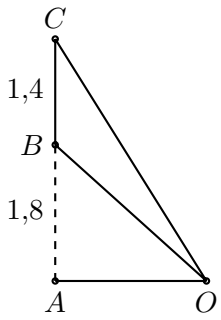
y	1		$\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min T = 4 + 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 74.

Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 m được đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh bao nhiêu sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định khoảng cách đó.



A. 2,4 m. **B**. 2,42 m. **C**. 2,46 m. **D**. 2,21 m.

Lời giải.

Đặt $OA = x$ $(x > 0)$.

Ta sẽ tìm x sao cho góc BOC lớn nhất; tức là tìm x để $\tan \widehat{BOC}$ lớn nhất.

Ta có $\tan \widehat{BOC} = \tan(\widehat{AOC} - \widehat{AOB}) = \dfrac{\tan \widehat{AOC} - \tan \widehat{AOB}}{1 + \tan \widehat{AOC} \cdot \tan \widehat{AOB}} = \dfrac{\dfrac{AC}{OA} - \dfrac{AB}{OA}}{1 + \dfrac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \dfrac{1{,}4x}{x^2 + 5{,}76}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \dfrac{1{,}4x}{x^2 + 5{,}76}$ trên $(0; +\infty)$ ta tìm được giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $\dfrac{7}{24}$ đạt được khi $x = 2{,}4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{x + m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\dfrac{5}{6}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$. **B**. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$. **C**. $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$. **D**. $m = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^3 - 1}{(x + m^2)^2}$, $\forall x \in [2; 3]$.

☑ Nếu $m^3 - 1 > 0$, tức $m > 1$, thì $y' > 0$, $\forall x \in [2; 3]$. Khi đó $\max\limits_{[2;3]} y = y(3)$.

Điều này tương đương với $\dfrac{3m + 1}{3 + m^2} = \dfrac{5}{6}$. Từ đây ta giải được $m = 3$.

☑ Nếu $m^3 - 1 < 0$, tức $m < 1$, thì $y' < 0$, $\forall x \in [2; 3]$. Khi đó $\max\limits_{[2;3]} y = y(2)$.

Điều này tương đương với $\dfrac{2m + 1}{2 + m^2} = \dfrac{5}{6}$. Từ đây ta giải được $m = \dfrac{2}{5}$.

☑ Nếu $m = 1$ thì $y = 1$, $\forall x \in [2; 3]$. Khi đó $\max\limits_{[2;3]} y = 1 \neq \dfrac{5}{6}$.

Vậy $m = 3$, $m = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho các số thực x, y, x thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (xy + yz + 2zx)^2 - \frac{8}{(x + y + z)^2 - xy - yz + 2}.$$

A. $\min P = -5$. **B**. $\min P = 5$. **C**. $\min P = 3$. **D**. $\min P = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$P=(xy+yz+2zx)^2-\frac{8}{x^2+y^2+z^2+2xz+2yz+2zx-xy-yz+2}$$

$\Leftrightarrow P=(xy+yz+2zx)^2-\dfrac{8}{xy+yz+2zx+3}$ (do $x^2+y^2+z^2=1$).

Đặt $t=xy+yz+2zx$, khi đó $P=t^2-\dfrac{8}{t+3}$.

Ta lại có $xy+yz+zx\le 1$ và $|xz|\le\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)=\dfrac{1}{2}(1-y^2)\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}\le xz\le\dfrac{1}{2}$

và $(x+y+z)^2\ge 0\Rightarrow xy+yz+zx\ge-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $-1\le t\le\dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-\dfrac{8}{t+3}$ với $-1\le t\le\dfrac{3}{2}$ có $f'(t)=2t+\dfrac{8}{(t+3)^2}$.

Cho $f'(t)=0\Rightarrow t^3+6t^2+9t+4=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=-1\end{array}\right.\Rightarrow f'(t)>0$ với $-1<t<\dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Do vậy giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ là $f(-1)=-3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=-3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Cho 2 số thực $x,y\ge 1$ và $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3-57(x+y)$ là một số thực dạng $a+b\sqrt{7}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $a+b$.

A. -28. **B.** -29. **C.** -30. **D.** -31.

Lời giải.

Theo giả thiết

$(y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)\right]=9-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow(y+1)\left[\log_3(x+1)+(x-1)\right]=9-(y+1)\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow\log_3(x+1)+(x-1)=\dfrac{9}{y+1}-\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow\log_3(x+1)+(x+1)-2=\dfrac{9}{y+1}+\log_3\dfrac{9}{y+1}-2.$

Xét hàm số $f(u)=\log_3 u+u-2$ với $u>0$.

Ta có: $f'(u)=\dfrac{1}{u\ln 3}+1>0,\forall u>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra $x+1=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow(x+1)(y+1)=9\Leftrightarrow xy+x+y=8\Leftrightarrow xy=8-(x+y)$.

Đặt $t=x+y\ge 2\Rightarrow xy=8-t$.

Vì $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow 8-t\le\dfrac{t^2}{4}\Leftrightarrow t^2+4t-32\ge 0\Leftrightarrow(t-4)(t+8)>0\Rightarrow t\ge 4$.

Khi đó $P=(x+y)(x^2-xy+y^2)-57(x+y)=t(t^2+3t-24)-57t$

$\Rightarrow P = t^3 + 3t^2 - 81t \Rightarrow P'(t) = 3t^2 + 6t - 81.$

Ta có: $P'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 + 2\sqrt{7} > 4 \\ t = -1 - 2\sqrt{7} < 4. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

t	4		$-1+2\sqrt{7}$		$+\infty$
$P'(t)$		$-$	0	$+$	
$P(t)$	-212	$\searrow$	$83-112\sqrt{7}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 83 - 112\sqrt{7}$ khi $x = y = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{7}$. Suy ra $a = 83, b = -112$ $\Rightarrow a + b = -29$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + xy + 4 = 4x + 3y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x$.

A. 100. **B.** 66. **C.** 110. **D.** 90.

Lời giải.

• $x^2 + y^2 + xy + 4 = 4x + 3y \Leftrightarrow x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0.$ (1)

Ta coi (1) là phương trình ẩn x tham số y, khi đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (3y-7)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$.

• Lại có $x^2 + y^2 + xy + 4 = 4x + 3y \Leftrightarrow y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0.$ (2)

Ta coi (2) là phương trình ẩn y tham số x, khi đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = x(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} P &= 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x \\ &= 3(x-y)(x^2 + y^2 + xy) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x \\ &= 3(x-y)(3x + 4y - 4) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x \\ &= 9x^2 + 12xy - 12x - 9xy - 12y^2 + 12y + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x \\ &= 29x^2 + 5xy - 7y^2 + 27x + 12y \\ &= 29x^2 + 5xy - 7y^2 + 3(3x + 4y) + 18x \\ &= 29x^2 + 5xy - 7y^2 + 3(x^2 + y^2 + xy + 4) + 18x \\ &= 32x^2 + 8xy - 4y^2 + 18x + 12 \\ &= -4(y-x)^2 + 36x^2 + 18x + 12 \\ &\leq 36x^2 + 18x + 12. \end{aligned}$$

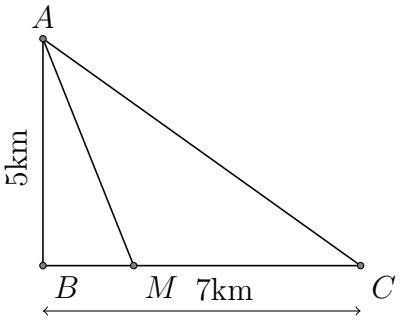
Xét hàm số $f(x) = 36x^2 + 18x + 12$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{4}{3}\right] \Rightarrow P \leq f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 100.$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = 100$ khi $x = y = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79.

Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Hỏi cần đặt vị trí của M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?



A. 4,5 km. **B**. 5,5 km. **C**. $2\sqrt{5}$ km. **D**. $\sqrt{5}$ km.

Lời giải.

Gọi $BM = x$, $(0 \le x \le 7) \Rightarrow AM = \sqrt{5^2 + x^2}, MC = 7 - x$.

Thời gian người đó đi từ $A \to M \to C$ là $f(x) = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{4} + \dfrac{7 - x}{6}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{25 + x^2}} - \dfrac{1}{6} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{3x - 2\sqrt{25 + x^2}}{12\sqrt{25 + x^2}} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{5} \in [0; 7]$.

Lại có $f(0) = \dfrac{29}{12}; f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{3\sqrt{5}}{4} + \dfrac{7 - 2\sqrt{5}}{6}, f(7) = \dfrac{\sqrt{74}}{4}$ nên $\min\limits_{[0;7]} f(x) = \dfrac{3\sqrt{5}}{4} + \dfrac{7 - 2\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$.

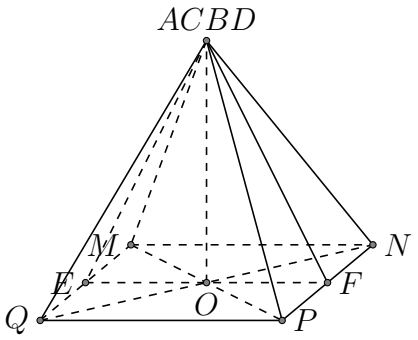
Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng

A. $20\sqrt{2}$ cm. **B**. $15\sqrt{2}$ cm. **C**. $10\sqrt{2}$ cm. **D**. $25\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.

Đặt $MQ = x$ là cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều, với $0 < x < 50$.



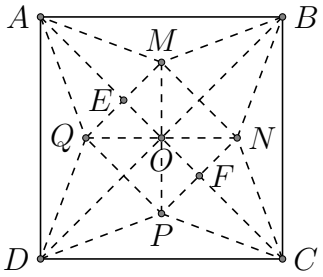
Ta có: $AO = \dfrac{50\sqrt{2}}{2} = AE + EO \Rightarrow AE = \dfrac{50\sqrt{2}}{2} - \dfrac{x}{2}$

Chiều cao của khối chóp

$h = \sqrt{AE^2 - EO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{50\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$.

Thể tích của khối chóp là

$V = \dfrac{1}{3} \cdot x^2 \sqrt{\left(\dfrac{50\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{6} . x^2 \sqrt{5000 - 100\sqrt{2}x}$.



Ta tìm x để $V_{\max}$. Xét hàm số $f(x) = x^2\sqrt{5000 - 100\sqrt{2}x}$, với $x \in (0; 50)$.

$f'(x) = \dfrac{2x\left(5000 - 125\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{5000 - 100\sqrt{2}x}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{2}$.

Vậy $V_{\max}$ đạt tại $x = 20\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy$ bằng

A. 18. **B**. 12. **C**. 16. **D**. 21.

Lời giải.

Ta có $4 = 2^x + 2^y \ge 2\sqrt{2^{x+y}} \Leftrightarrow 4 \ge 2^{x+y} \Leftrightarrow x + y \le 2$.

Suy ra $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le 1$.

Khi đó $P = \left(2x^2+y\right)\left(2y^2+x\right) + 9xy = 2\left(x^3+y^3\right) + 4x^2y^2 + 10xy$

$= 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + (2xy)^2 + 10xy$

$\le 4(4-3xy) + 4x^2y^2 + 10xy$ (do $x+y \le 2$)

$= 16 + 2x^2y^2 + 2xy(xy-1) \le 18$ (do $xy \le 1$).

Vậy $P_{\max} = 18$ khi $x = y = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Xét tam giác ABC cân tại A, ngoại tiếp đường tròn bán kính $r = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\min} = 2\pi$. **B.** $S_{\min} = 3\sqrt{3}$. **C.** $S_{\min} = 3\sqrt{2}$. **D.** $S_{\min} = 4$.

Lời giải.

Gọi $\widehat{IBH} = \alpha$ với $(0° < \alpha < 45°)$.

Ta có $BH = \dfrac{IH}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow BC = 2BH = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

$\sin\widehat{BAH} = \sin(90° - 2\alpha) = \dfrac{IK}{AI} \Rightarrow AI = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{\cos 2\alpha} + 1 = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

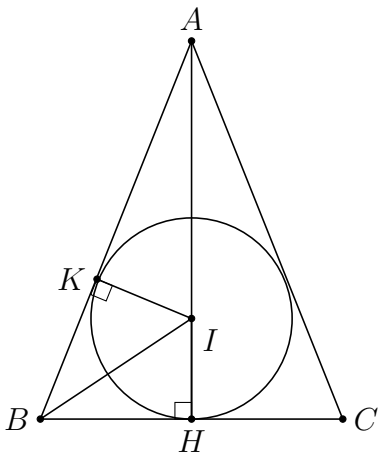
Diện tích tam giác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot BC \cdot AH = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{\tan\alpha \cdot \cos 2\alpha}$.

Đặt $t = \tan\alpha$ với $(0 < t < 1)$. Diện tích tam giác $S_{ABC} = \dfrac{2}{t-t^3}$.

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{2}{t-t^3}$ trên khoảng $(0;1)$.

$g'(t) = \dfrac{2-6t^2}{(t-t^3)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $\min g(t) = g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \le 1-x-\dfrac{1}{y}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \dfrac{x-2y}{6(x+y)}$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3} - \dfrac{7}{30}$. **B.** $\dfrac{7}{30} - \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{7}{30}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5+7}}{30}$.

Lời giải.

$$(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \le 1-x-\frac{1}{y} \Leftrightarrow (xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \le \frac{y-xy-1}{y}$$

$$\Leftrightarrow (xy+1)\left(\frac{xy+1-y}{\sqrt{xy+1}+\sqrt{y}}\right) + \frac{xy+1-y}{y} \le 0 \Leftrightarrow (xy+1-y)\left(\frac{xy+1}{\sqrt{xy+1}+\sqrt{y}} + \frac{1}{y}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow y \ge xy+1 \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{4}.$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$, $0 < t \le \dfrac{1}{4}$.

$P = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} - \dfrac{t-2}{6(t+1)}$.

$\Rightarrow P'(t) = \dfrac{7-3t}{2(t^2-t+3)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{2(t+1)^2} > \dfrac{7-3t}{6\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{7-\frac{3}{4}}{6\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2} > 0$ khi $t \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right]$.

Suy ra $P_{\max} = P\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{7}{30}$ khi $\begin{cases} xy = 1 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\dfrac{1}{\sin^2 x} < \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{k}{\pi^2}$ đúng với $\forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó giá trị của k là bao nhiêu?

A. 5. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2} \Leftrightarrow k < \pi^2\left(-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} + 1\right).$$

Đặt $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{x^2} + 1$ với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$; $f'(x) = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x} - \dfrac{2}{x^3}$.

Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \dfrac{4}{\pi^2}$.

Do đó ta phải có $k \leq \pi^2 \cdot \dfrac{4}{\pi^2}$ hay $k \leq 4$. Vậy giá trị lớn nhất của k là 4.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 4(y-1) + 3x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3\left(x^3 - y^3\right) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x$.

A. $120\sqrt{2}$. **B**. 110. **C**. 100. **D**. $96\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 + xy = 4(y-1) + 3x \Leftrightarrow x^2 + (y-3)x + y^2 - 4y + 4 = 0$.

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì phương trình này phải có nghiệm.

Suy ra $\Delta_x = (y-3)^2 - 4(y^2 - 4y + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$.

Hoàn toàn tương tự cho Δ_y ta tìm được ràng buộc $0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$.

Khi đó: $P = 3(x-y)(3x+4y-4) + 20x^2 + 2xy + 5y^2 + 39x = 29x^2 + (5y+27)x + 12y - 7y^2$.

Xét $f(x) = 29x^2 + (5y+27)x + 12y - 7y^2$ trên $\left[0; \dfrac{4}{3}\right]$.

Vì $f'(x) = 59x + 5y + 27 > 0$, $\forall y \in \left[1; \dfrac{7}{3}\right], x \in \left[0; \dfrac{4}{3}\right]$.

nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \dfrac{4}{3}\right]$.

Do đó, $f(x) \leq f\left(\dfrac{4}{3}\right) = -7y^2 + \dfrac{56}{3}y + \dfrac{788}{9}$.

Khảo sát hàm số $g(y) = -7y^2 + \dfrac{56}{3}y + \dfrac{788}{9}$ trên $\left[1; \dfrac{7}{3}\right]$ ta tìm được giá trị lớn nhất của $g(y)$ là 100 đạt tại $y = \dfrac{4}{3}$.

Do đó $g(y) \leq 100$.

Vậy $\max P = 100$, đạt được khi $x = y = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy$ là

A. $\min P=-83$. **B**. $\min P=-63$. **C**. $\min P=-80$. **D**. $\min P=-91$.

Lời giải.

Ta có:
$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{y+3}\geq 4(x+y)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\geq 4 \\ x+y\leq 0 \end{array}\right. .$$

Mặt khác. $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x+y\leq 8 \Rightarrow x+y\in[4;8]$.
Xét biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy$, đặt $t=x+y, t\in[4;8] \Rightarrow P=4t^2+7xy$.
Lại có $(x+3)(y+3)\geq 0 \Leftrightarrow xy\geq -3(x+y)-9 \Rightarrow P\geq 4t^2-21t-63$.
Xét hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$ với $t\in[4;8]$.
Bảng biến thiên:

t	4		8
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-83	↗	$f(8)$

Suy ra $\min P=f(4)=-83$.
Chọn đáp án A □

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm $x\in[1;2]$.

$$x^4+\frac{16}{x^4}-4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{2}{x}\right)=m.$$

A. $-13\leq m\leq 11$. **B**. $-15\leq m\leq 9$. **C**. $-15<m<9$. **D**. $-16\leq m\leq 9$.

Lời giải.

Đặt $t=x-\dfrac{2}{x}, x\in[1;2]$. Đạo hàm $t'=1+\dfrac{2}{x^2}>0, \forall x\in[1;2]$.
Do đó $t(1)\leq t\leq t(2)$, suy ra $-1\leq t\leq 1$.
Ta có $x^2+\dfrac{4}{x^2}=t^2+4, x^4+\dfrac{16}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2-8=(t^2+4)^2-8=t^4+8t^2+8$.
Phương trình đã cho trở thành

$$t^4+4t^2-12t=m+8(*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm trong đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm trong $[-1;1]$.

Xét hàm số $y=f(t)=t^4+4t^2-12t$ trên đoạn $[-1;1]$.

Đạo hàm $y'=4t^3+8t-12=4(t-1)(t^2+t+3)<0, \forall t\in(-1;1)$.

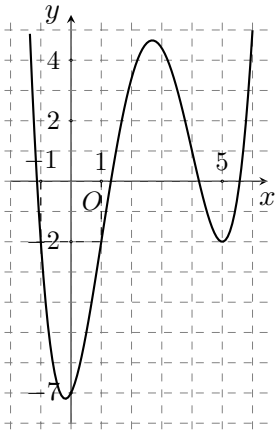
x	-1		1
y'		$-$	
y	17	↘	-7

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm trên $[1;2]$ thì $-7 \le m+8 \le 17 \Leftrightarrow -15 \le m \le 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 88.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$?



A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm $x \in [0;\pi]$ thì phương trình $f(t)=m$ có đúng một nghiệm $t \in [0;1)$. Dựa vào đồ thị ta có $m \in [-7;-2)$, do m nguyên nên $m \in \{-7;-6;-5;-4;-3\}$. Vậy có 5 giá trị.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Tìm m để phương trình $4^{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}} - 14 \cdot 2^{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}} + 8 = m$ có nghiệm.

A. $-41 \le m \le 32$. **B.** $m \ge -41$. **C.** $-41 \le m \le -32$. **D.** $m \le -32$.

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.

Đặt $t = 2^{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}$, ta có $t \in \left[4; 4^{\sqrt{2}}\right]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 14t + 8 = m$ $(*)$. Bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

Điều đó tương đương với $\min\limits_{t\in\left[4;4^{\sqrt{2}}\right]} f(t) \le m \le \max\limits_{t\in\left[4;4^{\sqrt{2}}\right]} f(t)$ với $f(t)=t^2-14t+8$.

Ta có $f'(t)=2x-14$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=7$ (nhận). Ta có $\begin{cases} f(4)=-32 \\ f(7)=-41 \\ f\left(4^{\sqrt{2}}\right)=4^{2\sqrt{2}}-14\cdot 4^{\sqrt{2}}+8. \end{cases}$

Suy ra $-41 \le m \le -32$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ trên $[-2;4]$.

$f'(x)=3x^2-6x-9;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

$f(-2)=-2+m; f(-1)=5+m; f(3)=-27+m; f(4)=-20+m$.

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x)=m-27; \max\limits_{[2;4]} f(x)=m+5\Rightarrow \max\limits_{[2;4]}|f(x)|=\max\{|m-27|;|m+5|\}$.

$\circ$ Trường hợp 1: Nếu $|m-27|\le|m+5|$ $(*)$

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]}|f(x)|=|m+5|\Rightarrow m+5=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=11\\m=-21\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $(*)\Rightarrow m=11$.

$\circ$ Trường hợp 2: Nếu $|m-27|>|m+5|$ $(**)$

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]}|f(x)|=|m-27|\Rightarrow m-27=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=43\\m=11\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $(**)$ không có m thỏa mãn.

Vậy $S=\{11\}\Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $2\cdot(a^2+b^2)+ab=(a+b)\cdot(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\cdot\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ bằng

A. -10. **B**. $-\dfrac{21}{4}$. **C**. $-\dfrac{23}{4}$. **D**. $\dfrac{23}{4}$.

Lời giải.

Với $a,\ b>0$ ta có

$$\begin{aligned}&2\cdot(a^2+b^2)+ab=(a+b)\cdot(ab+2)\\\Leftrightarrow\ &2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)\cdot\left(1+\frac{2}{ab}\right)\\\Leftrightarrow\ &2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=a+b+2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

Theo BĐT Cô-si, ta có $a+b+2\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 2\cdot\sqrt{(a+b)\cdot 2\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)}=2\cdot\sqrt{2\cdot\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)}$.

Khi đó, ta được $2\cdot\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1\ge 2\cdot\sqrt{2\cdot\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)}\Rightarrow\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge\dfrac{5}{2}$.

Ta thấy $P=4\cdot\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)=4\cdot t^3-9\cdot t^2-12\cdot t+18$ với $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge\dfrac{5}{2}$.

Xét $f(t)=4\cdot t^3-9\cdot t^2-12\cdot t+18$ với $t\ge\dfrac{5}{2}$.

Ta thấy $f'(t)=6\cdot(2t+1)\cdot(t-2)>0,\ \forall t\ge\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{23}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 92. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^4-2x^2+1$ có ba điểm cực trị A, B, C (với $A\in Oy$). Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

A. $\sqrt{6}$. **B.** 12. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{4}{3}x^3-4x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \Rightarrow y=1\\ x=\pm\sqrt{3} & \Rightarrow y=-2.\end{array}\right.$

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$, $B\left(-\sqrt{3};-2\right)$, $C\left(\sqrt{3};-2\right)$. Suy ra tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{AM}{AB}\cdot\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow AM\cdot AN=\frac{1}{2}AB\cdot AC.\end{aligned}$$

Ta lại có $MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos\widehat{MAN}$

nên $MN^2\geq 2\sqrt{AM^2\cdot AN^2}-AM\cdot AN=AM\cdot AN=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=6$.

(do $\cos\widehat{MAN}=\cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}$).

Vậy $MN\geq\sqrt{6}$. Dẳng thức xảy ra khi $AM=AN=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho trị lớn nhất của hàm số $y=|3x^2-6x+2m-1|$ trên đoạn $[-2;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=|3x^2-6x+2m-1|$ trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $M\geq f(-2)=|2m+23|$, $M\geq f(1)=|2m-4|$

$\Rightarrow 2M\geq|2m+23|+|2m-4|\geq|2m+23-2m+4|=27\Rightarrow M\geq\dfrac{27}{2}$. Khi $M=\dfrac{27}{2}\Rightarrow|2m+23|=|2m-4|\Leftrightarrow m=-\dfrac{19}{4}$.

Với $m=-\dfrac{19}{4}$, $\max\limits_{[-2;3]}f(x)=\max\{f(-2);f(1);f(3)\}=\dfrac{27}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho ba số dương a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a^2+8bc}+3}{\sqrt{(a+2c)^2+1}}$ có dạng $x\sqrt{y}$ $(x,y\in\mathbb{N})$. Hỏi $x+y$ bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $a+c=2b\Leftrightarrow a=2b-c\Leftrightarrow a^2=(2b-c)^2\Leftrightarrow a^2+8bc=4b^2+4bc+c^2\Leftrightarrow a^2+8bc=(2b+c)^2$.

Suy ra $P=\dfrac{2b+c+3}{\sqrt{(2b+c)^2+1}}=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ với $t=2b+c>0$.

Xét $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$.

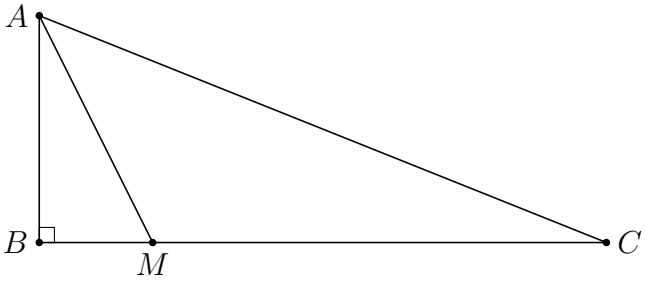
Giải $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.
Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

Giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{10}$ khi $t=\dfrac{1}{3}$.
Suy ra $x=1, y=10 \Rightarrow x+y=11$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 95.

Nhà của ba bạn A, B, C nằm ở ba vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B (như hình vẽ), $AB=10$ km; $BC=25$ km và ba bạn tổ chức họp mặt tại nhà bạn C. Bạn B hẹn chờ bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC.



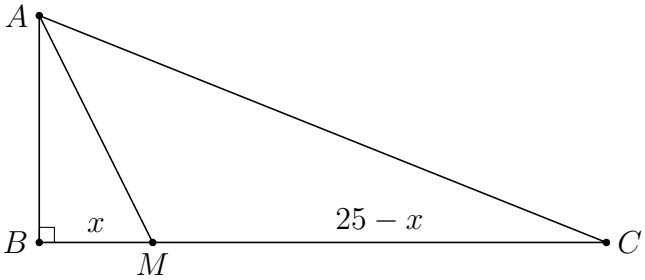
Giả sử luôn có xe buýt đi thẳng từ A đến M. Từ nhà bạn A đi xe buýt thẳng đến điểm hẹn M với vận tốc 30 km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C theo đoạn đường MC bằng xe máy với vận tốc 50 km/h. Hỏi $5MB+3MC$ bằng bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?

A. 95 km. **B**. 90 km. **C**. 85 km. **D**. 100 km.

Lời giải.

Đặt $BM=x$ km, $0<x<25$.
Ta có

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{x^2+100}, \\ MC &= 25-x. \end{aligned}$$



Thời gian bạn A đi xe buýt từ nhà đến điểm hẹn M là $t_A=\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{30}$ h.
Thời gian hai bạn A, B đi xe máy từ điểm hẹn M đến nhà bạn C là $t_{AB}=\dfrac{25-x}{50}$ h.
Suy ra tổng thời gian bạn A đi từ nhà đến nhà bạn C là

$$t(x)=t_A+t_{AB}=\frac{\sqrt{x^2+100}}{30}+\frac{25-x}{50} \text{ h}.$$

Để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất thì hàm số $t(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;25)$.

Ta có $t'(x) = \dfrac{x}{30\sqrt{x^2+100}} - \dfrac{1}{50}$,
và $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{2}$.
Ta có bảng biến thiên như hình bên.

x	0		$\frac{15}{2}$		25
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{5}{6}$	↘	$\frac{23}{30}$	↗	$\frac{\sqrt{29}}{6}$

Suy ra, $t(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{23}{30}$ h khi $x = \dfrac{15}{2}$ km.
Khi đó $BM = \dfrac{15}{2}$ km và $MC = 25 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{35}{2}$ km.
Vậy $5BM + 3MC = 5 \times \dfrac{15}{2} + 3 \times \dfrac{35}{2} = 90$ km.
Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Cho ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{a^2+8bc}+3}{\sqrt{a^2+2ac+4bc+2c^2+1}}$ có dạng $x\sqrt{y}$, với $x, y \in \mathbb{N}$. Tính $x+y$.
A. 10. **B**. 11. **C**. 20. **D**. 13.

Lời giải.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$. Thay vào biểu thức P, ta có

$$P = \frac{\sqrt{a^2+4(a+c)c}+3}{\sqrt{a^2+2ac+2(a+c)c+2c^2+1}} = \frac{\sqrt{(a+2c)^2}+3}{\sqrt{(a+2c)^2+1}}.$$

Đặt $(a+2c)^2 = x$, ta có hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{-3\sqrt{x}+1}{2(x+1)\sqrt{x^2+x}}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$.
Vì $f(0) = 3, f\left(\dfrac{1}{9}\right) = \sqrt{10}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên $\max\limits_{x\geq 0} f(x) = \sqrt{10}$, khi $x = \dfrac{1}{9}$.
Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{10}$, xảy ra khi $a = \dfrac{1}{3}, b = 0$ và $c = \dfrac{2}{3}$, chẳng hạn.
Từ đó suy ra $x + y = 11$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Lập Thạch - Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 đồng/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó mỗi khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó mỗi khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 đồng/kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)
A. 16000 đ. **B**. 24000 đ. **C**. 22000đ. **D**. 12000đ.

Lời giải.

Giả sử giá bán thay đổi x lần, mỗi lần thay đổi 2000 đồng ($x \in \mathbb{Z}$, $x > 0$ là tăng giá, $x < 0$ là giảm giá). Theo thực tế thì $-10 < x < 45$(giá bán trên 0 đồng và còn ít nhất một khách)
Tổng tiền thu được sau khi thay đổi là
$T = (90 - x)(60 - 5x)(20 + 2x - 2,2) = 10x^3 - 931x^2 + 1772x + 96120.$

Xét hàm số $T(x) = 10x^3 - 931x^2 + 1772x + 96120$.
Bài toán trở thành tìm GTLN của $F(x)$ với $x \geq 20000$.
Ta có $T'(x) = 30(x^2 - 62{,}0667x + 57{,}4)$

$$T' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 1 \\ x \approx 61 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $T(x)$

x	-10		1		45
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$		↗	$T_{\text{CĐ}}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra T lớn nhất khi $x = 1$, tức là ta chỉ tăng giá một lần. Vậy giá bán đưa ra để lợi nhuận cao nhất là 22000.
Chọn đáp án C □

Câu 98. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\cos 2x + m|\sin x| - m = 0$ có nghiệm?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 - 2\sin^2 x + m|\sin x| - m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x - m|\sin x| + m - 1 = 0 \qquad (1). \end{aligned}$$

Đặt $t = |\sin x|$ $(0 \leq t \leq 1)$, phương trình (1) trở thành

$$2t^2 - mt + m - 1 = 0 \qquad (2).$$

Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (2) phải có nghiệm $t \in [0;1]$.
Ta có

$$\begin{aligned} (2) \ &\Leftrightarrow\ 2t^2 - 1 = m(t-1) \\ &\Leftrightarrow\ \frac{2t^2-1}{t-1} = m. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2-1}{t-1}$.
Ta có $f'(t) = \dfrac{2t^2 - 4t + 1}{(t-1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trên $[0;1]$ như sau

t	0		$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(t)$	1	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↗	$4-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $m \le 4-2\sqrt{2}$, mà m nguyên dương nên $m=1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3(2y^2+1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải.

Điều kiện : $x \le 1$.
Ta có

$$\begin{aligned} & 2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3(2y^2+1) \\ \Leftrightarrow\ & 2(y^3-3y^2+3y-1)+(y-1)=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x} \\ \Leftrightarrow\ & 2(y-1)^3+(y-1)=2(\sqrt{1-x})^3+\sqrt{1-x} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (1) \ &\Leftrightarrow\ f(y-1)=f(\sqrt{1-x}) \\ &\Leftrightarrow\ y-1=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow y=1+\sqrt{1-x} \end{aligned}$$

Thay vào biểu thức P, ta được:

$$\begin{aligned} P &= x+2(1+\sqrt{1-x})=x+2\sqrt{1-x}+2 \\ &= 4-[(1-x)-2\sqrt{1-x}+1]=4-(\sqrt{1-x}-1)^2\le 4. \end{aligned}$$

Vậy $\max P=4$ đạt được khi $\sqrt{1-x}=1$ hay $x=0$, $y=2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 100. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\dfrac{9a^3+a}{b+1}=\sqrt{3b+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=6a-b$ là

A. $\dfrac{17}{12}$. **B.** $\dfrac{82}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{3}$. **D.** $\dfrac{89}{12}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{9a^3+a}{b+1}=\sqrt{3b+2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3b+2}\right)^3+\sqrt{3b+2}=(3a)^3+3a \quad (1)$.
Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=3t^2+1>0 \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{3b+2}\right)=f(3a) \Leftrightarrow \sqrt{3b+2}=3a \Leftrightarrow 3b+2=9a^2 \Leftrightarrow b=3a^2-\frac{2}{3}$$

Khi đó $S = 6a - b = -3a^2 + 6a + \dfrac{2}{3} = -3(a-1)^2 + \dfrac{11}{3} \le \dfrac{11}{3}, \forall a.$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{11}{3}$, đạt được khi $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Chọn đáp án C □

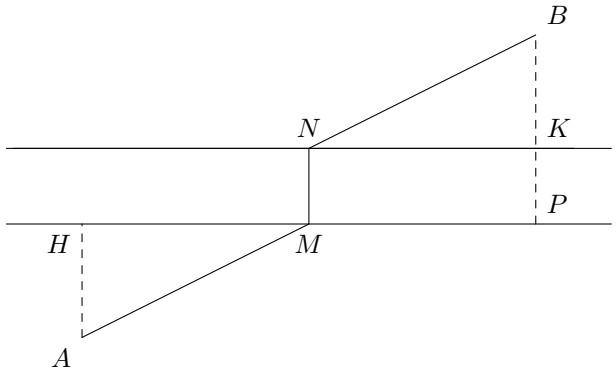
ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. C	5. A	6. A	7. B	8. B	9. A	10. A
11. C	12. A	13. A	14. A	15. B	16. D	17. B	18. B	19. A	20. B
21. B	22. D	23. B	24. A	25. D	26. B	27. A	28. A	29. D	30. A
31. A	32. B	33. A	34. C	35. A	36. A	37. B	38. C	39. B	40. D
41. A	42. A	43. A	44. D	45. D	46. A	47. A	48. C	49. C	50. D
51. C	52. C	53. B	54. B	55. B	56. B	57. D	58. D	59. D	60. D
61. D	62. A	63. C	64. C	65. B	66. B	67. A	68. D	69. A	70. B
71. B	72. A	73. B	74. A	75. A	76. D	77. B	78. A	79. C	80. A
81. A	82. B	83. C	84. C	85. C	86. A	87. B	88. C	89. C	90. D
91. C	92. A	93. D	94. B	95. B	96. B	97. C	98. B	99. B	100. C

5 Bài toán vận dụng thực tế

Câu 1. Người ta muốn làm một con đường đi từ thành phố A đến thành phố B ở hai bên bờ sông như hình vẽ, thành phố A cách bờ sông $AH = 3km$, thành phố B cách bờ sông $BK = \sqrt{28}km$, $HP = 10km$. Con đường làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm B nhiều gấp $\dfrac{16}{15}$ lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ A, chi phí làm cầu ở đoạn nào cũng như nhau. M là vị trí để xây cầu sao cho chi phí ít tốn kém nhất. Tìm mệnh đề đúng.

A. $AM \in (\dfrac{17}{4}; 5)$. **B**. $AM \in (\dfrac{10}{3}; 4)$. **C**. $AM \in (\dfrac{16}{3}; 7)$. **D**. $AM \in (4; \dfrac{16}{3})$.



Lời giải.

Đặt $HM = x, (0 \leqslant x \leqslant 10) \Rightarrow AM = \sqrt{x^2+9}; NK = MP = 10 - x; NB = \sqrt{x^2 - 20x + 128}$ Chi phí xây dựng $1km$ bên bờ sông A là $a, (a > 0)$. Chi phí xây dựng $1km$ bên bờ sông B là $\dfrac{16}{15}a$. x_0 là chi phí xây cầu MN ($x_0 > 0$ là hằng số).

Tổng chi phí xây dựng đường $AMNB$ là $y = a\sqrt{x^2+9} + \dfrac{16}{15}a\sqrt{x^2 - 20x + 128} + x_0$, với $(0 \leqslant x \leqslant 10)$.

$y' = a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{16}{15}a\dfrac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+128}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{16}{15}a\dfrac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+128}} = 0 \Leftrightarrow x = 4(TM)$.

$y(0) = \left(3 + \dfrac{128\sqrt{2}}{15}\right)a + x_0; y(10) = \left(\sqrt{109} + \dfrac{16\sqrt{28}}{15}\right)a + x_0; y(4) = \dfrac{203}{15}a + x_0$

Do đó $\min\limits_{[0;10]} y = \dfrac{203}{15}a + x_0$ khi $x = 4$.

Khi đó $AM = \sqrt{4^2+9} = 5 \in \left(4; \dfrac{16}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trên sân bay có một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đầu rời mặt đất tại điểm O. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d của máy bay. Dọc theo đường băng d cách vị trí máy bay cất cánh O một khoảng 300 m về phía bên phải có 1 người quan sát A . Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi phương trình $y = x^2$ (với x là độ dời của máy bay dọc theo đường thẳng d và tính từ O). Khoảng cách ngắn nhất từ người A (đứng cố định) đến máy bay là:

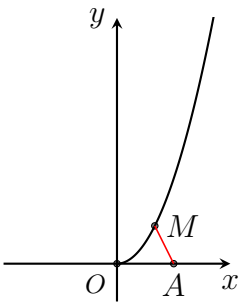
A. $100\sqrt{3}$ m. **B**. 200 m. **C**. $100\sqrt{5}$ m. **D**. 300 m.

Lời giải.

Phương pháp:

Gắn hệ trục tọa độ, xác định tọa độ điểm M trên parabol $y = x^2$ để độ dài đoạn AM nhỏ nhất.

Cách giải:



Lấy $M(m; m^2) \in (P) : y = x^2, (m \geq 0)$.

Ta có: $A(3; 0) \Rightarrow AM = \sqrt{(m-3)^2 + m^4} \Leftrightarrow AM^2 = (m-3)^2 + m^4$.

Xét hàm số:

$f(m) = (m-3)^2 + m^4; m \geq 0 \Rightarrow f'(m) = 2(m-3) + 4m^3 = 4m^3 + 2m - 6$.

$f''(m) = 12m^2 + 2 > 0, \forall m \Rightarrow f'(m) = 0$ có nghiệm duy nhất $m = 1$.

Bảng biến thiên:

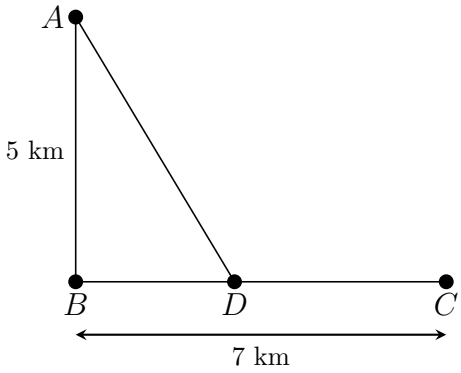
m	0		1		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	9	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $AM_{\min} = \sqrt{5}$ hm $= 100\sqrt{5}$ m.

Chọn đáp án C □

Câu 3.

Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men. Để đi đến C, đoàn cứu trợ phải chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Biết A cách B một khoảng 5 km, B cách C một khoảng 7 km (hình vẽ). Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?



A. $AD = 5\sqrt{3}$ km. **B**. $AD = 2\sqrt{5}$ km.

C. $AD = 5\sqrt{2}$ km. **D**. $AD = 3\sqrt{5}$ km.

Lời giải.

Ta tìm vị trí điểm D để đoàn cứu trợ đi từ A đến C nhanh nhất.

Đặt $AD = x, (x \geq 5)$.

Thời gian chèo thuyền từ A đến D: $\dfrac{x}{4}$.

Có $BD = \sqrt{x^2 - 25}, DC = 7 - \sqrt{x^2 - 25}$.

Thời gian đi bộ đi từ D đến C: $\dfrac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$.

Thời gian đi từ A đến C là $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{7-\sqrt{x^2-25}}{6}$. Ta tìm GTNN của $f(x)$.

Điều kiện xác định $x\geq 5$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{12}\left(3-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-25}}\right)$.

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-25}=2x, (x\geq 5)\Leftrightarrow 9(x^2-25)=4x^2\Leftrightarrow x^2=45\Leftrightarrow x=3\sqrt{5}$ (do $x\geq 5$).

Bảng biến thiên

x	5		$3\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{29}{12}$	↘	$\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$	↗	$+\infty$

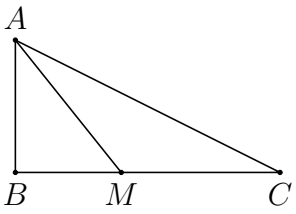
Dựa vào bảng biến thiên $f(x)$ đạt GTNN khi $x=3\sqrt{5}$.

Lúc đó $AD=3\sqrt{5}$ km.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4.

Một chiếc tàu quân sự đậu ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=5$ km. Một người lính muốn đột nhập vào căn cứ của đối phương ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người lính đó chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 6 km/h rồi chạy bộ đến C với vận tốc 12 km/h (xem hình vẽ ở bên).Tính độ dài đoạn BM để người đó đến C nhanh nhất?



A. $x=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi khoảng cách $BM=x$ (km) (với $0\leq x\leq 7$).

Khi đó $AM=\sqrt{25+x^2}$.

$\Rightarrow$ Thời gian đi từ A đến C là $f(x)=\dfrac{\sqrt{25+x^2}}{6}+\dfrac{7-x}{12}$, với $x\in[0;7]$.

Bài toán trở thành: Tìm x để $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;7]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{25+x^2}}-\dfrac{1}{12}$, với $x\in[0;7]$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=\sqrt{25+x^2}$, với $x\in[0;7]$.

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{5}{\sqrt{3}}$		7
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $f(x)$ có cực tiểu duy nhất trên đoạn $[0;7]$ nên thời gian đi từ A đến C nhanh nhất khi $BM=x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10\,(6n+10)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?

A. 4 máy. **B**. 6 máy. **C**. 5 máy. **D**. 7 máy.

Lời giải.

Gọi $x\,(0 \le x \le 8; x \in \mathbb{Z})$ là số máy in sử dụng trong một giờ để được lãi nhiều nhất. Khi đó chi phí dành cho x máy in trong một giờ là $10\,(6x+10) = 60x + 100$ nghìn đồng.

Chi phí vận hành $50x$ nghìn đồng.

Số bản in trong một giờ là $3600x \Rightarrow$ thời gian để in xong 50000 tờ quảng cáo là $\dfrac{50000}{3600x} = \dfrac{125}{9x}$ giờ.

Vậy tổng chi phí là $f\,(x) = (60x+100)\,\dfrac{25}{9x} + 50x$ nghìn đồng.

Để lãi là nhiều nhất thì tổng chi phí là thấp nhất, vậy ta tìm giá trị nhỏ nhất của tổng chi phí.

Thay các giá trị $x = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f\,(5) = \dfrac{12250}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 12t^2 - 2t^3 + 3$, trong đó t là khoảng thời gian (tính bằng giây) mà chất điểm bắt đầu chuyển động. Tính thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$. **B**. $t = 4$. **C**. $t = 1$. **D**. $t = 3$.

Lời giải.

Vận tốc của chuyển động là $V(t) = S'(t) = 24t - 6t^2$. Ta có $V'(t) = 24 - 12t = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Bảng biến thiên của $V(t)$ như sau:

x	0		2		$+\infty$
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		↗		↘	

Vậy thời điểm mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là $t = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tại trường THPT Y, để giảm nhiệt độ trong các phòng học từ nhiệt độ ban đầu là $28°C$, một hệ thống điều hòa làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $°C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t (tính từ thời điểm bật máy) được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ $(t \in [0;10])$. Nhiệt độ thấp nhất trong phòng có thể đạt được trong khoảng thời gian 10 phút đó gần đúng là:

A. $27,832°$. **B**. $18,4°$. **C**. $26,2°$. **D**. $25,312°$.

Lời giải.

Ta có: $T' = -0.024t^2 - 0.16 < 0 \quad \forall t \in [0;10]$.

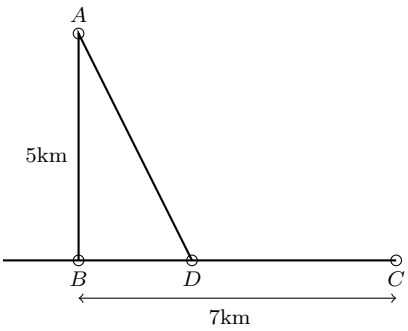
$\Rightarrow T \ge T(10) = 18,4°$.

Do đó, nhiệt độ thấp nhất phòng có thể đạt được trong khoảng thời gian 10 phút đó là $18,4°$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.

Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men, phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Tuy nhiên, do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc 4km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h.



Biết A cách B một khoảng 5km, B cách C một khoảng 7km. Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?

A. $AD = 5\sqrt{3}$ km. **B**. $AD = 3\sqrt{5}$ km. **C**. $AD = 5\sqrt{2}$ km. **D**. $AD = 2\sqrt{5}$ km.

Lời giải.

Gọi x (đơn vị km) là độ dài đoạn BD. Khi đó thời gian y (đơn vị giờ (h)) để đoàn cứu trợ đi theo lộ trình từ A qua D đến C là $y = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \dfrac{(7-x)}{6}$ với $x \in [0;7]$. Ta có $y' = \dfrac{x}{4\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{6}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$. Thay các giá trị vào kiểm tra ta được thời gian ngắn nhất khi $x = 2\sqrt{5}$ tức là $AD = 3\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\dfrac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 1$, với t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s(mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 4 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

A. 6 m/s. **B**. 8 m/s. **C**. 2 m/s. **D**. 9 m/s.

Lời giải.

$v(t) = S'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 6t$. Vận tốc trong 4s đầu đạt được lớn nhất khi $t = \dfrac{-b}{2a} = 2$(s) vậy nên trong 4(s) thì vận tốc lớn nhất là $v(2) = 6$(m/s).

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

A. 30 mg. **B**. 100 mg. **C**. 20 mg. **D**. 0 mg.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0;30]$.

Ta có: $G'(x) = 0.025.x.(60-3x)$. $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

x	0		20		30
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	100	↘	0

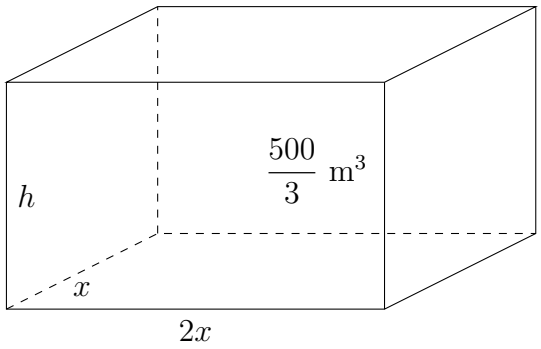
Như vậy độ giảm huyết áp nhiều nhất là 100 khi liều lượng thuốc tiêm là $x = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}$ m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m^2. Chi phí thuê nhân công thấp nhất là

A. 150 triệu đồng. **B**. 75 triệu đồng. **C**. 60 triệu đồng. **D**. 100 triệu đồng.

Lời giải.



Gọi các yếu tố như hình vẽ, diện tích phần phải xây của bể là phần xung quanh và đáy.

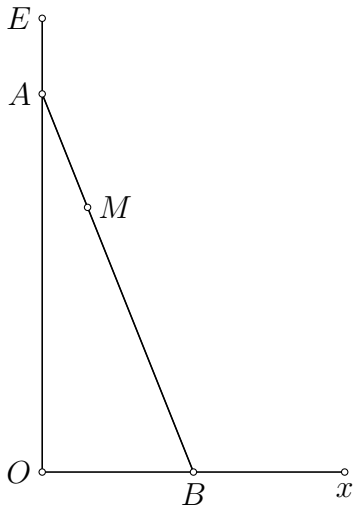
$$\begin{cases} V = 2x^2.h = \dfrac{500}{3} \\ S = 2x^2 + 6xh \end{cases} \Rightarrow S = 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x}} = 150.$$

Chi phí thấp nhất là $150 \times 500.000 = 75$ triệu đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 12.

Trên một đoạn đường giao thông có 2 con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M, vị trí M cách đường OE 125 m và cách đường Ox một khoảng bằng 1 km. Vì lý do thực tiễn người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M, biết rằng giá trị để làm 100 m đường là 150 triệu đồng. Người ta chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu?



A. $2,3965$ tỷ đồng. **B**. $2,0963$ tỷ đồng.

C. 3 tỷ đồng. **D**. $1,9063$ tỷ đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với OE nằm trên Oy. Khi đó $M\left(\frac{1}{8};1\right)$.

Gọi $B(m;0), A(0;n), (m,n>0) \Rightarrow AB: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Do AB đi qua $M\left(\frac{1}{8};1\right)$ nên $\frac{1}{8m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{8m} = \frac{8m-1}{8m} \Rightarrow n = \frac{8m}{8m-1}$.

$AB^2 = m^2 + n^2 = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2$. Xét hàm số $f(m) = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2$ với $m > 0$.

$f'(m) = 2m\left(1 - \frac{64}{(8m-1)^3}\right); f'(m) = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{8}$ (do $m > 0$).

Lập bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(m) = \dfrac{125}{64}$ khi $m = \dfrac{5}{8} \Rightarrow AB = \dfrac{5\sqrt{5}}{8}$.

Vậy chi phí thấp nhất là $\dfrac{5\sqrt{5}}{8} \times 1,5 \approx 2,0963$ tỷ đồng.

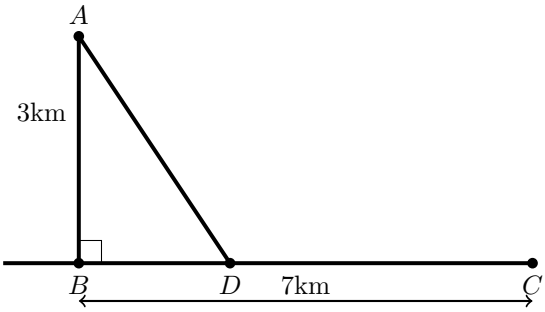
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 27 m/s. **B**. 243 m/s. **C**. 36 m/s. **D**. 144 m/s.

Câu 14.

Bạn An đi học từ nhà ở địa điểm A đến trường học C phải đi qua cầu từ A đến B rồi từ B đến trường. Trận mưa lũ vừa qua khiến cây cầu bị hư hỏng nặng, An phải đi thuyền với vận tốc 4 km/h đến một địa điểm D nào đó trên đoạn thẳng BC rồi mới đi bộ với vận tốc 5 km/h từ D đến C. Biết rằng cây cầu AB dài 3 km, đoạn đường BC dài 7 km. Hỏi An phải xuất phát từ A muộn nhất mấy giờ sáng để có mặt ở trường lúc 7 giờ 15 phút kịp vào học tiết 1?



A. 6 giờ 15 phút. **B**. 6 giờ đúng. **C**. 5 giờ 10 phút. **D**. 5 giờ 24 phút.

Lời giải.

Đặt $BD = x,\ 0 < x < 7 \Rightarrow DC = 7 - x$.

Thời gian An đi đến trường: $t = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \dfrac{7-x}{5}$.

Khảo sát hàm số trên $(0;7)$ nhận được thời gian ngắn nhất để An đi đến trường tương ứng với $x = 6 \Rightarrow t_{\min} \approx 1,8$h.

An phải xuất phát muộn nhất lúc 5 giờ 24 phút sáng để có mặt ở trường lúc 7 giờ 15 phút kịp vào học tiết 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Một khách sạn có 40 phòng. Tính toán bằng số liệu thống kê với dữ liệu quá khứ người ta ước lượng được rằng nếu đặt ra mức giá cho một phòng là x (nghìn đồng/ngày) thì mỗi ngày sẽ cho thuê được số phòng là $f(x) = 40 - \dfrac{x}{20}$, với $x \in [0;800]$. Nếu giá thuê phòng đắt hơn 800 nghìn đồng/ngày thì không có khách thuê phòng. Với thông tin như trên thì khách sạn cần đưa ra mức giá x là bao nhiêu để doanh thu lớn nhất.

A. 400 nghìn đồng/ngày. **B**. 500 nghìn đồng/ngày.

C. 600 nghìn đồng/ngày. **D**. 700 nghìn đồng/ngày.

Lời giải.

Doanh thu khách sạn mỗi ngày là $T = x\left(40 - \dfrac{x}{20}\right) \le_{AM-GM} 20 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{x}{20} + 40 - \dfrac{x}{20}\right)^2}{4} = 8000$. Do đó, để doanh thu mỗi ngày lớn nhất thì $\dfrac{x}{20} = 40 - \dfrac{x}{20} \Leftrightarrow x = 400$ (nghìn đồng/ngày).

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê và cứ tăng giá thêm cho mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có hai căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty sẽ cho thuê căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

A. 2.225.000 đồng. **B**. 2.100.000 đồng. **C**. 2.200.000 đồng. **D**. 2.250.000 đồng.

Lời giải.

Có $2.000.000 = 20$ (trăm ngàn).

Gọi x (trăm ngàn) là số tiền tăng thêm của mỗi căn hộ cho thuê so với giá 2.000.000 đồng. Khi đó tổng thu nhập từ các căn hộ cho thuê một tháng là

$P = (20 + x)(50 - 2x)$ (trăm ngàn).

$P = 100 + 10x - 2x^2 = \dfrac{225}{2} - 2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 \le \dfrac{225}{2}$. Suy ra $\max P = \dfrac{225}{2}$ khi $x = \dfrac{5}{2}$.

Vậy để có thu nhập cao nhất thì công ty cho thuê căn hộ với giá 2.250.000 đồng một tháng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24 (m/s). **B**. 108 (m/s). **C**. 64 (m/s). **D**. 18 (m/s).

Lời giải.

Ta có : $v = s' = -\dfrac{3}{2}t^2 + 12t$, $t \in [0; 6]$.

Đạo hàm : $v'(t) = -3t + 12 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Ta có : $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(4) = 24 \\ v(6) = 18 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[0;6]} v = 24.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3. Đáy bể hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?

A. 1,08 triệu đồng. **B**. 0,91 triệu đồng. **C**. 1,68 triệu đồng. **D**. 0,54 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi am là chiều rộng của đáy bể, suy ra chiều dài đáy bể là $2a$ m và chiều cao của bể nước là b m.

Theo bài ra thể tích bể bằng 288 $\text{dm}^3 = 0.288\text{m}^3 = 2a^2b \Rightarrow b = \dfrac{0.144}{a^2}$.

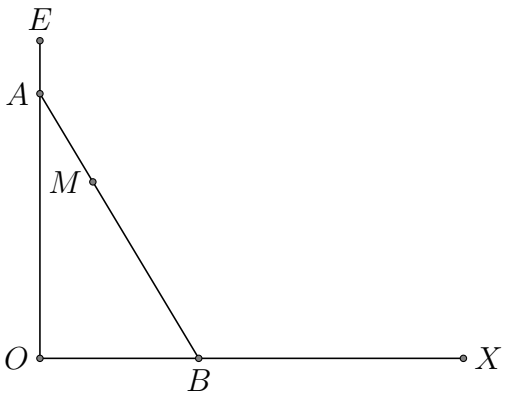
Diện tích bể không nắp cần xây là $S = 2a^2 + 2ab + 4ab = 2a^2 + \dfrac{108}{125a} \ge 3\sqrt[3]{2a^2.\dfrac{54}{125a}\dfrac{54}{125a}} = \dfrac{54}{25}$

Vậy chi phí thấp nhất là $T = 500000.\dfrac{54}{25} = 1080000$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19.

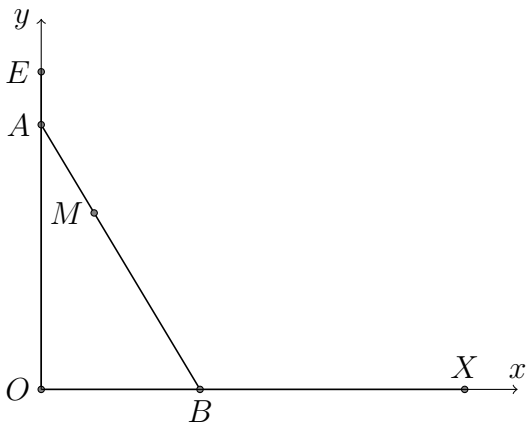
Trên một đoạn đường giao thông có hai con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M, vị trí M cách đường OE 125m và cách đường OX 1km. Vì lý do thực tiễn người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M, biết rằng giá trị để làm 100m đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu?



A. $2,3965$ tỷ đồng. **B**. $1,9063$ tỷ đồng. **C**. $3,0264$ tỷ đồng. **D**. $2,0963$ tỷ đồng.

Lời giải.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Khi đó $M\left(125;1000\right)$.

Gọi $A\left(0;a\right)$, $B\left(b;0\right)$ thì phương trình đường thẳng AB có dạng: $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$

Vì AB đi qua M nên: $\dfrac{125}{b}+\dfrac{1000}{a}=1\Leftrightarrow b=\dfrac{125a}{a-1000}$

Từ đó: $AB^2=a^2+b^2=a^2+\left(\dfrac{125a}{a-1000}\right)^2$

Xét hàm số $f\left(x\right)=a^2+\left(\dfrac{125a}{a-1000}\right)^2$ với $a>1000$

Ta có: $f'\left(x\right)=2a-\left(\dfrac{\left(250\right)^3a}{\left(a-1000\right)^3}\right)=0\Leftrightarrow a=1250$

Ta có bảng biến thiên:

x	1000		1250		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$		↘	$f\left(1250\right)$	↗	

Như vậy, đoạn đường AB ngắn nhất là bằng $AB=\sqrt{f\left(1250\right)}=\sqrt{1953125}$

Chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là: $\dfrac{\sqrt{1953125}}{100}\cdot 150\approx 2096,313729$ (triệu đồng) $\approx 2,0963$ (tỉ đồng).

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Gia đình Toán xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp dung tích 2017 lít. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng được làm bằng bê tông có giá 350.000 đồng/m^2, thân bể được xây bằng gạch có giá 200.000 đồng/m^2 và nắp bể được làm bằng tôn có giá 250.000 đồng/m^2. Hỏi chi phí thấp nhất gia đình Toán cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu?

A. 2.280.700 đồng. **B**. 2.150.300 đồng. **C**. 2.510.300 đồng. **D**. 2.820.700 đồng.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của đáy bể nước là a m, chiều cao của bể nước là b m $(a, b > 0)$.
Theo giả thiết ta được $V = 2a^2b = 2,017 \Leftrightarrow b = \dfrac{2,017}{2a^2}$.
Và số tiền để xây bể là $T = f(a,b) \times 1000$,
trong đó $f(a,b) = 2a^2 \times 350 + 6ab \times 200 + 2a^2 \times 250 = 1200(a^2 + ab)$.
Mà $b = \dfrac{2,017}{2a^2}$ nên ta được $f(a,b)$ trở thành $g(a) = 1200\left(a^2 + \dfrac{2,017}{2a}\right)$.

$g'(a) = 0 \Leftrightarrow 1200\left(2a - \dfrac{2,017}{2a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{2,017}{4}}$. Ta được BBT

a	$-\infty$		$\sqrt[3]{\dfrac{2,017}{4}}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\sqrt[3]{\dfrac{2,017}{4}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra chi phí thấp nhất mà gia đình Toàn cần bỏ ra là $T = g\left(\sqrt[3]{\dfrac{2,017}{4}}\right) \times 1000 \approx 2.280.700$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 21. Từ một tờ giấy hình tròn bán kính R, ta có thể cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $4R^2$. **B**. $2R^2$. **C**. $\dfrac{\pi R^2}{2}$. **D**. R^2.

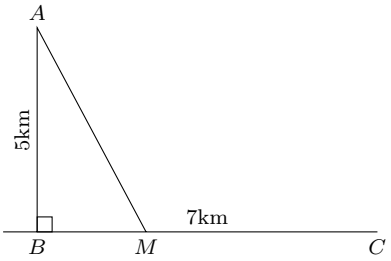
Lời giải.

Gọi φ là số đo góc nhọn tạo bởi 2 đường chéo d_1, d_2 của hình chữ nhật.
Ta có diện tích hình chữ nhật $S = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi \le \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \Leftrightarrow S \le 2R^2$.
Do đó giá trị lớn nhất của S là $2R^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 22.

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?



A. $\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$ km. **B.** $2\sqrt{5}$ km.
C. 0 km. **D.** 7 km.

Lời giải.

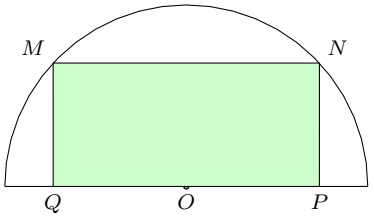
Đặt $BM = x$ với $0 < x < 7$.
Khi đó tổng thời gian đi từ A đến M đến C là:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{1}$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$.
$f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2\sqrt{5}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23.

Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa hình tròn có bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích lớn nhất có thể có của miếng tôn hình chữ nhật là



A. 7. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $PQ = 2x$ với $0 < x < 3$. Khi đó $MQ = \sqrt{9-x^2}$.
Diện tích hình chữ nhật là $S(x) = 2x \cdot \sqrt{9-x^2}$.
$S'(x) = \dfrac{2(9-2x^2)}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
Từ đó suy ra $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 9 tại $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Một doanh nghiệp sản xuất và bán một loại sản phẩm với giá 45 (ngàn đồng) mỗi sản phẩm, tại giá bán này khách hàng sẽ mua 60 sản phẩm mỗi tháng. Doanh nghiệp dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng nếu tăng 2 (ngàn đồng) trong giá bán thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 6 sản phẩm. Biết rằng chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 27 (ngàn đồng). Vậy doanh nghiệp nên bán sản phẩm với giá nào để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

A. 46 ngàn đồng. **B.** 47 ngàn đồng. **C.** 48 ngàn đồng. **D.** 49 ngàn đồng.

Lời giải.

Gọi $x(x > 45)$ là giá bán mới của 1 sản phẩm mà doanh nghiệp phải xác định để lợi nhuận thu được sau khi tăng giá là cao nhất. Suy ra số tiền đã tăng là $x - 45$.

Ta có nếu tăng 2 ngàn thì sẽ bán ít hơn 6 sản phẩm.
Vậy nếu tăng $x-45$ thì số lượng sản phẩm giảm xuống là $\dfrac{6(x-45)}{2}=3x-135$.
Tổng số sản phẩm bán được: $60-(3x-135)=195-3x$.
Lợi nhuận công ty thu được sau khi tăng giá là

$$(x-27)(195-3x)=-3x^2+276x-5265.$$

Đặt $f(x)=-3x^2+276x-5625$. Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x>45} f(x)=?$.
Ta có $f'(x)=-6x+276$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=46$ (ngàn đồng). Lập bảng biến thiên, ta suy ra $\max\limits_{x>45} f(x)=f(46)=723$ (ngàn đồng).
Chọn đáp án A □

Câu 25. Anh Minh muốn xây dựng một hố ga không có nắp đạy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 3200 cm^3, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.

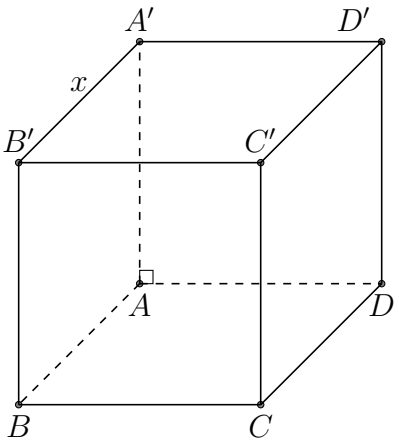
A. 170 cm^2. **B**. 160 cm^2. **C**. 150 cm^2. **D**. 140 cm^2.

Lời giải.

Giả sử chiều rộng bằng x ($x>0$). Suy ra chiều cao bằng $2x$, chiều dài bằng $\dfrac{3200}{x\cdot 2x}=\dfrac{1600}{x^2}$. Diện tích hố ga cần xây nhỏ nhất thì sẽ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất. Diện tích hố ga cần xây bằng

$$V=x\cdot\frac{1600}{x^2}+2\cdot x\cdot 2x+2\cdot 2x\cdot\frac{1600}{x^2}=\frac{8000}{x}+4x^2.$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{8000}{x}+4x^2$ trên $(0;+\infty)$.
Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=10$. Suy ra bảng biến thiên:



x	0		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1200	↗	$+\infty$

Suy ra diện tích hố ga nhỏ nhất khi $x=10$. Khi đó diện tích đáy của hố ga bằng $x\cdot\dfrac{1600}{x^2}=160$ cm^2.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Nhà xe khoán cho hai tài xế ta-xi An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng. Hỏi tổng số ngày ít nhất là bao nhiêu để hai tài xế chạy tiêu thụ hết số xăng của mình được khoán, biết rằng bắt buộc hai tài xế cùng chạy trong ngày (không có người nghỉ người chạy) và cho chỉ tiêu một ngày hai tài xế chỉ chạy đủ hết 10 lít xăng?

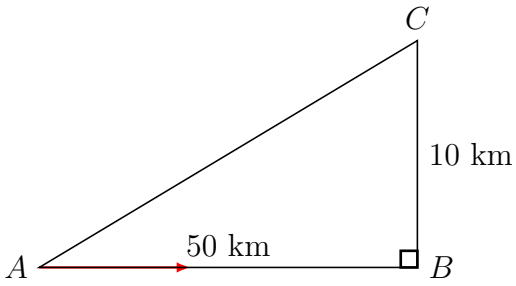
A. 20 ngày. **B**. 15 ngày. **C**. 10 ngày. **D**. 25 ngày.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số lít xăng mà An và Bình tiêu thụ trong một ngày. Khi đó $x+y=10 \Rightarrow y=10-x$.
Số ngày mà hai người tiêu thụ hết số xăng là $f(x)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=6$.
Vậy số ngày ít nhất cần tìm là $f(4)=20$ (ngày)
Chọn đáp án A □

Câu 27.

Cô An đang ở khách sạn A bên cạnh một bờ biển và cô cần đi du lịch đến một hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C là 50 km. Từ khách sạn A, cô An có thể đi đường thủy hoặc đường bộ đến B rồi từ đó đi đường thủy để đến hòn đảo C (như hình vẽ bên). Chi phí đi đường thủy là 5USD/km, đường bộ là 3USD/km. Hỏi cô An phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để chi phí thấp nhất có thể?



A. $\dfrac{15}{2}$ km. **B.** $\dfrac{85}{2}$ km.
C. 50 km. **D.** $10\sqrt{26}$ km.

Lời giải.

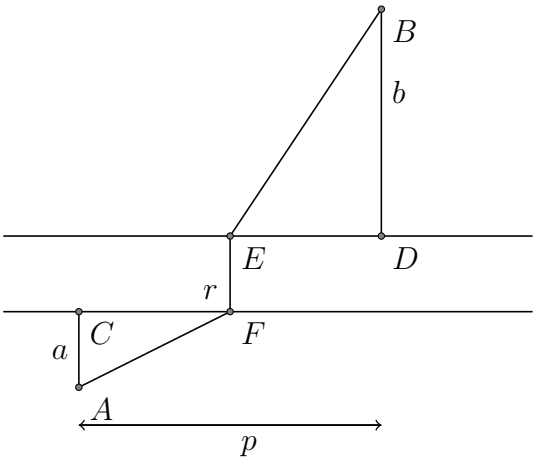
Giả sử cô An phải đi đường bộ một khoảng x km.
Chi phí đi đường là $P=3x+\sqrt{(50-x)^2+10^2}\cdot 5$, $0\le x\le 50$.
Ta có $P'=3+\dfrac{5(2x-100)}{2\sqrt{x^2-100x+2600}}$, $P'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{85}{2}$.
Bảng biến thiên của P là

x	0		$\frac{85}{2}$		50
P'		$-$	0	$+$	
P		↘		↗	

Vậy cô An phải đi đường bộ một khoảng $\dfrac{85}{2}$ km thì chi phí thấp nhất
Chọn đáp án B □

Câu 28.

Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A và B, hai thành phố này bị ngăn cách một con sông có chiều rộng r. Người ta xây một cây cầu bắc qua sông, biết rằng hai thành phố A và B lần lượt cách con sông một khoảng bằng $AC=a$ và $BD=b\,(a\le b)$, như hình vẽ bên. Hãy xác định vị trí xây cầu để tổng khoảng cách giữa các thành phố là nhỏ nhất.



A. Cách C là $\dfrac{ap}{a+b}$. **B.** Cách D là $\dfrac{p}{a+b}$.
C. Cách C là $\dfrac{a}{a+b}$. **D.** Cách C là $\dfrac{ap}{2(a+b)}$.

Lời giải.

Đặt $CF = x$, khi đó ta có $AF = \sqrt{x^2 + a^2}, EB = \sqrt{(p-x)^2 + b^2}$.
Khi đó bài toán trở thành tìm $0 \le x \le p$ sao cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(p-x)^2 + b^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \dfrac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2 + b^2}}$.
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2 + b^2}} \Leftrightarrow x^2\left[(p-x)^2 + b^2\right] = \left(x^2 + a^2\right)(p-x)^2$.
Giải phương trình trên ta được $x = \dfrac{ap}{a+b}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc của dòng nước là 6(km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v(km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 12 km/h. **B**. 9 km/h. **C**. 15 km/h. **D**. 6 km/h.

Lời giải.

☑ Thời gian cá hồi bơi 300 km với vận tốc v (km/h), $(v > 6)$ là $t = \dfrac{300}{v-6}$ (giờ).

☑ Năng lượng tiêu hao là $E(v) = cv^3t = cv^3\dfrac{300}{v-6} = \dfrac{300cv^3}{v-6}$.

☑ Đặt $f(v) = \dfrac{v^3}{v-6}$. Ta có $f'(v) = \dfrac{v^2(2v-18)}{(v-6)^2}$, $f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$.

x	6		9		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(9)$	$\nearrow$	$+\infty$

☑ Năng lượng tiêu hao là ít nhất khi $v = 9$ (km/h).

Chọn đáp án B □

Câu 30. Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm đi 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ (và như vậy, nếu giảm thời gian làm việc 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có thêm 1 công nhân đi làm đồng thời năng suất lao động tăng 5 sản phẩm/1 công nhân /1 giờ). Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \dfrac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong 1 tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

A. 32. **B**. 36. **C**. 44. **D**. 48.

Lời giải.

Với x là thời gian làm việc trong một tuần, theo bài toán ta có $x \in [0; 42]$ và số lượng sản phẩm thu

được mỗi tuần của nhà máy Z được tính theo công thức

$$S(x) = x \cdot \left(100 - \frac{x-40}{2}\right) \cdot \left(120 - 5 \cdot \frac{x-40}{2}\right) - \frac{95x^2 + 120x}{4}$$
$$= \frac{5x^3 - 1735x^2 + 105480x}{4}.$$

Ta có $S'(x) = \dfrac{15x^2 - 3470x + 105480}{4} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 36 \\ x = \dfrac{586}{19} \text{ (không thỏa mãn)} \end{array}\right.$.

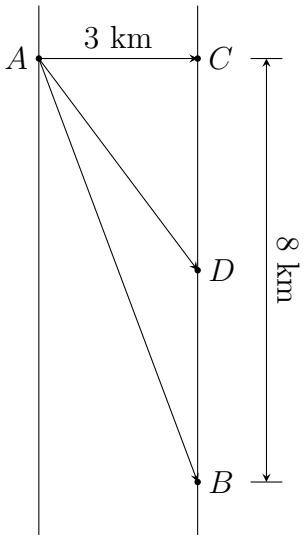
Khi đó $S(0) = 0, S(42) = 435015, S(36) = 445500$.

Vậy thời gian làm việc trong một tuần để đạt số lượng sản phẩm lớn nhất là 36 giờ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31.

Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp đến C sau đó chạy đến B hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa C và B sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h, chạy với vận tốc 8km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải.

Gọi x (km) là độ dài đoạn CD với $0 < x < 8$. Suy ra $BD = 8 - x$ (km). Thời gian để người đó di chuyển đến B là

$$f(x) = \frac{9 + x^2}{6} + 1 - \frac{x}{8} \text{ (giờ)}.$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} - \dfrac{1}{8}$, suy ra

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{9 + x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8}$	↗	

Vậy thời gian ngắn nhất để người đó di chuyển đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$ giờ.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê căn hộ giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000. **B**. 2.350.000. **C**. 2.450.000. **D**. 2.550.000.

Lời giải.

Gọi x là số căn hộ cho thuê.
Ta có tổng tiền thuê bằng tiền thuê mỗi tháng nhân với tổng sô phòng được thuê:
$T=(2+0,1.x)(50-2x)=-0,2x^2+x+100$ triệu đồng.
T_{max} khi hàm số $y=-0,2x^2+x+100$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2.(-0,2)}=2,5$.
Vậy giá căn hộ là : $(2+0,1.2,5)=2,25$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích là 96.000 cm^3, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 832.000 đồng. **B**. 382.000 đồng. **C**. 83.200 đồng. **D**. Đáp án khác.

Lời giải.

Gọi $x\,(m)$ là chiều dài một cạnh đáy hình hộp $(x>0)$
Diện tích đáy hình hộp là: $S_{\text{đáy}}=\dfrac{96000}{60}=1600\ \text{cm}^2=0,16\ \text{m}^2$.
Chiều dài cạnh còn lại của đáy là: $\dfrac{0,16}{x}$ m
Chi phí để làm bể cá là
$T=0,16.100000+70000.\left(2.0,6.x+2.0,6.\dfrac{0,16}{x}\right)=0,16.100000+70000.1,2.\left(x+\dfrac{0,16}{x}\right)$.
Để chi phí làm bể nhỏ nhất hay T nhỏ nhất $\Leftrightarrow x+\dfrac{0,16}{x}$ nhỏ nhất.
Ta có: $x+\dfrac{0,16}{x}\geq 2\sqrt{0,16}$. Suy ra $x+\dfrac{0,16}{x}$ nhỏ nhất bằng $0,8$. Tại $x=\dfrac{0,16}{x}=0,4$.
Vậy $T_{min}=83200$.

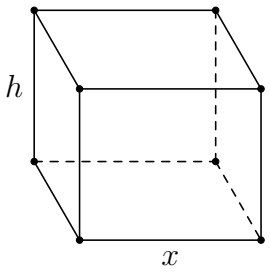
Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Người ta muốn thiết kế một bể cá theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính và thể tích là 8 m^3. Giá mỗi m^2 kính là 600.000 đồng/m^2. Gọi t là số tiền kính tối thiểu phải trả. Giá trị t xấp xỉ với giá trị nào sau đây?

A. 11.400.000 đồng. **B**. 6.700.000 đồng. **C**. 4.800.000 đồng. **D**. 14.400.000 đồng.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy là x (m) và chiều cao là h (m).



Ta có $x^2h = 8 \Rightarrow h = \dfrac{8}{x^2}$ (điều kiện $x > 0$).

Diện tích kính cần là $x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{32}{x}$.

Xét $f(x) = x^2 + \dfrac{32}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \dfrac{32}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt[3]{2}$.

Ta có bảng biến thiên

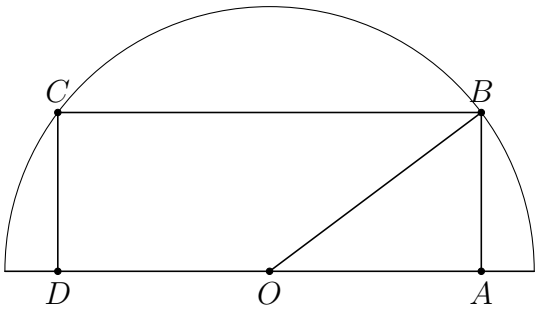
x	0		$2\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↗	$\dfrac{16}{\sqrt[3]{2}}$	↘	∞

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị t là $600.000 \cdot \dfrac{16}{\sqrt[3]{2}} \approx 7.619.525$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



A. $S_{\max} = 36$ cm^2. **B**. $S_{\max} = 36\pi$ cm^2.

C. $S_{\max} = 18\pi$ cm^2. **D**. $S_{\max} = 18$ cm^2.

Lời giải.

Gọi chiều dài $AD = 2x$ $(0 < x < 6)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.

Xét $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$, ta có $f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	36	↘	0

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 60 km, khoảng cách từ A đến B là 100 km, mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm D cách điểm A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến D rồi từ D đến B chi phí ít nhất? (hình vẽ dưới dây)

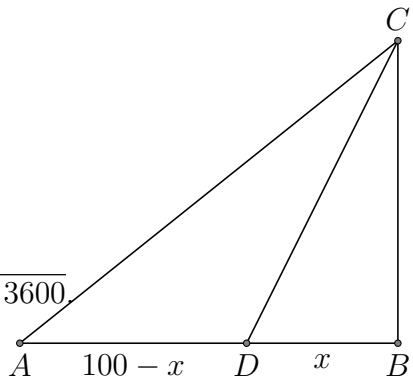
A. 40 km. **B**. 50 km. **C**. 55 km. **D**. 45 km.

Lời giải.

Đặt khoảng cách từ D đến B là x, $0 \le x \le 100$. Khi đó khoảng cách từ A đến D là $100-x$ km và khoảng cách từ D đến C là $\sqrt{x^2+3600}$ km.

Chi thí cho việc kéo đường dây điện từ A đến D rồi đến C được tính theo công thức

$$f(x) = 3000\,(100-x)+5000\sqrt{x^2+3600} = 300000-3000x+5000\sqrt{x^2+3600}.$$



Ta xác định x sao cho $f_{\min}$.

Ta có $f'(x) = -3000 + \dfrac{5000x}{\sqrt{x^2+3600}} = 0 \Leftrightarrow x = 45$.

Mặt khác $f\,(0) = 600000$ USD; $f\,(100) \approx 583095$ USD; $f\,(45) = 540000$ USD nên $f_{\min}$ khi $x = 45$. Vậy khoảng cách cần tính để chi phí kéo dây ít nhất là 55 km.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $x = 8$. **B**. $x = 10$. **C**. $x = 15$. **D**. $x = 7$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $G(x) = 0{,}035x^2(15-x) = 0{,}525x^2 - 0{,}035x^3$.

$G'(x) = 1{,}05x - 0{,}105x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 10. \end{array}\right.$

Ta có $G(0) = G(15) = 0$, $G(10) = 17{,}5$. Vậy liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là $G(10) = 17{,}5$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Sau những ngày mưa lớn, ở Thành phố Hồ Chí Minh thường xuyên bị ngập. Mực nước ngập trung bình tại một vị trí bất kì (nếu có) được tính theo hàm số $y = -3x^4 + 2\sqrt{5}x^3 - 6x^2 + 6\sqrt{5}x + 7$, với $|x|$ (km) là khoảng cách tính từ cổng trường ĐH Y Dược Tp HCM đến điểm đó. Nhà bạn An ở nơi có mực nước ngập cao nhất của TP, mỗi ngày An đến trường ĐH Y Dược bằng cách đi bộ với vận tốc 60 mét/phút. Hỏi An phải bắt đầu đi học muộn nhất từ mấy giờ trong các thời gian được liệt kê sau đây để đến trường trước 7 giờ?

A. 6 giờ 50 phút. **B**. 7 giờ kém 20 phút. **C**. 6 giờ 45 phút. **D**. 7 giờ kém 14 phút.

Lời giải.

Vận tốc đi bộ của An là $v = 60$ mét/phút, tương đương với 0,06 km/phút.

$y' = -12x^3 + 6\sqrt{5}x^2 - 12x + 6\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Thời gian An đi từ nhà đến trường ĐH Y là $t = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right|}{0{,}06} \approx 18{,}63$ (phút). Do đó, An đi muộn nhất mà vẫn đến trường trước 7 giờ là lúc 7 giờ kém 20 phút.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3 - 9t + 1$, s tính theo mét và t tính theo giây. Trong 5 giây đầu tiên, hãy tìm t mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 1$. **B.** $t = 2$. **C.** $t = 3$. **D.** $t = 4$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t - 9$. Theo yêu cầu bài toán, ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên đoạn $[0; 5]$.

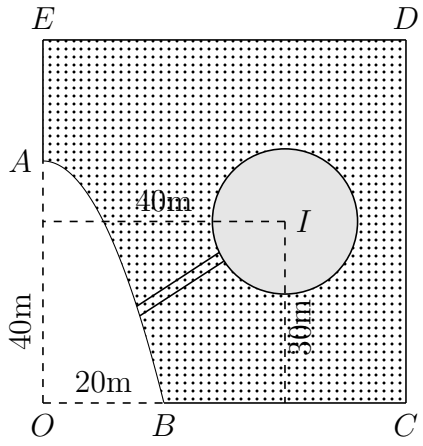
Ta có $v'(t) = -6t + 12, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra: $v(0) = -9, v(2) = 3, v(5) = -24$. Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc là 3, đạt được lúc 2 giây.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40.

Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết:

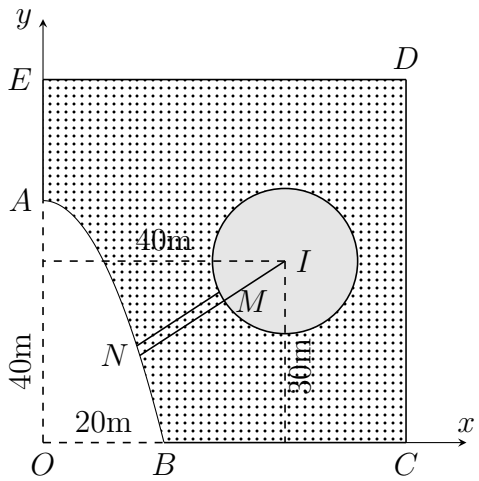


- ☑ Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O;
- ☑ Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA;
- ☑ Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- ☑ Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.

A. $l \approx 17{,}7$m. **B.** $l \approx 25{,}7$m. **C.** $l \approx 27{,}7$m. **D.** $l \approx 15{,}7$m.

Lời giải.

Ta coi một đơn vị bằng 10m và gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A, B lần lượt thuộc các tia Oy, Ox. Khi đó bờ của mảnh vườn là hình tròn $(C) : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$, bờ AB của ao là phần parabol $(P) : y = 4 - x^2$ ứng với $x \in [0; 2]$. Bài toán trở thành tìm $M \in (C)$ và $N \in (P)$ sao cho MN ngắn nhất.



Ta thấy rằng để MN ngắn nhất thì M, N, I phải thẳng hàng với $I(4; 3)$ là tâm của (C).

Khi đó $MN = IN - IM = IN - 1$, vì vậy ta chỉ cần tìm $N \in (P)$ sao cho IN ngắn nhất.

Do $N \in (P)$ nên $N\left(x; 4 - x^2\right)$ với $x \in [0; 2]$.

$IN^2 = (x-4)^2 + \left(1 - x^2\right)^2 = x^4 - x^2 - 8x + 17$.

Xét $f(x) = x^4 - x^2 - 8x + 17$ với $x \in [0; 2]$, $f'(x) = 4x^3 - 2x - 8$.

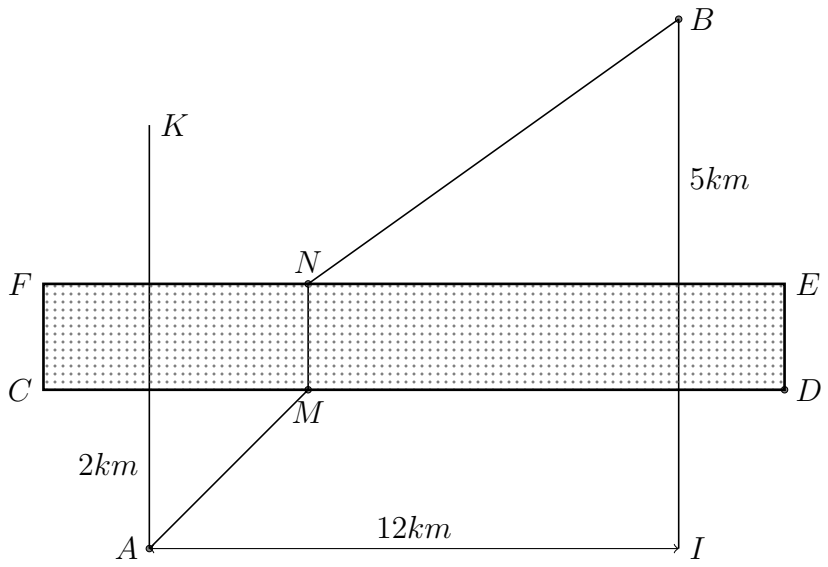
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 1{,}392768772 \in (0; 2)$.

$f(0) = 17$, $f(2) = 13$, $f(x_0) \approx 7{,}68$ suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) \approx 7{,}68$.

Vậy $\min IN \approx 2{,}77$ tức là $l \approx 17{,}7$m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Hai thành phố A và B ngăn cách nhau bởi một con sông. Người ta cần xây cây cầu bắc qua sông và vuông góc với bờ sông. Biết rằng thành phố A cách bờ sông 2 km, thành phố B cách bờ sông 5 km, khoảng cách giữa đường thẳng đi qua A và đường thẳng đi qua B cùng vuông góc với bờ sông là 12 km. Giả sử hai bờ sông là hai đường thẳng song song với nhau. Nhằm tiết kiệm chi phí đi từ thành phố A đến thành phố B, người ta xây cây cầu ở vị trí MN để quãng đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (hình vẽ). Khi đó, độ dài đoạn AM là bao nhiêu?



A. $AM = \dfrac{2\sqrt{193}}{7}$km. **B**. $AM = \dfrac{3\sqrt{193}}{7}$km. **C**. $AM = \sqrt{193}$km. **D**. $AM = \dfrac{\sqrt{193}}{7}$km.

Lời giải.

Gọi H là giao điểm của CD và AK. Đặt $HM = x \Rightarrow NK = 12 - x \Rightarrow AM = \sqrt{x^2+4}, BN = \sqrt{25+(12-x)^2}$. Để quãng đường từ A đến B ngắn nhất khi $AB = AM + BN$ ngắn nhất xét $f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{25+(12-x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \dfrac{12-x}{\sqrt{25+(12-x)^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{24}{7} \Rightarrow AM = \dfrac{2\sqrt{193}}{7}$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy A4 trong môt giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20\,(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được lãi nhiều nhất?

A. 6máy. **B**. 7máy. **C**. 5máy. **D**. 4máy.

Lời giải.

Gọi số máy cần sử dụng là n máy $(0 < n \leq 8)$.

Ta có 1 máy in trong một giờ in được 4000 bản in khổ giấy A4.

Suy ra n máy trong một giờ in được $4000n$ bản in khổ giấy A4.

Vậy để in được 50000 bản thì số giờ cần để in là: $\dfrac{50000}{4000n} = \dfrac{25}{2n}$(giờ).

+ Ta có chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20\,(3n+5)$ nghìn đồng, nên chi phí in ấn của n máy chạy trong $\dfrac{25}{2n}$ giờ là $20\,(3n+5) \cdot \dfrac{25}{2n} = \dfrac{250\,(3n+5)}{n} = 750 + \dfrac{1250}{n}$ nghìn đồng.

+ Mặt khác chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng nên chi phí để bảo

trì, vận hành n máy trong mỗi lần in là $50n$ nghìn đồng.
Vậy tổng chi phí là $750+\dfrac{1250}{n}+50n$ nghìn đồng
Ta tìm n để số chi phí $f(n)=750+\dfrac{1250}{n}+50n$ là ít nhất với $0<n\leq 8$, $n\in\mathbb{N}$.
$f'(n)=-\dfrac{1250}{n^2}+50$; $f'(n)=0\Leftrightarrow n=5$.
Bảng biến thiên

n	0		5		8
$f'(n)$		$-$	0	$+$	
$f(n)$	$+\infty$	$\searrow$	1250	$\nearrow$	$\dfrac{5225}{4}$

Cách khác: Sử dụng MODE / 7 với START: 0, END: 8 và STEP: 1 ta được
$f(n)=750+\dfrac{1250}{n}+50n$ nhỏ nhất khi $n=5$.
Vậy để thu được lãi nhiều nhất xưởng in phải sử dụng 5 máy.
Chọn đáp án (C) □

Câu 43. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0{,}025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm đó.

A. 10 và 100. **B**. 20 và 100. **C**. 20 và 120. **D**. 10 và 120.

Lời giải.

Ta có $G(x)=0{,}025x^2(30-x)=-0{,}025x^3+0{,}75x^2$ (với $x>0$).
Khi đó $G'(x)=-0{,}075x^2+1{,}5x$.

$$G'(x)=0\Leftrightarrow -0{,}075x^2+1{,}5x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=20.\end{array}\right.$$

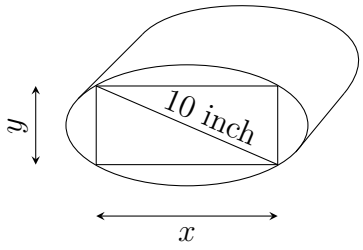
Bảng biến thiên

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biên thiên ta thấy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg và độ giảm huyết áp đó là 100.
Chọn đáp án (B) □

Câu 44.

Trong lĩnh vực xây dựng, độ bền d của một thanh xà bằng gỗ có dạng một khối trụ (được cắt ra từ một khúc gỗ, với các kích thước như hình vẽ bên dưới; biết 1 inch bằng 2,54 cm) được tính theo công thức $d = 13{,}8xy^2$. Giá trị gần đúng của x sao cho thanh xà có độ bền cao nhất là



A. 8,33 inch. **B**. 4,81 inch. **C**. 5,77 inch. **D**. 3,33 inch.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 = 10^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2$ $(0 < x < 10)$

$d = 13{,}8xy^2 = 13{,}8x(100 - x^2)$.

Xét hàm số $f(x) = x(100 - x^2)$, $0 < x < 10$

$f'(x) = 100 - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{10}{\sqrt{3}}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2000}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Do đó thanh xà gỗ có độ bền cao nhất khi $x = \dfrac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77$ inch.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Ông Kiệt có 50 phòng trọ dùng để cho thuê, biết rằng nếu giá cho thuê mỗi phòng là 1 triệu đồng/tháng thì tất cả các phòng đều được thuê và mỗi lần giá thuê phòng tăng thêm 50 nghìn đồng/phòng/tháng thì số phòng còn trống sẽ tăng thêm một phòng sau mỗi lần tăng giá. Hỏi để có doanh thu cao nhất thì ông Kiệt nên cho thuê mỗi phòng/tháng với giá bao nhiêu?

A. 1,20 triệu đồng. **B**. 1,75 triệu đồng. **C**. 2,25 triệu đồng. **D**. 1,50 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x là số phòng còn trống ($x \in \mathbb{N}$, $x \leqslant 50$). Khi đó, số phòng được thuê là $50 - x$ (phòng).

Giá cho thuê của mỗi phòng/tháng là $1 + \dfrac{1}{20}x$ (triệu đồng).

Số tiền ông Kiệt thu được hàng tháng là:

$y = f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{20}x\right)(50 - x) = -\dfrac{1}{20}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 50$ (triệu đồng).

Ta tìm giá trị lớn nhất của y trên đoạn $[0; 50]$.

$y' = -\dfrac{1}{10}x + \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 15$.

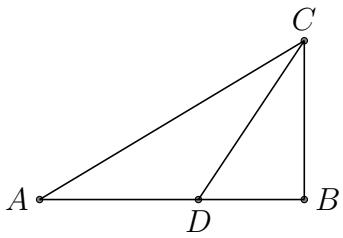
$f(0) = 50$, $f(50) = 0$, $f(15) = 61{,}25$.

Như vậy để có doanh thu cao nhất là 61,25 (triệu/tháng), ông Kiệt phải cho thuê phòng với giá 1,75 triệu đồng/phòng/tháng.

Chọn đáp án B □

Câu 46.

Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển bằng khoảng cách từ đảo C đến vị trí B và bằng 10 km; khoảng cách từ khách sạn A đến vị trí B là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy đến đảo C hoặc đi đường bộ đến vị trí D rồi đi đường thủy đến đảo C (như hình vẽ). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu km để kinh phí nhỏ nhất?



A. 34,5 km. **B**. 36 km. **C**. 32,5 km. **D**. 28,5 km.

Lời giải.

• Đặt $DB = x$ km. Để tiết kiệm chi phí thì ta cần $0 \le x \le 40$. Khi đó:

+/ Chi phí đi đường bộ là $(40 - x) \cdot 3$ USD.

+/ $DC = \sqrt{x^2 + 100}$ km $\Rightarrow$ Chi phí đường thủy là $\sqrt{x^2 + 100} \cdot 5$ USD.

+/ Tổng chi phí là $(40 - x) \cdot 3 + \sqrt{x^2 + 100} \cdot 5$ USD.

• Xét hàm $f(x) = (40 - x) \cdot 3 + \sqrt{x^2 + 100} \cdot 5$, $0 \le x \le 40$.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 40]$.

$$f'(x) = -3 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 100}}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 100} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 9x^2 + 900 = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7{,}5.$$

Ta có $f(0) = 170$, $f(40) = 50\sqrt{17}$, $f(7{,}5) = 160$.

Vậy $\min\limits_{[0;40]} f(x) = 160 = f(7{,}5)$.

• Chi phí nhỏ nhất khi $x = 7{,}5$ km, tức là phải đi bộ quãng đường dài $40 - x = 32{,}5$ km.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $f(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$, trong đó x (miligam) là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Khi đó liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là

A. 20 miligam. **B**. 10 miligam. **C**. 15 miligam. **D**. 30 miligam.

Lời giải.

Điều kiện: $0 \le x \le 30$.

Ta có $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$. Do đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Mà $f(0) = 0; f(20) = 100; f(30) = 0$.

Vậy huyết áp giảm nhiều nhất khi bệnh nhân được tiêm 20 miligam thuốc.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi $C(x) = 0.0001x^2 - 0.2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ là thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

A. 20.000 đ. **B**. 15.000 đ. **C**. 10.000 đ. **D**. 22.000 đ.

Lời giải.

$M(x)=\dfrac{T(x)}{x}=\dfrac{0.001x^2-2x+100000+4x}{x}=0.001x+2+\dfrac{100000}{x}$.

$M'(x)=0.001-\dfrac{100000}{x^2}$.

Chi phí đạt được thấp nhất khi $M'(x)=0$ hay $x=10000$.

Khi đó chi phí cần tìm là: $0.001x+2+\dfrac{100000}{x}=22000$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Thầy Tâm cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Khi đó, kích thước của hồ nước như thế nào để chi phí thuê nhân công mà thầy Tâm phải trả thấp nhất?

A. Chiều dài 20 m, chiều rộng 15 m và chiều cao $\dfrac{20}{3}$ m.

B. Chiều dài 20 m, chiều rộng 10 m và chiều cao $\dfrac{5}{6}$ m.

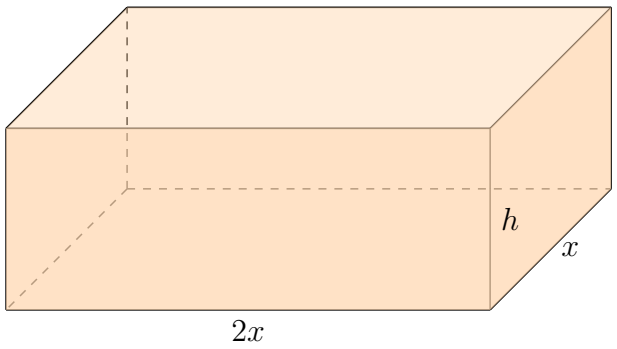
C. Chiều dài 10 m, chiều rộng 5 m và chiều cao $\dfrac{10}{3}$ m.

D. Chiều dài 30 m, chiều rộng 15 m và chiều cao $\dfrac{10}{27}$ m.

Lời giải.

Giả sử thầy Tâm xây cái hồ dạng khối hộp chữ nhật không nắp như hình vẽ bên. Do khối hộp chữ nhật có thể tích là $\dfrac{500}{3}$ m^3 nên ta có

$$V=2x^2h=\frac{500}{3}\Rightarrow h=\frac{250}{3x^2}.$$



Vì giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2 và do xây bốn mặt xung quanh và đáy nên số tiền phải trả cho nhân công để xây xong cái hồ là:

$T=(2\cdot 2xh+2\cdot xh+2x^2)\cdot 500000=500000\left(6x\cdot\dfrac{250}{3x^2}+2x^2\right)=500000\left(\dfrac{500}{x}+2x^2\right)$.

Ta khảo sát hàm số $T=500000\left(\dfrac{500}{x}+2x^2\right)$ với $x>0$.

Ta có $T'=500000\left(-\dfrac{500}{x^2}+4x\right)$; $T'=0\Leftrightarrow 500000\left(-\dfrac{500}{x^2}+4x\right)=0\Leftrightarrow x=5$.

Bảng biến thiên:

x	0		5		$+\infty$
$T'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$T(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$T(5)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số tiền T phải trả cho nhân công thấp nhất khi $x=5$.

Vậy kích thước của hồ nước phải xây là chiều dài 10 m, chiều rộng 5 m và chiều cao $\dfrac{10}{3}$ m.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}$ m^3. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Người ta xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất và chi phí đó là

A. 74 triệu đồng. **B**. 75 triệu đồng. **C**. 76 triệu đồng. **D**. 77 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x, y, z $(x, y, z > 0)$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hồ nước.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} x = 2y \\ V = xyz = \dfrac{500}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = \dfrac{250}{3y^2}. \end{cases}$

Diện tích xây dựng của hồ nước là $S = xy + 2xz + 2yz = 2y^2 + 6yz = 2y^2 + \dfrac{500}{y}$.

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(y) = 2y^2 + \dfrac{500}{y}$ với $y > 0$.

Ta có $f'(y) = 4y - \dfrac{500}{y^2} = \dfrac{4\left(y^3 - 125\right)}{y^2}$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow y = 5$.

Bảng biến thiên

y	0		5		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

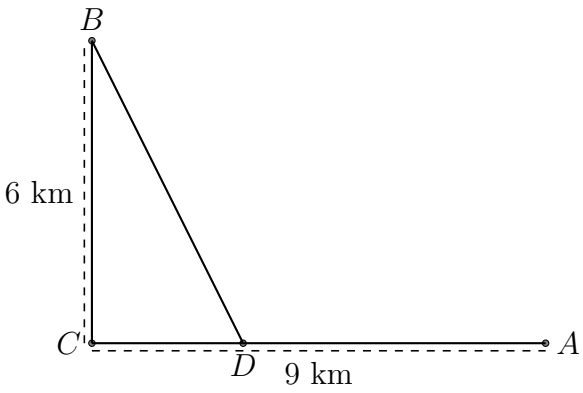
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy S nhỏ nhất khi $y = 5$.

Suy ra kích thước của hồ là $x = 10$ m; $y = 5$ m, $z = \dfrac{10}{3}$ m. Tiền thuê nhân công là 75 triệu đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51.

Một công ty muốn làm đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



A. 6 km. **B**. 6.5 km. **C**. 7 km. **D**. 7.5 km.

Lời giải.

Gọi x km là khoảng cách AD cần tìm $(0 \le x \le 9)$. Từ đó suy ra số tiền để lắp đường ống trên bờ là x (trăm triệu đồng).

Vì $AD = x$ km nên $CD = 9 - x$ km. Xét tam giác BCD vuông tại C ta có

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 36 + (9-x)^2 \Rightarrow BD = \sqrt{36 + (9-x)^2} \text{ km}$$

Từ đó suy ra số tiền cần để lắp đường ống dưới nước là $2,6 \cdot \sqrt{36 + (9-x)^2}$ (trăm triệu đồng).
Vậy tổng chi phí phải trả để xây dựng đường ống là

$$x + 2,6 \cdot \sqrt{36 + (9-x)^2} \text{ (trăm triệu đồng)}$$

Bài toán thực tế yêu cầu chi phí lắp đặt ống dẫn phải thấp nhất, do đó ta sẽ tìm $\min\limits_{x\in[0;9]} f(x)$ với $f(x) = x + 2,6 \cdot \sqrt{36 + (9-x)^2}$.
Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{2,6(9-x)}{\sqrt{36 + (9-x)^2}}$.
Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6,5$.
Tính $f(0) = \dfrac{39\sqrt{13}}{5}$; $f(9) = 24,6$; $f(6,5) = 23,4$.
Vậy $\min\limits_{x\in[0;9]} f(x) = 23,4$ tại $x = 6,5$.
Vậy $x = 6,5$ hay $AD = 6,5$ km thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 52. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu giá cho thuê mỗi căn hộ là 2 triệu đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều được thuê, và nếu tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 100 ngàn đồng mỗi tháng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu mỗi tháng để tổng thu nhập từ việc cho thuê nhà là lớn nhất?

A. 2.225.000đ. **B**. 2.250.000đ. **C**. 2.200.000đ. **D**. 2.100.000đ.

Lời giải.

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là 2 triệu $+x$ trăm ngàn (đồng) (x nguyên dương). Khi đó, số căn hộ bị bỏ trống là $2x$. Do đó, tổng số tiền (đơn vị trăm ngàn đồng) cho thuê nhà là $S = (50 - 2x)(20 + x) = -2x^2 + 10x + 1000 = -2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 1012.5 \leq 1012.5$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2.5$. Vậy giá thuê mỗi căn hộ nên là 2.250.000 đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2\,(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

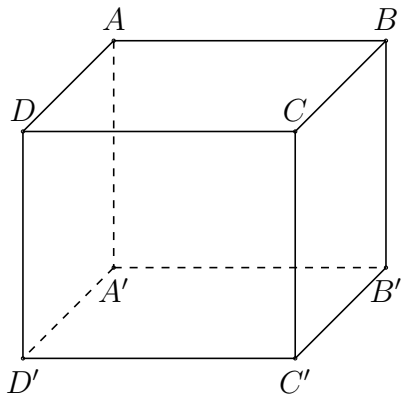
A. $x = 8$. **B**. $x = 10$. **C**. $x = 15$. **D**. $x = 7$.

Câu 54. Một người thợ muốn làm 1 chiếc thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình vuông có thể tích là 2,16 m^3. Biết giá vật liệu để làm đáy và mặt bên của thùng lần lượt là 90000 đồng/m^2 và 36000 đồng/m^2. Để làm được chiếc thùng với chi phí mua vật liệu thấp nhất người thợ phải chọn các kích thước của chiếc thùng là bao nhiêu?

A. Cạnh đáy 1,0 m và chiều cao 1,7 m. **B**. Cạnh đáy 1,5 m và chiều cao 9,6 m.
C. Cạnh đáy 1,2 m và chiều cao 1,5 m. **D**. Cạnh đáy 2,0 m và chiều cao 0,54 m.

Lời giải.

Giả sử chiếc thùng hình hộp là $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là $A'B'C'D'$.
Đặt $A'B' = x$ và $AA' = y$ $(x, y > 0)$.
Khi đó $V = x^2y = 2{,}16 \Rightarrow y = \dfrac{2{,}16}{x^2}$.
chi phí mua vật liệu đóng thùng là
$A = 4 \cdot 36000xy + 90000x^2 = \dfrac{311040}{x} + 90000x^2$
Xét hàm số $g(x) = \dfrac{311040}{x} + 90000x^2 \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-311040 + 180000x^3}{x^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}2$.
Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1{,}2$ m $\Rightarrow y = 1{,}5$ m.



Chọn đáp án C □

Câu 55. Một cửa hàng cà phê sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20 000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2 000 cốc, còn từ mức giá 20 000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1 000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18 000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

A. 29 000 đồng. **B**. 31 000 đồng. **C**. 25 000 đồng. **D**. 22 000 đồng.

Lời giải.

Gọi x là giá bán mỗi cốc cà phê.
Khi đó, số lượng cốc bán được là $2000 - \dfrac{x - 20000}{1000} \cdot 100$.
Lợi nhuận

$$f(x) = \left[2000 - \frac{x - 20000}{1000} \cdot 100\right](x - 18000) = -\frac{1}{10}x^2 + 5800x - 72000000 \geq f\left(-\frac{5800}{2 \cdot \dfrac{-1}{10}}\right) = f(29000).$$

Chọn đáp án A □

Câu 56. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng, trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là

A. 4 ngày. **B**. 10 ngày. **C**. 20 ngày. **D**. 15 ngày.

Lời giải.

Gọi x (lít) $(0 < x < 10)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.
Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.
Suy ra $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10 - x}, x \in (0; 10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.
Ta có: $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10 - x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10 - x)^2}$.
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10 - x)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \in (0; 10) \\ x = -20 \notin (0; 10) \end{array}\right.$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10 - x}, x \in (0; 10)$

x	0		4		10
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Theo BBT thì ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.
Chọn đáp án C □

Câu 57. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B**. 1 giờ. **C**. 3 giờ. **D**. 2 giờ.

Lời giải.

Với $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$, $t > 0$ ta có $c'(t) = \dfrac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$.

Cho $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2+1}{(t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t) = \dfrac{1}{2}$ khi $t = 1$.

Cách 2:

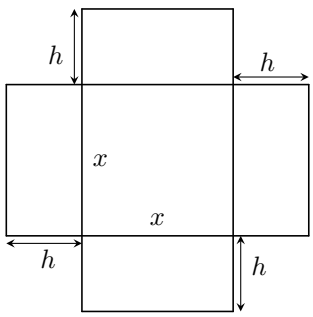
Với $t > 0$, ta có $t^2 + 1 \geq 2t$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Do đó, $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \leq \dfrac{t}{2t} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t) = \dfrac{1}{2}$ khi $t = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 58.

Một hộp không nắp làm từ một mảnh tôn có diện tích là $S(x)$ theo hình bên. Hộp có đáy là một hình vuông có cạnh x (cm), chiều cao h (cm) và thể tích là 500 cm^3. Tìm x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.



A. $x = 50$ (cm). **B**. $x = 10$ (cm).
C. $x = 100$ (cm). **D**. $x = 20$ (cm).

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta có $S(x) = x^2 + 4xh$ và $h \cdot x^2 = 500$. Suy ra

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}.$$

Ta có: $S'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$. Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$, ta được

x	$-\infty$		10		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	300	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, $\min S(x) = 300$ tại $x = 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\dfrac{2}{3}t^3 + 8t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, S (mét) là quảng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng 10 giây, vận tốc lớn nhất của vật là

A. 44 (m/s). **B**. 70 (m/s). **C**. 28 (m/s). **D**. 32 (m/s).

Lời giải.

Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật tại thời điểm t.

Ta có $v(t) = S'(t) = -2t^2 + 16t$.

$v'(t) = -4t + 16; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Bảng biến thiên

t	0		4		10
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	32	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, ta được $\max\limits_{t\in[0;10]} v(t) = v(4) = 32$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Một xưởng sản xuất cần làm 100 chiếc hộp inox bằng nhau, hình dạng là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông (hộp không có nắp), với thể tích 108 dm^3/1 hộp. Giá inox là 47.000 đồng/1 dm^2. Hãy tính toán sao cho tổng tiền chi phí cho 100 chiếc hộp là ít nhất và số tiền tối thiểu đó là bao nhiêu (nếu chỉ tính số inox vừa đủ để sản xuất 100 chiếc hộp, không có phần dư thừa, cắt bỏ)?

A. 1.692.000.000 đồng. **B**. 507.666.000 đồng. **C**. 1.015.200.000 đồng. **D**. 253.800.000 đồng.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy của hộp là x dm $\Rightarrow$ chiều cao của hộp là $\dfrac{108}{x^2}$ dm^2.

$\Rightarrow$ Số inox cần thiết để làm một hộp là $S = x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{432}{x}$ dm^2.

Tổng số tiền chi phí cho 100 chiếc hộp là $T = 47.000 \times 100 \times S = 4.700.000 \times \left(x^2 + \dfrac{432}{x}\right)$.

Ta có $T' = 4.700.000 \times \left(2x - \dfrac{432}{x^2}\right)$; $T' = 0 \Leftrightarrow x = 6$. Bảng biến thiên

x	0		6		$+\infty$
T'		$-$	0	$+$	
T	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chi phí thấp nhất là $T_{\min} = c = 507.666.000$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Doanh nghiệp X cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp X cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

A. 4. **B**. 5. **C**. 7. **D**. 6.

Lời giải.

Do máy A làm việc trong x ngày, máy B làm việc trong y ngày, hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày và phải sử dụng hai máy trong đúng 10 ngày nên ta có các điều kiện sau $\begin{cases} x + y = 10 \\ 0 < y \leqslant 6 \\ 4 \leqslant x < 10. \end{cases}$

Số tiền lãi thu được là $P = x^3 + 2x + 326y - 27y^2$.

Từ hệ điều kiện trên ta suy ra $P = x^3 + 2x + 36(10 - x) - 27(10 - x)^2 = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$.

Xét $f(x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$ với $4 \leqslant x < 10$.

$f'(x) = 3x^2 - 54x + 216 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 12 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	4		6		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1056	$\nearrow$	1100	$\searrow$	1020

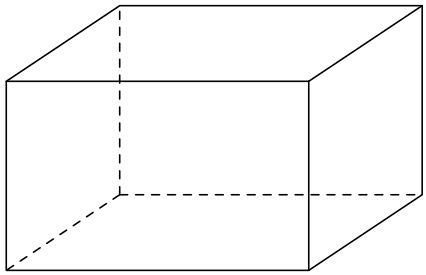
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max P = f(6) = 1100$ (triệu đồng) hay số ngày máy A cần làm việc là 6 ngày.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Một xưởng sản xuất những thùng kẽm bằng hình hộp chữ nhật không có nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x : y = 1 : 3$ và thể tích của hộp bằng 18 (dm^3). Để tốn ít vật liệu nhất thì tổng $x + y + z$ bằng

A. $\dfrac{26}{3}$. **B.** 10. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** 26.

Lời giải.



Theo đề, ta có đáy của thùng có kích thước là x và $3x$.
Chiều cao là z nên thể tích thùng là $V = 3x^2z = 18 \Rightarrow x^2z = 6$.
Để tốn ít vật liệu nhất thì diện tích sản xuất phải nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} S &= 3x^2 + z(2x + 8x) = 3x^2 + 8xz = 3x^2 + \frac{48}{x} \\ &= 3x^2 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{3x^2 \cdot \frac{24}{x} \cdot \frac{24}{x}} = 36. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3x^2 = \dfrac{24}{x} \Leftrightarrow x = 2$. Khi đó $y = 6$, $z = \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $x + y + z = 2 + 6 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{19}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 63. Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3 - \dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Một chiếc xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.
B. Một chiếc xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.
C. Một chiếc xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2.700.000 (đồng).
D. Một chiếc xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3.200.000 (đồng).

Lời giải.

Số tiền một chuyến xe buýt thu được khi chở x hành khách ($0 \leq x \leq 50$, $x \in \mathbb{N}$) là $f(x) = 20x\left(3 - \dfrac{x}{40}\right)^2$.
Áp dụng bất đẳng thức $abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ với $a, b, c > 0$, ta có

$$f(x) = 400 \cdot \frac{x}{20} \cdot \left(3 - \frac{x}{40}\right) \cdot \left(3 - \frac{x}{40}\right) \leq 400\left(\frac{3+3}{3}\right)^3 = 3.200 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{20} = 3 - \dfrac{x}{40} \Leftrightarrow x = 40$.
Chọn đáp án D □

Câu 64. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 12t^2$ với t là thời gian tính bằng giây từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (có đơn vị là mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất mà vật đạt được là bao nhiêu?

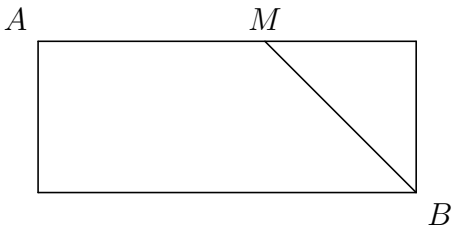
A. 48 (m/s). **B.** 24 (m/s). **C.** 60 (m/s). **D.** 72 (m/s).

Lời giải.

Vận tốc của vật theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 24t$. Yêu cầu bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -3t^2 + 24t$ trên đoạn $[0; 6]$".
Ta có $v'(t) = -6t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ và $v(0) = 0$, $v(6) = 36$, $v(4) = 48$. Vậy vận tốc lớn nhất mà vật đạt được là 48 (m/s).
Chọn đáp án A □

Câu 65. Một bể bơi hình chữ nhật rộng 50 m, dài 200 m. Một vận động viên tập luyện chạy phối hợp với bơi như sau: xuất phát từ vị trí A và chạy theo chiều dài của bổ bơi đến vị trí M và bơi từ vị trí M đến đích là điểm B như hình vẽ. Hỏi vận động viên đó về đích nhanh nhất là bao nhiêu giây? Biết rằng tốc độ bơi là 1,5 m/s và tốc độ chạy là 4,5 m/s.

A. 80 s. **B**. 76 s. **C**. 72 s. **D**. 75 s.



Lời giải.

Đặt $AM = x$ (m), điều kiện $x \in [0; 200]$.
Thời gian vận động viên (VĐV) chạy là $\dfrac{AM}{4{,}5} = \dfrac{x}{4{,}5}$ (s).
Thời gian VĐV này bơi là $\dfrac{MB}{1{,}5} = \dfrac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{1{,}5}$ (s).
Tổng thời gian di chuyển của VĐV là $f(x) = \dfrac{x}{4{,}5} + \dfrac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{1{,}5}$ (s).
Ta có $f'(x) = \dfrac{2x - 400}{3\sqrt{x^2 - 400x + 42500}} + \dfrac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow x = 200 - \dfrac{25\sqrt{2}}{2}$. Lập bảng biến thiên ta được thời gian nhanh nhất của VĐV là $f\left(200 - \dfrac{25\sqrt{2}}{2}\right) \approx 76$ (s).
Chọn đáp án B □

Câu 66. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

A. $t = 1$. **B**. $t = 4$. **C**. $t = 2$. **D**. $t = 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$ trên $[0; 5]$, ta có:
$v'(t) = -4t^3 + 16t, v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 & \text{(loại)} \\ t = 2 & \text{(nhận)} \\ t = -2 & \text{(loại)} \end{cases}$.
$v(0) = 500, v(5) = 75, v(2) = 516$.
Vậy vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ s.
Chọn đáp án C □

Câu 67. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3.000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1.000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 43.000 đồng. **B**. 39.000 đồng. **C**. 42.000 đồng. **D**. 40.000 đồng.

Lời giải.

Gọi x là giá bán mới khi tăng giá ($x > 30.000$, đơn vị đồng).

Lãi khi chưa tăng giá trong mỗi tháng là $(30.000 - 18.000)3.000 = 36.000.000$.

Số chiếc khăn bán được khi đã tăng giá là $3000 - \dfrac{x - 30.000}{1.000} \cdot 100 = \dfrac{60.000 - x}{10}$.

Lãi khi đã tăng giá trong mỗi tháng là $(x - 18.000) \cdot \dfrac{60.000 - x}{10}$.

Để đạt được lợi nhuận lớn nhất thì $f(x) = (x - 18.000) \cdot \dfrac{60.000 - x}{10}$ đạt giá trị lớn nhất (lớn hơn 36.000.000) với $30.000 < x < 60.000$.

Ta có $f(x) = \dfrac{1}{10} \cdot (x - 18.000)(60.000 - x) \le \dfrac{1}{10} \left(\dfrac{x - 18.000 + 60.000 - x}{2} \right)^2 = 36.100.000$.

Vậy $\max f(x) = 36.100.000$ khi $x - 18.000 = 60.000 - x \Leftrightarrow x = 39.000$.

Vậy cơ sở cần bán với giá 39.000 đồng mỗi chiếc.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

A. 100 mg. **B**. 20 mg. **C**. 30 mg. **D**. 0 mg.

Lời giải.

Ta có $G(x) = 0.75x^2 - 0.025x^3$, với $0 < x < 30$.

$\Rightarrow G'(x) = 1.5x - 0.075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		30
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	100	↘	0

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

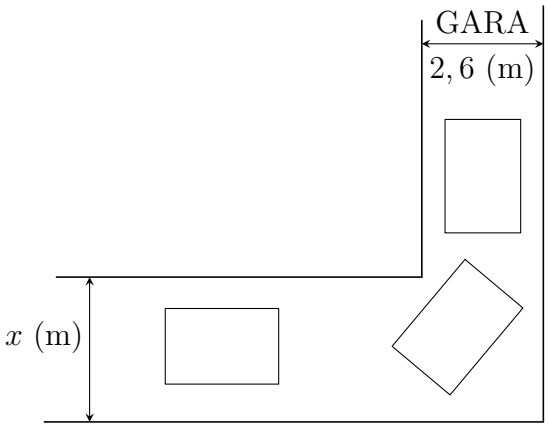
Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Hình vẽ dưới đây mô tả đoạn đường đi vào gara ô tô của nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng gara có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước ô tô là 5 m $\times$1,9 m (chiều dài $\times$ chiều rộng).

Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô, người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 5 m, chiều rộng là 1,9 m. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau để ô tô có thể đi vào gara được? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và không bị biến dạng).

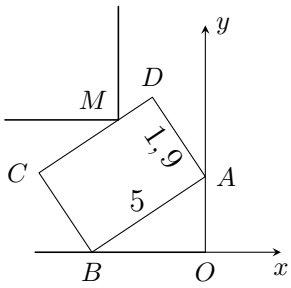
A. $x = 3{,}7$ m. **B**. $x = 4{,}27$ m.

C. $x = 2{,}6$ m. **D**. $x = 3{,}55$ m.



Lời giải.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó $M(-2{,}6; m)$.



Gọi $B(-a;0) \Rightarrow A(0;\sqrt{25-a^2})$ (với $0 < a < 5$), suy ra phương trình của đường thẳng AB là

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} = 1.$$

Vì $CD \parallel AB$ nên CD: $\dfrac{x}{-a} + \dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}} - k = 0$.

Do khoảng cách giữa AB và CD là chiều rộng của ô tô nên

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1{,}9 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Để ô tô vào được gara thì M và O nằm khác phía so với đường thẳng CD, do đó

$$\frac{2{,}6}{a} + \frac{m}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9{,}5}{a\sqrt{25-a^2}} \le 0 \Leftrightarrow m \ge \sqrt{25-a^2} + \frac{9{,}5}{a} - \frac{2{,}6\sqrt{25-a^2}}{a}.$$

Xét hàm số $f(a) = \sqrt{25-a^2} + \dfrac{9{,}5}{a} - \dfrac{2{,}6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên khoảng $(0;5)$, ta có

$$f'(a) = -\frac{a}{\sqrt{25-a^2}} - \frac{9{,}5}{a^2} + \frac{65}{a^2\sqrt{25-a^2}}.$$

Do đó $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 3$, suy ra bảng biến thiên của $f(a)$

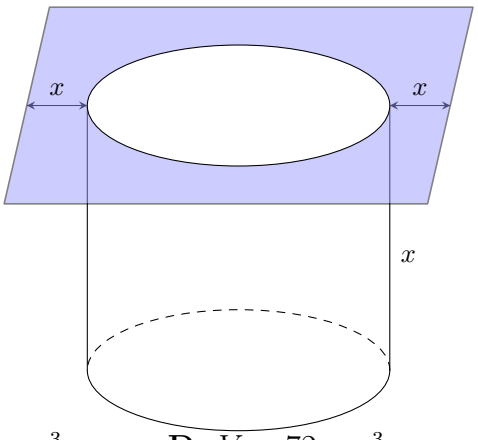
a	0		3		5
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{37}{10}$	$\searrow$	$\dfrac{19}{10}$

Do vậy $m \ge f(a)$ với mọi $0 < a < 5 \Leftrightarrow m \ge 3{,}7$.

Chọn đáp án A □

Câu 70.

Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích 81 m^2 người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là x m. Giả sử chiều sâu của ao cũng là x m. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V = 36\pi$ m^3. **B**. $V = 27\pi$ m^3. **C**. $V = 13{,}5\pi$ m^3. **D**. $V = 72\pi$ m^3.

Lời giải.

Gọi cạnh hình vuông là a. Diện tích hình vuông là $a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$.

Bán kính hình tròn đáy là: $R = \dfrac{9}{2} - x$.

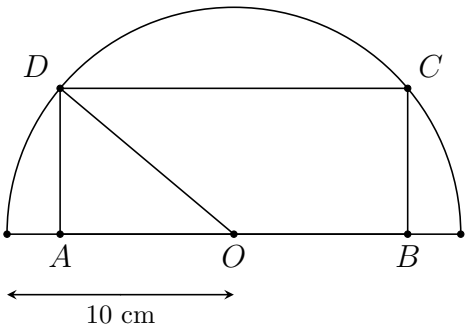
Thể tích của ao là

$$V = x \cdot \pi \left(\frac{9}{2} - x\right)^2 = \frac{\pi}{16} 4x \cdot (9-2x)^2 \le \frac{\pi}{16} \left(\frac{4x + 9 - 2x + 9 - 2x}{3}\right)^3 = \frac{27\pi}{2} = 13{,}5\pi \text{ m}^3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4x = 9 - 2x \Leftrightarrow x = 1{,}5$ m.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10 cm (hình vẽ)



A. 160 cm^2. **B**. 100 cm^2. **C**. 80 cm^2. **D**. 200 cm^2.

Lời giải.

Đặt $OA = x$ $(0 < x < 10)$. Khi đó $DA = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2OA \cdot AD = 2x\sqrt{100 - x^2} \le x^2 + 100 - x^2 = 100 \text{ cm}^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Một công ty bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ

100000 đồng một tháng (theo quy định trong hợp đồng) thì sẽ có 1 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

A. 3900000 đồng. **B**. 3700000 đồng. **C**. 3500000 đồng. **D**. 4000000 đồng.

Lời giải.

Gọi x (đồng/tháng) là số tiền tăng thêm mỗi lần ($x \geq 0$).
Khi đó tổng số tiền công ty thu được là:

$$\begin{aligned} T(x) &= (3000000+x)\left(40-\frac{x}{100000}\right) \\ &= 120000000+10x-\frac{x^2}{100000} \\ \Rightarrow\ & T'(x)=10-\frac{x}{50000}=0 \Leftrightarrow x=500000. \end{aligned}$$

Vậy $\max\limits_{x\geq 0} T(x)=T(500000)=122500000$. Vậy giá thuê mỗi căn hộ là 3500000 đồng.
Chọn đáp án C □

Câu 73. Một người thả một lượng bèo chiếm 2% diện tích mặt hồ. Giả sử tỉ lệ tăng trưởng của bèo hàng ngày là 20%. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì bèo phủ kín mặt hồ?

A. 23. **B**. 22. **C**. 21. **D**. 20.

Lời giải.

Gọi S là diện tích mặt hồ. Khi đó, lượng bèo ban đầu trên mặt hồ sẽ là $A=0{,}02\cdot S$.
Sau n ngày thì lượng bèo tăng trưởng phủ kín mặt hồ nên

$$0{,}02\cdot S\,(1+0{,}2)^n=S \Leftrightarrow n=\log_{1{,}2}\frac{1}{0{,}02}\approx 21{,}4567.$$

Vậy ít nhất 22 ngày thì bèo phủ kín mặt hồ.
Chọn đáp án B □

Câu 74. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3-3t^2+9t+2$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t=1\,\text{s}$. **B**. $t=3\,\text{s}$. **C**. $t=2\,\text{s}$. **D**. $t=6\,\text{s}$.

Lời giải.

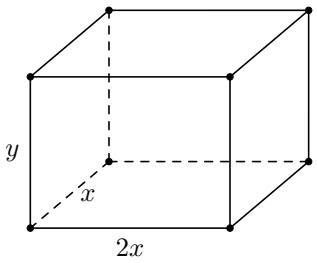
Vận tốc tức thời $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+9=3(t-1)^2+6\geq 6$.
Vậy vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 tại thời điểm $t=1\,\text{s}$.
Chọn đáp án A □

Câu 75. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}$ m^3. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700.000 đồng/m^2. Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

A. 120 triệu đồng. **B**. 105 triệu đồng. **C**. 115 triệu đồng. **D**. 110 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y>0$).



Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là

$$V = 2x^2y = \frac{500}{3} \Rightarrow y = \frac{250}{3x^2}.$$

Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất. Tổng diện tích các mặt của bể cá

$$S = 2xy + 2 \cdot 2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2.$$

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{500}{x} + 2x^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$\Rightarrow S'(x) = -\dfrac{500}{x^2} + 4x.$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -500 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$

Bảng biến thiên

x	0		5		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.

Khi đó, chi phí thuê nhân công là $150 \cdot 700000 = 105$ triệu đồng.

Vậy chi phí thuê nhân công ít nhất là 105 triệu đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Sau khi phát hiện dịch sốt xuất huyết, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3,\ t = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.

A. Ngày thứ 5. **B**. Ngày thứ 19. **C**. Ngày thứ 16. **D**. Ngày thứ 15.

Lời giải.

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 90t, f''(t) = -6t + 90$. Ta có bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$	0	$\nearrow$	675	$\searrow$	375

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ngày thứ 15 thì tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. D	5. C	6. A	7. B	8. B	9. A	10. C
11. B	12. B	13. C	14. D	15. A	16. D	17. A	18. A	19. D	20. A
21. B	22. B	23. C	24. A	25. B	26. A	27. B	28. A	29. B	30. B
31. D	32. A	33. C	34. B	35. A	36. C	37. B	38. B	39. B	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. B	46. C	47. A	48. D	49. C	50. B
51. B	52. B	53. B	54. C	55. A	56. C	57. B	58. B	59. D	60. B
61. D	62. C	63. D	64. A	65. B	66. C	67. B	68. B	69. A	70. C
71. B	72. C	73. B	74. A	75. B	76. D				

BÀI 4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Đường tiệm cận ngang

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0; \lim_{x\to-\infty} = y_0.$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) = 1.$ □

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}}{x-1}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$ vì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}}{x} = -1$$ □

2 Đường tiệm cận đứng

Định nghĩa 2. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

- ☑ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$
- ☑ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
- ☑ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$
- ☑ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

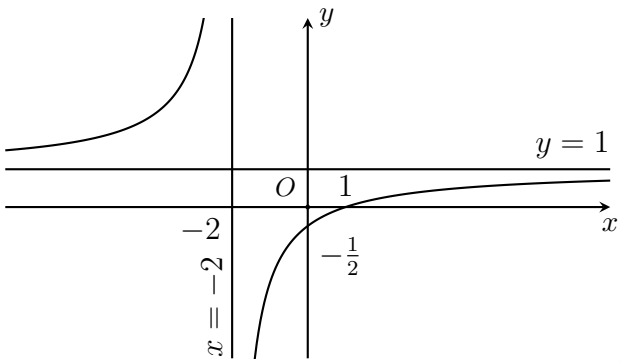
Ví dụ 3. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x-1}{x+2}=+\infty$) nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

Vì $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

Đồ thị của hàm số được cho bởi hình bên



□

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x-3}$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to \left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{2x^2+x+1}{2x-3}=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to \left(\frac{3}{2}\right)^-}\dfrac{2x^2+x+1}{2x-3}=-\infty$) nên đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. □

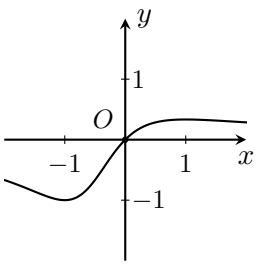
⚠ *Tiệm cận có thể cắt đồ thị hàm số.*

Ví dụ 5. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2+x+1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

Ta thấy rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;0)\Rightarrow$ tiệm cận ngang $y=0$ cắt đồ thị tại điểm $A(0;0)$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số

① $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. ② $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$. ③ $y=\dfrac{x-2}{x^2+1}$. ④ $y=\dfrac{x^2-1}{2-x^2}$.

Lời giải.

① $y=2$. ② $y=3$. ③ $y=0$. ④ $y=-1$.

□

Bài 2. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số

① $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$. ② $y=\dfrac{4x-2}{3x+2}$. ③ $y=\dfrac{x+2}{x}$. ④ $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$.

Lời giải.

① $x=1$. ② $x=-\dfrac{2}{3}$. ③ $x=0$. ④ $x=-2$.

□

Bài 3. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang (nếu có) của đồ thị các hàm số

① $y=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$.
② $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-4}$.
③ $y=\dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2-4}$.
④ $y=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-2x-3}$.

Lời giải.

① $y=0, x=\pm 1$. ② $y=1, x=\pm 2$. ③ $y=-1, x=-2$. ④ $y=2, x=-1$.

□

Bài 4. Tìm các đường tiệm cận ngang (nếu có) của đồ thị các hàm số

① $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x-4}$.
② $y=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-4x+7}$.
③ $y=\sqrt{x^2+1}-x$.
④ $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}=1.$

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x-4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}=-1.$

Suy ra $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

② $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-4x+7}} = -3$ nên $y=-3$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-4x+7}} = 3$ nên $y=3$ là tiệm cận ngang.

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang.

④ $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = 3.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = 3.$

Suy ra $y=3$ là tiệm cận ngang.

□

Bài 5. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị các hàm số sau có hai đường tiệm cận.

① $y = \dfrac{x+m}{x-1}$.

② $y = \dfrac{x+m^2}{x+4}$.

Lời giải.

① Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (c\neq 0)$ có hai đường tiệm cận khi và chỉ khi $ad-bc\neq 0$.
Do đó ta có $-11-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$. Vậy $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

② Ta có $4-m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$. Vậy $m\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

□

Bài 6. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị các hàm số sau có ba đường tiệm cận.

① $y = \dfrac{2}{x^2+mx+m}$.

② $y = \dfrac{x-2}{x^2+mx+m}$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì $x^2+mx+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2-4m>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

② Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì $x^2+mx+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\begin{cases}\Delta>0\\ 4+2m+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4m>0\\ m\neq -\dfrac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}.$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2+2(m-1)x+m^2-2=0$ có đúng hai nghiệm khác 1. Ta có $\Delta'=(m-1)^2-(m^2-2)=3-2m$.

Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases}3-2m>0\\1^2+2(m-1)+m^2-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\m\neq 1, m\neq -3\end{cases}$. □

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{(m-1)x^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

Lời giải.

- Nếu $m=1$ thì $y=x-2$ nên lúc này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- Xét $m<1$: Hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-m}};\dfrac{1}{\sqrt{1-m}}\right)$ nên trong trường hợp này đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận ngang.
- Xét $m>1$: Hàm số có tập xác định là $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{1-m}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-m}};+\infty\right)$ và tính các giới hạn sau:

  + $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{(m-1)x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{m-1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m-1}}$;

  + $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{(m-1)x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{m-1+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{m-1}}$.

  Do đó, trường hợp này đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

□

Bài 9. Giả sử đường thẳng $d: x=a$, $a>0$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại một điểm duy nhất, biết khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 1. Tìm tọa độ điểm đó.

Lời giải.

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)$. Đồ thị có tiệm cận đứng $\Delta: x=1$.

Ta có $d(M,\Delta)=1\Leftrightarrow\dfrac{|a-1|}{1}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.\Rightarrow a=2>0$.

Với $a=2\Rightarrow x_0=2\Rightarrow y_0=5$. □

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)x+1}{2x+m}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C), O là gốc tọa độ và $A(4;-6)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm O,I,A thẳng hàng.

Lời giải.

Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là $I\left(-\dfrac{m}{2};\dfrac{m-1}{2}\right)$.

Xét $\overrightarrow{OI}=k\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{m}{2}=4k\\ \dfrac{m-1}{2}=-6k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{4}\\ m=-2\end{cases}$.

Vậy, với $m=-2$ thì ba điểm O,I,A thẳng hàng. □

Bài 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Chứng minh rằng với mọi điểm $M\in(C)$ ta luôn có tiếp tuyến của (C) tại điểm M tạo với hai đường tiệm cận của nó một tam giác có diện tích không đổi.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right),x_0\neq 1$. Các đường tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị có phương trình lần lượt là $y=1,x=1$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M có dạng: $y=-\dfrac{3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến giao với đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị (C) lần lượt là $A\left(2x_0-1;1\right)$ và $B\left(1;\dfrac{x_0+5}{x_0-1}\right)$. Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(1;1)$.

Diện tích tam giác IAB là $S=\dfrac{1}{2}IA\cdot IB=\dfrac{1}{2}|2x_0-2|\cdot\dfrac{6}{|x_0-1|}=6$. Bài toán được chứng minh. □

Bài 12. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của đồ thị đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_M;\dfrac{2x_M+1}{x_M-3}\right),x_M\neq 3$. Các đường tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị có phương trình lần lượt là $y=2,x=3$.

Tổng khoảng cách từ điểm M đến hai tiệm cận là

$d=|x_M-3|+\left|\dfrac{2x_M+1}{x_M-3}-2\right|=|x_M-3|+\dfrac{7}{|x_M-3|}\geq 2\sqrt{7}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_M-3|=\dfrac{7}{|x_M-3|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=3+\sqrt{7}\\ x_M=3-\sqrt{7}\end{array}\right.$

Vậy, tọa độ các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M\left(3+\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right)$ và $M\left(3-\sqrt{7};2-\sqrt{7}\right)$. □

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ là

A. $y=2; x=1$. **B.** $y=1; x=1$. **C.** $y=-2; x=1$. **D.** $y=1; x=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$ suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do $\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)=3>0$; $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0, x-1>0\,\forall x>1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên là:

A. $x=-4$. **B.** $y=2$. **C.** $x=4$. **D.** $y=\dfrac{-3}{4}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x+4}=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{x+4}=2$.

Vậy $y=2$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

A. $y=2$. **B.** $x=2$. **C.** $y=1$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$.

Do đó tiệm cận ngang của đồ thị đã cho là $y=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y=5$. **B.** $y=0$. **C.** $x=1$. **D.** $y=1$.

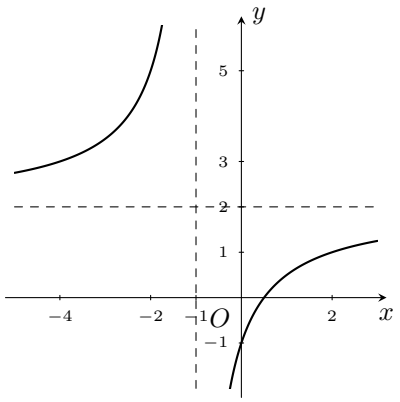
Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x-1}=1\Rightarrow$ đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Chọn đáp án B □

Câu 5. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số

trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

B. $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

D. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-1 \Rightarrow$ loại đáp án C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\,(0;-1) \Rightarrow$ loại đáp án B và D.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$.

A. $y=-2$. **B**. $x=-1$. **C**. $x=-2$. **D**. $y=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x}\to\pm\infty\dfrac{2-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-2}{1+\dfrac{1}{x}}=-2 \Rightarrow y=-2$ là đường tiệm cận ngang của hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}=0$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4\,(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có tất cả hai đường tiệm cận. Chọn đáp án A.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng -1.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng 0.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có đường tiệm cận.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2017x-2018}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

A. $x=2017$. **B**. $x=-1$. **C**. $y=-1$. **D**. $y=2017$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{2017x-2018}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{2017x-2018}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$.

A. $x=-1$. **B**. $x=-2$. **C**. $y=2$. **D**. $y=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-2x}{x+1}=-2\Rightarrow y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ là

A. $x=-2$. **B**. $x=-1$. **C**. $y=-2$. **D**. $y=3$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq-\dfrac{d}{c}\right)$ nhận đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ nhận đường thẳng $y=-2$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A. $x=1$. **B**. $y=5$. **C**. $x=0$. **D**. $y=0$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x-1}=0\end{cases}\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x=1$ và $y=2$. **B**. $x=2$ và $y=1$. **C**. $x=1$ và $y=-3$. **D**. $x=-1$ và $y=2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm nhất biến nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$, đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$?

A. $y=2$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}$. **C.** $y=4$. **D.** $y=-2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2$ nên đường thẳng $y=-2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ là

A. $x=2$. **B.** $y=2$. **C.** $x=3$. **D.** $y=3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-5}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x-5}{x-2}=-\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án A □

Câu 16.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	‖ -1	↗	2	↘	-2
			‖ $-\infty$				

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-2$ và tiệm cận đứng $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$ lần lượt là

A. $x=-2$ và $y=-3$. **B.** $y=-2$ và $x=-3$. **C.** $x=-2$ và $y=1$. **D.** $x=2$ và $y=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-3x}{x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1-3x}{x+2}=-\infty$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x}{x+2}=-3$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y=\log_\pi(4x^2+1)$. **B.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **C.** $y=\log_{\frac{1}{3}}x$. **D.** $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$.

Lời giải.

Ta có: $0<\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1\Rightarrow$ hàm số $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m\neq0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A. $2x+y=0$. **B.** $x-2y=0$. **C.** $y=2x$. **D.** $x+2y=0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=m \Rightarrow$ đường thẳng $y=m$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to(2m)^+} y=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=2m$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $(2m;m)$ thuộc đường thẳng $x=2y$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{7-2x}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng?

A. $x=-3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{7-2x}{x-2}=+\infty$, nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên là $x=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{5x}{2-x}$. **C.** $y=x-2+\dfrac{1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{5x}{2-x}$ nhận $x=2$ làm tiệm cận đứng nên chọn B.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. $x=1;\ y=-2$. **B.** $x=1;\ y=2$. **C.** $x=1;\ y=0$. **D.** $x=-1;\ y=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x=1$ và $y=2$. **B.** $x=2$ và $y=1$. **C.** $x=1$ và $y=-3$. **D.** $x=-1$ và $y=2$.

Lời giải.

☑ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2$ nên $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

☑ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng

A. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{2019}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+2018}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x+12}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x}{x+12}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{-12\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-12)^+}\dfrac{x}{x+12}=+\infty$ nên $x=-12$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2019}{x+2}$?

A. $x = 2$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = 3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+2019}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+\dfrac{2019}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 3$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng -1.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ bằng 0.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-7}{x+2}$ là

A. $(2;-3)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-3;2)$.

Lời giải.

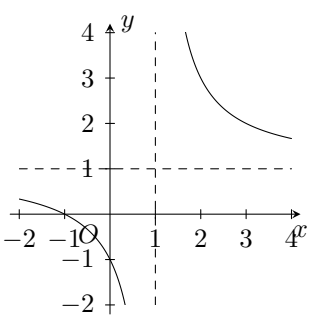
Phương pháp: Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là $\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.

Cách giải: Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-7}{x+2}$ là $(-2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 28.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây



A. $y = -x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$ nên loại phương án A, C, D. Vậy chọn B.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị (C) có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị (C) có tiệm cận.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3x-1}{x-3} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3x-1}{x-3} = -\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}} = 3$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Tính số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}$.

Ta có: $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2}$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$

$\Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+2}{x-2} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	2	↘	1	↗	5	↘	
			$-\infty$				$-\infty$

Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B**. 2 . **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị của hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị của hàm số đã cho có một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị của hàm số đã cho có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

D. Đồ thị của hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Lời giải.

- Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.
- Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x + 1}$.

B. $y = x^4 - x^2 - 2$.

C. $y = \dfrac{2 - x}{x}$.

D. $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2 - x}{x} = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hàm số $y = \dfrac{5x + 5}{x^2 - 1}$. Gọi số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là m, số tiệm cận ngang là n. Tính $S = m + n$.

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Tính các giới hạn ta sẽ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$, tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 2017$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Câu 37. Hàm số nào sau đây có đường tiệm cận ngang $y = -2$.

A. $y = 2 + \dfrac{1}{x}$. **B**. $y = \dfrac{2x}{x + 2}$. **C**. $y = \dfrac{1 - 2x}{x + 3}$. **D**. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$.

Câu 38. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x + 4}{x + 2}$?

A. $y = 2$. **B**. $x = 3$. **C**. $x = 2$. **D**. $y = 3$.

Câu 39. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x + 1}$?

A. $y = 1$. **B**. $x = 0$. **C**. $x = -1$. **D**. $y = 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$. Suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{3x+2}$có đường tiệm cận ngang là.

A. $x = 3$. **B.** $y = 1$. **C.** $y = 3$. **D.** $x = 1$.

Câu 41. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt các các đường nào sau đây?

A. $x = -1;\ y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $x = -1;\ y = 2$. **C.** $x = 1;\ y = 2$. **D.** $x = 2;\ y = -1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{2x-1}$.

A. $y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $y = \dfrac{3}{2}$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = \dfrac{1}{3}$.

Câu 43. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-6}{x+1}$. Phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là

A. $x = -1, y = 2$. **B.** $x = 1, y = 3$. **C.** $x = -1, y = 3$. **D.** $x = 1, y = -2$.

Câu 44. Tìm phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-4}$?

A. $x = 4$. **B.** $y = -\dfrac{3}{4}$. **C.** $y = 1$. **D.** $x = -3$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiện cận ngang là đường thẳng $x = 1$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y = 1$.

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{4x-3}{x-3}$ có đồ thị (C). Số đường tiệm cận của đồ thị (C) là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 47. Cho hàm số $\dfrac{x+1}{2x-3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cân.

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{3x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là:

A. $y = 1$. **B.** $x = 1$. **C.** $y = 3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-1}{3x+2} = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có phương trình là

A. $y=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $y=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 50.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Khi đó đồ thị hàm số $y=f(x)$

A. có hai đường tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=-4$.

B. có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-4$.

C. có hai đường tiệm cận ngang là $x=2$ và $x=-4$.

D. có hai đường tiệm cận đứng là $y=2$ và $y=-4$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-4	↘	-7	↗	2

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} y=-4$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y=2$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận đứng là $y=0$.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận ngang là trục hoành.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=0$ (trục hoành).

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x+3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $y=-3$. **C.** $x=2$. **D.** $y=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x-5}{x+3}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ là

A. $y=-1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $y=3$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x-2}{x+1}=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 2 \Rightarrow$ Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

B. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

D. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-\sqrt{2}}$. Các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình lần lượt là

A. $x = \sqrt{2}, y = 1$. **B**. $x = 4, y = 1$. **C**. $x = 1, y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D**. $x = 2, y = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{2}\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$. Suy ra $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-} y = -\infty$.

Suy ra $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình lần lượt là $x = \sqrt{2}, y = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{5x^2+x+1}}{\sqrt{2x-1}-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\sqrt{5}$ do đó $y = -\sqrt{5}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị

Chọn đáp án D □

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị (C) có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị (C) có tiệm cận.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x-1}{x-3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3x-1}{x-3}=-\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}=3$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$.

A. $y=-2$. **B**. $x=-1$. **C**. $x=-2$. **D**. $y=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-2}{1+\dfrac{1}{x}}=-2\Rightarrow y=-2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=1$.

$\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)}{(x+2)}=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to -2^-}y=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{(x-1)}{(x+2)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -2^+}y=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{(x-1)}{(x+2)}=-\infty$.

Vậy nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào?

A. $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$. **B**. $y=\dfrac{4x-1}{2x+5}$. **C**. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **D**. $y=\dfrac{2x-4}{2x+3}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{x+3}$ là

A. $x=2$. **B**. $y=-1$. **C**. $x=-3$. **D**. $y=-3$.

Lời giải.

Ta thấy $x=-3$; $y=-1$ lần lượt là các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị đã cho

Chọn đáp án C □

Câu 63. Trong các hàm số sau đây, đồ thị hàm số nào có tiệm cận ngang?

A. $y=3x^4-4x^2+6$. **B.** $y=\dfrac{3x+1}{2x^2-3}$. **C.** $y=2x^3-7x^2+2$. **D.** $y=\dfrac{x^2+1}{2x-5}$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{2x^2-3}=0$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=0\Rightarrow x=-1$ **không phải** là tiệm cận đứng.

Vậy tóm lại, đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{1+x}{1-2x}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+3}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.

Lời giải.

$y=\dfrac{1+x}{1-2x}$ có tiệm cận ngang $y=-\dfrac{1}{2}$.

$y=\dfrac{-2x+3}{x-2}$ có tiệm cận ngang $y=-2$.

$y=\dfrac{2}{x+1}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

$y=\dfrac{2x-2}{x+2}$ có tiệm cận ngang $y=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=-1$. **B**. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-1$. **D**. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang nào.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Viết phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

A. $y=2$, $x=1$. **B**. $y=\dfrac{1}{2}$, $x=1$. **C**. $y=1$, $x=2$. **D**. $y=1$, $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=2$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang được cho trong phương án nào dưới đây?

A. $x=1$, $y=-2$. **B**. $x=-1$, $y=-2$. **C**. $x=2$, $y=1$. **D**. $x=1$, $y=2$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to1^+}=+\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-2$ nên $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $y=-3$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

B. Đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

C. Đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

D. Đường thẳng $y=-\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} y=+\infty$. Do đó $x=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{3}{2}$. Do đó $y=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

Chọn đáp án C □

Câu 70. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x=-2$ và $y=1$. **B**. $x=2$ và $y=1$. **C**. $x=-2$ và $y=3$. **D**. $x=-2$ và $y=-3$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-2)^+} y = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{1-3x}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} y = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{1-3x}{x+2} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-3x}{x+2} = -3 \Rightarrow y=-3$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}$?

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x=-1$.

Câu 73. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{3-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^{\pm}} y = \mp\infty$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận $x=3$ và $y=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$, và $\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Lời giải.

Ta có:

☑ $\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty \Rightarrow$ hàm số có tiệm cận đứng là $x=0$.

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{4-x}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị hàm số trên không có điểm cực trị.

B. Giao hai tiệm cận là điểm $I(-2;4)$.

C. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận ngang $x=4$.

D. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận đứng $y=-2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ không có điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$.

A. $y=2$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}$. **C.** $y=4$. **D.** $y=-2$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{1}{x}}=-2$, do $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là $y=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Phương trình đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x+1}{3x-2}$ lần lượt là

A. $x=\dfrac{2}{3}; y=6$. **B.** $x=2; y=2$. **C.** $x=\dfrac{2}{3}; y=2$. **D.** $x=-\dfrac{2}{3}; y=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6x+1}{3x-2}=2$. Suy ra $y=2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{6x+1}{3x-2}=\pm\infty$. Suy ra $x=\dfrac{2}{3}$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ là

A. $y=2; x=1$. **B.** $y=1; x=1$. **C.** $y=-2; x=1$. **D.** $y=1; x=-2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$, nên $y=1$ là đường tiệm ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x-1}=\infty$, nên $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Lời giải.

Tập xác định : $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$. Suy ra $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{2018}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2018$.

Lời giải.

Ta có các giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$. Từ đó suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2017}{\sqrt{x^2-1}}$ có số đường tiệm cận ngang là

A. 4. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2017}{\sqrt{x^2-1}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2017}{\sqrt{x^2-1}}=-1$.

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang: $y=1$ và $y=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$;

và có tiệm cận ngang là $y=2$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

A. $x=2$. **B**. $y=-1$. **C**. $x=-1$. **D**. $y=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2\Rightarrow y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng:

A. $y=1$. **B**. $x=1$. **C**. $x=2$. **D**. $x=-1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}=-\infty$.

Nên $x=2$ là tiệm đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho hàm số $y=\dfrac{3-x}{x-2}$. Chọn khẳng định đúng.

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$. **B**. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y=2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$. **D**. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y=-1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{x+2}$.

A. $x=-2$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=1$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-x}{x+2}=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4-x^2}$. **C.** $y=\dfrac{x+3}{5x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x^2-x+9}$.

Lời giải.

☑ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$ có hai đường tiệm cận là $x=-1$ và $y=-2$.

☑ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{4-x^2}$ có ba đường tiệm cận là $x=2$, $x=-2$ và $y=0$.

☑ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{5x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x=\dfrac{1}{5}$ và $y=\dfrac{1}{5}$.

☑ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-x+9}$ có một đường tiệm cận $y=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây, đồ thị của hàm số nào **không** có đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$. **C.** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. **D.** $y=x^4-3x^2+2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ có tiệm cận ngang $y=0$ và tiệm cận đứng $x=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$ có tiệm cận ngang $y=-2$ và tiệm cận đứng $x=2$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ có tiệm cận ngang $y=0$ và không có tiệm cận đứng.

Ta có đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+2$ không có tiệm cận vì hàm số là hàm đa thức xác định trên tập $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

A. $x=-1, y=-1$. **B.** $x=1, y=1$. **C.** $x=1, y=-1$. **D.** $x=-1, y=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = -1 \Rightarrow$ tiệm cận ngang là $y = -1$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \dfrac{2x+2}{x-1}$?

A. $x = 1$. **B.** $y = 1$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = 3$.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x = 1$ và $x = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$ là

A. $y = 2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng $x = 1$ và đi qua điểm $A(2;5)$?

A. $y = \dfrac{-3x+2}{1-x}$. **B.** $y = \dfrac{x+13}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có tiệm cận đứng $x = 1$ nên loại phương án $y = \dfrac{x+13}{x+1}$.

Thay tọa độ điểm $A(2;5)$ ta thấy đáp án $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có phương trình là

A. $x = 1$, $y = -2$. **B.** $x = -2$, $y = 1$. **C.** $x = 2$, $y = 1$. **D.** $x = 1$, $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to-2^\pm} y = \mp\infty$. Nên $x = -2$, $y = 1$ các đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Đồ thị của hàm số nào sau không có đường tiệm cận?

A. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. **B.** $y = \dfrac{1}{x}$. **C.** $y = x^4 - 3x^2 + 2$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{2-x}$.

Lời giải.

Xét hàm $y = x^4 - 3x^2 + 2$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$.

Do đó $y = x^4 - 3x^2 + 2$ không có đường tiệm cận.

Chọn đáp án C ☐

Câu 97. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$ có 1 tiệm cận đứng là $x = -4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 98. Đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ có đường tiệm cận đứng là

A. $y = -1$. **B**. $x = 2$. **C**. $y = 2$. **D**. $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{2x - 3}{x + 1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{2x - 3}{x + 1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D ☐

Câu 99. Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ lần lượt là

A. $x = 2$, $y = -1$. **B**. $x = -2$, $y = 1$. **C**. $x = 1$, $y = 2$. **D**. $x = 2$, $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty$ suy ra hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1$ suy ra hàm số nhận đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án D ☐

Câu 100. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{-3x + 1}{x + 2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x = 2$ và $y = 1$. **B**. $x = -2$ và $y = 1$. **C**. $x = -2$ và $y = -3$. **D**. $x = -2$ và $y = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có

- ☑ $\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là: $x = -2$.
- ☑ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-3x + 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-3 + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}} = -3$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là: $y = -3$.

Chọn đáp án C ☐

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. B	5. A	6. A	7. A	8. B	9. B	10. D
11. C	12. D	13. A	14. D	15. A	16. D	17. A	18. D	19. B	20. B
21. B	22. B	23. A	24. D	25. C	26. B	27. B	28. B	29. B	30. D
31. B	32. B	33. C	34. C	35. A	36. A	37. C	38. D	39. D	40. B
41. B	42. B	43. C	44. A	45. C	46. C	47. A	48. A	49. B	50. B
51. C	52. A	53. D	54. A	55. C	56. A	57. D	58. B	59. A	60. B
61. B	62. C	63. B	64. A	65. D	66. C	67. A	68. A	69. C	70. D
71. B	72. B	73. B	74. C	75. A	76. D	77. C	78. B	79. B	80. A
81. D	82. C	83. D	84. C	85. C	86. B	87. B	88. B	89. D	90. A
91. D	92. D	93. A	94. C	95. B	96. C	97. A	98. D	99. D	100. C

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$ và đường tiệm cận ngang là $y=3$. Tính giá trị của $a+b$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải.

Với $b\neq 0$ và $b\neq -2a$, đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ nhận đường thẳng $x=\dfrac{2}{b}$ làm tiệm cận đứng.

Theo đề bài $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị nên $2=\dfrac{2}{b}\Leftrightarrow b=1$.

Với $b\neq 0$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ nhận đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nên $\dfrac{a}{b}=3\Leftrightarrow a=3b\Leftrightarrow a=3$.

Vậy $a+b=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

A. $y=1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x+3}{2x-4}=-\infty$. Vậy đường tiệm cận đứng của hàm số là đường thẳng $x=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 2^\pm}y=\lim\limits_{x\to 2^\pm}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^\pm}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=2$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-2)^\pm}y=\lim\limits_{x\to(-2)^\pm}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to(-2)^\pm}\dfrac{x-1}{x+2}=\mp\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Phương pháp:

- Định nghĩa tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a\Rightarrow y=a$ là TCN của đồ thị hàm số.
- Định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ thì $x=a$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

Cách giải:

TXĐ: $\mathscr{D} = (-1;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{1}{x^2}-1} = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có TCN là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = +\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} = +\infty$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}(C)$, đồ thị (C) có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$ và tiệm cận đứng là $x=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1.

C. 3. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim_{x\to-\infty} y = 2 \Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x\to+\infty} y = 5 \Rightarrow y=5$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là 3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	↘	$+\infty$ | $-\infty$	↘	2

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$. **B.** $y=2$. **C.** $x=1$. **D.** $y=1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số không xác định tại $x=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình $x=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$.

A. $x=1$ và $x=\dfrac{3}{5}$. **B.** $x=-1$ và $x=\dfrac{3}{5}$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\dfrac{3}{5}\right\}$ và

$$\lim_{x\to(-1)^+} y=-\frac{19}{75} \text{ và } \lim_{x\to\frac{3}{5}^+} y=+\infty.$$

Do đó đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. **C.** $y=\dfrac{2x^2+1}{x}$. **D.** $y=\sqrt{x^2-1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+1}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tìm a để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

A. $a>0$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=1$.

Lời giải.

Điều kiện cần để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $a>0$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $TCN\colon y=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $\Delta\colon y=\dfrac{1-ax_0}{\sqrt{ax_0^2+1}^3}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{\sqrt{ax_0^2+1}}$.

Do $\mathrm{d}(TCN,\Delta)=\sqrt{2}-1\Rightarrow TCN\parallel\Delta\Rightarrow 1-ax_0=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{a}$.

Khi đó $\mathrm{d}(TCN,\Delta)=\left|\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{x^2-x-6}$ là

A. 3 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathscr{D} = [0;+\infty) \setminus \{3\}$.

Có $\lim\limits_{x\to 3^+} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1} = \dfrac{4(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{x+1}$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{|x|-2x+1}$ là

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{-x+1} = -1$.

Suy ra đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{-x-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{-3x+1} = -\dfrac{1}{3}$.

Suy ra đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

☑ Ta có $|x|-2x+1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^2 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{|x|-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{-x+1} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-6}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [3;+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = 0.$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{2x^2+1}{2-x}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x+1}{1+x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{1-2x}$. **D.** $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x+2}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-2}{x+2}=2$.

Vậy $y=2$ là tiệm cận ngang của hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{R}=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}=-\infty$ nên đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó đồ thị có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

- ☑ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=0$, suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-1}{x^2-4}=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to-2^+}y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-1}{x^2-4}=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-m}{mx-1}$ không có đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

- ☑ Trường hợp $m=0$: hàm số đã cho trở thành $y=-x$, là hàm số không có tiệm cận đứng nên $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.
- ☑ Trường hợp $m\neq0$: hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.

  Hàm số không có tiệm cận đứng khi chỉ khi $x=\dfrac{1}{m}$ là nghiệm của phương trình $x-m=0$ hay $\dfrac{1}{m}-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị tham số m để hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (C) không có tiệm cận ngang.

B. (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

C. (C) có đúng một tiệm cận ngang.

D. (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$ nên (C) có tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-3x^2+2x+1}}{x}$ là

A. 3. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\left[-\dfrac{1}{3};1\right]\setminus\{0\}$, do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lại có $\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận đứng?

A. $y=-\dfrac{1}{x}$. **B**. $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$. **C**. $y=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$. **D**. $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+2}$.

Lời giải.

Ta xét

① $y=-\dfrac{1}{x}$ có $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1}{x}=-\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

② $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$ có $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x^2+2x+1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x^2+2x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

③ $y=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$ có $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x-1}{x^2-1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x-1}{x^2-1}=+\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

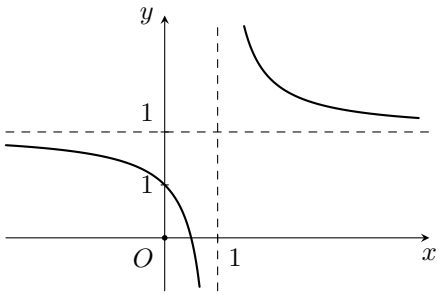
④ $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+2}$ có tập xác định $\mathscr{D}=[3;+\infty)$. Ta thấy trên tập xác định thì hàm số luôn liên tục và $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x+2}=0$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 22.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình bên. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b+3c$.

A. $T=1$. **B**. $T=2$. **C**. $T=3$. **D**. $T=4$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có tiệm cận đứng $x=-=\dfrac{c}{b}=1$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{b}=2$ và đồ thị đi qua điểm $(0,1)$

tương ứng với $-\dfrac{1}{c}=1$.

Từ đó ta tính được $c=-1\Rightarrow b=1$ và $a=2$.

Vì thế $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ và $a+2b+3c=2+2-3=1$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	1

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y=1$, $y=-1$.

Do $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$. Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A ☐

Câu 24. Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\sqrt{x^2-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+}y=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}y=\infty$.

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-1}$. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty\Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 25. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

A. $(2;1)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng: $x=-2$.

Tiệm cận ngang: $y=1$.

Vậy giao điểm là $I(-2;1)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ta có :

- ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=+\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x\to-(\sqrt{2})^-}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=+\infty \Rightarrow x=-\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=+\infty \Rightarrow x=\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang và 4 tiệm cận đứng nên đồ thị đã cho có 5 tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{2x+1}$ là

A. $x=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{2x+1}$ nhận đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận?

A. $y=x^2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x}$. **D.** $y=2x$.

Lời giải.

Các đồ thị hàm số $y=x^2$; $y=0$; $y=2x$ đều không có tiệm cận.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}$ có $y=1$ là TCN và $x=0$ là TCĐ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S=m^2+n^2-2$.

A. $S=2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}$ nhận đường thẳng $y=m-2n-3$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x=m+n$ làm tiệm cận đứng. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} m-2n-3=0 \\ m+n=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \Leftrightarrow S=m^2+n^2-2=0.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-|x|+2} = 1$, suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $x^2-|x|+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-|x|+2} = +\infty$ suy ra $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-|x|+2} = -\infty$ suy ra $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp

Đường thẳng $x=a$ được gọi là TCĐ của đồ thị hàm số $y=\dfrac{g(x)}{h(x)} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ hoặc $x=a$ là nghiệm của $h(x)=0$ mà không là nghiệm của $g(x)=0$.

Cách giải:

Ta có: $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}=\dfrac{x+2}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow x=1; x=3$ là 2 đường TCĐ của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2018}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y=2018$. **B**. $x=0$. **C**. $y=0$. **D**. $x=1$.

Lời giải.

Phương pháp

+) Đường thẳng $y=b$ được gọi là TCN của đồ thị hàm số $y=f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

Cách giải:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2018}{x-1}=0 \Rightarrow y=0$ là TCN của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+2}{3-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm là đường tiệm cận đứng $x=3$ và đường tiệm cận ngang $y=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

A. $m<0$. **B**. $m>0$ và $m\neq\dfrac{5}{4}$. **C**. $m>0$. **D**. $m<0$ và $m\neq-\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

① Đồ thị hàm số có tiệm cận khi $-4m+5\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{5}{4}$.

② Khi đó, đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=m$.

③ Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng bên phải trục tung thì $m>0$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

① Tiệm cận ngang

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=2$ nên $y=2$ là tiệm cận ngang.

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang.

② Tiệm cận đứng

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}}{x-1}$. Tất cả các đường thẳng là đường tiệm cận của đồ thị hàm số trên là

A. $x=1;\ y=0;\ y=2;\ y=1$. **B**. $x=1;\ y=2;\ y=1$.

C. $x=1;\ y=0;\ y=1$. **D**. $x=1;\ y=0$.

Lời giải.

Ta có tập xác định của hàm số $D=(-\infty,0]\cup(1+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}}{x-1}=+\infty$ nên $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)}=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

Ta có :

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{8}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=5\Rightarrow y=5$ là một đường tiệm cận ngang.

☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{8}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = -5 \Rightarrow y=-5$ là một đường tiệm cận ngang.

☑ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty \Rightarrow x=0$ là một đường tiệm cận đứng.

☑ $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = +\infty \Rightarrow x=3$ là một đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tất cả 4 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$.

A. 3. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [-9;+\infty) \setminus \{0;-1\}$.

Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{1}{6}$.

☑ $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-5;5)$

Hàm số đã cho liên tục trong $[-5;5]$ và $\lim\limits_{x\to5^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to5^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}} = +\infty$.

Nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=5, x=-5$ và đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2} = 1$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{8}{9}.$

$\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{8}{9}.$

$\lim\limits_{x\to (-1)^+} y = \lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{x^3-4x}{x^3-3x-2} = \lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} = -\infty.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y		$-\infty$ ↗	$+\infty$	1 ↘	0

Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

☑ $\lim\limits_{x\to -2^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

☑ $\lim\limits_{x\to 0^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

☑ $\lim\limits_{x\to +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$.

B. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lời giải.

Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ nên phương án "Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$" đúng.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$ nên phương án "Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$" đúng.

Vì $\lim\limits_{x\to (-1)^+} y = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ nên phương án "Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng" sai.

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nên phương án "Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang" đúng.

Chọn đáp án C ☐

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$	↗	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

- ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 5$ suy ra $y = 5$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$ suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số tổng cộng có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C ☐

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$, không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$, tiệm cận ngang $x = -2$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$, không có tiệm cận ngang.

Lời giải.

Chọn đáp án B ☐

Câu 45. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$.

A. không. **B**. ba. **C**. một. **D**. hai.

Lời giải.

Một tiệm cận ngang $y = 0$ và hai tiệm cận đứng $x = 0$ và $x = 1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 46. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $x=1$.

B. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $x=\pm 1$.

C. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) là $y=\pm 1$.

D. Phương trình đường tiệm cận của đồ thị (C) là $x=\pm 1, y=1$.

Câu 47. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-2}$ có số đường tiệm cận là:

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 48. Phương trình tất cả các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2017}{\sqrt{x^2-2017}}$ là

A. $y=\sqrt{2017}$. **B**. $y=1$. **C**. $y=-\sqrt{2017}$. **D**. $y=1, y=-1$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2017}{\sqrt{x^2-2017}}=\pm 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

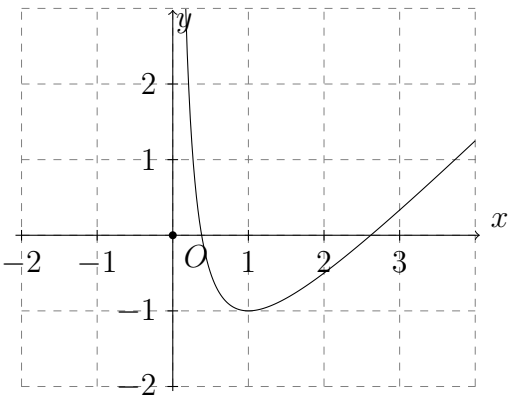
A. $a=-1; b=-2$. **B**. $a=1; b=2$. **C**. $a=-1; b=2$. **D**. $a=4; b=4$.

Lời giải.

Vì $x=1$ là tiệm cận đứng nên suy ra $b=2$. Kết hợp $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang nên suy ra $a=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 4.

Câu 51. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+4}{x^2-16}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Câu 52. Đồ thị hàm số nào dưới đây có đường tiện cận đứng?

A. $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$. **B**. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. **C**. $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$. **D**. $y=x^4-4x-1$.

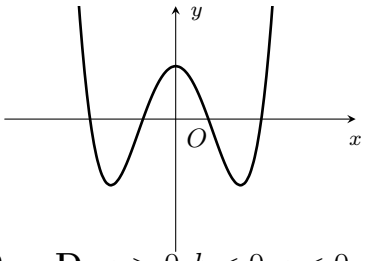
Câu 53. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+3}$ là

A. $y=-3$. **B**. $y=-2$. **C**. $y=1$. **D**. $y=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 54. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên $[-1; 5]$.

A. $\max\limits_{[-1;5]} y = 266, \min\limits_{[-1;5]} y = -16$.
B. $\max\limits_{[-1;5]} y = 14, \min\limits_{[-1;5]} y = -6$.
C. $\max\limits_{[-1;5]} y = 276, \min\limits_{[-1;5]} y = 21$.
D. $\max\limits_{[-1;5]} y = 266, \min\limits_{[-1;5]} y = -6$.

Câu 55.
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

Câu 56. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{3}{2}$.
B. Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = \dfrac{3}{2}$.
C. Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = 1$.
D. Đồ thị có tiệm cận ngang là $x = \dfrac{1}{2}$.

Câu 57. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-4x-5}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 58. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3-4}{x^3+1}$.

A. $x = -1$. **B.** $y = 0$. **C.** $x = 0$. **D.** $y = 1$.

Câu 59. Cho đồ thị hàm số $(C) : y = \dfrac{2x-4}{x-3}$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

A. (C) chỉ có một tiệm cận đứng.
B. (C) chỉ có một tiệm cận ngang.
C. (C) chỉ có một tâm đối xứng.
D. (C) chỉ có một trục đối xứng.

Câu 60. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 61. Hàm số $y = \dfrac{2-x}{x-1}$ có tiệm cận ngang là

A. $y = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $y = -1$. **D.** $x = -1$.

Câu 62. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{1+x}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt có phương trình là

A. $x = -1, y = -1$. **B.** $x = -1, y = 2$. **C.** $x = -3, y = -1$. **D.** $x = 2, y = 1$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 2$.
B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 2$ và một tiệm cận ngang $y = 1$.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $x = \pm 1$.
D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$. Vậy hàm số có tiêm cận ngang là $y=\pm1$ và không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Đồ thị của hàm số nào dưới đây nhận đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. **B.** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Câu 65. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x-d}$ nhận đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng, nhận đường $y=-2$ là đường tiệm cận ngang. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b^2-a=0$. **B.** $b^2-d=0$. **C.** $a+2d=0$. **D.** $a=2d$.

Câu 66. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1 .

Lời giải.

Ta có, tiệm cận ngang: $y=1$; tiệm cận đứng $x=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{3-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x=-1$ và một tiệm cận ngang $y=3$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x=3$ và một tiệm cận ngang $y=-1$.

C. Đồ thị của hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là $y=3$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng $x=3$; tiệm cận ngang $y=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+6x-7}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 69. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-4}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 70. Tìm tất cả phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+3}$.

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $y=-\dfrac{3}{2}, y=1$. **D.** $y=2$.

Câu 71. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 72. Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+3}$ là:

A. $\left(1;\dfrac{-2}{3}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{-3}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{-3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{-2}{3};1\right)$.

Lời giải.

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là: $x=\dfrac{-3}{2}; y=1$.

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là: $\left(\dfrac{-3}{2};1\right)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 73. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x-4}$ là:

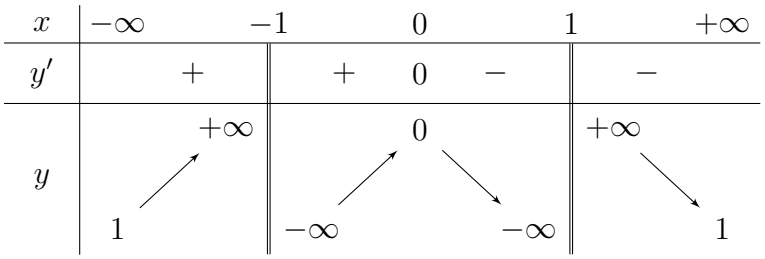
A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có các đường tiệm cận là: $x=-1; x=4; y=0$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Phát biểu nào dưới đây **sai**?



A. Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=2017$ tại hai điểm phân biệt.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2-x}$ có đồ thị là (C). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $y=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$.

B. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

C. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-2$.

D. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

Câu 76. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$ là mấy?

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Tiệm cận đứng: $x=-1$.

Tiệm cận ngang: $y=1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 77. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-3}{3x-4}$ có các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là các đường nào sau đây?

A. $x=\dfrac{4}{3}; y=-\dfrac{4}{3}$. **B**. $x=-\dfrac{4}{3}; y=-\dfrac{4}{3}$. **C**. $x=\dfrac{4}{3}; y=\dfrac{4}{3}$. **D**. $x=-\dfrac{4}{3}; y=\dfrac{4}{3}$.

Câu 78. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$. **B**. $y=\dfrac{5}{x^2-2x+2}$. **C**. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. **D**. $y=\dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$ là $x=2$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 79. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.
Do $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
$\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1$ nên $x = 2$ không là tiệm cận đứng.
Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.
Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-6}{x+1}$. Phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là

A. $x = -1;\ y = 3$. **B.** $x = 1;\ y = 2$. **C.** $x = 1;\ y = 3$. **D.** $x = -1;\ y = 2$.

Câu 81. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 82. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+n}{x-1}$có đồ thị (C). Biết tiệm cận ngang của (C) đi qua điểm $A(-1;2)$ đồng thời điểm $I(2;1)$ thuộc (C). Khi đó giá trị của $m+n$ là.

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=3$. **C.** $m+n=-3$. **D.** $m+n=-1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = m$. Vì đường tiệm cận ngang đi qua $A(-1;2)$ và đồ thị hàm số đi qua $I(2;1)$ nên ta có hệ phương trình:
$\begin{cases} m = 2 \\ \dfrac{2m+n}{2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -3 \end{cases}$. Vậy $m+n = -1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 84. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y = \pm 1$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 1$. **D.** $x = 1$.

Câu 85.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.
B. Hàm số có một điểm cực trị.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
D. $\max\limits_{(-2;+\infty)} y = 3$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$ $+\infty$		$\nearrow$ 3		$\searrow$	
	$-\infty$		$-\infty$				0

Lời giải.

Hàm số chỉ có 2 đường tiệm cận là $x = -2; y = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Với giá trị nào của m thì đồ thị $(C): y = \dfrac{mx-1}{2x+m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$?

A. $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$. Từ đó ta có đường tiệm cận đứng có phương trình $x = -\dfrac{m}{2}$.

Do đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$ nên ta có $-1 = -\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 3 - \dfrac{1}{2x-1}$.

A. $y = 3$. **B.** $\sqrt{3} - 4$. **C.** $4 + \sqrt{3}$. **D.** 4.

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}[2f(x) - 1] = 0$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

C. Tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cân ngang của đồ thị hàm số là $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

D. Đồ thị hàm số chỉ có đường tiệm cận đứng mà không có đường tiệm cận ngang.

Câu 89. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{1-x}$.

A. $y = 1$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{x+2}{-x+1}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+4}{x^2-16}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có: $y = \dfrac{1}{x-4} \Rightarrow$ TCĐ: $x = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có phương trình là

A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 2$. **D.** $x = -1$.

Câu 92. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-7}$.

A. $M(2;7)$. **B.** $M(7;1)$. **C.** $M(1;7)$. **D.** $M(-2;-7)$.

Câu 93. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2}$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 94. Đồ thị hàm số nào dưới đây có hai đường tiệm cận?

A. $y = \dfrac{1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{1}{4}x^2$. **D.** $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.

Câu 95. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận. **B.** Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

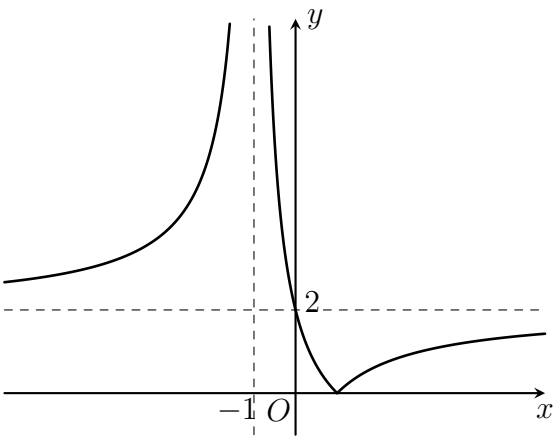
C. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận. **D.** Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 96.
Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Xét các mệnh đề sau:

$(I):\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
$(II):\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
$(III):\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=2$
$(IV):\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.



Câu 97. Tìm phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$?

A. $x=1$. **B**. $y=1$. **C**. $x=-1$. **D**. $y=-1$.

Câu 98. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$?

A. $x=1$. **B**. $y=-1$. **C**. $y=2$. **D**. $x=-1$.

Câu 99. Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$?

A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B**. $y=\dfrac{x+1}{x+2}$.
C. $y=x^3-3x^2+2x-3$. **D**. $y=x^4+3x^2-1$.

Lời giải.
Do đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.
Chọn đáp án A □

Câu 100. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx-3}{x+m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$?

A. $m=2$. **B**. $m=-2$.
C. $m=1$. **D**. Không có giá trị nào của m.

Lời giải.
Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y=2m$. Suy ra $2m=2$, hay $m=1$.
Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. A	5. C	6. C	7. C	8. D	9. A	10. D
11. B	12. B	13. B	14. B	15. D	16. B	17. D	18. A	19. D	20. B
21. D	22. A	23. A	24. D	25. D	26. B	27. D	28. C	29. B	30. B
31. B	32. C	33. B	34. B	35. B	36. D	37. B	38. B	39. B	40. D
41. C	42. C	43. C	44. B	45. B	46. C	47. A	48. D	49. B	50. B
51. A	52. A	53. B	54. D	55. B	56. A	57. A	58. D	59. D	60. C
61. C	62. B	63. D	64. C	65. D	66. C	67. B	68. D	69. B	70. B
71. C	72. B	73. B	74. D	75. C	76. B	77. C	78. D	79. A	80. A
81. A	82. D	83. C	84. A	85. A	86. D	87. A	88. C	89. B	90. B
91. D	92. B	93. A	94. A	95. A	96. D	97. D	98. D	99. A	100. C

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m-2n$.

A. 0. **B**. -3. **C**. -9. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{(n-3)x-n-2017}{x+m+3}=n-3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{(n-3)x-n-2017}{x+m+3}=n-3$.
Do đó để đồ thị hàm số nhận trục Ox làm tiệm cận ngang thì $n-3=0\Leftrightarrow n=3$.
Khi đó hàm số đã cho trở thành $y=\dfrac{-2014}{x+m+3}$, ta có $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2014}{x+m+3}$ không xác định khi

$$m+3=0\Leftrightarrow m=-3.$$

Suy ra $m-2n=-9$.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}$.

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=(1;+\infty)\setminus\{3\}$
Dễ thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=0$ Nên hs có 1 tiệm cận ngang
Lại có

$$\lim_{x\to1^+}y=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^\pm}y=\lim_{x\to3^\pm}\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-2)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to3^\pm}\frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Nên đt hàm số có 1 tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hs có 2 tiệm cận.
Chọn đáp án D □

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}}=0$$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-9}{4}$$

$\Rightarrow x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.
Chọn đáp án D □

Câu 4. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$ là

A. 4. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=1.$

Do đó hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$.

Do đó hàm số có hai tiệm cận ngang là $x=1$ và $x=2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $-2<m<2$. **B**. $\begin{cases} m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases}$. **C**. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$. **D**. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases} \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-mx+1\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}=0\Rightarrow$ đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-mx+1=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-4>0 \\ 2^2-2m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>2 \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases} \\ m<-2. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m=1$. **B**. $m=-1$. **C**. $m\pm 1$. **D**. Không có m.

Lời giải.

Cách 1: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty,a),(-\infty;a],(a,+\infty)$ hoặc $[a;+\infty)\Rightarrow m\geq 0$

TH1: $m=0\Rightarrow y=x-\sqrt{-3x+7}$ đồ thị hàm số không tiệm cận ngang.

TH2: $m>0\Rightarrow y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$.

Khi $x\to+\infty, y=x-x\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x}^2}$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m=1$.

Khi $x\to-\infty, y=x+x\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x}^2}\to-\infty$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

KL: $m=1$.

Cách 2: Với $m<0$, ta có hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ không tồn tại giới hạn tại dương vô cùng.

☑ Với $m\in(0;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{mx^2-3x+7})=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{mx^2-3x+7})=-\infty$.

☑ Với $m>1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{mx^2-3x+7})=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{mx^2-3x+7})=-\infty$.

☑ Với $m=1$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{mx^2-3x+7})=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-7}{x+\sqrt{x^2-3x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\dfrac{7}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7^2}{x}}}=\frac{3}{2},$$

đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{1+|x|}$ là

A. 2. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1+x}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1+|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1-x}=1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{1+|x|}$ có 2 đường TCN $y=1, y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to-1^+}y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ (do $\lim\limits_{x\to-1^+}(\sqrt{x+9}-3)=-3+2\sqrt{2}<0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}(x^2+x)=0$ và $x^2+x<0$ khi $x\to-1^+$).

Suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

☑ $\lim\limits_{x\to0^\pm}y=\lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{1}{6}$.

Suy ra $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-3;3)$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang?

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

☑ Trường hợp $m=0$: hàm số trở thành $y=x+1$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nên $m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

☑ Trường hợp $m<0$: tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\left(-\sqrt{-\frac{1}{m}};\sqrt{-\frac{1}{m}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

☑ Trường hợp $m>0$: tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vì $m\in\mathbb{Z}\cap(-3;3)$ nên $m=1;2$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l}m\geq 0\\ m\leq -4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m>0\\ m\leq -4\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-4\end{array}\right.$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^3-3x^2-m=0\Leftrightarrow x^3-3x^2=m$. (*)

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$, có $f'(x)=3x^2-6x$. Do đó $f'(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng khi thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x\neq -1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>0.\end{array}\right.$

TH2. Phương trình (*) có hai nghiệm, trong đó một nghiệm $x=-1$ và một nghiệm $x\neq -1$ $\Leftrightarrow m=-4$.

Kết luận với $\left[\begin{array}{l}m\leq -4\\ m>0\end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{3}{x-2}+1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x^2-1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của hàm số $y=\dfrac{3}{x^2-1}$.

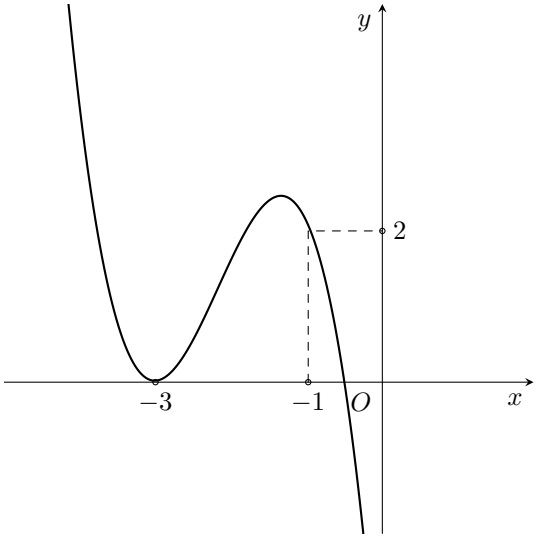
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}=\pm\infty\Rightarrow$ hàm số $y=\dfrac{3}{x^2-1}$ không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x+1}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3}{x-2}+1\right)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}+1$.

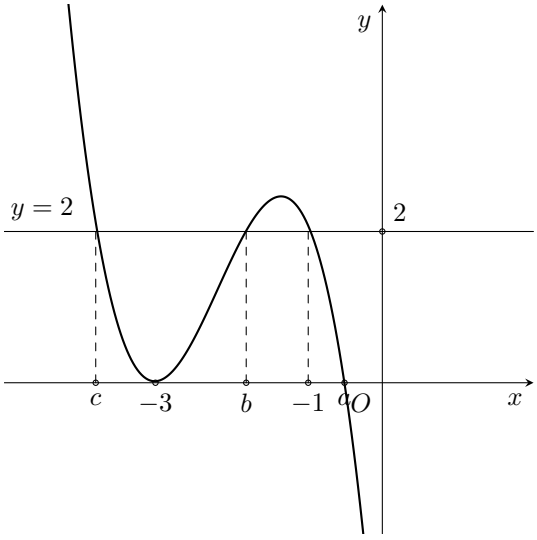
Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1 = c < -3, x_2 = b$, với $-3 < b < -1$ và $x_3 = -1$.

Phương trình bậc ba $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -3$ và nghiệm đơn $x = a$ với $-1 < a < 0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a) = 0$ và $f(x) = 2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1) = 0$.

Ta có: $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]} = \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{xf(x)[f(x)-2]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}f(x)[f(x)-2]} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+} y = \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a)[f(x)-2]} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-xf(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to b^+} y = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-xf(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+3)\sqrt{x}(x+1)}{-xf(x)(x-c)(x-b)} = 0.$

$\lim\limits_{x\to -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$, $x=-3$, $x=c$ và $x=b$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

$f(x) = mx^2-2x+3$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số cần có đúng 1 tiệm cận đứng.

Với $m=0$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow m=0$ thỏa mãn bài toán.

Với $m\neq 0$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2-2x+3=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm $x=1$ hay:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_f = 0\\ \begin{cases}\Delta_f > 0\\ f(1)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3m=0\\ \begin{cases}1-3m>0\\ m+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=-1\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tìm giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2008. **B**. 2010. **C**. 2009. **D**. 2007.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = 0$ suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang với mọi m.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm kép $x\geq 3$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó $x_1\geq 3$ và $x_2<3$.

☑ $\Delta = 1+4m=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$ (loại).

☑ $\Delta = 1+4m>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{4}$.

Khi đó phương trình $x^2+x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó $x_1\geq 3$ và $x_2<3$ khi

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=3\\ -1<3\end{cases}\\ (x_1-3)(x_2-3)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=12\\ m>12\end{array}\right. \Leftrightarrow m\geq 12.$$

Vậy số giá trị m thỏa mãn là 2008.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có ba đường tiệm cận.

A. $m<1$. **B**. $m\neq 1$ và $m\neq -8$. **C**. $m\leq 1$ và $m\neq -8$. **D**. $m<1$ và $m\neq -8$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

② Để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2-2x+m=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2. Từ đó, ta có

$$\begin{cases}\Delta'=1-m>0\\ 1-2+m\neq 0\\ 4+4+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq 1\\ m\neq -8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq -8.\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 16. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0.$$

Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to0^-} y=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=-\infty$.

Đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$	↗	3	↘	
			2			$-\infty$			$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{2}$. (1)

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3;x_4$ trong đó

$$x_1<-2<x_2<1<x_3<2<x_4.$$

Mặt khác hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}=g(x)$ có tử thức là hằng số nên ta suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tập hợp các giá trị m để hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là

A. $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2+6x-2=0$ không có nghiệm $x=-2 \Leftrightarrow m\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-2\neq 0 \Leftrightarrow 4m-14\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho luôn có 1 tiệm cận ngang với mọi m.

Do đó bài toán trở thành tìm m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng.

- ☑ Với $m=0$, $y=\dfrac{x-1}{-2x+3}$. Đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.
- ☑ Với $m\neq 0$. Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng khi phương trình $mx^2-2x+3=0$ có nghiệm kép hoặc nghiệm $x=1$.

  Điều đó tương đương với

$$\begin{bmatrix}1-3m=0\\ m-2+3=0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}m=\dfrac{1}{3}\\ m=-1.\end{bmatrix}$$

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn đề bài là -1, 0, $\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2018}{f(x)}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Lời giải.

Do hàm số $y=\dfrac{2018}{f\left(x\right)}$ suy ra số tiệm cận đứng của hàm số sẽ tương ứng với số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(x\right)=0 \quad (*)$.

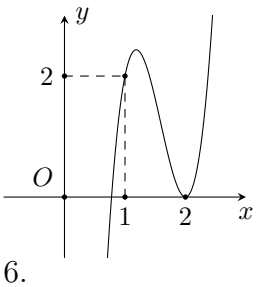
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra số nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$ là 3.

Nên số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2018}{f\left(x\right)}$ là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 21.

Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-4x+4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

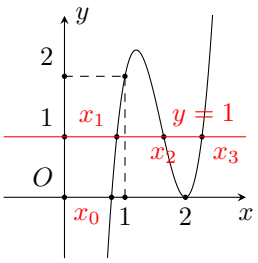


A. 5. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 6.

Lời giải.

Phương pháp: Định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Nếu $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}=-\infty\end{array}\right.$ thì $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.



Cách giải: Từ đồ thị hàm số ta có:

$f(1)=2, f(x_0)=f(2)=0, f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=1.$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-4x+4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có TXĐ là

$$\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq 0\\ f\left(x\right)\neq 0\\ f\left(x\right)\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq 0\\ x\neq x_0\\ x\neq x_1\\ x\neq x_2\\ x\neq x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq x_2\\ x\neq x_3\end{cases},1<x_2<2<x_3.$$

☑ $\lim\limits_{x\to x_2}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_2}\dfrac{\left(x^2-4x+4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}=\infty.$

☑ $\lim\limits_{x\to x_3}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_3}\dfrac{\left(x^2-4x+4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}=\infty.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-4x+4\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+m}}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 2020. **B**. 4038. **C**. 2018. **D**. 2019.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{4x^2-2x+m}=0 \Leftrightarrow 4x^2-2x+m=0$.

Đặt $f(x)=4x^2-2x+m$ có $\Delta'=1-4m$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Điều này tương đương với $\begin{cases}\Delta'>0\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4m>0\\ 1+1+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{1}{4}\\ m\neq -2\end{cases}$.

Lại có $m\in\mathbb{Z}, m\in[-2019;2019] \Rightarrow m\in\{-2019;-2018;\ldots;0\}\setminus\{-2\}$.

Vậy có 2019 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1}{1-\dfrac{1}{x}}=2$ và

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\dfrac{2}{x}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}-1\right)}=0.$$

Nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x|-2018}{x+2019}$.

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2018}{x+2019}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2018}{x}}{1+\dfrac{2019}{x}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-2018}{x+2019}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\dfrac{2018}{x}}{1+\dfrac{2019}{x}}=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Tìm số tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{2x+1}-x-1}$.

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{2x+1}-x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}} = -2.$

Suy ra $y=-2$ là tiệm cận ngang của hàm số.

☑ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{4x^2+5}) = \sqrt{5} > 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{2x+1}-x-1) = 0 \\ \sqrt{2x+1}-x-1 < 0 \text{ khi } x\to0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} y = -\infty.$

Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng của hàm số.

☑ $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} y = -2\sqrt{6}.$

Suy ra $x=-\dfrac{1}{2}$ không là tiệm cận đứng của hàm số.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m>2 \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases}$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x^2-2mx+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{4}{x^2}} = 0 \Rightarrow y=0$ là TCN của đồ thị hàm số.

Do đó để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=x^2-2mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-4>0 \\ f(1)=1-2m+4\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3x+1\geq0 \\ 4\sqrt{3x+1}-3x-5\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq-\dfrac{1}{3} \\ 3x+1-4\sqrt{3x+1}+4\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq-\dfrac{1}{3} \\ \left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2\neq0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq-\dfrac{1}{3} \\ \sqrt{3x+1}-2\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq-\dfrac{1}{3} \\ 3x+1\neq4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq-\dfrac{1}{3} \\ x\neq1. \end{cases}$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}+2}{3\left(\sqrt{3x+1}-2\right)} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{3x+1}+2}{3\left(\sqrt{3x+1}-2\right)} = -\infty.$

$\Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3-\dfrac{5}{x}} = -\dfrac{1}{3}.$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-4}{m-x^2}$ có đường tiệm cận đứng.

A. $m \geq 0; m \neq 16$. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > 0; m \neq 16$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì điều kiện cần là $m - x^2 = 0$ có nghiệm hay $x^2 = m$ cố nghiệm hay $m \geq 0$. Với $m = 16$ thì $y = \dfrac{-1}{4+x}$ thì đồ thị hàm số vẫn có 1 tiệm cận đứng là $x = -4$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m \geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Đường $x = 0$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y = \dfrac{x+1}{x(x-2)}$. **B.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$. **C.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y = \dfrac{x-1}{|x|}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+1}{x(x-2)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x^2+1}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{|x|} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai tiệm cận.

A. $m = -1$. **B.** $m \in \{1; 4\}$. **C.** $m \in \{-1; -4\}$. **D.** $m = 4$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2} = 1 \quad \forall m$ nên đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang là $y = 1$.

Để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận thì đồ thị hàm số có thêm một tiệm cận đứng hoặc là $x = 1$, hoặc là $x = 2$. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = 1$, suy ra pt $x^2 + m = 0$ và pt $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm chung là $x = 1$. Từ đó, ta suy ra $m = -1$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = 2$, suy ra pt $x^2 + m = 0$ và pt $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm chung là $x = 2$. Từ đó, ta suy ra $m = -4$.

Vậy $m \in \{-1; 4\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}+1}{x}$.

A. $y=2$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=2; y=-2$. **D.** $x=2; x=-2$.

Câu 32. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của hàm số $y=x^4-4x^2+1$.

A. $x=-3$. **B.** $y=1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=-3$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai đường tiệm cận đứng phân biệt.

A. $m\in(-\infty;1)$. **B.** $m\in(-\infty;-8)\cup(-8;1)$.

C. $m\in(-\infty;-1)$. **D.** $m\in(-8;1)$.

Lời giải.

Ta có: $y=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2-2x+m}$.

Xét $g(x)=x^2-2x+m=0$ (1). Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2. Khi đó

$$\begin{cases}\Delta>0\\ g(1)\neq 0\\ g(-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-4m>0\\ -1+m\neq 0\\ 8+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq 1\\ m\neq -8\end{cases}$$

Vậy $m\in(-\infty;-8)\cup(-8;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m>1$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=1$ hay $m=0$.

Lời giải.

Hàm số không xác định tại $x=m$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $\lim\limits_{x\to m^+}y$ và $\lim\limits_{x\to m^-}y$ có giá trị hữu hạn khi đó $x=m$ là nghiệm của $2x^2-3x+m=0$, tức là $2m^2-3m+m=0\Leftrightarrow m=0$ hay $m=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{1-4x}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Biểu thức của hàm số có nghĩa khi $\begin{cases}1-4x\geq 0\\ x^2-x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{4}\\ x\neq 0\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{4}\\ x\neq 0\end{cases}$.

Có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-4x}+3x^2+2}{x^2-x}=3$ nên đồ thị hàm số nhận $y=3$ làm tiệm cận ngang.

Có $\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-4x}+3x^2+2}{x(x-1)}=-\infty$ nên đồ thị hàm số nhận $x=0$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

C. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Câu 37. Tìm tập hợp T gồm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - m^2 + m}$ có ba đường tiệm cận.

A. $T = (0; 1)$.

B. $T = (0; +\infty)$.

C. $T = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. $T = (-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

Mặt khác $2x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên ĐTHS có 2 tiệm cận đứng thì $x^2 - m^2 + m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m \geq 0$.

B. $m > 0$.

C. $m < 0$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 - 4.1.(-m) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{m^2x^2 - m + 1}}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

A. $m > 1$.

B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

C. $m < 1$.

D. $m < 0$.

Lời giải.

Ta có: Đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = \pm\dfrac{1}{|m|}$.

Do đó, đồ thị hàm số có đúng 4 đường tiệm cận.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m^2x^2 - m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{2 - 3mx^2}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $\varnothing$.

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 3}{4x - 2n + 5}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Giá trị của $m + n$ bằng mấy?

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{21}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện để hàm số đã cho không nhận giá trị hằng: $m(5-2n)-12\neq 0$ (*).

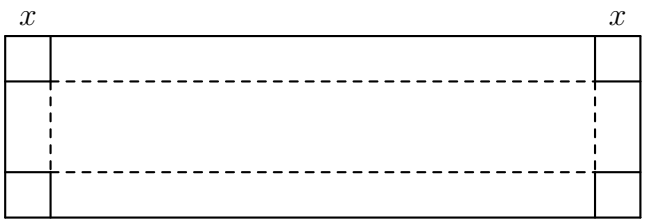
Vì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=2$ và nhận trục tung làm tiệm cận đứng nên:

$\begin{cases}\dfrac{m}{4}=2\\ 5-2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=8\\ n=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ thỏa điều kiện (*). Do đó $m+n=\dfrac{21}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.

Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước 3 m x 8 m. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là x để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Với giá trị nào của x thì thể tích của hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất.



A. $x=1$ m. **B.** $x=\dfrac{2}{3}$ m.

C. $x=\dfrac{1}{3}$ m. **D.** $x=\dfrac{4}{3}$ m.

Lời giải.

Kích thước của hình hộp chữ nhật là: $8-2x$ m x $3-2x$ m x x m.

Điều kiện $0<x<\dfrac{3}{2}$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật:

$V=(8-2x)(3-2x)x=4x^3-22x^2+24x$.

$V'=12x^2-44x+24$.

$V'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\ x=3\end{array}\right.$.

Lúc này thể tích đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$ có hai tiệm cận đứng.

A. $m\geq 4$. **B.** $-5<m\leq 4$. **C.** $\begin{cases}-5<m\leq 4\\ m\neq -1\end{cases}$. **D.** $m>-5$.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm đứng thì phương trình $\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ \sqrt{2x^2-2x-m}=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\geq -1\\ x^2-4x-m-1=0 (*)\end{cases}$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân $x_1,x_2\geq -1, x_1x_2\neq 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 4+m+1>0 \\ (x_1+1)+(x_2+1)\geq 0 \\ (x_1+1)(x_2+1)\geq 0 \\ 0^2-4.0-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<m\leq 4 \\ m\neq -1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị C. Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên C đến giao điểm của hai tiệm cận. Tìm giá trị nhỏ nhất của d.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 45. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có đường tiệm cận đứng.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 46. Biết rằng có hai giá trị thực m_1, m_2 của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng. Tính m_1+m_2.

A. $m_1+m_2=6$. **B.** $m_1+m_2=4$. **C.** $m_1+m_2=-4$. **D.** $m_1+m_2=-6$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng khi xảy ra một trong các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. Phương trình $x^2-mx+m=0$ có đúng 1 nghiệm (nghiệm này có thể bằng 1 hoặc khác 1), tức là $\Delta=m^2-4m=0$. Từ đó ta có $m=0$ hoặc $m=4$.

Trường hợp 2. Phương trình $x^2-mx+m=0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 1. Tức là $\Delta=m^2-4m>0$ và $1^2-m.1+m=0$. Trường hợp này không có giá trị m nào thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị m cần tìm là $m_1=0$ và $m_2=4$ nên tổng $m_1+m_2=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{2x+1}$. Đồ thị của hàm số đó mấy tiệm cận (ngang và đứng)?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$. Với điều kiện xác định đó ta có $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)}=\dfrac{1-x}{x+2}$

Dễ thấy hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=-1$ và một đường tiệm cận đứng $x=-2$.

Như vậy tổng số đường tiệm cận của hàm số là 2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 50. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{mx+1}$ có tiệm cận đứng?

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;-2\}$. **B.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x-2}(C)$ với $m\neq -1$ và đường thẳng $d: y=x+1$. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tìm m để điểm I thuộc đường thẳng d.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải.

Ta có: $I(2;m)\Rightarrow m=2+1=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-\sqrt{x^2+8}}{x-1}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{2-x}(C)$ và đường thẳng $d: y=x+6$ biết đường thẳng d cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) tạo thành một tam giác. Tính diện tích S của tam giác đó.

A. $S=\dfrac{81}{2}$. **B.** $S=\dfrac{9}{2}$. **C.** $S=81$. **D.** $S=9$.

Lời giải.

TCĐ: $x=2$, TCN: $y=-1\Rightarrow I(2;-1), A(2;8), B(-7;-1)\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}.9.9=\dfrac{81}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m): $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2mx+1}$ chỉ có một đường tiệm cận đứng.

A. $m=\pm 1; m=-\dfrac{5}{4}$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m\in[2;+\infty)$. **D.** $m<-1; m>1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho chỉ có một đường tiệm cận đứng khi tam thức $f(x)=x^2-2mx+1$ có nghiệm kép hoặc $f(x)=x^2-2mx+1$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $-\dfrac{1}{2}$.

TH1. $f(x)$ có nghiệm kép khi $\Delta'=0$ hay $m^2=1$, tức $m=\pm 1$.

TH2. $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $-\dfrac{1}{2}$ khi $\begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0 \\ \Delta'>0 \end{cases}\Rightarrow m=-\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-5x^2+8x-4}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 56. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{1-x}$ có 2 điểm cực trị nằm trên đường thẳng $y=ax+b$ thì giá trị của tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. $a+b=4$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=-4$. **D.** $a+b=-2$.

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+1}{x^2-3x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$ Đặt $g(x=mx^2+1)$.

Nếu $g(1)=0 \Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $y=\dfrac{1}{x+2}$ (thỏa mãn)

Nếu $g(2)=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$ (Loại).

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=-1; x=3$.

Câu 59. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2}{x^2-2x}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

Câu 60. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ là

A. 4. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=-1$ nên $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)}=-\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ là không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$. **B**. $m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **D**. $m\neq\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Hàm số có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2-mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ 2^2-2m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4>0\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

Cách giải khác: Với $m=\dfrac{5}{2}, y=\dfrac{2}{2x-1}$, hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng. Loại trừ phương án **B** và **C**, với $m=0$, $y=\dfrac{x-2}{x^2+1}$, hàm số không có tiệm cận đứng, cho nên loại trừ phương án **D**.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-3x+2)\sin x}{x^3-4x}$ là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

- ☑ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-3x+2)\sin x}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-3x+2)\sin x}{(x^2-4)\,x}=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-3x+2)\sin x}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)\sin x}{(x-2)(x+2)x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)\sin x}{(x+2)x}=\dfrac{\sin 2}{8}$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{(x^2-3x+2)\sin x}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{(x-1)(x-2)\sin x}{(x-2)(x+2)x}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{(x-1)\sin x}{(x+2)x}=-\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng là $x=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

ĐK: $x\geq -\dfrac{1}{3}$ và $x\neq 1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=+\infty$

Do đó đồ thị có TCĐ là $x=1$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3-\dfrac{5}{x}}=-\dfrac{1}{3}$. Do đó đồ thị có TCN là $y=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9-x}}{x^2-2(m+1)x+m^2+2m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+2\end{array}\right.$ $(\Delta'=1)$.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x\leq 9\\x\neq m\\x\neq m+2.\end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng một tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình trên có một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng 9.

$\Leftrightarrow m \le 9 < m+2 \Leftrightarrow 7 < m \le 9$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của m để (C) không có tiệm cận đứng.

A. $\begin{bmatrix} m = 0 \\ m = 1 \end{bmatrix}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị (C) nếu có là đường thẳng $x = m$. Do đó đồ thị không có đường tiệm cận đứng khi $x = m$ là nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x + m = 0$.

Thay vào ta được $2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m = 1 \end{bmatrix}$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{5x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 5x^2 + x + 1 \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \\ \sqrt{2x - 1} - x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 \ne x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x \ne 1. \end{cases}$

Suy ra tập xác định là $\mathscr{D} = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}}{-1 + \sqrt{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}} = -\sqrt{5} \Rightarrow$ Đồ thị có đúng 1 tiệm cận ngang $y = -\sqrt{5}$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ đồ thị có đúng 1 tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho có đúng 2 tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - mx - m + 5}$ không có đường tiệm cận đứng?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 - mx - m + 5 = 0 \quad (1)$ có $\Delta = m^2 + 4m - 20$.

Trường hợp 1. $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Khi đó hàm số có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ nên không có tiệm cận đứng.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6} \Rightarrow m = -6, -5, \ldots, 2.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) có nghiệm $x=1$. Thay $x=1$ vào phương trình ta được

$$1^2-2m-m+5=0 \Leftrightarrow m=3.$$

Với $m=3$ thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x+2}$ không có tiệm cận đứng. Vậy $m=3$ thỏa bài toán.

Trường hợp 3. Phương trình (1) có nghiệm $x=2$. Thay $x=2$ vào phương trình, tìm được $m=3$ (thỏa bài toán).

Kết hợp cả ba trường hợp, có tất cả 10 giá trị m thỏa bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=(1;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

$\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng 2

Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq 0 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^3-3x^2-m=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2=m$. (*)

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$, có $f'(x)=3x^2-6x$. Do đó $f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng khi thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x\neq -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0. \end{array}\right.$

TH2. Phương trình (*) có hai nghiệm, trong đó một nghiệm $x=-1$ và một nghiệm $x\neq -1$ $\Leftrightarrow m=-4$.

Kết luận với $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{|x| - 2018}{x + 2019}$.

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - 2018}{x + 2019} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2018}{x}}{1 + \dfrac{2019}{x}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x - 2018}{x + 2019} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1 - \dfrac{2018}{x}}{1 + \dfrac{2019}{x}} = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Tìm số tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 5}}{\sqrt{2x + 1} - x - 1}$.

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 5}}{\sqrt{2x + 1} - x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4 + \dfrac{5}{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} - 1 - \dfrac{1}{x}} = -2.$

Suy ra $y = -2$ là tiệm cận ngang của hàm số.

☑ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} (\sqrt{4x^2 + 5}) = \sqrt{5} > 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} (\sqrt{2x + 1} - x - 1) = 0 \\ \sqrt{2x + 1} - x - 1 < 0 \text{ khi } x \to 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} y = -\infty.$

Suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng của hàm số.

☑ $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} y = -2\sqrt{6}.$

Suy ra $x = -\dfrac{1}{2}$ không là tiệm cận đứng của hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $a + b$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2 + ax^3 + \sqrt{bx^2 - 1}}{x + 1}$ (với a, b là các số nguyên) có tiệm cận ngang.

A. 3. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang ta cần $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2 + ax^3 + \sqrt{bx^2 - 1}}{x + 1} = \alpha \in \mathbb{R}$ suy ra $a = 0; b \ge 1$, do a, b nguyên nên $a = 0, b = 1$ suy ra $a + b = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$, liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↗	2	↘	$-\infty$	↘	-1

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)-1=0$ có 4 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận đứng. Ngoài ra, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ bằng 6.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ x^2+3x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ x\neq 0 \text{ và } x\neq -3\end{cases}\Rightarrow D=[-2;0)\cup(0;2]$

Ta thấy $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty\end{cases}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng $x=0$

Chọn đáp án B □

Câu 75. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **D.** $\dfrac{3}{x-2}+1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x^2}}}{2x-1}\\&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x^2}}}{2-\dfrac{1}{x}}\\&=\pm\infty.\end{aligned}$$

Do đó hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$ không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x-4}{mx-1}$ có đúng 2 tiệm cận.

A. $m>0$. **B.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 4 \end{cases}$. **C.** $m\neq 0$. **D.** $m\neq 4$.

Lời giải.

☑ $m=0$ hàm số đã cho trở thành $y=-4$. Khi đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-4$ nên hàm số có đúng một tiệm cận $y=-4$.

☑ $m\neq 0$ ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=m$. Hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang với mọi $m\neq 0$.

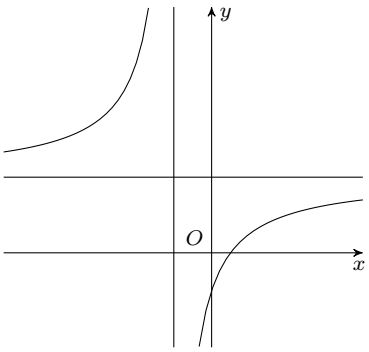
Để hàm số có đúng 2 tiệm cận thì hàm số sẽ có một tiệm cân đứng là $x=\dfrac{1}{m}$.

khi đó $(m-4)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 4$. Vậy với $m\neq 0$ và $m\neq 4$ thì đồ thị hàm số sẽ có đúng 2 tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 77.

Hình vẽ sau là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $bd<0$, $ab>0$. **B.** $bd>0$, $ad>0$.

C. $ad>0$, $ab<0$. **D.** $ab<0$, $ad<0$.

Lời giải.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương nên $ab<0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $bd<0$.

Từ đó suy ra $ad>0$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x}}{x-1}$ là bao nhiêu?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện $0\leq x\leq 2$ do đó hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$ nên hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$ $-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Hàm số $g(x)=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x\neq 1 \\ f(x)\neq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

☑ Có $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=0$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$.

☑ Xét phương trình $f(x)=\dfrac{5}{2}$ (1).

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (với $x_1<-2<x_2<1<x_3<2<x_4$).

Mặt khác hàm số $g(x)=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có tử thức là hằng số nên ta suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Xác định tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m<\dfrac{3}{2}$. **B**. $\begin{cases} m>-\dfrac{3}{2} \\ m\neq 1 \end{cases}$. **C**. $\begin{cases} m<\dfrac{3}{2} \\ m\neq 1,-3 \end{cases}$. **D**. $m>-\dfrac{3}{2}$.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có ba đường tiệm cận.

A. $m<1$. **B**. $m\neq 1$ và $m\neq -8$. **C**. $m\leq 1$ và $m\neq -8$. **D**. $m<1$ và $m\neq -8$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-2x+m\neq 0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}=1$. Suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Do đó đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2-2x+m}$ có ba đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ (C) có hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-2;1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ m-1\neq 0 \\ m+8\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m\neq 1 \\ m\neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\neq -8 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$, ($m$, n là tham số) nhận trục hoành Ox và trục tung Oy làm hai đường tiệm cận. Tổng $m+n$ bằng

A. -6. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

☑ Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2m-n)+m\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+m\cdot\dfrac{1}{x}+(n-6)\cdot\dfrac{1}{x^2}}=2m-n$, vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

☑ Đặt $u=x^2+mx+n-6$, $u(0)=0^2+m\cdot 0+n-6$.

☑ Để đồ thị hàm số nhận Oy làm tiệm cận ngang, Ox là tiệm cận đứng ta cần có

$$\begin{cases}2m-n=0\\ n-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3\\ n=6.\end{cases}$$

☑ Thử lại, với $m=3, n=6$ ta có hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2+3x}$. Đồ thị hàm số này có tiệm cận đứng có phương trình $y=0$, tiệm cận ngang có phương trình $x=0$, $x=-3$.

☑ Vậy $m=3$, $n=6$ thoả mãn yêu cầu bài toán $\Rightarrow m+n=9$.

Lưu ý: Việc thử lại là cần thiết, vì $x=0$ là nghiệm của mẫu số rất có thể bị rút gọn.
Ví dụ: Hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+x}$ có mẫu số có nghiệm $x=0$ nhưng trục tung vẫn không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tìm giá trị a để đồ thị của hàm số có đường tiệm cận và đường tiệm cận đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

A. $a>0$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=1$.

Lời giải.

Ta tìm được đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ với $a>0$.

Khi đó tiếp tuyến tại điểm x_0 có khoảng cách đến tiệm cận khi và chỉ khi tiếp tuyến có hệ số góc bằng $0\Leftrightarrow y'(x_0)=0$ có $y'=\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-\dfrac{ax(x+1)}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1}$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow ax^2+1=ax(x+1)\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{a}$.

Xét $x_0=\dfrac{1}{a}\Rightarrow y(x_0)=\dfrac{\dfrac{1}{a}+1}{\sqrt{a.\dfrac{1}{a}+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{a}+1}$.

Để khoảng cách giữa hai đường thẳng đó là $\sqrt{2}-1$ thì $\left|\sqrt{\dfrac{1}{a}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-101;101]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{m(x+1)^2+3}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 102. **B.** 101. **C.** 100. **D.** 202.

Lời giải.

☑ Nếu $m \in [0;101]$ thì $m(x+1)^2+3>0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bởi vậy hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$, suy ra đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

☑ Nếu $m \in [-101;0)$ thì $m(x+1)^2+3>0 \Leftrightarrow a<x<b$. Trong đó $a=-1-\sqrt{-\dfrac{3}{m}}$ và $b=-1+\sqrt{-\dfrac{3}{m}}$.

Tập xác định của hàm số đã cho là $(a;b)$. Rõ ràng m là số nguyên và $m \in [-101;0)$ thì $a \neq 1$ và $b \neq 1$. Từ đó ta có $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{m(x+1)^2+3}} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{m(x+1)^2+3}} = -\infty$.

Từ đó suy ra, khi $m \in \{-101;-100;-99;\ldots;-1\}$ thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{m(x+1)^2+3}}$ có hai tiệm cận đứng.

Như vậy có tất cả 101 giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-101;101]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{m(x+1)^2+3}}$ có hai tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có bốn đường tiệm cận phân biệt là

A. $m>0$. **B.** $m>\dfrac{9}{8}$. **C.** $m>\dfrac{8}{9}$. **D.** $m>\dfrac{8}{9}, m \neq 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có bốn đường tiệm cận phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang phân biệt.

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m>0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} y \neq \lim\limits_{x \to +\infty} y. \end{cases}$

Với $m>0$, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}$$
$$= \frac{1}{-\sqrt{m}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} y \neq \lim\limits_{x \to -\infty}, \forall m>0.$ (1)

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng phân biệt khi và chỉ khi phương trình $mx^2-3mx+2=0$

có hai nghiệm phân biệt khác 1. Ta có

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ m(1)^2 - 3m(1) + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 8m > 0 \\ m - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{8}{9} \end{array}\right. \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m > \dfrac{8}{9} \\ m \neq 1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} m > \dfrac{8}{9} \\ m \neq 1. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến giao điểm của hai tiệm cận. Giá trị nhỏ nhất có thể có của d là

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x; \dfrac{x-3}{x+1}\right), I(-1;1) \Rightarrow d^2 = IM^2 = (x+1)^2 + \dfrac{16}{(x+1)^2} \geq 2\sqrt{(x+1)^2 . \dfrac{16}{(x+1)^2}} = 8$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của d bằng $2\sqrt{2}$ khi $x = 1 \vee x = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi $M\left(x; \dfrac{x+2}{x-3}\right)$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang: $y = 1$ và tiệm cận đứng: $x = 3 \Rightarrow d(M; \text{TCD}) = |x-3|$ và $d(M; \text{TCN}) = \dfrac{5}{|x-3|}$.

Theo giả thiết suy ra $\dfrac{5}{|x-3|} = 5|x-3| \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow M(4;6) \\ x = 2 \Rightarrow M(2;-4). \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$	↗	3

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

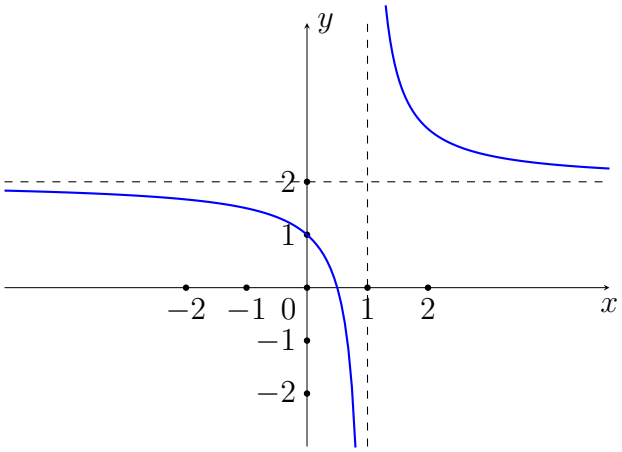
Lời giải.

Tiệm cận đứng: $x = \pm 1$ và tiệm cận ngang: $y = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 89.

Xác định a, b, c để hàm số $y = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án **đúng**?



A. $a = 2, b = 1, c = 1$. **B**. $a = 2, b = -1, c = 1$.

C. $a = 2, b = 1, c = -1$. **D**. $a = 2, b = 2, c = -1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ suy ra $c = -1$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $x = 1$ là đường tiệm cận đứng, suy ra $-\dfrac{c}{b} = 1 \Rightarrow b = 1$.

Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang suy ra $\dfrac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x^2 + mx} + mx + 2m^2$ có tiệm cận ngang.

A. $m = -1$ và $m = 1$. **B**. $m = -1$.

C. $m = -\sqrt{2}$. **D**. $m = -\sqrt{2}$ và $m = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $L = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x^2 + mx} + mx + 2m^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{2 + \dfrac{m}{x}} + m + \dfrac{2m^2}{x} \right)$

Nếu $m + \sqrt{2} > 0$ thì $L = +\infty$, nếu $m + \sqrt{2} < 0$ thì $L = -\infty$.

Nếu $m = -\sqrt{2}$ thì: $L = \lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{2 - \dfrac{\sqrt{2}}{x}} - \sqrt{2} + \dfrac{4}{x} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7\sqrt{2} - \dfrac{16}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{\sqrt{2}}{x}} + \sqrt{2} - \dfrac{4}{x}} = \dfrac{7}{2}$

Suy ra $y = \dfrac{7}{2}$ là một tiệm cận ngang. Ta nhận giá trị $m = -\sqrt{2}$.

Tương tự ta có $y = -\dfrac{7}{2}$ là một tiệm cận ngang khi $m = \sqrt{2}$ và $x \to -\infty$.

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{5x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x-1} - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2x-1} \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 \neq x^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$. Ta có

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-1} = \dfrac{\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5}$

$\Rightarrow y = -\sqrt{5}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

☑ $\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{5x^2+x+1}\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{2x-1-x^2} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{5x^2+x+1}\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{-(x-1)^2} = -\infty$

$\Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận thỏa mãn bài.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng?

A. 8. **B**. 10. **C**. 11. **D**. 9.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng khi tất cả các nghiệm của phương trình $x^2-mx-m+5=0$ đều là nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$ hoặc phương trình $x^2-mx-m+5=0$ vô nghiệm.

☑ **Trường hợp 1.** Tất cả các nghiệm của phương trình $x^2-mx-m+5=0$ đều là nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$, tức là hai phương trình $x^2-mx-m+5=0$ và $x^2-3x+2=0$ tương đương nhau. Do đó

$$1^2-m\cdot1-m+5=0 \Leftrightarrow -2m+6=0 \Leftrightarrow m=3.$$

Thử lại ta thấy $m=3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

☑ **Trường hợp 2.** Phương trình $x^2-mx-m+5=0$ vô nghiệm khi

$$(-m)^2-4(-m+5)<0 \Leftrightarrow m^2+4m-20<0 \Leftrightarrow -2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}.$$

Vì m nguyên nên $m\in\{-6;-5;-4;\ldots;2\}$.

Vậy có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Xét hàm số trên tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}+3+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 3$. Vậy đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2\right) = 5+\sqrt{3}$, và $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-x)=0$ và $x^2-x>0$ nên: $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

A. $1 < m < 5$. **B.** $-1 < m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ không tồn tại và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

Để hàm số có 4 tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ (1) phải có 3 nghiệm phân biệt. Xét $m = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$. Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ thì $x = 0$ hoặc $x = 2$. Ta có $f(0) = 1$ và $f(2) = 5$. Vậy để phương trình (1) có 3 nghiệm thì $1 < m < 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - mx^2}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < 0$.

Lời giải.

Khi $m = 0$ hàm số trở thành $y = x$ và không có tiệm cận.

Khi $m > 0$ hàm số có tập xác định $D = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{m}}; \dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$ và không có tiệm cận ngang.

Khi $m < 0$ hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có 2 đường tiệm cận ngang $y = -\dfrac{1}{\sqrt{-m}}x, y = \dfrac{1}{\sqrt{-m}}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 5}{x + 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 2)$. Xét điểm A bất kì trên (C) có $x_A = a$, $(a \neq -1)$. Đường thẳng MA cắt (C) tại điểm B (khác A). Hoành độ điểm B là

A. $-1 - a$. **B.** $2 - a$. **C.** $2a + 1$. **D.** $-2 - a$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C),

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Suy ra $M(-1; 2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận và cũng là tâm đối xứng của đồ thị (C) do đó M là trung điểm AB, suy ra $x_A + x_B = 2x_M \Rightarrow x_B = -2 - a$.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Cho hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các đường tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Giả sử A có toạ độ $A\left(a; \dfrac{a + 1}{a - 1}\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C),

$\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Khoảng cách từ A đến đường tiệm cận đứng là $d_1 = |a - 1|$, khoảng cách từ A đến đường tiệm cận ngang là $d_2 = \left|\dfrac{2}{a - 1}\right|$.

Khi đó $d_1+d_2=|a-1|+\left|\dfrac{2}{a-1}\right|\geq 2\sqrt{|a-1|\cdot\left|\dfrac{2}{a-1}\right|}=2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $|a-1|=\left|\dfrac{2}{a-1}\right|\Leftrightarrow |a-1|^2=2\Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{16-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=(-4;4)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{16-x^2}}$ không xác định nên đồ thị không có đường tiệm cận ngang.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{16-x^2}}=+\infty$ nên đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=4$;

$\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{16-x^2}}=-\infty$ nên đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=-4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 99. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x-2}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) nhận đường thẳng $y=3$ làm đường tiệm cận ngang và đi qua $A\,(3;1)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-5$. **B**. $P=3$. **C**. $P=-8$. **D**. $P=5$.

Lời giải.

Ta có $A\,(3;1)\in C\Rightarrow 3a+b=1$

Tiệm cận ngang của C là $y=a$.

Theo giả thiết đồ thị C nhận đường thẳng $y=3$ làm đường tiệm ngang $\Rightarrow a=3\Rightarrow b=-8\Rightarrow P=a+b=-5$

Chọn đáp án (A) □

Câu 100. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m-2n$.

A. 0. **B**. -3. **C**. -9. **D**. 6.

Lời giải.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n-3+\dfrac{n-2017}{x}}{1+\dfrac{m+3}{x}}=n-3$.

Vì đồ thị nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $n-3=0\Leftrightarrow n=3$.

• Vì đồ thị hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng nên $\begin{cases}n-2017\neq 0\\ m+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\neq 2017\\ m=-3.\end{cases}$

Vậy $m-2n=-9$.

Chọn đáp án (C) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. C	5. D	6. A	7. A	8. A	9. A	10. B
11. B	12. C	13. D	14. A	15. D	16. A	17. D	18. D	19. B	20. C
21. B	22. D	23. C	24. C	25. C	26. A	27. C	28. B	29. B	30. C
31. C	32. D	33. B	34. D	35. A	36. D	37. C	38. B	39. A	40. C
41. B	42. B	43. C	44. A	45. D	46. B	47. D	48. B	49. D	50. A
51. A	52. B	53. A	54. A	55. C	56. C	57. A	58. B	59. B	60. C
61. A	62. A	63. D	64. A	65. A	66. A	67. B	68. A	69. B	70. C
71. C	72. D	73. C	74. B	75. B	76. B	77. C	78. B	79. D	80. C
81. D	82. B	83. D	84. B	85. D	86. B	87. A	88. C	89. C	90. D
91. C	92. B	93. A	94. A	95. D	96. D	97. D	98. C	99. A	100. C

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có bốn đường tiệm cận phân biệt là

A. $m>0$. **B.** $m>\dfrac{9}{8}$. **C.** $m>\dfrac{8}{9}$. **D.** $m>\dfrac{8}{9}$, $m\neq 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 4 đường tiệm cận phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 2 đường tiệm cận ngang phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to-\infty} y, \exists \lim\limits_{x\to+\infty} y \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y \end{cases}.$$

Với $m>0$ ta có

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-\sqrt{m-\dfrac{3m}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{m}}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y \neq \lim\limits_{x\to+\infty} y$ luôn đúng $\Rightarrow m>0$ (1).

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có 2 đường tiệm cận đứng phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2-3mx+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

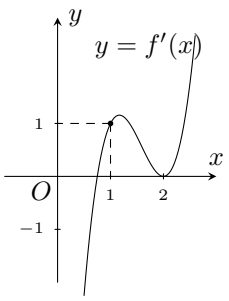
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 9m^2-8m>0 \\ m-3m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{8}{9} \end{array}\right. \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m>\dfrac{8}{9} \\ m\neq 1 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} m>\dfrac{8}{9} \\ m\neq 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên

. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq\dfrac{1}{2}; f(x)\neq 0; f(x)\neq 1$.

Xét phương trình $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\,(a\in(0;5;1))\\x=2\\x=1\\x=b\,(b\in(1;2))\\x=c\,(c\in(2;3))\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng $x=a; x=b; x=c; x=2$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2018x+2019}-24\sqrt{14}}{x^2-(m+1)x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 2020. **B**. 2019. **C**. 2018. **D**. 2021.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}-x^2+2018x+2019\geq 0\\x^2-(m+1)x+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 2019\\x\neq 1; x\neq m\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì $-1\leq x\leq 2019$.

Ta có

$$\begin{aligned}y=\frac{\sqrt{-x^2+2018x+2019}-24\sqrt{14}}{x^2-(m+1)x+m}&=\frac{(-x^2+2018x+2019)-(24\sqrt{14})^2}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})}\\&=\frac{-x^2+2018x-6045}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})}\\&=\frac{-(x-3)(x-2015)}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})}\end{aligned}$$

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi chỉ khi $\begin{cases}-1\leq m\leq 2019\\m\neq 1; m\neq 3; m\neq 2015\end{cases}$.

Mặt khác, m là số nguyên nên ta có $2021-3=2018$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B**. 9. **C**. 8. **D**. 11.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m} = \lim\limits_{x\Rightarrow\infty} \dfrac{\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{1-3m\dfrac{x^2}{x^3}+(2m^2+1)\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{m}{x^3}} = 0.$

Suy ra $y=0$ là tiệm ngang của đồ thị hàm số.

Vậy để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 3 đường tiệm cận đứng.

Hay phương trình $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$. Ta có

$(1)\Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0(*). \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khác 3 thì $m\neq 3$ và phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác m và khác 3. Do đó

$$\begin{cases} \Delta' = m^2-1>0 \\ 3^2-2m3+1\neq 0 \\ m^2-2m^2+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{5}{3} \\ m\neq -1 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m\neq 3 \\ -6\leq m\leq 6 \end{cases} \Rightarrow m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}.$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B**. 11. **C**. 0. **D**. 10.

Lời giải.

Phương pháp:

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, từ đó suy ra điều kiện để bài toán thỏa.

Cách giải:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 1$ hay $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = -1$ hay $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó bài toán thỏa $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một tiệm cận đứng.

Ta lại có $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \dfrac{x^2-mx-1}{(x+2)\left(\sqrt{x(x-m)}+1\right)}$

Để đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường TCĐ thì $x=-2$ không là nghiệm của tử và $x=-2$ thuộc tập xác định của hàm số.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-2-m) \geq 0 \\ (-2)^2 - m \cdot (-2) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ 2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \neq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Do $m \in (-10;10), m \in \mathbb{Z}$.

Nên $m \in \{-2;-1;0;1;\ldots;8;9\}$ và có 12 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Biết đồ thị hàm số $y = \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

A. -6. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2m-n) + \dfrac{m}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{m}{x} + \dfrac{n-6}{x^2}} = 2m - n.$

Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6} = 2m - n.$

Vậy $y = 2m - n$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Theo giả thiết, ta có $2m - n = 0$ (1).

Để hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình

$x^2 + mx + n - 6 = 0$ có một nghiệm $x = 0$ hay $n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$ (2).

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $(2m-n)x^2 + mx + 1 = 0$ nên với $n = 6$ thì đồ thị hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Từ (1) và (2) suy ra $m = 3$. Vậy $m + n = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào?

A. $(29;30)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(26;27)$. **D.** $(28;29)$.

Lời giải.

Ta có $IA \cdot IB = 6$.

Tam giác IAB vuông tại $I \Rightarrow$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{3}.$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $R_{\min} \Leftrightarrow IA = IB$ tức là hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

Hệ số góc $k = \dfrac{-3}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2 + \sqrt{3}$ là

$$y = -(x - 2 - \sqrt{3}) + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -x + 2\sqrt{3} + 4 \, (\Delta_1).$$

Diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ tiếp tuyến (Δ_1) là $\dfrac{\left|2\sqrt{3}+4\right|^2}{2} \approx 27,86$.
Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2-\sqrt{3}$ là

$$y = -(x-2+\sqrt{3}) + \frac{3-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -x-2\sqrt{3}+4\,(\Delta_2).$$

Diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ tiếp tuyến (Δ_2) là $\dfrac{\left|-2\sqrt{3}+4\right|^2}{2} \approx 0,26$.
Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng $(27;28)$.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $1 < m < 5$. **B.** $-1 < m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}} = 0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+m-1 = -\infty$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$.
Do vậy đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.
Để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận thì phương trình $x^3-3x^2+m-1 = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.
Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2 = 1-m$. (2)
Số nghiệm của (2) là giao điểm của đường thẳng y = 1 –m và đồ thị hàm số $y = x^3-3x^2$.
Xét hàm số $y = x^3-3x^2$. Ta có $y' = 3x^2-6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy (2) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < 1-m < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+a}{x^3+ax^2}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $a > 0$. **B.** $a \neq 0, a \neq -1$. **C.** $a \neq 0, a \neq \pm 1$. **D.** $a < 0, a \neq -1$.

Lời giải.

$y = \dfrac{x^2+a}{x^2(x+a)}$.

Để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì $x^3+ax^2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của $x^2+a=0$. Do đó 0 và $-a$ không là nghiệm của x^2+a và $0 \neq -a$.

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ a^2+a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-2x+m}-(x+1)}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in [-4;5)\backslash\{1\}$. **B.** $m \in [-4;5]$. **C.** $m \in (-4;5]\backslash\{1\}$. **D.** $m \in (-5;4]\backslash\{1\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2x^2-2x+m} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2-2x+m=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ m=-x^2+4x+1 \end{cases}$.

Ta thấy rằng phương trình $\sqrt{2x^2-2x+m}-(x+1)=0$ có nhiều nhất 2 nghiệm. Do đó đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng khi $\sqrt{2x^2-2x+m}-(x+1)=0$ có hai nghiệm khác 0 và lớn hơn hoặc bằng -1.

Đặt $f(x)=-x^2+4x+1,\ x \geq -1$. Ta có $f'(x)=-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$. Bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↗	5	↘	$-\infty$

Suy ra $\sqrt{2x^2-2x+m}-(x+1)=0$ có hai nghiệm phân biệt khi $-4 \leq m < 5$.

Phương trình $\sqrt{2x^2-2x+m}-(x+1)=0$ có nghiệm khác 0 khi $m \neq 1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng khi $m \in [-4;5)\backslash\{1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{mx+m^2+2}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 2.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{2m-m^2-2}{(x+2)^2} = \dfrac{-(m-1)^2-1}{(x+2)^2} < 0 \Rightarrow$

$\min y = y(1) = \dfrac{m^2+m+2}{3} = 2 \Leftrightarrow m^2+m-4=0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$.

A. 41. **B.** 42. **C.** 43. **D.** 44.

Lời giải.

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-x-y}$ Đặt $t=x+y\Rightarrow P=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$

Theo giả thiết: $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2=x+2y+1+2\sqrt{2(x-1)(y+1)}\le x+2y+1+2(x-1)+y+1=3(x+y)$

$\Rightarrow t\le 3t\Leftrightarrow t^2-3t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 3$

Xét $f(t)=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$

$f'(t)=2t+2-\frac{4}{\sqrt{4-t}}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow (2t+2)\sqrt{4-t}=4\Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t}=2$

$$\Leftrightarrow (t^2+2t+1)(4-t)=4\Leftrightarrow -t^3+2t^2+7t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1+2\sqrt{2}\notin[0;3] \\ t=1-2\sqrt{2}\notin[0;3] \end{array}\right.$$

Ta có $f(0)=18; f(3)=25\Rightarrow \min P=18, \max P=25\Rightarrow M+m=25+18=43$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}(C)$ biết (C) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính giá trị $P=a+b$.

A. -1. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 2.

Lời giải.

TCN: $y=4a-b=0\Rightarrow b=4a$.

(C) nhận $x=0$ làm tiệm cận đứng $\Rightarrow 0^2+a.0+b-12=0\Rightarrow b=12\Rightarrow a=3\Rightarrow a+b=15$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}$ có bốn đường tiệm cận.

A. $m>0$. **B.** Với mọi giá trị của m.

C. $m<1, m\neq 0$ và $m\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m<-1$ hoặc $m>1$.

Lời giải.

Với $m=0$ hàm số không xác định. Do đó $m\neq 0$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}=\dfrac{1}{|m|}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{m^2x^2+m-1}}=\dfrac{-1}{|m|}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận thì cần tìm m để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng, nghĩa là cần tìm m để phương trình $g(x)=m^2x^2+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases}\Delta=-4m^2(m-1)>0\\ g(-1)=m^2+m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m<1\\ m\neq 0\\ m\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases} (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có $\begin{cases} m<1 \\ m\neq 0 \\ m\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x-1}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$.

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang, và không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $-2<m<5$. **B.** $-2<m<4$. **C.** $-1<m<4$. **D.** $-1<m<5$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2m}{x}+\dfrac{2m+8}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2m}{x}+\dfrac{2m+8}{x^2}}}=3$, tương tự ta cũng tính được $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-3$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là: $y=3$ và $y=-3$.

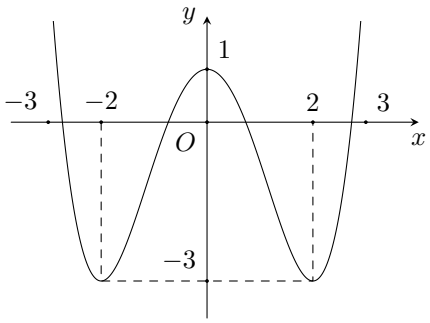
Do đó để thoả yêu cầu bài toán thì đồ thị hàm số phải không có đường tiệm cận đứng, tức là $x^2+2mx+2m+8=0$ vô nghiệm, điều này dẫn đến $-2<m<4$.

Chọn đáp án B □

Câu 17.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.



Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có các nghiệm ở tử là $x=0$ (bội 1), $x=2$ (bội 1), $x=-2$ (bội 2).

Mặt khác, từ đồ thị $f(x)$ ta thấy hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có các nghiệm ở mẫu là $f^2(x)+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0, x=x_1, x=x_2 \\ x=-2, x=2. \end{array}\right.$

Trong đó nghiệm $x=0$, $x=-2$, $x=2$ đều có bội 2 và x_1, x_2 khác các nghiệm của tử.

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các tiệm cận đứng là $x=0$, $x=2$;

$x = x_1$; $x = x_2$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng?

A. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$. **B.** $-5 \le m < -1$. **C.** $\begin{cases} m \le -5 \\ m > -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \le -4 \\ m > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng suy ra mẫu thức có đúng một nghiệm khác 1 hoặc mẫu thức có hai nghiệm trong đó có một nghiệm bằng 1 và nghiệm kia khác 1.

∘ Trường hợp 1: $x = 1$ là nghiệm của mẫu, suy ra $m = -5$. Khi đó:
$y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -2$.

∘ Trường hợp 2: $x = -1$ không là nghiệm của mẫu, suy ra $m \neq -5$.

Xét hàm số $g(x) = x^3+3x^2+m+1; g'(x) = 3x^2+6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$m+5$	↘	$m+1$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mẫu số có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} m+5 < 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$.

Từ hai trường hợp ta có đáp số $\begin{cases} m \le -5 \\ m > -1 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2+1}$ có tiệm cận ngang là

A. $a = \pm 2$. **B.** $a = -2$ và $a = \dfrac{1}{2}$. **C.** $a = \pm\dfrac{1}{2}$. **D.** $a = \pm 1$.

Lời giải.

Ta có $y = ax + \sqrt{4x^2+1} = \dfrac{(a^2-4)x^2-1}{ax - \sqrt{4x^2+1}}$.

Đồ thị có tiệm cận ngang khi tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ hữu hạn hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hữu hạn.

Do đó $a = \pm 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

A. $M(2;2)$. **B.** $M(4;3)$. **C.** $M(0;-1)$. **D.** $M(1;-3)$.

Lời giải.

Gọi $M\left(m, \dfrac{m+2}{m-2}\right) \in (C)$, với $m \neq 2$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là: $d = |x_M - 2| + |y_M - 1|$.

Ta có $d = |m-2| + \left|\dfrac{m+2}{m-2} - 1\right| = |m-2| + \dfrac{4}{|m-2|} \geq 4$.

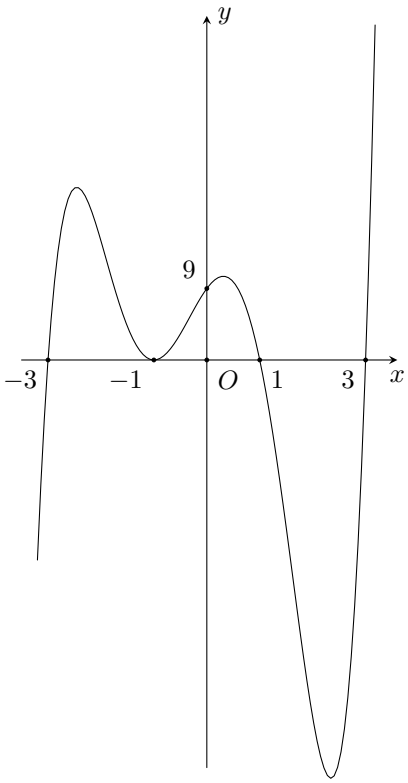
Đẳng thức xảy ra khi $m = 4$ hoặc $m = 0$. Vậy $M(4;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21.

Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3. **B**. 4. **C**. 9. **D**. 8.



Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $\begin{cases} x \geq 1 \\ f^2(x) - 9f(x) \neq 0. \end{cases}$

Từ $f^2(x) - 9f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 9. \end{array}\right.$

Với $f(x) = 0$ có nghiệm là $x = \pm 1, x = \pm 3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy nghiệm của phương trình $f(x) = 9$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 9$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên có nghiệm là $-3 < x_3 < x_2 < -1 < 0 < x_1 < 1 < 3 < x_0$.

Do đó tập xác định của hàm số $y = g(x)$ là $\mathscr{D} = [1; +\infty) \setminus \{1; 3; x_0\}$.

Khi đó ta có

- ☑ $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{f(x)\,(f(x)-9)} = +\infty$ (vì x tiến gần bên phải 1 thì $f(x) < 0, f(x) - 9 < 0$), suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{f(x)\,(f(x)-9)} = -\infty$ (vì x tiến gần bên phải 3 thì $f(x) > 0, f(x) - 9 < 0$), suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{f(x)\,(f(x)-9)} = +\infty$ (vì x tiến gần bên phải x_0 thì $f(x) > 0, f(x) - 9 > 0$), suy ra đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng.

Và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{f(x)\,(f(x)-9)} = 0$ (vì bậc ở mẫu của $y = g(x)$ là 10 và bậc tử của nó là $\dfrac{1}{2}$).
Do vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.
Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bốn tiệm cận ngang và đứng.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Tất cả giá trị của m để đồ thị hàm số $y = mx + \sqrt{x^2+x+1}$ có tiệm cận ngang là
A. $m \neq \pm 1$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m \neq \pm 2$. **D.** $m = \pm 2$.

Lời giải.

Ta có: $L = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} + m\right)$
Nếu $m+1 > 0$ thì $L = +\infty$, nếu $m+1 < 0$ thì $L = -\infty$.
Nếu $m = -1$ thì $L = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}$
Suy ra $y = \dfrac{1}{2}$ là một tiệm cận ngang. Ta nhận giá trị $m = -1$.
Tương tự ta có $y = -\dfrac{1}{2}$ là một tiệm cận ngang khi $m = 1$ và $x \to -\infty$.
Vậy $m = \pm 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại một điểm bất kì thuộc (C) luôn tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích không đổi. Diện tích đó bằng
A. 8. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có: $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$
Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right) \in (C)$ $(x_0 \neq 1)$ là tiếp điểm.
Phương trình tiếp tuyến $d: y = -\dfrac{3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 1$.
Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận, ta có tọa độ của $I(1;1)$.
Gọi A là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến d, ta có tọa độ $A\left(1; \dfrac{x_0+5}{x_0-1}\right)$.
Gọi B là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến d, ta có tọa độ $B\,(2x_0-1;1)$.
Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = \left(0; \dfrac{6}{x_0-1}\right) \Rightarrow IA = \dfrac{6}{|x_0-1|} \\ \overrightarrow{IB} = (2x_0-2, 0) \Rightarrow IB = 2|x_0-1| \end{cases}$
Do ΔIAB vuông tại I nên $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}\cdot IA \cdot IB = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{|x_0-1|}\cdot 2|x_0-1| = 6$.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận.
A. $m \in [-5;4] \setminus \{-4\}$. **B.** $m \in (-5;4]$.
C. $m \in (-5;4) \setminus \{-4\}$. **D.** $m \in (-5;4] \setminus \{-4\}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \dfrac{1}{\pm\sqrt{2}-1}$ nên đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng bốn đường tiệm cận thì phương trình $\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1 \quad (1)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 1 \\ f(x) = x^2 - 4x = m+1 \end{cases}$$

Ta có $f(1) = -3$ và bảng biến thiên

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Nên $\begin{cases} -4 < m+1 \leq 5 \\ m+1 \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-5;4] \setminus \{-4\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-1}+2018}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m < 2$.
B. $m > 2$ hoặc $m < -1$.
C. $2 < m \leq 3$.
D. $2 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}+2018}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2018}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{m+2}{x^2}}} = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có đúng 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi $f(x) = x^2-2mx+m+2$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 \leq x_1 < x_2$.

Đặt $t = x-1$. Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm $1 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(t) = (t+1)^2 - 2m(t+1) + m + 2 = 0$ có hai nghiệm $0 \leq t_1 < t_2 \Leftrightarrow t^2 + 2(1-m)t - m + 3 = 0$ có hai nghiệm $0 \leq t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m - 1 > 0 \\ 3 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0;y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$.

A. $S=8$. **B.** $S=\dfrac{17}{4}$. **C.** $S=\dfrac{23}{4}$. **D.** $S=2$.

Lời giải.

Ta có $x=1$ là tiệm cận đứng, $y=1$ là tiệm cận ngang của hàm số suy ra giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ có dạng

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0=\frac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{2x_0-2}.$$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B suy ra $A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$ và $B\left(2x_0-1;1\right)$.

Ta có

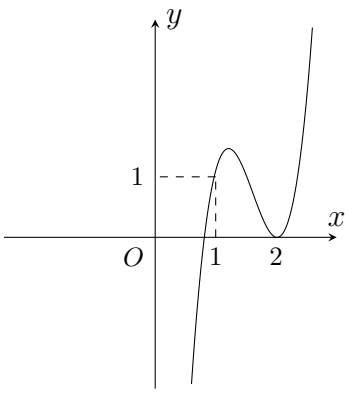
$$\begin{aligned}
&S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cdot d(O,IB)\cdot IB=8\cdot\frac{1}{2}\cdot d(O,IA)\cdot IA\\
\Leftrightarrow\ &1\cdot IB=8\cdot 1\cdot IA\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{(2x_0-1-1)^2}=8\sqrt{\left(\frac{x_0}{x_0-1}-1\right)^2}\\
\Leftrightarrow\ &(2x_0-2)^2=64\left(\frac{1}{x_0-1}\right)^2\\
\Leftrightarrow\ &(x_0-1)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_0-1=2\\&x_0-1=-2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_0=3(\text{nhận})\\&x_0=-1(\text{loại}).\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$x_0=3\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{4}\Rightarrow S=3+4\cdot\dfrac{5}{4}=8.$

Chọn đáp án A □

Câu 27.

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\cdot\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

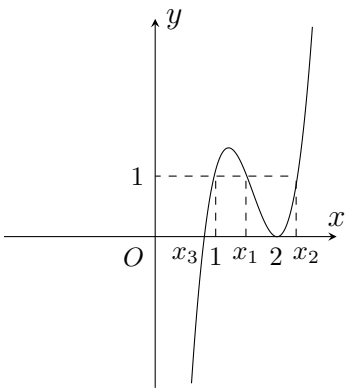
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x)=0$ khi $x=2$ (nghiệm kép), $x=x_3$ (với $0<x_3<1$) (nghiệm đơn);

$f(x)=1$ khi $x=1, x=x_1, x=x_2$ (nghiệm đơn).

Ta có $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\cdot\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 1\\f^2(x)-f(x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\f(x)\neq 0\\f(x)\neq 1\end{cases}$.



suy ra

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq x_1 \text{ (với } 1 < x_1 < 2) \\ x \neq x_2 \text{ (với } 2 < x_2). \end{cases}$$

Do đó $\mathscr{D} = (1; +\infty) \backslash \{x_1, 2, x_2\}$.

Nhận xét:

- ☑ $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) \neq \infty$ (do $x = 1$ là nghiệm đơn của $f(x)$)
  $\Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x \to x_1} g(x) = \infty$ nên $x = x_1$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng (vì $x = 2$ là nghiệm đơn của tử, đồng thời là nghiệm kép của mẫu).
- ☑ $\lim\limits_{x \to x_2} g(x) = \infty$ nên $x = x_2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	
y	-2	↗	-1	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) + 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ có hai nghiệm phân biệt a và b (với $a < 0$ và $0 < b < 1$.

Nên, tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) + 3}$ là $\mathbb{R} \setminus \{1; a; b\}$.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{2f(x) + 3} = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{1}{2f(x) + 3} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{2f(x) + 3} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2f(x) + 3} = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) + 3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của C tại hai điểm A, B. Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng

A. 2π. **B.** 8π. **C.** $4\sqrt{2}\pi$. **D.** 4π.

Lời giải.

• Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=1$. Gọi I là giao của hai đường tiệm cận, suy ra $I(2;1)$.

• Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông IAB. Khi đó J là trung điểm của AB nên $R=IJ=\dfrac{1}{2}AB$.

$\Rightarrow$ Diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ bán kính IJ có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AB có độ dài nhỏ nhất.

• Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến AB là $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-2}\right)$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến AB qua điểm M có dạng: $y=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$.

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại điểm $A\left(2;\dfrac{x_0+6}{x_0-2}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B\left(2x_0-2;1\right)$. Suy ra, $J\equiv M$.

• Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$AB^2=4\left(x_0-2\right)^2+\left(\frac{x_0+6}{x_0-2}-1\right)^2=4\left(x_0-2\right)^2+\left(\frac{8}{x_0-2}\right)^2\geq 32.$$

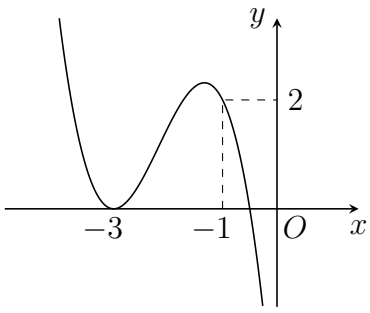
Suy ra, AB có giá trị nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$. Vậy chu vi của nhỏ nhất của đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB là $\pi AB=4\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 30.

Cho đồ thị hàm bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.



Lời giải.

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-3 & \text{(nghiệm kép)}\\ x=a, & \text{với } a\in(-1;0)\end{array}\right.$ và $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & \\ x=b, & \text{với } b\in(-3;-1)\\ x=c, & \text{với } c\in(-\infty;-3)\end{array}\right.$.

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{xf(x)[f(x)-2]}$.

Hàm số $y=g(x)$ xác định khi

$$\begin{cases} x^2+x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \text{ hoặc } x>0 \\ x \neq -3 \\ x \neq b \\ x \neq c. \end{cases}$$

Đặt $f(x)=k(x+3)^2(x-a)$ và $f(x)-2=k(x+1)(x-b)(x-c)$ (với k là số thực âm).

Khi đó $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x(x+1)}}{k^2x(x+3)^2(x+1)(x-a)(x-b)(x-c)}$.

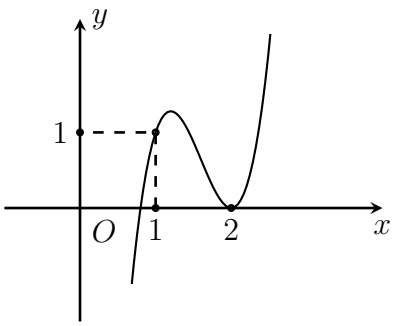
- ☑ $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=0 \Rightarrow x=-1$ không là tiệm cận của (C).
- ☑ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của (C).
- ☑ $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)=-\infty \Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng của (C).
- ☑ $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=+\infty \Rightarrow x=b$ là tiệm cận đứng của (C).
- ☑ $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=+\infty \Rightarrow x=c$ là tiệm cận đứng của (C).

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x)-f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.



Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq 0 \\ f^2(x)-f(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 1. \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy $f(x)=0$ có hai nghiệm, một nghiệm $x_1<1$ và một nghiệm kép bằng 2. Do đó ta biểu diễn được $f(x)$ dưới dạng

$$f(x)=a(x-x_1)(x-2)^2.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm $1, x_2, x_3$, với $1<x_2<2<x_3$. Do đó ta biểu diễn được $f(x)-1$ dưới dạng

$$f(x)-1=a(x-1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Lúc này điều kiện được viết lại như sau $\begin{cases} x>1 \\ x\neq x_2, x\neq 2, x\neq x_3. \end{cases}$

Với điều kiện đó thì $g(x)$ được viết lại là

$$g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)}.$$

Ta có

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = 0,$$

($x = 1$ **không** là tiệm cận đứng)

$$\lim_{x\to x_2^+} g(x) = \lim_{x\to x_2^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = +\infty,$$

($x = x_2$ là tiệm cận đứng)

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = -\infty,$$

($x = 2$ là tiệm cận đứng)

$$\lim_{x\to x_3^+} g(x) = \lim_{x\to x_3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = +\infty,$$

($x = x_3$ là tiệm cận đứng)

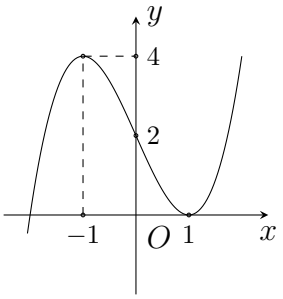
Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có tất cả 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ bằng

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.



Lời giải.

Xét $f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 4. \end{array}\right.$

Xét $f(x) = 0$ có hai nghiệm, nghiệm $x_1 \neq \pm 1$ và nghiệm $x_2 = 1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x) = 4$ có hai nghiệm, nghiệm $x_3 \neq \pm 1$ và nghiệm $x_4 = -1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	‖ $+\infty$	↘	0	↗	‖ $+\infty$	↗	-1
		$-\infty$					$-\infty$		

Gọi k, l là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - 2018}$. Tính $k+l$.

A. $k + l = 2$. **B.** $k + l = 3$. **C.** $k + l = 4$. **D.** $k + l = 5$.

Lời giải.

Vì phương trình $f(x) = 2018$ có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - 2018}$ có ba đường tiệm cận đứng.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x) - 2018} = -\dfrac{1}{2019}$ nên $y = -\dfrac{1}{2019}$ là một đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x) - 2018} = 0$ nên $y = 0$ là một đường tiệm cận ngang.

Vậy $k + l = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = -3\log_{a^4} \dfrac{a}{b} + \log_b^2 (ab)$.

A. $\min P = 3$. **B.** $\min P = 4$. **C.** $\min P = \dfrac{5}{2}$. **D.** $\min P = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = -\dfrac{3}{4}(1 - \log_a b) + \left(\dfrac{1}{\log_a b} + 1\right)^2$.

Đặt $t = \log_a b, (t > 1)$, ta được $P = f(t) = \dfrac{-3}{4}(1 - t) + \left(\dfrac{1}{t} + 1\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}$.

Có $f'(t) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{t^3} - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{3t^3 - 8t - 8}{4t^3}$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - 8t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in (1; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	3	↗	

Dựa vào bảng biến thiên thì $f(t)$ trên $(1; +\infty)$ ta được $\min f(t) = 3$ tại $t = 2$.

Vậy $\min P = 3$.

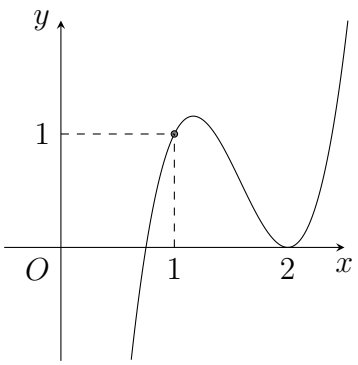
Chọn đáp án (A) □

Câu 35.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.



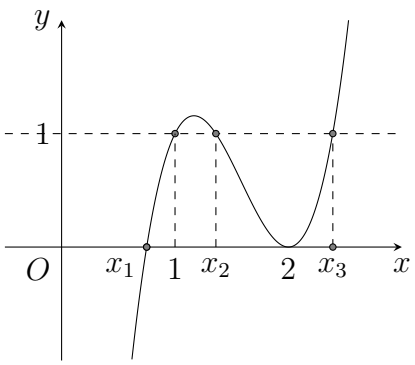
Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=2. \end{array}\right.$ (1)

Từ đó suy ra $f(x)=a(x-x_1)(x-2)^2$.

Từ đồ thị hàm số ta có $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_2 \\ x=x_3. \end{array}\right.$ (2)

Từ đó suy ra $f(x)-1=a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$.



Kết hợp (1) và (2), suy ra hàm số $g(x)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x\neq 0 \\ f(x)(f(x)-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq x_2 \\ x\neq 2 \\ x\neq x_3. \end{cases}$$

Mặt khác, ta có

$$g(x)=\frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)^2(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)},$$

suy ra $x=2$, $x=x_2$, $x=x_3$ là các đường tiệm cận đứng của hàm số $g(x)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)}$ có đúng một đường tiệm cận là

A. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$. **B.** $\varnothing$.

C. $\{0\}\cup(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

Nhận xét rằng đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$. Do đó để đồ thị có đúng 1 đường tiệm cận thì phương trình sau phải vô nghiệm hoặc có đúng 1 là $x=\dfrac{1}{2}$

$$(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)=0 \ (*)$$

- Với $m=0$ thì $(*)$ có đúng một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$, thỏa bài toán.

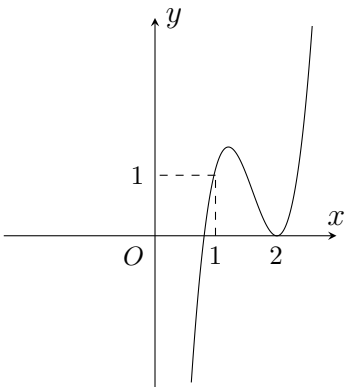
- Với $m\neq 0$, ta có $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx^2-2x+1=0 \ \text{(a)} \\ 4x^2+4m+1=0 \ \text{(b)} \end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình (a) và (b) không có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$. Do đó điều kiện bài toán là (a) và (b) phải vô nghiệm. Suy ra $m>1$. Vậy $\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.

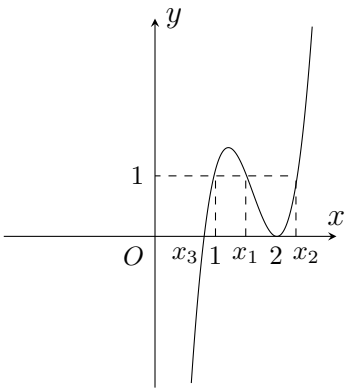
Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\cdot\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có



- ☑ $f(x)=0$ khi $x=2$ (nghiệm kép), $x=x_3$ (với $0<x_3<1$) (nghiệm đơn);
- ☑ $f(x)=1$ khi $x=1, x=x_1, x=x_2$ (đều là nghiệm đơn).

Ta có $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\cdot\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$.

Điều kiện:

$$\begin{cases}x\geq 1\\ f^2(x)-f(x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ f(x)\neq 0\\ f(x)\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq 2\\ x\neq 1\\ x\neq x_1\text{ (với } 1<x_1<2)\\ x\neq x_2\text{ (với } 2<x_2).\end{cases}$$

Do đó $\mathscr{D}=(1;+\infty)\backslash\{x_1,2,x_2\}$.

Nhận xét:

- ☑ $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)\neq\infty$ (do $x=1$ là nghiệm đơn của $f(x)$)
  $\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x\to x_1}g(x)=\infty$ nên $x=x_1$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng (vì $x=2$ là nghiệm đơn của tử, đồng thời là nghiệm kép của mẫu).
- ☑ $\lim\limits_{x\to x_2}g(x)=\infty$ nên $x=x_2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang?

A. $m=1$. **B**. $m=-1$. **C**. $m=\pm 1$. **D**. Không có m.

Lời giải.

Nhận xét. Hàm số có tiệm cận ngang thì tập xác định phải chứa khoảng vô cùng, nên điều kiện cần là $m\geq 0$.

- ☑ TH1: $m=0\Rightarrow y=x-\sqrt{-3x+7}$, hàm số xác định trên nửa khoảng $\left(-\infty;\dfrac{7}{3}\right]$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{-3x+7}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-7}{x+\sqrt{-3x+7}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3-\dfrac{7}{x}}{1-\sqrt{-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}=-\infty.$$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

☑ TH2: $m>0$

+ Xét $x\to-\infty$, thì $y=x+x\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}\to-\infty$, đồ thị không có tiệm cận ngang.

+ Xét $x\to+\infty$

- Nếu $m=1$

  + Khi $x\to+\infty$ thì

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}y&=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-7}{x+\sqrt{x^2-3x+7}}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\dfrac{7}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

  Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{3}{2}$.

- Nếu $0<m<1$

  + Khi $x\to+\infty$ thì $y=x\left(1-\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}\right)\to+\infty$. Đồ thị hàm số có không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m>1$

  + Khi $x\to+\infty$ thì $y=x\left(1-\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}\right)\to-\infty$. Đồ thị hàm số có không có tiệm cận ngang.

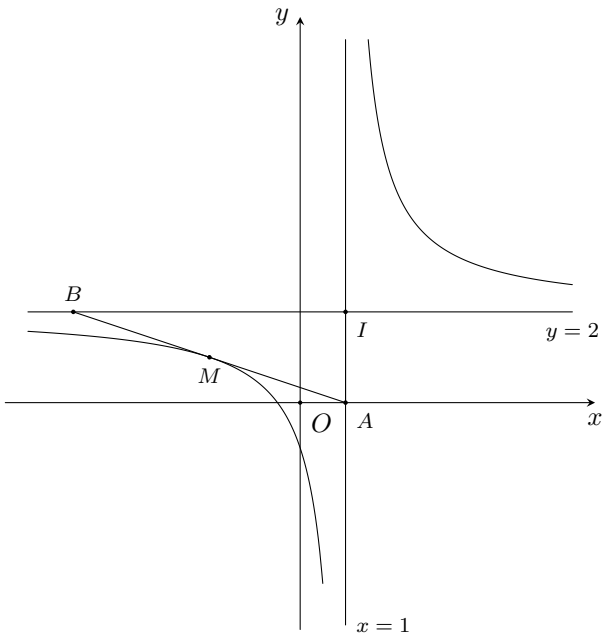
Vậy hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến tại điểm $M(a;b), a<0$ cắt hai tiệm cận tại A và B sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b$ là

A. $2-2\sqrt{3}$. **B.** $5-2\sqrt{3}$. **C.** $3-2\sqrt{3}$. **D.** $-2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(x_0; 2 + \dfrac{3}{x_0 - 1}\right) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến d tại M có dạng $y = \dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + 2 + \dfrac{3}{x_0 - 1}$.

Hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$ nên $I(1; 2)$.

Các giao điểm của d với 2 tiệm cận là $A(1; 2 + \dfrac{6}{x_0 - 1}), B(2x_0 - 1; 2)$.

Ta có $\begin{cases} IA = \sqrt{(1-1)^2 + \left(2 + \dfrac{6}{x_0-1} - 2\right)^2} = \dfrac{6}{|x_0 - 1|} \\ IB = \sqrt{(2x_0 - 1 - 1)^2 + (2-2)^2} = 2|x_0 - 1| \end{cases} \Rightarrow IA \cdot IB = \dfrac{6}{|x_0-1|} \cdot 2|x_0 - 1| = 12$. Chu vi tam giác IAB bằng

$$AB + IA + IB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{12} + \sqrt{24}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \dfrac{6}{|x_0 - 1|} = 2|x_0 - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 + \sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Suy ra $M(1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ hoặc $M(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$. Vậy $a + b = 3 - 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

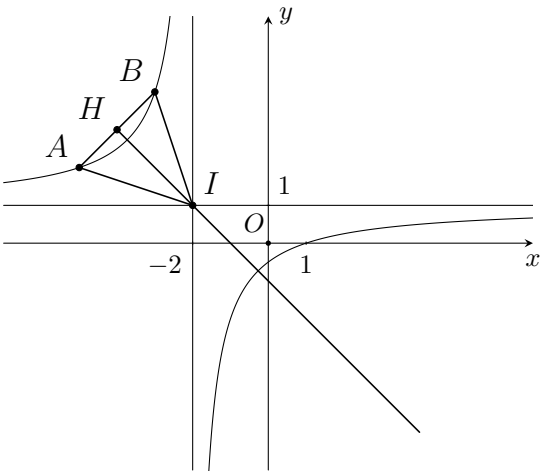
Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $\sqrt{6}$. **B**. $2\sqrt{2}$. **C**. $2\sqrt{3}$. **D**. 2.

Lời giải.

Do tính chất đối xứng nên tam giác ABI đều thì AB vuông góc với đường phân giác của các góc phần tư II và IV. Suy ra phương trình đường thẳng AB có dạng $y = x + m$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và AB là:

$$\begin{aligned} &\frac{x-1}{x+2} = x + m \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + (m+1)x + 2m + 1 = 0 \ (x \neq -2). \end{aligned}$$



Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên, khi đó $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$.

Ta có $\Delta = m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$

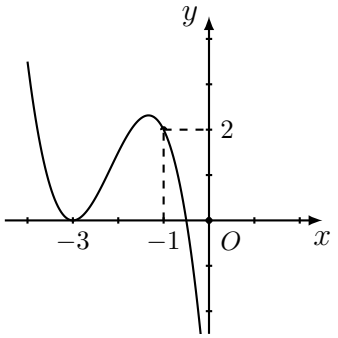
Tam giác ABI cân tại I do đó đều khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &IH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{d}(I, AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \\ \Leftrightarrow\ &\frac{|m-3|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ \Leftrightarrow\ &|m-3| = \sqrt{3}\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ \Leftrightarrow\ &|m-3| = \sqrt{3}\sqrt{(m+1)^2 - 4(2m+1)} \\ \Leftrightarrow\ &|m-3| = \sqrt{3}\sqrt{m^2 - 6m - 3} \\ \Leftrightarrow\ &m^2 - 6m = 9. \end{aligned}$$

Khi đó $AB = \sqrt{2(m^2 - 6m - 3)} = 2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 41.
Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 6. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = x_3 \in (-1; 0). \end{array}\right.$

Do đó, ta viết $f(x) = a(x+3)^2(x - x_3)$.

Đồng thời, $f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-\infty; -3) \\ x = x_2 \in (-3; -1) \\ x = -1 \end{array}\right.$. Do đó, ta viết $f(x) - 2 = a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{a^2x(x+3)^2(x+1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;x_1)\cup(x_1;-3)\cup(-3;x_2)\cup(x_2;-1)\cup(0;+\infty)$.

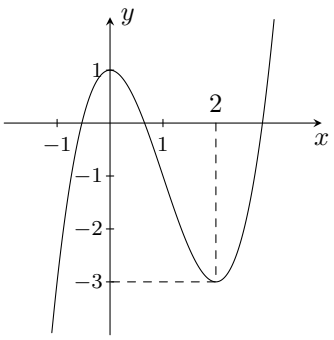
Từ đó suy ra đồ thị hàm số đã cho có bốn tiệm cận đứng là $x=0, x=3, x=x_1, x=x_2$. .

Chọn đáp án D □

Câu 42.

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x)-f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B**. 6. **C**. 3. **D**. 5.



Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x)-f(x)]}$ xác định khi $\begin{cases}x\le 2\\ f^2(x)-f(x)\ne 0.\end{cases}$

Phương trình $f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=1.\end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=1$ có một nghiệm kép $x_1=0$ một nghiệm $x_2>2$ (loại).

Phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm $-1<x_3<0$, một nghiệm $0<x_4<1$ và một nghiệm $x_5>2$ (loại).

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;2]\setminus\{x_1,x_3,x_4\}$.

Do $x_1=0$ là nghiệm kép của mẫu và là nghiệm đơn của tử nên $x=0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Cùng với hai đường tiệm cận $x=x_3, x=x_4$, ta được 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận

A. $-1\le m<0$. **B**. $-1\le m\le 0$. **C**. $m<-1$. **D**. $m>0$.

Lời giải.

☑ Nếu $m\ge 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{m}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\sqrt{m}$ suy ra $y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng.

☑ Nếu $m<-1$ thì hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ không tồn tại. Suy ra không tồn tại tiệm cận đứng.

☑ Nếu $m=-1$ thì hàm số không tồn tại tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng.

☑ Nếu $-1<m<0$ thì hàm số không tồn tại tiệm cận ngang.

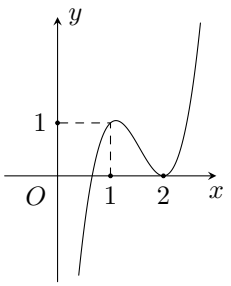
$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Vậy $-1\le m<0$ thì hàm số có một tiệm cận.

Chọn đáp án A ☐

Câu 44.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có

☑ $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(0;1)\\x=2\end{array}\right.$ trong đó nghiệm $x=2$ là nghiệm kép và $x=x_1$ là nghiệm đơn.

☑ $f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_2\in(1;2)\\x=x_3>2\end{array}\right.$ trong đó các nghiệm trên đều là nghiệm đơn.

Vậy

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{(x-1)(x-2)\cdot\sqrt{x-1}}{x\cdot f(x)\cdot[f(x)-1]}\\&=\frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2x\cdot(x-x_1)(x-2)^2(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}\\&=\frac{\sqrt{x-1}}{x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}.\end{aligned}$$

Dựa trên điều kiện $x\geq 1$ nên đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=2$, $x=x_2$ và $x=x_3$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)-1}}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 10. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 0.

Lời giải.

Viết lại $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)-1}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-mx-1}}{x+2}$.

Ta có $x^2-mx-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}>0\\x_2=\dfrac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}<0.\end{array}\right.$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$. Suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.

Do đó để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 1 tiệm cận đứng hay

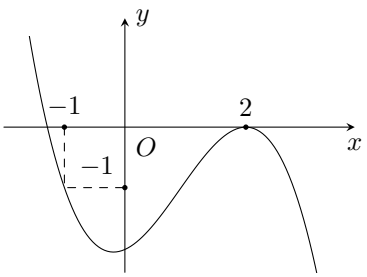
$$-2<x_2\Leftrightarrow -2<\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{2}.$$

Vậy $m=-1,0,1,2,3,...,9$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 46.

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-2x-3)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)\left[(f(x))^2+f(x)\right]}$ có nhiều nhất bao nhiêu tiệm cận?



A. 8. **B**. 7. **C**. 6. **D**. 5.

Lời giải.

Hàm số $g(x)$ xác định $\begin{cases} x\geq -2 \\ x^2-x\neq 0 \\ f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq -1. \end{cases}$

Ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Ta thấy $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=x_1\in(-2;-1). \end{array}\right.$ (1)

Ta thấy $f(x)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=x_2\in(0;2) \\ x=x_3\in(2;+\infty). \end{array}\right.$ (2)

Ta thấy $g(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)\sqrt{x+2}}{x(x-1)f(x)\left[f(x)+1\right]}$. (3)

Từ (1), (2) và (3), ta thấy $x(x-1)f(x)\left[f(x)+1\right]=0$ có tối đa 6 nghiệm $x\in(2;+\infty)$. (4)

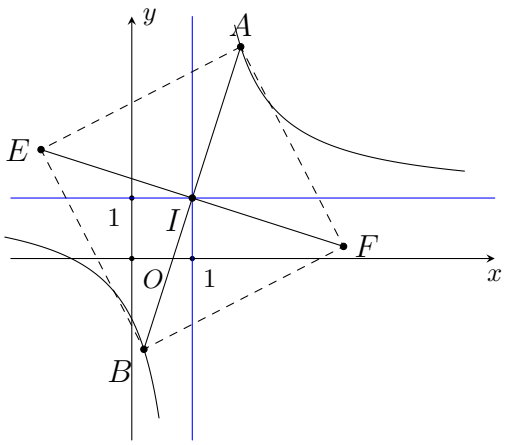
Từ (4) ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 6 tiệm cận đứng.

Từ đó, ta khẳng định định đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 7 tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 47.

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giả sử A, B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là



A. $8\sqrt{2}$. **B**. $4\sqrt{2}$. **C**. 8. **D**. 16.

Lời giải.

Có $I(1;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Viết lại $y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$.

$A\in(C)\Rightarrow A\left(a;1+\dfrac{2}{a-1}\right)$, $(a\neq 1)$, suy ra $\overrightarrow{IA}=\left(a-1;\dfrac{2}{a-1}\right)$.

Diện tích hình vuông $AEBF$ nhỏ nhất khi IA nhỏ nhất.

Có $IA^2 = (a-1)^2 + \dfrac{4}{(a-1)^2} \geq 2\sqrt{(a-1)^2 \cdot \dfrac{4}{(a-1)^2}} = 4.$

Dấu bằng xảy ra khi $(a-1)^2 = \dfrac{4}{(a-1)^2} \Leftrightarrow (a-1)^4 = 4 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}.$

Khi đó $AI = 2 \Rightarrow AE = 2\sqrt{2}.$

Diện tích hình vuông là $S = AE^2 = 8.$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2019}{f(x) - m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m < 0$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 1$.

Lời giải.

Ta có $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^4 x = \dfrac{1}{(\tan^2 x + 1)^2}.$

Do vậy $f(\tan x) = \cos^4 x \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^2}.$

Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2019}{f(x) - m}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Ta có $f(x) = m \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x^2+1)^2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}}. \end{cases}$

Do vậy $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

Vậy giá trị m cần tìm là $0 < m < 1$.

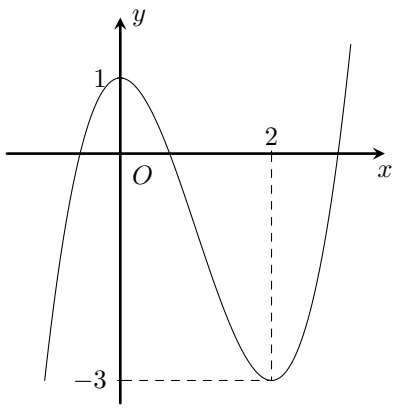
Chọn đáp án B □

Câu 49.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)[f^2(x) + 3f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.



Lời giải.

Điều kiện để $\sqrt{1-x}$ có nghĩa là $x \leq 1$.

Ta có $f^2(x) + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{array}\right.$.

- ☑ Từ đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x = x_1 < 0$, $x = x_2 < 1$ và $x = x_3 > 1$.
- ☑ Phương trình $f(x) = -3$ có hai nghiệm $x = x_4 < 0$, $x = 2$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_4$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Tịnh tiến hệ trục theo véc-tơ $\overrightarrow{OI}=(-1;1)\Rightarrow I(0;0)$ và $(C)\colon Y=\dfrac{-3}{X}$.

Gọi $A\left(a;\dfrac{-3}{a}\right)$, $B\left(b;\dfrac{-3}{b}\right)\in(C)$, điều kiện $a\neq b$.

Tam giác IAB đều

$$\begin{cases} IA=IB \\ \cos(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})=\cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2} \quad (1) \\ \dfrac{ab+\dfrac{9}{ab}}{\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}\cdot\sqrt{b^2+\dfrac{9}{b^2}}}=\dfrac{1}{2} \quad (2). \end{cases}$$

Từ $(2)\Rightarrow ab>0$ do đó $(1)\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2b^2-9)=0\Rightarrow ab=3$.

Suy ra $AB^2=2\left(3+\dfrac{9}{3}\right)=12\Rightarrow AB=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. B	5. A	6. B	7. B	8. A	9. B	10. A
11. C	12. C	13. C	14. C	15. A	16. B	17. A	18. C	19. A	20. B
21. B	22. B	23. D	24. D	25. C	26. A	27. B	28. D	29. C	30. D
31. C	32. D	33. D	34. A	35. D	36. C	37. B	38. A	39. C	40. C
41. D	42. C	43. A	44. A	45. C	46. B	47. C	48. B	49. D	50. A

BÀI 5 KHẢO SÁT HÀM SỐ

A CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm bậc ba

Phương pháp giải.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0).$$

Ví dụ 1. Khảo sát dự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

☑ Sự biến thiên

$y' = 3x^2 - 6x$, xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{\text{CĐ}} = y(0) = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2; y_{\text{CT}} = y(2) = -3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty$.

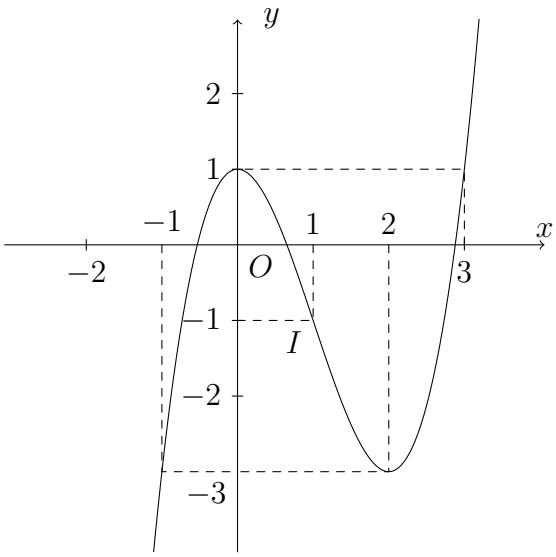
$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

☑ Đồ thị

Đồ thị cắt trục Oy tại $(0;1)$.
Đồ thị đi qua các điểm $(2;-3)$, $(-1;-3)$, $(3;1)$.
Đồ thị nhận điểm $I(1;-1)$ làm tâm đối xứng.



□

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

Lời giải.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

☑ Sự biến thiên

$y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số không có cực trị.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.

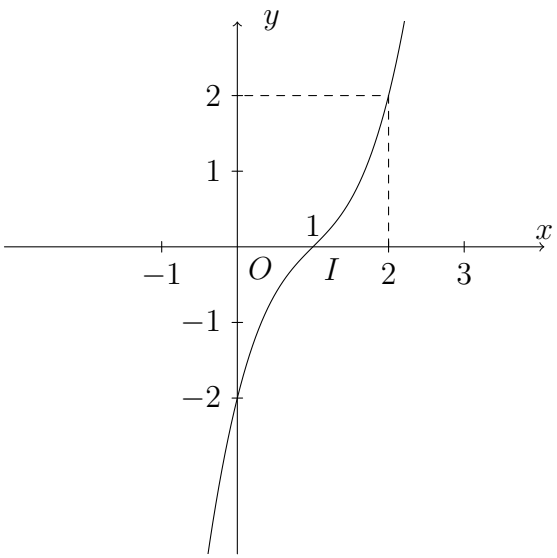
$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $(0;-2)$.
$x^3-3x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow$
$x=1$
suy ra đồ thị cắt trục Ox tại $(1;0)$.
Đồ thị đi qua $(2;2)$.
Đồ thị nhận $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.



□

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x-1$.

Lời giải.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

☑ Sự biến thiên
$y'=-x^2+2x-1=-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$, $y'<0$ với $\forall x\neq 1$.
Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;+\infty)$.
Hàm số không có cực trị.
$\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.
Bảng biến thiên

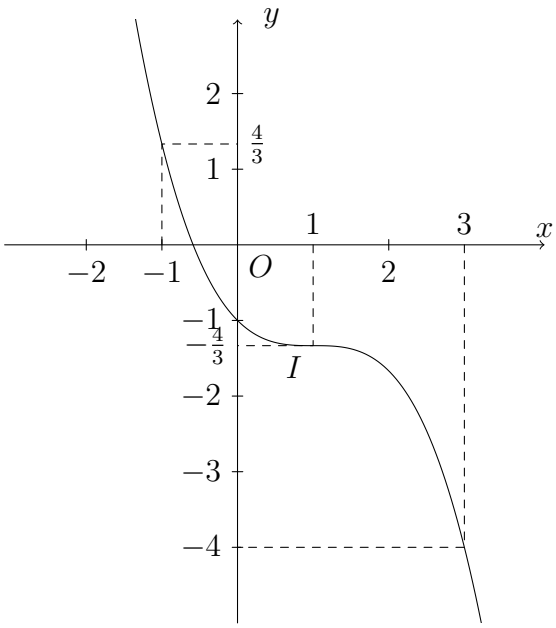
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$

☑ Đồ thị

Đồ thị cắt trục Oy tại $(0;-1)$.

Đồ thị đi qua các điểm $(3;-4)$, $\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$.

Đồ thị nhận điểm $I\left(1;-\dfrac{4}{3}\right)$ làm tâm đối xứng.



□

Ví dụ 4.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-x^3-3x^2+2$.

② Sử dụng đồ thị, biện luận số nghiệm của phương trình $-x^3-3x^2+2=m$.

Lời giải.

a)

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

☑ Sự biến thiên

$y'=-3x^2-6x$, xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$;

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0.\end{array}\right.$

$y'<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$;

$y'>0\Leftrightarrow x\in(-2;0)$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$; đồng biến trên $(-2;0)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{\text{CD}}=y(0)=2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2; y_{\text{CT}}=y(-2)=-2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$.

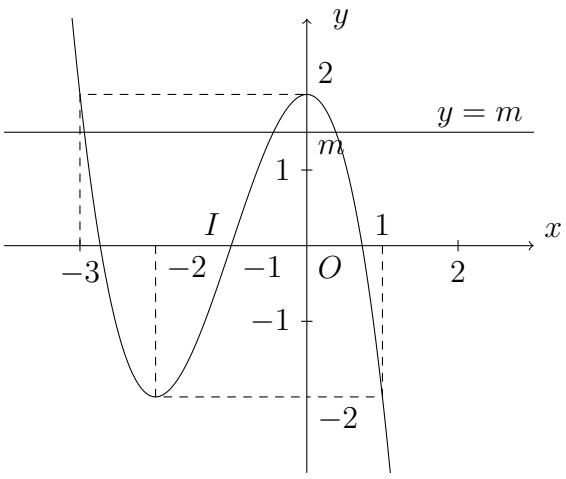
$\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

☑ Đồ thị

Đồ thị cắt trục Oy tại $(0;2)$.
Đồ thị đi qua các điểm $(-2;-2)$, $(1;-2)$, $(-3;2)$.
Đồ thị nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng.



b) Số nghiệm của phương trình $-x^3-3x^2+2=m$ (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ và đường thẳng $y=m$.
Dựa vào đồ thị, ta suy ra:

- ☑ $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$: Phương trình (*) có một nghiệm.
- ☑ $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$: Phương trình (*) có hai nghiệm.
- ☑ $-2<m<2$: Phương trình (*) có ba nghiệm.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị $(\mathscr{C}_m)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m=1$.

b) Tìm m để đồ thị $(\mathscr{C}_m)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2<2018$.

Lời giải.

a) Khi $m=1$ hàm số có dạng $y=x^3-2x^2+1$.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

$y'>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$; $y'<0\Leftrightarrow x\in\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$. Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$, nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0, y_{\text{CD}}=y(0)=1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{4}{3}, y_{\text{CT}}=y\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

☑ Đồ thị

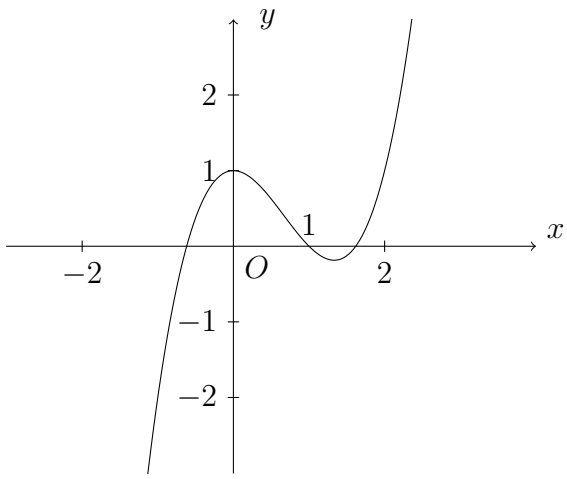
Đồ thị cắt Oy tại $(0;1)$.

$x^3-2x^2+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị cắt trục Ox tại $(1;0)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Đồ thị qua $\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{27}\right)$.



b) x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $x^3-2x^2+(1-m)x+m=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x-m=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Coi $x_1=1$. Khi đó $(\mathscr{C}_m)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2<2018$ khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm x_2, x_3 khác 1 và thỏa mãn $x_2^2+x_3^2<2017$.

$(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1+4m>0 \\ -m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<m\neq 0 \quad (**)$.

Khi đó, theo Định lý Viet ta có:

$x_2^2+x_3^2<2017 \Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3<2017 \Leftrightarrow 1+2m<2017 \Leftrightarrow m<1008 \quad (***)$.

Kết hợp $(**)$ và $(***)$, ta được $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}<m<1008 \\ m\neq 0 \end{cases}$.

□

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=\dfrac{1}{3}x+5$.

Lời giải.

a) Xét $y=x^3-3x^2$.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$. Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CĐ}} = y(0) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{\text{CT}} = y(2) = -4$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên

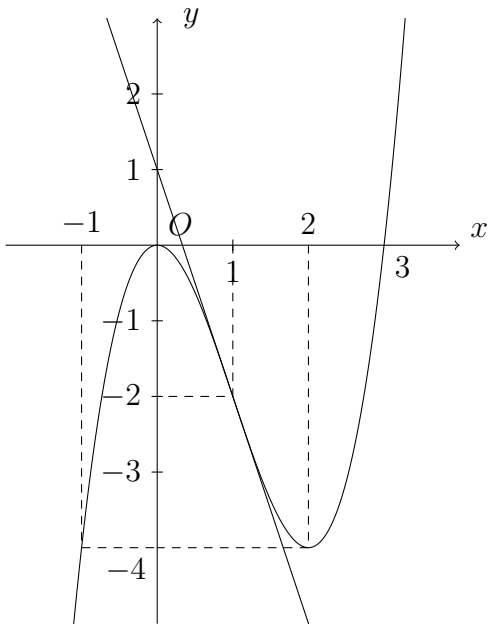
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

☑ Đồ thị

$x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số đi qua $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(-1; -4)$, $(2; -4)$.



b) Hệ số góc của d là $\dfrac{1}{3}$.

Tiếp tuyến $\Delta \perp d \Rightarrow$ hệ số góc của Δ là -3.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của Δ và $(\mathscr{C}) \Rightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -2$.

Vậy $\Delta : y + 2 = -3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 1$. □

Bài 3. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho.

b) Tìm m để phương trình $|2x^3 - 9x^2 + 12x - 4| + 2m - 1 = 0$ có nhiều hơn 3 nghiệm phân biệt.

① Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = 36x - 5$.

Lời giải.

a) Xét $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 2)$. Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(1; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y_{\text{CĐ}} = y(1) = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{\text{CT}} = y(2) = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

☑ Đồ thị

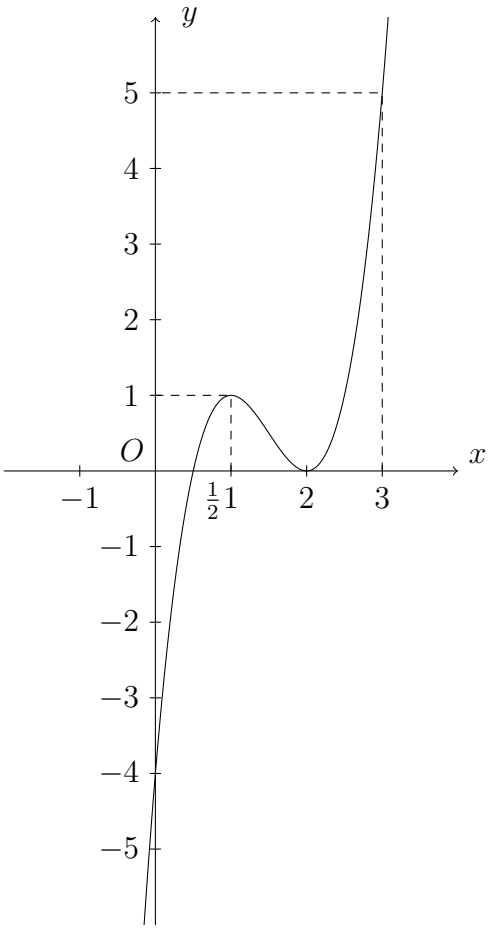
Đồ thị hàm số giao Oy tại $(0; -4)$.

$2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

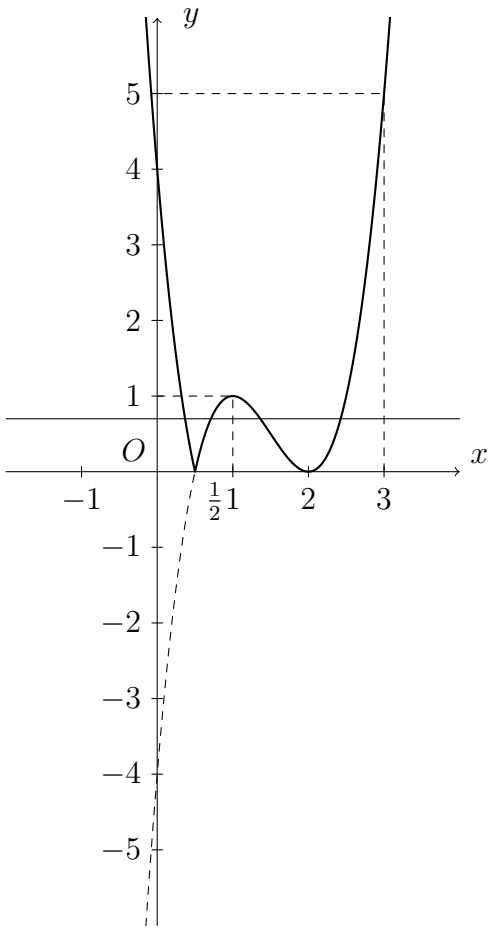
Suy ra đồ thị hàm số giao Ox tại $(2; 0)$, $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Đồ thị đi qua $(3; 5)$.



b)

$|2x^3-9x^2+12x-4|+2m-1=0$
$\Leftrightarrow |2x^3-9x^2+12x-4|=1-2m.$
Suy ra số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị $(\mathscr{C}_1)$ của hàm số $y=|2x^3-9x^2+12x-4|$ với đường thẳng $d: y=1-2m$.
Đặt $f(x)=2x^3-9x^2+12x-4$
$\Rightarrow y=|2x^3-9x^2+12x-4|=|f(x)|.$
Do $(\mathscr{C}_1)$ suy ra từ $(\mathscr{C})$ như sau:
- Giữ nguyên phần đồ thị $(\mathscr{C})$ nằm phía trên trục Ox;
- Lấy đối xứng phần đồ thị $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới Ox qua trục Ox.
Từ đồ thị $(\mathscr{C}_1)$ như hình bên suy ra phương trình đã cho có nhiều hơn 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi
$0<1-2m<1 \Leftrightarrow 0<m<\dfrac{1}{2}$.



c) Tiếp tuyến song song với $\Delta: y=36x-5 \Rightarrow$ hệ số của tiếp tuyến là $36 \Rightarrow y'(x_0)=36$
$\Leftrightarrow 6x_0^2-18x_0+12=36 \Leftrightarrow x_0^2-3x_0-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=4 \Rightarrow y_0=28 \\ x_0=-1 \Rightarrow y_0=-27 \end{array}\right.$.
Với $x_0=4, y_0=28$, ta có tiếp tuyến $y=36x-116$.
Với $x_0=-1, y_0=-27$, ta có tiếp tuyến $y=36x+9$. □

Bài 4. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho khi $m=1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

① Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

Lời giải.

a) Với $m=1$ hàm số có dạng $y=-x^3+3x^2-4$.

☑ Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$y'<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; $y'>0 \Leftrightarrow x\in(0;2)$. Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=2, y_{\text{CĐ}}=y(2)=0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0, y_{\text{CT}}=y(0)=-4$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

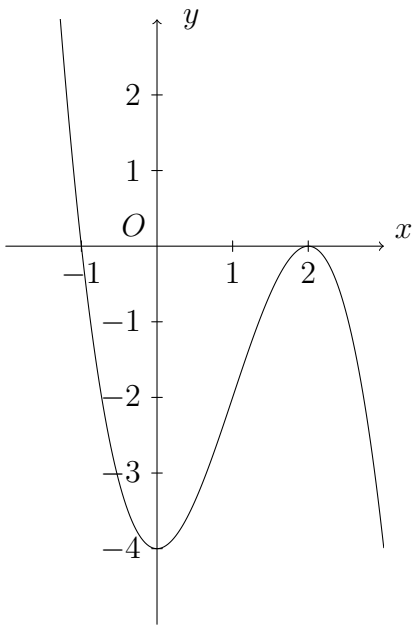
☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số giao Oy tại $(0;-4)$.

$-x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow (x+1)(-x^2+4x-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số giao Ox tại $(2;0)$, $(-1;0)$.



b) $y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<0 \\ \Delta'=9+9(m^2-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 \le 0 \Leftrightarrow m=0.$

Kết luận: $m=0$.

c) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;2) \Leftrightarrow -3x^2+6x+3(m^2-1) \le 0, \forall x \in (-\infty;2)$

$\Leftrightarrow x^2-2x-(m^2-1) \ge 0, \forall x \in (-\infty;2) \Leftrightarrow f(x)=x^2-2x \ge m^2-1, \forall x \in (-\infty;2).$

$\Leftrightarrow \min\limits_{(-\infty;2)} f(x) \ge m^2-1 \quad (*).$

Lập bảng biên thiên của hàm số $f(x)=x^2-2x$ $f'(x)=2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

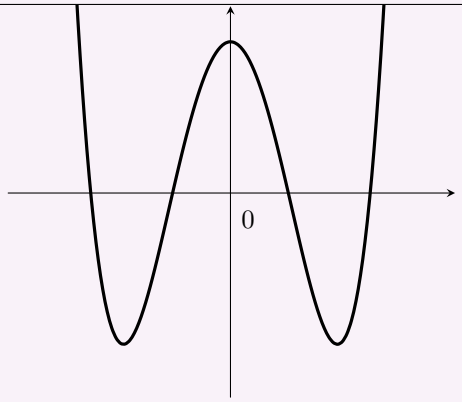
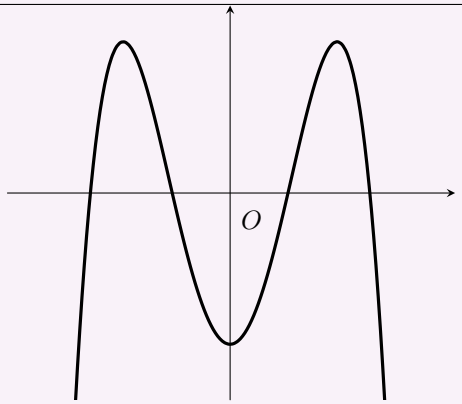
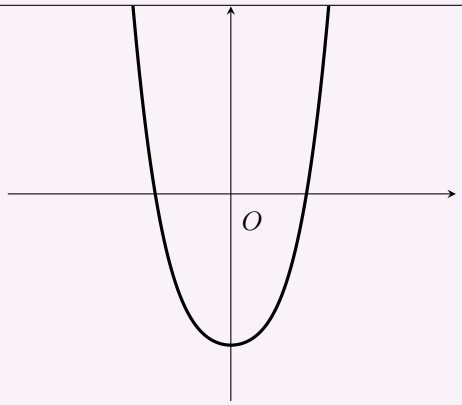
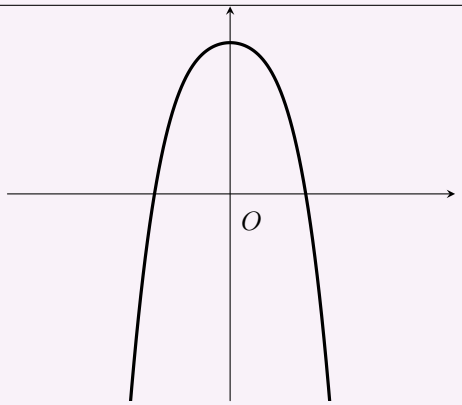
Từ BBT suy ra $\min\limits_{(-\infty;2)} f(x)=-1$. Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 \ge m^2-1 \Leftrightarrow m^2 \le 0 \Leftrightarrow m=0$.

Kết luận: $m=0$. □

DẠNG 2. Khảo sát hàm số bậc 4 trùng phương và các bài toán liên quan

Phương pháp giải.

Các dạng đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$.

Dấu a	$a > 0$	$a < 0$
$a.b < 0$		
$a.b \geq 0$		

Ví dụ 5. Khảo sát hàm số $y = -x^4 - x^2 + 2$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

$y' = -4x^3 - 2x^2 = -2x(2x^2 + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$.

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

+ Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CD}} = y(0) = 2$.

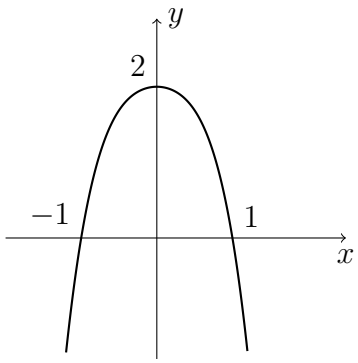
Hàm số không có điểm cực tiểu.

+ Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị:



□

Ví dụ 6. Khảo sát hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

$$y' = 4x^3 - 4x^2 = 4x(x^2-1);\ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{bmatrix}.$$

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$.

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

+ Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CĐ}} = y(0) = -3$.

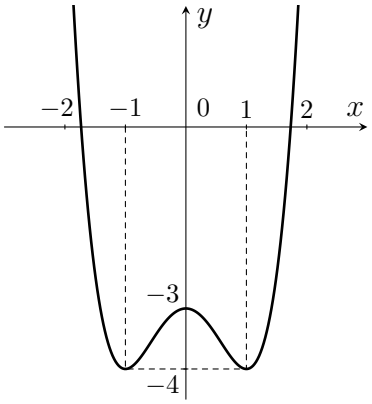
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$, $y_{\text{CT}} = y(\pm 1) = -4$.

+ Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị:



□

Ví dụ 7. Khảo sát hàm số $y = -x^4 + 2x^2$

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

$$y' = -4x^3 + 4x^2 = -4x(x^2 - 1);\ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{bmatrix}.$$

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

+ Cực trị

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{\text{CT}} = y(0) = 0$.

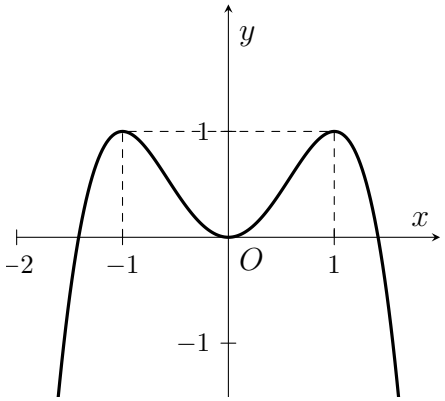
Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $x = 1$, $y_{\text{CD}} = y(\pm 1) = 1$.

+ Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

• Đồ thị



□

Ví dụ 8. Khảo sát hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

$y' = 4x^3 + 2x^2 = 2x(2x^2 + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

+ Cực trị

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{\text{CT}} = y(0) = -2$.

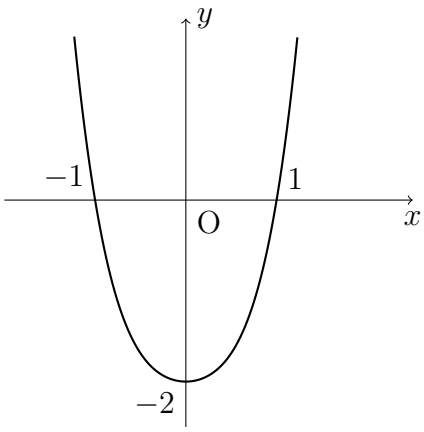
Hàm số không có điểm cực đại.

+ Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

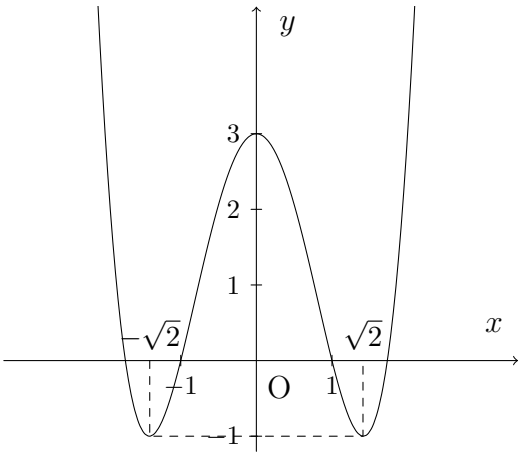
Bài 5. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm m để phương trình $-x^4 + 4x^2 - 3 - m = 0 (*)$ có 4 nghiệm phân biệt

Lời giải.

a. Khảo sát hàm số, ta có đồ thị hàm số :



b. Ta có $x^4 - 4x^2 + 3 = -m$

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số điểm chung giữa đồ thị(C) và đường thẳng $(d) : y = -m$.

Vậy để phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt thì (d) phải cắt (C) tại 4 điểm phân biệt.

$\Rightarrow -1 < -m < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Vậy $-3 < m < 1$ thì phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt □

Bài 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm m để phương trình $\left|x^4 - 2x^2 - 1\right| = 2m\,(*)$ có 6 nghiệm phân biệt

Lời giải.

a.

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

$y' = 4x^3 - 4x^2 = 4x(x^2-1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$.

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

+ Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CĐ}} = y(0) = -1$.

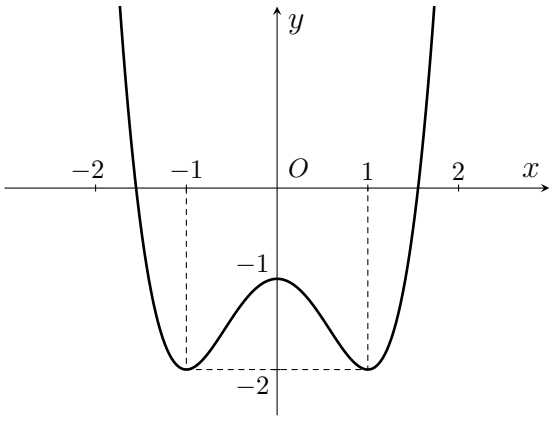
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$, $y_{\text{CT}} = y(\pm 1) = -2$.

+ Giới hạn tại vô cực $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$.

+ Bảng biến thiên

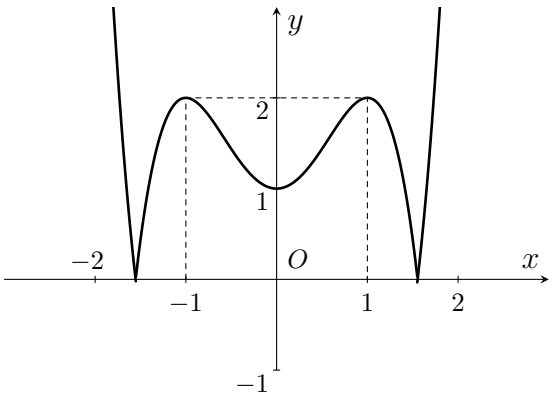
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị:



b.

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số điểm chung của đồ thị$(C') : y = \left|x^4 - 2x^2 - 1\right|$ và đường thẳng $(d) : y = 2m$.
Vậy để phương trình (*) có 6 nghiệm phân biệt thì (d) phải cắt (C') tại 6 điểm phân biệt.
$\Leftrightarrow 1 < 2m < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < 1.$
Vậy $\dfrac{1}{2} < m < 1$ thì phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt



□

Bài 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$. Tìm m đề hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Lời giải.

Nếu $-2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $y' > 0, \forall x > 0$ suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên cũng đồng biến trên $(1; 2)$.

Nếu $-2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$, ta có $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (\sqrt{m}; \infty) \cup (-\sqrt{m}; 0)$ nên hàm số đồng biến trên $(1; 2)$ khi và chỉ khi $\sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Vậy $m \in (-\infty; 1]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(1; 2)$. □

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ trên đoạn $[-1; 2]$

Lời giải.

$f'(x) = 4x^3 - 8x$ Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$.
Các nghiệm $x = 0; x = \sqrt{2}$ thuộc khoảng $(-1; 2)$.
Tính: $f(-1) = 1; f(2) = 4; f(0) = 4; f(\sqrt{2}) = 0$
Vậy $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 4$ tại điểm $x = 2$ và $x = 0$.
$\min\limits_{[-1;2]} f(x) = 0$ tại điểm $x = \sqrt{2}$. □

Bài 9. Tìm m để hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + m$ nhận 2 làm giá trị lớn nhất trên khoảng $(-2; 3)$.

Lời giải.

$f'(x) = -4x^3 + 4x$ Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.
Tính: $f(-2) = m - 8; f(\pm 1) = m + 1, f(0) = m; f(3) = m - 63$
Ta có bảng biến thiên:

x	-2		-1		0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$m-8$	↗	$m+1$	↘	m	↗	$m+1$	↘	$m-63$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-2;3)$ là $m+1$ tại điểm $x=\pm 1$.
Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow m+1=2 \Rightarrow m=1$.
Thử lại thỏa yêu cầu, vậy $m=1$. □

Bài 10. Cho hàm số $y=mx^4-(2m+1)x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có một điểm cực đại.

Lời giải.

Với $m=0$ ta có $y=-x^2+1$, hàm số có một điểm cực đại.

Với $m>0$, ta có $y'=4mx^3-2(2m+1)x=2x(2mx^2-2m-1)$ nên hàm số có một điểm cực đại khi và chỉ khi
$m(-2m-1)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{2} \\ m>0 \end{array}\right.$ suy ra $m>0$ thoả mãn.

Với $m<0$, ta có $y'=4mx^3-2(2m+1)x=2x(2mx^2-2m-1)$ nên hàm số có một điểm cực đại khi và chỉ khi
$m(-2m-1)\ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m<0$ thoả mãn.

Kết hợp các trường hợp $m=0$ ta được $m\ge -\dfrac{1}{2}$. □

Bài 11. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ (1), với m là tham số thực. Tìm tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba cực trị tạo thành một tam giác vuông.

Lời giải.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ chỉ $-2(m+1)<0 \Leftrightarrow m>-1$. Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là:

$$A\left(0;m^2\right), B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right), C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right).$$

Dễ thấy ΔABC vuông cân tại A.
$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{m+1};-2m-1-m^2\right), \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{m+1};-2m-1-m^2\right)$. Khi đó

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -(m+1)^2+\left(m^2+2m+1\right)^2 \Leftrightarrow (m+1)^4=(m+1)^2 \Leftrightarrow m=0.$$

□

Bài 12. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ (2), với m là tham số thực. Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Lời giải.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 4x^3 - 4mx$ đổi dấu ba lần $\Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là:

$$A\left(0; m-1\right), B\left(-\sqrt{m}; -m^2+m-1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2+m-1\right).$$

Đến đây ta có thể giải quyết bài toán theo hai cách sau:

Cách 1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |y_B - y_A| \cdot |x_B - x_C| = m^2\sqrt{m}, AB = AC = \sqrt{m^4+m}, BC = 2\sqrt{m}$. Lúc đó:

$$R = 1 \Leftrightarrow \frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{m}\left(m^4+m\right) = 4m^2\sqrt{m} \quad \Leftrightarrow \quad m^3 - 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 1 \vee m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ (do } m < 0).$$

Cách 2. Do đồ thị hàm số (2) nhận Oy làm trục đối xứng và $A \in Oy$ nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC nằm trên Oy. Suy ra $I(0;a), a \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$IA = IB = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |a-m+1| = 1 \quad (*) \\ m + \left(a+m^2-m+1\right)^2 = 1 \quad (**) \end{cases}.$$

Giải $(*)$ ta được $a = m \vee a = m-2$.

Với $a = m$, $(**) \Leftrightarrow m + \left(m^2+1\right)^2 \Leftrightarrow m^3 + 2m + 1 = 0$, (vô lý do $m > 0$).

Với $a = m-2$, $(**) \Leftrightarrow m + \left(m^2-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, (do $m > 0$).

□

Bài 13. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$, với m là tham số thực có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để:

a) Ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều;

b) Ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32.

Lời giải.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 4x^3 - 4mx$ đổi dấu ba lần $\Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị sẽ là

$$A\left(0; m+1\right), B\left(-\sqrt{m}; -m^2+m+1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2+m+1\right).$$

Nhận xét, ΔABC cân tại A.

a) ΔABC đều khi và chỉ khi

$$AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m^3 = 3 \Leftrightarrow = \sqrt[3]{3}.$$

b) Ta có

$$S = 32 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |y_B - y_A| \cdot |x_B - x_C| = 32 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} = 32 \Leftrightarrow m^5 = 1024 \Leftrightarrow m = 4.$$

□

Bài 14. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ (4), với m là tham số thực. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số (4) có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 4x^3 - 4(1-m^2)x$ đổi dấu ba lần $\Leftrightarrow -2(1-m^2) < 0 \Leftrightarrow m \in (-1;1)$. Khi đó tọa độ các điểm cực trị là

$$A(0; m+1), B\left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4+2m^2+m\right), C\left(\sqrt{1-m^2}; -m^4+2m^2+m\right).$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |y_B - y_A| \cdot |x_B - x_C| = \cdot \left(m^4 - 2m^2 + 1\right)\sqrt{1-m^2} = \left(m^2-1\right)^2\sqrt{1-m^2} = \sqrt{(1-m^2)^5} \le 1.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$.

Vậy $m = 0$ thỏa yêu cầu đề bài. □

DẠNG 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ

Phương pháp giải. Xét hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

- ☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- ☑ Đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- ☑ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số đã cho.

② Tìm các tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x + y = 0$.

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2} > 0, \forall x \neq 2$.

Bảng biến thiên

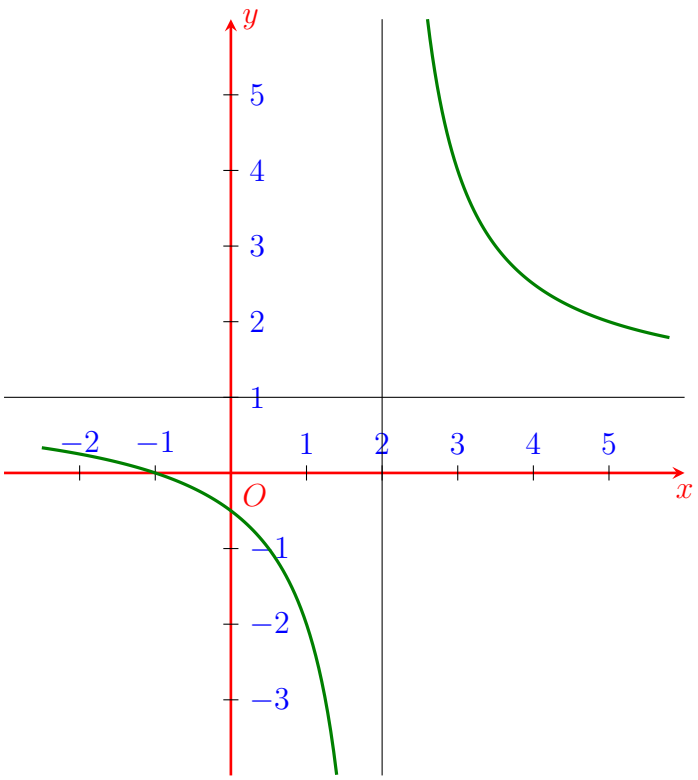
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	1

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-1;0)$, $B\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$



② Đường thẳng Δ viết lại là $y=-3x$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với Δ là nghiệm phương trình

$$y'=-3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x-2)^2}=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Với $x=1$ thì $y=-2$, nên phương trình tiếp tuyến là $y=-3(x-1)+(-2)$ hay $y=-3x+1$.

Với $x=3$ thì $y=4$, nên phương trình tiếp tuyến là $y=-3(x-3)+4$ hay $y=-3x+5$.

□

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ (1).

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

② Chứng minh rằng đường thẳng $d: y=2x+m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Xác đinhụ m để đoạn AB là nhỏ nhất.

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$.

Bảng biến thiên

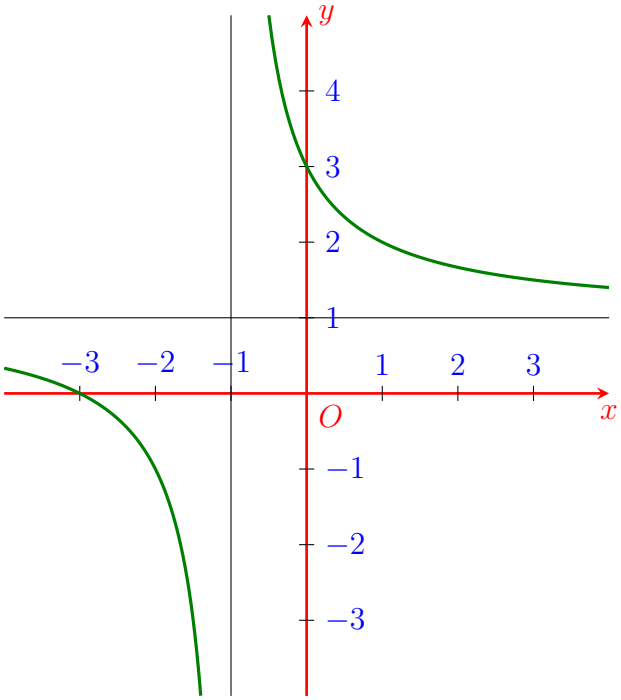
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	1
		$-\infty$			

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-3;0)$, $B(0;3)$



② Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là

$$\frac{x+3}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m+1)x + (m-3) = 0 \quad (2) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Phương trình (2) có $\Delta = m^2 - 6m + 25 = (m-3)^2 + 16 > 0, \forall m$ và -1 không là nghiệm của (2), nên phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt khác -1. Như vậy đồ thi (C) và đường thẳng d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Gọi hai giao điểm là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &= 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right] = \left[\frac{(m+1)^2}{4}\right]-2(m-3) \\ &= \frac{5}{4}\left[(m-3)^2+16\right] \geq 20. \end{aligned}$$

Như vậy, độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất là bằng $2\sqrt{5}$ khi $m=3$.

□

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

② Chứng minh rằng: Tích các khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0)$ bất kì thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) là một hằng số.

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq -1$.

Bảng biến thiên

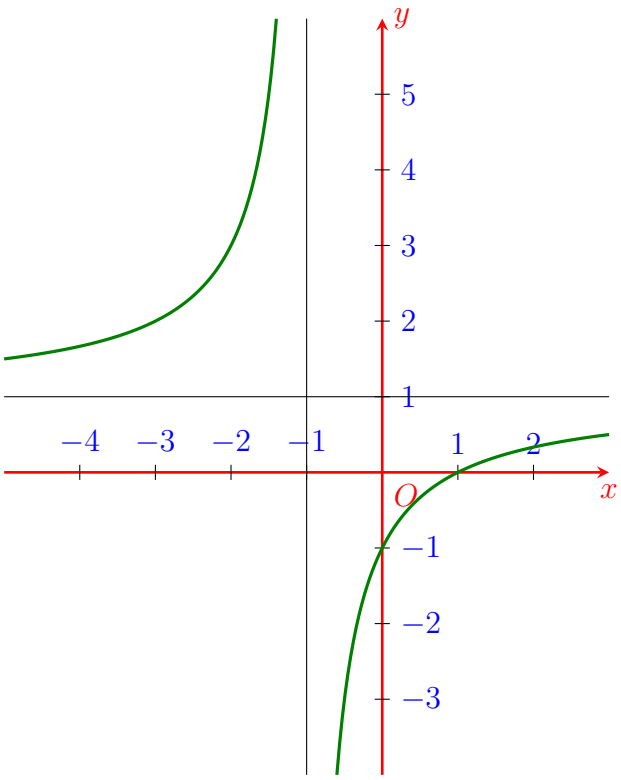
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(1;0)$, $B(0;-1)$



② Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Điểm $M_0(x_0;y_0)$ thuộc (C) thì $x_0\neq -1$ và $y_0=\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$. Ta có:

☑ Khoảng cách từ điểm M_0 đến tiệm cận đứng là $|x_0+1|$.

☑ Khoảng cách từ điểm M_0 đến tiệm cận ngang là $|y_0-1|=\left|\dfrac{x_0-1}{x_0+1}-1\right|=\left|\dfrac{2}{x_0+1}\right|$.

Bởi vậy, tích các khoảng cách này là

$$|x_0+1|\cdot\left|\frac{2}{x_0+1}\right|=2$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

② Tìm các điểm M thuộc (C) có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: 3x+4y=0$ bằng 1.

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$.

Bảng biến thiên

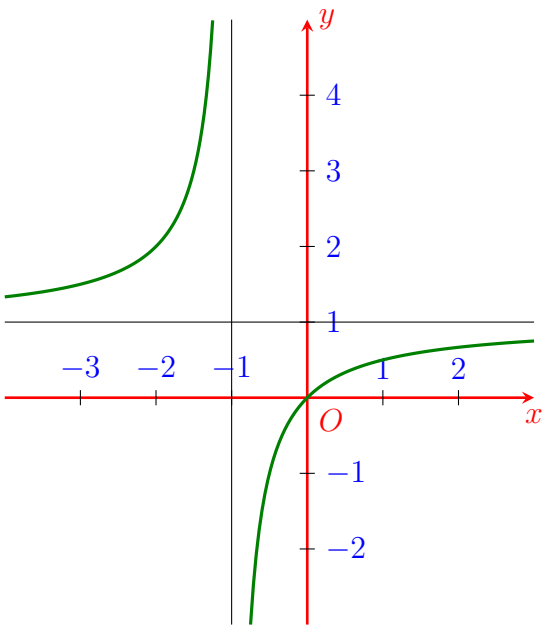
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 1	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua điểm $O(0;0)$.



② Gọi $M(m;\dfrac{m}{m+1})$ thuộc (C) (với $m\neq -1$). Ta có

$$\begin{aligned}
d(M;\Delta)=1 &\Leftrightarrow \frac{\left|3\cdot(m)+4\cdot\left(\dfrac{m}{m+1}\right)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{3m^2+7m}{m+1}\right|=5\\
&\Leftrightarrow \left|3m^2+7m\right|=5\left|m+1\right|\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3m^2+7m=5(m+1)\\3m^2+7m=-5(m+1)\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3m^2+2m-5=0\\3m^2+12m+5=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{5}{3}\\m=\dfrac{-6-\sqrt{21}}{3}\\m=\dfrac{-6+\sqrt{21}}{3}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy, ta có các điểm thỏa mãn là $M_1\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{2}\right)$, $M_3\left(\dfrac{-6-\sqrt{21}}{3};\dfrac{1+\sqrt{21}}{4}\right)$ và $M_4\left(\dfrac{-6+\sqrt{21}}{3};\dfrac{1}{}\right.$

□

Bài 16. Cho hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

② Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-2)$ có hệ số góc k. Xác định k để d là tiếp tuyến của đồ thị (C).

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-2$ nên đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0, \forall x\neq 1$.

Bảng biến thiên

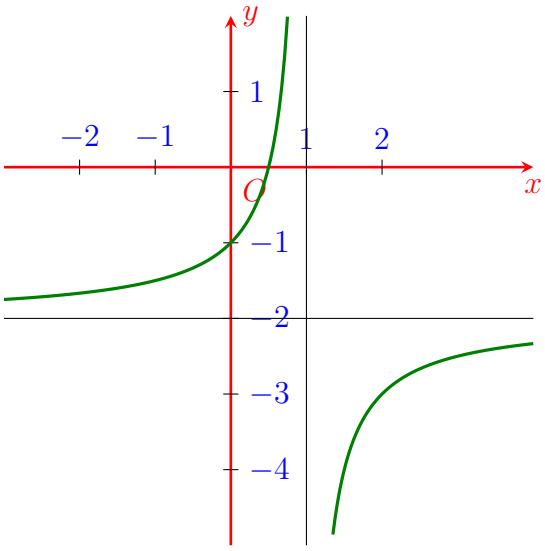
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	1

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$, $B\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.



② Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-2)$ có hệ số góc k có phương trình $y=kx-2$.

Điều kiện để d là tiếp tuyến của đồ thị (C) là hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{-2x+1}{x-1} = kx-2 \ \ (1) \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} = k \ \ (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{-2x+1}{x-1} = \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)\cdot x - 2 \Leftrightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Từ đó ta có $k = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = 4$.

□

Bài 17. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

② Tìm phương trình đường cong đối xứng với đồ thị hàm số đã cho qua tiệm cận đứng của đồ thị đó.

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y' = \dfrac{-5}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

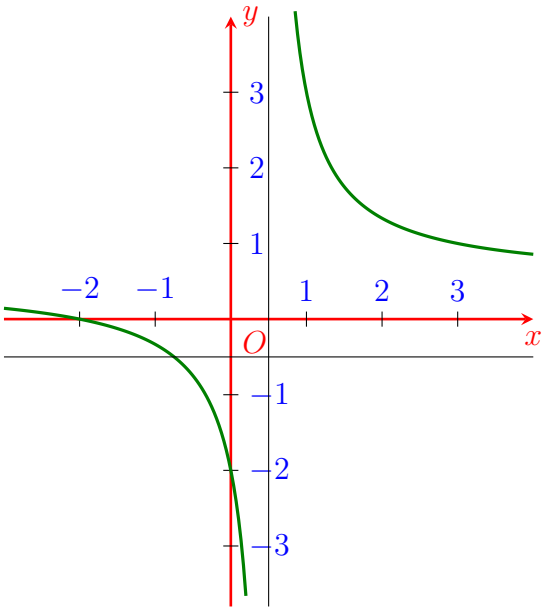
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\frac{1}{2}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{2}$
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;\dfrac{1}{2})$ và $(\dfrac{1}{2};+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-2)$, $B(-2;0)$.



② Gọi $M\,(x_M;y_M)$ là điểm bất kì thuộc đồ thị (C) hàm số đã cho. Khi đó, gọi điểm M' đối xứng với điểm M qua đường tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$, ta có

$$\begin{cases}\dfrac{x_M+x_{M'}}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_M=y_{M'}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_M=1-x_{M'}\\ y_M=y_{M'}\end{cases}$$

Do $M\in(C)$ nên

$$y_M=\frac{x_M+2}{2x_M-1}\Rightarrow y_{M'}=\frac{(1-x_{M'})+2}{2(1-x_{M'})-1}\Rightarrow y_{M'}=\frac{3-x_{M'}}{1-2x_{M'}}$$

Như vậy, điểm M' nằm trên đường cong có phương trình $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$.

Hay, đường cong đối xứng với đồ thị hàm số đã cho qua tiệm cận đứng của đồ thị đó có phương trình $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$.

□

Bài 18. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

② Gọi I là tâm đối xứng của (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

Lời giải.

① ☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

☑ Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng.

☑ Sự biến thiên của hàm số

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq1$.

Bảng biến thiên

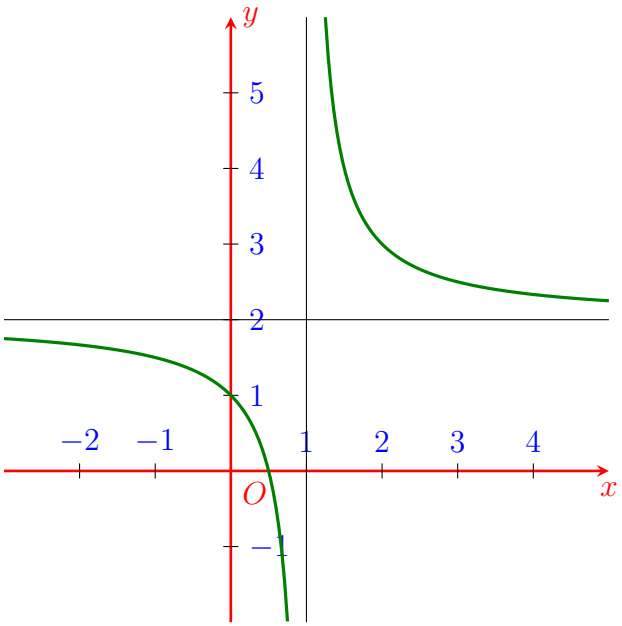
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$\|$	$-$
y	$2 \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 2$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

☑ Đồ thị

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$, $B\left(\frac{1}{2};0\right)$.



② Gọi $M(x_0;y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$ với $x_0 \neq 1$.

Tiếp tuyến Δ tại M có hệ số góc $k_1 = y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Tâm đối xứng I của đồ thị hàm số là giao điểm của hai đường tiệm cận, nên $I(1;2)$.

Do đó $\overrightarrow{IM} = \left(x_0-1;\dfrac{1}{x_0-1}\right) = (a_1;a_2)$.

Đường thẳng IM có hệ số góc $k_2 = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{(x_0-1)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^4 = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \Rightarrow y_0=3 \\ x_0=0 \Rightarrow y_0=1 \end{array}\right.$

Vậy, có hai điểm cần tìm $M_1(2;3)$, $M_2(0;1)$.

□

Bài 19. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm a và b để đường thẳng $d: y = ax+b$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ viết lại là $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Từ yêu cầu bài toán suy ra $d \perp \Delta$, do đó $a \cdot \dfrac{1}{2} = -1 \Rightarrow a = -2$, như vậy $d : y = -2x + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là

$$\frac{x-1}{x+1} = -2x + b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (b-3)x - 1 - b = 0 \quad (1) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt điều kiện là phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (b-3)^2 + 8(1+b) > 0 \\ 2(-1)^2 - (b-3)(-1) - 1 - b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 + 2b + 17 > 0 \Leftrightarrow b \in \mathbb{R}.$

Hoành độ giao điểm A, B của đồ thị (C) và đường thẳng d là các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1), nên hoành độ trung điểm I của AB là $x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{b-3}{4}$.

Từ đó ta có $I = \left(\dfrac{b-3}{4}; \dfrac{b+3}{2}\right)$.

Để A, B đối xứng nhau qua Δ, điều kiện là $I\Delta$, do đó:

$$\left(\frac{b-3}{4}\right) - 2\left(\frac{b+3}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -1.$$

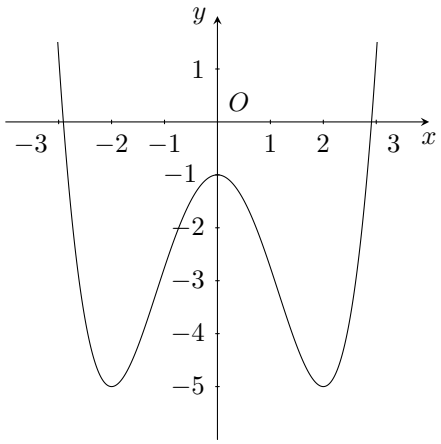
Vậy $a = -2$, $b = -1$. □

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1.

Đồ thị trong hình vẽ bên là của hàm số



A. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2-1$.

B. $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^2-1$.

C. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-1$.

D. $y=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2-1$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị có dạng là đồ thị hàm số trùng phương có hệ số $a>0$, có điểm cực đại $(0;-1)$ và điểm cực tiểu $(-2;-5)$ và $(2;-5)$.

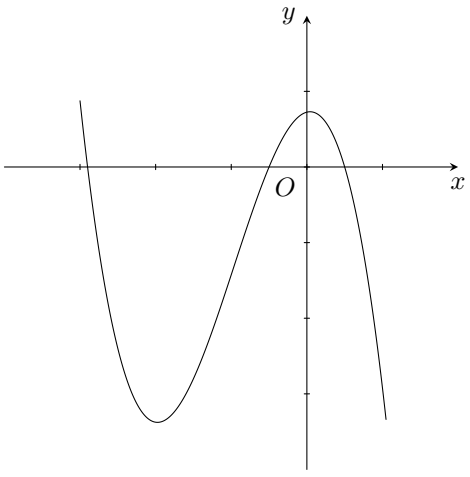
Vì $a>0$ nên loại đáp án $y=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2-1$.

Thay điểm cực tiểu vào các đáp án còn lại ta được kết quả.

Chọn đáp án C □

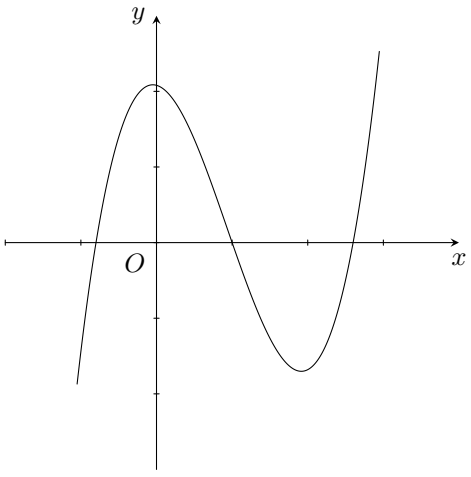
Câu 2. Đồ thị hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ có dạng

A.



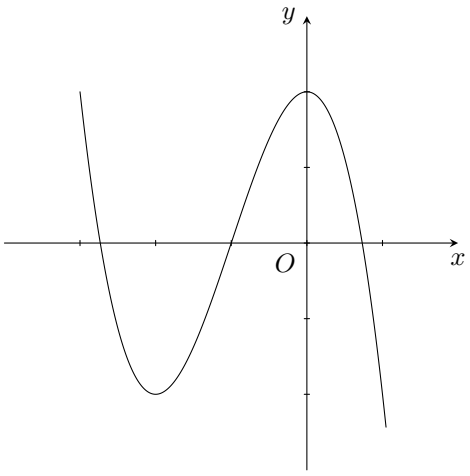
.

B.



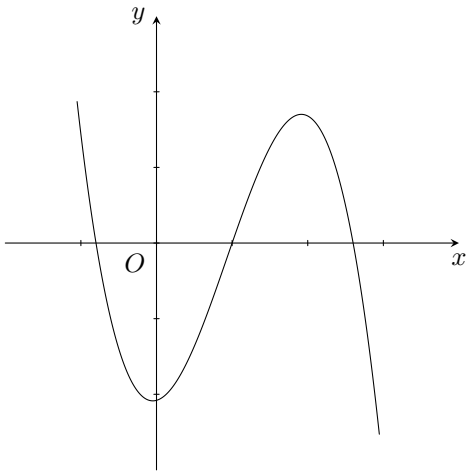
.

C.



.

D.



.

Lời giải.

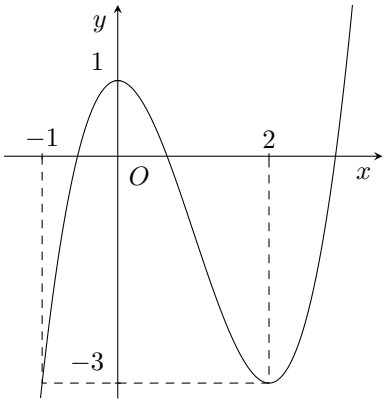
Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên chọn hình đồ thị có nhánh bên phải hướng xuống.

Chọn đồ thị đi qua điểm $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây



A. $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$. **B.** $y=x^3+3x^2+1$.

C. $y=-x^3+3x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+1$.

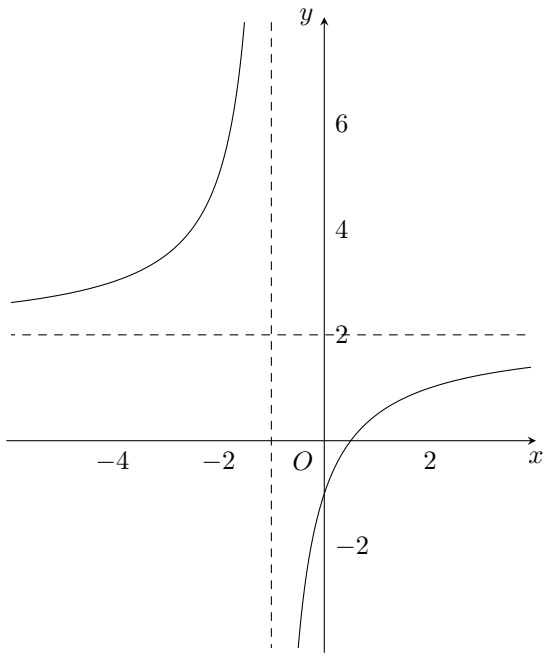
Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị hàm bậc ba với $a>0$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(2;-3)$ nên đáp án là $y=x^3-3x^2+1$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định hàm số trên.

A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x+1}{2x+2}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nhận đường $x=-1$ là tiệm cận đứng nên ta loại ngay đáp án A và B vì đồ thị của hai hàm số này đều nhận đường $x=1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số nhận đường $y=2$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
Vậy hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y=(x-2)(x^2-5x+6)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) không cắt trục hoành.
B. (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.
C. (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.
D. (C) cắt trục hoành tại 2 điểm.

Lời giải.

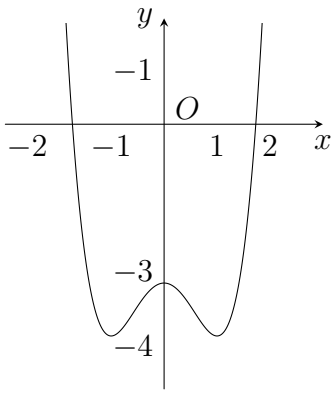
Ta có $(x-2)(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$. Suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 6.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

A. $y=-x^3+x^2-2$.
B. $y=-x^4+3x^2-2$.
C. $y=x^4-2x^2-3$.
D. $y=-x^2+x-1$.



Lời giải.

Đồ thị đi qua điểm $M(0;-3)$, suy ra loại các phương án A, B, D.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-x+3$ tại điểm $M(1;0)$ là

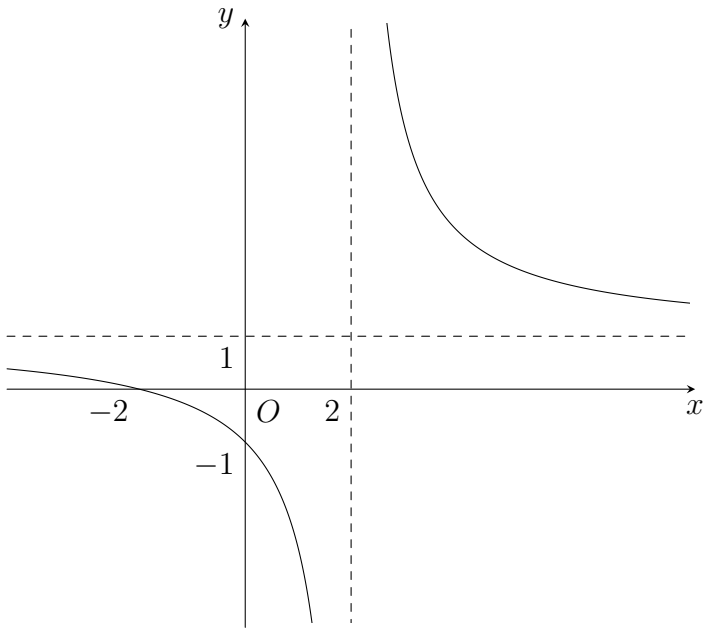
A. $y=-x+1$.
B. $y=-4x-4$.
C. $y=-4x+4$.
D. $y=-4x+1$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x-1\Rightarrow y'(1)=-4$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là $y=-4(x-1)\Leftrightarrow y=-4x+4$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Đồ thị sau đây là của một trong 4 hàm số nào dưới đây?



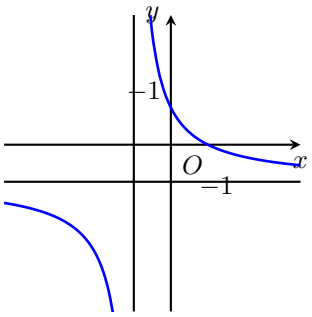
A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

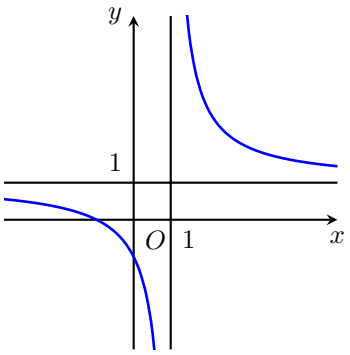
Lời giải.

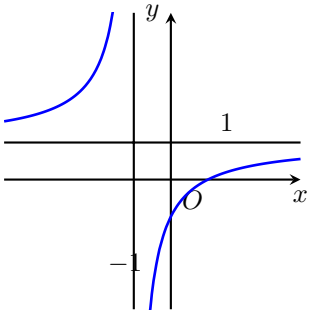
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$. Vậy hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x+2}{x-2}$.

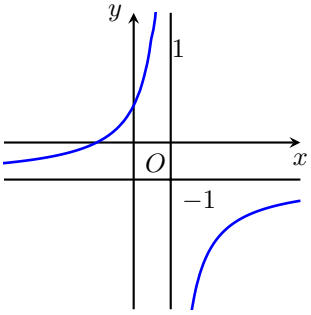
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$ có dạng

A.


B.


C.


D.


Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(ad-bc\neq 0,c\neq 0)$ có TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$.

Nếu $ad-bc>0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Nếu $ad-bc<0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Cách giải:

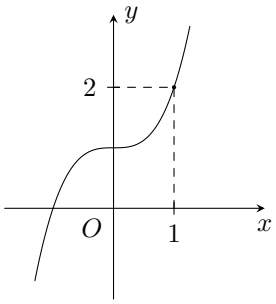
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$ có TCĐ: $x=1$ và TCN $y=-1$ và đồng biến trên từng khoảng xác định do $1.1-1.(-1)=2>0$.

Vậy chọn đồ thị ở câu D.

Chọn đáp án D □

Câu 10.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây.



A. $y=2x^3+1$. **B**. $y=x^3+x+1$.

C. $y=x^3+1$. **D**. $y=-x^3+2x+1$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị là dạng đồ thị hàm số bậc 3 có hệ số $a>0$ nên ta loại đáp D.

Mặt khác đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(1;2)$, thay vào hàm số ở các đáp án A, B, C thì chỉ có C thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-5x^2+4$ với trục hoành là

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

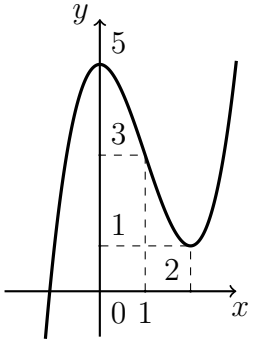
$$\begin{aligned} & x^4-x^2+4=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2-4)(x^2-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành là 4.

Chọn đáp án C □

Câu 12.

Đường cong như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x^2+5$.

B. $y=2x^3-6x^2+5$.

C. $y=x^3-3x^2+5$.

D. $y=x^3-3x+5$.

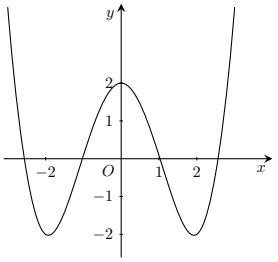
Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba có $a>0$ do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow$ Loại đáp án A. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;1) \Rightarrow$ loại các đáp án B và D.

Chọn đáp án C □

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B**. $(-1;0)$. **C**. $(-2;-1)$. **D**. $(-1;1)$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

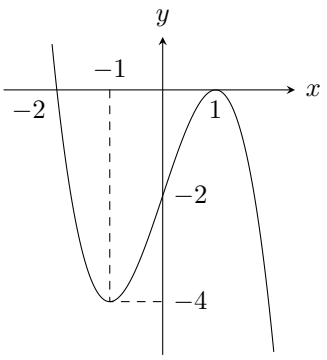
A. $x = 4$. **B**. $x = 3$. **C**. $x = 2$. **D**. $x = 1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x - 2$. **B**. $y = -x^3 + 3x + 2$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$. **D**. $y = -x^3 + 3x - 2$.

Lời giải.

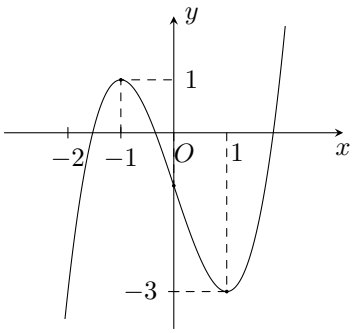
Từ đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ và đồ thị cắt trục Oy tại điểm -2 nên hàm số có hệ số tự do bằng -2.

Do đó đáp án đúng là $y = -x^3 + 3x - 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 16.

Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình bên?



A. $y=x^3-3x-1$. **B**. $y=x^3-3x^2-3x-1$.

C. $y=\dfrac{1}{3}x^3+3x-1$. **D**. $y=x^3+3x^2-3x+1$.

Lời giải.

Đồ thị đi qua điểm $(0;-1)$ nên phương án D bị loại và đồ thị đi qua điểm $(2;1)$ nên B loại.

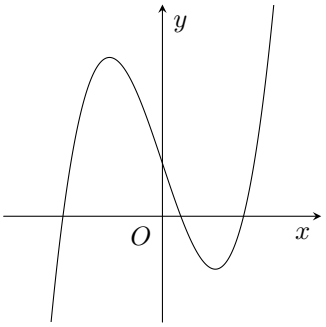
Đồ thị có hai điểm cực trị nên phương án C bị loại (có $y'=x^2+3>0$).

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;3)$, thay vào phương án A thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 17.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như trong hình bên ?



A. $y=x^3-3x+1$. **B**. $y=-x^2+x-1$.

C. $y=-x^3+3x+1$. **D**. $y=x^4-x^2+1$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đây là hàm bậc ba và có hệ số $a>0$ nên đáp án là hàm số $y=x^3-3x+1$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

A. $y=x^3-5x^2+x+6$. **B**. $y=x^3-6x^2+9x-1$.

C. $y=-x^3+6x^2-9x+7$. **D**. $y=x^4+x^2-3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc Bảng biến thiên để xác định hàm số.

Tìm ra các điểm thuộc đồ thị hàm số rồi thay tọa độ vào các hàm số ở đáp án để loại trừ.

Cách giải:

Từ bảng biến thiên, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên loại $y=-x^3+6x^2-9x+$

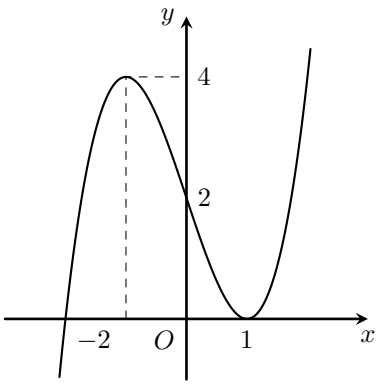
và$y = x^4 + x^2 - 3$.

Ta thấy điểm $(3; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên thay $x = 3$; $y = -1$ vào hai hàm số ở phương án $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$ và phương án $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ta thấy chỉ có hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ thỏa mãn nên hàm số cần tìm là $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 19.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 + x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 2$.

Lời giải.

Từ đồ thị thấy hệ số $a > 0$ và đi qua điểm $A(0; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

A. $y = -x^3 - 3x - 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Cách 1: Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$ nên hàm số có bảng biến thiên là $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = x$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

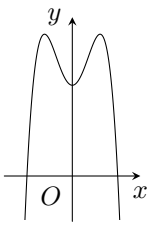
$$x^3-3x+3=x \Leftrightarrow x^3-3x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ cắt đường thẳng $y=x$ tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong có dạng như hình vẽ bên?



A. $y=-x^2+x-4$. **B.** $y=x^4-3x^2-4$.

C. $y=-x^3+2x^2+4$. **D.** $y=-x^4+3x^2+4$.

Lời giải.

+) Quan sát đường cong có dạng như hình vẽ bên là đồ thị của hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0) \Rightarrow$ đáp án A, C loại.

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên $a<0$ (hoặc $y(0)>0$).

Vậy loại đáp án B, chọn đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 23.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch bến trên khoảng nào?

x	-1		0		1		2		3
$f'(x)$	3	↘	↓	↘	-1	↗	↓	↗	4

A. $(-2;0)$. **B.** $(-4;-2)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f'(x)=2$ có hai nghiệm phân biệt là $x=2$ và $x=a$ với $-1<a<0$.

Đặt $g(x)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ thì $g'(x)=-\dfrac{1}{2}f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+1$.

Ta có $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)>2$.

☑ $f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)>2 \Rightarrow 2<1-\dfrac{x}{2}<3 \Leftrightarrow -4<x<-2$.

☑ $f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)>2 \Rightarrow -1<1-\dfrac{x}{2}<a \Leftrightarrow 2-2a<x<4$.

Vì $-1<a<0$ nên $2<2-2a<4$. Do đó $(2-2a;4)\subset(2;4)$.

Vậy hàm số $y=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Hai đồ thị của hai hàm số $y=-x^3+3x^2+2x-1$ và $y=3x^2-2x-1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

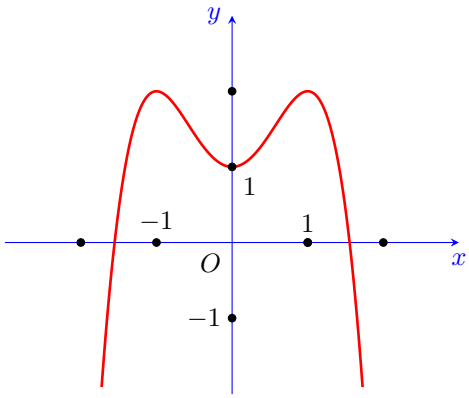
$$-x^3+3x^2+2x-1=3x^2-2x-1\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\\ x=-2. \end{array}\right.$$

Vậy hai đồ thị của hai hàm số đã cho có 3 điểm chung.

Chọn đáp án D □

Câu 25.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B**. $y=-x^4-2x^2+1$.

C. $y=x^4-3x^2+1$. **D**. $y=x^4-2x^2+1$.

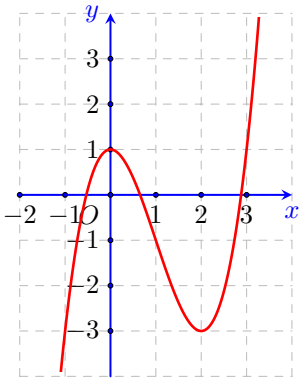
Lời giải.

Đây là hàm số bậc 4 trùng phương có 3 cực trị và đồ thị hướng xuống nên $a<0, b>0$.

Chọn đáp án A □

Câu 26.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B**. $y=x^3-3x^2-1$.

C. $y=-x^3-3x^2+1$. **D**. $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$.

Lời giải.

ĐTHS có điểm cực đại $(0;1)$ điểm cực tiểu $(2;-3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

A. $-2<m<-1$. **B.** $m=-2, m\geq -1$. **C.** $m>0, m=-1$. **D.** $m=-2, m>-1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)-1=m \Leftrightarrow f(x)=m+1$.

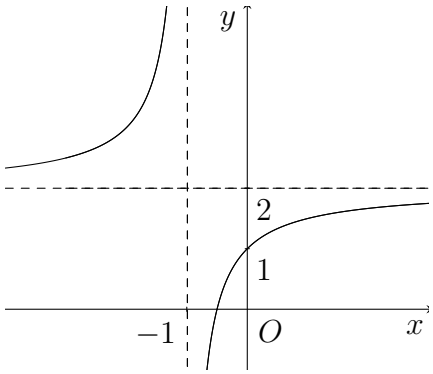
Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm khi

$$\begin{bmatrix} m+1=-1 \\ m+1>0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=-2 \\ m>-1. \end{bmatrix}$$

Chọn đáp án D □

Câu 28.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{1-x}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

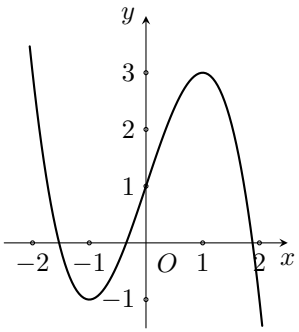
Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$ và cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B.** $y=-x^3-3x^2+1$.

C. $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $a<0$ và hàm số có hai điểm cực trị là $x=-1$, $x=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2019$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$+\infty$

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 4.

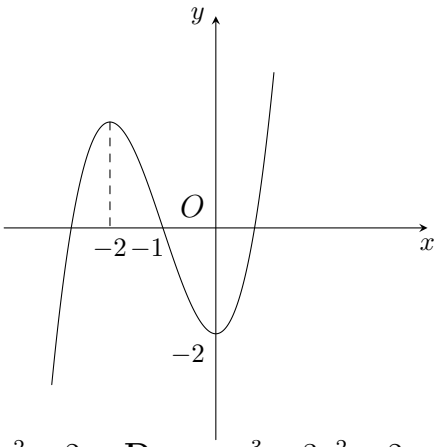
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra đường thẳng $y = 2019$ không cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Chọn đáp án C □

Câu 31.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. **B**. $y = x^3 + 3x^2 - 2$. **C**. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D**. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải.

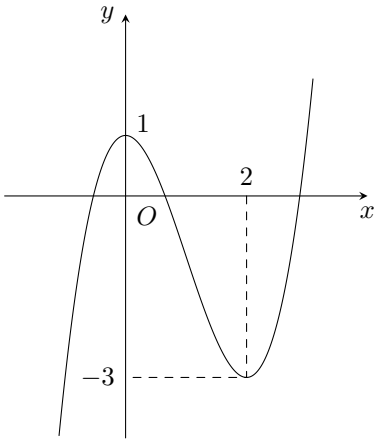
Từ hình vẽ ta thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên loại A và C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 0)$ nên chỉ có B thỏa.

Chọn đáp án B □

Câu 32.

Đồ thị dưới đây là của hàm số nào?



A. $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$. **B**. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. **C**. $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$. **D**. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải.

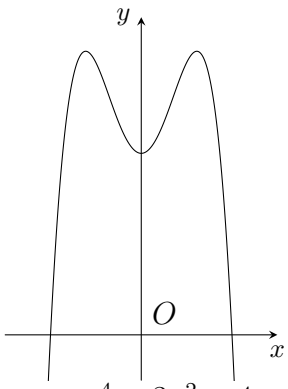
Từ hình vẽ ta thấy hệ số $a > 0$ nên loại A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; -3)$ chỉ có đáp án D thỏa.

Chọn đáp án D □

Câu 33.

Hỏi hàm số nào có đồ thị là đường cong có dạng như hình vẽ sau?



A. $y=-x^3+2x+4$. **B**. $y=-x^2+x-4$. **C**. $y=-x^4+3x^2+4$. **D**. $y=x^4-3x^2-4$.

Lời giải.

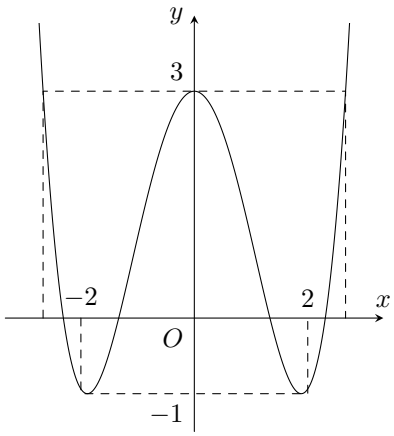
Đây là đồ thị hàm số trùng phương nên loại A và B.

Đồ thị cắt trục tung tại tung độ 4 nên chọn C.

Chọn đáp án C □

Câu 34.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=-x^4+4x^2+3$. **B**. $y=-x^4+2x^2+3$.

C. $y=(x^2-2)^2-1$. **D**. $y=(x^2+2)^2-1$.

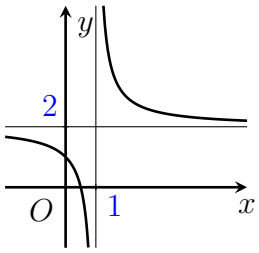
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có hệ số $a>0$ và hàm số có ba điểm cực trị nên $a\cdot b<0$ nên chọn $y=(x^2-2)^2-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 35.

Xác định các hệ số a,b,c để đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên:



A. $a=2,b=2,c=-1$. **B**. $a=2,b=-1,c=1$.

C. $a=2,b=1,c=1$. **D**. $a=2,b=1,c=-1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào đồ thị hàm số để nhận xét và đưa ra công thức đúng về đồ thị hàm số, từ đó suy ra các giá trị a,b,c.

Cách giải:

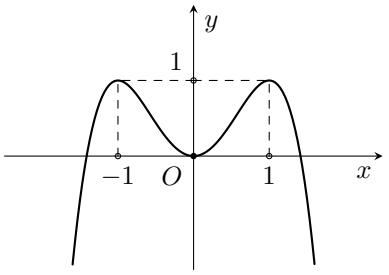
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có TCN là: $y=2\Rightarrow y=\dfrac{a}{b}=2\Rightarrow$ loại đáp án A, B. Đồ

thị hàm số đi qua điểm $(0;1) \Rightarrow -\dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow$ chọn D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36.

Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = -x^2 + 2x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = -x^4 + 2x^2$. **D.** $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số là hàm bậc 4 và có hệ số bậc 4 là âm. Nên hàm số thỏa mãn là $y = -x^4 + 2x^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

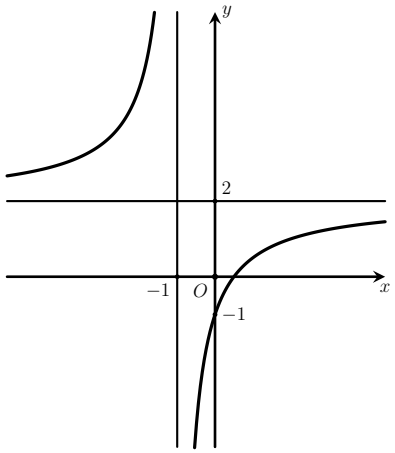
Ta có $y' = \dfrac{2(x+3) - (2x-3)}{(x+3)^2} = \dfrac{9}{(x+3)^2}$.

Dễ thấy $y' > 0,\ \forall x \neq -3$.

Do đó hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. **C.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có

☑ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

☑ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$.

☑ Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Đồ thị của hàm số $y=x^4+3x^2-4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị và trục hoành là

$$x^4+3x^2-4=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2=1 \\ x^2=-4 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=-1. \end{bmatrix}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Gọi M và N là giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^4-2x^2+2$ và $y=-x^2+4$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A. $(1;0)$. **B**. $(0;2)$. **C**. $(2;0)$. **D**. $(0;1)$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số. Tìm tọa độ giao điểm M và N. Tìm tọa độ trung điểm I của MN.

Cách giải: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^4-2x^2+2$ và $y=-x^2+4$ là $x^4-2x^2+2=-x^2+4 \Leftrightarrow x^4-x^2-2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2=-1 \\ x^2=2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2}. \end{bmatrix}$

☑ $x=\sqrt{2} \Rightarrow y=2 \Rightarrow M\left(\sqrt{2};2\right)$.

☑ $x=-\sqrt{2} \Rightarrow y=2 \Rightarrow M\left(-\sqrt{2};2\right)$.

Tọa độ trung điểm I của MN là $(0;2)$.

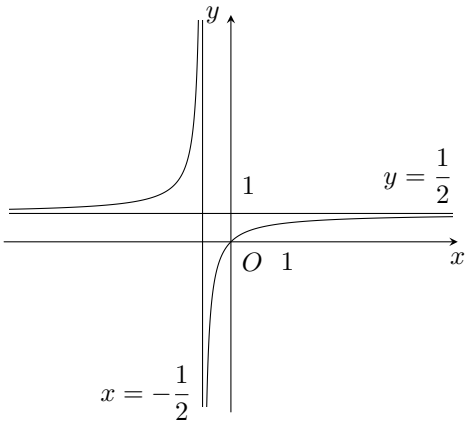
Chọn đáp án B □

Câu 41.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **B**. $y=\dfrac{x}{2x+1}$.

C. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. **D**. $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường cong đi qua điểm $O\,(0;0)$ nên đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ bằng.

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	‖	↘	
		$-\infty$	‖		1

A. $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$. **B**. $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$. **C**. $y = \dfrac{x+3}{2+x}$. **D**. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số giảm, TCN $y = 1$; TCĐ $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $y = 2x - 3$ có đồ thị là đường thẳng (d). Xét các phát biểu sau

(I): Hàm số $y = 2x - 3$ đồng biến trên R.

(II): Đường thẳng (d) song song với đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$

(III): đường thẳng (d) cắt trục Ox tại $A\,(0; -3)$

Số các phát biểu đúng là

A. 2. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

- Hàm số $y = 2x - 3$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $R \Rightarrow (I)$ đúng

- Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (d)$ cắt đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$ tại điểm $\left(\dfrac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow (II)$ sai.

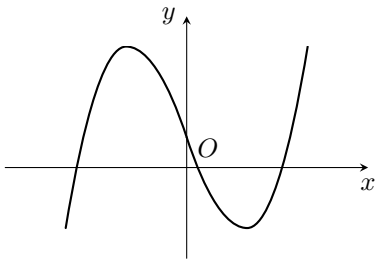
- Giao Ox: cho $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ giao Ox tại điểm $\left(\dfrac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow (III)$ sai

Vậy sô các phát biểu đúng là 1.

Chọn đáp án D □

Câu 45.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$.

C. $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Lời giải.

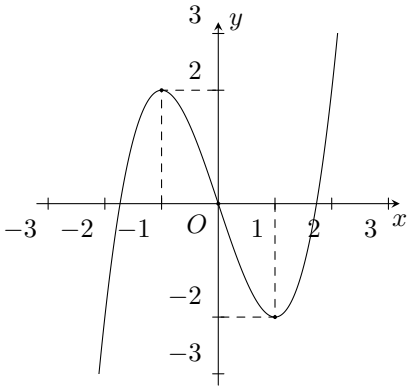
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên loại đáp án A và B.

Đồ thị hàm số có nét cuối cùng đi lên nên $a>0 \Rightarrow$ loại đáp án D.

Chọn đáp án C □

Câu 46.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+2x$.

C. $y=x^3+3x$. **D.** $y=-x^3-2x$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên hai đáp án B và D bị loại.

Ta có $(x^3+3x)'=3x^2+3>0\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=x^3+3x$ không có điểm cực trị.

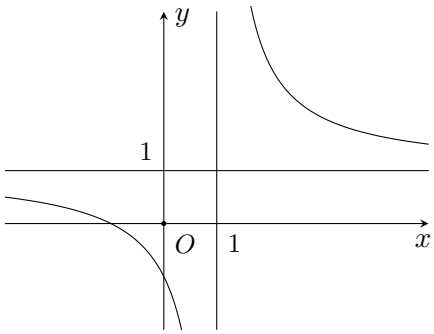
Ta có $(x^3-3x)'=3x^2-3$. Hàm số này có hai điểm cực trị.

Lại có hàm số có đồ thị như đầu bài có hai điểm cực trị nên suy ra đáp án đúng là A.

Chọn đáp án A □

Câu 47.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y=x^4+x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Lời giải.

Đường cong có đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên nó không thể là đồ thị của hàm đa thức. Ta xét các trường hợp sau:

① Xét $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, có

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Do đó đường cong trên không thể là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

② Xét $y=\dfrac{x+1}{x-1}$, có

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

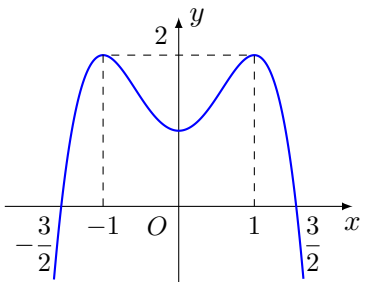
$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó đường cong trên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Một trong các hàm số cho ở các phương án **A, B, C, D** dưới đây có đồ thị như trong hình bên. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=x^4-2x^2-2$. **B.** $y=-x^4+2x^2+1$.

C. $y=-x^4-2x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2-1$.

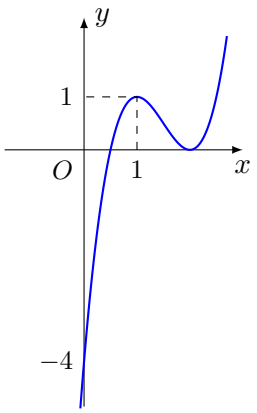
Lời giải.

Đồ thị hàm số có 3 cực trị nên hệ số $ab<0$ và căn cứ vào hình dạng thì ta có hệ số $a<0$

Chọn đáp án B □

Câu 49.

Một trong các hàm số cho ở các phương án **A, B, C, D** dưới đây có đồ thị như trong hình bên. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=-2x^3+9x^2-12x-4$. **B.** $y=x^3-3x+2$.

C. $y=x^4-3x^2+12$. **D.** $y=2x^3-9x^2+12x-4$.

Lời giải.

Hình trên là đồ thị hàm bậc 3 với hệ số a dương.

Và đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Đường thẳng $y=3x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+4x+2$ tại điểm E có tọa độ

A. $E(2;0)$. **B.** $E(0;2)$. **C.** $E(1;0)$. **D.** $E(0;1)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $3x+2=x^3-x^2+4x+2\Leftrightarrow x=0$.

Vậy điểm E có tọa độ $(0;2)$.

Chọn đáp án B □

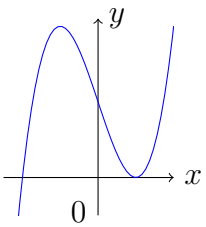
Câu 51. Một trong bốn hàm số ở các phương án **A, B, C, D** cho dưới đây có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đó là hàm số nào?

A. $y=-x^3-3x^2-1$.
B. $y=-2x^3-3x^2-1$.
C. $y=-x^3+3x^2-1$.
D. $y=x^3-3x^2-1$.

Câu 52.
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

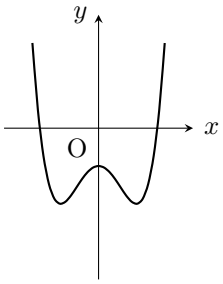


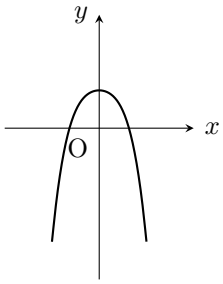
A. $y=-x^2+x+2$.
B. $y=x^3-3x+2$.
C. $y=-x^3+3x+2$.
D. $y=x^4-x^2+2$.

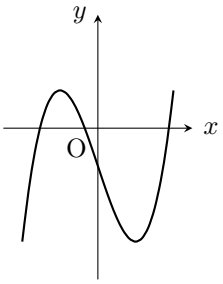
Câu 53. Tính tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$ và đường thẳng $y=3x-1$.

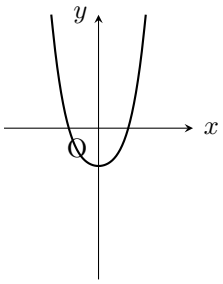
A. $M(0;-1)$.
B. $M(2;5)$.
C. $M(2;5)$ và $N\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.
D. $M\left(\dfrac{1}{3};0\right)$ và $N(0;-1)$.

Câu 54. Đồ thị nào sau đây không thể là đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với a, b, c là các số thực và $a\neq 0$?

A. 

.
B. 

.
C. 

.
D. 

.

Câu 55. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-2x^3-3x^2+1$ với trục Ox là:

A. 1.
B. 0.
C. 3.
D. 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^3-3x^2+1=0$.
Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Số giao điểm là 2.
Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+5x^2-mx+3$ đi qua điểm $A(-1;9)$?

A. $m=\dfrac{2}{3}$.
B. $m=\dfrac{-2}{3}$.
C. $m=2$.
D. $m=\dfrac{-3}{2}$.

Lời giải.

A thuộc đồ thị hàm số đã cho $\Leftrightarrow -1+5+m+3=9\Leftrightarrow m=2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{1-2x}$ tại điểm thuộc đồ thị có hoành độ $x=1$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -5.

Lời giải.

$y'=\dfrac{1}{(1-2x)^2}$. Cho nên hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(1)=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ và trục tung.

A. $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $M(0;-2)$. **C.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

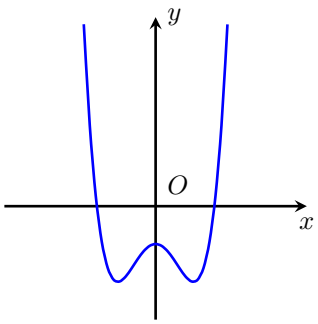
Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{2x-1}{x+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

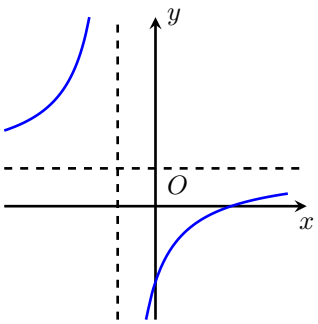
Chọn đáp án C □

Câu 59. Đồ thị nào dưới đây là của hàm số $y=x^3-2x^2+1$?

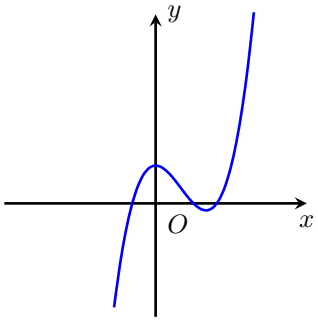
A.



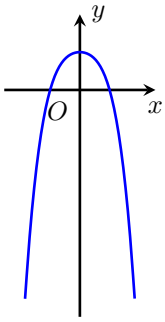
B.



C.



D.



Câu 60. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$+\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Câu 61. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là

A. $y=-2x+7$. **B.** $y=2x+7$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=-2x-1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Từ đó ta có hệ số góc tiếp tuyến là $y'(-2) = 2$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = y'(-2)(x+2) + 3 = 2x + 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Bảng biến thiên này là của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	‖ $+\infty$	↘	2
		$-\infty$	‖		

A. $y = \dfrac{x-1}{2x-2}$. **B.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số này có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Hàm số trong bảng biến thiên nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Từ các yêu cầu đó ta xác định được hàm $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $y = 6x + 1$. **B.** $y = 5x + 1$. **C.** $y = -4x$. **D.** $y = 7x + 3$.

Câu 64. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$?

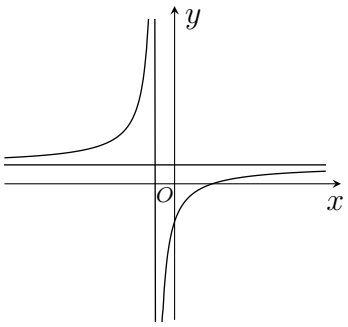
A. $x \neq -1$. **B.** $x \neq \dfrac{3}{2}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x) = \dfrac{x-2}{2x-1}$. **B.** $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$.

C. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.



Câu 66. Cho hàm số $y = x^3 - 4x + 1$ có đồ thị (C). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $K(1;2) \in (C)$. **B.** $F(0;1) \notin (C)$. **C.** $Q(-1;4) \in (C)$. **D.** $E(-2;17) \in (C)$.

Câu 67. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ và trục hoành.

A. $(0;2)$. **B.** $(0;-2)$. **C.** $(2;0)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 68. Hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 69. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

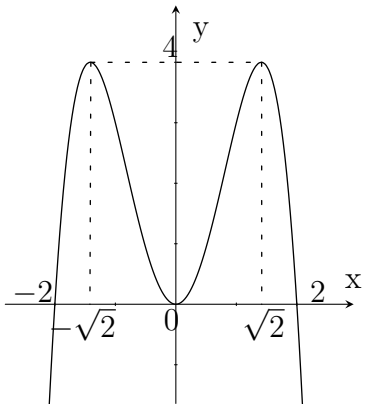
A. $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = 2x^4 - x^2$. **C.** $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$. **D.** $y = x^4 - x^2$.

Câu 70. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ với trục tung là

A. $(0;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 71.

Đồ thị hàm số sau là của hàm số nào?



A. $y = -x^4 - 2x^2$. **B.** $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$.

C. $y = -x^4 + 4x^2$. **D.** $y = x^4 - 3x^2$.

Câu 72. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ có tâm đối xứng là

A. $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$. **B.** Không có tâm đối xứng.

C. $\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 73. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Đồ thị $(\mathscr{C})$ đi qua điểm nào?

A. $M(-5;2)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(-4;\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $M(-3;4)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(0;-1)$ ta thấy thỏa mãn phương trình. Vậy điểm $M(0;-1)$ thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm.

A. $y = \dfrac{-x+2}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{2x-8}{5x-4}$. **C.** $y = \dfrac{2x^2+3}{95x-x^2+1}$. **D.** $y = \dfrac{-21x-69}{90x-1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{-21x-69}{90x-1}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{69}{21}$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(3;10)$ là đường thẳng nào?

A. $y = 15x - 35$. **B.** $y = -15x + 55$. **C.** $y = 3x + 1$. **D.** $y = -3x + 19$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'(3) = 15$.

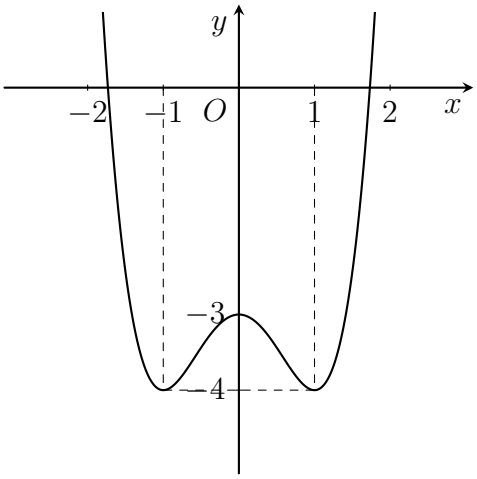
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $A(3;10)$ là

$$y = 15(x-3) + 10 = 15x - 35.$$

Chọn đáp án A □

Câu 76.

Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên?



A. $y = x^4 - 2x^2 - 3$. **B.** $y = x^4 - 3x^2 - 3$.

C. $y = x^2 + 2x^2 - 3$. **D.** $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có dạng đồ thị hàm bậc bốn dạng trùng phương với hệ số x^4 dương và có ba điểm cực trị $(-1;-4)$; $(0;-3)$, $(1;-4)$. Suy ra, phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm là $x = 0; x = \pm 1$. Do đó đáp án của bài toán là $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho hàm số $y = (x-3)(x^2 - 2x + 3)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. **D.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là:

$$(x-3)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Do đó (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho hàm số $y = x(1-x)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. **B.** (C) không cắt trục hoành.

C. (C) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt. **D.** (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.

Lời giải.

Số giao điểm của (C) với trục hoành là số nghiệm của phương trình: $x(1-x)(x^2+1) = 0$

Ta có: $x(1-x)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Suy ra số giao điểm của (C) với trục hoành là 2.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số chỉ có giá trị nhỏ nhất không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có một điểm cực trị.

C. Hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Lời giải.

Tại $x=0$ ta thấy y' không xác định và đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow x=0$ là một cực trị.

Tại $x=1$ ta thấy $y'=0$ và đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow x=1$ là một cực trị

Chọn đáp án C □

Câu 80. Điểm nào dưới đây thuộc giao điểm của $(P)\colon y=x^2-x+1$ và đường thẳng $d\colon y=2x-1$.

A. $P(3;5)$. **B**. $N(2;3)$. **C**. $M(1;-1)$. **D**. $Q(0;1)$.

Lời giải.

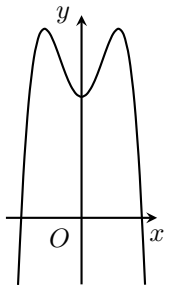
Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình $x^2-x+1=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=2\Rightarrow y=3. \end{array}\right.$

Vậy điểm $N(2;3)$ thuộc giao điểm của d và (P).

Chọn đáp án B □

Câu 81.

Hỏi hàm số nào có đồ thị là đường cong có dạng như hình vẽ sau đây?



A. $y=-x^2+x-4$.

B. $y=x^4-3x^2-4$.

C. $y=-x^3+2x^2+4$.

D. $y=-x^4+3x^2+4$.

Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị suy ra đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương, có $\begin{cases} ab<0 \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$. Do đó D là phương án đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y=-9x+16$. **B**. $y=-9x+20$. **C**. $y=9x-20$. **D**. $y=9x-16$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3$.

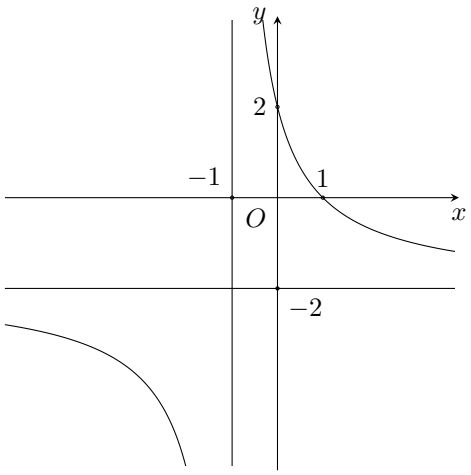
Ta có $y(2) = 2$ và $y'(2) = 9$. Do đó PTTT cần tìm là: $y = 9(x-2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình vẽ dưới đây?

A. $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

C. $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{-x+2}{x+2}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$ nên chỉ có hàm số $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **B.** $y = -x^3 - 3x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Đầu tiên, xét các giới hạn ở $\pm\infty$, ta loại được các hàm $y = x^3 - 3x^2 - 1$ và $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

Xét $y = -x^3 + 3x^2 - 1$, có

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & ; y(0) = -1 \\ x = 2 & ; y(2) = 3 \end{array}\right.$$

Như vậy, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phù hợp với bảng biến thiên.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x+1=\frac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-5=0\ (*) \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}.$$

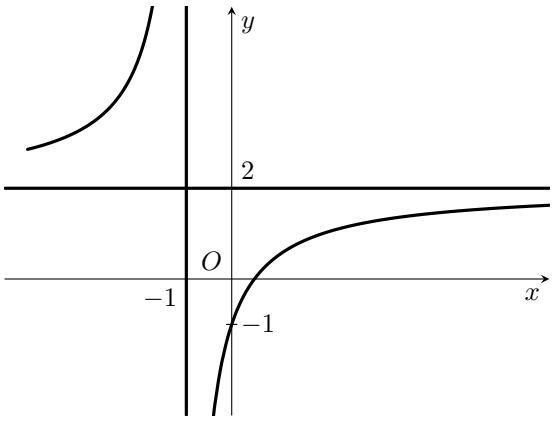
Như vậy có thể chọn $x_M=1+\sqrt{6}$ và $x_N=1-\sqrt{6}$. Khi đó, $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=1$.

Chú ý: ta cũng có thể sử dụng định lý Vi-ét đối với phương trình $(*)$:

$$x_I=\frac{S}{2}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 1}=1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 86. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải.

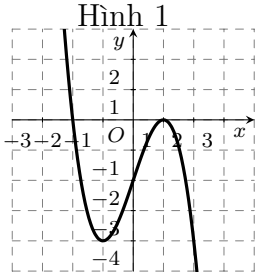
Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận ngang là $y=2$. Như vậy, ta loại được các phương án $y=\dfrac{x+1}{x-2}$, $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Ta thấy trên hình vẽ $y(0)=-1$. Vậy $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ là đáp án.

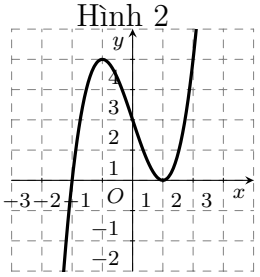
Chọn đáp án C □

Câu 87. Dạng của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ được cho trong hình nào dưới đây?

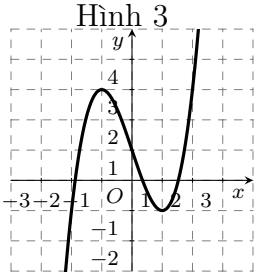
Hình 1



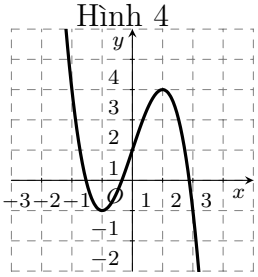
Hình 2



Hình 3



Hình 4



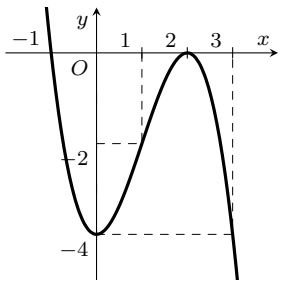
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Lời giải.

Xét các giới hạn của hàm số ở $\pm\infty$, ta loại các Hình 1 và 4. Mặt khác, ta thấy $y(0)=2$. Như vậy Hình 3 là đáp án phù hợp.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x^2-4$. **B.** $y=x^3-3x-4$. **C.** $y=x^3-3x^2-4$. **D.** $y=-x^3-3x^2-4$.

Lời giải.

Xét các giới hạn của hàm số ở $\pm\infty$, ta loại các phương án $y=x^3-3x-4$ và $y=x^3-3x^2-4$. Quan sát đồ thị, ta thấy tại $y(1)=-2$. Như vậy, $y=-x^3+3x^2-4$ là đáp án.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-2

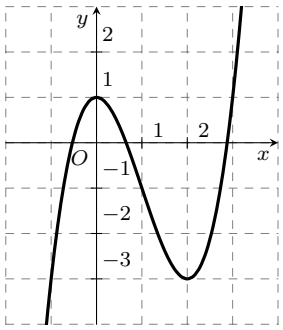
A. $y=\dfrac{2x-2}{1-x}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$. **D.** $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải.

Dựa vào BBT, ta thấy $y'>0$ trên từng khoảng xác định, như vậy ta loại được các hàm $y=\dfrac{2x-2}{1-x}$, $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$. Mặt khác, ta cũng thấy rằng đồ thị hàm số phải có tiệm cận ngang $y=-2$, do đó, ta chọn $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



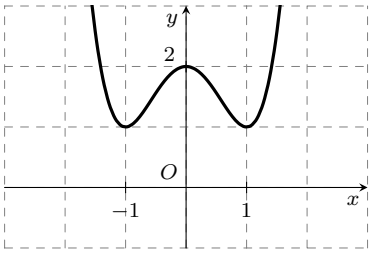
A. $y=-x^3+3x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$. **C.** $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$. **D.** $y=-x^3-3x^2+1$.

Lời giải.

Xét các giới hạn ở $\pm\infty$, ta thấy chỉ có hàm $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là phù hợp với đồ thị đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị, ta thấy $y(0) = 2$, do đó chỉ có hàm $y = x^4 - 2x^2 + 2$ là phù hợp.

Chọn đáp án B □

Câu 92.

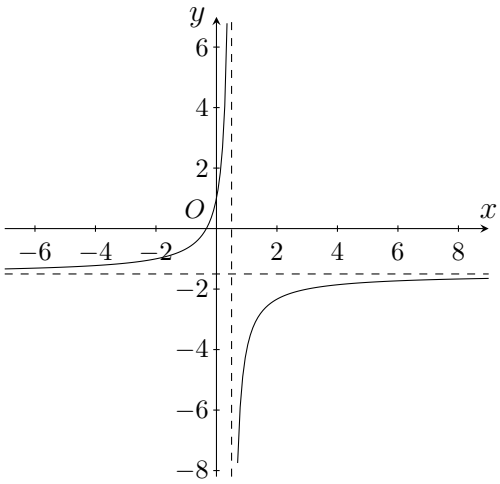
Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây?

A. $y = \dfrac{3x-1}{1-x}$.

B. $y = \dfrac{3x-2}{1-x}$.

C. $y = \dfrac{3x-1}{-1-2x}$.

D. $y = \dfrac{3x+1}{1-2x}$.



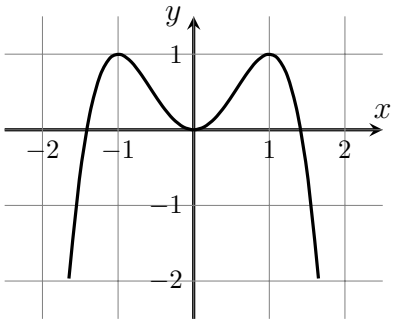
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng là $x = a$ và tiệm cận ngang $y = b$ với $0 < a < 1$ và $-2 < b < -1$.

Chọn đáp án D □

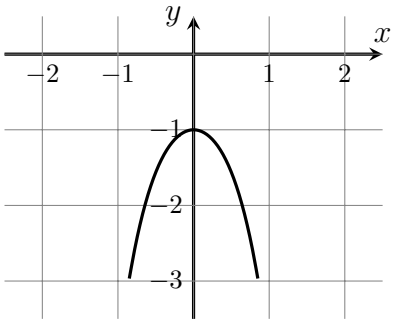
Câu 93. Trong các phương án dưới đây đâu là đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$?

A.

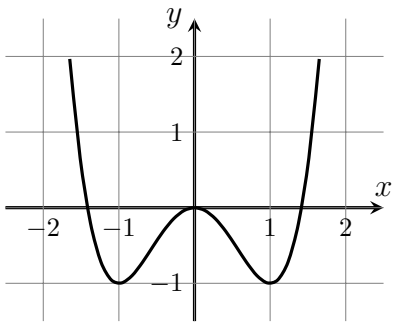


.

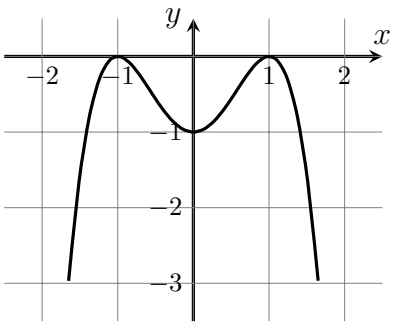
B.



.

C. 

.

D. 

.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$. Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực đại là $(-1;0)$ và $(1;0)$, một điểm cực tiểu là $(0;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Tìm số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Số giao điểm cần tìm là số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x\left[(x+1)^2 + 2\right] = 0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm chỉ có một nghiệm nên số giao điểm cần tìm là 1.

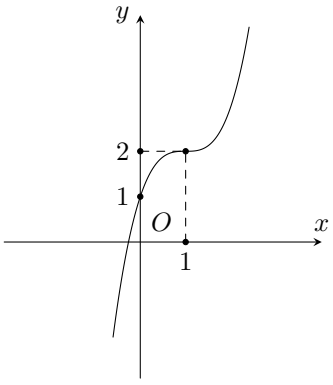
Chọn đáp án A □

Câu 95.

Đường cong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$.

C. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



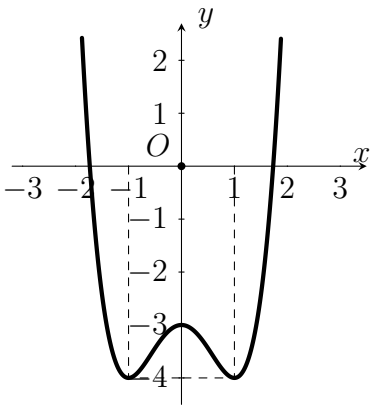
Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ đi qua điểm có tọa độ $(1;2)$ nên trong bốn phương án chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 96.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+x^2-2$. **B.** $y=-x^2+x-1$.

C. $y=-x^4+3x^2-2$. **D.** $y=x^4-2x^2-3$.

Lời giải.

Từ đồ thị suy ra đây là đồ thị hàm bậc 4 có hệ số $a>0$ nên chỉ có hàm số $y=x^4-2x^2-3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=1-2x$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 98. Tìm hoành độ các giao điểm của đường thẳng $y=2x-\dfrac{13}{4}$ với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$.

A. $x=2\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $x=-\dfrac{11}{4}$, $x=2$.

C. $x=1$, $x=2$, $x=3$. **D.** $x=\dfrac{-11}{4}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình $2x-\dfrac{13}{4}=\dfrac{x^2-1}{x+2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{11}{4}\end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	2

A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{1+x}$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$ và hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Trong các hàm số đã cho, ta có hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ thỏa mãn các điều trên.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Trong các khẳng định sau về hàm số $y=-2x^4+4x^2-1$, khẳng định nào **sai**?

A. Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt.

B. Hàm số có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

D. Đồ thị của hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Lời giải.

Vì hệ số $a < 0$ nên hàm số trên không thể có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. B	5. A	6. A	7. A	8. B	9. B	10. D
11. C	12. D	13. A	14. D	15. A	16. D	17. A	18. D	19. B	20. B
21. B	22. B	23. A	24. D	25. C	26. B	27. B	28. B	29. B	30. D
31. B	32. B	33. C	34. C	35. A	36. A	37. C	38. D	39. D	40. B
41. B	42. B	43. C	44. A	45. C	46. C	47. A	48. A	49. B	50. B
51. C	52. A	53. D	54. A	55. C	56. A	57. D	58. B	59. A	60. B
61. B	62. C	63. B	64. A	65. D	66. C	67. A	68. A	69. C	70. D
71. B	72. B	73. B	74. C	75. A	76. D	77. C	78. B	79. B	80. A
81. D	82. C	83. D	84. C	85. C	86. B	87. B	88. B	89. D	90. A
91. D	92. D	93. A	94. C	95. B	96. C	97. A	98. D	99. D	100. C

❷ Mức độ thông hiểu

Câu 1. Trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x-1}{x-2}$, số điểm M mà tiếp tuyến với (C) song song với đường thẳng d: $x+y=1$ là

A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M(x_0,y_0)$ thuộc đồ thị (C), khi đó thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là

$$y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+y_0.$$

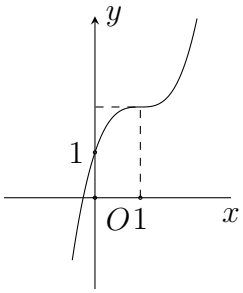
Để tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $x+y=1$ thì $\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$

Khi $x=1$ thì tiếp tuyến đó là đường thẳng d nên loại. Vậy có một điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=x^4-3x^2+1$. **B**. $y=x^3-3x^2+3x+1$.

C. $y=-x^3+3x^2+1$. **D**. $y=x^3-3x^2-3x+1$.

Lời giải.

Ta thấy hàm số đồng biến nên tính trực tiếp y' ta loại trừ các phương án A, C, D cụ thể:

① Hàm số $y=x^4-3x^2+1$ có $y'=4x^3-6x^2$ loại do $y'(1)<0$.

② Hàm số $y=x^3-3x^2+3x+1$ có $y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ nhận.

③ Hàm số $y=-x^3+3x^2+1$ có $y'=-3x^2+6x$ loại do $y'(3)<0$.

④ Hàm số $y=x^3-3x^2-3x+1$ có $y'=3x^2-6x-3$ loại do $y'(0)<0$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-4

Giá trị của m để phương trình $f(x)-m=0$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $-3\geq m\geq 2$. **B**. $-3<m<2$. **C**. $-4\geq m\geq 2$. **D**. $-4<m<2$.

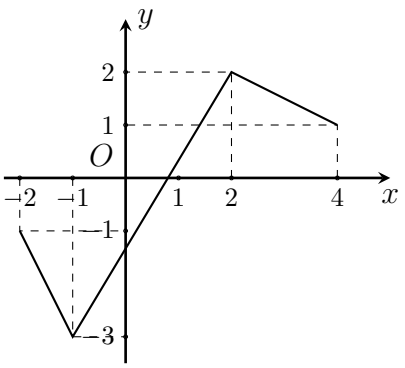
Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $-3<m<2$.

Chọn đáp án B □

Câu 4.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào trong bốn mệnh đề sau đây là đúng?



A. $f'\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot f'(3)>0$.

B. $\min\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=-2$.

C. $\max\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=4$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-2;4]$.

Lời giải.

① $\min\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=-2$. Mệnh đề này sai, vì giá trị nhỏ nhất bằng -3.

② $\max\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=4$. Mệnh đề này sai, vì giá trị lớn nhất bằng 2.

③ Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-2;4]$. Mệnh đề này sai, vì chỉ có 1 nghiệm.

④ $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot f'(3)>0$. Mệnh đề này đúng. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(2;4)$ nên $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot f'(3)>0$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	2

A. $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

B. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

D. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $(C): y=x^4-2x^2$. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào cắt (C) tại hai điểm phân biệt?

A. $y=0$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $y=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x+1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. (C) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

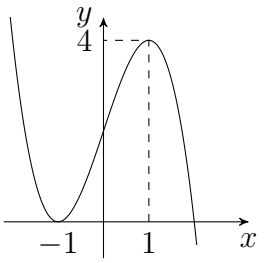
B. (C) có hai điểm cực trị thuộc hai phía của trục tung.

C. (C) tiếp xúc với trục Ox.

D. (C) đi qua điểm $A(1;0)$.

Câu 8.

Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số nào dưới đây?



A. $y=(x+1)^2(2-x)$.

B. $y=-x^4+2x^2+1$.

C. $y=x^3-3x+2$.

D. $y=-x^3+x$.

Câu 9. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm mà tọa độ của nó đều là các số nguyên?

A. 1 điểm. **B**. 3 điểm. **C**. 4 điểm. **D**. 2 điểm.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x^3-12x+m-2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A. $m\in[-14;18]$. **B**. $m\in(-14;18)$. **C**. $m\in(-18;14)$. **D**. $\hoac{m<-14\\m>18}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-12x+m-2=0\Leftrightarrow -x^3+12x+2=m\quad (*)$$

Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-12x+m-2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $g(x)=-x^3+12x+2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 3 giao điểm.

Xét $g(x)=-x^3+12x+2$ có $g'(x)=-3x^2+12=0\Leftrightarrow \hoac{x=-2\\x=2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	18	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $g(x)$ cắt $y=m$ tại 3 giao điểm khi và chỉ khi $-14<m<18$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 11.

Bảng biến thiên như hình bên là của hàm số nào?

A. $y=-x^3+6x^2-9x+4$.

B. $y=-x^3+6x^2-9x$.

C. $y=-x^3-6x^2+9x+4$.

D. $y=x^3-6x^2+9x-4$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra $a<0$ nên loại "$y=x^3-6x^2+9x-4$".

Hàm số có $y'=0\Leftrightarrow \hoac{x=1\\x=3}$ nên loại "$y=-x^3-6x^2+9x+4$".

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(1;0)$ nên loại "$y=-x^3+6x^2-9x$".

Ta có $y=-x^3+6x^2-9x+4$.

$y'=-3x^2+12x-9$; $y'=0\Leftrightarrow \hoac{x=1\\x=3}\Rightarrow \text{CT}(1;0),\text{CĐ}(3;4)$.

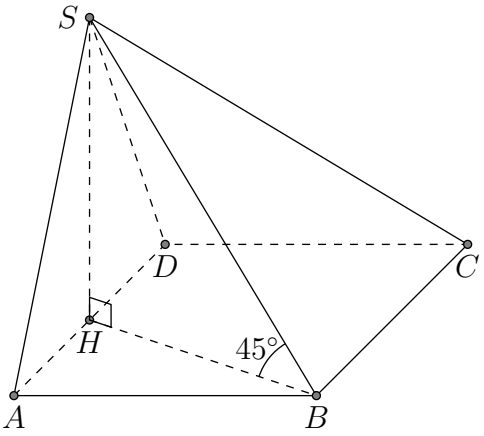
Chọn đáp án A ☐

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AD. Do ΔSAD cân.
$\Rightarrow DH \perp AD$.
Do $(SAD) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \cap (ABCD) = AD$.
mà $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HB$ là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$ suy ra góc giữa SB và $(ABCD)$ là $\widehat{SBH} = 45°$.
Xét ΔAHB vuông tại $A \Rightarrow HB^2 = AH^2 + AB^2$.
$HB^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow HB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



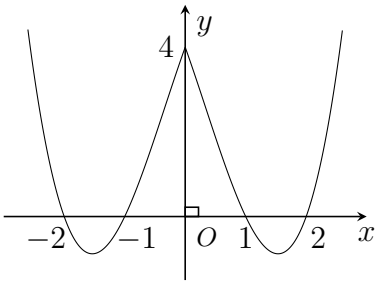
Xét ΔSHB vuông tại H: $SH = HB \cdot \tan 45° = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ

Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A. $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$. **B.** $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.
C. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. **D.** $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$.

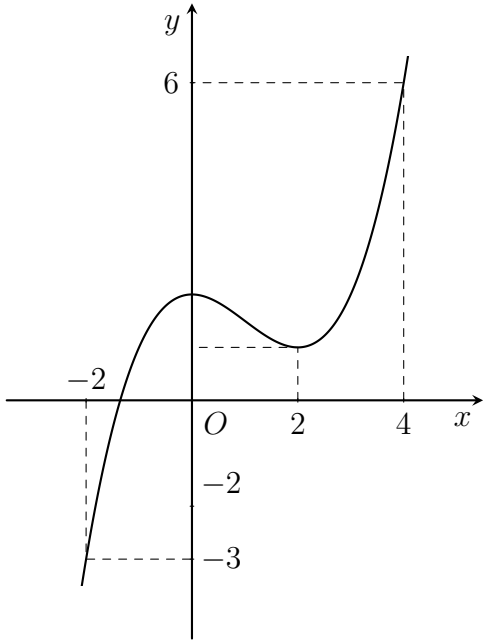


Lời giải.

$f(|0|) = f(0) = 4$ nên loại đi hai đáp án.
Với hai đáp án còn lại dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(|x|) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên hệ số bậc 3 dương. Kết quả hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
Có thể kiểm tra lại thấy rằng $f(1) = f(2) = 0$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ



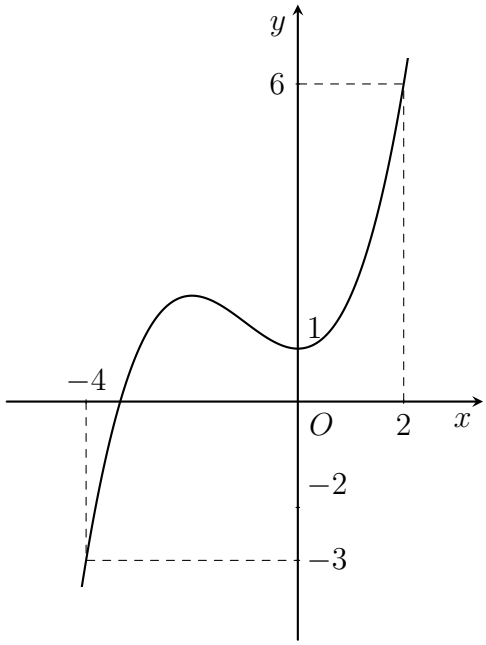
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x+2)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $3f(x+2)-5=0 \Leftrightarrow f(x+2)=\dfrac{5}{3}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra được đồ thị hàm số $y=f(x+2)$ bằng cách tịnh tiến sang trái trục hoành 2 đơn vị.



Ta nhận thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x+2)$ tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-4;0)$.

B. Đường thẳng $y=-2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

C. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(-2;0)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;0]$ là -4.

Lời giải.

A sai vì hàm số đồng biến trên $(-4;-2)$ và nghịch biến trên $(-2;0)$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M\,(-1;0)$ là

A. $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$. **B**. $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$. **C**. $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$. **D**. $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

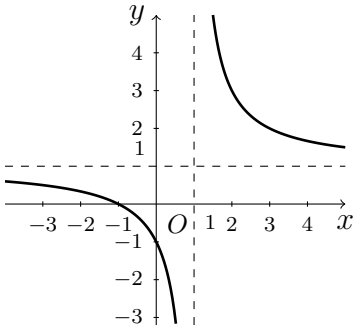
Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k=y'(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $M\,(-1;0)$ là $y=-\dfrac{1}{2}\,(x+1)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{-x}{1-x}$. **B**. $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$.

C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D**. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên loại hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0;-1)$, thay vào các hàm số còn lại ta thấy chỉ có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ đi qua điểm đó.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $f(x)+2=0$ là

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=-2$ có hai nghiệm phân biệt. Một nghiệm là $x=3$ và một nghiệm là $x=x_0<-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x+m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty)$. **B**. $m\in(-2;2)$. **C**. $m\in\mathbb{R}$. **D**. $m\in(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

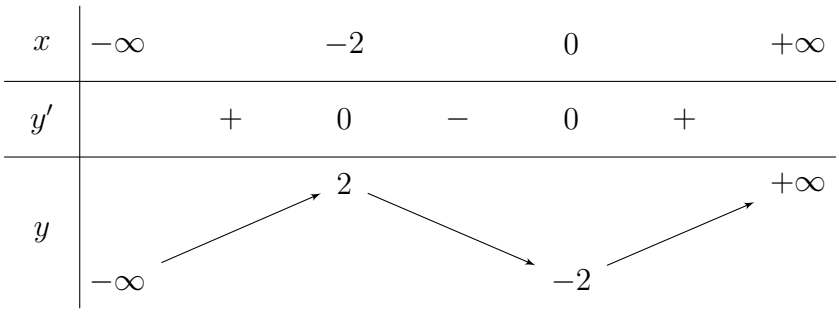
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y=-m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ tại đúng ba điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta suy ra $-2<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau



Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm là

A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
B. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
C. $(-2; 2)$.
D. $[-2; 2]$.

Lời giải.

Để phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng một điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $\hoac{m > 2\\ m < -2}$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng một điểm.

Do đó $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $(5 - 2\sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{3})$.
B. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$.
C. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{3}) \cup (5 + 2\sqrt{3}; +\infty)$.
D. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-2x + m = \frac{x+1}{x-2}.$$

Với điều kiện $x \neq 2$, phương trình tương đương

$$g(x) = 2x^2 - (3+m)x + 2m + 1 = 0.$$

Đường thẳng $y = -2x + m$ cắt hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2. Nghĩa là

$$\begin{cases} g(2) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ (3+m)^2 - 8(2m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 10m + 1 > 0 \Leftrightarrow \hoac{m > 5 + 2\sqrt{6}\\ m < 5 - 2\sqrt{6}.} 0$$

Vậy tập các giá trị m cần tìm là $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây nằm phía dưới trục hoành?

A. $y = x^4 + 5x^2 - 1$.
B. $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$.
C. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$.
D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải.

Đồ thị của một hàm số nằm phía dưới trục hoành khi và chỉ khi hàm số đó nhận giá trị không dương với mọi x. Tuy nhiên, ta nhận thấy

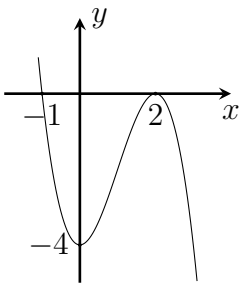
- ☑ Hàm số $y = x^4 + 5x^2 - 1$ nhận giá trị $125 > 0$ khi $x = 3$.
- ☑ Hàm số $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$ nhận giá trị $6 > 0$ khi $x = -7$.
- ☑ Hàm số $y = -x^4 - 4x^2 + 1$ nhận giá trị $1 > 0$ khi $x = 0$.

Còn ta có $-x^4 + 2x^2 - 2 = -1 - (x^2 - 1)^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó đây là hàm số cần tìm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số nào dưới đây?



A. $y = -x^3 - 4$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

Lời giải.

Nhận xét: Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba.

- Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại $(-1; 0)$ và tiếp xúc với trục Ox tại $(2; 0)$ nên suy ra hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = a(x + 1)(x - 2)^2$.
- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại $(0; -4)$ nên $-4 = a(0 + 1)(0 - 2)^2 \Leftrightarrow a = -1$.

Suy ra, hàm số cần tìm có dạng $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) - 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

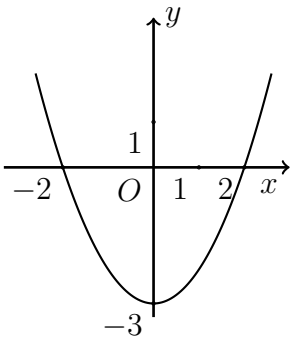
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

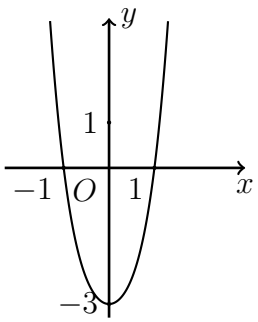
Lời giải.

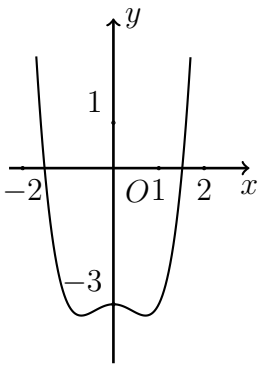
Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = m + 2$. Từ bảng biến thiên, phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m + 2 < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 1$. Do đó, có ba số nguyên m thỏa mãn là $-2, -1, 0$.

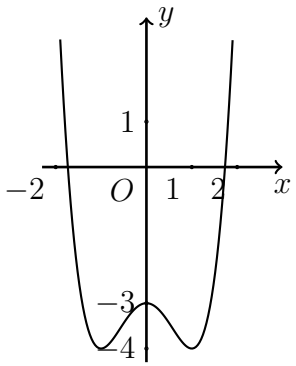
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Đồ thị nào trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 cực tiểu.

Cho $y = 0$ ta có $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1.$

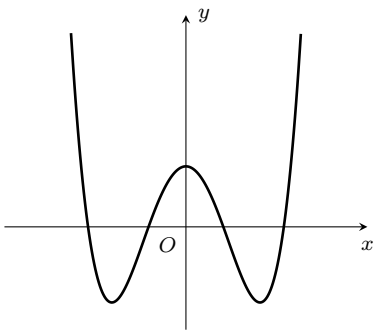
Suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án B □

Câu 26.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong các hàm số sau, hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = x^4 + 3x^2 + 1$.
B. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
C. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.
D. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị đã cho suy ra hàm số có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại. Trong các hàm số đã cho, hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m \in \left(-\infty; 3 - 3\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 3\sqrt{2}; +\infty\right)$.
B. $m \in \left(-\infty; 4 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(4 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left(-\infty; 1 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(1 + 2\sqrt{3}; +\infty\right)$.
D. $m \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x}{x+1} = x + m,\ (x \neq -1).$$

Biến đổi ta được phương trình $x^2 + (m-1)x + m = 0.\ (*)$

Dễ thấy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình $(*)$. Nên đường thẳng và đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Có $\Delta = m^2 - 6m + 1. \Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

A. $1 \leq m \leq 3$. **B.** $1 < m < 3$. **C.** $3 < m < \frac{13}{4}$. **D.** $3 \leq m < \frac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &4\cos^3 x - 3\cos x - (2\cos^2 x - 1) + m\cos x - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 3\cos x + m\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x(4\cos^2 x - 2\cos x - 3 + m) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 4\cos^2 x - 2\cos x - 3 + m = 0.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Nếu $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Phương trình này có 2 nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Nếu $4\cos^2 x - 2\cos x - 3 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4\cos^2 x + 2\cos x + 3 = f(x)$.

Để phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ thì phương trình $m = f(x)$ phải có 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ta có $f'(x) = -\sin x(-8\cos x + 2)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\arccos\frac{1}{4} + k2\pi = \pm\alpha + k2\pi.\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\alpha$		0		α		π		$2\pi - \alpha$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	1	↗	$\frac{13}{4}$	↘	1	↗	$\frac{13}{4}$	↘	1

Phương trình $m = f(x)$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ khi $3 < m < \frac{13}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.

Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào sau đây?

A. $y=-x^4+2x^2-3$. **B.** $y=x^4+2x^2-3$.

C. $y=-\dfrac{1}{4}x^4+3x^2-3$. **D.** $y=x^4-2x^2-3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-3$

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=4x^3-4x$.

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm 1.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

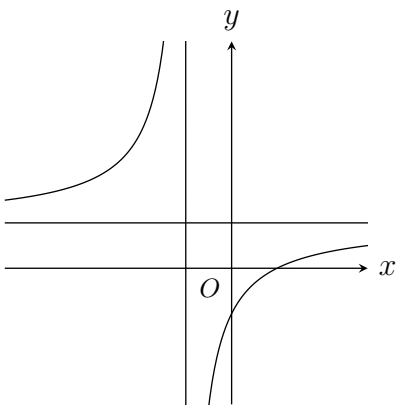
Chọn đáp án D □

Câu 30.

Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x+3}{x-2}$. **B.** $y=-2x+3x^4$.

C. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=a$, với $a<0$ nên chọn đáp án $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(x)=m$, với $m\in(-1;2)$ có số nghiệm là

A. 3. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 2.

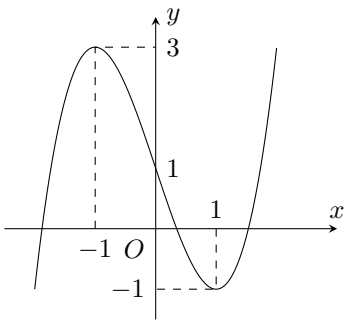
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có với $m\in(-1;2)$, phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B**. $y=x^3+3x+1$.

C. $y=-x^3+3x+1$. **D**. $y=-x^3-3x+1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số của x^3 lớn hơn 0. Đồ thị đi qua điểm $A(1;-1)$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x^2+1$ thỏa.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y=x-m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $m<-1$. **B**. $m>-5$.

C. $m<-5$ hoặc $m>-1$. **D**. $-5<m<-1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x-m=\frac{2x+1}{x+1}\Leftrightarrow(x-m)(x+1)=(2x+1)\Leftrightarrow x^2-(m+1)x-m-1=0. \quad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) không có nghiệm $x=-1$ nên đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta>0\Leftrightarrow(m+1)^2-4\cdot1\cdot(-m-1)>0\Leftrightarrow m^2+6m+5>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-5\\ m>1.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			$-\infty$				

A. $m \in [-2;2)$. **B.** $m \in (-2;2)$. **C.** $m \in (-2;2]$. **D.** $m \in [2;+\infty)$.

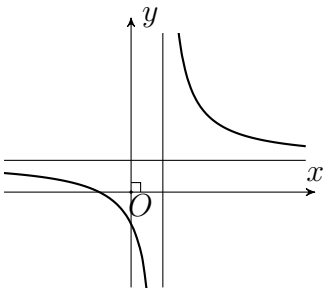
Lời giải.

Từ BBT suy ra $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (-2;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 35.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $ac > 0, bd > 0$. **B.** $bd < 0, ad > 0$.

C. $bc > 0, ad < 0$. **D.** $ab < 0, cd < 0$.

Lời giải.

Theo hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow d$ và c trái dấu (1).

Theo hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow a$ và c trái dấu (2).

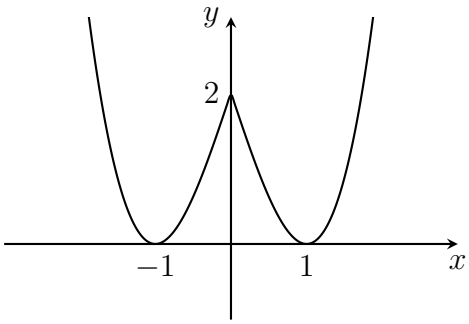
Ta có $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra a, c, b cùng dấu và b, d trái dấu.

Vậy $bc > 0, ad < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Đồ thị hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. **B.** $y = 2(x^2-1)^2$. **C.** $y = |x^3| - 3|x| + 2$. **D.** $y = x^2 - 2|x|^2 + 2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y = |x^3| - 3|x| + 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = -m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\frac{1}{3};1\right]$. **B.** $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$. **C.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4x^2-4x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=\frac{4}{3}x^3-2x^2+1$ là

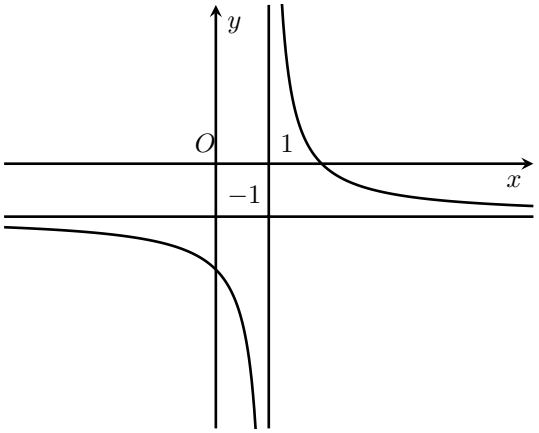
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt thì $\frac{1}{3}<-m<1\Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$.

B. $0<b<a$.

C. $b<a<0$.

D. $0<a<b$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases}\frac{a}{1}=-1\\-a+b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1<0\\-b<-1=a\end{cases}\Rightarrow b<a<0$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Biết đường thẳng $y=-\frac{9}{4}x-\frac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=\frac{13}{12}$. **B.** $y_0=\frac{12}{13}$. **C.** $y_0=-\frac{1}{2}$. **D.** $y_0=-2$.

Câu 40. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tâm đối xứng là điểm $I\,(1;-2)$?

A. $y=\dfrac{2x-3}{2x+4}$. **B.** $y=2x^3-6x^2+x+1$.

C. $y=-2x^3+6x^2+x-1$. **D.** $y=\dfrac{2-2x}{1-x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=2x^3-6x^2+x+1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^2-12x$ và $y''=12x-12$. Nên $y''=0\Leftrightarrow 12x-12=0\Leftrightarrow x=1$.

Khi $x=1$ suy ra $y=-2$. Do đó đồ thị hàm số $y=2x^3-6x^2+x+1$ nhận điểm $(1;-2)$ là điểm uốn.

Nên điểm I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=2x^3-6x^2+x+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Biết rằng hai đường cong $y = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 5$ và $y = x^3 - 2x^2 - 3x - 1$ tiếp xúc nhau tại một điểm duy nhất. Tọa độ điểm đó là

A. $(2; -7)$. **B.** $(1; -5)$. **C.** $(3; -1)$. **D.** $(0; 5)$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 5 = x^3 - 2x^2 - 3x - 1 \\ 4x^3 - 18x^2 + 30x - 20 = 3x^2 - 4x - 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0 \\ 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = 0 \\ (x-1)\left(4x^2 - 17x + 17\right) = 0 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ $x = 1$ nên tọa độ điểm tiếp xúc là $(1; -5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Bảng biến thiên ở hình dưới là của hàm số nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$. **B.** $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$.

C. $y = 2|x|^3 - 3|x| - 3$. **D.** $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 3$ ta có $y' = 6x^2 - 6x$.

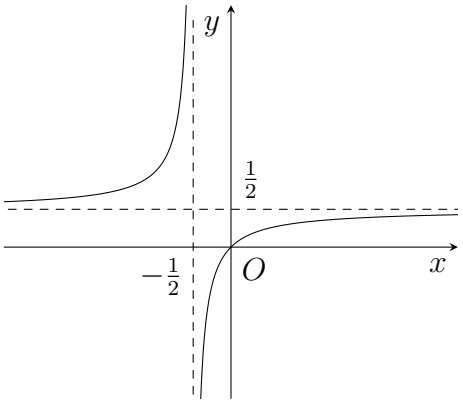
Khi đó $y' = 0$ suy ra $6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Dễ dàng suy ra hàm số có các điểm cực trị $(0; -3)$ và $(1; -4)$.

Mà $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3 \Leftrightarrow y = 2|x|^3 - 3|x|^2 - 3$. Nên dựa vào phép biến đổi đồ thị suy ra hàm số $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

Chọn đáp án D □

Câu 43.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

C. $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{2x-1}$.

Lời giải.

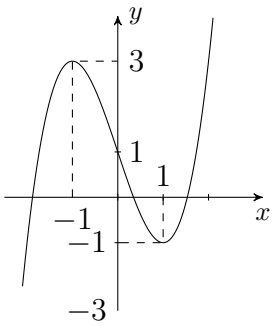
• Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{2}$ nên loại phương án $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$ và $y=\dfrac{x}{2x-1}$.

• Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên loại phương án $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. Vậy hàm số đã cho là $y=\dfrac{x}{2x+1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44.

Hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm sau?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3+3x+1$.

C. $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=x^3+3x^2+1$.

Lời giải.

Đồ thị đi qua các điểm $(-1;3)$ và $(1;-1)$ nên chọn hàm số $y=x^3-3x+1$.

Chọn đáp án A □

Câu 45.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Lời giải.

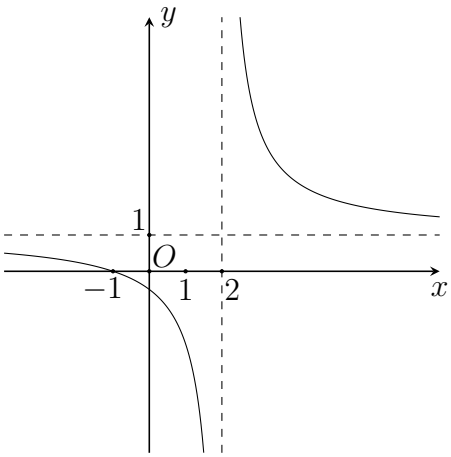
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 46.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T=a+b$.

A. $T=0$. **B**. $T=2$. **C**. $T=-1$. **D**. $T=3$.



Lời giải.

Nhận thấy, $x=2$, $y=1$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

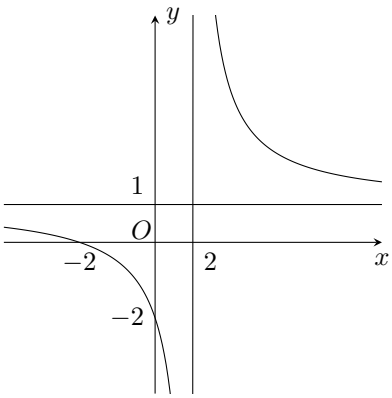
Suy ra, $\begin{cases}\dfrac{2}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=1\end{cases}$. Vậy $T=a+b=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47.

Tìm giá trị của a,b để hàm số $y=\dfrac{ax+2}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

A. $\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$. **B**. $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$. **C**. $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$. **D**. $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow b=1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1\Rightarrow a=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$ có đồ thị (C), tiếp tuyến của (C) có hệ số góc đạt giá trị bé nhất khi nào?

A. $a<0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\dfrac{b}{3a}$. **B**. $a<0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$.

C. $a>0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$. **D**. $a>0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\dfrac{b}{3a}$.

Lời giải.

$y'=3ax^2+2bx+2; y''=6ax+2b=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$, y' đạt GTNN khi $a>0, y''=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$+\infty$	-1	0		2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$	-2	$\nearrow$ 2	$\nearrow$ $+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-1;3) \setminus \{0;2\}$.

B. $m \in [-1;3] \setminus \{0;2\}$.

C. $m \in (-1;3)$.

D. $m \in (-2;2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < f(m) < 2$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta nhận thấy $-2 < f(x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 0; x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (-1;3) \setminus \{0;2\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

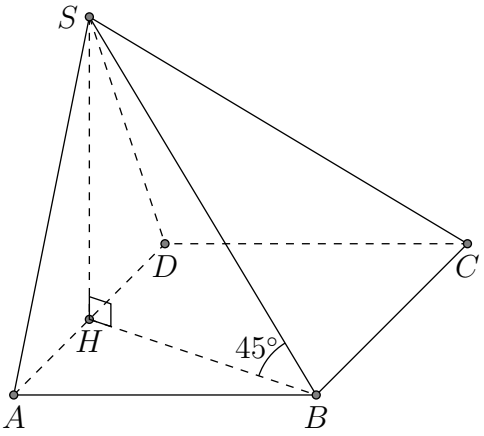
B. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AD. Do ΔSAD cân.
$\Rightarrow DH \perp AD$.
Do $(SAD) \perp (ABCD)$ và $(SAD) \cap (ABCD) = AD$.
mà $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HB$ là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$ suy ra góc giữa SB và $(ABCD)$ là $\widehat{SBH} = 45°$.
Xét ΔAHB vuông tại $A \Rightarrow HB^2 = AH^2 + AB^2$.
$HB^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow HB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



Xét ΔSHB vuông tại H: $SH = HB \cdot \tan 45° = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

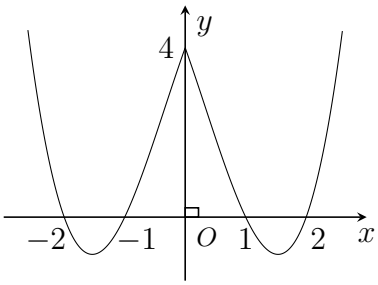
Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ

Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A. $f(x)=-x^3-x^2+4x+4$. **B.** $f(x)=x^3+x^2-4x-4$.

C. $f(x)=x^3-x^2-4x+4$. **D.** $f(x)=-x^3+x^2+4x-4$.



Lời giải.

$f(|0|)=f(0)=4$ nên loại đi hai đáp án.

Với hai đáp án còn lại dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(|x|)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên hệ số bậc 3 dương. Kết quả hàm số $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

Có thể kiểm tra lại thấy rằng $f(1)=f(2)=0$

Chọn đáp án C □

Câu 52. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 1 điểm cực trị?

A. $y=x^3-6x^2+9x-5$. **B.** $y=-x^4-3x^2+4$.

C. $y=x^3-3x^2+3x-5$. **D.** $y=2x^4-4x^2+1$.

Lời giải.

$y=-x^4-3x^2+4\Rightarrow y'=-4x^3-6x=-2x(2x^2+3)$. Phương trình $y'=0$ có 1 nghiệm $x=0$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	$+\infty$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3-m$, ($m$ là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $I(2;-2)$. Tổng tất cả các số m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp có đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $-\dfrac{2}{17}$. **B.** $\dfrac{4}{17}$. **C.** $\dfrac{14}{17}$. **D.** $\dfrac{20}{17}$.

Lời giải.

$y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3-m$

$\Rightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=-3(x^2-2mx+m^2-1)$.

Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x=m+1$ và $x=m-1$.

☑ $x=m+1$, ta có

$$\begin{aligned} y &= (m+1)^3-3m(m+1)^2+3(m^2-1)(m+1)-m^3-m \\ &= m^3+3m^2+3m+1-3m^3-6m^2-3m+3m^3+3m^2-3m-3-m^3-m \\ &= -2m-2\Rightarrow A(m+1;-4m-2). \end{aligned}$$

☑ $x = m-1$, ta có

$$\begin{aligned} y &= (m-1)^3 - 3m(m-1)^2 + 3(m^2-1)(m-1) - m^3 - m \\ &= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 - 3m^3 + 6m^2 - 3m + 3m^3 - 3m^2 - 3m + 3 - m^3 - m \\ &= -2m - 2 \Rightarrow B(m-1; -4m+2). \end{aligned}$$

Xét $\triangle IAB$ có $\overrightarrow{AB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{IA} = (m-1, -4m)$, $\overrightarrow{IB} = (m-2; -4m-4)$.
Suy ra $AB = 2\sqrt{5}$, $IA = \sqrt{(m-1)^2 + 16m^2}$, $IB = \sqrt{(m-3)^2 + 16(1-m)^2}$.
Phương trình đường thẳng AB là $2x + y + 2m = 0$.
$\mathrm{d}(I, AB) = \dfrac{|4 - 2 + 2m|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2+2m|}{\sqrt{5}}$; $AB = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$.
Suy ra diện tích $\triangle IAB$ là $S = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(I, AB) \cdot AB = |2 + 2m|$.
Lại có $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S}$, thay biểu thức ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{(m-1)^2 + 16m^2} \cdot \sqrt{(m-3)^2 + 16(1-m)^2}}{4|2+2m|} \\ \Leftrightarrow\ & 4|m+1| = \sqrt{(m-1)^2 + 16m^2} \cdot \sqrt{(m-3)^2 + 16(1-m)^2} \\ \Leftrightarrow\ & 16(1 + 2m + m^2) = (17m^2 - 2m + 1)(m^2 - 6m + 9 + 16m^2 - 32m + 16) \\ \Leftrightarrow\ & 16(1 + 2m + m^2) = (17m^2 - 2m + 1)(17m^2 - 38m + 25) \\ \Leftrightarrow\ & 16m^2 + 32m + 16 = 289m^4 - 680m^3 + 518m^2 - 88m + 25 \\ \Leftrightarrow\ & 289m^4 - 680m^3 + 502m^2 - 120m + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (m-1)(289m^3 - 391m^2 + 111m - 9) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{3}{17}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra tổng các giá trị của m là $1 + \dfrac{3}{17} = \dfrac{20}{17}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Số nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ là

A. 0. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Xem số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ với đường thẳng $y = 0$.
Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$, $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{59}{16}$	↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		-2		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		$-$				$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m \in \left(\frac{7}{4};2\right) \cup (22;+\infty)$.

B. $m \in [22;+\infty)$.

C. $m \in \left(\frac{7}{4};+\infty\right)$.

D. $m \in \left(\frac{7}{4};2\right] \cup [22;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} \frac{7}{4} < m \le 2 \\ m \ge 22 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $y = m - 1$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $1 \le m < 5$.

B. $1 < m < 5$.

C. $1 < m \le 5$.

D. $0 < m < 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ.

Để đường thẳng cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt thì $0 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hàm số $y = 2x^4 - 8x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với trục hoành?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Gọi tiếp tuyến song song với trục hoành là $d : y = m$, $m \neq 0$.

Điều kiện tiếp xúc là $\left\{\begin{array}{l} 2x^4 - 8x^2 = m \\ 8x^3 - 16x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ m = 0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ m = -8 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ m = -8. \end{array}\right.$

So điều kiện, nhận $m = -8$. Vậy có một tiếp tuyến thỏa bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Bảng biến thiên trong hình dưới là của hàm số nào trong các hàm số đã cho?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-1

A. $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định và đồ thị nhận đường thẳng $x=1$, $y=-1$ làm hai tiệm cận, vì thế nên chỉ có hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho hàm số $y=(x+2)\left(x^2-3x+3\right)$ có đồ thị là (C). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại ba điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại hai điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại một điểm. **D.** (C) không cắt trục hoành.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$(x+2)\left(x^2-3x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x+2=0\\&x^2-3x+3=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow x=-2.$$

Vậy (C) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Đồ thị hàm số $y=x^2\left(x^2-3\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=2x$ tại bao nhiêu điểm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Để đường thẳng tiếp xúc với đường cong thì hệ $\begin{cases}x^2\left(x^2-3\right)=2x\\4x^3-6x=2\end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $\begin{cases}x^2\left(x^2-3\right)=2x\\4x^3-6x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-3x^2-2x=0\\4x^3-6x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x=2\vee x=-1\\x=-1\vee x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$

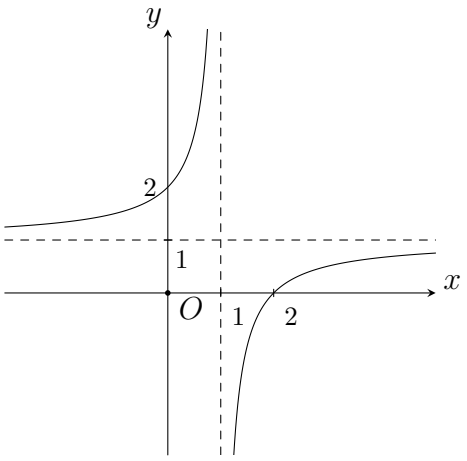
Vậy đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng tại một điểm duy nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 61.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **B**. $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. **C**. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **D**. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số có hai tiệm cận $x=1$, $y=1$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0,2)$ và $(2,0)$.

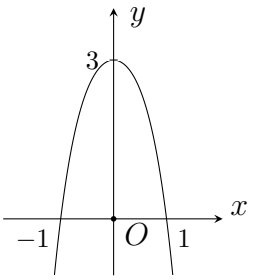
Chọn đáp án C □

Câu 62.

Đồ thị hình bên là đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=x^4+2x^2-3$. **B**. $y=-x^4-2x^2+3$.

C. $y=x^3+3x^2-3$. **D**. $y=-x^2+2x+3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, hàm số có 1 cực trị.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1,0)$, $(1,0)$ và $(0,3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Số nghiệm của phương trình $x^4+2x^3-2=0$ là

A. 0. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^3-2$ và đường thẳng $y=0$.

Đặt $f(x)=x^4+2x^3-2$ suy ra $f'(x)=4x^3+6x^2=2x\left(x^2+3\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(x^2+3\right)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì số nghiệm là 2

Chọn đáp án C □

Câu 64. Đường thẳng $y=2x-1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2x-1$ và đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ là

$$2x-1=\frac{x^2-x-1}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\(2x-1)(x+1)=x^2-x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x^2+2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=-2.\end{bmatrix}$$

Vậy đường thẳng $y=2x-1$ và đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ có 2 điểm chung.

Chọn đáp án A □

Câu 65.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

A. $(-4;2)$. **B**. $[-4;2)$. **C**. $(-4;2]$. **D**. $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị tại đúng ba điểm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên ta có $-4<m<2$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-3}{2x+1}$ cùng với 2 tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng

A. 6. **B**. 7. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Tiệm cận ngang là $y=2$, tiệm cận đứng $x=-\dfrac{1}{2}$.

Gọi giao điểm của hai tiệm cận là $A\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

$y'=\dfrac{4(2x+1)-2(4x-3)}{(2x+1)^2}=\dfrac{10}{(2x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M\left(m;2-\dfrac{5}{2m+1}\right)$ $(m\neq-\dfrac{1}{2})$ thuộc đồ thị hàm số y là

$$y=\frac{10}{(2m+1)^2}(x-m)+2-\frac{5}{2m+1}.$$

Gọi $B(x_B;2)$ và $C\left(-\dfrac{1}{2};y_C\right)$ lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Suy ra $x_B=\dfrac{4m+1}{2}$ và $y_C=\dfrac{4(m-2)}{2m+1}$.

Ta có $AB=|x_B-x_A|=|2m+1|$ và $AC=|y_C-y_A|=\dfrac{10}{|2m+1|}$.

Vậy diện tích cần tìm là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-3$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2+3,\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \Rightarrow y_1=-1 \\ x_2=-1 \Rightarrow y_2=-5. \end{array}\right.$

Vì $y_1 \cdot y_2>0$ nên đồ thị hàm số chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 68.

Bảng biến thiên bên có thể là bảng biến thiên của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{-2x-2}{-x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	2

Lời giải.

Ta có

- ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=+\infty,\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty$.
- ☑ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định

Vậy đáp án cần tìm là $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-2x-3$ tại điểm $M(1;-3)$.

A. $y=5x-8$. **B.** $y=3x-6$. **C.** $y=-3x$. **D.** $y=-3x+6$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+2x-2,\ y'(1)=3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=3\cdot(x-1)-3=3x-6$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

A. $y=x+2$. **B.** $y=x$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=-x$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $M(0;2)$.

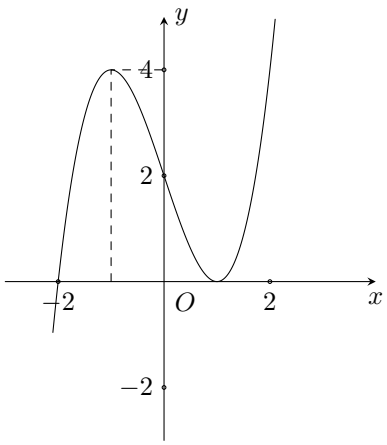
Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2},\ y'(0)=-1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-1\cdot x+2=-x+2$.

Chọn đáp án C □

Câu 71.

Hình vẽ bên có thể là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x+2$.

C. $y=-x^3+3x+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Lời giải.

Hàm số có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$, nhìn vào sự biến thiên, ta phải có $a>0$.

Lại có đồ thị hàm số qua điểm $(0;2)$ và hàm số có hai điểm cực trị khác 0.

Vậy hàm số cần tìm là $y=x^3-3x+2$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ và đường thẳng $y=2x$ có một điểm chung là

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x+2}{x-1}=2x\Leftrightarrow x+2=2x^2-2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Với $x=2$ ta có $y=4$. Vậy một điểm chung là $(2;4)$.

Nhận xét: Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $y=mx+n$ là nghiệm của phương trình $\dfrac{ax+b}{cx+d}=mx+n$. Phương trình này luôn có nghiệm $x\neq-\dfrac{d}{c}$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ cắt đồ thị hàm số $y=m$ tại bốn điểm phân biệt.

A. $m>-3$. **B.** $m>-15$. **C.** $m>1$. **D.** $-3<m<1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-8x=4x(x^2-2)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = m$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $-3 < m < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[1;5]$?

A. $-1 \le m \le -\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{11}{3} \le m \le -\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{11}{3} \le m \le -1$. **D.** $-1 \le m < -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0 \Leftrightarrow 3m = -x^2 + 4x - 6 \quad (*)$.

Xét hàm số $y = -x^2 + 4x - 6$ trên đoạn $[1;5]$.

Ta có $y' = -2x + 4$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Ta có bảng biến thiên

x	1		2		5
y'		$+$	0	$-$	
y	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-11

Phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow -3 \le 3m < -2 \Leftrightarrow -1 \le m < -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 75.

Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào?

A. $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$. **B.** $y = \dfrac{4x-6}{x-2}$.

C. $y = \dfrac{3-x}{2-x}$. **D.** $y = \dfrac{x+5}{x-2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	1
		$-\infty$			

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x+5}{x-2}$ có

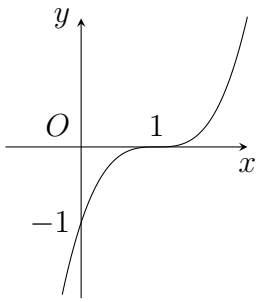
$$\begin{cases} y' = \dfrac{-7}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 76.

Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^3 - 1$. **B.** $y = (x+1)^3$. **C.** $y = (x-1)^3$. **D.** $y = x^3 + 1$.



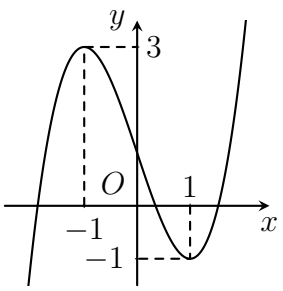
Lời giải.

(C) tiếp xúc với Ox tại điểm uốn, suy ra $f(x)$ có nghiệm bội ba $x = 1$ nên hàm số có dạng $y = a(x-1)^3$.
Mà $(0; -1) \in (C)$ nên $a = 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 77.

Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^3 - 6x + 1$.
B. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải.

Ta có
Đồ thị có hệ số $a > 0$ suy ra loại hàm số $y = -x^3 + x + 1$.
Đồ thị đi qua điểm $(1; -1)$ suy ra loại hai hàm số $y = x^3 - 6x + 1$, $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax + b$ $(a \neq b)$. Biết rằng tiếp tuyến với đồ thị tại các điểm có hoành độ $x = a$ và $x = b$ song song với nhau. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $f(1) = 1$. **B.** $f(1) = a + b$. **C.** $f(1) = -1$. **D.** $f(1) = a - b$.

Lời giải.

$f'(x) = 3x^2 + a$.
Theo bài ra ta có hệ $\begin{cases} f'(a) = f'(b) \\ a \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + a = 3b^2 + b \\ a \neq b \end{cases} \Leftrightarrow a = -b$.
Suy ra $f(x) = x^3 + ax - a \Rightarrow f(1) = 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 79. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -1.

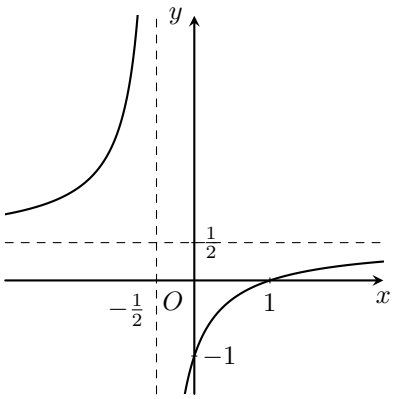
Lời giải.

$y' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị với trục tung là $y'(0) = 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 80.

Đồ thị trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = \dfrac{x+1}{1-2x}$. **B.** $y = \dfrac{x+1}{2x+1}$. **C.** $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$. **D.** $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$. Suy ra loại hai hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-2x}$, $y = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$. Suy ra loại hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung có phương trình là

A. $y = 3x+1$. **B.** $y = 3x-2$. **C.** $y = 3x+2$. **D.** $y = 3x-1$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Gọi M là điểm giao điểm của đồ thị với trục tung. Suy ra $M(0;-1)$.

$y'(0) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;-1)$ là $y = 3x-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ cắt đường thẳng có phương trình $y = 7 - x$ tại một điểm duy nhất. Tung độ giao điểm y_0 đó là

A. $y_0 = 3$. **B.** $y_0 = 4$. **C.** $y_0 = 5$. **D.** $y_0 = 6$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 7 - x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Suy ra $y_0 = y(3) = 4$.

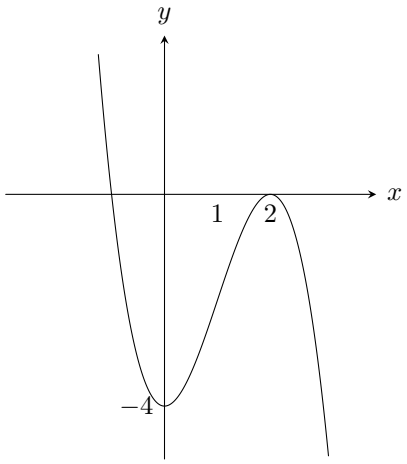
Chọn đáp án B □

Câu 83.

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ như hình bên. Để phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0$ có nghiệm duy nhất lớn hơn 2 thì m thỏa

A. $m < -4$. **B**. $m \leq -4$.

C. $m > 0$. **D**. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$.



Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 4 = m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và $y = m$.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất lớn hơn 2 thì $m < -4$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tích các giá trị của m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$ là

A. -1. **B**. 7. **C**. -2. **D**. -7.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ là

$$-x + m = \frac{-2x+1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - (1+m)x + 1 - m = 0 \quad (x \neq -1) \qquad (*)$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \Delta_{(*)} > 0 &\Leftrightarrow (1+m)^2 - 4(1-m) > 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0. \end{aligned}$$

Gọi $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m) \in d$ và x_1, x_2 thỏa $(*)$. Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 1 & \text{(nhận)} \\ m = -7 & \text{(nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tích cần tìm là -7.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $3f(x)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 0.

Lời giải.

$$3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{3} \qquad (1)$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có 3 nghiệm phân biệt $x_1<-1<x_2=0<1<x_3$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B**. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. **D**. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $(x-2)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=2 \qquad (1)$.

Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất nên (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng d có phương trình $y=4x-3$ và đường cong (C) có phương trình $y=-x^3+3x-1$. Tính tổng $S=x_0+y_0$

A. $S=4$. **B**. $S=3$. **C**. $S=-1$. **D**. $S=2$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3+3x-1=4x-3 \Leftrightarrow -x^3-x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1.$$

Do đó $S=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$ có phương trình là

A. $y=-3x+8$. **B**. $y=2x-1$. **C**. $y=-4x-3$. **D**. $y=-4x+13$.

Lời giải.

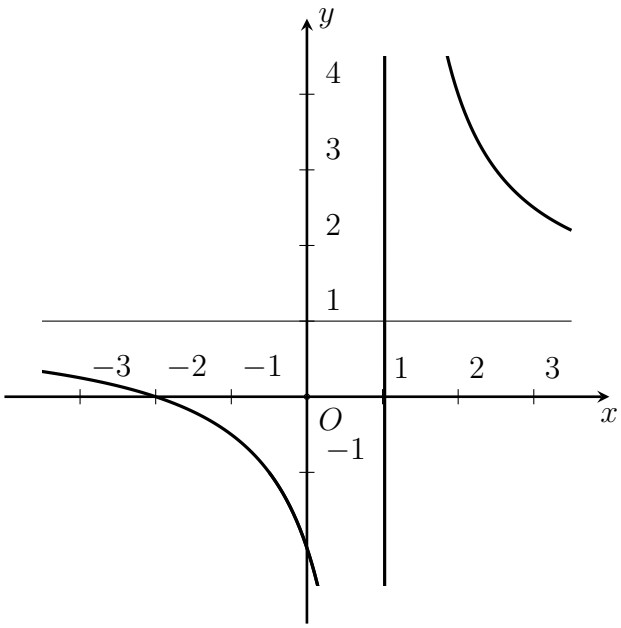
Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

Tại $x_0=2 \Rightarrow \begin{cases} y(2)=5 \\ y'(2)=-4. \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $x_0=2$ là $y=-4x+13$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Đồ thị sau đây là của hàm số nào? Chọn câu trả lời đúng.



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B**. $y=\dfrac{x-2}{1-x}$. **C**. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D**. $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.

Lời giải.

Từ hình ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ làm TCĐ và $y=1$ làm TCN; đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2;0)$. Vậy đồ thị hàm số trên là của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-2}$ tại điểm có hoành độ $x=3$.

A. $y=-4x-6$. **B**. $y=-x+18$. **C**. $y=-4x+6$. **D**. $y=-4x-18$.

Lời giải.

Với $x=3\Rightarrow y=6$, ta có điểm $A(3;6)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x-2)^2}$ và $y'(3)=-4$. Vậy phương trình tiếp tuyến tại A là

$$y=-4(x-3)+6\Leftrightarrow y=-4x+18.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-5x-3$.

A. 1. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;\dfrac{2x_0+3}{x_0-1})$ là tiếp điểm.

Ta có $y'=\dfrac{-5}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-5}{(x_0-1)^2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là d: $y=\dfrac{-5}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+3}{x_0-1}$

Để tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-5x-3$, ta có $\begin{cases}\dfrac{-5}{(x_0-1)^2}=-5\\ \dfrac{2x_0^2+6x_0-3}{(x_0-1)^2}\neq -3\end{cases}\Leftrightarrow x_0=2.$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y=-5x-3$ là $y=2x+17$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 92. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$ là

A. $(3;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.
Đồ thị hàm số nhất biến nhận giao điểm của hai tiệm cận làm tâm đối xứng. Suy ra tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $I(-1;3)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 93. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại điểm $M(0;2)$ là

A. $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x - 2$. **C.** $y = 3x + 2$. **D.** $y = -3x + 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.
$\Rightarrow y'(0) = -3$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(0;2)$ là: $y = -3(x-0)+2 \Leftrightarrow y = -3x + 2$.

Chọn đáp án D ☐

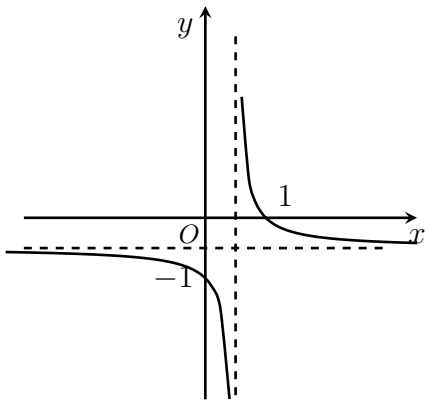
Câu 94. Đồ thị hình bên là của hàm số

A. $y = \dfrac{3-2x}{2x+1}$.

B. $y = \dfrac{1-x}{2x-1}$.

C. $y = \dfrac{1-x}{1-2x}$.

D. $y = \dfrac{1-2x}{x-1}$.



Lời giải.

Ta thấy tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị lần lượt là các đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ và $y = -\dfrac{1}{2}$ nên suy ra mẫu số của các hàm là $2x-1$ hoặc $1-2x$, đồng thời tỉ số $\dfrac{a}{c} = -\dfrac{1}{2}$. Do đó chỉ có hàm số $y = \dfrac{1-x}{2x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B ☐

Câu 95. Cho hàm số $y = (x+1)(x^2+mx+1)$ có đồ thị (C). Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x+1)(x^2+mx+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2+mx+1 = 0. \quad (2) \end{array}\right.$
(C) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(-1) = 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \vee m > 2 \\ 2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 2.$$

Suy ra số nguyên dương m nhỏ nhất là $m = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	3

A. $y = \dfrac{3x-3}{x+2}$. **B.** $y = \dfrac{3-3x}{x+2}$. **C.** $y = \dfrac{3x+8}{x+2}$. **D.** $y = \dfrac{3-x}{x+2}$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên:

- ☑ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$, suy ra mẫu số là $x + 2$.
- ☑ Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$, suy ra $\dfrac{a}{c} = 3$.
- ☑ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Thử lại với hai hàm số $y = \dfrac{3x-3}{x+2}$ và $y = \dfrac{3x+8}{x+2}$ ta thấy $\left(\dfrac{3x-3}{x+2}\right)' = \dfrac{9}{x+2} > 0, \forall x \neq -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 4) = 0.$$

Ta thấy phương trình hoành độ giao điểm có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 10$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

B. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.

C. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

D. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -10)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số không có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án C ☐

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 4$ đi qua điểm $N(-2;0)$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -\dfrac{6}{5}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

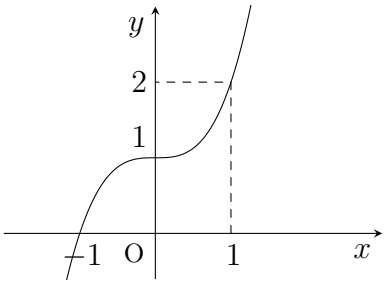
Lời giải.

Thay $x = -2,\ y = 0$ vào hàm số, ta được $16 - 8m + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 100.

Đường cong như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Xét các mệnh đề sau



a) $a = -1$. b) $ad > 0$.

c) $d = -1$. d) $a + c = b + 1$.

Tìm số các mệnh đề **sai** trong các mệnh đề trên.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} d = 1 \\ -a + b - c + d = 0 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + c = b + 1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $a > 0 \Rightarrow ad > 0$.

Chọn đáp án A ☐

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. A	5. B	6. B	7. A	8. A	9. C	10. B
11. A	12. C	13. C	14. C	15. A	16. A	17. C	18. A	19. B	20. A
21. D	22. D	23. C	24. C	25. B	26. B	27. D	28. C	29. D	30. D
31. A	32. A	33. C	34. B	35. C	36. C	37. D	38. C	39. A	40. B
41. B	42. D	43. A	44. A	45. D	46. D	47. C	48. C	49. A	50. C
51. C	52. B	53. D	54. C	55. D	56. B	57. B	58. B	59. C	60. A
61. C	62. B	63. C	64. A	65. A	66. C	67. D	68. D	69. B	70. C
71. B	72. B	73. D	74. D	75. D	76. C	77. D	78. A	79. A	80. D
81. D	82. B	83. A	84. D	85. B	86. B	87. D	88. D	89. C	90. B
91. A	92. B	93. D	94. B	95. C	96. A	97. A	98. C	99. A	100. A

3 Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{3|x|+1}{|x|+2}-m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $a+b$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Nhận xét: Nếu phương trình có nghiệm $x=a$ thì nó cũng có nghiệm $x=-a$.

Từ nhận xét trên, ta chỉ cần xét phương trình với $x\geq 0$.

Với $x\geq 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3x+1}{x+2}-m=0\Leftrightarrow (3-m)x=2m-1\Leftrightarrow x=\frac{2m-1}{3-m} \qquad (2)$$

(do $m=3$ không thỏa mãn).

Do đó để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) phải có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{3-m}>0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<m<3$.

Khi đó $a=\dfrac{1}{2}, b=3$. Vậy $a+b=\dfrac{7}{2}$.

Nhận xét: Ta có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực.

A. $m\leq 3$. **B.** $m\leq 2$. **C.** $m\geq 3$. **D.** $m\geq 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;+\infty)$

$$2\sqrt{x+1}=x+m\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+m-1=0 \qquad (1.3)$$

Đặt $t=\sqrt{x+1},\ t\geq 0$, khi đó phương trình (1.3) trở thành

$$t^2-2t+m-1=0 \qquad (1.4)$$

Để (1.3) có nghiệm thực thì (1.4) phải có nghiệm thực không âm. Giả sử (1.4) có hai nghiệm phân biệt thì ta thấy tổng hai nghiệm $S=2$ luôn dương nên (1.4) không thể có hai nghiệm đều âm. Suy ra để (1.4) có nghiệm thực không âm thì $\Delta'=2-m\geq 0\Leftrightarrow m\leq 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hàm số $y=2x^4-4x^2+\dfrac{3}{2}$. Giá trị thực của m để phương trình $\left|2x^4-4x^2+\dfrac{3}{2}\right|=m^2-m+\dfrac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt là

A. $0\leq m\leq 1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $0<m\leq 1$. **D.** $0\leq m<1$.

Lời giải.

Ta có $y'=8x^3-8x,\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên của hàm số sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|2x^4-4x^3+\frac{2}{3}\right|=m^2-m+\frac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+\frac{1}{2}>0 \\ m^2-m+\frac{1}{2}<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m^2-m<0 \Leftrightarrow 0<m<1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+1}$. Xác định m để đường thẳng $y=mx+m-1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

A. $m<1$. **B**. $m>0$. **C**. $m<0$. **D**. $m=0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+2}{2x+1}=mx+m-1 \Rightarrow 2mx^2+3(m-1)x+m-3=0$ (1).

Để đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<-\dfrac{1}{2}<x_2$ (2).

(1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\neq 0 \\ m^2+6m+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -3. \end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{3(m-1)}{2m} \\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{2m}. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow (2x_1+1)(2x_2+1)<0 \\
&\Leftrightarrow 4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1<0 \\
&\Leftrightarrow 4\cdot\frac{m-3}{2m}+2\cdot\left(-\frac{3(m-1)}{2m}\right)+1<0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4m-12-6m+6+2m}{2m}<0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{6}{2m}<0 \\
&\Leftrightarrow m>0.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3+x^2+(m+1)x+1$ và $y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hai đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

A. 9. **B**. 10. **C**. 1. **D**. 11.

Lời giải.

Giả sử hàm số $y=x^3+x^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (C) và $d: y=2x+1$

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm PT: $x^3+x^2+(m+1)x+1=2x+1$ (1)

$\Leftrightarrow x^3+x^2+(m-1)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+x+m-1=0 (2) \end{array}\right.$

Đặt $f(x)=x^2+x+m-1$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x\neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ f(0)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4m>0 \\ m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{5}{4} \\ m\neq 1 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $m\in(-10;10)$ ta được $m\in\left(-10;\dfrac{5}{4}\right)\setminus\{1\}$

Do m nguyên nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8$ tiếp xúc với trục hoành?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases} 2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8=0 \ (1) \\ 6x^2-6(m+3)x+18m=0 \ (2). \end{cases}$

Từ (2) ta có: $x^2-(m+3)x+3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=m. \end{array}\right.$

Với $x=3$ ta thay vào (1) ta có $54-27(m+3)+54m-8=0\Leftrightarrow 27m=35\Leftrightarrow m=\dfrac{35}{27}$.

Với $x=m$ ta thay vào (1) ta có $2m^3-3m^2(m+3)+18m^2-8=0\Leftrightarrow m^3-9m^2+8=0$

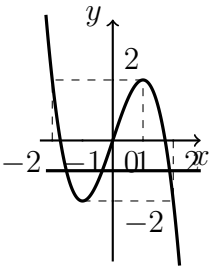
$\Leftrightarrow (m-1)(m^2-8m-8)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4-2\sqrt{6} \\ m=4+2\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài là $m=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 7.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Nếu $|m|>2$ thì phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất.

C. Hàm số $y=f(x)$ có cực tiểu bằng -1.

D. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 2.

Lời giải.

Đáp án A: đúng.

Đáp án B: Với $m>2$ hoặc $m<-2$ thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm duy nhất nên B đúng.

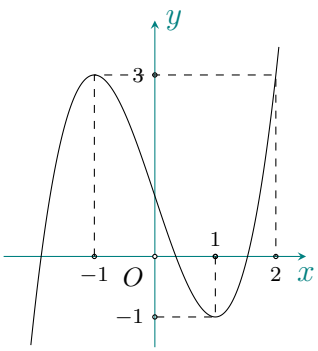
Đáp án C: Hàm số đạt cực tiểu tại chứ không phải đạt cực tiểu bằng -1 nên C sai.
Đáp án D: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;2]$ đạt được bằng 2 tại $x=-2$ nên D đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 8.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

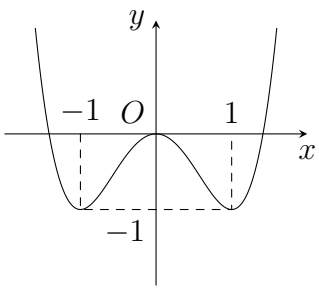
A. $[-1;3)$. **B**. $(-1;1)$. **C**. $(-1;3)$. **D**. $[-1;1)$.



Lời giải.

Đặt $t=\sin x$, với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(0;1]$.
Do đó phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.
Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[-1;1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $2019f(x)+1=0$ là

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

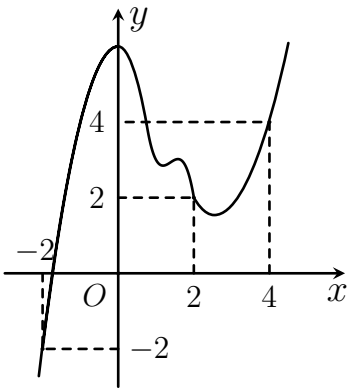
Lời giải.

Ta có $2019f(x)+1=0\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2019}$.
Số nghiệm phương trình $2019f(x)+1=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng d: $y=-\dfrac{1}{2019}$ (cùng phương với trục Ox).
Dựa vào đồ thị như hình vẽ ta có d cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt.
Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án D □

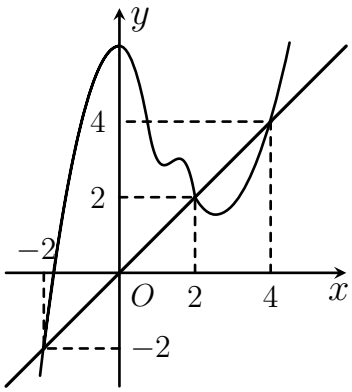
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.

Đồ thị hàm số $g(x)=|2f(x)-x^2|$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

A. 7. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 3.



Lời giải.



Xét hàm số $h(x)=2f(x)-x^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2x=2\left(f'(x)-x\right)$.

Từ đồ thì hàm số $f'(x)$ ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4. \end{array}\right.$

Vậy $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2f'(x)-2x)\,\mathrm{d}x > \int_{2}^{4}(2x-2f'(x))\,\mathrm{d}x > 0 \Leftrightarrow h(x)\Big|_{-2}^{2} > -h(x)\Big|_{2}^{4} \Leftrightarrow h(2)-h(-2) > -\left(h(4)-h(2)\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $g(x)=|2f(x)-x^2|$ có tối đa 7 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{m}{2}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}m+\frac{4}{3}\sin(x^2+2019)}}=\sin(x^2+2019)$$

có nghiệm thực?

A. 3. **B**. 2. **C**. 7. **D**. 6.

Lời giải.

Đặt $\sin\left(x^2+2019\right)=a, (a\in[-1;1]) \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}}=a.$

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}t}=a\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}t=a^3\\ \dfrac{m}{2}+\dfrac{4}{3}a=t^3\end{cases} \Rightarrow a^3+\dfrac{4}{3}a=t^3+\dfrac{4}{3}t. \quad (*)$

Xét hàm $f(x)=x^3+\dfrac{4}{3}x$ với $x\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=3x^2+\dfrac{4}{3}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra $f(a)=f(t)\Leftrightarrow a=t$.

Do đó $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}a}=a\Leftrightarrow m=2a^3-\dfrac{8}{3}a=f(a)$ với $a\in[-1;1]$.

Ta có $f'(a)=6a^2-\dfrac{8}{3}=0\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{3}\in[-1;1]$.

Khi đó $f(-1)=\dfrac{2}{3};\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{32}{27};\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{32}{27};\ f(1)=-\dfrac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(a)\le m\le \max\limits_{[-1;1]} f(a) \Rightarrow \begin{cases}-\dfrac{32}{27}\le m\le\dfrac{32}{27}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$?

A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y'=x[-x^2+2(2m-3)]$. Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi

$$-x^2+2(2m-3)\le 0,\ \forall x\in[1;2].$$

Trường hợp 1: $\Delta'=2(2m-3)<0$. Chỉ có giá trị $m=1$ thỏa mãn. Trường hợp 2: $\begin{cases}\Delta'=2(2m-3)\ge 0\\ -1+2(2m-3)<0\end{cases}$.

Không có giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có duy nhất 1 giá trị $m=1$ thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y=2x^4-8x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với trục hoành?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Tiếp tuyến song song với trục hoành suy ra tiếp tuyến có hệ số góc $k=0$.

Ta có $y'=8x^3-16x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=0 & \Rightarrow y=0\\ x=\pm\sqrt{2} & \Rightarrow y=-8.\end{array}\right.$

Vậy có một tiếp tuyến là $y=-8$ (loại $y=0$ do trùng với trục hoành).

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả giá trị tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$. **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là

$$mx^3 - x^2 - 2x + 8m = 0 \Leftrightarrow (x+2)[mx^2 - (2m+1)x + 4m] = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2 = 0 \\ mx^2 - (2m+1)x + 4m = 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 4m + (2m+1)2 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-5}{3x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Ta có $y = \dfrac{2x-5}{3x-1} = 1 - \dfrac{x+4}{3x-1}$.

Để $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+4) \vdots (3x-1) \Rightarrow (3x-1+13) \vdots (3x-1) \Rightarrow 13 \vdots (3x-1)$

$$\text{Nên} \begin{bmatrix} 3x-1 = 1 \\ 3x-1 = -1 \\ 3x-1 = 13 \\ 3x-1 = -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{2}{3} \text{ (loại)} \\ x = 0 \\ x = \frac{14}{3} \text{ (loại)} \\ x = -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = 5 \\ y = 1 \end{bmatrix}$$

Vậy trên đồ thị hàm số có hai điểm có tọa độ nguyên là $(0;5)$ và $(-4;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x+m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

A. 1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow 2x - 1 = (x+1)(x+m) \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0 \ (1).$$

(Ta có $x = -1$ không là nghiệm phương trình (1).)

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm

phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta=(m-1)^2-4(m+1)=m^2-6m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3+2\sqrt{3} \\ m<3-2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3+2\sqrt{3} \\ m<3-2\sqrt{3} \end{cases} (*).$$

Gọi tọa độ giao điểm $A\left(x_1;x_1+m\right), B\left(x_2;x_2+m\right)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Khi đó $AB=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-6m-3}\leq 4 \Leftrightarrow m^2-6m-19\leq 0 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{7}\leq m\leq 3+2\sqrt{7}$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$, ta được $\begin{cases} 3+2\sqrt{3}<m<3+2\sqrt{7} \\ 3-2\sqrt{7}\leq m\leq 3-2\sqrt{3}. \end{cases}$

Mà m nguyên dương nên $m=7 \vee m=8$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 cực trị.

A. $-2<m<\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}<m<2$. **C.** $\dfrac{5}{4}\leq m\leq 2$. **D.** $\dfrac{5}{4}<m<2$.

Lời giải.

Nhận thấy rằng nếu $x_0\geq 0$ là điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ cũng là điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ (1)

Lại thấy vì đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng mà $f\left(x\right)$ là hàm đa thứ bậc ba nên $x=0$ luôn là một điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f\left(x\right)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ có hai điểm cực trị dương phân biệt.

Hay phương trình $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m=0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-m-5>0 \\ \dfrac{2m-1}{3}>0 \\ 2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \vee m>\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{2}<m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<m<2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 18. Đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y=-2x^4+4x^2-1$ tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Giá trị biểu thức y_A+y_B bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Xét hàm số $(C)\colon y=-2x^4+4x^2-1$, tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=-8x^3+8x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1. \end{cases}$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt thì đường thẳng đó phải đi qua hai điểm cực đại, hay $m = 1$.
Khi đó hai tiếp điểm là $A(-1;1)$ và $B(1;1)$. Vậy $y_A + y_B = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d_m\colon y = mx + 1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 1$ tại 3 điểm A, $B(0;1)$ và C phân biệt sao cho tam giác AOC vuông tại O.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và (C) là:

$$x^3 - x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 - x - m = 0. \end{bmatrix}$$

Đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, $B(0;1)$ và C.
$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1; mx_1 + 1)$ và $C(x_2; mx_2 + 1)$ Theo Vi-et: x_1 và x_2 là nghiệm phương trình $x^2 - x - m = 0$ nên ta có : $x_1 + x_2 = 1$ và $x - 1x_2 = -m$.
$\triangle AOC$ vuông tại O.

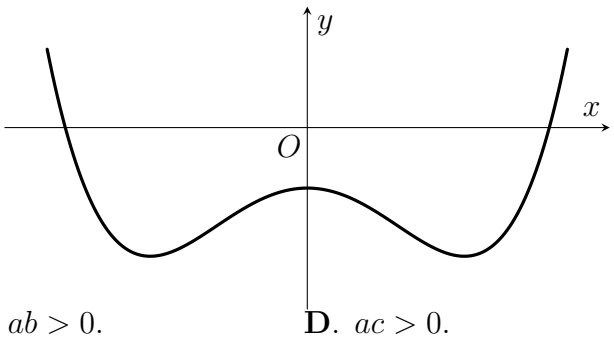
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 + (mx_1 + 1)(mx_2 + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (m^2 + 1)x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (m^2 + 1)(-m) + m + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow -m^3 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow m = 1.\text{(Thỏa mãn điều kiện)}
\end{aligned}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm kết luận **đúng**



A. $a + b > 0$. **B**. $bc > 0$. **C**. $ab > 0$. **D**. $ac > 0$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc đồ thị hàm số trùng phương bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi $ab < 0$, có một điểm cực trị khi $ab \geq 0$.

+ Xác định dấu của hệ số tự do c dựa vào giao của đồ thị với trục tung.

+ Xác định dấu của a dựa vào $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$,.

Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ thì $a > 0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ thì $a < 0$.

Cách giải:

Từ hình vẽ ta thấy:

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ nên $a > 0$.

+ Đồ thị hàm số có ba cực trị nên $ab < 0$ mà $a > 0 \Rightarrow b < 0$.

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.

Từ đó ta có $a > 0; b > 0; c > 0 \Rightarrow bc > 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - m - \sqrt{9 - x^2} = 0$ có đúng 1 nghiệm dương?

A. $m \in (-3; 3]$. **B**. $m \in (-3; 3] \cup \{-3\sqrt{2}\}$.

C. $m \in [0; 3]$. **D**. $m = \pm 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 3$.

Phương trình tương đương với $x - \sqrt{9 - x^2} = m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ và đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ với $-3 \leq x \leq 3$

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 9 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3\sqrt{2}}{2} \in [-3; 3].$$

BBT:

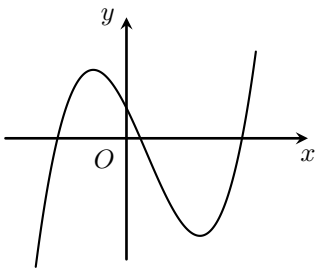
x	-3		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		0		3
y'	‖	$-$	0	$+$	⋮	$+$	‖
y	-3	↘	$-3\sqrt{2}$	↗	-3	↗	3

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-3 < m \leq 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$. **B.** $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$. **D.** $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.

Lời giải.

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$.

☑ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn dương nên $\begin{cases} ac < 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ (do $a > 0$).

Do đó $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Cách 1: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành (không tính điểm cực trị)

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị và cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có $2 + 1 = 3$ điểm cực trị.

Cách 2: $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow (|f(x)|)' = \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{|f(x)|} \Rightarrow$ dấu của $(|f(x)|)'$ là dấu của $f(x) \cdot f'(x)$.

Ta có $f(x) \cdot f'(x)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1; x = 3$.

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 < -1$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f'(x)\cdot f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

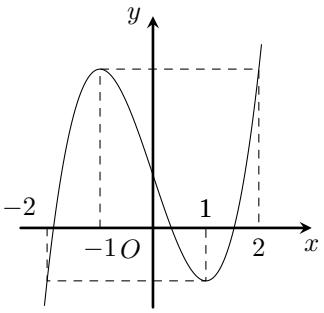
Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)\cdot f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $|f(x)|$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x+2)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.



Lời giải.

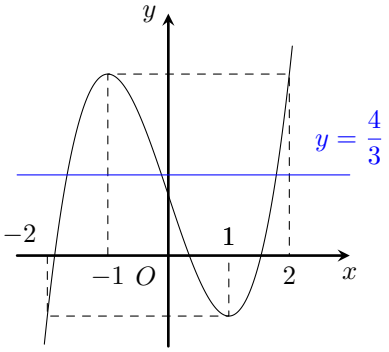
Xét phương trình $3f(x+2)-4=0 \Leftrightarrow f(x+2)=\dfrac{4}{3}$. (1)

Đặt $X=x+2$, do $-2\le x\le 2 \Leftrightarrow 0\le x+2\le 4 \Leftrightarrow 0\le X\le 4$.

Khi đó ta có (1) $\Leftrightarrow f(X)=\dfrac{4}{3}$. (*)

Vậy phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[-2,2]$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trên đoạn $[0;4]$.

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy trên đoạn $[0;4]$ thì đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số đã cho đúng tại một điểm. Do đó phương trình (*) có đúng 1 nghiệm hay phương trình (1) có đúng một nghiệm.



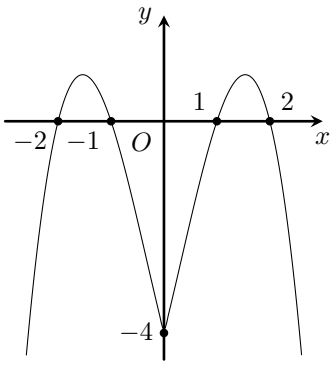
Chọn đáp án (B) □

Câu 25.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như hình vẽ. Chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:

A. $f(x)=-x^3+x^2+4x-4$. **B**. $f(x)=x^3-x^2-4x+4$.

C. $f(x)=-x^3-x^2+4x+4$. **D**. $f(x)=x^3+x^2-4x-4$.



Lời giải.

Cách 1: Ta đã biết từ đồ thị $(C)\colon y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C_1)\colon y=f(|x|)$ sẽ gồm hai phần.

- ☑ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở bên phải trục tung.
- ☑ Phần 2: Bỏ phần đồ thị (C) bên trái trục tung và lấy đối xứng phần 1 qua trục tung. Từ dáng điệu của đồ thị đã cho ta quan sát phần đồ thị bên phải có ngay được
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \Rightarrow y=f(x)$ có hệ số $a<0$.
  - Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ âm nên $y=f(x)$ có hệ số $d<0$.

Cách 2: Nhận xét đồ thị đi qua điểm $A(1;0), B(0;-4), C(2;0)$ nê ta kiểm tra các đáp án.
Ta có $-1^3+1^2+4.1-4=0; -0^3+0^2+4.0-4=-4; -2^3+2^2+4.2-4=0$ nên $A(1;0), B(0;-4), C(2;0)$ thuộc $y=f(x)=-x^3+x^2+4x-4$
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho đồ thị (C): $y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) qua $(0;b)$

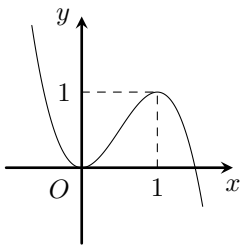
A. 9. **B**. 16. **C**. 2. **D**. 17.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$.
Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0, x_0^3-3x_0)$ là

$$y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$$

Tiếp tuyến qua $(0;b) \Leftrightarrow (3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2=b \Leftrightarrow b=-2x_0^3+3x_0^2$.
Có đúng một tiếp tuyến của (C) qua $(0;b) \Leftrightarrow b=-2x_0^3+3x_0$ có đúng một nghiệm x_0.
Dựa vào đồ thị hàm số $f(t)=-2t^3+3t^2$ suy ra có 17 số nguyên $b\in[-9;9]\setminus\{0;1\}$ để đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2$ cắt đường thẳng $y=b$ tại đúng một điểm.

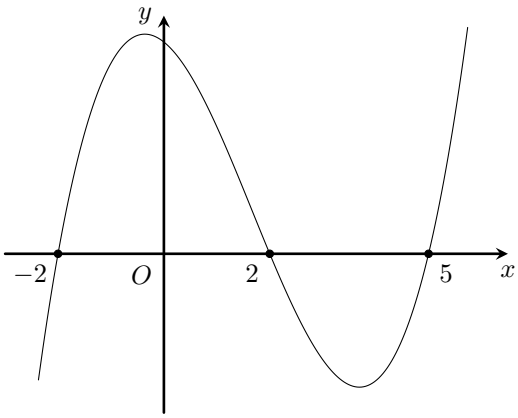


Chọn đáp án D □

Câu 27.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B**. $(-\infty;-1)$.
C. $(1;3)$. **D**. $(0;2)$.



Lời giải.

Cách 1: Có $g'(x)=-2f'(3-2x)$.
Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)\le 0$, dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

$$\Leftrightarrow -2f'(3-2x)\le 0 \Leftrightarrow f'(3-2x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le 3-2x\le 2 \\ 3-2x\ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right] \\ x\in(-\infty;-1]. \end{array}\right.$$

Cách 2: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f'(x)=(x+2)^{2n+1}(x-2)^{2m+1}(x-5)^{2k+1}, (m,n,k\in\mathbb{N})$.

Mà $g'(x) = -2f'(3-2x)$.

$$\text{Nên } g'(x) = -2(5-2x)^{2n+1}(1-2x)^{2m+1}(-2-2x)^{2k+1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(5-2x)^{2n+1}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-2x)^{2m+1}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-2-2x)^{2k+1}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1]; \left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành (không tính điểm cực trị).

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị và cắt trục Ox tại 1 điểm trên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có $2+1 = 3$ điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau. Bất phương trình $f(x) > \sin x + m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	-1	↘	$-\infty$

A. $m > f(1) - \sin 1$.

B. $m \geq f(1) - \sin 1$.

C. $m \leq f(-1) + \sin 1$.

D. $m < f(-1) + \sin 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \sin x$.

$g'(x) = f'(x) - \cos x$.

Với $\forall x \in (-1;1)$, ta có $f'(x) < -1 \Rightarrow f'(x) - \cos x < -1 - \cos x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ nên $g(x) < g(-1) = f(-1) + \sin 1$.

Do đó bất phương trình $f(x) > \sin x + m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi bất phương trình $m < f(x) - \sin x$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

$\Leftrightarrow m < \max\limits_{[-1;1]} g(x) \Leftrightarrow m < f(-1) + \sin 1$.

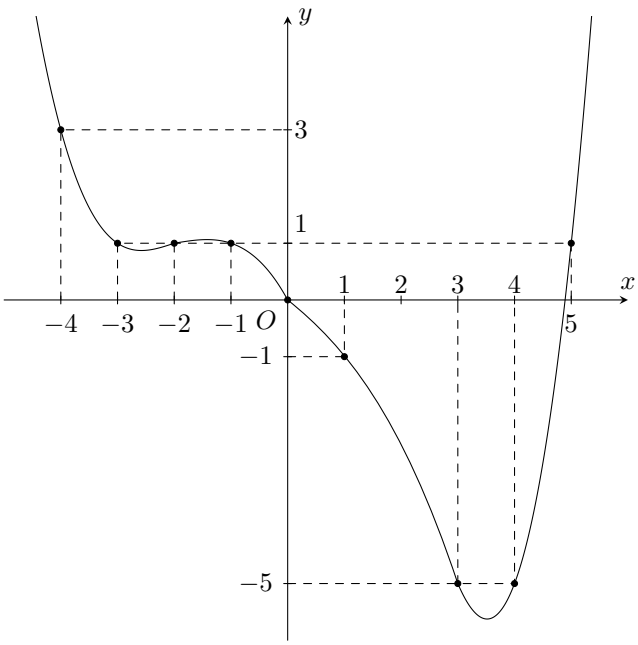
Vậy $m < f(-1) + \sin 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm.

A. 13. **B**. 12. **C**. 8. **D**. 10.



Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2} = 3 - 4\sqrt{1 - (3x-1)^2}$.

Ta có $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right] \Leftrightarrow 3x - 1 \in [-1;1] \Leftrightarrow (3x-1)^2 \in [0;1] \Leftrightarrow 1 - (3x-1)^2 \in [0;1] \Leftrightarrow t \in [-1;3]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $f(t) = \dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm trên $[-1;3]$.

Từ đồ thị đã cho, điều này tương đương với $-5 \le \dfrac{m-3}{2} \le 1 \Leftrightarrow -7 \le m \le 5$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7; -6; -5; \ldots; 3; 4; 5\}$. Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}|x|^3 - (m-1)x^2 + (m-3)|x| + m^2 - 4m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có 5 điểm cực trị.

A. $m > 3$. **B**. $m > 1$. **C**. $m > 4$. **D**. $-3 < m < -1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + m^2 - 4m + 1$.

Khi đó $y=f\left(|x|\right)=\dfrac{1}{3}|x|^3-(m-1)x^2+(m-3)|x|+m^2-4m+1$.
Ta có $f'(x)=x^2-2(m-1)x+(m-3)$.
Để có đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ ta giữ nguyên phần bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y=f(x)$, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục tung.
Như vậy, đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.
Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+(m-3)x+m^2-4m+1$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-3m+4>0 \\ S=2(m-1)>0 \\ P=m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>3.$$

Vậy giá trị của tham số m cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m>3$.
Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hàm số $y=x^3-2(m-1)x^2+2\left(m^2-2m\right)x+4m^2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon y=4x+8$. Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x_1^3+x_2^3+x_3^3$. .

A. $\max P=16\sqrt{2}-8$. **B.** $\max P=-8$.
C. $\max P=-16\sqrt{2}-8$. **D.** $\max P=8$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (C) là

$$\begin{aligned} & x^3-2(m-1)x^2+2\left(m^2-2m\right)x+4m^2=4x+8 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-2(m-1)x^2+2\left(m^2-2m-2\right)x+4m^2-8=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)\left(x^2-2mx+2m^2-4\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x=-2 \\ x^2-2mx+2m^2-4=0 \quad (*). \end{cases} \end{aligned}$$

Như thế đường thẳng (d) và đồ thị (C) luôn có giao điểm với hoành độ giao điểm (ta ký hiệu là x_3) $x_3=-2$. Do đó, đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác -2. Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases} \Delta'=4-m^2>0 \\ 2m^2+4m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\neq 0 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m^2-4 \end{cases}$ và

$$P=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)-8=8m^3-6m\left(2m^2-4\right)-8=-4m^3+24m-8.$$

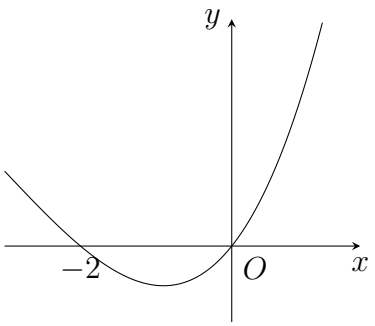
Ta xem P là hàm số biến số m với $m \in (-2;2) \setminus \{0\}$.
Ta có $P' = -12m^2 + 24$ và $P' = 0 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.
Bảng biến thiên của P như sau

m	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
P'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
P	-24	$\searrow$	$-16\sqrt{2}-8$	$\nearrow$	-8	$\nearrow$	$16\sqrt{2}-8$	$\searrow$	8

Từ bảng biến thiên ta có $P \le 16\sqrt{2} - 8$. Dẳng thức xảy ra khi $m = \sqrt{2}$.
Vậy $\max P = 16\sqrt{2} - 8$.
Chọn đáp án A □

Câu 33.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

A. f đạt cực tiểu tại $x = 0$.
B. f đạt cực tiểu tại $x = -2$.
C. f đạt cực đại tại $x = -2$.
D. Cực tiểu của f nhỏ hơn cực đại.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;-2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C). Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B**. 3. **C**. $\frac{2}{3}$. **D**. 2.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng qua $M(m;-2)$ có dạng: $y = k(x-m) - 2$ (Δ).

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x-m) - 2 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} (*) \text{ có nghiệm.}$$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x-m) - 2 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + (-3m+1)x + 2) = 0$.

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $2x^2+(-3m+1)x+2=0$ (1).

Qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt. Hay phương trình (1) có nghiệm kép khác 2 hoặc phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1=2\neq x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3m+1)^2-4.2.2=0 \\ 2.2^2+(-3m+1)2+2\neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (-3m+1)^2-4.2.2>0 \\ 2.2^2+(-3m+1)2+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{5}{3} \\ m=2 \end{array}\right. .$$

Suy ra $S=\left\{-1,\dfrac{5}{3},2\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;-4)$.

B. $m\in(-4;0)$.

C. $m\in(0;+\infty)$.

D. $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2$. Ta có

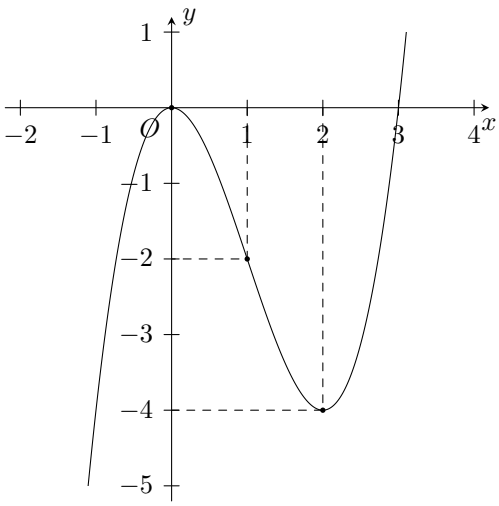
$f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$



Đồ thị hàm số $y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng m.

Dựa vào đồ thị ta thấy, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Số tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;-6)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến (Δ) với đồ thị (C) đi qua A(1;-6) nên $\Rightarrow (\Delta)$ có dạng $y = k(x-1) - 6$.

Để (Δ) tiếp xúc với (C) thì $\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = k(x-1) - 6 \\ k = 3x^2 - 3 \end{cases}$ có nghiệm

$\Rightarrow x^3 - 3x + 1 = (3x^2 - 3)(x-1) - 6$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x^2 + x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$

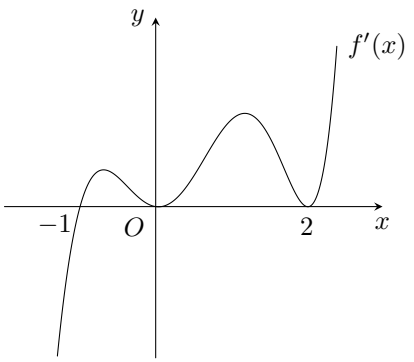
Vậy có 1 phương trình tiếp tuyến đi qua $A(1;-6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 1.



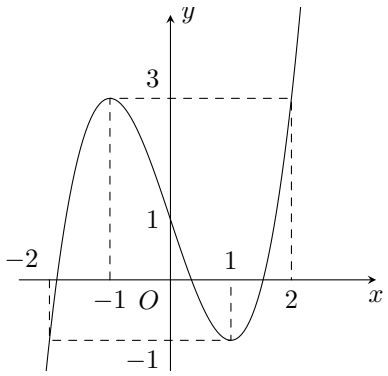
Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta thấy có một giao điểm với trục hoành (không tính điểm tiếp xúc) nên hàm số $f(x)$ có một cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m-2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m \leq 2015, m \geq 2019$. **B**. $2015 < m < 2019$.

C. $m = 2015, m = 2019$. **D**. $m < 2015, m > 2019$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2018 - m$ (có phương trình song song hoặc trùng với trục hoành)

Dựa vào đồ thị, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2018 - m > 3 \\ 2018 - m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2015 \\ m > 2019. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = x + m$. Giá trị của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

A. $m = -1$ hoặc $m = 6$. **B**. $0 \leq m \leq 5$.

C. $m = 0$ hoặc $m = 6$. **D**. $m = 0$ hoặc $m = 7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{2x+1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + m - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Khi đó d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \\ (-1)^2 - (m-1) + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right. (*)$

Ta có:

$A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m) \Rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1) \Rightarrow AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}\,|x_2 - x_1|$

Và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Từ đây ta có:

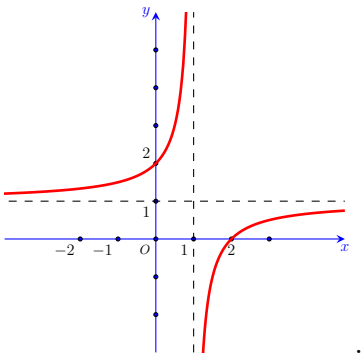
$AB = \sqrt{10} \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 5$

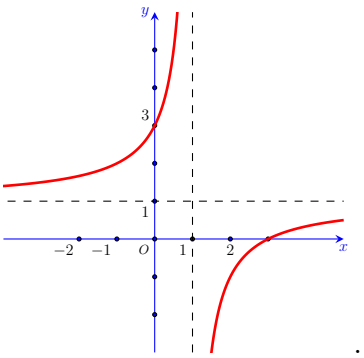
$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m-1) = 5 \Leftrightarrow m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn) $(*)$.

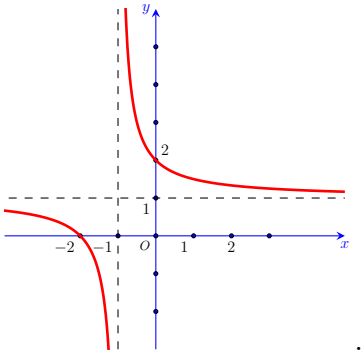
Vậy $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=6 \end{array}\right.$

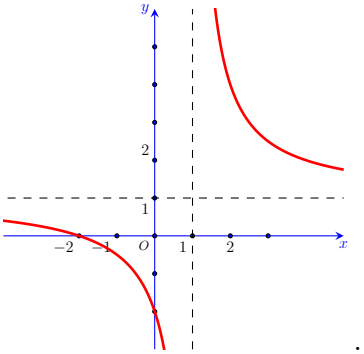
Chọn đáp án C □

Câu 40. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình nào sau đây?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải.

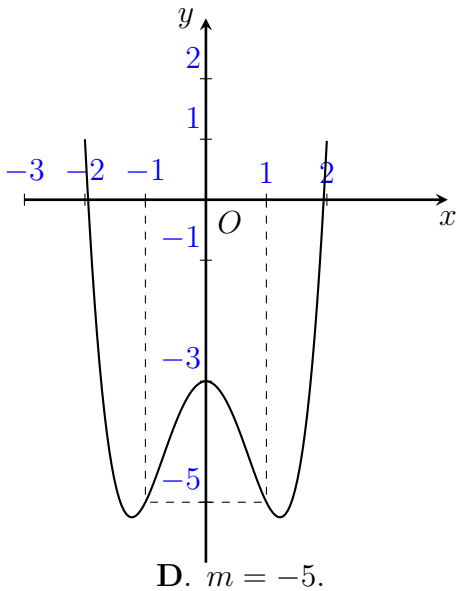
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$. Tiệm cận ngang $y=1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

Đồ thị sau đây là của hàm số $y=x^4-3x^2-3$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4-3x^2-3=m$ có 3 nghiệm phân biệt



A. $m=-4$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-5$.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số để xác định m thỏa mãn bài toán.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của hai đồ thị hàm số là số giao điểm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$

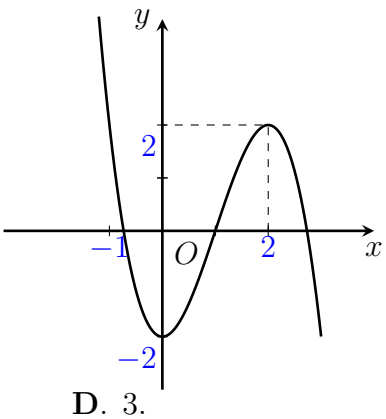
$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hai đồ thị hàm số có 3 điểm chung.

Chọn đáp án C □

Câu 43.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?



A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Biết đồ thị hàm số $y=a\log_2^2 x+b\log_2 x+c$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc đoạn $[1;2]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ bằng:

A. 2. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Phương pháp

Đặt $\log_2 x=t$, xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành sau đó biện luận và áp dụng định lý Vi-ét.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là:

$a\log_2^2 x+b\log_2 x+c=0 \quad (*)$

Đặt $\log_2 x=t$,ta có $(*)\Rightarrow at^2+bt+c=0, \qquad (1)$

Có: $x\in[1;2]\Rightarrow t\in[0;1]$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;2]$ phương trình (1) có hai nghiệm $t_1,t_2\in[0;1]$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có:

$\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{b}{a} \\ t_1t_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$$P=\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}=\frac{2a^3-3ab+b^2}{a^2-ab+ca}=\frac{2-3\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{a-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\frac{(t_1+t_2)^2+3(t_1+t_2)+2}{1+t_1+t_2+t_1t_2}$$

Lại có: $0\le t_1<t_2\le 1\Rightarrow t_1^2\le t_1t_2; t_2^2\le 1\le\Rightarrow (t_1+t_2)^2\le 3t_1t_2+1$

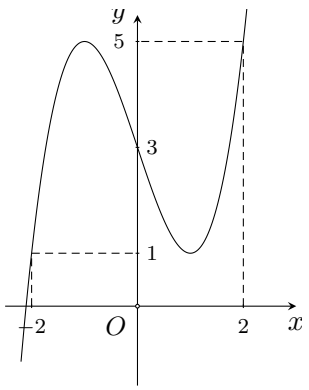
$\Rightarrow P=\dfrac{(t_1+t_2)^2+3(t_1+t_2)+2}{1+(t_1+t_2)+t_1.t_2}\le\dfrac{3t_1t_2+!+3(t_1+t_2)+2}{1+t_1t_2+t_1+t_2}=3$

$\Rightarrow P_{\min}=3.$

Chọn đáp án C □

Câu 45.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2-3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng ?



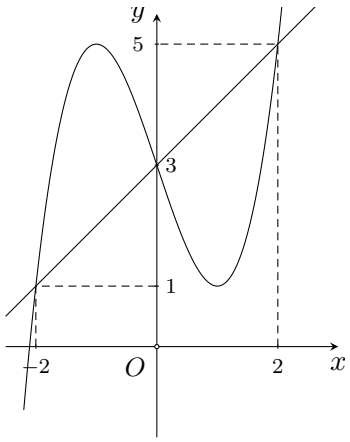
A. $g(-4)=g(-2)$. **B**. $g(0)\le g(2)$.

C. $g(2)<g(4)$. **D**. $g(-2)>g(0)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (x+3)$.

Vẽ đường thẳng $AB : y = x + 3$ trên cùng hệ trục với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) < x + 3$ với $x \in (0;2)$ hoặc $x \in (-\infty;-2)$ và $f'(x) > x + 3$ với $x \in (-2;0)$ hoặc $x \in (2;+\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

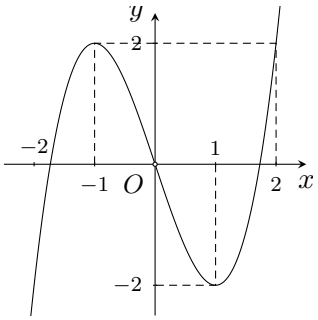
x	-4		-2		0		2		4
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$g(-4)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$g(4)$

Từ bảng biến thiên của hàm số ta suy ra $g(2) < g(4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 46.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.



A. 5. **B**. 3.

C. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có với $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \cos x \in (-1;0] \Rightarrow f(\cos x) \in (0;2] \Rightarrow \sqrt{2f(\cos x]} \in [0;2)$ khi đó $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \in [-2;2)$.

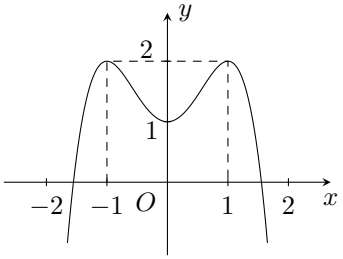
Do vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-2;2)$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

Câu 47.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B**. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D**. $y = x^4 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Nhìn từ trái sang phải nhánh cuối cùng của đồ thị đi xuống nên $a < 0$, loại đáp án $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và $y = x^4 + 3x^2 + 1$.

Điểm $A(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ không đi qua $A(1;2)$ vì $x = 1 \Rightarrow y = 3$.

Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ đi qua $A(1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\dfrac{1}{2}f(x)-m=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m<-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$ **B.** $m<-3$. **C.** $m<-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m<-3. \end{array}\right.$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}f(x)-m=0 \Leftrightarrow f(x)=2m.$ $(*)$

Quan sát bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta thấy, để phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} 2m=0 \\ 2m<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m<-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=2x^3-(2+m)x+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m>-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m>-\dfrac{1}{2}, m\neq 4$. **C.** $m>\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\leq\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & 2x^3-(2+m)\,x+m=0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)\left(2x^2+2x-m\right)=0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2+2x-m=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x^2+2x-m=0. \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đặt $f(x)=2x^2+2x-m=0$.

Để đồ thị của hàm số $y=2x^3-(2+m)\,x+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Tức là $\left\{\begin{array}{l} \Delta'>0 \\ f(1)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+2m>0 \\ 4-m\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-\dfrac{1}{2} \\ m\neq 4. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+3}$ có đồ thị (C) và điểm $A\,(1;a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Giả sử k là hệ số góc của đường thẳng d qua A. Khi đó phương trình d có dạng $y=k(x-1)+a$.

d là tiếp tuyến của (C) khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+3}=k(x-1)+a\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}=k.\end{cases}$$

Từ hệ ta được $\sqrt{x^2-2x+3}=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}}+a\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$. $(*)$

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $(*)$ vô nghiệm.

Trường hợp 1: Nếu $a>0$ thì $(*)\Leftrightarrow x^2-2x+3-\dfrac{4}{a^2}=0$. $(**)$

Để có đúng hai tiếp tuyến của C đi qua A thì $(**)$ phải có hai nghiệm phận biệt

$\Leftrightarrow 1-3+\dfrac{4}{a^2}>0\Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2}>2\Leftrightarrow a^2<2\Rightarrow 0<a<\sqrt{2}$ (do đang xét $a>0$).

Vậy có 1 giá trị nguyên của a để thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 51.

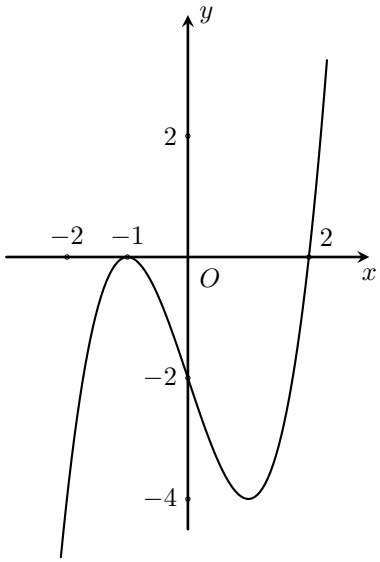
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x)=2x\cdot f'(x^2-2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-2=-1\\ x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-1\\ x=-2\\ x=2\end{array}\right..$$

Ta có $g'(3)=6\cdot f'(7)>0$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Gọi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt các tiệm cận của (C) tại hai điểm P và Q. Gọi G là trọng tâm của tam giác IPQ (với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C)). Diện tích tam giác GPQ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)$ thuộc đồ thị (C).

Phương trình tiếp tuyến tại M là $d\colon y=-\dfrac{3}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a+1}{a-1}$.

Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận có phương trình là $d_1\colon x=1$ và $d_2\colon y=2$.

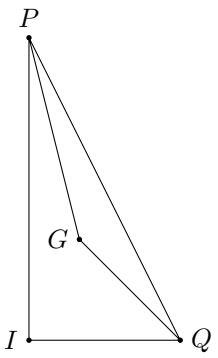
Do đó d cắt d_1 tại $P\left(1;\dfrac{2a+4}{a-1}\right)$, d cắt d_2 tại $Q(2a-1;2)$ và d_1 cắt d_2 tại $I(1;2)$.

Ta có

$$IP=\frac{6}{|a-1|},\ IQ=2|a-1|.$$

Khi đó

$$S_{GPQ}=\frac{1}{3}S_{IPQ}=\frac{1}{6}IP\cdot IQ=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{|a-1|}\cdot 2|a-1|=2.$$



Chọn đáp án A □

Câu 53. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m-1|$ có 7 điểm cực trị.

A. $(0;6)$. **B.** $(6;33)$. **C.** $(1;33)$. **D.** $(1;6)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$. Ta có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$ và

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2.\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-6$	↗	$m-1$	↘	$m-33$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi đồ thị $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Điều đó tương đương với

$$m-6<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có hệ số góc bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ và Δ là tiếp tuyến của (C) tại M.

Đặt $f'(x) = y' = 3x^2 - 2x + 2$. Khi đó hệ số góc của Δ là $f'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 2$.

Đặt $g(x) = 3x^2 - 2x + 2$, rõ ràng giá trị nhỏ nhất của $f'(x_0)$ bằng với giá trị nhỏ nhất của $g(x)$.

Ta có $g'(x) = 6x - 2$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$+\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị hệ số góc của Δ nhỏ nhất bằng $\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

- ☑ Gọi $A\left(a; \dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C), $(a < 2 < b)$.
- ☑ Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(b-a; \dfrac{b}{b-2} - \dfrac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.
- ☑ Áp dụng BĐT Côsi ta có $(b-2)(2-a) \le \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
- ☑ $AB^2 = (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \ge (b-a)^2 + \dfrac{64}{(b-a)^2} \ge 16 \Rightarrow AB \ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2 - \sqrt{2}$ và $b = 2 + \sqrt{2}$.
- ☑ Vậy AB nhỏ nhất bằng 4.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** Không có. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải.

- ☑ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c} = -2$ làm tiệm cận đứng.
- ☑ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = \dfrac{a}{c} = 2$ làm tiệm cận ngang.
- ☑ Vậy $I(-2; 2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và $y' = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

- Gọi tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ có dạng $\Delta : y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ hay $\Delta : y = \dfrac{7}{(x_0+2)^2} \cdot (x - x_0) + \dfrac{2x_0 - 3}{x_0 + 2}$.
- Vì Δ đi qua $I(-2; 2)$ nên

$$\begin{aligned} 2 = \frac{7}{(x_0+2)^2} \cdot (-2 - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 + 2} &\Leftrightarrow 2 = \frac{-7}{(x_0+2)^2} \cdot (x_0 + 2) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 + 2} \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{-7}{(x_0+2)} + \frac{2x_0 - 3}{x_0 + 2} \Leftrightarrow 2 = \frac{2x_0 - 10}{x_0 + 2} \\ &\Leftrightarrow 4 = -10 \text{ (vô nghiệm)} \end{aligned}$$

☑ Vậy không tồn tại tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$ mà đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x (a > 0; a \neq 1)$ qua điểm $I(1; 1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2016. **C.** 2020. **D.** -2020.

Lời giải.

☑ Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

☑ $M\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$.

☑ Gọi N đối xứng với M qua $I(1; 1) \Rightarrow N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right)$.

☑ Do đồ thị (C_1) đối xứng (C) qua $I(1; 1)$ nên $N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right) \in (C)$.

☑ $N \in (C) \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{-\log \frac{1}{2018}} \Leftrightarrow 2 - y_M = 2018 \Leftrightarrow y_M = -2016$.

☑ Vậy $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right) = -2016$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; -2]$. **B.** $m \notin [-2; 2]$. **C.** $m \in [2; +\infty)$. **D.** $m \in \{-2; 2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

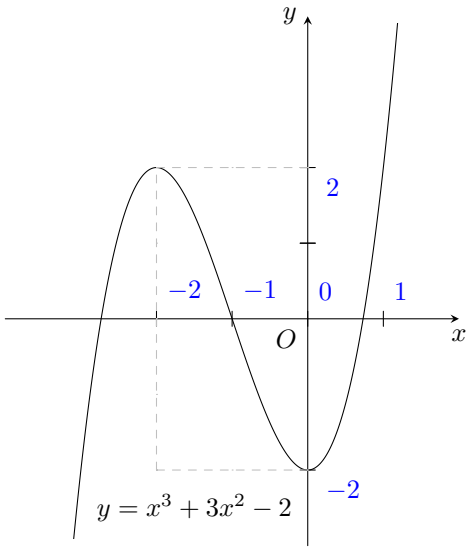
+) Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

+) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)$ sau đó suy ra giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách giải:

Số nghiệm của phương trình $x^3+3x^2-2=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ và đường thẳng $y=m$.

Ta có: $y'=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Ta có đồ thị hàm số như hình vẽ:



Quan sát đồ thị hàm số ta có: đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$.

Chú ý khi giải: Để làm bài nhanh hơn, các em có thể vẽ BTT thay cho đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $g(x)=f(\cos x)+x^2-x$. Ta thấy $g'(x)=-\sin x\cdot f'(\cos x)+2x-1$. Do $-1\le\cos x\le 1$ nên $-1\le f'(\cos x)\le 1$, suy ra $|-sinx\cdot f'(\cos x)|\le 1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Cách 1. Ta có $g'(x)=-\sin x\cdot f'(\cos x)+2x-1\le 1+(2x-1)=2x\le 0,\forall x\le 0$. Loại đáp án B và D. Với $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ thì $0\le\sin x<1, 0<\cos x\le 1$ nên $-\sin x\cdot f'(\cos x)\le 0$. Do đó $g'(x)\le 0,\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Loại đáp án C. Chọn đáp án A.

Cách 2. Vì $g'(x)-\sin x\cdot f'(\cos x)+2x-1\ne 1+(2x-1)=2x-2$ nên $g'(x)>0,\forall x>1$. Suy ra $g(x)=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$. Chọn đáp án A. □

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải.

Chọn D.

Xét hàm số $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)$. Ta có $h'(x)=f'(x)+x; h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x$ Số nghiệm phương trình trên là số giao điểm của hai đồ thị $y=-x$ và $y=f'(x)$. Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f'(x)=-x$ có ba nghiệm $x=-2; x=0; x=2$. Tại $x=2$ là cực tiểu, tại $x=-2$ là cực đại, tại $x=0$ không là cực trị vì đạo hàm không đổi dấu. Hay $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)$ có một cực trị dương trong khoảng $(-2;3)$. Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có số cực trị trong khoảng $(-2;3)$ là:

$2.1+1=3$. □

Câu 61. Đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x=1$ tại điểm có tung độ bằng 3 khi

A. $a=b=0,\ c=2$. **B**. $a=c=0,\ b=2$. **C**. $a=2,\ b=c=0$. **D**. $a=2,\ b=1,\ c=0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $f(x)$. Vì $M(1;3)\in(C)$ nên $3=1+a+b+c\Leftrightarrow a+b+c=2$ (1).

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại O nên hệ $\begin{cases}f(x)=0\\f'(x)=0\end{cases}$ có nghiệm $x=0\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\b=0.\end{cases}$

Từ (1) suy ra $a=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khi đó số nghiệm của phương trình $2|f(x-3)|-5=0$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	
			1				$-\infty$

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=2f(x-3)$ là

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	
			2				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=2f(x-3)$ ta có đồ thị hàm số $y=2f(x-3)$ cắt trục Ox tại điểm duy nhất có hoành độ là x_0 $(x_0>4)$.

Suy ra có bảng biến thiên của hàm số $y=2|f(x-3)|$ là

x	$-\infty$		3		4		x_0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			2				0		

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=2|f(x-3)|$ ta có

Phương trình $2|f(x-3)|-5=0\Leftrightarrow 2|f(x-3)|=5$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x+2$ có đồ thị (C). Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y=-2x+\dfrac{10}{3}$ là

A. $y=-2x+2$. **B**. $y=-2x-2$.

C. $y=-2x+10,\ y=-2x-\dfrac{2}{3}$. **D**. $y=-2x-10,\ y=-2x+\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Giả sử $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)$ là: $f'(x_0)=x_0^2-4x_0+1$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y=-2x+\dfrac{10}{3}$ là -2

Tiếp tuyến song song với đường thẳng d thì:

$${x_0}^2-4x_0+1=-2\Leftrightarrow x_0^2-4x_0+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$$

*TH1: $x_0=1, y_0=\dfrac{4}{3}, f'(x_0)=-2$

Phương trình tiếp tuyến:

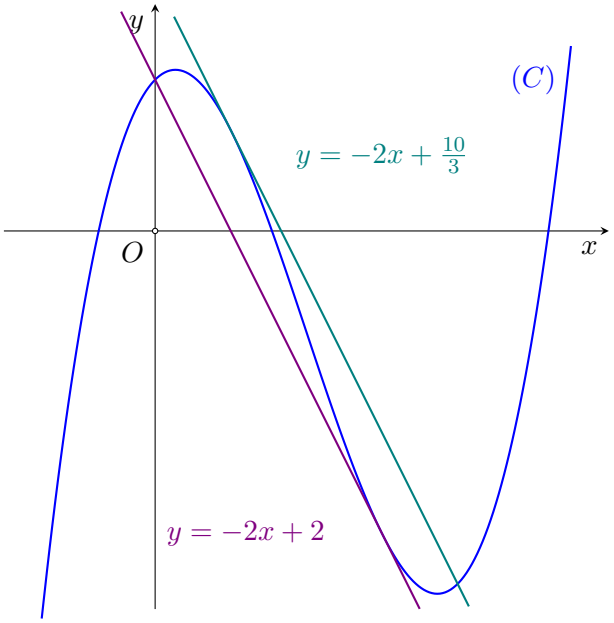
$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=-2x+\dfrac{1}{3}$ (loại)

*TH2: $x_0=3, y_0=-4, f'(x_0)=-2$

Phương trình tiếp tuyến:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=-2x+2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2x+2$



Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hàm số $y=x^3-5x^2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d: y=2x-6$ sao cho từ đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C)?

A. 2 điểm. **B**. 3 điểm. **C**. 4 điểm. **D**. vô số điểm.

Lời giải.

Cách 1: Gọi $M(a;2a-6)\in d$. Phương trình đường thẳng d đi qua$M(a;2a-6)\in d$ có hệ số góc k là: $y=k(x-a)+2a-6$ d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases}x^3-5x^2=k(x-a)+2a-6\\3x^2-10x=k\end{cases}$ có nghiệm

Theo yêu cầu bài toán thì $x^3-5x^2=(3x^2-10x)(x-a)+2a-6$ có hai nghiệm phân biệt. Xét hàm số $f(x)=(3x^2-10x)(x-a)+2a-6-x^3+5x^2=2x^3-(3a+5)x^2+10ax+2a-6$ Có

$f'(x)=6x^2-2(3a+5)x+10a=(6x-10)(x-a)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\Rightarrow f(a)=-a^3+9a^2+2a-6\\x=\dfrac{5}{3}\Rightarrow f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{31}{3}a+\dfrac{71}{9}\end{array}\right.$

$f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khi: $\begin{cases}a\neq\dfrac{5}{3}\\f(a).f\left(\dfrac{5}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq\dfrac{5}{3}\\\left(-a^3+9a^2-2a-6\right).\left(\dfrac{31}{3}a+\dfrac{71}{9}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}a=-\dfrac{71}{31}\\a=-1\\a=4\pm\sqrt{22}\end{cases}$ Đáp án có 4 điểm thỏa mãn bài toán. Cách 2: Gọi $M(a;2a-6)\in d$. Phương trình đường thẳng d đi qua$M(a;2a-6)\in d$ có hệ số góc k là: $y=k(x-a)+2a-6$ d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases}x^3-5x^2=k(x-a)+2a-6\\3x^2-10x=k\end{cases}$ có nghiệm Theo yêu cầu bài toán thì $x^3-5x^2=(3x^2-10x)(x-a)+2a-6$ có hai nghiệm phân biệt. Đến đây ta có thể cô lập a, xét hàm số. Chú ý tính cực trị bằng công thức: $y=u'/v'$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d\colon y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x}=2x+6\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+5x+2=0\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=-\dfrac{1}{2}.\end{bmatrix}$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d(M;d)\geq 0,\ \forall M\Rightarrow d(M;d)=0$ khi $M\in d$.

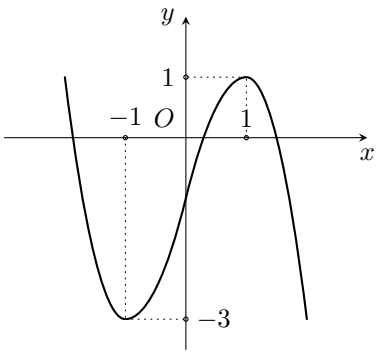
Mà $M\in(C)\Rightarrow M=d\cap(C)\Rightarrow\begin{bmatrix}M(-2;2)\\M\left(-\dfrac{1}{2};5\right).\end{bmatrix}$

- ☑ Với $M(-2;2)\Rightarrow a=-2,\ b=2\Rightarrow(4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.
- ☑ Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2},\ b=5\Rightarrow(4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Chọn đáp án C □

Câu 66.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2|f(x)|-5=0$ là



A. 3. **B.** 5 . **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

$$2\,|f(x)|-5=0\Leftrightarrow|f(x)|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f(x)=\dfrac{5}{2}\quad(1)\\f(x)=-\dfrac{5}{2}\quad(2)\end{bmatrix}.$$

Số nghiệm của phương trình đã cho là tổng số nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ và đường thẳng $y=-\dfrac{5}{2}$ với đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Như vậy, dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Tìm m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M,N sao cho độ dài MN nhỏ nhất

A. 3. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là
$2x+m=\dfrac{x+3}{x+1}\,(x\neq 1)\Leftrightarrow 2x^2+(m+1)x+m-3=0\quad (*)$
Ta có: $\Delta=(m+1)^2-8(m-3)=m^2-6m+25=(m-3)^2+16>0,\forall m.$
$\Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi m.
Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{m+1}{2}\\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{2}\end{cases}$.
Gọi $M(x_1;2x_1+m),N(x_2;2x_2+m)$ là hai giao điểm của 2 đồ thị hàm số.
Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}MN^2&=(x_2-x_1)^2+(2x_2-2x_1)^2=5(x_2-x_1)^2\\&=5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=5\left[\frac{(m+1)^2}{4}-4\cdot\frac{m-3}{2}\right]\\&=\frac{5}{4}\left(m^2+2m+1-8m+24\right)=\frac{5}{4}\left(m^2-6m+25\right)\\&=\frac{5}{4}(m-3)^2+20\geq 20,\forall m.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-3=0\Leftrightarrow m=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị.

A. $\dfrac{5}{4}<m<2$. **B.** $-\dfrac{5}{4}<m<2$. **C.** $-2<m<\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{4}\leq m\leq 2$.

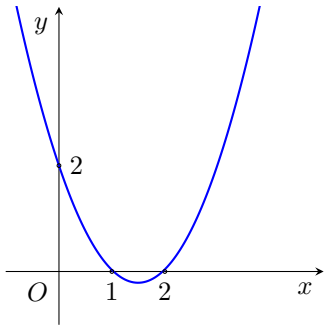
Lời giải.

Để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì $f(x)$ phải đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $0<x_1<x_2$ hay $f'(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt.
Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m$. Để hàm số $f'(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt thì

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ \dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ \dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{5}{4}\\ m<-1\end{array}\right.\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

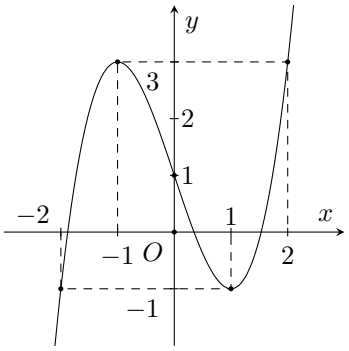
Lời giải.

Ta có $g'(x)=(1-2x)f'\left(x-x^2\right)$. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow g'(x)\le 0$, $\forall x\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm. Ta có $g'(-1)=3f'(-2)>0 \Rightarrow$ Loại đáp án A, B và D.

Chọn đáp án C □

Câu 70.

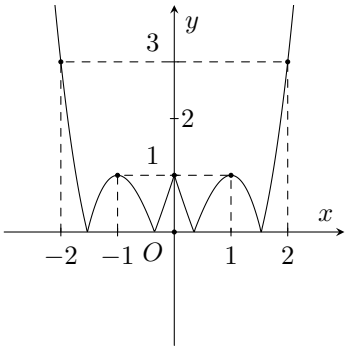
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;-1)$, $(-1;3)$, $(1;-1)$, $(2;3)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -1=-8a+4b-2c+d \\ 3=-a+b-c+d \\ -1=a+b+c+d \\ 3=8a+4b+2c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1.$$

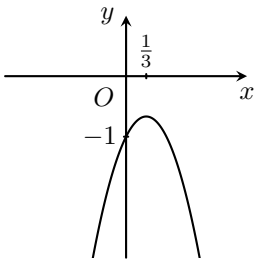
Khi đó ta có đồ thị hàm số $y=||x|^3-3|x|+1|$ như hình vẽ bên.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 71.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho có thể là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y=x^3-2x-1$. **B.** $y=-x^3+2x^2-x-2$.

C. $y=-x^3+x^2-x+2$. **D.** $y=-x^3+2x^2+x+2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ căn cứ vào đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta có:

- ☑ Đồ thị là một parabol quay bề lõm xuống nên $a<0$ suy ra loại $y=x^3-2x-1$.
- ☑ Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $c<0$ suy ra loại $y=-x^3+2x^2+x+2$.
- ☑ $f'(x)<0$ với mọi x nên hàm luôn nghịch biến suy ra loại $y=-x^3+2x^2-x-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1\cdot k_2$.

A. $k_1 \cdot k_2 = 3$. **B.** $k_1 \cdot k_2 = 4$. **C.** $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{1}{4}$. **D.** $k_1 \cdot k_2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $\dfrac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1$ với $x \neq 2$. Phương trình này tương đương $2x^2 - (m-6)x - 2m + 3 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0\, \forall m$. Suy ra d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2.

Hệ số góc của các tiếp tuyến tại các giao điểm lần lượt là $k_1 = \dfrac{1}{(x_1+2)^2}$ và $k_2 = \dfrac{1}{(x_2+2)^2}$.

Theo Vi-et ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2}$ và $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-2m+3}{2}$.

Do đó $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{1}{[(x_1+2)(x_2+2)]^2} = \dfrac{1}{\left[\dfrac{-2m+3}{2} + 2\dfrac{m-6}{2} + 4\right]^2} = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M bằng nhau?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình

$$y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1}.$$

Phương trình đường thẳng AB là $y = x + 2$ và trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(-1;1)$ nên

$$d(A,\Delta) = d(B,\Delta) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB \parallel \Delta \\ I \in \Delta \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \\ \dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \neq 2 \end{cases} \\ 1 = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}(-1 - x_0) + \dfrac{2x_0+1}{x_0+1}. \end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được $x_0 \in \{-2; 0; 1\}$. Vậy có ba điểm M thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị là đường cong $(\mathscr{C})$. Đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho tam giác OAB là tam giác vuông cân tại O, với O là gốc tọa độ. Khi đó $S = a + b$ bằng bao nhiêu?

A. $S = -2$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = -3$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, $x_0 \neq -\dfrac{3}{2}$.

$y'(x) = \dfrac{-1}{(2x+3)^2} < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Kết hợp với giả thiết tam giác OAB vuông cân, ta được $y'(x_0) = -1$.

Điều này tương đương với $\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1$. Từ đó ta giải được $\left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x+1)+1 \Leftrightarrow y = -x$ (loại vì tiếp tuyến này đi qua gốc tọa độ).

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$, ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x+2)+0 \Leftrightarrow y = -x-2$.

Vậy $S = -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tìm tọa độ của tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó có hệ số góc lớn nhất.

A. $M(1;2)$. **B.** $M(-1;2)$. **C.** $M(-1;0)$. **D.** $M(2;-1)$.

Lời giải.

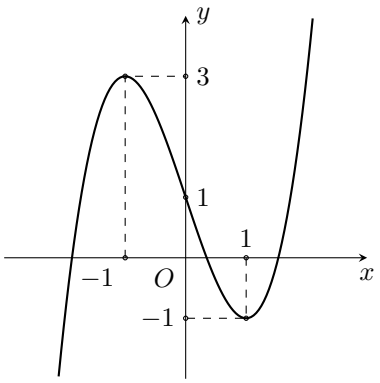
Ta có $y' = -3x^2 - 6x = -3(x+1)^2 + 3 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến lớn nhất khi $x = -1$, suy ra $y = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 76.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

A. $[-1;3)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $[-1;1)$.

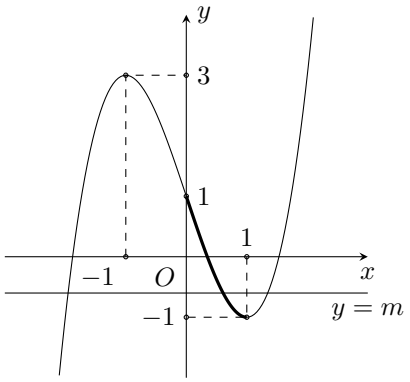


Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in (0;\pi)$ thì $t \in (0;1]$.

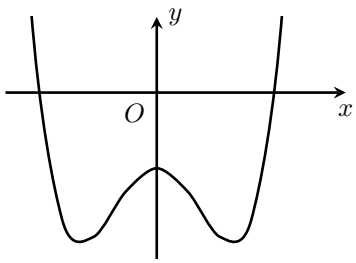
Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1;1)$.



Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Xác định dấu của các hệ số a, b, c.



A. $a>0, b<0, c>0$. **B**. $a>0, b>0, c>0$. **C**. $a<0, b<0, c<0$. **D**. $a>0, b<0, c<0$.

Lời giải.

Đồ thị quay lên nên $a>0$.

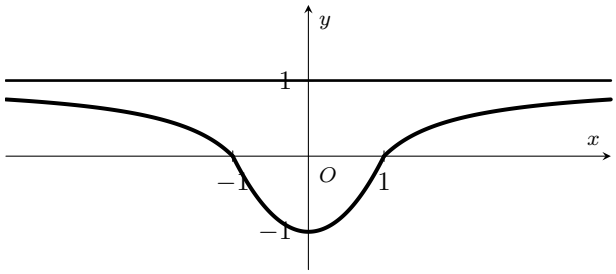
Đồ thị cắt trục tung Oy tại điểm nằm dưới gốc O, nên $c<0$.

Đồ thị có hai cực trị nên a và b trái dấu. Mà $a>0$ nên $b<0$.

Vậy $\boxed{a>0, b<0, c<0.}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình dưới. Quan sát đồ thị và hãy chọn khẳng định **SAI** trong các khẳng định sau?



A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

B. Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<m<1$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^3-3x^2-2m=0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. $-2<m<0$. **B**. $0<m<1$. **C**. $-3<m<1$. **D**. $-2<m<2$.

Câu 80. Gọi A và B là các giao điểm của đường thẳng $d: y=x-4$ và đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x+1}$. Tính độ dài của đoạn thẳng AB.

A. $\sqrt{8}$. **B**. $4\sqrt{2}$. **C**. 64. **D**. 8.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm $A(1+2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2})$ và $B(1-2\sqrt{2};-3-2\sqrt{2})$.

Suy ra $AB=8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x+1-m=0$ có một nghiệm thực duy nhất.

A. $m=-1$ hoặc $m=3$. **B**. $m<-1$ hoặc $m>3$.

C. $-1<m<3$. **D**. $-1\le m\le 3$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 1$, có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

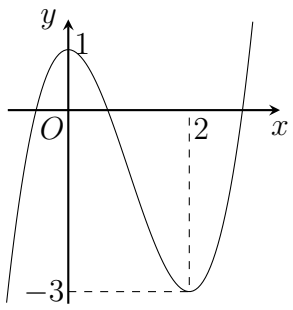
Ta có bảng biến thiên

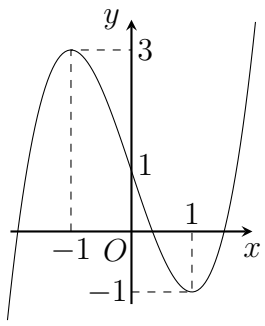
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

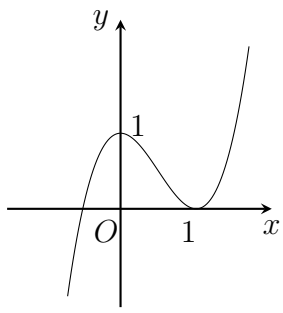
Qua bảng biến thiên ta thấy, với $m < -1$ hoặc $m > 3$ thì phương trình đã cho có nghiệm thực duy nhất.

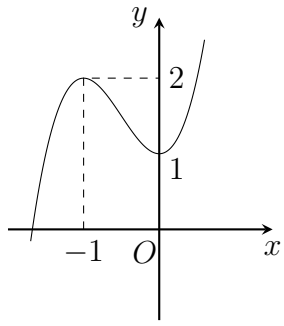
Chọn đáp án B □

Câu 82. Hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là hình nào trong các hình dưới dây?

A.


B.


C.


D.


Câu 83. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (C) với Ox và Oy. Tính tích các hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A và B.

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải.

Giao của (C) với Ox là $A(-1;0)$, giao của (C) với Oy là $B(0;-1)$.

$y'(-1) = \dfrac{-2}{3}$, $y'(0) = \dfrac{-3}{2}$. Khi đó, tích hệ số góc là 1.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-m}{x+2}$ cắt đường thẳng $y = 2 - x$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m > -5$, $m \neq 2$. **B.** $m > -4$. **C.** $m > -5$. **D.** $m > 5$, $m \neq -4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là
$\dfrac{2x-m}{x+2} = 2-x \Leftrightarrow x^2+2x-(m+4)=0.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1+m+4>0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-5 \\ m \neq -4 \end{cases}.$

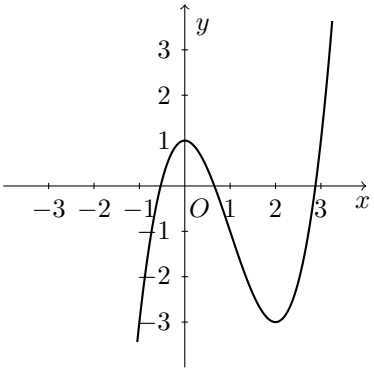
Chọn đáp án (D) □

Câu 85.

Đồ thị cho bởi hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y=-x^3+3x^2+1$. **B.** $y=x^3+3x^2+1$.

C. $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+2$.



Lời giải.

Đồ thị có phần cuối "đi lên" suy ra $a>0$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và $(2;-3)$ nên ta suy ra hàm số cần tìm là $y=x^3+3x^2+3x+1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

$y'=3x^2-6mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x(x-2m)=0 \quad (1)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ pt (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ pt $x-2m=0$ có nghiệm khác $0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, tọa độ hai điểm cực trị là $A(0;4m^3), B(2m;0)$.

Hai điểm A và B nằm trên trục Ox và Oy, đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$ nên

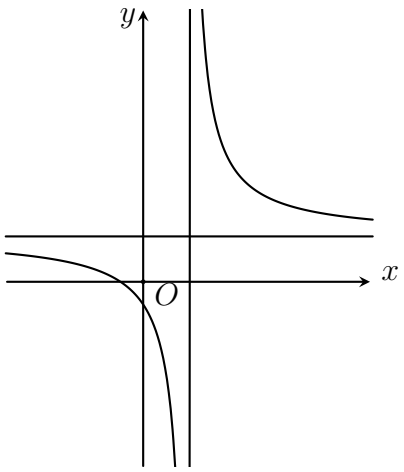
$$4m^3=2m \Leftrightarrow m(2m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ m=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right..$$

Vì $m=0$ không thỏa điều kiện nên $m \in \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $ac > 0, bd > 0$. **B**. $bd < 0, ad > 0$. **C**. $bc > 0, ad < 0$. **D**. $ab < 0, cd < 0$.

Lời giải.

Theo hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow d$ và c trái dấu (1).

Theo hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow a$ và c trái dấu (2).

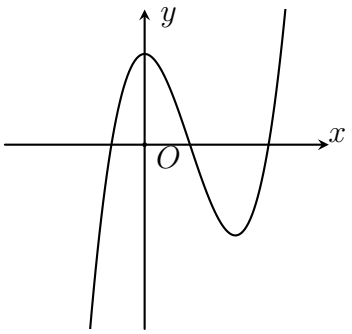
Ta có $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra a, c, b cùng dấu và b, d trái dấu.

Vậy $bc > 0, ad < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + c$ cho như hình dưới đây.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$. **B**. $a > 0, b > 0, c > 0$. **C**. $a < 0, b < 0, c > 0$. **D**. $a > 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải.

Theo hình vẽ ta có $a > 0, y(0) = c > 0$ nên ta loại C, D.

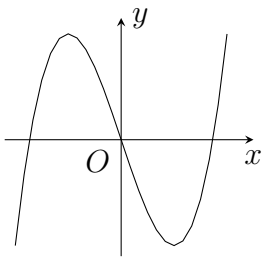
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx = x(3ax + 2b)$. $y' = 0 \Leftrightarrow x(3ax + 2b) = 0(1)$. Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(0; c)$ và điểm cực tiểu có hoành độ dương nên từ (1) suy ra $x = -\dfrac{2b}{3a} > 0$, suy ra a và b trái dấu. Ta loại B.

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 89.

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x+2$. **B**. $y=x^3+3x$.

C. $y=x^3-3x$. **D**. $y=-x^3+3x$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị hình chữ N thuận nên hệ số của x^3 phải dương. Ta loại phương án D.

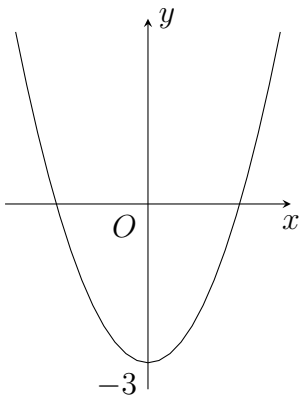
Khi $x=0$ thì $y=0$ nên hệ số tự do phải bằng 0. Ta loại phương án A.

Đồ thị hàm số có 2 cực trị. Ta loại phương án B.

Chọn đáp án C □

Câu 90.

Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)|=m-1$ có 4 nghiệm thực phân biệt.



A. $0<m<3$.

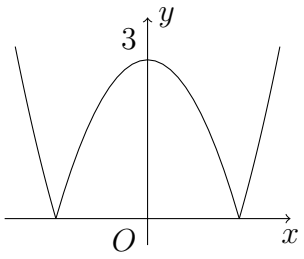
B. $1<m<4$.

C. $-3<m<0$.

D. $0<m<4$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta suy ra được đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ như hình bên.



Dựa và đồ thị hàm số $y=|f(x)|$, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi $0<m-1<4 \Leftrightarrow 1<m<4$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^3-x^2+(m-1)x+3$ có đúng hai điểm cực trị và điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại là

A. $-\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}<m<0$. **B**. $\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}<m<0$.

C. $\dfrac{3-\sqrt{21}}{6}<m<0$. **D**. $-\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}<m<0$.

Lời giải.

$y'=3mx^2-2x+(m-1)$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3mx^2-2x+(m-1)=0$ (1).

Hàm số $y=mx^3-x^2+(m-1)x+3$ có đúng hai điểm cực trị và điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại $\Leftrightarrow$ pt (1) có $\begin{cases} m<0 \\ \Delta'=-3m^2+3m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \dfrac{3-\sqrt{21}}{6}<m<\dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{21}}{6}<m<0$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị $(C): y = x^4 - 2x^2 - 3$ cắt đường thẳng $d: y = m$ để bốn điểm phân biệt là

A. $m > -3$. **B.** $m < -4$. **C.** $-4 < m < -3$. **D.** $-4 < m < -\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2x^2-3-m=0$. Đặt $t = x^2$ phương trình thành $t^2-2t-3-m=0$. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = -m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (-3 - m) > 0 \\ -3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < -3. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 93. Tất cả các điểm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$ mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng $y = 4x + 19$ là

A. $(-1;-1)$ và $(-3;7)$. **B.** $(-3;7)$.

C. $(-1;-1)$. **D.** $(1;-1)$ và $(-3;7)$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 4x + 19$ suy ra

$$k = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{(x_0+2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 7. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 2x^2 + 2x \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 2$.

Do tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại x là

$$y'(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $x_1 + x_2 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt.

A. $-1 < m < 3$. **B.** $-1 \le m \le 3$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $m < 3$.

Câu 96. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $x^2-2x-5=0$. Phương trình có hai nghiệm $1\pm\sqrt{6}$. Vậy hoành độ trung điểm của đoạn MN bằng 1.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C).

① Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

② Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^3+3x^2+m+1=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Lời giải.

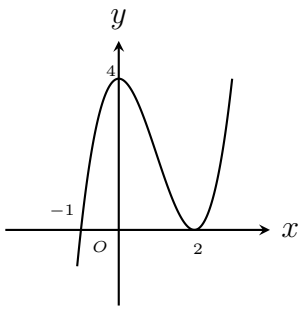
① TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị



② $-x^3+3x^2+m+1=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=m+5$. Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 0<m+5<4\Leftrightarrow -5<m<-1$

□

Câu 98.

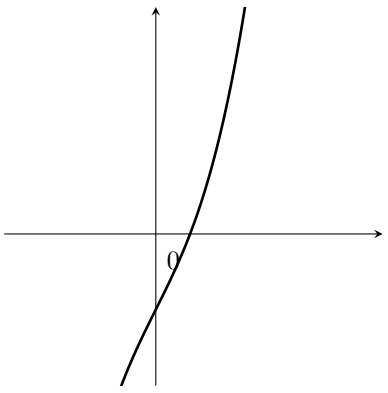
Đồ thị hình bên là của hàm số

A. $y=x^3+2x-1$.

B. $y=-x^3-2x+1$.

C. $y=x^3-3x-1$.

D. $y=-x^3-3x+1$.



Câu 99. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗ 2

A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **B**. $y=\dfrac{x+5}{x-2}$. **C**. $y=\dfrac{-2x+3}{1-x}$. **D**. $y=\dfrac{x-6}{x-2}$.

Câu 100. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm M,N sao cho độ dài MN nhỏ nhất. Khi đó MN bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{2}$. **B**. $4\sqrt{2}$. **C**. $2\sqrt{5}$. **D**. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x^2+(1+m)x+m-3=0 \end{cases}$

$\Delta=m^2-6m+25>0, \forall m$.

Khi đó $M(x_1;2x_1+m), N(x_2;2x_2+m)$ là hai giao điểm.

$MN^2=\dfrac{5}{4}(m^2-6m+25)$ nhỏ nhất khi $m=3$. Suy ra MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. C	5. D	6. A	7. A	8. A	9. A	10. B
11. B	12. C	13. D	14. A	15. D	16. A	17. D	18. D	19. B	20. C
21. B	22. D	23. C	24. C	25. C	26. A	27. C	28. B	29. B	30. C
31. C	32. D	33. B	34. D	35. A	36. D	37. C	38. B	39. A	40. C
41. B	42. B	43. C	44. A	45. D	46. B	47. D	48. B	49. D	50. A
51. A	52. B	53. A	54. A	55. C	56. C	57. A	58. B	59. B	60. C
61. A	62. A	63. D	64. A	65. A	66. A	67. B	68. A	69. B	70. C
71. C	72. D	73. C	74. B	75. B	76. B	77. C	78. B	79. D	80. C
81. D	82. B	83. D	84. B	85. D	86. B	87. A	88. C	89. C	90. D
91. C	92. B	93. A	94. A	95. D	96. D	97. D	98. C	99. A	100. C

C MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị (C). M_1 thuộc (C) và có hoành độ là 1, tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại M_2, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại M_3,.... Cứ như thế mãi và tiếp tuyến của (C) tại $M_n(x_n; y_n)$ thỏa mãn $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0$. Tìm n.

A. 675. **B**. 672. **C**. 674. **D**. 673.

Lời giải.

Có: $y' = 3x^2 - 2018$.

Gọi d_n là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_n.

Có điểm $M_1(1; -2017) \Rightarrow d_1 : y + 2017 = y'(1).(x - 1) \Leftrightarrow d_1 : y = -2015x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là: $x^3 - 2018x = -2015x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$.

Có điểm $M_2(-2; 4028) \Rightarrow d_2 : y - 4028 = y'(-2).(x + 2) \Leftrightarrow d_2 : y = -2006x + 16$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và (C) là: $x^3 - 2018x = -2006x + 16 \Leftrightarrow x^3 - 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \end{array}\right.$.

Có điểm $M_3(4; -8008) \Rightarrow d_3 : y + 8008 = y'(4).(x - 4) \Leftrightarrow d_3 : y = -1970x - 128$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và (C) là: $x^3 - 2018x = -1970x - 128 \Leftrightarrow x^3 - 48x + 128 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 4 \\ x_4 = -8 \end{array}\right.$.

Suy ra ta có dãy (x_n): $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -8 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow x_n = (-2)^{n-1} = -\dfrac{1}{2}.(-2)^n \Rightarrow y_n = x_n^3 - 2018x_n$.

Giả thiết: $2018x_n + y_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow 2018x_n + x_n^3 - 2018x_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow x_n^3 = -2^{2019} \Leftrightarrow x_n^3 = (-2)^{2019} \Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = (-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n - 3 = 2019 \Leftrightarrow n = 674$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d : y = mx - m - 1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1; 1)$.

A. $m = 2$. **B**. $m = 0$. **C**. $m = 1$. **D**. $m = -1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét phương trình hoành độ giao điểm, áp dụng định lí Vi-ét.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x}{1-x} = mx - m - 1, (x \neq 1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ m \cdot 1^2 - 2m.1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m(m+1) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1), áp dụng định lsy Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = \dfrac{m+1}{m}. \end{cases}$

Tọa độ giao điểm là: $A\left(x_1; mx_1 - m - 1\right), B\left(x_2; mx_2 - m - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x_1 + 1; mx_1 - m - 2) \\ \overrightarrow{AN} = (x_2 + 1; mx_2 - m - 2). \end{cases}$

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{mx_1 - m - 1 + mx_2 - m - 1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(1; -1).$

Ta có:

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}\right)^2 \\ &= 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right) + IM^2 + IN^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{1}{2}MN^2. \end{aligned}$$

Do vậy, $(AM^2 + AN^2)_{\min}$ khi và chỉ khi $MN_{\min}$.
Ta có: $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; mx_2 - mx_1)$, suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+m^2)(x_2 - x_1)^2} &= \sqrt{(1+m)^2\left((x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right)} \\ &= \sqrt{(1+m^2)\left(4 - \frac{4(m+1)}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{-4(1+m^2)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{(-m)} + (-4m)} \\ &\geq \sqrt{2.\sqrt{\frac{4}{-m}.(-4m)}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Suy ra $MN_{\min}=2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{4}{-m}=-4m\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\,(\text{ktm}).\\ m=-1\,(\text{tm}).\end{array}\right.$

Vậy để $(AM^2+AN^2)_{\min}$ thì $m=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=2^{2018}x^3+3.2^{2018}x^2-2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P=0$. **B.** $P=2^{2018}$. **C.** $P=-2018$. **D.** $P=3.2^{2018}-1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y=f(x)=2^{2018}x^3+3.2^{2018}x^2-2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3.

$\Rightarrow f(x)=2^{2018}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

$f'(x)=2^{2018}[(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)]$.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(x_1)=2^{2018}(x-x_2)(x-x_3)\\ f'(x_2)=2^{2018}(x-x_1)(x-x_3)\\ f'(x_3)=2^{2018}(x-x_1)(x-x_2).\end{array}\right.$$

Ta có $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

$=\dfrac{1}{2^{2018}}\left(\dfrac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\dfrac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\dfrac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right)$.

$=\dfrac{1}{2^{2018}}\cdot\dfrac{-(x_2-x_3)-(x_3-x_1)-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}=\dfrac{1}{2^{2018}.}\cdot\dfrac{0}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}=0.$

Vậy $P=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y=x^4-(3m+4)x^2+m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $\left\{\begin{array}{l} m>-\dfrac{4}{5}\\ m\neq 0\end{array}\right.$. **B.** $m>0$. **C.** $m=12$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=12\\ m=-\dfrac{12}{19}\end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương pháp:

Ba số a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a+c=2b$.

Cách giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox: $x^4-(3m+4)x^2+m^2=0$ (1)

Đặt $t=x^2(t\geq 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2-(3m+4)t+m^2=0$ (2)

Để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S=3m+4>0 \\ P=m^2>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+4)^2-4m^2>0 \\ m>-\frac{4}{3} \\ m\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2+24m+16>0 \\ m>-\frac{4}{3} \\ m\neq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>-\frac{4}{5} \\ m<-4 \end{array}\right. \\ m>-\frac{4}{3} \\ m\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{4}{5} \\ m\neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1,t_2(t_1<t_2)$, dẫn tới (1) có 4 nghiệm phân biệt sắp xếp tăng dần như sau: $-\sqrt{t_2},-\sqrt{t_1},\sqrt{t_1},\sqrt{t_2}$.

Để dãy số trên là dãy cấp số cộng thì $\begin{cases} -\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}=-2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1}=\sqrt{t_2}\Leftrightarrow 9t_1=t_2.$

Theo hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} t_1+t_2=3m+4 \\ t_1t_2=m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+9t_1=3m+4 \\ t_1.9t_2=m^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\frac{3m+4}{10} \\ t_1=\frac{|m|}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3m+4}{10}=\frac{|m|}{3}. \quad (3)$$

+) Với $m>0$: (3) $\Leftrightarrow 9m+12=10m\Leftrightarrow m=12$ (tm).

+) Với $m<0$: (3) $\Leftrightarrow 9m+12=-10m\Leftrightarrow m=-\frac{12}{19}$ (tm).

Vậy $m=12$ hoặc $m=-\frac{12}{19}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3-3x+2(C)$. Biết rằng đường thẳng $d:y=ax+b$ cắt đồ thị (C) tại ba

điểm phân biệt M, N, P. Tiếp tuyến tại ba điểm M, N, P của đồ thị (C) cắt (C) tại các điểm M', N', P' (tương ứng khác M, N, P). Khi đó đường thẳng đi qua ba điểm M', N', P' có phương trình là

A. $y = (4a+9)x + 18 - 8b$. **B**. $y = (4a+9)x + 14 - 8b$.

C. $y = ax + b$. **D**. $y = -(8a+18)x + 18 - 8b$.

Lời giải.

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.

Ta có phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị (C) là:

$\Delta_1 : y = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và Δ_1 là:

$$(3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2 = x_3 - x + 2 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 (x + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = -2x_1 \end{array}\right.$$

Do đó $A'(-2x_1; -8x_1^3 + 6x_1 + 2)$.

Lại có: $-8x_1^3 + 6x_1 + 2 = -8(x_1^3 - 3x_1 + 2) - 18x_1 + 18 = -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18$

$= -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18 = -2x_1(4a+9) + 18 - 8b$.

Khi đó $y_{A'} = x_{A'}(4a+9) + 18 - 8b$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A', B', C' là $y = x(4a+9) + 18 - 8b$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho phương trình: $\sin^3 x + 2\sin x + 3 = (2\cos^3 x + m)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + (2\cos^3 x + m - 2) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy: (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2}$ (2).

Với $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ thì (2)$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2 \Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m$ (3).

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m$ (4).

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	↘	$\frac{80}{27}$	↗	3	↘	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{3; 2; 1; 0\}$ (Do m nguyên).

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 11x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x = 2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2,..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} M_{n-1} $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ của điểm M_n. Tìm n sao cho $11x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

A. $n = 675$. **B.** $n = 673$. **C.** $n = 674$. **D.** $n = 672$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 11$.

Lấy $M_0\left(x_0; x_0^3 - 11x_0\right) \in (C)$, phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $y = \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) + x_0^3 - 11x_0$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 11x = \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) + x_0^3 - 11x_0 \Leftrightarrow \left(x^3 - x_0^3\right) - 11(x - x_0) - \left(3x_0^2 - 11\right)(x - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x^2 + x_0 x - 2x_0^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = -2x_0 \end{array}\right.$.

Cho $M_0 \equiv M_1(x_1; y_1) \Rightarrow M_2\left(-2x_1; (-2x_1)^3 - 11(-2x_1)\right)$.

Bằng cách lập luận tương tự $M_n\left((-2)^{n-1} x_1; \left[(-2)^{n-1} x_1\right]^3 - 11\left((-2)^{n-1} x_1\right)\right)$.

$11x_n + y_n + 2^{2019} = 0 \Leftrightarrow 11\left((-2)^{n-1} x_1\right) + \left[(-2)^{n-1} x_1\right]^3 - 11\left((-2)^{n-1} x_1\right) + 2^{2019} = 0$

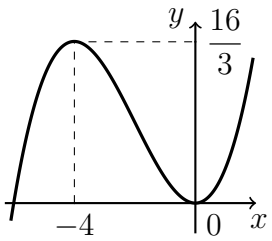
$\Leftrightarrow \left[(-2)^{n-1} x_1\right]^3 = -2^{2019}$.

Thay $x_1 = -2 \Rightarrow (-2)^{3n} = (-2)^{2019} \Leftrightarrow 3n = 2019 \Leftrightarrow n = 673$. Suy ra đáp án B.

Chọn đáp án B □

Câu 8.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $2\cos x - \sin x > -3 \Rightarrow 2\cos x - \sin x + 4 > 0$.

Đặt $\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Leftrightarrow (2t + 1)\cos x - (t + 3)\sin x = -4t - 1$.

Phương trình trên có nghiệm khi

$(2t + 1)^2 + (t + 3)^2 \geq (-4t - 1)^2 \Leftrightarrow 11t^2 - 2t - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{11} \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |t| \leq 1$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$, nên phương trình $f(x) = f(|t|)$ với $t \in [0; 1]$ có nghiệm duy nhất khi $x = |t| \Rightarrow x \geq 0$.

Do đó phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$ có nghiệm với $0 \leq |t| \leq 1$

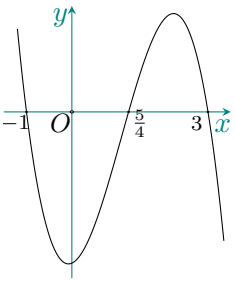
$\Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

Câu 9.

Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là



A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1).

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\dfrac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$. Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n=-\dfrac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f(x)=r\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0\Leftrightarrow m(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x)=0$

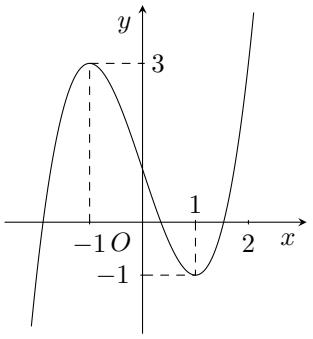
$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0\Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\dfrac{5}{3};0;3\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là



A. 7. **B**. 6. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $t=\pi^x,(t>0)$, khi đó: $f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m^2-1}{8}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow -1<\dfrac{m^2-1}{8}<1\Leftrightarrow -3<m<3.$

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B**. $(0;2)$. **C**. $(-\infty;-2)$. **D**. $(-2;0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2xf'\left(x^2-2\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-2 = -2 \\ x^2-2 = 0 \\ x^2-2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{array}\right..$$

Do các nghiệm của phương trình $y' = 0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3) = 6f'(7) < 0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho (P) là đường parabol đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = mx^4 - (m^2+1)x^2 + m^2 - m + 1$ và A, B là giao điểm của (P) với trục hoành. Khi $AB = 2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (4;6)$. **B.** $m \in (2;4)$. **C.** $m \in (-3;-1)$. **D.** $m \in (-1;2)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4mx^3 - 2(m^2+1)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2(m^2+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 - m^2 - 1 = 0 (*) \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số $y = mx^4 - (m^2+1)x^2 + m^2 - m + 1$ có ba điểm cực trị M, N, P thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow -2m(m^2+1) < 0 \Leftrightarrow m > 0$. $(**)$

Ta có ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = mx^4 - (m^2+1)x^2 + m^2 - m + 1$:

$M(0; m^2-m+1)$, $N\left(\sqrt{\dfrac{m^2+1}{2m}}; -\dfrac{(m^2+1)^2}{4m} + m^2 - m + 1\right)$,

$P\left(-\sqrt{\dfrac{m^2+1}{2m}}; -\dfrac{(m^2+1)^2}{4m} + m^2 - m + 1\right)$.

Parabol đi qua ba điểm M, N, P nên có đỉnh là $M(0; m^2-m+1) \Rightarrow (P): y = ax^2 + m^2 - m + 1$.

Vì $N \in (P) \Rightarrow -\dfrac{(m^2+1)^2}{4m} + m^2 - m + 1 = a \cdot \dfrac{m^2+1}{2m} + m^2 - m + 1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{m^2+1}{2}$.

$\Rightarrow (P): y = -\dfrac{m^2+1}{2}.x^2 + m^2 - m + 1$.

Vì (P) cắt Ox tại hai điểm A, B nên ta có x_A, x_B là hai nghiệm phân biệt của phương trình $-\dfrac{m^2+1}{2}.x^2 + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m^2+1)x^2 - 2(m^2-m+1) = 0$.

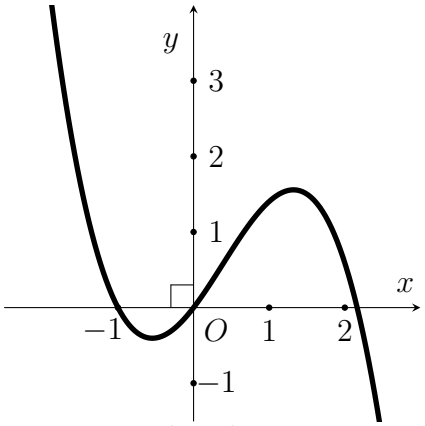
Ta có: $AB = 2 \Leftrightarrow |x_B - x_A| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_B+x_A)^2 - 4x_Ax_B} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{8(m^2-m+1)}{m^2+1}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2(m^2-m+1)}{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. (nhận)

Chọn đáp án D □

Câu 13.

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?



A. $a+c>0$. **B**. $a+b+c+d<0$. **C**. $a+c<b+d$. **D**. $b+d-c>0$.

Lời giải.

Phương pháp:

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Quan sát đồ thị và sử dụng công thức $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$ từ đó tìm ra mối quan hệ giữa các hệ số.

Cách giải:

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có $f'(0)=0\Rightarrow d=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty\Rightarrow a<0$

Ta xét $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-1}^{0}=e-(a-b+c-d+e)=-a+b-c+d,$

Mà $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x<0\Rightarrow -a+b-c+d<0\Leftrightarrow a+c>b+d.$

Nên $a+c<b+d$ sai.

Lại có $d=0\Rightarrow a+c>b\Leftrightarrow a>b-c$

Mà $a<0\Rightarrow b-c<0$

Do đó $d+d-c<0$ nên $b+d-c>0$ sai.

Lại xét $\int\limits_{0}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{0}^{1}=a+b+c+d+e-e=a+b+c+d$

Mà $\int\limits_{0}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x>0\Rightarrow a+b+c+d>0$ nên $a+b+c+d<0$ sai.

Theo trên ta có $\begin{cases}a+b+c+d>0\\-a+b-c+d<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-b-c-d<0\\-a+b-c+d<0\end{cases}\Rightarrow -2(a+c)<0\Leftrightarrow a+c>0$ nên $a+c>0$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) tại P và Q. Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng PQ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B**. $4\sqrt{2}$. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M\left(a; 2+\dfrac{1}{a-1}\right)$ thuộc đồ thị (C) (với $a \neq 1$).

$y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M có dạng

$$y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) + 2 + \frac{1}{a-1}.$$

Tiếp tuyến này cắt đường tiệm cận đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=2$ lần lượt tại $P\left(1; \dfrac{2a}{a-1}\right)$ và $Q\left(2a-1; 2\right)$.

Khi đó $PQ = \sqrt{(2a-2)^2 + \left(2-\dfrac{2a}{a-1}\right)^2} = 2\sqrt{(a-1)^2 + \dfrac{1}{(a-1)^2}} \geq 2\sqrt{2}$.

Dấu "= "xảy ra khi $(a-1)^2 = \dfrac{1}{(a-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=1 \\ a-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=0. \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ bằng $2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho Parabol $(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ và $(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ $(a>0)$. Gọi I_1, I_2 lần lượt là các đỉnh của (P_1), (P_2) và A, B là giao điểm của (P_1) với trục Ox. Biết rằng bốn điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P)\colon y = h(x) = f(x) + g(x)$.

A. $S=6$. **B.** $S=4$. **C.** $S=9$. **D.** $S=7$.

Lời giải.

$(P_1)\colon y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$ có đỉnh $I_1(2;-1)$.

$(P_2)\colon y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ $(a>0)$ có đỉnh $I_2(2; b-4a)$.

$(P)\colon y = h(x) = f(x) + g(x) = \left(\dfrac{1}{4}+a\right)x^2 - (1+4a)x + b$ có đỉnh $I(2; b-4a-1)$.

Suy ra I_1, I_2, I cùng nằm trên đường thẳng $x=2$.

Mà giao điểm của (P_1) và Ox là $A(4;0)$ và $B(0;0)$

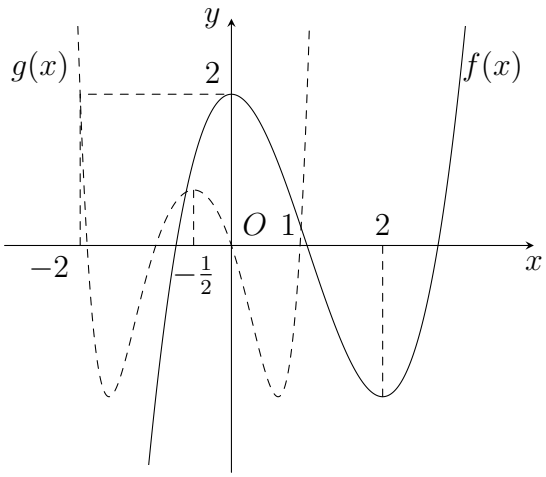
Suy ra tứ giác lồi AI_1BI_2 có hai đường chéo vuông góc và $b-4a>0$

$S_{AI_1BI_2} = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot I_1I_2 \Leftrightarrow 10 = \dfrac{1}{2}4\cdot|b-4a+1| = 10 \Leftrightarrow b-4a+1=5 \Leftrightarrow b-4a=4$.

Tam giác IAB có diện tích là $S = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot \mathrm{d}(I, Ox) = \dfrac{1}{2}\cdot 4|b-4a-1| = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x) = f(mx^2+nx+p)$ $(m,n,p \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình dưới (Đường nét liền là đồ thị hàm số $f(x)$, nét đứt là đồ thị của hàm $g(x)$, đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g(x)$).



Giá trị của biểu thức $P=(n+m)(m+p)(p+2n)$ bằng bao nhiêu?

A. 12. **B**. 16. **C**. 24. **D**. .

Lời giải.

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=0$; $x=2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$, $(0;2)$ nên

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \\ f(1)=0 \\ f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2.$$

Ta có $g(x)=(mx^2+nx+p)^3-3(\mathrm{mx}^2+nx+p)^2+2$. Hệ số tự do bằng p^3-3p^2+2.

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(0;0)$ nên $p^3-3p^2=2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=1 \\ p=1-\sqrt{3} \\ p=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vì $p\in\mathbb{Q}$ nên $p=1$.

Đồ thị hàm số $g(x)=f(mx^2+nx+p)$ có trục đối xứng là $x=-\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số $y=mx^2+nx+p$ cũng có trục đối xứng là $x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{n}{2m}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow m=n$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ qua điểm $(-2;2)$ nên $g(-2)=0 \Rightarrow g(x)=(2m+1)^3-3(2m+1)^2+2=2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=n=1 \\ m=n=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Do đồ thị có hướng quay lên trên, suy ra $m>0 \Rightarrow m=n=p=1$.

$\Rightarrow P=(n+m)(m+p)(p+2n)=12$.

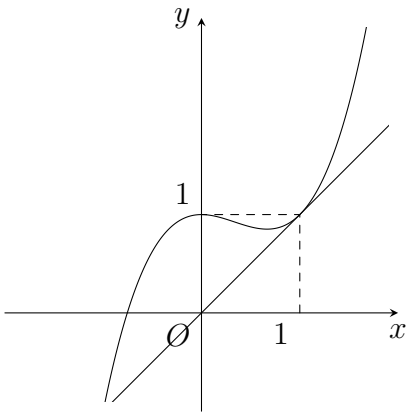
Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $y=x^3-x^2-mx+1$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để (C) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

A. $m<0$. **B**. $m>1$. **C**. $m\le 1$. **D**. $m\ge 0$.

Lời giải.

Cách 1:



Để (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt thì p.trình $x^3-x^2-mx+1=0$ có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình $x^3-x^2+1=mx$ có ba nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với đường thẳng $y=mx$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ tại ba điểm phân biệt.

Đường thẳng $y=mx$ đi qua gốc tọa độ.

Đường thẳng $y=x$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ (như hình minh họa bên).

Do đó với $m>1$ thì đường thẳng $y=mx$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ tại ba điểm phân biệt

Cách 2:

Để (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^3-x^2-mx+1=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Dễ thấy $x=0$ không thể là nghiệm nên $x^3-x^2-mx+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^3-x^2+1}{x}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^3-x^2+1}{x}$ trên tập $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\|$ $-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $m=\dfrac{x^3-x^2+1}{x}$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$, có đồ thị (C) và điểm $M\in(C)$ có hoành độ $x_M=a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$, ta có: $y'=2x^3-6x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y=(2a^3-6a)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}$ (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$\begin{aligned}
&(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}=\frac{x^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\\
\Leftrightarrow\ &(x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-6\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-6\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=a\\ x^2+2ax+3a^2-6=0\ (2).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 6 - 2a^2 > 0 \\ a^2 + 2a^2 + 3a^3 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$

Mà a nguyên nên $a = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 > x_2 > x_3 > 0$ và trung điểm nối hai điểm cực trị của (C) có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$. Biết rằng $(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$. Hãy xác định tổng $S = x_1 + x_2^2 + x_3^2$.

A. $\dfrac{137}{216}$. **B.** $\dfrac{45}{157}$. **C.** $\dfrac{133}{216}$. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do đồ thị (C)có hai điểm cực trị nên ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay là phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_i, x_j và hai nghiệm này cũng chính là hoành độ của hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Theo vi-ét ta có $x_i + x_j = -\dfrac{2b}{3a}$.

Suy ra hoành độ giao điểm nối hai điểm cực trị là

$x_0 = \dfrac{x_i + x_j}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{2b}{3a} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow b = -a.$

Mặt khác, do giả thiết ta có phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 nên theo vi-ét ta có

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{a} = 1.$

Ta có:

$$\begin{aligned} & (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ \Leftrightarrow\ & 9x_1^2 + 16x_2^2 + 25x_3^2 = 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{20}{3}x_1^2 + \frac{40}{3}x_2^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \frac{7}{3}x_1^2 + 21x_3^2 = 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

- ☑ $\dfrac{5}{3}\,(4x_1^2 + 9x_2^2) \geq \dfrac{5}{3} \cdot 2\sqrt{4x_1^1 \cdot 9x_2^2} = 20x_1x_2$ (1) .
- ☑ $x_2^2 + 4x_3^2 \geq 2\sqrt{x_2^2 \cdot 4x_3^2} = 4x_1x_2$ (2).
- ☑ $\dfrac{7}{12}\,(4x_1^2 + 36x_3^2) \geq \dfrac{7}{12} \cdot 2\sqrt{4x_1^2 \cdot 36x_3^2} = 14x_3x_1$ (3) .

Lấy (1) + (2) + (3) vế theo vế ta có: $9x_1^2 + 16x_2^2 + 25x_3^2 \geq 20x_1x_2 + 4x_2x_3 + 14x_3x_1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 4x_1^2 = 9x_2^2 \\ x_2^2 = 4x_3^2 \\ 4x_1^2 = 36x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}x_2 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases}.$

Vậy $S = x_1 + x_2^2 + x_3^2 = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{133}{216}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2019	↘	-2019	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x-2018)+2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f(x-2018)+2019$.

$g'(x)=(x-2018)'f'(x-2018)=f'(x-2018)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2018=-1 \\ x-2018=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2017 \\ x=2021. \end{array}\right.$

Ta có $g(2017)=f(2017-2018)+2019=4038$; $g(2021)=f(2021-2018)+2019=0$;

Bảng biến thiên hàm $g(x)$

x	$-\infty$		2017		2021		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4038	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó bảng biến thiên $|g(x)|$ là:

x	$-\infty$		x_0		2017		2021		$+\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	4038	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=|f(x-2018)+2019|$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y=x^4+ax^3+bx^2+cx+4$ có đồ thị (C). Biết (C) cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=20a^2+20b^2+5c^2$.

A. 32. **B**. 64. **C**. 16. **D**. 8.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+4=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx=-x^4-4. \quad (1)$$

Nhận thấy $x=0$ không phải nghiệm của (1).

Do đó theo giả thiết $\exists x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho $ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-4$.

Bình phương hai vế ta có

$$x_0^2\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\left(x_0^2+4\right)^2 \Leftrightarrow \left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2}.$$

Theo bất đẳng thức Buniakovsky, ta có

$$\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2 \le \left(20a^2+20b^2+5c^2\right)\left(\frac{x_0^4}{20}+\frac{x_0^2}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{T}{20}\left(x_0^4+x_0^2+4\right).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{T}{20}\ge\frac{\left(ax_0^2+bx_0+c\right)^2}{x_0^4+x_0^2+4}=\frac{\left(x_0^2+4\right)^2}{x_0^2\left(x_0^4+x_0^2+4\right)}.$$

Đặt $x_0^2=t>0$, ta có $\dfrac{T}{20}\ge\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3+t^2+4t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{4t\left(t^2+4\right)\left(t^3+t^2+4t\right)-\left(t^2+4\right)^2\left(3t^2+2t+4\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}=\dfrac{\left(t^2+4\right)\left(t+2\right)\left(t^3-8\right)}{\left(t^3+t^2+4t\right)^2}$.

Vì $t>0$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$, ta có bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{64}{20}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f(2)=\dfrac{64}{20}$. Suy ra $\dfrac{T}{20}\ge\dfrac{64}{20}\Leftrightarrow T\ge 64$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_0^2=2 \\ ax_0^3+bx_0^2+cx_0=-x_0^4-4 \\ \dfrac{20a}{x_0^2}=\dfrac{20b}{x_0}=5c \end{cases}$. (2)

<u>TH1</u>: $x_0=\sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a\sqrt{2}+2b+\sqrt{2}c=-8 \\ a=\sqrt{2}b \\ c=2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b=-\dfrac{4}{5} \\ c=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T=64$ (TM).

<u>TH2</u>: $x_0=-\sqrt{2}$, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2a\sqrt{2}+2b-\sqrt{2}c=-8 \\ a=-\sqrt{2}b \\ c=-2\sqrt{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \\ b=-\dfrac{4}{5} \\ c=\dfrac{8\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow T=64$ (TM).

Vậy T có giá trị nhỏ nhất bằng 64.

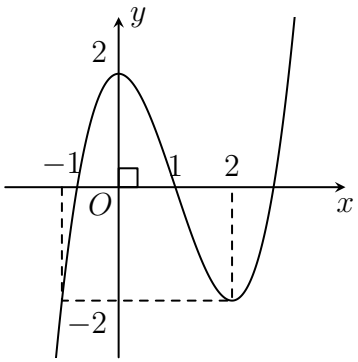
Nhận xét: Dây là một bài toán phức tạp, không phù hợp là một bài tập trắc nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ là

A. $[-2; 2]$. **B**. $(0; 2)$. **C**. $(-2; 2)$. **D**. $[0; 2)$.



Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, phương trình trở thành $f(t) = m$. (1)

Với $x \in \left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1)$.

Nếu $t = -1$ hoặc $t \in (0; 1)$ thì ứng với một giá trị của x; nếu $t \in (-1; 0]$ thì ứng với 2 giá trị của x.

Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 1)$, ta thấy:

+) $m = -2$ thì (1) có 1 nghiệm $t = -1$ nên phương trình đã cho có 1 nghiệm;

+) $-2 < m \leq 0$ thì (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm;

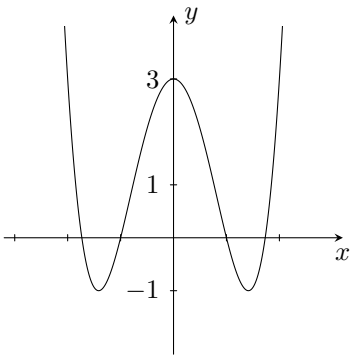
+) $0 < m < 2$ thì (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$ và 1 nghiệm $t \in (0; 1)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm;

+) $m = 2$ thì (1) có 1 nghiệm $t = 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; 2)$.

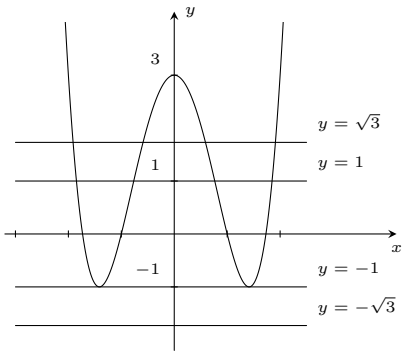
Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $(x^4 - 4x^2 + 3)^4 - 4(x^4 - 4x^2 + 3)^2 + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?



A. 9. **B**. 10. **C**. 8. **D**. 4.

Lời giải.



Quan sát đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, ta thấy

$$\left(x^4 - 4x^2 + 3\right)^4 - 4\left(x^4 - 4x^2 + 3\right)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^4 - 4x^2 + 3 = 1 & (1) \\ x^4 - 4x^2 + 3 = \sqrt{3} & (2) \\ x^4 - 4x^2 + 3 = -1 & (3) \\ x^4 - 4x^2 + 3 = -\sqrt{3}. & (4) \end{bmatrix}$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.
Phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.
Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt.
Phương trình (4) vô nghiệm.
Dễ dàng chỉ ra rằng 10 nghiệm của cả 4 phương trình trên là phân biệt.
Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $3 \le m < 1$. **B.** $-2 < m \le \dfrac{1}{3}$. **C.** $-1 \le m \le \dfrac{1}{4}$. **D.** $0 \le m < \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện phương trình đã cho là $x \ge 1$.
Ta có

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}}$, vì $x \ge 1$ nên $0 \le t < 1$. Phương trình (1) trở thành

$$-3t^2 + 2t = m. \quad (2)$$

Với mỗi giá trị t thuộc $[0;1)$ ta chỉ tìm một giá trị x thuộc $[1;+\infty)$ thỏa $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t thuộc $[0;1)$.
Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$. Ta có $f'(t) = -6t + 2$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$. Ta xét bảng biến thiên sau

t	0		$\dfrac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\dfrac{1}{3}$	↘	-1

Dựa vào bảng biến thiên trên, giá trị m thỏa đề bài là $0 \le m < \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ (M,N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 5(x_1 - x_2)$?

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = x^3 - 6x$.

☑ Gọi $A\left(x_0; \dfrac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến tại A. Phương trình tiếp tuyến tại A là đường thẳng (d) có phương trình $y = (x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \dfrac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2$.

☑ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là

$$(x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2 = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2\left(x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 12\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ x^2 + 2x_0x + 3x_0 - 12 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

☑ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác A khi và chỉ chi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \ne \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < x_0 < \sqrt{6} \end{array}\right.$ (3).

☑ Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ trong đó

- $y_1 = (x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_0) + \dfrac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2$ và $y_2 = (x_0^3 - 6x_0)(x_2 - x_0) + \dfrac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2$.
- Suy ra $y_1 - y_2 = (x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_2)$.

- Từ giả thiết ta có $\left(x_0^3-6x_0\right)\left(x_1-x_2\right)=5\left(x_1-x_2\right)\Leftrightarrow x_0^3-6x_0=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x_0=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

  (vì $x_1\neq x_2$).

☑ Kết hợp với điều kiện (3) có hai giá trị x_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x\forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$.

A. $\dfrac{268}{15}$. **B.** $\dfrac{160}{15}$. **C.** $\dfrac{268}{30}$. **D.** $\dfrac{4}{15}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Dựa vào phương trình đã cho của bài toán ta có thể thấy: $VT=[f(x).f'(x)]'$.

+) Lấy nguyên hàm hai vế và dựa vào giả thiết bài toán để làm tiếp.

Cách giải:

Ta có: $VT=[f(x).f'(x)]'=f'(x).f'(x)+f(x).f''(x)=[f'(x)]^2+f(x).f''(x)\Rightarrow[f'(x).f(x)]'=x^3-2x(*)$.

Nguyên hàm hai vế của (*) ta được: $f'(x).f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^2+C(1)$.

Lại có: $f'(0)=f(0)=2\Rightarrow C=2.2=4$

$(1)\Rightarrow f(x).f'(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^2+4$

$\Rightarrow\displaystyle\int f(x)\cdot f'(x)dx=\int\left(\frac{x^4}{4}-x^2+4\right)dx$

$\Leftrightarrow\displaystyle\int f(x)df(x)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{3}+4x+A$

$\Leftrightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{3}+4x+A\Leftrightarrow f^2(x)=\dfrac{x^5}{10}-\dfrac{2x^3}{3}+8x+2A$

Có $f(0)=2\Rightarrow 4=2A\Leftrightarrow A=2$

$\Rightarrow f^2(x)=\dfrac{x^5}{10}-\dfrac{2x^3}{3}+8x+4$

$\Rightarrow f^2(2)=\dfrac{2^5}{10}-\dfrac{2.2^3}{3}+8.2+4=\dfrac{268}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tập tất cả các giá trị của m phương trình $2x\sqrt{1-x^2}-m\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+m+1=0$ không có nghiệm thực là tập $(a;b)$. Khi đó

A. $a-b=2+2\sqrt{2}$. **B.** $a-b=-2-2\sqrt{2}$. **C.** $a-b=\sqrt{2}$. **D.** $a-b=-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $-1 \le x \le 1$.

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2}$ với $-1 \le x \le 1$. Khi đó $t' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ và $t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lại có $t(-1) = -1$, $t(1) = 1$ và $t\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$. Do đó $t \in \left[-1; \sqrt{2}\right]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 1 - mt + m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + m = 0$.

Vì $t = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $t^2 - mt + m = 0$ nên $m = \dfrac{t^2}{t-1}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ với $t \in \left[-1; \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$, ta có

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{(t-1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ với $t \in \left[-1; \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ như sau

t	-1		0		1		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}+2$
					$-\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tập tất cả giá trị m cần tìm là $m \in \left(0; 2+2\sqrt{2}\right)$.

Do đó $a = 0$, $b = 2 + 2\sqrt{2}$ nên $a - b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C, D là bốn điểm trên đồ thị (C) với hoành độ lần lượt là a, b, c, d sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi đồng thời hai tiếp tuyến tại A, C song song với nhau và đường thẳng AC tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tính tích $abcd$.

A. 144. **B**. 60. **C**. 180. **D**. 120.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$, $y'' = -6x + 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 11$. Vậy điểm uốn của đồ thị là $I(1; 11)$. Đây cũng chính là điểm đối xứng của đồ thị hàm bậc ba.

Vì tiếp tuyến tại A và C song song với nhau nên

$$y'(a) = y'(c) \Leftrightarrow -3a^2 + 6a + 9 = -3c^2 + 6c + 9 \Leftrightarrow 3(a-c)(a+b-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - c = 0 \text{ (loại)} \\ a + c = 2. \end{array}\right.$$

Suy ra $x_A + x_C = 2x_I$. Lại có

$$\begin{aligned} y_A + y_C &= -(a^3 + c^3) + 3(a^2 + c^2) + 9(a + c) \\ &= -(a+c)(a^2 + c^2 - ac) + 3(a^2 + c^2) + 18 \\ &= a^2 + c^2 + 2ac + 18 = (a+c)^2 + 18 = 22 = 2y_I. \end{aligned}$$

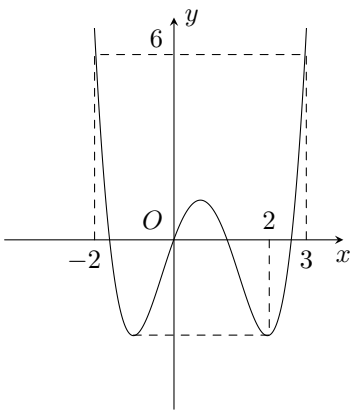
Suy ra I là trung điểm của AC. Một đường thẳng đi qua I, vuông góc với AC cắt (C) tại B, D thì theo tính chất đối xứng của đồ thị ta có $IB = ID \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.
Theo đầu bài thì AC tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân nên hệ số góc của đường thẳng AC bằng 1 hoặc -1. Vì $BD \perp AC \Rightarrow k_{BD}$ bằng -1 hoặc 1. Ta có

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{(a^3 - c^3) - 3(a^2 - c^2) - 9(a - c)}{c - a}$$
$$= a^2 + c^2 + ac - 15 = (a + c)^2 - ac - 15 = -11 - ac \Rightarrow ac = -11 - k_{AC}.$$

Tương tự $bd = -11 - k_{BD}$. Suy ra $abcd = (-11 - k_{AC})(-11 - k_{BD}) = (-10)(-12) = 120$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x, x \in [-1; 2]$.
$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -1 \end{bmatrix}$.
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$.

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.
$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.
Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0, m = -1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có

A. $m \in (1; 2)$. **B.** $m \in (-2; -1)$. **C.** $m \in (0; 1)$. **D.** $m \in (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 2m^2 - 2m + 1}{(x-1)^2} = 1 - \dfrac{2m^2 + 2m}{(x-1)^2}$.

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1;\, 1) \setminus \{0\} \qquad (*).$$

Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của (1) . Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -2m$ và $x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 1$.
Theo giả thiết, ta có

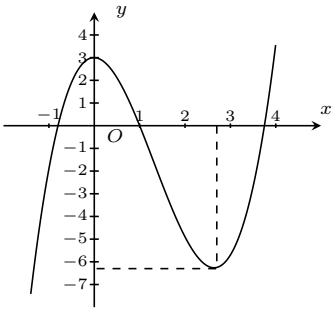
$$\begin{aligned} y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 &\Leftrightarrow \left[1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x_1 - 1)^2}\right] \cdot \left[1 - \frac{2m^2 + 2m}{(x_2 - 1)^2}\right] = -1 \\ &\Leftrightarrow 1 - \left(2m^2 + 2m\right) \left[\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2}{[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]^2}\right] \\ &\quad + \left(2m^2 + 2m\right)^2 \cdot \frac{1}{[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]^2} = -1 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{4m + 4}{2m^2 + 2m} + 1 = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2(m+1)}{m(m+1)} + 1 = -1 \\ &\Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 31.

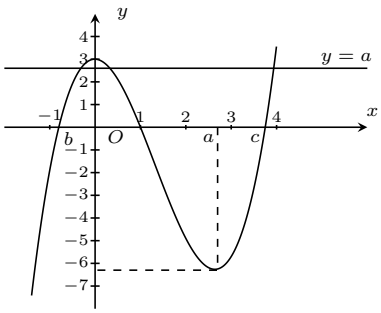
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

A. 8. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 2.



Lời giải.

Ký hiệu a, b, c như hình vẽ.



Ta có $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, từ đó suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'[f(x)] = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$ và $x_2 = a \in (2;3)$, (a là hoành độ của điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$).

$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \end{array}\right.$.

Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_3; x_4; x_5\} = \{b, 1; c\}$, ($b < 1 < c$ là hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành).

Phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $\{x_6; x_7; x_8\}$, ở đó $x_6; x_7; x_8$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = a$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

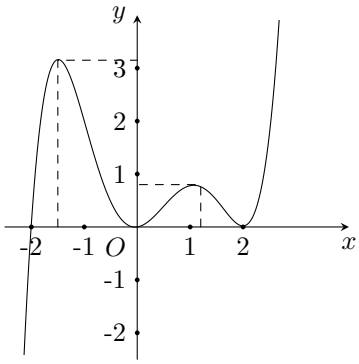
Dễ thấy các nghiệm x_i, $i = \overline{1;8}$ đôi một phân biệt. Từ đó suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 14. **B**. 10. **C**. 12. **D**. 8.



Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

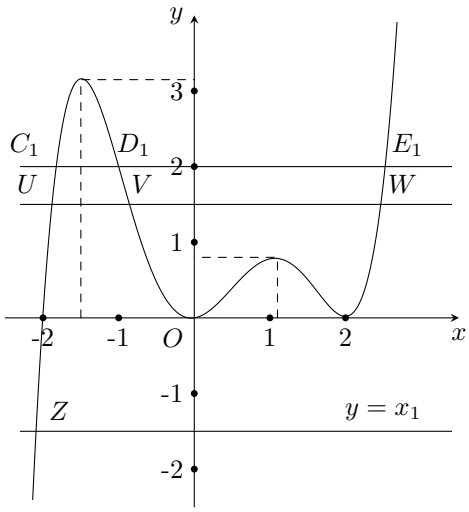
Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'[f(x)].f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'[f(x)] = 0 \ (2). \end{array}\right.$

Từ đồ thị có thể thấy:

(1) có các nghiệm nghiệm:

$x = x_1 \in (-2;-1), x = 0, x = x_2 \in (1;2), x = 2$.

Xét phương trình (2) ta có: $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$



Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -2, x = 0, x = 2$ (trùng mất hai nghiệm với (1)).

Dựng các đường thẳng $y = 2, y = x_1 \in (-2;-1), y = x_2 \in (1;2)$ ta thấy:

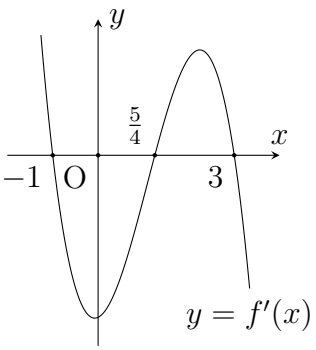
- ☑ $f(x) = 2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 tương ứng là hoành độ các điểm C_1, D_1, E_1 (xem hình)
- ☑ $f(x) = x_1$ có nghiệm duy nhất x_6 ứng với hoành độ điểm Z (Xem hình).
- ☑ $f(x) = x_2$ có 3 nghiệm x_7, x_8, x_9 tương ứng là hoành độ các điểm U, V, W (Xem hình).

Từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $-2, 0, 2, x_1, x_2, \cdots, x_9$ hoàn toàn phân biệt nên phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 12 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ $(m, n, p, q, r \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1).

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$ hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n = -\frac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) = r &\Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -\frac{5}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\frac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 < x_3$ khi

A. $m > 3$. **B**. $3 < m < 5$. **C**. $3 < m < 6$. **D**. $m < 5$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1; 5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ và (C). Tính diện tích tam giác OAB.

A. 12. **B**. 15. **C**. 24. **D**. 6.

Lời giải.

Với $y = x^3 + 3x^2 + 1$, ta có $y' = 3x^2 + 6x$, $y'(1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến Δ: $y - 5 = 9(x-1) \Leftrightarrow y = 9x - 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 3x^2 + 1 = 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \Rightarrow y = -49 \Rightarrow B(-5; -49) \\ x = 1 \end{array}\right.$$

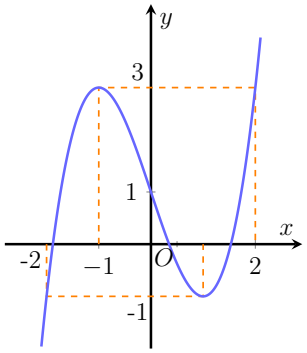
Ta có: $OA = \sqrt{26}$, $OB = \sqrt{2426}$, $AB = 6\sqrt{82}$.

Theo công thức Hê-rông, ta có $S_{\triangle OAB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 36.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2-1$. **B**. $y=x^3-3x+1$.

C. $y=x^3-3x-1$. **D**. $y=-x^3+3x^2+1$.

Câu 37. Cho hàm số xác định, liên tục trên R và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

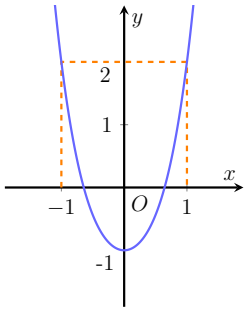
B. Hàm số có đúng một cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Câu 38.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2-1$. **B**. $y=x^4+2x^2-1$.

C. $y=x^2-1$. **D**. $y=x^4-2x^2-1$.

Câu 39. Cho phương trình $|x|\left(x^2-3\right)-m=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm?

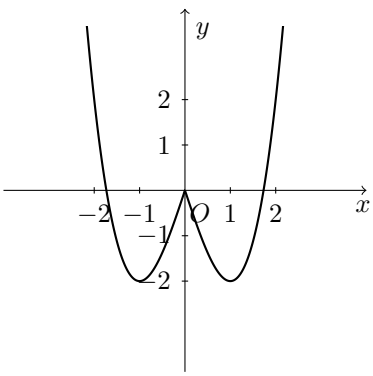
A. 5. **B**. 11. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=|x|\left(x^2-3\right)$ và $y=m$.

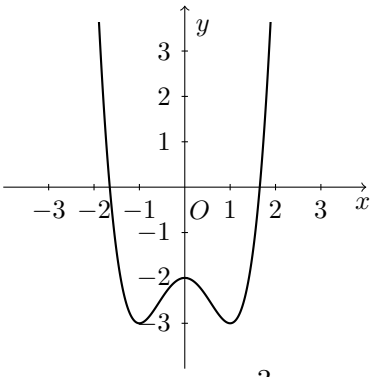
Dựa vào đồ thị, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m=-2$ hoặc $m>0$.

Trên đoạn $[-5;5]$ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi $m\in\{-2;1;2;3;4;5\}$ tức là có 6 giá trị của m.



Chọn đáp án C ☐

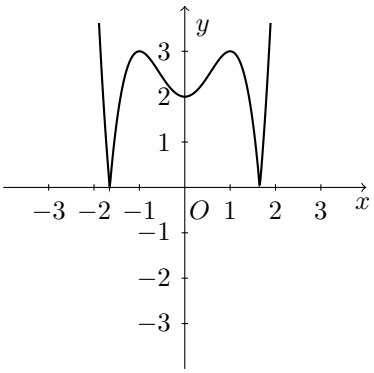
Câu 40.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất.



A. $3 < m < 4$. **B.** $3 \le m \le 4$. **C.** $1 < m < \dfrac{3}{2}$. **D.** $1 \le m \le \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ lại phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox.
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $|f(x)| - 2m = 0$ có số nghiệm nhiều nhất khi $2 < 2m < 3$ hay $1 < m < \dfrac{3}{2}$.



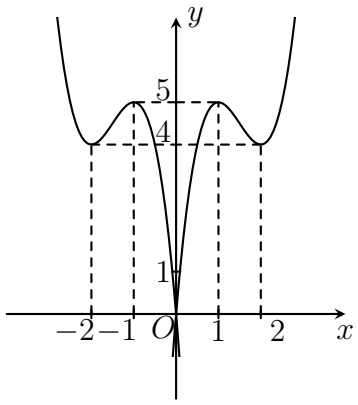
Chọn đáp án C ☐

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt.

A. $4 < m < 5$. **B.** $m \le 4$. **C.** $m \ge 5$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ta suy ra đồ thị hàm số $(C) : y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ như hình vẽ.
Dựa vào đồ thị (C), đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $4 < m < 5$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 42. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ (1). Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A và B phân biệt sao cho tma giác OAB vuông tại O.

A. $m = -\dfrac{4}{3}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = \dfrac{4}{3}$. **D.** $m = -2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (1) và đường thẳng $y = x + m$ là $\dfrac{2x-2}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + 2 + m = 0 \quad (2) \end{cases}$.

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(2+m) > 0 \\ 1 + 1 - m + m + 2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 7 \end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ điểm A và B là $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, trong đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (2) và $x_1 + x_2 = 1 - m$, $x_1 x_2 = m + 2$.

$\overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m); \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$. Tam giác OAB vuông tại O suy ra $\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} = 0$.

$x_1 x_2 + x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2(m+2) + m(1-m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

A. $m \in \left(\dfrac{1}{4}; 0\right)$. **B.** $m \in (0; 1)$.

C. $m \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left(x^2 - x - m\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \quad (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

Kí hiệu $g(x) = x^2 - x - m$, $x_1 = 1$, x_2 và x_3 là các nghiệm của (2).

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_2^2 + x_3^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $\Delta : y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1; 3)$.

A. $m = 2$ hoặc $m = 3$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = 3$. **D.** $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x^2+2mx+m+2=0}.$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2+2mx+m+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow \heva{\Delta'=m^2-m-2>0\\m+2\neq 0} \Leftrightarrow \heva{m>2,\ m<-1\\m\neq -2}.$

Gọi hoành độ giao điểm của B,C là b,c. Ta có $B(b;b+4), C(c;c+4)$ và $c+b=-2m, bc=m+2$.

$$BC=\sqrt{(c-b)^2+(c+4-b-4)^2}=\sqrt{2\left[(c+b)^2-4bc\right]}=2\sqrt{2(m^2-m-2)}.$$

Đường thẳng $\Delta: x-y+4=0$. Khoảng cách $d(M,BC)=d(M,\Delta)=\sqrt{2}$.

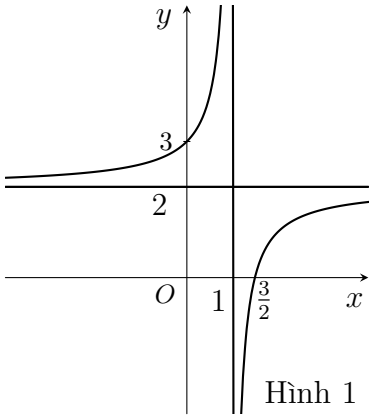
Diện tích tam giác MBC bằng 4 nên

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2(m^2-m-2)}\cdot\sqrt{2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-m-2}=2 \Leftrightarrow m=3 \vee m=-2.$$

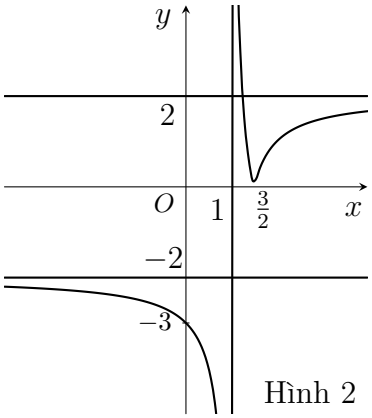
$m=-2$ không thõa mãn điều kiện. Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm

Chọn đáp án C □

Câu 45. Hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đường cong trong hình 2 là đồ thị của hàm số nào?



Hình 1



Hình 2

A. $y=\dfrac{2x-3}{|x-1|}$. **B.** $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|$. **C.** $y=\dfrac{|2x-3|}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2|x|-3}{|x|-1}$.

Lời giải.

Ta thấy ĐTHS giữ nguyên khi $x>\dfrac{3}{2}$ và đối xứng qua Ox khi $x<\dfrac{3}{2}$. Do đó hình 2 là đồ thị của $y=\dfrac{|2x-3|}{x-1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có điểm cực đại là $A(-2;2)$, điểm cực tiểu là $B(0;-2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m>2$. **B.** $m<-2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $\hoac{m=2\\m=-2}$.

Lời giải.

Do điểm A là điểm cực đại và B là điểm cực tiểu nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=m$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CT}<m<y_{CD} \Leftrightarrow -2<m<2$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(-1;0), B, C$ sao cho $\triangle OBC$ có diện tích bằng 8 (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. m là số nguyên tố. **B.** m là số chẵn.

C. m là số vô tỉ. **D.** m là số chia hết cho 3.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+4=mx+m \Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+4-m=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(x^2-4x+4-m)=0$

Để (C) cắt $y=mx+m$ cắt tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2-4x+4-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4-(4-m)>0\\ 9-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 9\\ m>0\end{cases}$

Khi đó, tọa độ ba giao điểm là $A(-1;0); B(x_1;mx+m); C(x_2;mx+m)$

Diện tích tam giác OBC: $S=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot d(O,d)=\dfrac{1}{2}\cdot 2|m|\cdot\sqrt{m}=8\Leftrightarrow m=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hàm số $g(x)=x^2+1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$. Tìm m để phương trình $f(g(x))-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-3<m<-1$. **B.** $-3<m\leq -1$. **C.** $-3\leq m\leq -1$. **D.** $m>-1$.

Lời giải.

Ta có: $f(g(x))=(x^2+1)^3-3\cdot(x^2+1)^2+1$ có

$y'=6x(x^2+1)^2-12x(x^2+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-1\end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên sau:

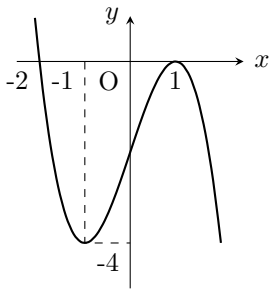
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	-1	↘	-3	↗	$+\infty$

Như vậy, phương trình $f(g(x))-m=0\Leftrightarrow f(g(x))=m$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-3<m<-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^3+3x-2$ như hình vẽ. Phương trình $|x+2|(x-1)^2=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:



A. $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m=4\end{array}\right.$. **B.** $0\leq m\leq 4$.

C. $\left[\begin{array}{l}m>4\\ m=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-4\end{array}\right.$.

Lời giải.

Xét $g(x) = |x+2|(x-1)^2$.

$\Rightarrow g(x) = |f(x)|$.

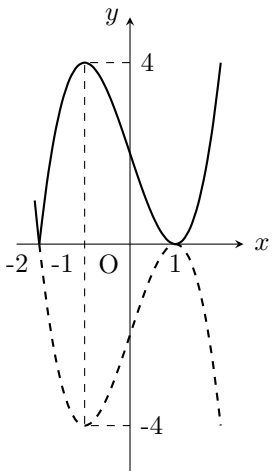
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ đã cho

ta thu được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ bên.

Phương trình $|x+2|(x-1)^2 = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng 2 điểm phân biệt.

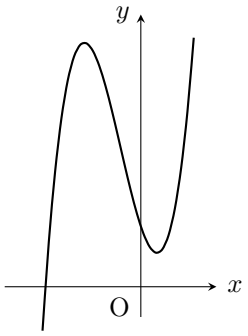
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 50.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.

B. $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$.

C. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$.

D. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

Lời giải.

Dễ dàng thấy $a > 0$

Vì đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$

Vì đồ thị có cực trị ở hai phía bờ Oy nên phương trình đạo hàm $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu, hơn nữa tổng hai nghiệm < 0. Áp dụng định lí Vi-et ta suy ra được $c < 0, b > 0$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 51. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2;5)$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

A. $S_{OMN} = \dfrac{81}{4}$.

B. $S_{OMN} = \dfrac{81}{2}$.

C. $S_{OMN} = 9$.

D. $S_{OMN} = 81$.

Lời giải.

Tiếp tuyến tại $A(2;5)$ là $d : y = -2x + 9 \Rightarrow \begin{cases} d \cap Ox = M\left(\dfrac{9}{2}; 0\right) \\ d \cap Oy = N(0;9) \end{cases} \Rightarrow S_{OMN} = \dfrac{1}{2} OM.ON = \dfrac{81}{4}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 52. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt cách đều nhau khi

A. $m = \pm\dfrac{4}{9}$.

B. $m = \dfrac{4}{9}$ hoặc $m = -4$.

C. $m = -\dfrac{4}{9}$ hoặc $m = 4$.

D. $m = \pm 4$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}(C)$ và đường thẳng $d: y=x+m$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) nằm trên đường tròn $x^2+y^2-3y=4$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\dfrac{2}{15} \end{array}\right.$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+1}{x-2}=x+m \Leftrightarrow x^2+(m-3)x-2m-1=0$ (*).

Để d cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ m^2+2m+13>0 \end{cases}$ (luôn đúng)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3-m \\ x_1x_2=-2m-1 \end{cases}$.

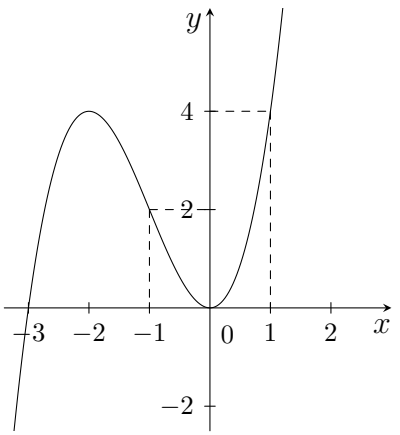
Tọa độ hai giao điểm $A(x_1;x_1+m)$ và $B(x_2;x_2+m) \Rightarrow$ tọa độ trọng tâm $G\left(\dfrac{3-m}{3};\dfrac{3+m}{3}\right)$. Vì G nằm trên đường tròn $x^2+y^2-3y=4$ nên

$$\left(\frac{3-m}{3}\right)^2+\left(\frac{3+m}{3}\right)^2-(3+m)=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 54.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=x^3+3x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{m-x^3}$ có hai nghiệm thực phân biệt.



A. $m\geq 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **D.** $-1\leq m\leq 1$.

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{3x^2-3}=\sqrt{m-x^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ 3x^2-3=m-x^3 \end{cases}$

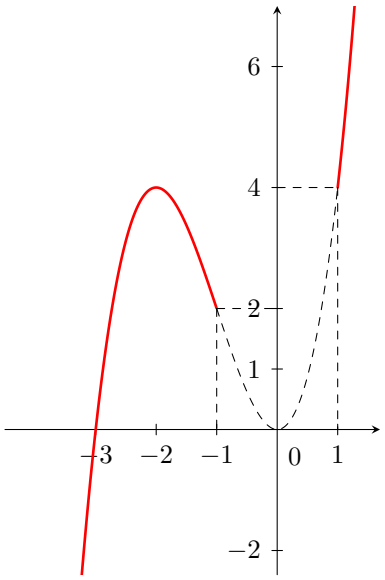
$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \\ x^3+3x^2=m+3 \end{cases}$

Từ đó ta xét hàm số $y=x^3+3x^2$ trên $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Đồ thị của nó chính là phần MÀU ĐỎ.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $d: y=m+3$ cắt đồ thị "MÀU ĐỎ" tại 2 điểm phân biệt.

Suy ra: $2 \leq m+3 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

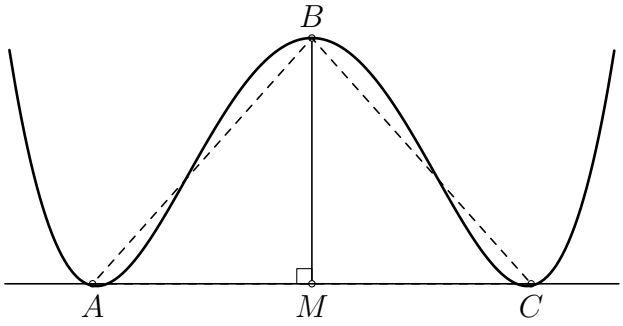


Chọn đáp án D □

Câu 55. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+3m^4+2017$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng 32?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 3$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải.



Ta có: $y'=4x^3-4m^2x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2. \end{array}\right.$

Để hàm số có ba cực trị thì $m \neq 0$. Đặt $A(-m;2m^4+2017), B(0;3m^4+2017), C(m;2m^4+2017)$.

AC có phương trình $y=2m^4+2017$ và $AC=|2m|$; $d(B,AC)=|3m^4+2017-2m^4+2017|=m^4$.

Theo đề bài, $S_{ABC}=32 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot BM\cdot AC=32 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot m^4\cdot|2m|=32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^5=32 \\ m^5=-32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 56. Biết đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-(m+3)x+m-1$ tại đúng hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích S của tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

A. $S=\dfrac{3}{2}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\dfrac{5}{2}$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3+2x^2-(m+3)x+m-1=-1 \Leftrightarrow x^3+2x^2-(m+3)x+m=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \\ x^2+3x-m=0\ (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại đúng hai điểm phân biệt A, B khi $(*)$ có nghiệm kép khác 1 hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1, từ đó tìm được $m=4$ hoặc $m=-\dfrac{9}{4}$

Với $m=4$ ta có $A(1;-1), B(-4;-1)$ nên $S_{\triangle OAB}=\dfrac{5}{2}$

Với $m=-\dfrac{9}{4}$ ta có $A(1;-1), B\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$ nên $S_{\triangle OAB}=\dfrac{5}{4}$

P/s: Bài toán này nên cho điều kiện về diện tích $S_{\triangle OAB}$ để loại $m=-\dfrac{9}{4}$

Chọn đáp án C □

Câu 57. Biết mọi giá trị của tham số m đồ thị hàm số $y=x^4-(2m+2)x^2+2m+1$ luôn đi qua điểm K cố định. Tọa độ điểm K là

A. $(-1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;9)$. **D.** $(1;0)$.

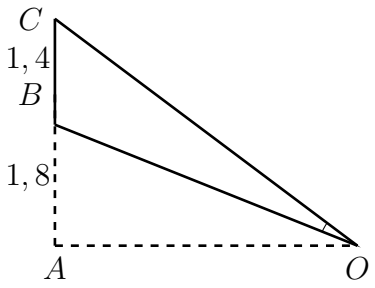
Lời giải.

Nhận xét: phương trình $x^4-(2m+2)x^2+2m+1=0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m có tổng hệ số $a+b+c=1-(2m+2)+2m+1=0$.

Suy ra $\forall m$ phương trình $y=x^4-(2m+2)x^2+2m+1=0$ luôn có một nghiệm là $x=1$ Khi đó đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua điểm cố định $K(1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4$m được đặt ở độ cao $1,8$m so với tầm mắt của người quan sát (tính từ mép dưới của màn hình - hình bên). Để nhìn rõ nhất, phải xác định vị trí đứng O sao cho góc nhìn $\widehat{BOC}$ là lớn nhất, hãy xác định vị trí đó.



A. $AO=3m$. **B.** $AO=2,6m$. **C.** $AO=2m$. **D.** $AO=2,4m$.

Câu 59. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ (C) và điểm M thuộc đồ thị hàm số trên. Tiếp tuyến với (C) tại M cắt các tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tìm điểm M có hoành độ dương để chu vi tam giác IAB là nhỏ nhất.

A. $M(4;3)$. **B.** $M(3;5)$. **C.** $M\left(5;\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $M(6;2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x-2)^2}$, $\forall x\neq 2$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-2}\right)\in(C)$, $x_0>0$, ta có phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M là:

$$y=-\frac{4x}{(x_0-2)^2}+\frac{x_0^2+4x_0-4}{(x_0-2)^2}$$

Giả sử A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến với đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C). Khi đó, $A\left(2;\dfrac{x_0+6}{x_0-2}\right), B(2x_0-2+1)$ và $I(2;1)$ là giao hai tiệm cận trên.

Tính được $IA = \dfrac{8}{|x_0-2|}, IB = 2|x_0-2|$ và $P_{\Delta IAB} = IA + IB + \sqrt{IA^2+IB^2} \geq 2\sqrt{IA\cdot IB} + \sqrt{2IA\cdot IB} = 8+\sqrt{32}$. Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = 4$ (do $x_0 > 0$).

Tóm lại, $M(4;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** $m = 4; m = -\dfrac{4}{9}$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = \pm 4$.

Lời giải.

Để hàm số có 3 cực trị thì $m > -1$.

Phương trình hoành độ của (C_m) và Ox là: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1).

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Khi đó (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2).

Để (C_m) cắt Ox tại bốn điểm thì (2) có hai nghiệm dương phân biệt thì:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \quad (*).$$

Gọi bốn nghiệm phân biệt của (1) là: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm lập thành cấp số cộng nên $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 - t_2 = 0$ (3).

Theo Viét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m + 2 \ (4) \\ t_1 \cdot t_2 = 2m + 1 \ (5). \end{cases}$

Từ (3), (4) $\Rightarrow t_1 = \dfrac{m+1}{5}; t_2 = \dfrac{9m+9}{5}$ (6).

Thay (6) vào (5) ta được: $\dfrac{m+1}{5} \cdot \dfrac{9m+9}{5} = 2m+1 \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{9}$ hoặc $m = 4$.

Cả hai giá trị m đều thỏa $(*)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ có hệ số góc m cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C lên trục tung. Tìm giá trị dương của m để hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8.

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $d: y = m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \Rightarrow A(2;0) \\ x^2 - 4x + m + 1 = 0 (1) \end{bmatrix}.$$

Để đồ thị hàm số (C) cắt d tại ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $x \neq 2$. Điều kiện $\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 - 8 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m - 1 > 0 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

Giả sử $B(x_1; mx_1 - 2m), C(x_2; mx_2 - 2m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1\cdot x_2=m+1 \end{cases}$. Vì $m>0$ nên $x_1>0$ và $x_2>0$. Ta có $B'(0;mx_1-2m), C'(0;mx_2-2m)$.

Diện tích hình thang $BB'C'B$ là : $S_{BB'C'C}=\dfrac{1}{2}B'C'(BB'+CC')=16$ $(*)$

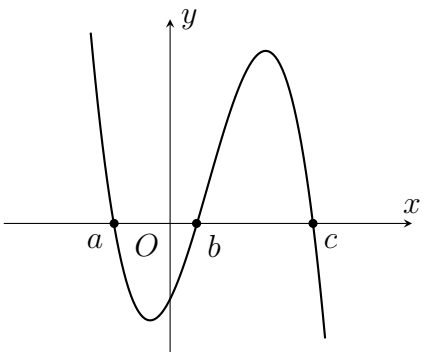
Mà $BC'=|m(x_1-x_2)|$, $BB'=|x_1|=x_1$ và $CC'=|x_2|=x_2$. Do đó, $(*)\Leftrightarrow m\left|x_1-x_2\right|(x_1+x_2)=16\Leftrightarrow m\left|x_1-x_2\right|=4\Leftrightarrow m^2\left(x_1-x_2\right)^2=16\Leftrightarrow m^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=16\Leftrightarrow m^2(16-4m-4)=16\Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m>0$ và $m<3$ ta có $m=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 62.

Cho đồ thị $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ a,b,c như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây có thể xảy ra?



A. $f(a)>f(b)>f(c)$. **B.** $f(b)>f(a)>f(c)$.

C. $f(c)>f(a)>f(b)$. **D.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$-\infty$

Từ đó suy ra $f(b)<f(a),f(c)$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt hai tiệm cận của đồ thị (C) tại P và Q. Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng PQ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M\left(a;2+\dfrac{1}{a-1}\right)$ thuộc đồ thị (C) (với $a\neq 1$).

$y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M có dạng

$$y=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)+2+\frac{1}{a-1}.$$

Tiếp tuyến này cắt đường tiệm cận đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=2$ lần lượt tại $P\left(1;\dfrac{2a}{a-1}\right)$ và $Q\left(2a-1;2\right)$.

Khi đó $PQ=\sqrt{(2a-2)^2+\left(2-\dfrac{2a}{a-1}\right)^2}=2\sqrt{(a-1)^2+\dfrac{1}{(a-1)^2}}\geq 2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $(a-1)^2=\dfrac{1}{(a-1)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-1=1\\a-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=0\end{array}\right.$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ bằng $2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $mx-\sqrt{x-3}=m+1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $0<m<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m>0$. **C.** $\dfrac{1}{2}\leq m\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\leq m<\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $m=\dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}=f(x),x\geq 3$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=7-2\sqrt{3}$

bảng biến thiên

x	3		$7-2\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}\leq m<\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

Chọn đáp án D □

Câu 65. Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2m^2-2m+1}{(x-1)^2}=1-\dfrac{2m^2+2m}{(x-1)^2}$.

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình $x^2+2mx+2m^2-1=0$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 tức là

$$\begin{cases}\Delta'>0\\1+2m+2m^2-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m^2>0\\m\neq 0\\m\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-1;\,1)\setminus\{0\}\qquad(*).$$

Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của (1) . Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1+x_2=-2m$ và $x_1\cdot x_2=2m^2-1$.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} y'(x_1)\cdot y'(x_2)=-1 &\Leftrightarrow \left[1-\frac{2m^2+2m}{(x_1-1)^2}\right]\cdot\left[1-\frac{2m^2+2m}{(x_2-1)^2}\right]=-1\\ &\Leftrightarrow 1-\left(2m^2+2m\right)\left[\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2}{[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]^2}\right]\\ &\quad+\left(2m^2+2m\right)^2\cdot\frac{1}{[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]^2}=-1\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{4m+4}{2m^2+2m}+1=-1\Leftrightarrow 1-\frac{2(m+1)}{m(m+1)}+1=-1\\ &\Leftrightarrow 3-\frac{2}{m}=0\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Cho hàm số $y=x^3-11x$ có đồ thị là (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=-2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1. Tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác $M_2,\ldots$ Tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n\in\mathbb{N},n\geqslant 4)$. Gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ của điểm M_n. Tìm n sao cho $11x_n+y_n+2^{2019}=0$.

A. $n=675$. **B.** $n=673$. **C.** $n=674$. **D.** $n=672$.

Lời giải.

Ta có $y=x^3-11x\Rightarrow y'=3x^2-11$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(m;m^3-11m)\in(C)$ là

$$d\colon y=(3m^2-11)(x-m)+m^3-11m.$$

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} &x^3-11x=(3m^2-11)(x-m)+m^3-11m\\ \Leftrightarrow\ &(x^3-m^3)-11(x-m)-(3m^2-11)(x-m)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=m\\ x^2+mx-2m^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=-2m.\end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $M\equiv M_1(x_1;y_1)$ thì $M_2\big(-2x_1\,;y(-2x_1)\big)$.

Bằng cách lập luận tương tự ta có $M_n\left((-2)^{n-1}x_1\,;[(-2)^{n-1}x_1]^3-11\left((-2)^{n-1}x_1\right)\right)$.

Như vậy, $11x_n+y_n+2^{2019}=0\Leftrightarrow 11\left((-2)^{n-1}x_1\right)+\left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3-11\left((-2)^{n-1}x_1\right)+2^{2019}=0$

$$\Leftrightarrow\left[(-2)^{n-1}x_1\right]^3=-2^{2019}.$$

Do $x_1=-2$ nên $(-2)^{3n}=(-2)^{2019}\Leftrightarrow 3n=2019\Leftrightarrow n=673$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d là các hằng số và $a\neq 0$) có đồ thị (C). Biết (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt M, N, P và các tiếp tuyến của (C) tại M, N có hệ số góc là -6 và 2. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại P. Chọn mệnh đề đúng?

A. $k\in[4;7)$. **B.** $k\in[-5;-2)$. **C.** $k\in[1;4)$. **D.** $k\in[-2;1)$.

Lời giải.

Gọi x_1,x_2,x_3 lần lượt là hoành độ của M,N,P.

Khi đó, x_1,x_2,x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Suy ra, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
Do đó, $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+a(x-x_2)(x-x_3)+a(x-x_3)(x-x_1)$.
Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M,N,P là

$$\begin{cases} f'(x_1)=a(x_1-x_2)(x_1-x_3)=-6 \\ f'(x_2)=a(x_2-x_3)(x_2-x_1)=2 \\ f'(x_3)=a(x_3-x_1)(x_3-x_2)=k. \end{cases}$$

Ta có $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}=\dfrac{x_3-x_2+x_1-x_3+x_2-x_1}{a(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}=0.$
Hay $\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{k}=0\Leftrightarrow k=-3.$
Vậy $k\in[-5;-2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=|x^4-8x^2-m|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-50;50]$ sao cho với mọi số thực $a,b,c\in[0;3]$ thì $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác?

A. 29. **B.** 23. **C.** 27. **D.** 25.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=x^4-8x^2-m$. Ta có $g'(x)=4x^3-16x$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Xét trên đoạn $[0;3]$ ta có

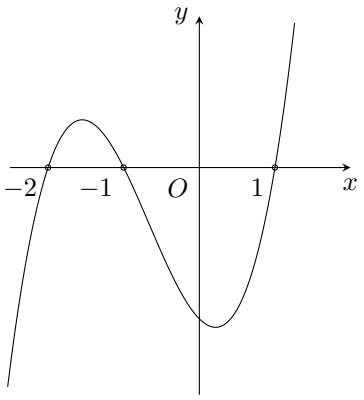
x	0		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-m$	↘	$-m-16$	↗	$-m+9$

Suy ra, $-m-16\le g(x)\le -m+9$ trên đoạn $[0;3]$.
TH1. $-m+9<0\Leftrightarrow m>9$ thì $\max\limits_{[0;3]}f(x)=m+16$ và $\min\limits_{[0;3]}f(x)=m-9$. Do đó, yêu cầu bài toán trở thành $m+16<2(m-9)\Leftrightarrow m>34$. Suy ra, có 16 giá trị của m.
TH2. $-m-16>0\Leftrightarrow m<-16$ thì $\max\limits_{[0;3]}f(x)=-m+9$ và $\min\limits_{[0;3]}f(x)=-m-16$. Do đó, yêu cầu bài toán trở thành $-m+9<2(-m-16)\Leftrightarrow m<-41$. Suy ra, có 9 giá trị của m.
TH3. $-m-16\le 0<-m+9$ thì $\min\limits_{[0;3]}f(x)=0$ (loại).
Vậy có 25 giá trị của m.
Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.

Hàm số $f(x^2-2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(1;\sqrt{3})$. **C**. $(-1;0)$. **D**. $(-\sqrt{3};0)$.



Lời giải.

Ta có, hàm số $f(x^2-2)$ đồng biến khi

$$\begin{aligned}
&f'(x^2-2)=2xf'(x^2-2)>0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}2x>0\\ f'(x^2-2)>0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}2x<0\\ f'(x^2-2)<0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}-2<x^2-2<-1\\ x^2-2>1\end{array}\right.\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-2<-2\\ -1<x^2-2<1\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}0<x^2<1\\ x^2>3\end{array}\right.\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}x^2<0\\ 1<x^2<3\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x<-\sqrt{3}\\ x>\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ -\sqrt{3}<x<-1\\ 1<x<\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x>\sqrt{3}\end{array}\right.\text{ hoặc } -\sqrt{3}<x<-1.
\end{aligned}$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}\,(C)$. Đương thẳng $y=x$ cắt (C) tại hai điểm A,B. Đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm C,D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Chọn mệnh đề đúng.

A. Không tồn tại giá trị m. **B**. m là số nguyên tố.

C. m là số tự nhiên chia hết cho 3. **D**. m là số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=x$ và đồ thị (C) là:

$\dfrac{3x+2}{x+2}=x$ ĐK: $x\neq 2$

$\Leftrightarrow 3x+2=x^2+2x.$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Từ đó ta có $A(-1;-1)$, $B(2;2)$.

Tọa độ trung điểm của AB là $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Giao của hai tiệm cận của đồ thị (C) là $I(-2;3)$.

Điểm đối xứng với M qua I là $M'\left(-\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$.

Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì đường thẳng $y=x+m$ đi qua M' nghĩa là:

$-\frac{9}{2}+m=\frac{11}{2} \Leftrightarrow m=10$.

Vậy m là số tự nhiên chia hết cho 5.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Cho phương trình $x^3-3x^2-2x+m-3+2\sqrt[3]{2x^3+3x+m}=0$. Tập S là tập hợp các giá trị của m nguyên để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 15. **B**. 9. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x^3+3x+m} \Rightarrow t^3=2x^3+3x+m$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^3-3x^2-2x+m-3+2t=0 & (1) \\ 2x^3+3x+m-t^3=0 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) − (1), ta được

$$x^3+3x^2+5x+3-t^3-2t=0 \Leftrightarrow (x+1)^3+2x=t^3+2t. \quad (*)$$

Dễ thấy hàm số $f(u)=u^3+2u$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà phương trình $(*)$ có dạng $f(x+1)=f(t)$ nên suy ra

$$t=x+1 \Leftrightarrow (x+1)^3=2x^3+3x+m \Leftrightarrow m=-x^3+3x^2+1.$$

Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x^2+1$.

$g'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<m<5$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán là $S=2+3+4=9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho hàm số $y=x^3-2018x$ có đồ thị (C). M_1 thuộc (C) và hoành độ là 1, tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại M_2, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại M_3, $\cdots$ Cứ như thế mãi và tiếp tuyến của (C) tại $M_n(x_n;y_n)$ thỏa mãn $2018x_n+y_n+2^{2019}=0$. Tìm n.

A. 675. **B**. 672. **C**. 674. **D**. 673.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-2018$.

Gọi $M(m;m^3-2018m) \in (C)$ ta suy ra phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=(3m^2-2018)(x-m)+m^3-2018m \Leftrightarrow y=(3m^2-2018)x-2m^3.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là

$$x^3-2018x=(3m^2-2018)x-2m^3\Leftrightarrow (x-m)^2(x+2m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-2m. \end{array}\right.$$

Suy ra hoành độ các điểm M_n lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là $x_1=1$ và công bội $q=-2$. Do đó $x_n=(-2)^{n-1}$.

Ta có $2018x_n+y_n+2^{2019}=0\Leftrightarrow 2018x_n+x_n^3-2018x_n+2^{2019}=0$.

$$\Leftrightarrow x_n^3=-2^{2019}.$$
$$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3}=(-2)^{2019}.$$
$$\Leftrightarrow 3n-3=2019.$$
$$\Leftrightarrow n=674.$$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{3\sqrt{5}+9}{4}$. **C.** $m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{2}$. **D.** $m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$.

Lời giải.

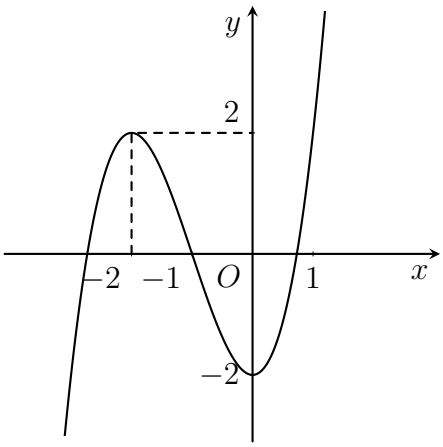
Đặt $t=\dfrac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1\Leftrightarrow (t-3)\sin 2x+(2t-1)\cos 2x=-3t$.

Khi đó $(t-3)^2+(2t-1)^2\ge(-3t)^2\Leftrightarrow\dfrac{-5-\sqrt{65}}{4}\le t\le\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$.

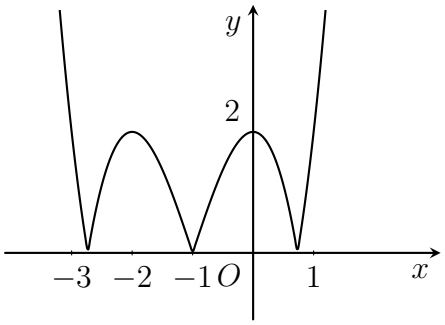
Do đó bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi $m+1\ge\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{\sqrt{65}-9}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị ở hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=|x|^3+3|x|^2-2$. **B.** $y=|x^3+3x^2-2|$.

C. $y=\left||x|^3+3x^2-2\right|$. **D.** $y=-x^3-3x^2+2$.

Lời giải.

Ta có $y=|x^3+3x^2=2|=\begin{cases} x^3+3x^2-2 & ,\text{ khi } x^3+3x^2-2\ge 0 \\ -\left(x^3+3x^2-2\right) & ,\text{ khi } x^3+3x^2-2<0. \end{cases}$

Đồ thị của hàm số $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$ được vẽ như sau:

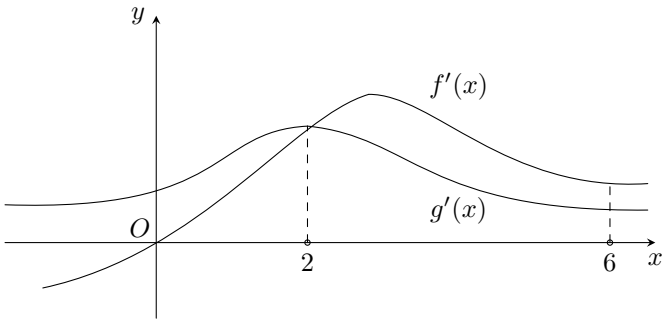
☑ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

☑ Lấy đối xứng phần đố thị phía dưới trục hoành của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ qua trục hoành.

Vậy hình 2 là đồ thị của hàm số $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên $[0; 6]$ lần lượt là

A. $h(2), h(6)$. **B.** $h(6), h(2)$. **C.** $h(0), h(2)$. **D.** $h(2), h(0)$.

Lời giải.

☑ Ta có $f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$.

☑ Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0; 6]$

x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	↘	$h(2)$	↗	$h(6)$

☑ Dựa vào bảng biến thiên và điều kiện $h(0) < h(6)$, ta có $\max\limits_{[0;6]} h(x) = h(6)$, $\min\limits_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ nhất thuộc khoảng nào?

A. $(29; 30)$. **B.** $(27; 28)$. **C.** $(26; 27)$. **D.** $(28; 29)$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x-2} = 2 + \dfrac{3}{x-2}$, $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$, $I(2; 2)$.

Giả sử $M\left(x_0; 2 + \dfrac{3}{x_0 - 2}\right)$, tiếp tuyến tại M có phương trình

$$y = -\frac{3}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + 2 + \frac{3}{x_0 - 2} \quad .$$

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng là $A\left(2;\dfrac{6}{x_0-2}+2\right)$.
Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang là $B(2x_0-2;2)$.
Ta có $IA\cdot IB=12$.
Tam giác IAB vuông tại I, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB là $R=\dfrac{1}{2}AB$.

$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{IA^2+IB^2}\geq\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot IA\cdot IB}=\sqrt{6}.$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $R_{\min}$ khi và chỉ khi $IA=IB$

$$\left|\frac{6}{x_0-2}\right|=|2x_0-4|\Leftrightarrow x_0^2-4x_0+1=0\Leftrightarrow x_0=2\pm\sqrt{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=2+\sqrt{3}$ là

$$y=-\left(x-2-\sqrt{3}\right)+2+\sqrt{3}=-x+2\sqrt{3}+4\ \ (\Delta_1).$$

Diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ và tiếp tuyến (Δ_1) là $\dfrac{|2\sqrt{3}+4|^2}{2}\approx 27{,}86$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2-\sqrt{3}$ là

$$y=-(x-2+\sqrt{3})+2-\sqrt{3}=-x-2\sqrt{3}+4\ \ (\Delta_2).$$

Diện tích tam giác tạo bởi 2 trục tọa độ và tiếp tuyến (Δ_2) là $\dfrac{|-2\sqrt{3}+4|^2}{2}\approx 0{,}14$.
Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng $(27;28)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B**. $2\sqrt{2}$. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. 2.

Lời giải.

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C), x_0\neq 2$. PTTT của (C) tại M là

$$y=-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+2+\frac{1}{x_0-2}\quad (d).$$

Đồ thị hàm số có TCĐ: $x=2$, TCN: $y=2$. Giao điểm của d với TCĐ là $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$, với TCN là $B\left(2x_0-2;2\right)$. Ta có

$$AB=\sqrt{4(x_0-2)^2+\frac{4}{(x_0-2)^2}}\geq\sqrt{2\sqrt{16}}=2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_0=3$ hoặc $x_0=1$. Vậy độ dài ngắn nhất của đoạn AB là $2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c>0 \\ 8+4a+2b+c<0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên tồn tại số $M>2$ sao cho $y(M)>0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên tồn tại số $m<-2$ sao cho $y(m)<0; y(-2)=-8+4a-2b+c>0$ và $y(2)=8+4a+2b+c<0$.

Do $y(m).y(-2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m;-2)$.

Do $y(-2).y(2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$.

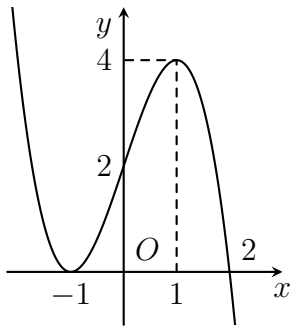
Do $y(2).y(M)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2;M)$.

Vì đồ thị hàm số bậc ba cắt trục Ox tối đa tại ba điểm nên ta có đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79.

Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $f(-1)=\dfrac{13}{4}$, $f(2)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng



A. $\dfrac{1573}{64}$. **B.** 198. **C.** $\dfrac{37}{4}$. **D.** $\dfrac{14245}{64}$.

Lời giải.

Từ đồ thị suy ra $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[-1;2]$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=\dfrac{13}{4}$.

Lại có $g'(x)=3f'(x)\left[f^2(x)-1\right]$, suy ra $g'(x)\geq 0$ và $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} g(x)=g(-1)=f^3(-1)-3f(-1)=\dfrac{1573}{64}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1>x_2>x_3>0$ và trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị của (C) có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{3}$. Biết rằng $(3x_1+4x_2+5x_3)^2=44(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$. Hãy tính tổng $S=x_1+x_2^2+x_3^3$.

A. $\dfrac{137}{216}$. **B.** $\dfrac{45}{157}$. **C.** $\dfrac{133}{216}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ và $y''=6ax+2b$.

Vì trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị của (C) có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{3}$ nên

$$y''(x_0)=0\Leftrightarrow 6a\cdot\frac{1}{3}+2b=0\Leftrightarrow a=-b.$$

Xét phương trình

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{1}$$

Vì (C) cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ $x_1>x_2>x_3>0$ nên phương trình (1) có 3 nghiệm $x_1>x_2>x_3>0$, theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=1.$$

Ta có

$$(3x_1+4x_2+5x_3)^2=44(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\Leftrightarrow 9x_1^2+16x_2^2+25x_3^2=20x_1x_2+4x_2x_3+14x_3x_1.(*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có

☑ $4x_1^2+9x_2^2\geq 12x_1x_2\Leftrightarrow \frac{5}{3}(4x_1^2+9x_2^2)\geq 20x_1x_2.$ (2)

☑ $x_2^2+4x_3^2\geq 4x_2x_3.$ (3)

☑ $4x_1^2+36x_3^2\geq 24x_3x_1\Leftrightarrow \frac{7}{12}(4x_1^2+36x_3^2)\geq 14x_3x_1.$ (4)

Từ (1), (2), (3), cộng vế theo vế ta được

$$9x_1^2+16x_2^2+25x_3^2\geq 20x_1x_2+4x_2x_3+14x_3x_1. \tag{5}$$

Từ $(*)$ và (5) suy ra dấu "=" của (5) xảy ra khi $2x_1=3x_2;\ x_2=2x_3;\ 2x_1=6x_3$.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}2x_1=3x_2\\ x_2=2x_3\\ 2x_1=6x_3\\ x_1+x_2+x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\ x_2=\frac{1}{3}\\ x_3=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

Vậy $S=x_1+x_2^2+x_3^3=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{216}=\frac{133}{216}$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho hàm số $y=x^3-11x$ có đồ thị (C). Gọi M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=-2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, ..., tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 4)$. Gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ của điểm M_n. Tìm n sao cho $11x_n+y_n+2^{2019}=0$.

A. $n=675$. **B.** $n=673$. **C.** $n=674$. **D.** $n=672$.

Lời giải.

Theo giả thiết $M_1(-2;14)$.

Ta có $y'=3x^2-11\Rightarrow y'(-2)=1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_1 là $d_1\colon y=y'(-2)(x+2)+14\Rightarrow d_1\colon y=x+16$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (C) là

$$x^3-11x=x+16\Leftrightarrow x^3-12x-16=0\Leftrightarrow (x+2)^2(x-4)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\ x=4\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=4=(-2)^2\Rightarrow y_2=20.$$

Bằng quy nạp chứng minh $M_n(x_n;y_n)$ trong đó $\begin{cases}x_n=(-2)^n\\ y_n=y(x_n)=(-2)^{3n}-11\cdot(-2)^n\end{cases}$, $\forall n\geq 2$ (1).

Thật vậy

☑ Với $n=2 \Rightarrow$ (1) đúng.

☑ Giả sử (1) đúng với $n=k\geq 2$.

Ta chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $x_{k+1}=(-2)^{k+1}$.

Ta có, phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_k\left(x_k;y_k\right)$ là $d_k\colon y=y'\left(x_k\right)\left(x-x_k\right)+y\left(x_k\right)$

$\Rightarrow d_k\colon y=\left(3x_k^2-11\right)\left(x-x_k\right)+x_k^3-11x_k$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_k và (C) là

$$\begin{aligned}
& x^3-11x=\left(3x_k^2-11\right)\left(x-x_k\right)+x_k^3-11x_k \\
\Leftrightarrow\ & x^3-x_k^3-11(x-x_k)-(3x_k^2-11)(x-x_k) \\
\Leftrightarrow\ & \left(x-x_k\right)^2\left(x+2x_k\right)=\left[\begin{array}{l} x=x_k \\ x=-2x_k \end{array}\right. \\
\Rightarrow\ & x_{k+1}=-2x_k=(-2)^{k+1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (1) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
& 11x_n+y_n+2^{2019}=0 \\
\Leftrightarrow\ & 11\cdot(-2)^n+(-2)^{3n}-11\cdot(-2)^n+2^{2019}=0 \\
\Leftrightarrow\ & (-2)^{3n}+2^{2019}=0
\end{aligned}$$

☑ Nếu n là số chẵn thì $(-2)^{3n}>0\Rightarrow(-2)^{3n}+2^{2019}=0$ (vô nghiệm).

☑ Nếu n là số lẻ thì $(-2)^{3n}=-2^{3n}$. Khi đó

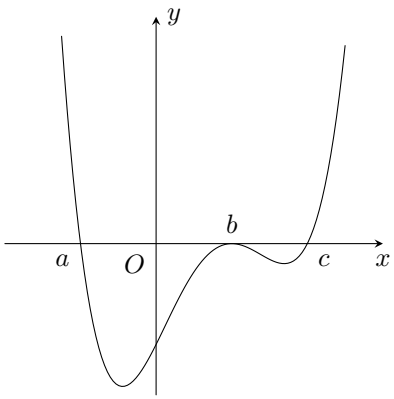
$$(-2)^{3n}+2^{2019}=0\Leftrightarrow 2^{3n}=2^{2019}\Leftrightarrow 2n=2019\Leftrightarrow n=673.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 82.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(|x^3|\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 3. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 2.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$

Ta có $g(x)=\begin{cases} f\left(x^3\right); & x\geq 0 \\ f\left(-x^3\right); & x<0 \end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases} 3x^2f'\left(x^3\right); & x\geq 0 \\ -3x^2f'\left(-x^3\right); & x<0 \end{cases}$.

Với $x\geq 0$ thì $g'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3=b \\ x^3=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{b} \\ x=\sqrt[3]{c}. \end{array}\right.$

Lại có $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3<a \\ x^3>c \end{array}\right. \Leftrightarrow x>\sqrt[3]{c}$ (vì $x\geq 0$)

và $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<x^3<b \\ b<x^3<c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<\sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{b}<x<\sqrt[3]{c} \end{cases}$ (vì $x\geq 0$).

Với $x<0$ thì $g'(x)=-3x^2f'\left(-x^3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3=b \\ -x^3=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{b} \\ x=-\sqrt[3]{c}. \end{array}\right.$

Lại có $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'\left(-x^3\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3<a \\ -x^3>c \end{array}\right. \Leftrightarrow x<-\sqrt[3]{c}$ (vì $x<0$)

và $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'\left(-x^3\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-x^3<b \\ b<-x^3<c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{b}<x<0 \\ -\sqrt[3]{c}<x<\sqrt[3]{b} \end{cases}$ (vì $x<0$).

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{c}$		$-\sqrt[3]{c}$		0		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$				$\searrow$				$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho parabol $(P)\colon y=\dfrac{x^2-2x+3}{2}$ và đường thẳng $d\colon x-y-1=0$. Qua điểm M tùy ý trên đường thẳng d kẻ 2 tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (P) (với T_1, T_2 là các tiếp điểm). Biết đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm $I(a;b)$ cố định. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $b\in(-1;3)$. **B.** $a<b$. **C.** $a+2b=5$. **D.** $ab=9$.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{x^2-2x+3}{2} \Rightarrow y'=x-1$.

Gọi toạ độ các điểm là $T_1(x_1,y_1), T_2(x_2,y_2)$ và $M(m,m-1)\in d$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua M có hệ số góc k là $y=k(x-m)+m-1$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm $\begin{cases} k=x-1 & (1) \\ \dfrac{x^2-2x+3}{2}=k(x-m)+m-1 & (2) \end{cases}$ và nghiệm của hệ là x_1, x_2.

Thay $k=x-1$ vào (2) ta được

$$x^2-2x+3=2(x-1)(x-m)+m-1 \Leftrightarrow x^2-2mx+4m-5=0.$$

Từ đó ta có $x_1^2 - 2mx_1 + 4m - 5 = 0$ mà $y_1 = \dfrac{x_1^2 - 2x_1 + 3}{2}$ nên suy ra

$$2y_1 + 2x_1 - 3 - 2mx_1 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow y_1 = (m-1)x_1 - 2m + 4.$$

Tương tự ta cũng có $y_2 = (m-1)x_2 - 2m + 4$.
Suy ra phương trình đường thẳng T_1T_2 là $y = (m-1)x - 2m + 4$, đường thẳng này luôn đi qua điểm $I(2;2)$ cố định nên $a = 2, b = 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Hãy xác định tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = f(x) = m(x+1) + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x \quad (C)$ tại ba điểm phân biệt A, B, C (A là điểm cố định) sao cho tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C vuông góc với nhau.

A. -1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = f(x)$ và (C):

$$\begin{aligned} x^3 - 3x = m(x+1) + 2 &\Leftrightarrow x^3 - (m+3)x - m - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - m - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (1) \\ x^2 - x - m - 2 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Theo đề, ta có $B\left(x_1, f(x_1)\right)$, $C\left(x_2, f(x_2)\right)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (2). Hệ số góc của tiếp tuyến tại B và C lần lượt là $k_1 = 3x_1^2 - 3$ và $k_2 = 3x_2^2 - 3$. Từ đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} \Delta_2 = 1 + 4(m+2) > 0 & (i) \\ (-1)^2 - (-1) - m - 2 \neq 0 & (ii) \\ (3x_1^2 - 3)(3x_2^2 - 3) = -1 & (iii) \end{cases}$$

Ta lần lượt giải các điều kiện
$(i) \Leftrightarrow m > -\dfrac{9}{4}$,
$(ii) \Leftrightarrow m \neq 0$,

$$\begin{aligned} (iii) &\Leftrightarrow x_1^2 \cdot x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = -\frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow P^2 - (S^2 - 2P) + 1 = -\frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow (m+2)^2 - (1 + 2m + 4) + 1 = -\frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m + \frac{1}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ x = -1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kết hợp các điều kiện ta được tổng các giá trị của m bằng -2.
Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tìm tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

A. -7. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -4.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d (với $x\neq -1$):

$$\frac{2x-1}{x+1}=-x+m\Leftrightarrow x^2-(m-3)x-m-1=0. \qquad (1)$$

Trước hết, để (C) và d cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B thì ta cần có điều kiện

$$\begin{cases}\Delta_{(1)}=(m-3)^2+4(m+1)>0\\ (-1)^2-(m-3)(-1)-m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+13>0\\ -3\neq 0.\end{cases}$$

Hai điều kiện trên luôn đúng, ta đặt $A(x_1;-x_1+m)$, $B(x_2,-x_2+m)$ với x_1,x_2 là hai nghiệm của (1). Gọi I là trung điểm AB, khi đó $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};m-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ hay $I\left(\dfrac{m-3}{2};\dfrac{m+3}{2}\right)$.

Ta tính được

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;x_1-x_2)$, $AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(S^2-4P)}=\sqrt{2m^2-4m+26}$,

$\overrightarrow{PI}=\left(\dfrac{m-7}{2};\dfrac{m-7}{2}\right)$, $PI=\dfrac{|m-7|}{2}\sqrt{2}$.

Để tam giác PAB đều thì ta cần điều kiện $\begin{cases}\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ PI=AB\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Điều kiện về tích vô hướng luôn đúng nên ta chỉ xét điều kiện về độ dài. Ta có

$$\begin{aligned}PI=AB\frac{\sqrt{3}}{2}&\Leftrightarrow 4PI^2=3AB^2\\ &\Leftrightarrow 2(m^2-14m+49)=3(2m^2-4m+26)\\ &\Leftrightarrow 4m^2+16m-20=0.\end{aligned}$$

Như vậy, tổng các giá trị m tìm được là $S=-4$ (do phương trình trên luôn có nghiệm).

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Họ đường cong $(C_m)\colon y=(m^2+2m)x^3-5(m^2+2m-1)x^2+3(m^2+2m+2)x+(m+1)^2+1$ có bao nhiêu điểm cố định?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$(x^3-5x^2+3x+1)m^2+(2x^3+10x^2+6x+2)m+(5x^2+6x+2-y)=0.$

Gọi $(x_0;y_0)$ là một điểm cố định họ đường cong (C_m) khi đó phương trình

$(x_0^3-5x_0^2+3x_0+1)m^2+(2x_0^3-10x_0^2+6x_0+2)m+(5x_0^2+6x_0+2-y_0)=0$

có nghiệm với mọi m.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^3-5x_0^2+3x_0+1=0\\ 2x_0^3+10x_0^2+6x_0+2=0\\ 5x_0^2+6x_0+2-y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^3-5x_0^2+3x_0+1=0\\ 5x_0^2+6x_0+2-y_0=0\end{cases}$$

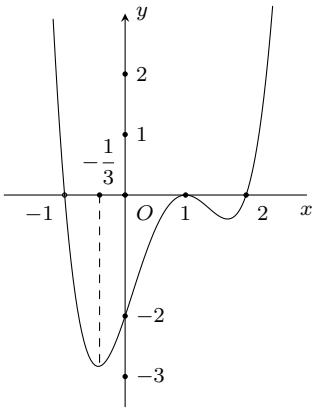
Ta có $x_0^3 - 5x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 - 4x_0 - 1) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Vậy họ (C_m) có điểm cố định.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x) - 1\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

A. 3. **B**. 4. **C**. 9. **D**. 8.



Lời giải.

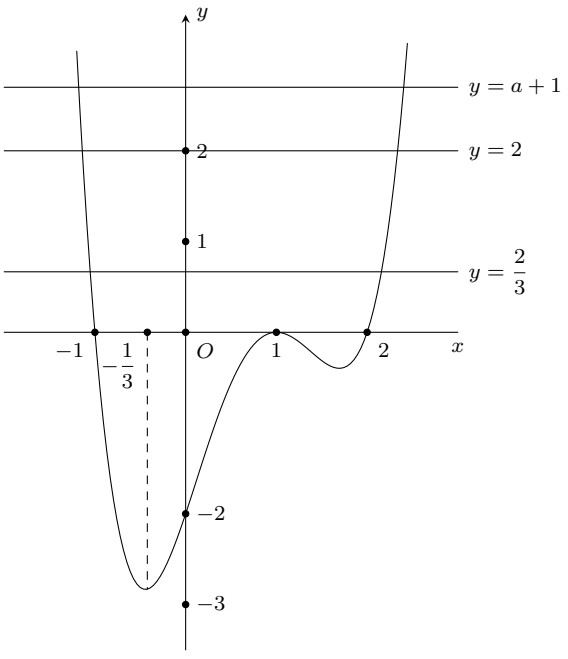
Từ đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -\dfrac{1}{3}, x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$. Do đó $f'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -\dfrac{1}{3}, x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'\left(f(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \hoac{f'(x) = 0 \quad (1)\\ f'\left(f(x) - 1\right) = 0 \quad (2).}$

Phương trình (1) có ba nghiệm $x = -\dfrac{1}{3}, x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \hoac{f(x) - 1 = -\dfrac{1}{3}\\ f(x) - 1 = 1\\ f(x) - 1 = a} \Leftrightarrow \hoac{f(x) = \dfrac{2}{3} \quad (3)\\ f(x) = 2 \quad (4)\\ f(x) = a + 1. \quad (5)}$

Nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$. Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta vẽ thêm các đường thẳng $y = 2, y = \dfrac{2}{3}$ và $y = a + 1$ (với $2 < a + 1 < 3$) như sau



Từ đồ thị trên, ta thấy các đường thẳng $y=2, y=\dfrac{2}{3}$ và $y=a+1$ (với $2<a+1<3$) lần lượt cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khác nhau và khác với $-\dfrac{1}{3}, 1, a$. Do đó các phương trình (3), (4), (5) lần lượt có hai nghiệm phân biệt khác nhau và khác với $-\dfrac{1}{3}, 1, a$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Đường thẳng $d\colon y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2+OB^2=2$, với O là gốc tọa độ. Khi đó m thuộc khoảng

A. $\left(-\infty;2-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(0;2+2\sqrt{2}\right)$. **C.** $\left(2+\sqrt{2};2+2\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(2+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d\colon y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ là

$$\begin{aligned} & x+m=\frac{x-1}{x+1} \qquad (1).\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\neq -1\\ x^2+mx+m+1=0 \end{cases} \qquad (2)\\ \Leftrightarrow\ & x^2+mx+m+1=0 \text{ (vì } x=-1 \text{ không là nghiệm của phương trình (2)).} \end{aligned}$$

Để d cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m+m+1\neq 0\\ \Delta=m^2-4m-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2+2\sqrt{2}\\ m<2-2\sqrt{2}. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Gọi $A\left(x_1;x_1+m\right), B\left(x_2;x_2+m\right)$ là các giao điểm của d với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (2), nên ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=m+1. \end{cases}$$

Khi đó $AB=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2-4(m+1)}$.

Gọi I là trung điểm của AB thì $I\left(-\dfrac{m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$.

Ta có $OA^2+OB^2=2OI^2+\dfrac{AB^2}{2}$ và giả thiết $OA^2+OB^2=2$ suy ra $OI^2+\dfrac{AB^2}{4}=1\Leftrightarrow\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{m^2-4m-4}{2}=1$ hay $\left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=3. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta chọn nghiệm $x=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x|^3-3|x|=2m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2<m<0$. **B.** $m\geq -2$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải.

Đầu tiên ta lập bảng biến thiên và vẽ phác thảo đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 3$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -27 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$

Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$.

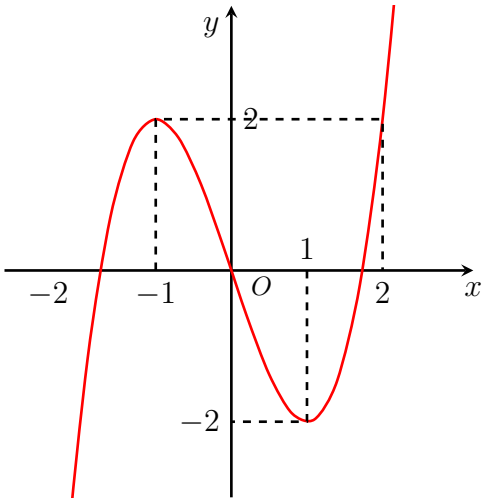
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

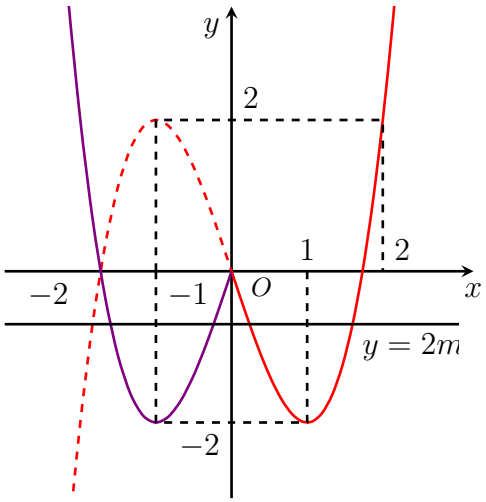
Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

Đồ thị:



Từ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |x|^3 - 3|x|$ bằng cách giữ nguyên đồ thị nằm bên phải trục Oy của hàm số $y = x^3 - 3x$, và lấy đối xứng với nhánh đồ thị nằm bên phải trục Oy qua trục Oy, ta được đồ thị như sau:



Theo yêu cầu bài toán ta có: $-2 < 2m < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$ có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

A. $m < 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m = 0$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$, $y'' = 6x - 6$.

Điểm uốn của đồ thị hàm số là $(1; 0)$.

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biện lập thành cấp số cộng khi hàm số có 2 cực trị và điểm uốn thuộc trục hoành $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho hàm số $y = -x^3 + 6x + 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y = mx - m + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để d và (C) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng các hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại ba điểm đó bằng -6.

A. $m = -1$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$-x^3 + 6x + 2 = mx - m + 2 \Leftrightarrow x^3 + (m-6)x - m = 0. \quad (*)$$

Giả sử d và (C) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$.

Lúc đó tổng hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại ba điểm đó là

$$y'(x_1) + y'(x_2) + y'(x_3) = -3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 18 = -3\left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right] + 18.$$

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình $(*)$, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m - 6. \end{cases}$

Do đó $y'(x_1) + y'(x_2) + y'(x_3) = -6$, suy ra $6(m-6) + 18 = -6 \Leftrightarrow m = 2$.

Khi $m = 2$, phương trình $(*)$ trở thành $x^3 - 4x - 2 = 0$.

Hàm số $y = x^3 - 4x - 2$ có hai cực trị $y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$ nên phương trình $x^3 - 4x - 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi:

A. $0 < m < 1$.

B. $0 < m \leq 1$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$.

D. $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, từ bảng biến thiên suy ra: $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$ (1)

Ta lại có $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

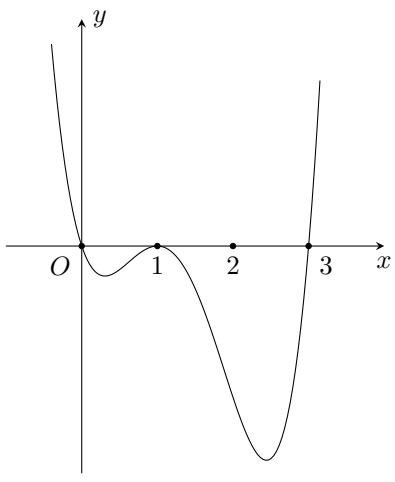
Đồ thị hàm số $|f(x)| = |2x^3 - 3x^2 + 1|$

Ta có $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi: $\frac{1}{2} < m < 1$

Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2-2m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in\left(-\dfrac{3}{2};0\right]$. **B.** $m\in(3;+\infty)$. **C.** $m\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải.

Theo đồ thị ta có: $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>3\end{array}\right.$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(0;3)\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\left(f\left(x^2-2m\right)\right)'=2x.f'\left(x^2-2m\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-2m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2m=0\\x^2-2m=1\\x^2-2m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2m\\x^2=2m+1\\x^2=2m+3\end{array}\right.$.

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có 3 nghiệm bội lẻ.

Ta thấy $x=0$ là một nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị của $y=f'(x)$ ta thấy $x=1$ là nghiệm bội chẵn (không đổi dấu), do đó ta không xét trường hợp $x^2-2m=1$.

Suy ra để hàm số có 3 điểm cực trị thì:

Trường hợp 1: $x^2=2m$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $x^2=2m+3$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $0\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m\le-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Trường hợp 2: $x^2=2m+3$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $x^2=2m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $0\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{3}{2}\\m\le0\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}<m\le0$.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\in\left(-\dfrac{3}{2};0\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Bất phương trình $(x+4)\sqrt{x+1}-\sqrt{2}|x|(2x^2+3)\ge6x^2-3x-3$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Giá trị $2a+b$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải.

$(x+4)\sqrt{x+1}-\sqrt{2}|x|(2x^2+3)\ge6x^2-3x-3$

$\Leftrightarrow(x+4)(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}|x|)-\sqrt{2}|x|(2x^2-x-1)\ge3(2x^2-x-1)$

$\Leftrightarrow(x+4)\left(\dfrac{x+1-2x^2}{x+1+\sqrt{2}|x|}\right)-\sqrt{2}|x|(2x^2-x-1)-3(2x^2-x-1)\ge0$

$\Leftrightarrow(-2x^2+x+1)(x+4+\sqrt{2}+3)\ge0$

$\Leftrightarrow-2x^2+x+1\ge0$

$\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=1\end{cases}\Rightarrow2a+b=0.$

Chọn đáp án A □

Câu 95. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \frac{1}{x_1^2 - 4x_1 + 3} + \frac{1}{x_2^2 - 4x_2 + 3} + \frac{1}{x_3^2 - 4x_3 + 3}.$$

A. $T = \frac{1}{2}\left[-\frac{P'(1)}{P(1)} + \frac{P'(3)}{P(3)}\right]$.
B. $T = \frac{1}{2}\left[-\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{P'(3)}{P(3)}\right]$.
C. $T = \frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{P'(3)}{P(3)}\right]$.
D. $T = \frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)} + \frac{P'(3)}{P(3)}\right]$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = P(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 nên ta có
$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$,
$P'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_3)(x - x_1)$.
Suy ra $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3}$.
Ta có

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{(x_i - 1)(x_i - 3)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{x_i - 3} - \frac{1}{x_i - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{x_i - 3} - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{x_i - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1 - x_i} - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3 - x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{P'(3)}{P(3)}\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - 2017)$ là

x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x-2017)+2018$ là

x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4036	↘	0	↗	$+\infty$

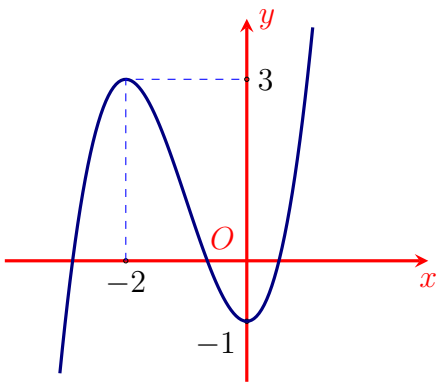
Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x-2017)+2018|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m < 2$. **B**. $m > 2$. **C**. $m > -2$. **D**. $m < -2$.



Lời giải.

Gọi $(C): y = f(x)$, $(C'): y = g(x) = f(|x|+m)$.

☑ Nếu $m > 0$ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ qua các phép biến đổi sau:

- Bước 1: Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang trái m đơn vị, ta được đồ thị của hàm số $h(x) = f(x+m)$.
- Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ từ đồ thị $h(x) = f(x+m)$.

Giữ lại phần đồ thị của hàm số $h(x)$ nằm bên phải trục Oy, bỏ toàn bộ phần đồ thị của $h(x)$ nằm bên trái trục Oy.

Lấy đối xứng qua Oy phần vừa giữ lại của đồ thị $h(x)$.

Hợp hai phần đồ thị này, ta được đồ thị của hàm số $g(x) = f(|x|+m)$. Khi đó: đồ thị (C') chỉ có 1 cực trị.

☑ Nếu $m < 0$ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ qua các phép biến đổi sau:

- Bước 1: Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải $-m$ đơn vị, ta được đồ thị của hàm số $h(x) = f(x+m)$.
- Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ từ đồ thị $h(x) = f(x+m)$.

Giữ lại phần đồ thị của hàm số $h(x)$ nằm bên phải trục Oy, bỏ toàn bộ phần đồ thị của $h(x)$ nằm bên trái trục Oy.

Lấy đối xứng qua Oy phần vừa giữ lại của đồ thị $h(x)$.

Hợp hai phần đồ thị này, ta được đồ thị của hàm số $g(x) = f(|x|+m)$.

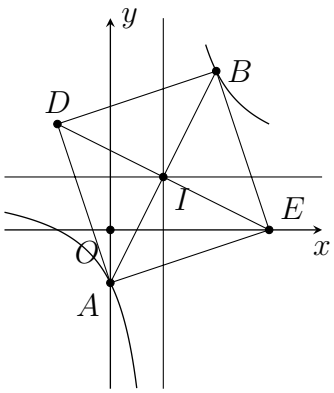
Khi đó: đồ thị (C') có 5 cực trị khi ta dời (C) sang phải hơn 2 đơn vị.

Vậy ta có: $-m > 2 \Leftrightarrow m < -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 98.

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giả sử A, B là hai điểm nằm trên (C) đồng thời đối xứng nhau qua điểm I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Dựng hình vuông $AEBD$. Tìm diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của hình vuông đó.



A. $S_{\min} = 8\sqrt{2}$. **B**. $S_{\min} = 4\sqrt{2}$. **C**. $S_{\min} = 4$. **D**. $S_{\min} = 8$.

Lời giải.

Ta có $S_{AEBD} = \dfrac{1}{2}AB^2$. Do đó S_{AEBD} min $\Leftrightarrow AB$ min.

Gọi $A\left(1-a; 1-\dfrac{2}{a}\right)$ và $B\left(1+b; 1+\dfrac{2}{b}\right)$ với $a, b > 0$.

Khi đó ta có

$$AB^2 = (b+a)^2 + \left(\frac{2(b+a)}{ab}\right)^2 = (a+b)^2\left(1+\frac{4}{a^2b^2}\right) \geq 4ab\left(1+\frac{4}{a^2b^2}\right) \geq 4ab + \frac{16}{ab} \geq 16$$

Vậy $AB_{\min} = 4$. Suy ra giá trị nhỏ nhất S_{AEBD} là 8.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Trên đường thẳng $y = 2x + 1$ có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$?

A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 3.

Câu 100. Tìm tất cà các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$

A. $m < -6$. **B**. $m > -5$. **C**. $m \leq -5$. **D**. $m < -5$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3$ là hàm số bậc ba với hệ số $a = 1 > 0$.

☑ Điều kiện cần: Từ $x_1 < -1 < x_2 < x_3$ nên $f(-1) > 0 \Rightarrow -m - 5 > 0 \Rightarrow m < -5$.

☑ Điều kiện đủ: Giả sử $m < -5$, ta có $f(-1) = -m - 5 > 0, f(0) = m - 3 < 0$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < -1$ sao cho $f(a) < 0$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $b > 0$ sao cho $f(b) > 0$.

Do tính liên tục của hàm số $f(x)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên các khoảng $(a;-1); (-1;0); (0;b)$, tức là tồn tại 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Vậy $m < -5$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. A	4. D	5. A	6. D	7. B	8. D	9. B	10. C
11. A	12. D	13. A	14. C	15. A	16. A	17. B	18. D	19. C	20. D
21. B	22. B	23. B	24. D	25. B	26. A	27. B	28. D	29. B	30. C
31. A	32. C	33. B	34. C	35. A	36. B	37. D	38. B	39. C	40. C
41. A	42. A	43. C	44. C	45. C	46. C	47. B	48. A	49. C	50. B
51. A	52. C	53. B	54. D	55. D	56. C	57. D	58. D	59. A	60. B
61. C	62. C	63. C	64. D	65. C	66. B	67. B	68. D	69. A	70. D
71. B	72. C	73. D	74. B	75. B	76. B	77. B	78. D	79. A	80. C
81. B	82. A	83. A	84. D	85. D	86. D	87. C	88. A	89. C	90. A
91. C	92. C	93. A	94. A	95. C	96. B	97. D	98. D	99. D	100. D

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

BÀI 1 LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó: $a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$.
- Lũy thừa với số mũ nguyên âm: Cho $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ và $a^0 = 1$.
- Lưu ý: 0^0 và 0^{-n} với $n \in \mathbb{N}*$ không có nghĩa.

2 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3 Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Cho $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, (r_n)$ là dãy số hữu tỉ sao cho $\lim\limits_{x \to +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó: $a^\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} r_n = a^{r_n}$.

4 Các tính chất của lũy thừa

Cho a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý.

- $a^{x+y} = a^x.a^y$ và $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^x.b^x = (a.b)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ và $(a^x)^y = a^{x.y}$
- Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

5 Một số tính chất của căn bậc n

① Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b}, \forall a, b \geq 0$
- $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a, b$
- $\sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}, \forall a \geq 0, b > 0$
- $\sqrt[2n+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$

② Với $a, b \in \mathbb{R}$, ta có:

- ☑ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0$, n nguyên dương, m nguyên
- ☑ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0$, n,m nguyên dương
- ☑ Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương, p, q nguyên.
  Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$

6 Công thức lãi kép

Định nghĩa 1. Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.

Công thức: Giả sử số tiền gốc là A; lãi suất $r\%$ /kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

- ☑ Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$.
- ☑ Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n - A = A\left[(1+r)^n - 1\right]$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp giải. Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

Cho a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý, ta có:

- ☑ $a^{x+y} = a^x.a^y$ và $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- ☑ $a^x.b^x = (a.b)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ và $(a^x)^y = a^{x.y}$.
- ☑ Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
- ☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

Ví dụ 1. Tính $2^1; (4,72)^0; (-3)^2; 2^4; (-4)^{-3}$.

Lời giải.

$2^1 = 2$; $(4,72)^0 = 1$; $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;
$(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = \dfrac{1}{(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)} = \dfrac{-1}{64}$. □

Ví dụ 2. Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa :

① $\sqrt{a\sqrt{a}}, (a > 0)$ ② $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}$ ③ $\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}}, (a, b > 0)$

Lời giải.

① $\sqrt{a\sqrt{a}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

② $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}} = \dfrac{\left[2 \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3} = 2^{\frac{-13}{6}}$

③ $\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}} = \dfrac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}} \cdot \dfrac{a^{\frac{1}{15}}}{b^{\frac{1}{15}}} = a^{\frac{1}{15}-\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}} = a^{\frac{-2}{15}} \cdot b^{\frac{2}{15}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}}$.

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau đây:

① $\sqrt{(a-5)^4}$

② $\sqrt{81a^4b^2}$ với $b \le 0$

③ $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4}$, với $x \le -1$

Lời giải.

① $\sqrt{(a-5)^4} = (a-5)^2$

② $\sqrt{81a^4b^2} = 9a^2 \cdot |b| = -9a^2 \cdot b$ ($|b| = -b$ do $b \le 0$)

③ $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4} = x^2 \cdot |x+1|$

Với $x \le -1$, ta có $x+1 \le 0$, suy ra: $|x+1| = -(x+1)$

Vậy $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4} = -x^2(x+1)$.

□

Ví dụ 4. Không dùng máy tính,hãy tính giá trị các biểu thức sau.

① $A = \left(\left[3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{3}} : 2^{-\frac{7}{4}}\right] : \left[16 : \left(5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}$

② $B = \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8}}} + (\sqrt[5]{3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}})^6$

③ $C = (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} + (8^{1+\sqrt{2}} \cdot 4^{1-\sqrt{2}}) : 2^{4+\sqrt{2}}$

Lời giải.

① $A = \left\{\left[3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{4}}\right] \cdot \left[\left(5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) : 16\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left[3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{4}+\frac{1}{4}} : 2^4\right]^{\frac{1}{2}} = (3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{-4})^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 5 \cdot 2^{-1} = \dfrac{15}{2}$

② $B = \left[2^2 \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left\{3 \cdot \left[3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{6}{5}} = \left[2 \cdot \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[3 \cdot \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$

$= \left[2 \cdot 2^{\frac{5}{6}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}} = \left(2^{\frac{17}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{17}{18}} + 3^{\frac{18}{10}}$.

③ $C = \dfrac{5^{2+2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}}{5^{1+2\sqrt{2}}} + \dfrac{2^{3+3\sqrt{2}} \cdot 2^{2-2\sqrt{2}}}{2^{4+\sqrt{2}}} = 5 - 5^{-1} + \dfrac{2^{5+\sqrt{2}}}{2^{4+\sqrt{2}}} = 5 - \dfrac{1}{5} + 2 = \dfrac{36}{5}$.

□

Ví dụ 5. Cho $a = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ và $b = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$. Tính $A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$.

Lời giải.

Ta có : $a = (2+\sqrt{3})^{-1} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = 2-\sqrt{3}$

$b = 2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = 2+\sqrt{3}$.

Suy ra, $A=(2-\sqrt{3}-1)^{-1}+(2+\sqrt{3}+1)^{-1}=(3-\sqrt{3})^{-1}+(3+\sqrt{3})^{-1}=$
$\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\dfrac{6}{3^2-\sqrt{3}^2}=\dfrac{6}{9-3}=1.$ □

Ví dụ 6. Rút gọn các biểu thức sau:

① $P=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$ với $a>0,b>0$.

② $Q=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

③ $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$ với $x>0,y>0$

Lời giải.

① Ta có $P=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$
$=\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}-\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)=-\sqrt[4]{b}.$

② Ta có $\begin{cases}a^{\sqrt{3}+1}\cdot a^{2-\sqrt{3}}=a^{\sqrt{3}+1+\left(2-\sqrt{3}\right)}=a^3\\ \left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}=a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=a^{2-4}=a^{-2}\end{cases}\Rightarrow Q=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^{3-(-2)}=a^5.$

③ Rút gọn $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2.$

Rút gọn $\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}=\left[\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}-1\right)^2\right]^{-1}=\left(\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2.$

Vậy $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2=x.$

□

Ví dụ 7. Biết $9^x+9^{-x}=23$. Tính 3^x+3^{-x}.

Lời giải.

Ta có : $9^x+9^{-x}=23\Leftrightarrow 3^{2x}+2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}+3^{-2x}=25\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=25\Rightarrow 3^x+3^{-x}=5.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

① $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

② $P=\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}}$ với $x>0$.

Lời giải.

① $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

② $P=\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}}=\left(x^5\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{5+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{21}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{21}{4}.\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{x^7}.$

□

Bài 2. Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa của cùng một cơ số:

① $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ ② $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ với $y > 0$

Lời giải.

① $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5\sqrt{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot \left[x^5 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{5}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{103}{60}}.$

② $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5\sqrt{y}} = \dfrac{y^{\frac{4}{5}}}{y^{\frac{11}{12}}} = y^{-\frac{7}{60}}.$

□

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

① $A = \left(\dfrac{1}{625}\right)^{\frac{-1}{4}} + 16^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{3}}.$

② $B = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}.$

Lời giải.

① $A = (5^{-4})^{\frac{-1}{4}} + (2^4)^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{1}{3}} = 5 + 8 - 1 = 12.$

② $B = (2^{-4})^{-0,75} + (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24.$

□

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

① $A = (32)^{-0,2} - \left(\dfrac{1}{64}\right)^{-0,25} + \left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

② $B = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{(\sqrt{3}+2)\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}} - \left(\dfrac{25}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt[5]{32}}$

③ $C = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ với $a, b \geq 0, a \neq b$

④ $D = \left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}\right) : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$ với $a^2 \neq b^2$

Lời giải.

① $A = (2^5)^{-\frac{1}{5}} - (2^6)^{-\frac{1}{4}} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2} - 2^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{6} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

② $B = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{(\sqrt{3}+2)|\sqrt{3}-2|} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2(-1+\frac{1}{2})} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}.$

③ $C = \dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}.$

④ $D = \left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}\right) : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$

$D = \left(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 = 1.$

□

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

① $E=\sqrt{(x^\pi+y^\pi)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^\pi}$

② $F=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$

Lời giải.

① $E=\sqrt{x^{2\pi}+y^{2\pi}+2x^\pi y^\pi-4x^\pi y^\pi}=\sqrt{x^{2\pi}+y^{2\pi}-2x^\pi y^\pi}=\sqrt{(x^\pi-y^\pi)^2}=|x^\pi-y^\pi|$

② $F=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}}=\dfrac{a+a^2}{a+1}=a.$

□

DẠNG 2. Chứng minh đẳng thức lũy thừa

Phương pháp giải. Để chứng minh đẳng thức ta thường sử dụng các phương pháp sau:

① Biến đổi tương đương.

② Biến đổi vế trái thành vế phải hoặc vế phải thành vế trái.

③ Biến đổi hai vế về đại lượng thứ ba.

Ví dụ 8. Chứng minh đẳng thức $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\\=&(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 9. Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{-2\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}+1}\\=&\sqrt[3]{(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{(\sqrt{2})^3-3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-1}\\=&\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}\\=&(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 10. Chứng minh rằng nếu $1 \le x \le 2$ thì $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT =& \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1} \\ =& \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\ =& \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right| \\ =& (\sqrt{x-1}+1)+(1-\sqrt{x-1}) \text{ (do } 1 \le x \le 2) \\ =& 2 = VP \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Chứng minh đẳng thức $\sqrt{9+\sqrt{80}}+\sqrt{9-\sqrt{80}}=2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT =& \sqrt{5+4\sqrt{5}+4}+\sqrt{5-4\sqrt{5}+4} \\ =& \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} \\ =& \sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2 \\ =& 2\sqrt{5} = VP \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

□

Bài 7. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}=\left(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

Đẳng thức tương đương với

$$\left(\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1.$$

Biến đổi vế phải ta có

$$\begin{aligned} VP =& \left((\sqrt[8]{3})^2-(\sqrt[8]{2})^2\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \\ =& \left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \\ =& \left((\sqrt[4]{3})^2-(\sqrt[4]{2})^2\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \\ =& (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2 = 3-2 = 1 = VP \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

□

Bài 8. Chứng minh rằng $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^{-1}=a^{\frac{2}{3}}.$

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\frac{\sqrt[3]{a}(a-8b)}{(\sqrt[3]{a})^2+2\sqrt[3]{ab}+(2\sqrt[3]{b})^2}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-1}\\=&\frac{\sqrt[3]{a}(a-8b)}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}(2\sqrt[3]{b})+(2\sqrt[3]{b})^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}\\=&\frac{\sqrt[3]{a^2}(a-8b)}{a-8b}=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Bài 9. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{8b-a}{6}\cdot\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}\right)=ab.$

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)+\left(2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)}\\=&\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{4a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+2+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+2-4a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+2}{8a^{-1}-b^{-1}}\\=&\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{6}{\dfrac{8}{a}-\dfrac{1}{b}}\\=&\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{6ab}{8b-a}=ab=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Bài 10. Chứng minh đẳng thức sau

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{1}{4}(2^a-2^{-a})^2}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{4}(2^a-2^{-a})^2}}}=\frac{1-2^a}{1+2^a},\ \text{với } a<0.$$

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}
VT=&\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}(2^{2a}-2+2^{-2a})}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}(2^{2a}-2+2^{-2a})}}}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{\frac{1}{4}(2^{2a}+2+2^{-2a})}}{1+\sqrt{\frac{1}{4}(2^{2a}+2+2^{-2a})}}}\\
=&\sqrt{\frac{-1+\sqrt{\frac{1}{4}(2^{a}+2^{-a})^2}}{1+\sqrt{\frac{1}{4}(2^{a}+2^{-a})^2}}}=\sqrt{\frac{-1+\frac{1}{2}(2^{a}+2^{-a})}{1+\frac{1}{2}(2^{a}+2^{-a})}}\\
=&\sqrt{\frac{\frac{1}{2\cdot 2^a}\left(2^{2a}-2\cdot 2^a+1\right)}{\frac{1}{2\cdot 2^a}\left(2^{2a}+2\cdot 2^a+1\right)}}=\sqrt{\frac{(2^a-1)^2}{(2^a+1)^2}}\\
=&\left|\frac{2^a-1}{2^a+1}\right|=\frac{1-2^a}{1+2^a},\ \text{do } a<0.\\
=&VP\,(\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

□

Bài 11. Chứng minh rằng $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right):\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}
VT=&\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\\
=&\frac{a-b-a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}:\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\\
=&\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\\
=&\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b^2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}=VP\,(\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

□

Bài 12. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}=a+b$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\\=&\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\\=&\left(a+\sqrt{ab}+b\right)-\sqrt{ab}\\=&a+b=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Bài 13. Chứng minh rằng $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}+(ax)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x-a}\right)=1.$

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}+(ax)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right)^2\\=&\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}+\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}+(ax)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)}\right)^2\\=&\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}+\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}\right)^2\\=&\left(x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}\right)^2=1=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Bài 14. Chứng minh rằng $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}=a^{\sqrt{3}}+1.$

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT=&\frac{\left(a^{\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{\sqrt{3}}+1\right)a^{\sqrt{3}}\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+1\right)}{a^{\sqrt{3}}\left(a^{3\sqrt{3}}-1\right)}\\=&\frac{\left(a^{\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{\sqrt{3}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+1\right)}{\left(a^{\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+1\right)}\\=&a^{\sqrt{3}}+1=VP\,(\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Bài 15. Chứng minh rằng nếu $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$ thì $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Biến đổi tương đương ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a\\
\Leftrightarrow&\sqrt{\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})}=a\\
\Leftrightarrow&\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)}\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}}\right)=a\\
\Leftrightarrow&\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}=a\\
\Leftrightarrow&\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=a^{\frac{2}{3}}\ (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

□

DẠNG 3. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp giải. **Cách 1. Đưa về cùng cơ số**

Cho $a\in\mathbb{R}; m,n\in\mathbb{Z}$. Khi đó

1. Với $a>1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m>n$;

2. Với $0<a<1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m<n$.

Cách 2. Đưa về cùng số mũ

Với $0<a<b$ và m là số nguyên thì

1. $a^m<b^m$ khi và chỉ khi $m>0$;

2. $a^m>b^m$ khi và chỉ khi $m<0$.

Ví dụ 11. So sánh $(1,3)^{1,4}$ với 1.

Lời giải.

Ta có $1,3>1$ và $1,4>1$. Do đó $(1,3)^{1,4}>1^1=1$. □

Ví dụ 12. So sánh các số sau:

① 7^{300} và 7^{400}.

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$.

Lời giải.

① Ta có $7>1$ và $300<400$ nên $7^{300}<7^{400}$.

② Ta có $\frac{1}{2}<1$ và $5000<8000$ nên $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}>\left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$.

□

Ví dụ 13. So sánh các số sau:
① 5^{1000} và 6^{1000}.
② 0.3^{-46} và 0.4^{-46}.

Lời giải.
① Ta có $6 > 5$ và $1000 > 0$ nên $5^{1000} > 6^{1000}$.
② Ta có $0.3 < 0.4$ và $-46 < 0$ nên $0.3^{-46} > 0.4^{-46}$. □

Ví dụ 14. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh hai số sau: $(\sin 3)^{\sqrt{3}}$ và $(\sin 3)^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.
Vì $0 < 3 < \pi$ nên $0 < \sin 3 < 1$.
Mặt khác $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ nên $(\sin 3)^{\sqrt{3}} < (\sin 3)^{\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 15. Chứng minh rằng $\sqrt[20]{2} + \sqrt[20]{3} > 2$.

Lời giải.
Ta có: $\begin{cases} \sqrt[20]{2} > \sqrt[20]{1} = 1 \\ \sqrt[20]{3} > \sqrt[20]{1} = 1. \end{cases}$
Vậy $\sqrt[20]{2} + \sqrt[20]{3} > 1 + 1 = 2$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. So sánh 20^{20} với 15^{30}.

Lời giải.
Ta có $15^3 = 3375 > 400 = 20^2$. Do đó $15^{30} = (15^3)^{10} > (20^2)^{10} = 20^{20}$. □

Bài 17. So sánh 2^{100} với 20^{30}.

Lời giải.
Ta có $2^10 = 1024 < 8000 = 20^3$. Do đó $2^{100} = (2^10)^{10} < (20^3)^{10} = 20^{30}$. □

Bài 18. So sánh 3^{567} với 5^{367}.

Lời giải.
Ta có $3^3 = 27 > 25 = 5^2$. Do đó $3^{567} = (3^3)^{189} > (5^2)^{189} = 5^{378} > 5^{367}$. □

Bài 19. So sánh các số sau:
① 3^{600} và 5^{400}.
② 7^{30} và 4^{40}.

Lời giải.

① $3^{600} = 27^{200}$ và $5^{400} = 25^{200}$. Do $200 > 1$ và $27 > 25$ nên $3^{600} > 5^{400}$.

② $7^{30} = 343^{10}$ và $4^{40} = 256^{10}$. Do $10 > 1$ và $343 > 256$ nên $7^{30} > 4^{40}$.

□

Bài 20. So sánh các số sau:

① 56^{1234} và 57^{1234}.

② 0.7^{-26} và 1.1^{-26}.

Lời giải.

① Ta có $56 > 57$ và $1234 > 0$ nên $57^{1000} > 56^{1000}$.

② Ta có $0.7 < 1.1$ và $-26 < 0$ nên $0.7^{-26} > 1.1^{-26}$.

□

Bài 21. So sánh các số sau:

① $(\sqrt{3}-1)^7$ và $(\sqrt{3}-1)^8$.

② π^{-34} và $(\pi+1)^{-34}$.

Lời giải.

① Ta có $\sqrt{3}-1 < 1$ và $7 < 8$ nên $(\sqrt{3}-1)^7 > (\sqrt{3}-1)^8$.

② Ta có $\pi < \pi+1$ và $-34 < 0$ nên $\pi^{-34} > (\pi+1)^{-34}$.

□

Bài 22. So sánh các số sau đây *(không dùng máy tính bỏ túi)*

a) $2^{\frac{2}{3}}$ và $2^{\frac{3}{4}}$.

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-11}$ và $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{-11}$.

c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^{-\sqrt{2}}$ và $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải.

a) Ta có $2 > 1$ và $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$ nên $2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$.

b) Ta có $-11 < 0$ và $\dfrac{3}{7} < \dfrac{5}{9}$ nên $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-11} > \left(\dfrac{5}{9}\right)^{-11}$.

c) Ta có $-\sqrt{2} < 0$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{5} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^{-\sqrt{2}} > \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$.

□

Bài 23. Hãy so sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{17}$ và $\sqrt[3]{28}$.

b) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$.

Lời giải.

a) Ta có: $\begin{cases} \sqrt{17} = \sqrt[6]{17^3} = \sqrt[6]{4913} \\ \sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \end{cases}$
$\Rightarrow \sqrt{17} > \sqrt[3]{28}$

b) Ta có: $\begin{cases} \sqrt[4]{13} = \sqrt[20]{13^5} = \sqrt[20]{371293} \\ \sqrt[5]{23} = \sqrt[20]{23^4} = \sqrt[20]{279841} \end{cases}$
$\Rightarrow \sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$.

□

Bài 24. So sánh: 7^{30} và 4^{40}

Lời giải.

Ta có $7^{30} = 7^{3.10} = 343^10$
Mặt khác $4^{40} = 4^{4.10} = 256^10$.
Ta suy ra $7^{30} > 4^{40}$. □

Bài 25. So sánh hai số p và q biết:

a) $\pi^p > \pi^q$.
b) $\left(\sqrt{5}-1\right)^p < \left(\sqrt{5}-1\right)^q$.
c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^p < \left(\sqrt{2}-1\right)^q$.

Lời giải.

a) Ta có $\pi > 1$ nên $p > q$.
b) Ta có $\sqrt{5}-1 > 1$ nên $p < q$.
c) Ta có $\sqrt{2}-1 < 1$ nên $p > q$.

□

Bài 26. So sánh $\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{107}}\right)^{1000}$ và $\left(\sqrt{26+8\sqrt{10}}\right)^{600}$

Lời giải.

Ta có $\sqrt[3]{9+\sqrt{107}} < \sqrt[3]{9+\sqrt{324}} = 3$.
Suy ra $\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{107}}\right)^{1000} < 3^{1000}$ (1).
Mặt khác, $\sqrt{26+8\sqrt{10}} > \sqrt{26+8\sqrt{9}} = \sqrt{50} > 7$
Vậy $\left(\sqrt{26+8\sqrt{10}}\right)^{600} > 7^{600}$. (2)
Mà $7^3 = 343 > 243 = 3^5 \Rightarrow 7^{600} > 3^{1000}$. (3)
Từ (1), (2), (3) có $\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{107}}\right)^{1000} < \left(\sqrt{26+8\sqrt{10}}\right)^{600}$.

□

Bài 27. So sánh các số sau đây *(không dùng máy tính bỏ túi)*

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

Lời giải.

a) $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3^{-1}3^{\frac{-1}{4}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{-5}{4}}} = (\sqrt{3})^{\frac{-5}{6}}$.

b) $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{5}{7}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$.

□

Bài 28. Không dùng máy tính, hãy so sánh hai số $98^{100} + 99^{100} + 100^{100}$ và 102^{100}

Lời giải.

Ta có $98^{100} + 99^{100} + 100^{100} < 3 \cdot 100^{100}$.

Theo bất đẳng thức Bernoulli ta có $\left(\dfrac{102}{100}\right)^{100} = \left(1 + \dfrac{2}{100}\right)^{100} > 1 + 100.\dfrac{2}{100} = 3$

Suy ra $102^{100} > 3 \cdot 100^{100}$.

Vậy $98^{100} + 99^{100} + 100^{100} < 102^{100}$ □

.

Bài 29. Không dùng máy tính, hãy so sánh hai số $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ và $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{\frac{\sqrt{5}-2\sqrt[3]{5}}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1).n} < 1 - \dfrac{1}{n} < 1.$

Mặt khác ta có $\dfrac{\pi}{5} < 1$ và $\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{5} < 0$ nên $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{\frac{\sqrt{5}-2\sqrt[3]{5}}{3}} > 1.$

Vậy $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{\frac{\sqrt{5}-2\sqrt[3]{5}}{3}}$. □

DẠNG 4. Bài toán lãi kép

Phương pháp giải. Giả sử số tiền gốc là A; lãi suất $r\%$ /kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

- ☑ Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A\,(1+r)^n$.
- ☑ Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $A\,(1+r)^n - A = A\,[(1+r)^n - 1]$.

Ví dụ 16. Bà Hoa gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau 10 năm số tiền cả gốc và lãi bà Hoa thu về là: $A\,(1+r)^n = 100 \cdot (1+0,08)^{10} \approx 215,892$ triệu đồng. Suy ra số tiền lãi bà Hoa thu về sau 10 năm là: $A\,(1+r)^n - A = 100(1+0,08)^{10} - 100 = 115,892$ triệu đồng. □

Ví dụ 17. Một người muốn gửi tiết kiệm ở ngân hàng và hi vọng sau 4 năm có được 850 triệu đồng để mua nhà. Biết rằng lãi suất ngân hàng mỗi tháng trong thời điểm hiện tại là $0,45\%$. Hỏi

người đó mỗi tháng phải gửi vào ngân hàng tối thiểu bao nhiêu tiền để đủ số tiền mua nhà? (Giả sử số tiền mỗi tháng là như nhau và lãi suất trong 4 năm là không thay đổi).

Lời giải.

Giả sử người này gửi tiền ở thời điểm t nào đó, kể từ thời điểm này sau 4 năm (48 tháng) ông muốn có số tiền 850 triệu. Như vậy rõ ràng ta có thể coi đây là bài toán gửi tiền định kì đầu tháng. Áp dụng bài toán 5 ta có số tiền phải gửi mỗi tháng là:

$m = \dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$ $(*)$

Theo bài ra $n = 48$ tháng, $r = 0,45\%$.

Tiền thu được 850 triệu đồng, thay vào $(*)$ ta được:

$m = \dfrac{850 \times 0,45\%}{(1+0,45\%)\left[(1+0,45\%)^{48} - 1\right]} = 15,833$ triệu đồng. □

Ví dụ 18. Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền đã gửi tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Lời giải.

Nếu ban đầu gửi vào a đồng, từ đầu tháng sau gửi thêm a đồng (không đổi) vào đầu mỗi tháng với lãi suất $r\%$ trong n tháng thì tổng số tiền A thu được là:

$A = a + \dfrac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]$

Áp dụng với $a = 4$ triệu đồng, $r = 1\%, n = 11$ (từ đầu tháng 2 đến cuối tháng 12) $A = \dfrac{4}{1\%}(1+1\%)\left[(1+1\%)^n - 1\right] + 4 = 50,73$ triệu đồng. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho quý tiếp theo. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tính tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải.

Số tiền nhận về sau 1 năm của 100 triệu gửi trước là $100(1+2\%)^4$ triệu.

Số tiền nhận về sau 6 tháng của 100 triệu gửi sau là $100(1+2\%)^2$ triệu.

Vậy tổng số tiền là $100(1+2\%)^4 + 100(1+2\%)^2 = 212,283216\,(\approx 212,283)$ triệu □

Bài 31. Bác An đem gửi tổng số tiền 320 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Bác gửi 140 triệu đồng theo kỳ hạn ba tháng với lãi suất $2,1\%$ một quý. Số tiền còn lại bác An gửi theo kỳ hạn một tháng với lãi suất $0,73\%$ một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kỳ hạn số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau 15 tháng kể từ ngày gửi bác An đi rút tiền. Tính gần đúng đến hàng đơn vị tổng số tiền lãi thu được của bác An

Lời giải.

Số tiền nhận về sau 15 tháng của 140 triệu gửi trước là $140.(1+2,1\%)^5$ triệu.
Số tiền nhận về sau 15 tháng của 180 triệu gửi sau là $180.(1+0,73\%)^{15}$ triệu.
Suy ra tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà bác An thu được là:
$140.(1+2,1\%)^5+180.(1+0,73\%)^{15}\approx 356,080253$ triệu.
Vậy số tiền lãi bác An thu được là: $356,080253-320=360,80253=36080253$ đồng. □

Bài 32. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12% trên năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách sau: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng ba tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

Lời giải.

Lãi suất 12%/năm tương ứng 1%/tháng nên $r=0,01$ (do vay ngắn hạn)
Số tiền gốc sau 1 tháng là: $T+T\cdot r-m=T(1+r)-m$
Số tiền gốc sau 2 tháng là:
$[T(1+r)-m]+[T(1+r)-m].r-m=T(1+r)^2-m[(1+r)+1]$
Số tiền gốc sau 3 tháng là:
$T(1+r)^3-m\left[(1+r)^2+1+r+1\right]=0$
Do đó: $m=\dfrac{T(1+r)^3}{(1+r)^2+1+r+1}=\dfrac{T(1+r)^3.r}{(1+r)^3-1}=\dfrac{1,01^3}{1,01^3-1}$ (triệu đồng). □

Bài 33. Ông A muốn sở hữu khoản tiền 20.000.000đ vào ngày 2/3/2012 ở một tài khoản lãi suất năm là 6,05%. Hỏi ông A cần đầu tư bao nhiêu tiền trên tài khoản này vào ngày 2/3/2007 để đạt được mục tiêu đề ra?

Lời giải.

Gọi V_0 là lượng vốn cần đầu tư ban đầu, lượng vốn sẽ được đầu tư trong 5 năm nên ta có:
$20.000.000=V_0.(1+0,0605)^5\Rightarrow V_0=20.000.000.(1+0,0605)^{-5}=14.909.965,25$ đ. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Giá trị của biểu thức $P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. 3. **B.** 81. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{1-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1} = 3^4 = 81$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Biến đổi $P = \sqrt{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[6]{x^4}}$ với $x > 0$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, ta được

A. $P = x^{\frac{4}{9}}$. **B.** $P = x^{\frac{4}{3}}$. **C.** $P = x$. **D.** $P = x^2$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[6]{x^4}} = \sqrt{x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{x^2} = x$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho số thực $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{a} > 1$. **B.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. **C.** $\dfrac{1}{a^{2018}} > \dfrac{1}{a^{2019}}$. **D.** $a^{-\sqrt{2}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất $\begin{cases} a > 1 \\ m > n \end{cases} \Rightarrow a^m > a^n$.

Với $\begin{cases} a > 1 \\ \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho biểu thức $P = 2^x \times 2^y$, $x; y \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P = 2^{x-y}$. **B.** $P = 4^{xy}$. **C.** $P = 2^{xy}$. **D.** $P = 2^{x+y}$.

Lời giải.

Ta có $P = 2^x \times 2^y = 2^{x+y}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho $x > 0$, biểu thức $P = x\sqrt[5]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{7}{5}}$. **B.** $x^{\frac{6}{5}}$. **C.** $x^{\frac{1}{5}}$. **D.** $x^{\frac{4}{5}}$.

Lời giải.

Ta có $P = x\sqrt[5]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{6}{5}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 + n^2 = 543$. **B.** $m^2 - n^2 = 312$. **C.** $m^2 - n^2 = -312$. **D.** $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải.

Ta có:
$A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot a^{-\frac{5}{7}}}=\dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{6-\frac{23}{7}}=a^{\frac{19}{7}}$.
Suy ra $m=19, n=7$ nên $m^2+n^2=410$ và $m^2-n^2=312$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=(x^3-27)^{\frac{\pi}{2}}$ là
A. $\mathscr{D}=(3;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $\mathscr{D}=[3;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^3-27>0\Leftrightarrow x>3$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Nếu $a^{2x}=3$ thì $3a^{6x}$ bằng
A. 54. **B.** 45. **C.** 27. **D.** 81.

Lời giải.

Ta có $3a^{6x}=3\left(a^{2x}\right)^3=3\cdot 3^3=81$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?
A. $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{18}$. **C.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. **D.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

$P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$
Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Rút gọn biểu thức $P=a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{a}$ với $a>0$.
A. $P=a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P=a^{\frac{9}{2}}$. **C.** $P=a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $P=a^3$.

Lời giải.

$P=a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{a}=a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{11}{6}}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho x, y là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?
A. $(xy)^n=x^ny^n$. **B.** $x^my^n=(xy)^{m+n}$. **C.** $(x^m)^n=(x)^{mn}$. **D.** $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$.

Lời giải.

Đẳng thức sai là $x^my^n=(xy)^{m+n}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho a là số thực dương. Viết $a^{\frac{1}{3}}:\sqrt{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.
A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{-\frac{5}{3}}$. **C.** $a^{\frac{1}{6}}$. **D.** $a^{-\frac{1}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $a^{\frac{1}{3}}:\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}:a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{6}}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $(5^x)^y = (5^y)^x$. **B.** $4^{\frac{x}{y}} = \dfrac{4^x}{4^y}$. **C.** $(2.7)^x = 2^x.7^x$. **D.** $3^x.3^y = 3^{x+y}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{4^x}{4^y} = 4^{x-y}$

Chọn đáp án B □

Câu 14. Giá trị của $2^{3-\sqrt{2}}.4^{\sqrt{2}}$ bằng bao nhiêu?

A. $2^{3+\sqrt{2}}$. **B.** $4^{6\sqrt{2}-4}$. **C.** 8. **D.** 32.

Lời giải.

$2^{3-\sqrt{2}}.4^{\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}}.2^{2\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 2^{3+\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho x, y là hai số thực dương và m, n là 2 số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $x^m \times x^n = x^{m+n}$. **B.** $(x^m)^n = x^{mn}$. **C.** $(xy)^n = x^n \times y^n$. **D.** $(x^m)^n = x^{m^n}$.

Câu 16. Giá trị của biểu thức $P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. 3. **B.** 81. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải.

$P = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Với các số thực a, b bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{5^a}{5^b} = 5^{a-b}$. **B.** $\dfrac{5^a}{5^b} = 5^{\frac{a}{b}}$. **C.** $\dfrac{5^a}{5^b} = 5^{ab}$. **D.** $\dfrac{5^a}{5^b} = 5^{a+b}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của lũy thừa $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Ta suy ra đẳng thức $\dfrac{5^a}{5^b} = 5^{a-b}$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho a là số thực dương. Hãy biểu diễn biểu thức $P = a^2\sqrt[3]{a}$ dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $P = a^{\frac{4}{3}}$. **B.** $P = a^{\frac{7}{3}}$. **C.** $P = a^{\frac{5}{3}}$. **D.** $P = a^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $P = a^2\sqrt[3]{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho a là số thực dương. Hãy viết biểu thức $A = a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ dưới dạng lũy thừa số mũ hữu tỷ.

A. $A = a^{\frac{5}{3}}$. **B.** $A = a^{\frac{4}{3}}$. **C.** $A = a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $A = a^{\frac{17}{6}}$.

Lời giải.

Ta có: $A = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{17}{6}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho số thực $a > 1$ và các số thực α, β. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{a^\alpha} < 0, \alpha \in \mathbb{R}$. **B.** $a^\alpha < 1, \alpha \in \mathbb{R}$. **C.** $a^\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{R}$. **D.** $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Lời giải.

Theo tính chất của lũy thừa với cơ số $a > 1$. Khi đó $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho số dương a khác 1 và các số thực α, β. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$. **B.** $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. **C.** $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$. **D.** $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.

Lời giải.

Ta có $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$.

A. $P = ab^2$. **B.** $P = a^2b$. **C.** $P = ab$. **D.** $P = a^2b^2$.

Lời giải.

$$P = \frac{(a^3b^2)^{\frac{1}{4}\cdot 4}}{(a^{12}b^6)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{a^3b^2}{a^2b} = ab.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Tìm dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ của biểu thức $\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a}}$ (với $a > 0$).

A. $a^{\frac{7}{4}}$. **B.** $a^{\frac{1}{4}}$. **C.** $a^{\frac{4}{7}}$. **D.** $a^{\frac{1}{7}}$.

Lời giải.

$\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{7}{4}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{2}{3}}.\sqrt[5]{x}$ với x là số thực dương.

A. $P = x^{\frac{7}{3}}$. **B.** $P = x^{\frac{1}{5}}$. **C.** $P = x^{\frac{3}{8}}$. **D.** $P = x^{\frac{13}{15}}$.

Lời giải.

Ta có $P = x^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{11}{15}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho biểu thức $T = \sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$ với $a > 0$. Viết biểu thức T dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $a^{\frac{1}{3}}$. **B.** $a^{\frac{3}{5}}$. **C.** $a^{\frac{4}{15}}$. **D.** $a^{\frac{2}{15}}$.

Lời giải.

Ta có $T = \sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{4}{15}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

A. $a^{\frac{3}{8}}$. **B.** $a^{\frac{8}{3}}$. **C.** $\sqrt[3]{a^2}$. **D.** $\sqrt[6]{a}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3\cdot 4}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không có nghĩa?

A. $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^0$. **B.** $(-4)^{-\frac{1}{3}}$. **C.** $(-3)^{-4}$. **D.** $1^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương nên biểu thức $(-4)^{-\frac{1}{3}}$ không có nghĩa.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho x, y là hai số thực dương khác 1 và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. **B.** $x^n \cdot y^n = (xy)^n$. **C.** $\dfrac{x^n}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-m}$. **D.** $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$.

Lời giải.

Theo tính chất lũy thừa với số mũ thực ta có:

☑ $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

☑ $x^n \cdot y^n = (xy)^n$.

☑ $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$.

Do đó đẳng thức $\dfrac{x^n}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-m}$ là **sai**.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = \sqrt{x}$. **B.** $P = x^{\frac{1}{8}}$. **C.** $P = x^{\frac{2}{9}}$. **D.** $P = x^2$.

Lời giải.

Ta có $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào có nghĩa?

A. $(-2)^{\sqrt{2}}$. **B.** $(-3)^{-6}$. **C.** $(-5)^{-\frac{3}{4}}$. **D.** 0^{-3} .

Lời giải.

Các biểu thức $(-2)^{\sqrt{2}}$ và $(-5)^{-\frac{3}{4}}$ không có nghĩa vì các số mũ không là số nguyên nên cơ số phải là số thực dương. Biểu thức 0^{-3} không có nghĩa.

Biểu thức $(-3)^{-6}$ là biểu thức có nghĩa.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho các số thực $a, b, n, m\,(a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(a^m)^n = a^{m+n}$. **B.** $a^m.a^n = a^{m+n}$.

C. $\dfrac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. **D.** $(a+b)^m = a^m + b^m$.

Lời giải.

Áp dụng lý thuyết sách giáo khoa.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = x^{\frac{11}{6}}$. **B.** $P = x^{\frac{7}{6}}$. **C.** $P = x^{\frac{5}{6}}$. **D.** $P = x$.

Lời giải.

$P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho $0 < a \neq 1; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$. **B.** $a^{\sqrt{\alpha}} = (\sqrt{a})^\alpha \quad (\alpha > 0)$.

C. $a^{\alpha^\beta} = (a^\alpha)^\beta$. **D.** $\sqrt{a^\alpha} = (\sqrt{a})^\alpha$.

Lời giải.

Mệnh đề $\sqrt{a^\alpha} = (\sqrt{a})^\alpha$ đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^{\frac{5}{9}}$. **B.** $Q = b^2$. **C.** $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. **D.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $Q = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho biểu thức $P = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$. Rút gọn biểu thức P được kết quả

A. $P = a^3$. **B.** $P = a^5$. **C.** $P = a$. **D.** $P = a^4$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho a là một số dương. Biểu thức $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{7}{6}}$. **B.** $a^{\frac{11}{6}}$. **C.** $a^{\frac{6}{5}}$. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Với các số dương a, b bất kỳ, đặt $M = \left(\dfrac{a^{12}}{\sqrt[5]{b^3}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\log M = -\dfrac{18}{5}\log a - \dfrac{9}{50}\log b$. **B.** $\log M = -\dfrac{18}{5}\log a + \dfrac{9}{50}\log b$.

C. $\log M = \dfrac{18}{5}\log a - \dfrac{9}{50}\log b$. **D.** $\log M = \dfrac{18}{5}\log a + \dfrac{9}{50}\log b$.

Lời giải.

Ta có: $M = \left(a^{12}b^{-\frac{3}{5}}\right)^{-0,3} = a^{\frac{-18}{5}}b^{\frac{9}{50}}$, suy ra: $\log M = -\dfrac{18}{5}\log a + \dfrac{9}{50}\log b$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho x, y là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. **B.** $x^m \cdot y^n = (xy)^{m+n}$. **C.** $(x^n)^m = x^{nm}$. **D.** $(xy)^n = x^n \cdot y^n$.

Lời giải.

Ta có $(xy)^{m+n} = x^{m+n} \cdot y^{m+n} = x^m x^n \cdot y^m y^n$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho 4 số thực a, b, x, y với a, b là các số dương và khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. **B.** $(a^x)^y = a^{x+y}$. **C.** $a^x.a^y = a^{x.y}$. **D.** $(a.b)^x = a.b^x$.

Lời giải.

Dựa vào công thức lũy thừa

Chọn đáp án A ☐

Câu 40. Hãy rút gọn biểu thức $A = a^{1+\sqrt{5}} \cdot a^{1-\sqrt{5}}$.

A. $A = \dfrac{1}{a^4}$. **B.** $A = \dfrac{1}{a^{-4}}$. **C.** $A = a^2$. **D.** $A = a^4$.

Lời giải.

$A = a^{1+\sqrt{5}} \cdot a^{1-\sqrt{5}} = a^{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = a^2$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 41. Rút gọn biểu thức $P = \left(2-\sqrt{3}\right)^{2017} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^{2018}$.

A. $P = 2-\sqrt{3}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = -2-\sqrt{3}$. **D.** $P = 2+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$.

Do đó:

$P = \left(2-\sqrt{3}\right)^{2017} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^{2018} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^{2018} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017+2018} = 2+\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 42. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\mathrm{e}^3 > \mathrm{e}^2$. **B.** $0{,}5^3 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$. **C.** $\left(\sqrt{3}\right)^2 < \left(\sqrt{3}\right)^3$. **D.** $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 < \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của lũy thừa ta có $0{,}5^3 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ là mệnh đề sai do $a < 1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 43. Cho số thực a thỏa $a^3 > a^\pi$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < a < 1$. **B.** $a < 0$. **C.** $a > 1$. **D.** $a = 1$.

Lời giải.

Trong đề bài có lũy thừa với số mũ thực, là a^π, nên $a > 0$.

Lại có: $3 < \pi$ mà $a^3 > a^\pi \Rightarrow 0 < a < 1$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 44. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

A. $P = 16$. **B.** $P = 18$. **C.** $P = 12$. **D.** $P = 24$.

Lời giải.

Ta có $P = (2^{-4})^{-0{,}75} + (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 2^3 + 2^4 = 24$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 45. Tính $P = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1} - \dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^{-1}$.

A. $P = 2$. **B.** $P = \dfrac{31}{48}$. **C.** $P = \dfrac{2}{21}$. **D.** $P = -\dfrac{141}{112}$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9} = 2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 46. Cho biểu thức $P=\sqrt{x\cdot\sqrt[5]{x^3}}$, $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=x^{\frac{14}{5}}$. **B.** $P=x^{\frac{3}{5}}$. **C.** $P=x^{\frac{4}{15}}$. **D.** $P=x^{\frac{4}{5}}$.

Lời giải.

$P=\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}}=\sqrt{x^{1+\frac{3}{5}}}=x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}}=x^{\frac{4}{5}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Giá trị của biểu thức $A=64^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{64}$ là

A. $A=\sqrt[36]{64}$. **B.** $A=2$. **C.** $A=64$. **D.** $A=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $A=64^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{64}=8\cdot 4\cdot 2=64$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào **không** có nghĩa?

A. $(-4)^{-\frac{1}{3}}$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^0$. **C.** $(-3)^{-4}$. **D.** $1^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa lũy thừa a^α nếu $\alpha\notin\mathbb{Z}$ thì cơ số $a>0$. Vậy biểu thức $(-4)^{-\frac{1}{3}}$ sai.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3\cdot 2^{-1}+5^{-3}\cdot 5^4}{10^{-3}:10^{-2}-0,1^0}$.

A. 9. **B.** -10. **C.** -9. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có

$$P=\frac{2^3\cdot 2^{-1}+5^{-3}\cdot 5^4}{10^{-3}:10^{-2}-0,1^0}=\frac{2^2+5}{10^{-1}-1}=-10.$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-3}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-2)^{-3}$ xác định khi $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{a}.a^{-2}.a^{\frac{3}{4}}$, với $a>0$.

A. $P=a^{-\frac{7}{4}}$. **B.** $P=a^{-\frac{3}{4}}$. **C.** $P=a^{-\frac{1}{2}}$. **D.** $P=a^{\frac{5}{4}}$.

Lời giải.

$\sqrt{a}.a^{-2}.a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}.a^{-2}.a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}+(-2)+\frac{3}{4}}=a^{-\frac{3}{4}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Biểu thức $2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 8$ viết dưới dạng lũy thừa cơ số 2 với số mũ hữu tỷ là

A. $2^{\frac{7}{2}}$. **B.** $2^{\frac{5}{2}}$. **C.** $2^{\frac{11}{2}}$. **D.** $2^{\frac{9}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 8=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^3=2^{2+\frac{1}{2}+3}=2^{\frac{11}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho m, n là các số thực tùy ý và a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a^m \cdot a^n = a^{mn}$. **B.** $a^m + a^n = a^{mn}$. **C.** $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$. **D.** $a^{mn} = a^{\frac{m}{n}}$.

Lời giải.

Ta có $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$ đúng với mọi m, n thực và $a > 0, a \neq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho biểu thức $P = x\sqrt[3]{x^4}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $P = x^{\frac{7}{3}}$. **B.** $P = x^{\frac{5}{3}}$. **C.** $P = x^{\frac{7}{4}}$. **D.** $P = x^{\frac{6}{5}}$.

Lời giải.

$P = x \cdot x^{\frac{4}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho a, b là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$. **B.** $a^m \cdot a^n = a^{mn}$. **C.** $(a^m)^n = a^{mn}$. **D.** $\left(\dfrac{1}{b}\right)^{-n} = b^n$.

Lời giải.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ nên khẳng định $a^m \cdot a^n = a^{mn}$ sai.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Biết $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$. Khi đó, khẳng định đúng về a là

A. $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a \in \mathbb{R}$. **D.** $a > 1$.

Lời giải.

Ta xét hàm số $y = a^x$ $(0 < a, a \neq 1)$. Hàm số đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Từ điều kiện $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$, ta suy ra $0 < a < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{a})^3 \cdot \left(\sqrt[3]{a^4}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{a^5}\right)$ (với $a > 0$).

A. $A = a^{\frac{133}{60}}$. **B.** $A = a^{\frac{23}{12}}$. **C.** $A = a^{\frac{49}{12}}$. **D.** $A = a^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải.

$A = (\sqrt{a})^3 \cdot \left(\sqrt[3]{a^4}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{a^5}\right) = a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}} = a^{\frac{49}{12}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^8} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^{-3}}}$ $(a > 0)$, ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $3m^2 - 2n = 0$. **B.** $m^2 + n^2 = 25$. **C.** $m^2 - n^2 = 25$. **D.** $2m^2 + n^2 = 10$.

Lời giải.

Ta có $A = \dfrac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^5 \cdot a^{-\frac{3}{4}}} = a^{\frac{3}{4}}$. Suy ra $m = 3$, $n = 4$ và $m^2 + n^2 = 25$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Với α là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(10^\alpha)^2 = 100^\alpha$. **B.** $\sqrt{10^\alpha} = \left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **C.** $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. **D.** $(10^\alpha)^2 = 10^{\alpha^2}$.

Lời giải.

Ta có: $(10^\alpha)^2 = 10^{2\alpha}$ nên mệnh đề $(10^\alpha)^2 = 10^{\alpha^2}$ sai.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-5x+6=0$. Tính giá trị của $A=5^{x_1}+5^{x_2}$.

A. $A=125$. **B.** $A=3125$. **C.** $A=150$. **D.** $A=15625$.

Câu 61. Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P=a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $P=a^{\frac{1}{15}}$. **B.** $P=a^{\frac{2}{5}}$. **C.** $P=a^{-\frac{1}{15}}$. **D.** $P=a^{\frac{19}{15}}$.

Câu 62. Cho các số thực m, n và a là số thực dương. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $a^{m+n}=(a^m)^n$. **B.** $a^{m+n}=\dfrac{a^m}{a^n}$. **C.** $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$. **D.** $a^{m+n}=a^m+n$.

Lời giải.

Ta có $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho $\left(\sqrt{5}-2\right)^a>\left(\sqrt{5}-2\right)^b$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a>b$. **B.** $a<b$. **C.** $a\le b$. **D.** $a\ge b$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{5}-2<1$, do đó nếu $\left(\sqrt{5}-2\right)^a>\left(\sqrt{5}-2\right)^b$ thì ta suy ra $a<b$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $a^{\frac{6}{5}}$. **B.** $a^{\frac{11}{6}}$. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{7}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{6}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Tính $K=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$, ta được

A. 24. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải.

$K=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-3}}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-4}}=\sqrt[4]{16^3}+\sqrt[3]{8^4}=2^3+2^4=24$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Biểu thức $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x^5}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{7}{3}}$. **B.** $x^{\frac{5}{2}}$. **C.** $x^{\frac{2}{3}}$. **D.** $x^{\frac{5}{3}}$.

Lời giải.

$\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{5}{3}}$ $(x>0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho $\pi^\alpha<\pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha>\beta$. **B.** $\alpha\beta=1$. **C.** $\alpha<\beta$. **D.** $\alpha+\beta=0$.

Lời giải.

Do $\pi>1$ nên từ $\pi^\alpha<\pi^\beta$, ta có $\alpha<\beta$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Rút gọn biểu thức $b^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}:b^{-2\sqrt{3}}$ $(b>0)$ ta được

A. b^4. **B.** b^3. **C.** b^2. **D.** b.

Lời giải.

$b^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} : b^{-2\sqrt{3}} = b^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}} = b^4$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho a là số thực dương và α, β là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$. **B.** $a^{\alpha\cdot\beta} = (a^\alpha)^\beta$. **C.** $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$. **D.** $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ nên $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hai số thực dương a và b. Biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ được viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{30}{31}}$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{7}}$. **C.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$. **D.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{31}{30}}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{15}}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{30}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{15}}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{30}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Biểu thức $P = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x^5}\ (x > 0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $P = x^{\frac{8}{3}}$. **B.** $P = x^{\frac{5}{6}}$. **C.** $P = x^{\frac{1}{3}}$. **D.** $P = x^3$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x^5} = \sqrt{x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{11}{6}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{8}{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P = x^{\frac{7}{12}}$. **C.** $P = x^{\frac{5}{8}}$. **D.** $P = x^{\frac{7}{24}}$.

Lời giải.

Ta có : $P = \sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}} = [x(x^3x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = [x(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{24}} = x^{\frac{5}{8}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho $m > 0$. Biểu thức $m^{\sqrt{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}$ bằng

A. $m^{2\sqrt{3}-2}$. **B.** $m^{2\sqrt{3}-3}$. **C.** m^{-2}. **D.** m^2.

Lời giải.

Ta có: $m^{\sqrt{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2} = m^{\sqrt{3}-(\sqrt{3}-2)} = m^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Số nào dưới đây nhỏ hơn 1?

A. e^π. **B.** $\left(\sqrt{3}\right)^{\mathrm{e}}$. **C.** π^{e}. **D.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tính giá trị của biểu thức $K = \dfrac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}\cdot 25^2+(0,7)^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{33}{13}$.

Lời giải.

Ta có

$$K = \frac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}\cdot 25^2+(0,7)^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}} = \frac{2\cdot 2^4+3^{-6}\cdot 3^6}{5^{-3}\cdot 5^4+1\cdot 2^3} = \frac{2^5+1}{5+2^3} = \frac{33}{13}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 76. Biết số nguyên dương M sẽ có n chữ số (khi biểu diễn thập phân) nếu $10^{n-1}\le M<10^n$. Hỏi số $M=2^{400}$ có bao nhiêu chữ số?

A. 121. **B.** 278. **C.** 120. **D.** 122.

Lời giải.

Ta có $M=2^{400}\Leftrightarrow \log M = 400\log 2\approx 120.4$.

Do đó $10^{120}<M<10^{121}$. Vậy $n=121$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho hàm số $f(x)=(x^2+x+6)^{\frac{3}{2}}$. Khi đó giá trị của $f(-1)$ bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{6}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $x^2+x+6>0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $-1\in\mathscr{D}$ nên $f(-1)=[(-1)^2-1+6]^{\frac{3}{2}}=6^{\frac{3}{2}}=6\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Cho x, y, u, v là các số thực dương tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(y^u)^v=y^{uv}$. **B.** $x^u\cdot x^v=x^{uv}$. **C.** $\dfrac{x^u}{x^v}=x^{u-v}$. **D.** $x^u\cdot y^u=(xy)^u$.

Lời giải.

Ta có $x^u\cdot x^v=x^{u+v}$ nên khẳng định sai là $x^u\cdot x^v=x^{uv}$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Cho a là số thực dương. Biểu thức $a^2\sqrt[3]{a}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số hữu tỉ là

A. $a^{\frac{4}{3}}$. **B.** $a^{\frac{7}{3}}$. **C.** $a^{\frac{5}{3}}$. **D.** $a^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

$a^2\sqrt[3]{a}=a^{2+\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho $0 < a \neq 1$ và các số thực α, β. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$. **B.** $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha\beta}$. **C.** $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$. **D.** $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Lời giải.

Theo tính chất lũy thừa ta suy ra mệnh đề $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha\beta}$ là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Rút gọn biểu thức $P = a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{a}$ với $a > 0$.

A. $P = a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P = a^{\frac{9}{2}}$. **C.** $P = a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $P = a^3$.

Lời giải.

Với $a > 0$ ta có $P = a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{11}{6}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Cho a là số thực dương. Biểu thức $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $a^{\frac{4}{3}}$. **B.** $a^{\frac{7}{3}}$. **C.** $a^{\frac{5}{3}}$. **D.** $a^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

$a^2 \cdot \sqrt[3]{a} = a^2 \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{2+\frac{4}{3}} = a^{\frac{7}{3}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Kết quả viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ của biểu thức $F = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}$ với $(a > 0)$ là

A. $F = a^{\frac{1}{4}}$. **B.** $F = a^{\frac{3}{8}}$. **C.** $F = a^{\frac{1}{2}}$. **D.** $F = a^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải.

Với $(a > 0)$ ta có

$$F = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{1}{16}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{4}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 84. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó m, $n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 312$. **B.** $m^2 + n^2 = 543$. **C.** $m^2 - n^2 = -312$. **D.** $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}+\frac{11}{3}}}{a^{4-\frac{5}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}.$$

Vậy $m^2 - n^2 = 312$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 2$ và $f(1) = 3$.

A. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + 2x - \dfrac{1}{2}$. **B.** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + 2x + \dfrac{3}{2}$.

C. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{x} + 2x - \dfrac{1}{2}$. **D.** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{x} + 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\left(x-\frac{1}{x^2}+2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}+2x+c.$

Từ $f(1)=3$ suy ra $c=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{x}+2x-\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án C □

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{x}+2.$

Câu 86. Cho a, b là các số thực dương, rút gọn $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ ta được

A. $P=ab.$ **B.** $P=a+b.$ **C.** $P=a^4b+ab^4.$ **D.** $P=a^2b+ab^2.$

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab.$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{x}$ (với $x>0$).

A. $x^{\frac{5}{16}}.$ **B.** $x^{\frac{5}{8}}.$ **C.** $x^{\frac{1}{16}}.$ **D.** $x^4.$

Lời giải.

Ta có $P=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=x^{\frac{5}{8}}.$

Chọn đáp án B □

Câu 88. Cho số dương a và $m,n\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^m\cdot a^n=a^{m-n}.$ **B.** $a^m\cdot a^n=(a^m)^n.$ **C.** $a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$ **D.** $a^m\cdot a^n=a^{mn}.$

Lời giải.

Từ công thức hàm lũy thừa thì công thức đúng là $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Cho số thực a dương và hai số $m,\ n\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^{m+n}=(a^m)^n.$ **B.** $a^{m+n}=\dfrac{a^m}{a^n}.$ **C.** $a^{m+n}=a^m\cdot a^n.$ **D.** $a^{m+n}=a^m+n.$

Lời giải.

Ta có $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\sqrt{10^\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}.$ **B.** $\sqrt{10^\alpha}=\left(\sqrt{10}\right)^\alpha.$ **C.** $(10^\alpha)^2=100^\alpha.$ **D.** $(10^\alpha)^2=10^{\alpha^2}.$

Lời giải.

Ta có $\sqrt{10^\alpha}=\left(\sqrt{10}\right)^\alpha=10^{\frac{\alpha}{2}}$, $(10^\alpha)^2=100^\alpha$ và $(10^\alpha)^2=10^{2\alpha}$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

A. $m=n.$ **B.** $m<n.$ **C.** $m>n.$ **D.** $m\neq n.$

Lời giải.

Do $0<\sqrt{2}-1<1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n \Leftrightarrow m>n$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}}>(x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2<x<3$. **B.** $0<x<1$. **C.** $x>2$. **D.** $x>1$.

Lời giải.

Do $-\dfrac{1}{3}<-\dfrac{1}{6}$ và $-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{6}\notin\mathbb{Z}$ nên bất phương trình tương đương $\begin{cases}x-2>0\\x-2<1\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<3$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{4-\sqrt{5}}\cdot a^{\sqrt{5}-2}}$(với $a>0$ và $a\neq 1$).

A. $P=2$. **B.** $P=a^2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=a$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{4-\sqrt{5}}\cdot a^{\sqrt{5}-2}}=\dfrac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{4-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2}}=\dfrac{a^2}{a^2}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho hàm số $f(x)=(2x^2+3x+1)^{\frac{3}{2}}$. Khi đó giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

A. 8. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $6\sqrt{6}$. **D.** $6^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Dễ thấy $x=1$ thuộc tập xác định hàm số đã cho.

Ta có $f(1)=6^{\frac{3}{2}}=6\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho α là một số thực dương. Viết $\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\alpha}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $\alpha^{\frac{7}{3}}$. **B.** $\alpha^{\frac{7}{6}}$. **C.** $\alpha^{\frac{5}{3}}$. **D.** $\alpha^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

$$\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{7}{6}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho các số thực a,b thỏa mãn $0<a<b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^x<b^x$ với mọi $x\neq 0$. **B.** $a^x<b^x$ với mọi $x>0$.

C. $a^x<b^x$ với mọi $x<0$. **D.** $a^x<b^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Theo tính chất lũy thừa, ta có $a^x<b^x$ với mọi $x>0$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{x}$ (với $x>0$).

A. x^4. **B.** $x^{\frac{1}{16}}$. **C.** $x^{\frac{5}{16}}$. **D.** $x^{\frac{5}{8}}$.

Lời giải.

Ta có $P=x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=x^{\frac{5}{8}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Với $a>0$, $b>0$ và α, β là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$. **B.** $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$. **C.** $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. **D.** $a^\alpha\cdot b^\alpha=(ab)^\alpha$.

Lời giải.

Theo tính chất của lũy thừa thì mệnh đề sai là $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Tính giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}}4}$ với $a>0$, $a\neq 1$.

A. 8. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}}4}=a^{2\log_a 4}=a^{\log_a 4^2}=16$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Với mọi số thực dương a và m,n là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. **B.** $(a^m)^n=a^{m^n}$. **C.** $(a^m)^n=a^{m+n}$. **D.** $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{n-m}$.

Lời giải.

Với mọi số thực dương a và m,n là hai số thực bất kì, ta có $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. D	5. B	6. B	7. A	8. D	9. D	10. C
11. B	12. D	13. B	14. A	15. D	16. B	17. A	18. B	19. D	20. D
21. A	22. C	23. A	24. D	25. C	26. D	27. B	28. C	29. A	30. B
31. B	32. D	33. D	34. D	35. B	36. A	37. B	38. B	39. A	40. C
41. D	42. B	43. A	44. D	45. A	46. D	47. C	48. A	49. B	50. C
51. B	52. C	53. C	54. A	55. B	56. B	57. C	58. B	59. D	60. C
61. D	62. C	63. B	64. D	65. A	66. D	67. C	68. A	69. C	70. C
71. A	72. C	73. D	74. D	75. D	76. A	77. B	78. B	79. B	80. B
81. C	82. C	83. A	84. A	85. C	86. A	87. B	88. C	89. C	90. D
91. C	92. A	93. C	94. C	95. B	96. B	97. D	98. C	99. C	100. A

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tính $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}(a^{\frac{-2}{3}}+a^{\frac{1}{3}})}{a+1}$, với $a>0$.

A. $a-1$. **B.** a^2+1. **C.** a. **D.** $a+1$.

Lời giải.

$$\frac{a^{\frac{5}{3}}\left(a^{\frac{-2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)}{a+1}=\frac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{-2}{3}}+a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{1}{3}}}{a+1}=\frac{a+a^2}{a+1}=a.$$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\pi^{20}<\mathrm{e}^{20}$. **B.** $(\frac{2}{3})^{12}<(\frac{2}{3})^{10}$. **C.** $(\frac{1}{5})^{18}>(\frac{1}{5})^{16}$. **D.** $5^{20}<5^{19}$.

Lời giải.

+) $\begin{cases}20>0\\ \pi>e\end{cases}\Leftrightarrow \pi^{20}>\mathrm{e}^{20}$. Do đó mệnh đề A sai.

+) $\begin{cases}12>10\\ \dfrac{2}{3}<1\end{cases}\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{12}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$. Do đó mệnh đề B đúng.

+) $\begin{cases}18>16\\ \dfrac{1}{5}<1\end{cases}\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^{18}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{16}$. Do đó mệnh đề C sai.

+) $\begin{cases}20>19\\ 5>1\end{cases}\Leftrightarrow 5^{20}>5^{19}$. Do đó mệnh đề D sai.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hai số thực dương a và b. Biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{30}{31}}$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{7}}$. **C.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$. **D.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{31}{30}}$.

Lời giải.

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{15}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{30}}=\frac{a^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}}}{b^{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho $m>0$. Biểu thức $m^{\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}$ bằng

A. $m^{2\sqrt{3}-2}$. **B.** $m^{2\sqrt{3}-3}$. **C.** m^{-2}. **D.** m^2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}m^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}&=m^{\sqrt{3}}\cdot\left(m^{-1}\right)^{\sqrt{3}-2}\\&=m^{\sqrt{3}}\cdot m^{2-\sqrt{3}}\\&=m^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}\\&=m^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Tích $\frac{1}{2019!}\left(1-\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^3\cdots\left(1-\frac{1}{2019}\right)^{2018}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a;b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2020;-2019)$. **B.** $(2019;-2019)$. **C.** $(2019;-2020)$. **D.** $(2018;-2019)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2019!}\left(1-\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^3\cdots\left(1-\frac{1}{2019}\right)^{2018}&=\frac{1}{2019!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdots\left(\frac{2018}{2019}\right)^{2018}\\&=\frac{1}{2019!}\cdot\frac{1.2.3...2018}{2019^{2018}}\\&=\frac{1}{2019^{2019}}\\&=2019^{-2019}.\end{aligned}$$

Khi đó (a,b) là $(2019;-2019)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x^5}}{x\sqrt{x}}$ với $x>0$?

A. $P=\sqrt{x}$. **B.** $P=\sqrt[3]{x^2}$. **C.** $x^{-\frac{2}{3}}$. **D.** $x^{-\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

$$P=\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x^5}}{x\sqrt{x}}=\frac{x^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}}{x^{1+\frac{1}{2}}}=x^{\frac{7}{6}-\frac{3}{2}}=x^{-\frac{1}{3}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Có bao nhiêu khẳng định **sai** trong các khẳng định cho dưới đây?

(1) Với số thực a và các số nguyên m,n, ta có $(a^m)^n=a^{m.n}$; $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m:n}$.

(2) Với hai số thực a,b cùng khác 0 và số nguyên n, ta có $(ab)^n=a^nb^n$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

(3) Với hai số thực a,b thỏa mãn $0<a<b$ và số nguyên n, ta có $a^n<b^n$ khi và chỉ khi $n>0$.

(4) Cho số thực a và các số nguyên m,n. Khi đó, với $a>0$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m>n$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8. Cho hai số thực $a,b>0$. Thu gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[5]{a^4}.\sqrt[5]{a}.\sqrt[5]{a^2}.\sqrt{ab^2}}{\left(\sqrt[5]{\sqrt{a}}\right)^3.\sqrt{a^2b}.\sqrt[5]{a^3}.\sqrt{ab}}$ ta thu được kết quả

A. $A=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$. **B.** $A=\dfrac{\sqrt{a^3b}}{a}$. **C.** $A=\dfrac{\sqrt{b}}{b}$. **D.** $A=\dfrac{\sqrt[5]{a}}{a}$.

Câu 9. Biết $4^x+4^{-x}=23$, tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$.

A. $P=5$. **B.** $P=\sqrt{27}$. **C.** $P=\sqrt{23}$. **D.** $P=25$.

Câu 10. Kết quả $a^{\frac{11}{12}}$ với $(a>0)$ là biểu thức rút gọn của phép tính nào sau đây?

A. $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$. **B.** $\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{a}$. **C.** $a^4\sqrt{a^3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$.

Câu 11. Cho $(3-2\sqrt{2})^m > (3-2\sqrt{2})^n$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m > n$. **B.** $m = n$. **C.** $m < n$. **D.** $m \geq n$.

Lời giải.

Vì $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$ nên suy ra $m < n$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Biến đổi $\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}}$ $(x > 0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, ta được

A. $x^{\frac{7}{4}}$. **B.** $x^{\frac{20}{3}}$. **C.** $x^{\frac{23}{12}}$. **D.** $x^{\frac{12}{5}}$.

Câu 13. Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $K = \dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 14. Biểu thức $A = \sqrt[3]{b\sqrt[3]{b^2\sqrt{b}}}, b > 0$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $b^{\frac{5}{18}}$. **B.** $b^{\frac{1}{6}}$. **C.** $b^{\frac{11}{18}}$. **D.** $b^{\frac{1}{8}}$.

Câu 15. Với $a > 0$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = a^{\frac{5}{6}}$. **B.** $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = a^{\frac{6}{5}}$. **C.** $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = a^{\frac{3}{2}}$. **D.** $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Câu 16. Cho số thực a và các mệnh đề dưới đây:

$$A: \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \qquad B: \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \qquad C: \sqrt{a^4} = a^2 \qquad D: \sqrt{a^2} = a$$

Có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 17. Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ nào dưới đây?

A. $a^{\frac{7}{6}}$. **B.** $a^{\frac{7}{3}}$. **C.** $a^{\frac{5}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

$a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó

A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$. **B.** $a > 0, b > 1$.

C. $0 < a < 1, b > 1$. **D.** $a > 1, 0 < b < 1$.

Lời giải.

☑ $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a > 1$;

☑ $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 0 < b < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho các số thực dương a, b. Rút gọn biểu thức $P = \left(\sqrt[7]{\dfrac{a}{b}\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}}}\right)^{\frac{35}{4}}$ là

A. $\dfrac{b}{a}$. **B.** $\dfrac{a}{b}$. **C.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$. **D.** $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Lời giải.

Ta có $P=\left(\sqrt[7]{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{35}{4}}=\left(\sqrt[7]{\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{35}{4}}=\left(\sqrt[7]{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{35}{4}}=\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{7}}\right)^{\frac{35}{4}}=\frac{a}{b}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Rút gọn biểu thức $H=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$ (điều kiện H có nghĩa) ta được

A. x^2-x+1 . **B.** x^2+1. **C.** x^2+x+1. **D.** x^2-1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & H=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) \\ \Leftrightarrow\ & H=\left[(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt[4]{x})^2\right]\cdot\left(x-\sqrt{x}+1\right) \\ \Leftrightarrow\ & H=\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) \\ \Leftrightarrow\ & H=(x+1)^2-x \\ \Leftrightarrow\ & H=x^2+x+1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P\in(330;340)$. **B.** $P\in(350;360)$. **C.** $P\in(260;370)$. **D.** $P\in(340;350)$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2^3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{3}{5}}\cdot2^{\frac{1}{10}}\cdot2^{\frac{1}{30}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}=2^{\frac{11}{15}}$.

$\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{11}{15}\Rightarrow\begin{cases}m=11\\n=15\end{cases}\Rightarrow P=m^2+n^2=11^2+15^2=346$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho $P=\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2018}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2019}$. Ta có

A. $P\in(2;7)$. **B.** $P\in(6;9)$. **C.** $P\in(0;3)$. **D.** $P\in(8;10)$.

Lời giải.

Ta có $P=(5-2\sqrt{6})^{2018}(5+2\sqrt{6})^{2018}(5+2\sqrt{6})=\left[(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})\right]^{2018}(5+2\sqrt{6})=5+2\sqrt{6}$.

Suy ra $P\in(8;10)$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{2}{9}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{8}}$. **C.** $P=x^2$. **D.** $P=\sqrt{x}$.

Lời giải.

Ta có $P=x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho biểu thức $P=x^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\sqrt{x^5}}, x>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P=x^{-2}$. **B.** $P=x^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{2}}$. **D.** $P=x^2$.

Lời giải.

$P=x^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\sqrt{x^5}}=x^{-\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{5}{4}}=x^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tính giá trị của biểu thức $4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$.

A. $P = 2^{2058}$. **B.** $P = 2^{2047}$. **C.** $P = 2^{2032}$. **D.** $P = 2^{2054}$.

Lời giải.

Ta có $4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017} = 2^8 \cdot 2^{33} \cdot 2^{2017} = 2^{2058}$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Có tất cả bao nhiêu căn bậc 6 của 8.

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Vì $8 > 0$ và $n = 6$ là số chẵn nên có hai căn bậc 6 là $\sqrt[6]{8}$ và $-\sqrt[6]{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Rút gọn biểu thức $H = \dfrac{\sqrt{a}.\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^{-7}}}$ với a là một số thực dương.

A. $H = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$. **B.** $H = a^2$. **C.** $H = a^3$. **D.** $H = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Lời giải.

Ta có $H = \dfrac{\sqrt{a}.\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^{-7}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{7}{6}}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}} = a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^6 < \left(\sqrt{2}-1\right)^5$. **B.** $\left(\sqrt{2}+2\right)^3 > \left(\sqrt{2}+2\right)^4$.

C. $\left(1+\sqrt{3}\right)^{-3} < \left(1+\sqrt{3}\right)^{-4}$. **D.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-5} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{-6}$.

Lời giải.

Biết rằng với $n < m$:

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^n > a^m$.

Nếu $1 < a$ thì $a^n < a^m$.

Nên ta chọn đáp án A.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a-3-4a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-4a^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{a^{-\frac{1}{2}}}$ với a là một số thực dương.

A. $P = a$. **B.** $P = a^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $P = a^{-1}$. **D.** $P = a^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

$$P = \frac{\dfrac{a^2-3a-4}{a}}{\dfrac{a-4}{\sqrt{a}}} - \sqrt{a} = \frac{a^2-3a-4}{\sqrt{a}(a-4)} - \sqrt{a} = \frac{a^2-3a-4-a(a-4)}{\sqrt{a}(a-4)} = \frac{a-4}{\sqrt{a}(a-4)} = a^{-\frac{1}{2}}$$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{5}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)}{a+1}$, với $a > 0$, ta được

A. $P = a-1$. **B.** $P = a^2+1$. **C.** $P = a$. **D.** $P = a+1$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\right)}{a+1}=\dfrac{a+a^2}{a+1}=\dfrac{a(a+1)}{a+1}=a.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\pi^{20}<\mathrm{e}^{20}$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{12}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$. **C.** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{18}>\left(\dfrac{1}{5}\right)^{16}$. **D.** $5^{20}<5^{19}$.

Lời giải.

Do $\dfrac{2}{3}<1$ nên $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{12}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Viết lại biểu thức $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}$, $(x>0)$ dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $x^{\frac{5}{3}}$. **B.** $x^{\frac{5}{2}}$. **C.** $x^{\frac{7}{3}}$. **D.** $x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

$\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}=x^{\frac{5}{3}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Rút gọn biểu thức $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$.

A. $K=x^2+1$. **B.** $K=x^2-1$. **C.** $K=x^2-x+1$. **D.** $K=x^2+x+1$.

Lời giải.

Ta có $K=\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=(x+1)^2-x=x^2+x+1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}$, với $x>0$.

A. $y'=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\dfrac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\dfrac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{6}}=x^{\frac{7}{6}}$. Vậy $y'=\dfrac{7}{6}\cdot\sqrt[6]{x}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Rút gọn biểu thức $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right).\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ (với điều kiện M có nghĩa).

A. $M=-1$. **B.** $M=2$. **C.** $M=1$. **D.** $M=-3$.

Lời giải.

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right).\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}=\left(\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}-\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}\right).\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}=\left(\frac{\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}\right).\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}=1$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Có thể kết luận gì về cơ số a nếu $(2a+1)^{-3}>(2a+1)^{-1}$?

A. $a\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $a\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **C.** $a\in(0;+\infty)$. **D.** $a\in(-\infty;0)$.

Lời giải.

Do $-3<-1$ nên $0<2a+1<1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<a<0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ của biểu thức $p=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x^5}$ với $x>0$ là

A. $p=x^{\frac{7}{6}}$. **B.** $p=x^{\frac{4}{3}}$. **C.** $p=x^{\frac{1}{5}}$. **D.** $p=x^{\frac{5}{3}}$.

Lời giải.

$p=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{5}{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Biến đổi $P=\sqrt{x^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[6]{x^4}}$ với $x>0$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, ta được

A. $P=x^{\frac{4}{9}}$. **B.** $P=x^{\frac{4}{3}}$. **C.** $P=x$. **D.** $P=x^2$.

Lời giải.

$P=\sqrt{x^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[6]{x^4}}=x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho số thực $a>1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{a}>1$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $\dfrac{1}{a^{2018}}>\dfrac{1}{a^{2019}}$. **D.** $a^{-\sqrt{2}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

Do $a>1$ nên $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}\Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{2}$ (vô lí).

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}}\cdot\sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\dfrac{2}{1009}$. **B.** $\dfrac{1}{1009}$. **C.** $\dfrac{3}{1009}$. **D.** $\dfrac{3}{2018^2}$.

Lời giải.

$$a^{\frac{3}{2018}}\cdot\sqrt[2018]{a}=a^{\frac{3}{2018}}\cdot a^{\frac{1}{2018}}=a^{\frac{3}{2018}+\frac{1}{2018}}=a^{\frac{2}{1009}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017}<(\sqrt{5}+2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018}>(\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}<(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

A. $m>n$. **B.** $m\neq n$. **C.** $m<n$. **D.** $m=n$.

Lời giải.

Do $\begin{cases}0<\sqrt{2}-1<1\\\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n\end{cases}\Rightarrow m>n$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho biểu thức $P=\sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ với $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=x^{\frac{23}{30}}$. **B.** $P=x^{\frac{37}{15}}$. **C.** $P=x^{\frac{53}{30}}$. **D.** $P=x^{\frac{31}{10}}$.

Lời giải.

$P=\sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=\sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}}=\sqrt[5]{x^{3+\frac{5}{6}}}=x^{\frac{23}{30}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=x^{\frac{2}{9}}$. **C.** $P=\sqrt{x}$. **D.** $P=x^2$.

Lời giải.

$P=x^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{6}}.x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=x^2$. **C.** $P=\sqrt{x}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{9}}$.

Lời giải.

Ta có $P=x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Rút gọn biểu thức $Q=b^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{b^2}$, $b>0$.

A. $Q=b^2$. **B.** $Q=\sqrt[3]{b^4}$. **C.** $Q=b$. **D.** $Q=b^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

Ta có: $Q=\dfrac{b^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=b$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Viết biểu thức $P=\dfrac{a^2a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}$ $(a>0)$ dưới dạng số mũ hữu tỷ.

A. $P=a$. **B.** $P=a^5$. **C.** $P=a^4$. **D.** $P=a^2$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{a^2a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}=\dfrac{a^{2+\frac{5}{2}+\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{35}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^5$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho $x>0$, $y>0$ và biểu thức $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}}\right)^{-1}$. Hãy xác định mệnh đề đúng.

A. $K=2x$. **B.** $K=x+1$. **C.** $K=x-1$. **D.** $K=x$.

Lời giải.

Ta có $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}}\right)^{-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\left(1-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2}=x$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho $a>0$, $b>0$ và biểu thức $T=2(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Tính giá trị của T.

A. $T=\dfrac{2}{3}$. **B.** $T=\dfrac{1}{3}$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}$. **D.** $T=1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}T &= 2(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\cdot\frac{1}{a+b}\cdot\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$. **B.** $a>1$. **C.** $a>0$. **D.** $a<0$.

Lời giải.

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}.$$

Mà ta có $7+4\sqrt{3}>1$ nên $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow a-1<-1\Leftrightarrow a<0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-2}}}, a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m,n\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m^2-n^2=25$. **B.** $m^2+n^2=43$. **C.** $3m^2-2n=2$. **D.** $2m^2+n=15$.

Lời giải.

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-2}}}=\frac{a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4\cdot a^{-\frac{2}{7}}}=\frac{a^4}{a^4\cdot a^{-\frac{2}{7}}}=a^{\frac{2}{7}}\Rightarrow m=2,n=7\Rightarrow 2m^2+n=15.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Tích $(2017!)\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a;b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2018;2017)$. **B.** $(2019;2018)$. **C.** $(2015;2014)$. **D.** $(2016;2015)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2017!)\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017} &= 2017!\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdots\frac{2018^{2017}}{2017^{2017}}\\ &= 2018^{2017}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=2018$, $b=2017$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Cho hai số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

A. $A=\sqrt[6]{ab}$. **B.** $A=\sqrt[3]{ab}$. **C.** $A=\dfrac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. **D.** $A=\dfrac{1}{\sqrt[6]{ab}}$.

Lời giải.

Ta có $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{ab}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

A. 1. **B.** $6^{-\sqrt{5}}$. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}=\dfrac{2^{3+\sqrt{5}}\cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}=2\cdot 3^2=18$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **B.** $a^{-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{a}^{\sqrt{5}}$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **D.** $\dfrac{1}{a^{2016}}<\dfrac{1}{a^{2017}}$.

Lời giải.

$\dfrac{1}{a}^{\sqrt{5}}=a^{-\sqrt{5}}$. Do $a>1$ suy ra $a^{-\sqrt{3}}>a^{-\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Cho $(0{,}25\pi)^{\alpha}>(0{,}25\pi)^{\beta}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha\cdot\beta=1$. **B.** $\alpha>\beta$. **C.** $\alpha+\beta=0$. **D.** $\alpha<\beta$.

Lời giải.

Do $0<0{,}25\pi<1$ nên $(0{,}25\pi)^{\alpha}>(0{,}25\pi)^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}. Khi đó giá trị α bằng bao nhiêu?

A. $\alpha=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\alpha=\dfrac{11}{6}$. **C.** $\alpha=\dfrac{1}{6}$. **D.** $\alpha=\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[6]{a^4}=a^{\frac{2}{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho $x>0$; $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Tính $m-n$.

A. $\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{8}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra

$$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^{\frac{11}{2}}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{11}{12}}=x^{\frac{103}{60}}\Rightarrow m=\frac{103}{60}.$$

$$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}=y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^{\frac{11}{2}}}=y^{\frac{4}{5}}:y^{\frac{11}{12}}=y^{-\frac{7}{60}}\Rightarrow n=-\frac{7}{60}.$$

Vậy $m-n=\dfrac{11}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Cho biểu thức $P=\sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ với $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=x^{\frac{23}{30}}$. **B.** $P=x^{\frac{37}{15}}$. **C.** $P=x^{\frac{53}{30}}$. **D.** $P=x^{\frac{31}{10}}$.

Lời giải.

$P=\sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}}=\sqrt[5]{x^3.x^{\frac{5}{6}}}=\sqrt[5]{x^{\frac{23}{6}}}=x^{\frac{23}{30}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ của biểu thức $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}$.

A. $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. **C.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. **D.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{18}$.

Lời giải.

Ta có: $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Cho x là số thực dương và $P=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\right)^5$. Biết rằng P được biểu diễn dưới dạng $P=x^{\frac{m}{n}}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản và m,n là các số nguyên dương. Tính $m+n$.

A. $m+n=21$. **B.** $m+n=25$. **C.** $m+n=29$. **D.** $m+n=31$.

Lời giải.

$P=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\right)^5=(x^2\sqrt{x})^{\frac{5}{3}}=x^{\frac{10}{3}}x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{25}{6}}$.

$m+n=25+6=31$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Nếu $a^{\frac{2017}{2018}}<a^{\frac{2018}{2017}}$ và $\left(\sqrt{2018}-\sqrt{2017}\right)^b>\sqrt{2018}+\sqrt{2017}$ thì

A. $a<1,b>-1$. **B.** $a>1,b>1$. **C.** $a<1,b<-1$. **D.** $a>1,b<-1$.

Lời giải.

Vì $a^{\frac{2017}{2018}}<a^{\frac{2018}{2017}}$ nên $a>1$ do $\dfrac{2017}{2018}<\dfrac{2018}{2017}$.

Ta có $\left(\sqrt{2018}-\sqrt{2017}\right)^b>\sqrt{2018}+\sqrt{2017}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2018}-\sqrt{2017}\right)^b>\left(\sqrt{2018}-\sqrt{2017}\right)^{-1}$

$\Rightarrow b<-1$ vì $\sqrt{2018}-\sqrt{2017}<1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

A. $A=2\sqrt{a}-1$. **B.** $A=2a-1$. **C.** $A=2\sqrt[6]{a}-1$. **D.** $A=2\sqrt[3]{a}-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\frac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{(\sqrt[3]{a}-1)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}-2\right)}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{\sqrt[6]{a}\left(\sqrt[3]{a}-a^{\frac{2}{3}}+1\right)}{\sqrt[6]{a}}\\&=a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}-2+\sqrt[3]{a}-a^{\frac{2}{3}}+1=2\sqrt[3]{a}-1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}, x>0$. Biểu thức nào sau đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $P=x^{\frac{2}{3}}$. **D.** $P=x^{\frac{13}{24}}$.

Lời giải.

Với $x>0$, ta có

$$P=\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}=\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}}=\sqrt[4]{x\cdot x^{\frac{7}{6}}}=\sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}}=x^{\frac{13}{24}}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho $0<a<1, b>1$. Rút gọn biểu thức sau $\sqrt{(a^\pi+b^\pi)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}ab\right)^\pi}$.

A. $2\left(a^\pi-b^\pi\right)$. **B.** $b^\pi-a^\pi$. **C.** $a^\pi+b^\pi$. **D.** $a^\pi-b^\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{(a^\pi+b^\pi)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}ab\right)^\pi}&=\sqrt{a^{2\pi}+b^{2\pi}+2a^\pi b^\pi-4a^\pi b^\pi}\\&=\sqrt{(a^\pi-b^\pi)^2}\\&=|a^\pi-b^\pi|\\&=b^\pi-a^\pi\end{aligned}.$$

(vì $0<a<1, b>1$).

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho hàm số $y=\mathrm{e}^{2x}\cdot\sin 5x$. Rút gọn biểu thức: $A=y''-4y'+29y$.

A. $A=e$. **B.** $A=1$. **C.** $A=-1$. **D.** $A=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=2\mathrm{e}^{2x}\sin 5x+5\mathrm{e}^{2x}\cos 5x$

$y''=2\left(2\mathrm{e}^{2x}\sin 5x+5\mathrm{e}^{2x}\cos 5x\right)+10.\mathrm{e}^{2x}\cos 5x-25\mathrm{e}^{2x}\sin 5x$

$=-21\mathrm{e}^{2x}\sin 5x+20\mathrm{e}^{2x}\cos 5x$

Suy ra

$A=y''-4y'+29y=-21\mathrm{e}^{2x}\sin 5x+20\mathrm{e}^{2x}\cos 5x-8\mathrm{e}^{2x}\sin 5x-20\mathrm{e}^{2x}\cos 5x+29\mathrm{e}^{2x}\sin 5x=0.$

Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$. **B.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có $0<\sqrt{3}-1<1$ do đó $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Cho $\pi^\alpha>\pi^\beta$ với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\alpha>\beta$. **B.** $\alpha<\beta$. **C.** $\alpha=\beta$. **D.** $\alpha\leq\beta$.

Lời giải.

Do $\pi>1$ nên từ $\pi^\alpha>\pi^\beta$ suy ra $\alpha>\beta$ theo tính chất của lũy thừa với số mũ thực.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{a^{\frac{1}{5}}\left(a^{\frac{3}{10}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}\right)}$ với $0<a\neq 1$ ta có kết quả là:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$. **B.** $\dfrac{1}{a+1}$. **C.** $\dfrac{1}{a-1}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}$.

Lời giải.

$$M=\frac{a^{\frac{1}{5}}\left(a^{\frac{3}{10}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}\right)}=\frac{a^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}}-1}{a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-1}=\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a-1}$$
$$=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}=\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1}=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Rút gọn biểu thức $Q=\dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$ với $b>0$.

A. $Q=b^{\frac{1}{15}}$. **B.** $Q=b^{-\frac{2}{15}}$. **C.** $Q=b^{\frac{2}{15}}$. **D.** $Q=b^{\frac{5}{3}}$.

Lời giải.

$Q=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=b^{\frac{2}{15}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho a,b là các số thực dương khác 1 và x,y là các số thực. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a^xa^y=a^{x+y}$. **B.** $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{\frac{x}{y}}$. **C.** $a^xb^y=(ab)^{x+y}$. **D.** $(a^x)^y=a^{x+y}$.

Lời giải.

$a^xa^y=a^{x+y}$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Biến đổi $\sqrt[3]{x^5\cdot\sqrt[4]{x}},(x>0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $x^{\frac{20}{3}}$. **B.** $x^{\frac{23}{12}}$. **C.** $x^{\frac{21}{12}}$. **D.** $x^{\frac{12}{5}}$.

Lời giải.

Với $x>0$ ta có $\sqrt[3]{x^5\cdot\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x^5\cdot x^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{x^{5+\frac{1}{4}}}=\left(x^{\frac{21}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{3}}=x^{\frac{21}{12}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Giá trị của biểu thức $4^{2+2\sqrt[3]{5}}:16^{\sqrt[3]{5}}$ là

A. 16. **B.** 8. **C.** 1. **D.** $16^{\sqrt[3]{5}}$.

Lời giải.

Ta có $4^{2+2\sqrt[3]{5}}:16^{\sqrt[3]{5}}=4^{2+2\sqrt[3]{5}}:4^{2\sqrt[3]{5}}=4^2=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Tìm điều kiện của m để $(m-1)^{-2\sqrt{3}}>(m-1)^{-3\sqrt{2}}$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m>2$.

Lời giải.

Ta có: $-2\sqrt{3}=-\sqrt{12}$ và $-3\sqrt{2}=-\sqrt{18}$ nên $-2\sqrt{3}>-3\sqrt{2}$.

Để $(m-1)^{-2\sqrt{3}}>(m-1)^{-3\sqrt{2}}$ thì $m-1>1\Leftrightarrow m>2$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tìm một biểu thức sau khi rút gọn ta được kết quả bằng $a^{2,5}$ (với $a > 0$).

A. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a}$. **B.** $\dfrac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$. **D.** $a^5 \cdot \sqrt{a}$.

Lời giải.

Với $a > 0$, ta có:
$\dfrac{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{7}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2,5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho biểu thức $P = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a > 0$). P có giá trị bằng

A. a^2. **B.** a^4. **C.** a^3. **D.** a^5.

Lời giải.

Ta có: $P = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho số thực dương a, rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

A. $P = a^2$. **B.** $P = a$. **C.** $P = 1 + a$. **D.** $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}(a+1)} = a$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Cho a là số thực dương, khi đó $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ viết dưới dạng lũy thừa là

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{5}{18}}$. **C.** $a^{\frac{1}{2}}$. **D.** $a^{\frac{1}{12}}$.

Lời giải.

Với $a > 0$ ta có: $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} = \left(a\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{b^{\frac{12}{35}}\sqrt[5]{a} + a^{\frac{12}{35}}\sqrt[5]{b}}{\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b}}$.

A. $P = ab$. **B.** $P = a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}$. **C.** $P = a^{\frac{1}{7}}b^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P = 2a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}\left(a^{\frac{1}{7}} + b^{\frac{1}{7}}\right)}{a^{\frac{1}{7}} + b^{\frac{1}{7}}} = a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Với $a > 0$, hãy viết biểu thức $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^4}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $a^{\frac{8}{9}}$. **C.** $a^{-\frac{1}{2}}$. **D.** a^2.

Lời giải.

Ta có $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Biểu thức $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x^5}$ (với $x > 0$) viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là biểu thức nào dưới đây?

A. x^3. **B.** $x^{\frac{1}{3}}$. **C.** $x^{\frac{8}{3}}$. **D.** $x^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x^5} = \sqrt{x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = \sqrt{x^{\frac{11}{3}}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{11}{6}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{8}{3}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 82. Với a là số thực dương, biểu thức rút gọn của $\dfrac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ là

A. a. **B.** a^7. **C.** a^5. **D.** a^3.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho số thực $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $x\sqrt{x^2} = x^2$. **B.** $x\sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^2}$. **C.** $x\sqrt{x^2} = -x^2$. **D.** $x\sqrt{x^2} = \sqrt{x^3}$.

Lời giải.

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x^2} = x \Rightarrow x\sqrt{x^2} = x^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tìm phép biến đổi đúng.

A. $5^{x^2} \cdot 2^x = 25 \cdot 2^x \cdot 5^x$. **B.** $5^{x^2} \cdot 2^x = (5^x)^2 \cdot 2^x$.

C. $5^{x^2} \cdot 2^x = (25)^x \cdot 2^x$. **D.** $5^{x^2} \cdot 2^x = (2 \cdot 5^x)^x$.

Lời giải.

Ta có $5^{x^2} \cdot 2^x = 5^{x \cdot x} \cdot 2^x = (5^x)^x \cdot 2^x = (2 \cdot 5^x)^x$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho biểu thức $(a-1)^{\frac{-2}{3}} < (a-1)^{\frac{-1}{3}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 2$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $1 < a < 2$. **D.** $a > 1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} -\dfrac{2}{3} < -\dfrac{1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow a - 1 > 1 \Rightarrow a > 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 86. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}}} : \sqrt[24]{a^7}$, với $a > 0$.

A. $P = a$. **B.** $P = a^{\frac{1}{2}}$. **C.** $P = a^{\frac{1}{3}}$. **D.** $P = a^{\frac{1}{5}}$.

Lời giải.

Ta có $P = \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{6}} \cdot a^{\frac{-1}{8}}\right) : a^{\frac{7}{24}} = a^{\frac{19}{24}} : a^{\frac{7}{24}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Tính giá trị của biểu thức $K=\dfrac{2^3\cdot 2^{-1}+5^{-3}\cdot 5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0{,}25)^0}$.

A. $K=-10$. **B.** $K=10$. **C.** $K=12$. **D.** $K=15$.

Lời giải.

Ta có $K=\dfrac{2^{3+(-1)}+5^{-3+4}}{10^{-3-(-2)}-1}=\dfrac{2^2+5^1}{10^{-1}-1}=\dfrac{9}{\dfrac{1}{10}-1}=\dfrac{9}{\dfrac{-9}{10}}=-10$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Rút gọn biểu thức

$$P=a^{-2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$$

ta được

A. $P=a^3$. **B.** $P=1$. **C.** $P=a^2$. **D.** $P=-a^2$.

Lời giải.

Ta có $P=a^{-2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}=a^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(a^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}+1}=\dfrac{a^{(\sqrt{2}+1)^2}}{a^{2\sqrt{2}}}=\dfrac{a^{3+2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{2}}}=a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Điều nào sau đây đúng?

A. $a^m<a^n\Leftrightarrow m<n$. **B.** Nếu $a<b$ thì $a^m<a^n\Leftrightarrow m>0$.

C. $a^m>a^n\Leftrightarrow m>n$. **D.** $0<a<1, a^m>a^n\Leftrightarrow m<n$.

Lời giải.

Ta có: $0<a<1, a^m>a^n\Leftrightarrow m<n$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{2-\sqrt{2}}\cdot(ab)^2}{a^{1-\sqrt{2}}\cdot b^{-1}}$.

A. $P=a^3-b^3$. **B.** $P=a^3\cdot b^3$. **C.** $P=\dfrac{a^3}{b^3}$. **D.** $P=a^3+b^3$.

Lời giải.

$P=\dfrac{a^{2-\sqrt{2}}\cdot(ab)^2}{a^{1-\sqrt{2}}\cdot b^{-1}}=\dfrac{a^{2-\sqrt{2}}\cdot a^2b^2}{a^{1-\sqrt{2}}\cdot b^{-1}}=a^{2-\sqrt{2}+2-1+\sqrt{2}}\cdot b^{2-(-1)}=a^3\cdot b^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Cho $m>0$. Biểu thức $m^{\sqrt{3}}.\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}$ bằng

A. $m^{2\sqrt{3}-3}$. **B.** $m^{2\sqrt{3}-2}$. **C.** m^{-2}. **D.** m^2.

Lời giải.

Ta có $m^{\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-2}=m^{\sqrt{3}}\cdot m^{-\sqrt{3}+2}=m^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Cho a,b là các số thực dương thỏa $a^{2b}=5$. Tính $K=2a^{6b}-4$.

A. $K=226$. **B.** $K=246$. **C.** $K=242$. **D.** $K=202$.

Lời giải.

Ta có $K=2a^{6b}-4=2\cdot\left(a^{2b}\right)^3-4=2\cdot 5^3-4=246$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hàm số: $y=(x+3)^e-\sqrt[6]{5-x}$ gọi $\mathscr{D}$ là tập xác định của hàm số, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\mathscr{D}=(-3;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}\subset[-3;5]$.

C. $\mathscr{D}\subset(-3;5)$. **D.** $\mathscr{D}=(-3;+\infty)\setminus\{5\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+3>0\\5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow -3<x\leq 5.$

Vậy $\mathscr{D}\subset[-3;5]$

Chọn đáp án B □

Câu 94. Rút gọn biểu thức $P=a^{\frac{7}{4}}:\sqrt[4]{a}$ với $a>0$.

A. $P=a^{\frac{3}{2}}$. **B.** $P=a^2$. **C.** $P=a^{\frac{7}{16}}$. **D.** $P=a^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải.

$P=a^{\frac{7}{4}}:\sqrt[4]{a}=a^{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Biết rằng $3^x=2$. Tính giá trị của biểu thức $A=3^{2x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}+9^{x+1}$.

A. $A=\dfrac{81}{2}$. **B.** $A=37$. **C.** $A=\dfrac{45}{2}$. **D.** $A=25$.

Lời giải.

$A=3^{2x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}+9^{x+1}=1+9\cdot(3^x)^2=1+9\cdot 4=37.$

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho hai số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

A. $A=\sqrt[6]{ab}$. **B.** $A=\sqrt[3]{ab}$. **C.** $A=\dfrac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. **D.** $A=\dfrac{1}{\sqrt[6]{ab}}$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt[6]{a}$, $v=\sqrt[6]{b}$. Khi đó ta có $A=\dfrac{u^2v^3+u^3v^2}{u+v}=u^2v^2=\sqrt[3]{ab}$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Nếu $\left(2-\sqrt{3}\right)^{a-1}<2+\sqrt{3}$ thì

A. $a\geq 0$. **B.** $a\leq 1$. **C.** $a>0$. **D.** $a<1$.

Lời giải.

Ta có

$$2+\sqrt{3}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{a-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{1-a}.$$

Do $2+\sqrt{3}>1$ nên $1>1-a$ hay $a>0$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $m>n$. **B.** $m<n$. **C.** $m=n$. **D.** $m\leq n$.

Lời giải.

Do $0<\sqrt{2}-1<1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n\Rightarrow m>n$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Cho $4^x + 4^{-x} = 14$, khi đó biểu thức $M = \dfrac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 16 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 4$.

Vậy $M = \dfrac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}} = \dfrac{2 + 4}{7 - 4} = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 < \left(\dfrac{3}{4}\right)^6$. **B.** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-7} > \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-6}$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^6 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^7$. **D.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-6} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{2}{3} < 1 \\ -6 < -5 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-6} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}.$$

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. D	5. C	6. D	7. C	8. A	9. A	10. A
11. C	12. A	13. A	14. C	15. A	16. A	17. A	18. D	19. B	20. C
21. D	22. D	23. D	24. C	25. A	26. A	27. B	28. A	29. B	30. C
31. B	32. A	33. D	34. B	35. C	36. B	37. D	38. C	39. B	40. A
41. C	42. A	43. A	44. C	45. C	46. C	47. B	48. D	49. D	50. D
51. D	52. A	53. B	54. C	55. B	56. D	57. A	58. A	59. A	60. A
61. D	62. D	63. D	64. D	65. B	66. D	67. D	68. A	69. A	70. C
71. A	72. C	73. A	74. D	75. C	76. D	77. B	78. C	79. B	80. D
81. C	82. C	83. A	84. D	85. A	86. B	87. A	88. A	89. D	90. B
91. D	92. B	93. B	94. A	95. B	96. B	97. C	98. A	99. D	100. D

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho $a>0$, $b>0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A. $T=1$. **B.** $T=\frac{1}{3}$. **C.** $T=\frac{2}{3}$. **D.** $T=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $T=\frac{2}{a+b}\sqrt{ab}\left[1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{9^x-2}{9^x+3}$. Tính tổng $S=f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{2}{2018}\right)+...+f\left(\frac{2017}{2018}\right)+f\left(\frac{2018}{2018}\right)$.

A. $S=1009$. **B.** $S=\frac{1347}{4}$. **C.** $S=\frac{2017}{6}$. **D.** $S=\frac{1009}{3}$.

Lời giải.

Với $x+y=1$ ta có:

$f(x)+f(y)=f(x)+f(1-x)=\frac{9^x-2}{9^x+3}+\frac{9^{1-x}-2}{9^{1-x}+3}=\frac{9^x-2}{9^x+3}+\frac{9-2.9^x}{3(3+9^x)}=\frac{1}{3}.$

Do đó:

$S=f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{2}{2018}\right)+...+f\left(\frac{2017}{2018}\right)+f\left(\frac{2018}{2018}\right)$

$=f\left(\frac{1009}{2018}\right)+f\left(\frac{2008}{2018}\right)+1008.\frac{1}{3}$

$=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+\frac{1008}{3}=\frac{1}{6}+\frac{7}{12}+\frac{1008}{3}=\frac{1347}{4}$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho số thực a,b,m,n thỏa mãn $0<n<m$, $0<a<b<1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $a^m<a^n$. **B.** $b^m>b^n$. **C.** $a^m<b^n$. **D.** $a^m>b^n$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=x^{\sin 2018\pi}$

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\sin 2018\pi=0$.

Vậy hàm số $y=x^{\sin 2018\pi}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. So sánh a,b biết $\left(\sqrt{5}-2\right)^{-a}>\left(\sqrt{5}+2\right)^{b}$.

A. $a=b$. **B.** $a<b$. **C.** $a>b$. **D.** $a\geq b$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ và $(\sqrt{5}+2)>1$

nên $\left(\sqrt{5}-2\right)^{-a}>\left(\sqrt{5}+2\right)^{b}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}+2\right)^{a}>\left(\sqrt{5}+2\right)^{b}\Leftrightarrow a>b$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tìm đạo hàm cấp 2018 của hàm số $y = e^{2x}$.

A. $y^{(2018)} = 2^{2017}e^{2x}$. **B.** $y^{(2018)} = 2^{2018}e^{2x}$. **C.** $y^{(2018)} = 2^{2017}xe^{2x}$. **D.** $y^{(2018)} = e^{2x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2e^{2x}, y'' = 2^2e^{2x}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^ne^{2x}$, do đó $y^{2018} = 2^{2018}e^{2x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Rút gọn biểu thức $A = (a-4)\left(\dfrac{a}{4-a}\right)^{\frac{1}{2}} + [a(4-a)]^{\frac{1}{2}}$, với $0 < a < 4$.

A. $A = \sqrt{a(4-a)}$. **B.** $A = 1$. **C.** $A = 2\sqrt{a(4-a)}$. **D.** $A = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$A = (a-4)\left(\frac{a}{4-a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left[a(4-a)^{\frac{1}{2}}\right] = -\sqrt{(4-a)^2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4-a}} + \sqrt{a}\sqrt{4-a}$$
$$= -\sqrt{a}\sqrt{4-a} + \sqrt{a}\sqrt{4-a} = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Rút gọn biểu thức $T = \dfrac{a^2.\left(a^{-2}.b^3\right)^2.b^{-1}}{\left(a^{-1}.b\right)^3.a^{-5}.b^{-2}}$ với a, b là hai số thực dương.

A. $T = a^4.b^6$. **B.** $T = a^6.b^6$. **C.** $T = a^4.b^4$. **D.** $T = a^6.b^4$.

Lời giải.

Ta có : $T = \dfrac{a^2.\left(a^{-2}.b^3\right)^2.b^{-1}}{\left(a^{-1}.b\right)^3.a^{-5}.b^{-2}} = \dfrac{\left(a^2.a^{-4}\right)\left(b^6.b^{-1}\right)}{\left(a^{-3}.a^{-5}\right)\left(b^3.b^{-2}\right)} = a^6.b^4$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$; $\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \dfrac{a}{b}$, $\left(\dfrac{a}{b}\text{là phân số tối giản}\right)$. Tính $P = a \cdot b$.

A. $P = 10$. **B.** $P = -10$. **C.** $P = -45$. **D.** $P = 45$.

Lời giải.

$9^x + 9^{-x} = 14 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 16 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = 4$

$\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \dfrac{6+3\cdot 4}{2-3\cdot 4} = \dfrac{18}{-10} = \dfrac{9}{-5}$. Vậy $P = a \cdot b = -45$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Bạn Nam là học sinh của một trường đại học, Nam muốn vay ngân hàng với lãi xuất ưu đãi để trang trải việc học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học Nam vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi xuất hàng năm là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm biết rằng trong 4 năm đó ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

A. 46.794.000 đồng. **B.** 44.163.000 đồng. **C.** 42.465.000 đồng. **D.** 41.600.000 đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép ta có tổng số tiền Nam nợ ngân hàng sau 4 năm là

$$10.\left(1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04\right) = 44,163 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 11. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu với lãi suất 0,5% một tháng, sau mỗi tháng lãi suất được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

A. $100 \cdot (1{,}005)^{12}$ triệu đồng. **B.** $100 \cdot (1 + 12 \cdot 0{,}005)^{12}$ triệu đồng.

C. $100 \cdot 1{,}005$ triệu đồng. **D.** $100 \cdot (1{,}05)^{12}$ triệu đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thứ lãi kép, với $A = 100$, $r = 0{,}005$ tổng số tiền nhận được sau một năm (12 tháng) gửi là $100 \cdot (1 + 0{,}005)^{12} = 100 \cdot (1{,}005)^{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Giả sử x, y, z thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y \cdot 16^z = 1 \\ 4^x \cdot 16^y \cdot 2^z = 2 \\ 16^x \cdot 2^y \cdot 4^z = 4 \end{cases}$. Tìm x.

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$2^x \cdot 4^y \cdot 16^z = 1 \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 4^y \cdot 16^z) = 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 4^y + \log_2 16^z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 4z = 0.$

$4^x \cdot 16^y \cdot 2^z = 2 \Leftrightarrow \log_2 (4^x \cdot 16^y \cdot 2^z) = \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2 4^x + \log_2 16^y + \log_2 2^z = \log_2 2 \Leftrightarrow 2x + 4y + z = 1.$

$16^x \cdot 2^y \cdot 4^z = 4 \Leftrightarrow \log_2 (16^x \cdot 2^y \cdot 4^z) = \log_2 4 \Leftrightarrow \log_2 16^x + \log_2 2^y + \log_2 4^z = \log_2 4 \Leftrightarrow 4x + y + 2z = 2.$

Suy ra hệ $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ 4x + y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{7} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{7}. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2017) = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = -1$. **B.** $m - n^2 = 1$. **C.** $m - n^2 = 2018$. **D.** $m - n^2 = -2018$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}}$.

Với $x > 0$ ta có

$$g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2}}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{(x^2 + x + 1)^2}}{x(x+1)}$$
$$= \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2017)\\=&\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)\\=&2018-\frac{1}{2018}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots f(2017)=\mathrm{e}^{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2017)}=\mathrm{e}^{2018-\frac{1}{2018}}=\mathrm{e}^{\frac{2018^2-1}{2018}}=\mathrm{e}^{\frac{m}{n}}.$$

Do đó $m=2018^2-1$ và $n=2018$.

Vậy $m-n^2=2018^2-1-2018^2=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho a, b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông. Trong đó, $c-b\neq 1$ và $c+b\neq 1$. Kết luận nào dưới đây đúng?

A. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$.
B. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$.
C. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=-2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$.
D. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=-\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $c^2=a^2+b^2\Rightarrow a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$.

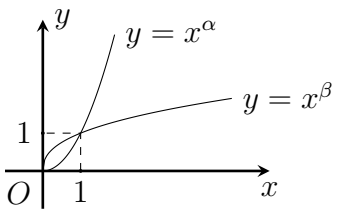
Từ đó suy ra $2=\log_a a^2=\log_a((c-b)(c+b))=\log_a(c-b)+\log_a(c+b)=\dfrac{1}{\log_{c-b}a}+\dfrac{1}{\log_{c+b}a}$

$$\Leftrightarrow \log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15.

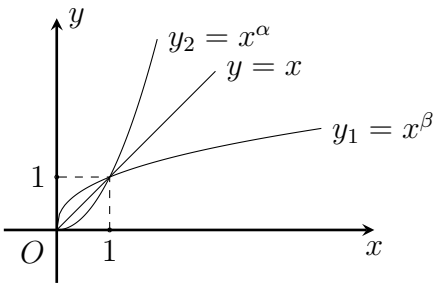
Cho α,β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y=x^\alpha, y=x^\beta$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng?



A. $0<\alpha<1<\beta$.
B. $\alpha<0<1<\beta$.
C. $0<\beta<1<\alpha$.
D. $\beta<0<1<\alpha$.

Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $y=x$. Để thuận tiện cho chứng minh ta gọi $y_1=x^\beta, y_2=x^\alpha$.



☑ Với $x\in[0;1]$ thì $y_1>y$ và $y_2<y$.

☑ Với $x\in(1;+\infty)$ thì $y_1<y$ và $y_2>y$.

Suy ra, $0<\beta<1<\alpha$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho dãy (u_n): $u_1=\mathrm{e}^3, u_{n+1}=u_n^2$, $k\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u_1\cdot u_2\cdots u_k=\mathrm{e}^{765}$. Giá trị của k là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $v_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ thì $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 3 \cdot \dfrac{1-2^k}{1-k}$.

Bởi vậy

$$\begin{aligned} & u_1 \cdot u_2 \cdots u_k = \mathrm{e}^{765} \\ \Leftrightarrow\ & 3 \cdot \frac{1-2^k}{1-2} = 765 \\ \Leftrightarrow\ & 2^k - 1 = 255 \\ \Leftrightarrow\ & 2^k = 256 \\ \Leftrightarrow\ & k = 8. \end{aligned}$$

Vậy $k = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số.

A. 147278481. **B.** 147278480. **C.** 147347190. **D.** 147347191.

Lời giải.

Số tự nhiên N có k chữ số khi $10^{k-1} \le N \le 10^k$. Đặt $N = 20172018^{20162017}$ suy ra

$$\log N = \log\left(20172018^{20162017}\right) \Leftrightarrow N = 10^{\log\left(20172018^{20162017}\right)}$$
$$\Leftrightarrow N = 10^{[20162017 \cdot \log 20172018]} \simeq 10^{1147278480,5} < 10^{147278481}.$$

Suy ra số các chữ số là 147278481.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho $9^\alpha + 9^{-\alpha} = 23,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó biểu thức $K = \dfrac{5 + 3^\alpha + 3^{-\alpha}}{1 - 3^\alpha - 3^{-\alpha}}$ có giá trị bằng

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $t = 3^\alpha,\ t > 0$. Khi đó $(t + t^{-1})^2 = (3^\alpha + 3^{-\alpha})^2 = 9^\alpha + 9^{-\alpha} + 2 = 25$, suy ra $t + t^{-1} = 5$ (vì $t > 0$).

Vậy $K = \dfrac{5 + t + t^{-1}}{1 - (t + t^{-1})} = \dfrac{5+5}{1-5} = -\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gởi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng A với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gởi tiền là 0,6%/ tháng. Gọi A đồng là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3.350.000.000 < A < 3.400.000.000$. **B.** $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$.

C. $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$. **D.** $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$.

Lời giải.

Gọi $A = 4.000.000$ là số tiền người đó gửi vào ngân hàng mỗi tháng, $r = 0{,}6\%$ là lãi suất mỗi tháng.

☑ Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1 = A(1+r) = \frac{A}{r}\left[(1+r)^1 - 1\right](1+r).$$

☑ Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền A đồng thì số tiền là

$$T_1 = A(1+r) + A = A\left[(1+r)+1\right] = A \cdot \frac{\left[(1+r)^2-1\right]}{(1+r)-1} = \frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right].$$

☑ Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2 = \frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r).$$

☑ Từ đó ta có số tiền có được sau $12 \cdot 25 = 300$ tháng là

$$S_{300} = \frac{A}{r}\left[(1+r)^{300}-1\right](1+r) = \frac{4.000.000}{0{,}6\%}\left[(1+0{,}6\%)^{300}-1\right](1+0{,}6\%) = 3.364.000.000.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho biểu thức $P = \left\{a^{\frac{1}{3}}\left[a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\left(a^2b^2\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^6$ với a, b là các số dương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P = \dfrac{b^3\sqrt{a}}{a}$. **B.** $P = \dfrac{\sqrt{a}}{b^3}$. **C.** $P = b^3\sqrt{3}$. **D.** $P = \dfrac{\sqrt{a}}{ab^3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
P &= \left\{a^{\frac{1}{3}}\left[a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\left(a^2b^2\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^6 \\
&= \left\{a^{\frac{1}{3}}\left[a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^6 \\
&= \left\{a^{\frac{1}{3}}\left[a^{\frac{5}{6}}b\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^6 \\
&= \left\{a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{5}{12}}b^{-\frac{1}{2}}\right\}^6 \\
&= \left\{a^{-\frac{1}{12}}b^{-\frac{1}{2}}\right\}^6 \\
&= a^{-\frac{1}{2}}b^{-3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}b^3} = \frac{\sqrt{a}}{ab^3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho n là số nguyên dương và $a > 0$, $a \neq 1$. Tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2\,033\,136 \log_a 2019.$$

A. $n = 2017$. **B.** $n = 2016$. **C.** $n = 2019$. **D.** $n = 2018$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2\,033\,136 \log_a 2019\\
\Leftrightarrow\ &\log_a 2019 + 2\log_a 2019 + 3\log_a 2019 + \cdots + n\log_a 2019 = 2\,033\,136 \log_a 2019\\
\Leftrightarrow\ &1 + 2 + 3 + \cdots + n = 2\,033\,136\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n(n+1)}{2} = 2\,033\,136\\
\Leftrightarrow\ &n^2 + n - 4\,066\,272 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} n = 2016 & \text{(nhận)}\\ n = -2017 & \text{(loại).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $n = 2016$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$, khi đó biểu thức $M = \dfrac{2 + 81^x + 81^{-x}}{11 - 3^x - 3^{-x}}$ có giá trị bằng

A. 28. **B.** 14. **C.** 42. **D.** 49.

Lời giải.

Ta có

1) $9^x + 9^{-x} = 14 \Leftrightarrow (9^x + 9^{-x})^2 = 14^2 \Leftrightarrow 81^x + 81^{-x} + 2 = 196 \Leftrightarrow 81^x + 81^{-x} = 194$.

2) $9^x + 9^{-x} = 14 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = 14 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 4$.

Do vậy $M = \dfrac{2 + 81^x + 81^{-x}}{11 - 3^x - 3^{-x}} = \dfrac{2 + 194}{11 - 4} = 28$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 2}$. Khi đó tổng $f(0) + f\left(\dfrac{1}{10}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{19}{10}\right)$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{59}{6}$. **B.** $\dfrac{19}{2}$. **C.** $\dfrac{28}{3}$. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $f(2-x) = \dfrac{2^{2-x}}{2^{2-x} + 2} = \dfrac{2}{2 + 2^x} \Rightarrow f(x) + f(2-x) = 1$. Do vậy

$$\begin{aligned}
f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{19}{10}\right) &= f(0) + f(1) + \left[f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{19}{10}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{9}{10}\right) + f\left(\frac{11}{10}\right)\right]\\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 \cdot 1 = \frac{59}{6}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho a, b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông. Trong đó, $c - b \neq 1$ và $c + b \neq 1$. Kết luận nào dưới đây đúng?

A. $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$. **B.** $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

C. $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = -2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$. **D.** $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = -\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$.

Từ đó suy ra $2 = \log_a a^2 = \log_a((c-b)(c+b)) = \log_a(c-b) + \log_a(c+b) = \dfrac{1}{\log_{c-b} a} + \dfrac{1}{\log_{c+b} a}$

$$\Leftrightarrow \log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. A	5. C	6. B	7. D	8. D	9. C	10. B
11. A	12. C	13. A	14. A	15. C	16. C	17. A	18. A	19. A	20. D
21. B	22. A	23. A	24. A						

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho biết $f(n)=\dfrac{2^n}{2^n+1}$, với $n\in\mathbb{Z}$. Tính

$$S=f(-1000)+f(-999)+\cdots+f(-1)+f(0)+f(1)+\cdots+f(1000).$$

A. $\dfrac{2001}{2}$. **B.** 2000. **C.** 1000. **D.** $\dfrac{1001}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(n)+f(-n)=\dfrac{2^n}{2^n+1}+\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}+1}=1$. Vậy

$$S=[f(1000)+f(-1000)]+\cdots+[f(1)+f(-1)]+\frac{1}{2}=\frac{2001}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Bố Nam gửi 15000 USD vào trong ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,73% một tháng để dành cho Nam học đại học. Nếu cuối mỗi tháng kể từ ngày gửi Nam rút ra đều đặn 300USD (trừ tháng cuối) thì sau bao nhiêu tháng số tiền để dành cho Nam sẽ được rút hết? *(tháng cuối là tháng mà số tiền còn trong ngân hàng không vượt 300 USD và khi đó Nam rút hết toàn bộ số tiền còn lại).*

A. 63 tháng. **B.** 62 tháng. **C.** 71 tháng. **D.** 55 tháng.

Lời giải.

Gọi A_n là số tiền còn lại sau khi Nam rút đến tháng thứ n, A là số tiền gửi vào, r là lãi suất hàng tháng, và X là số tiền rút ra hàng tháng.

Ta có

$$\begin{aligned}
A_1&=A(1+r)-X.\\
A_2&=A(1+r)^2-X((1+r)+1).\\
A_3&=A(1+r)^3-X((1+r)^2+(1+r)+1).\\
&\cdots\\
A_n&=A(1+r)^n-X((1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1)
\end{aligned}$$

Vậy $A_n=A(1+r)^n-X\dfrac{(1+r)^n-1}{r}\Rightarrow n=\log_{1+r}\dfrac{A_nr-X}{Ar-X}$.

Áp dụng vào bài toán ta có $n=\log_{1+0{,}73\%}\dfrac{-300}{15000\cdot 0{,}73\%-300}\approx 62{,}43641729$.

Vậy $n=63$ tháng.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A

BÀI 2 HÀM SỐ LŨY THỪA

A LÝ THUYẾT CƠ BẢN

Định nghĩa 1 (Lũy thừa với số mũ nguyên). Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ thừa số}}$$

với a là cơ số, n là số mũ.

Định nghĩa 2 (Căn bậc n).

- Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.
- Với n lẻ, $b \in \mathbb{R}$ thì phương trình có duy nhất một căn bậc n của b, ký hiệu: $\sqrt[n]{b}$.
- Với n chẵn:
  - $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b.
  - $b = 0$: Có một căn bậc n của b là số 0.
  - $b > 0$: Có hai căn bậc n của b là $-\sqrt[n]{b}$ và $\sqrt[n]{b}$.

Tính chất 1 (Tính chất căn bậc n).

① $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

② $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

③ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

④ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

⑤ $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} -a \text{ khi } n \text{ lẻ} \\ a \text{ khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

Định nghĩa 3 (Lũy thừa với số mũ hữu tỉ). Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$.

Lũy thừa của a với số mũ r là a^r được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Định nghĩa 4 (Lũy thừa với số mũ vô tỉ). Cho a là một số dương, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn bằng α và dãy số ứng (α^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n).

Ta gọi giới hạn của dãy số (α^{r_n}) là lũy thừa của a với số mũ α. Ký hiệu là a^α.

$$a^\alpha = \lim_{x \to +\infty} a^{r_n}$$

với $\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} r_n$.

Tính chất 2 (Lũy thừa với số mũ thực).

① $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

② $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.

③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$.

④ $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$.

⑤ $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-\alpha}$.

⑥ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

⑦ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Định nghĩa 5 (Công thức lãi kép). Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.

Công thức: Giả sử số tiền gốc là A ; lãi suất $r\%$/kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

☑ Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$.

☑ Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n - A$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. Tính toán - Rút gọn biểu thức lũy thừa

Phương pháp giải. Áp dụng các tính chất của lũy thừa để tính giá trị của biểu thức, rút gọn một biểu thức, chứng minh một biểu thức không phụ thuộc tham số.

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau

① $A = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$

② $B = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{-\frac{5}{2}} + (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$

③ $C = \left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} + 4^{1-2\sqrt{3}} \cdot 16^{1+\sqrt{3}}$

④ $D = \dfrac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,25)^0}$

Lời giải.

① $A = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{6+2\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{6+2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^3 = 8.$

② $B = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{-\frac{5}{2}} + (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}} = (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (2^{-2})^{-\frac{5}{2}} + (5^{-2})^{-\frac{3}{2}} - (2^{-3})^{-\frac{2}{3}}$
$= 2^3 + 2^5 + 5^3 - 2^2 = 8 + 32 + 125 - 4 = 161.$

③ $C = \left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} + 4^{1-2\sqrt{3}} \cdot 16^{1+\sqrt{3}} = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 4^{1-2\sqrt{3}} \cdot 4^{2+2\sqrt{3}} = 5 + 4^3 = 69.$

④ $D = \dfrac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,25)^0} = \dfrac{2^2 + 5}{10^{-1} - 1} = -10.$

□

Ví dụ 2. Đơn giản các biểu thức sau

① $A = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$

② $B = \sqrt[3]{\sqrt{a^6 b^{12}}} - \left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^5$

③ $C = \dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} : \left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)$

④ $D = \dfrac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}$

Lời giải.

① $A=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab.$

② $B=\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}-\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^5=\sqrt[3]{a^3b^6}-ab^2=ab^2-ab^2=0.$

③ $C=\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}:\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+1}$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-1}{a^{\frac{1}{4}}}.$

④ $D=\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{a^3-1}{a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{a^2-1}{a^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{a^3-1}{a^{\frac{3}{2}}(a-1)}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{a^2-1}{a^{\frac{3}{2}}(a+1)}$

$=\dfrac{a^2+a+1}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau

① $A=0{,}001^{-\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2$

② $B=(0{,}5)^{-4}-625^{0{,}25}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19\cdot(-3)^{-3}$

③ $C=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9^{\frac{5}{12}}}\cdot\pi^0+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\mathrm{e}^0\cdot\sqrt{3}}\cdot 9^{\frac{7}{12}}$

④ $D=\dfrac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}\cdot 25^2+(0{,}7)^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}$

Lời giải.

① $A=0{,}001^{-\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2=(10^{-3})^{-\frac{1}{3}}-4\cdot(4^3)^{\frac{2}{3}}-(2^3)^{-\frac{4}{3}}+1$

$=10-4\cdot 4^2-2^{-4}+1=-\dfrac{849}{16}.$

② $B=(0{,}5)^{-4}-625^{0{,}25}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19\cdot(-3)^{-3}=(2^{-1})^{-4}-(5^4)^{\frac{1}{4}}-\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{19}{27}$

$=2^4-5-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}-\dfrac{19}{27}=16-5-\dfrac{8}{27}-\dfrac{19}{27}=10.$

③ $C=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9^{\frac{5}{12}}}\cdot\pi^0+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\mathrm{e}^0\cdot\sqrt{3}}\cdot 9^{\frac{7}{12}}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}}+\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}\cdot 3^{\frac{7}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}+3^{\frac{1}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{2}}=1+3=4.$

④ $D=\dfrac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}\cdot 25^2+(0{,}7)^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}=\dfrac{2\cdot 4^2+3^{-6}\cdot(3^{-2})^{-3}}{5^{-3}\cdot 5^4+(2^{-1})^{-2}}=\dfrac{32+1}{5+2}=\dfrac{33}{7}.$

□

Bài 2. Đơn giản các biểu thức sau

① $A=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$

② $B=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$

③ $C=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{p}}-a^{\frac{1}{q}}\right)^2+4a^{\frac{(p+q)}{pq}}}{\left(a^{\frac{2}{p}}-a^{\frac{2}{q}}\right)\left(\sqrt[p]{a^{p+1}}+\sqrt[q]{a^{q+1}}\right)}$

④ $D=\left[\dfrac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}$

Lời giải.

① $A=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}+2\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-1)}=\dfrac{2}{a-1}.$

② $B=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a-8b\right)}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)$

$=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)=a^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}.$

③ $C=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{p}}-a^{\frac{1}{q}}\right)^2+4a^{\frac{(p+q)}{pq}}}{\left(a^{\frac{2}{p}}-a^{\frac{2}{q}}\right)\left(\sqrt[p]{a^{p+1}}+\sqrt[q]{a^{q+1}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{2}{p}}-2a^{\frac{1}{p}}\cdot a^{\frac{1}{q}}+a^{\frac{2}{q}}+4a^{\frac{1}{p}}\cdot a^{\frac{1}{q}}}{\left(a^{\frac{1}{p}}-a^{\frac{1}{q}}\right)\left(a^{\frac{1}{p}}+a^{\frac{1}{q}}\right)\left(a^{1+\frac{1}{p}}+a^{1+\frac{1}{q}}\right)}$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{p}}+a^{\frac{1}{q}}\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{p}}-a^{\frac{1}{q}}\right)\left(a^{\frac{1}{p}}+a^{\frac{1}{q}}\right)\left(a^{1+\frac{1}{p}}+a^{1+\frac{1}{q}}\right)}=\dfrac{1}{a\left(\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{a}\right)}.$

④ $D=\left[\dfrac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}$

$=\left[(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}\right)^{-1}\right]\dfrac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}}$

$=\left[a+b+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)\right]\dfrac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}}=(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}}=1.$

□

DẠNG 2. So sánh lũy thừa hay căn số

Phương pháp giải.

① So sánh lũy thừa cùng cơ số a ta áp dụng kết quả sau:

- ☑ Với $a>1$ thì $a^{x_1}>a^{x_2}\Leftrightarrow x_1>x_2$.
- ☑ Với $0<a<1$ thì $a^{x_1}>a^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2$.

② So sánh hai lũy thừa cùng số mũ ta dùng kết quả sau:

Với $a,b\neq 1$ và $0<b^x<a^x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\Leftrightarrow b^x<a^x\\ x<0\Leftrightarrow b^x>a^x\end{cases}$.

③ Với hai biểu thức chứa căn, ta cần đưa về các căn đồng bậc.

Ví dụ 3. Không dùng máy tính, so sánh các số sau: 3^{600} và 5^{400}.

Lời giải.

Ta có: $3^{600} = 3^{3\cdot 200} = 27^{200}$ và $5^{400} = 5^{2\cdot 200} = 25^{200}$.

Mà $27 > 25 > 1$, suy ra $3^{600} > 5^{400}$. □

Ví dụ 4. So sánh 32^{10} và 16^{15}.

Lời giải.

Các cơ số 32 và 16 tuy khác nhau nhưng đều là luỹ thừa của 2 nên ta tìm cách đưa 32^{10} và 16^{15} về luỹ thừa cùng cơ số 2.

Ta có $32^{10} = (2^5)^{10} = 2^{50}$ và $16^{15} = (2^4)^{15} = 2^{60}$.

Vì $2^{50} < 2^{60}$ suy ra $32^{10} < 16^{15}$. □

Ví dụ 5. So sánh $\sqrt{10}$ và $\sqrt[3]{30}$.

Lời giải.

Đưa về các căn thức cùng bậc 6, ta có:

$\sqrt{10} = \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{1000}$.

$\sqrt[3]{30} = \sqrt[6]{30^2} = \sqrt[6]{900}$.

Mà $900 < 1000$ nên $\sqrt[3]{30} < \sqrt{10}$. □

Ví dụ 6. Tìm xem 2^{100} có bao nhiêu chữ số trong cách viết ở hệ thập phân.

Lời giải.

Muốn biết 2^{100} có bao nhiêu chữ số trong cách viết thập phân ta so sánh 2^{100} với 10^{30} và 10^{31}.

Ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10}$.

$10^{30} = (10^3)^{10} = 1000^{10}$. Mà $1024 > 1000$, suy ra $2^{100} > 10^{30}$.

$10^{31} = (2\cdot 5)^{31} = 2^{31}5^{31} = 2^{31}\cdot 625^7 \cdot 5^3$.

$2^{100} = 2^{31}\cdot 2^{69} = 2^{31}\cdot 625^7 \cdot 4^3$.

Mà $2^{31}\cdot 625^7 \cdot 5^3 > 2^{31}\cdot 625^7 \cdot 4^3$, suy ra $2^{100} < 10^{31}$.

Do đó $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$, suy ra 2^{100} có 31 chữ số ở cách viết ở hệ thập phân. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3. So sánh hai số $A = \dfrac{19^{30}+5}{19^{31}+5}$ và $B = \dfrac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$.

Lời giải.

Ta có $A = \dfrac{19^{30}+5}{19^{31}+5} \Leftrightarrow 19A = \dfrac{19^{31}+95}{19^{31}+5} = 1 + \dfrac{90}{19^{31}+5}$.

$B = \dfrac{19^{31}+5}{19^{32}+5} \Leftrightarrow 19B = \dfrac{19^{32}+95}{19^{32}+5} = 1 + \dfrac{90}{19^{32}+2}$.

Vì $\dfrac{90}{19^{31}+5} > \dfrac{90}{19^{32}+2} \Rightarrow 19A > 19B \Rightarrow A > B.$ □

Bài 4. So sánh $A = \dfrac{1+5+5^2+\ldots+5^9}{1+5+5^2+\ldots+5^8}$ và $B = \dfrac{1+3+3^2+\ldots+3^9}{1+3+3^2+\ldots+3^8}$.

Lời giải.

Ta có: $A = \dfrac{1+5+5^2+\ldots+5^9}{1+5+5^2+\ldots+5^8} = \dfrac{1+5(1+5+5^2+\ldots+5^8)}{1+5+5^2+\ldots+5^8} = 5 + \dfrac{1}{1+5+5^2+\ldots+5^8}.$

$B = \dfrac{1+3+3^2+\ldots+3^9}{1+3+3^2+\ldots+3^8} = \dfrac{1+3(1+3+3^2+\ldots+3^8)}{1+3+3^2+\ldots+3^8} = 3 + \dfrac{1}{1+3+3^2+\ldots+3^8}.$

Do đó: $A > 5 > 4 > B.$ □

Bài 5. So sánh các số sau: 3^{500} và 7^{300}.

Lời giải.

Ta có $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$.

$7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$.

Vì $243 < 343$, suy ra $3^{500} < 7^{300}$. □

Bài 6. So sánh hai số sau 107^{50} và 73^{75}.

Lời giải.

Ta có $107^{50} = (107^2)^{25} = 11449^{25}$.

$73^{75} = (73^3)^{25} = 389017^{25}$.

Do $11449 < 389017$, suy ra $107^{50} < 73^{75}$. □

DẠNG 3. Bài toán lãi kép

Phương pháp giải. **- Bài toán 1.** Ông Dũng gửi số tiền P đồng vào ngân hàng T với lãi suất $r\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Hỏi ông Dũng được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau n năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Số tiền ông Dũng được lãnh sau n năm là

$$P_n = P(1+r)^n.$$

- Bài toán 2. Đầu mỗi tháng, bà Vân gửi số tiền P đồng vào ngân hàng N với lãi suất $r\%$/tháng. Hỏi bà Vân được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau n tháng, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Số tiền bà Vân được lãnh sau n tháng là

$$S_n = \frac{P}{r}\left[(1+r)^n - 1\right].(1+r).$$

- Bài toán 3. Ông Hùng gửi số tiền P đồng vào ngân hàng N với lãi suất $r\%$/tháng. Mỗi tháng

ông vào ngân hàng này tính lãi, rút ra số tiền Q đồng. Hỏi số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?
Số tiền còn lại của ông Hùng sau n tháng là

$$S_n = P(1+r)^n - Q\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

- Bài toán 4. Tính dân số.
Dân số thế giới được ước tính theo công thức

$$S = A.e^{ni}.$$

Trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

Ví dụ 7. Ông Dũng gửi số tiền 30 triệu đồng vào ngân hàng T với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Hỏi ông Dũng được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau 4 năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 30, r = 0,07, n = 4$.
Số tiền ông Dũng được lãnh sau 4 năm là $P_n = 30(1+0,07)^4 \simeq 39,3$ triệu đồng. □

Ví dụ 8. Đầu mỗi tháng, bà Vân gửi số tiền 2 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,5\%$/tháng. Hỏi bà Vân được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau 3 năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 2, r = 0,005, n = 36$.
Số tiền bà Vân được lãnh sau 3 năm là $S_n = \dfrac{2}{0,005}\left[(1+0,005)^{36} - 1\right].(1+0,005) \simeq 79,07$ triệu đồng.
□

Ví dụ 9. Ông Hùng gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,6\%$/tháng. Mỗi tháng ông vào ngân hàng này tính lãi, rút ra số tiền 3 triệu đồng. Hỏi số tiền còn lại sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có: $P = 100, r = 0,006, Q = 3, n = 24$.
Số tiền còn lại của ông Hùng sau 2 năm là $S_n = 100(1+0,006)^{24} - 3.\dfrac{(1+0,006)^{24} - 1}{0,006} \simeq 38,25$ triệu đồng. □

Ví dụ 10. Ông Hùng gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,6\%$/tháng. Mỗi tháng ông vào ngân hàng này tính lãi, rút ra số tiền 3 triệu đồng. Hỏi số tiền còn lại sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có: $P = 100, r = 0,006, Q = 3, n = 24$.

Số tiền còn lại của ông Hùng sau 2 năm là $S_n = 100(1+0,006)^{24} - 3.\dfrac{(1+0,006)^{24}-1}{0,006} \simeq 38,25$ triệu đồng. □

Ví dụ 11. Ông Hùng gửi số tiền 150 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,5\%$/tháng. Mỗi tháng ông vào ngân hàng này tính lãi, rút ra số tiền 3 triệu đồng. Hỏi sau bao lâu thì số tiền trong ngân hàng của ông hết?

Lời giải.

Ta có: $P = 150, r = 0,005, Q = 3, S_n = 0$.

Xét phương trình $0 = 150(1+0,005)^X - 3.\dfrac{(1+0,005)^X - 1}{0,005} \Leftrightarrow X \simeq 57,68$.

Vậy sau 58 tháng thì số tiền của ông Hùng hết. □

Ví dụ 12. Ông Hùng mua trả góp một xe gắn máy tại cửa hàng N giá 30 triệu đồng, với lãi suất $0,8\%$/tháng. Mỗi tháng ông đến cửa hàng trả 1 triệu đồng. Hỏi sau bao lâu thì ông trả hết nợ?

Lời giải.

Ta có: $P = 30, r = 0,008, Q = 1, S_n = 0$.

Xét phương trình $0 = 30(1+0,008)^X - 1.\dfrac{(1+0,008)^X - 1}{0,008} \Leftrightarrow X \simeq 34,44$.

Vậy sau 35 tháng thì ông Hùng trả hết nợ. □

Ví dụ 13. Cho biết năm 2018, tỉnh A có 2 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là $1,4\%$/năm. Hỏi đến năm 2025 tỉnh A có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi?

Lời giải.

Ta có: $A = 2, n = 7, i = 0,014$.

Số dân của tỉnh A đến năm 2025 là $S = 2.e^{7.0,014} \simeq 2,2059$ triệu người. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Ông Dũng gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng T với lãi suất $0,5\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Hỏi ông Dũng được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau 2 năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 100, r = 0,005, n = 24$.

Số tiền ông Dũng được lãnh sau 2 năm là $P_n = 100(1+0,005)^{24} \simeq 112,7$ triệu đồng. □

Bài 8. Ông Dũng gửi số tiền 70 triệu đồng vào ngân hàng T với lãi suất $1,7\%$/quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Hỏi ông Dũng được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau 2 năm rưỡi, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 70, r = 0,017, n = 10$.

Số tiền ông Dũng được lãnh sau 2 năm rưỡi là $P_n = 70(1 + 0,017)^{10} \simeq 82,85$ triệu đồng. □

Bài 9. Ông Dũng gửi số tiền 120 triệu đồng vào ngân hàng T với lãi suất $0,5\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Hỏi sau bao nhiêu tháng ông Dũng được lãnh 160 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 120, r = 0,005, P_n = 160$.

Xét phương trình $160 = 120(1 + 0,005)^n \simeq 57,68$.

Vậy ông Dũng phải gửi tiền trong 58 tháng. □

Bài 10. Đầu mỗi tháng, bà Vân gửi số tiền 3 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,55\%$/tháng. Hỏi bà Vân được lãnh bao nhiêu tiền (cả vốn ban đầu và lãi) sau 5 năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 3, r = 0,0055, n = 60$.

Số tiền bà Vân được lãnh sau 5 năm là $S_n = \dfrac{3}{0,0055}\left[(1 + 0,0055)^{60} - 1\right].(1 + 0,0055) \simeq 213,74$ triệu đồng. □

Bài 11. Đầu mỗi tháng, bà Vân gửi số tiền 1,5 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,6\%$/tháng. Hỏi trong thời gian bao nhiêu tháng bà Vân được lãnh (cả vốn ban đầu và lãi) là 83 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải.

Ta có $P = 1,5, r = 0,006, S_n = 83$.

Xét phương trình $83 = \dfrac{1,5}{0,006}\left[(1 + 0,006)^n - 1\right].(1 + 0,006) \Leftrightarrow n \simeq 47,67$.

Vậy bà Vân phải gửi tiền trong 48 tháng. □

Bài 12. Ông Hùng gửi số tiền 200 triệu đồng vào ngân hàng N với lãi suất $0,6\%$/tháng. Mỗi tháng ông vào ngân hàng này tính lãi, rút ra số tiền 4 triệu đồng. Hỏi số tiền còn lại sau 3 năm là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có: $P = 200, r = 0,006, Q = 4, n = 36$.

Số tiền còn lại của ông Hùng sau 3 năm là $S_n = 200(1 + 0,006)^{36} - 4.\dfrac{(1 + 0,006)^{36} - 1}{0,006} \simeq 87,86$ triệu đồng. □

Bài 13. Ông Hùng mua trả góp một ti vi tại cửa hàng N giá 10 triệu đồng, với lãi suất $0,9\%$/tháng. Mỗi tháng ông đến cửa hàng trả 0,5 triệu đồng. Hỏi sau bao lâu thì ông trả hết nợ?

Lời giải.

Ta có: $P = 10, r = 0,009, Q = 0,5, S_n = 0$.

Xét phương trình $0 = 10(1+0,009)^X - 0,5.\dfrac{(1+0,009)^X - 1}{0,009} \Leftrightarrow X \simeq 22,15$.

Vậy sau 23 tháng thì ông Hùng trả hết nợ. □

Bài 14. Cho biết năm 2018, tỉnh A có 5 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là $1,3\%$/năm. Hỏi đến năm 2023 tỉnh A có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi?

Lời giải.

Ta có: $A = 5, n = 5, i = 0,013$.

Số dân của tỉnh A đến năm 2023 là $S = 5.e^{5.0,013} \simeq 5,3358$ triệu người. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho hàm số $y=(2x-1)^{\sqrt{3}}$. Tìm tập xác định của hàm số.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(\frac{1}{2};+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $[\frac{1}{2};+\infty)$.

Lời giải.

Đáp án là B

ĐK: $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ TXĐ: $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Hàm số $y=2^{x^2-x}$ có đạo hàm là.

A. $y'=(2x-1)2^{x^2-x}$. **B.** $y'=(x^2-x)2^{x^2-x-1}$.

C. $y'=(2x-1)2^{x^2-x}\ln 2$. **D.** $y'=2^{x^2-x}\ln 2$.

Lời giải.

$y'=(x^2-x)'\cdot 2^{x^2-x}\cdot\ln 2=(2x-1)\cdot 2^{x^2-x}\cdot\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x)=(x+1)^{\pi}$.

A. $\mathscr{D}=R$. **B.** $\mathscr{D}=[-1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì π không nguyên, nên điều kiện xác định $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ thì cơ số phải thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. Cơ số phải là số thực khác 0. **B.** Cơ số phải là số nguyên .

C. Cơ số phải là số thực tùy ý. **D.** Cơ số phải là số thực dương.

Lời giải.

Theo định nghĩa lũy thừa mũ hữu tỉ $a^{\frac{m}{n}}$ thì $a>0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = (2-x)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathscr{D} = (2; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D} = (-\infty; 2)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(0; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty]$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

☑ Điều kiện xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

☑ Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Với giá trị nào của x thì biểu thức $(4-x^2)^{\frac{1}{3}}$ sau có nghĩa?

A. $x \geq 2$. **B.** Không có giá trị x. **C.** $-2 < x < 2$. **D.** $x \leq -2$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{3}$ là số hữu tỉ nên điều kiện xác định của biểu thức là $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2-3)^{-3}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{3}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2-3)^{-3}$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $(0; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ Hàm số xác định $\Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = (x+1)^{-3}$ là

A. $(-\infty; -1)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-1; +\infty)$.

Câu 13. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2}(\sqrt[3]{a})$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \dfrac{1}{6}$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = \dfrac{1}{8}$. **D.** $P = 8$.

Câu 14. Xét khẳng định "Với số thực a và hai số hữu tỉ r, s ta có $(a^r)^s = a^{r.s}$". Với điều kiện nào trong các điều kiện sau thì khẳng định trên là khẳng định đúng?

A. $a \neq 0$. **B**. $a > 0$. **C**. $\forall a \in \mathbb{R}$. **D**. $0 < a < 1$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{2017}$.

A. $(-4; 1)$. **B**. $(-\infty; -4)$ và $(1; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$. **D**. $[-4; 1]$.

Lời giải.

Vì số mũ nguyên dương và $4 - 3x - x^2$ là đa thức nên ta suy ra tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có một tiệm ngang và không tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có một tiệm cận đứng.

Lời giải.

Theo định nghĩa của hàm số lũy thừa, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 0$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$ và tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x - 5)^{\sqrt{3}}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; 5)$. **B**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. **C**. $\mathscr{D} = [5; +\infty)$. **D**. $\mathscr{D} = (5; +\infty)$.

Lời giải.

Do $\sqrt{3}$ không nguyên nên hàm số xác định khi $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho α là số thực tùy ý. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

B. Hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

C. Hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $(x^\alpha)' = \dfrac{1}{\alpha} x^{\alpha - 1}$.

D. Hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha + 1}$.

Lời giải.

Theo tính chất đạo hàm của hàm số lũy thừa, hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\sqrt{3} - 1\right)^x$. **B**. $y = (\pi - e)^x$. **C**. $y = \pi^x$. **D**. $y = (e - 2)^x$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = \pi^x$ có cơ số $\pi > 1$ nên hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$.

A. $[-1; 1]$. **B**. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **D**. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-1\neq 0$ hay $x\neq \pm 1$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $3x^2-1>0\Rightarrow$ tập xác định $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-3)^{-2}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. **B.** $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x^2-3)^{-2}$ xác định khi và chỉ khi $x^2-3\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\sqrt{3}\\x\neq-\sqrt{3}\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-1}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm lũy thừa có số mũ nguyên âm nên điều kiện là $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y=x^{(\sin 2018\pi)}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y=x^{(\sin 2018\pi)}=x^0\Rightarrow$ tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(2x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$. Tập xác định là $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;2]$.

Lời giải.

Vì $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$.
Vậy $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 27. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-2)^{\frac{4}{3}}$.
A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x>2$ nên tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{2}{3}}$.
A. $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{3}x$. **C.** $y'=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{3x^3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số $y=x^{\alpha} \Rightarrow y'=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
Với $x>0$ ta có $y'=\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{3}}$ là
A. $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=[2;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \Rightarrow \mathscr{D}=(2;+\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$. Vậy $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Tìm điều kiện của x để biểu thức $(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ có nghĩa.
A. $\forall x \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\forall x \in (-1;1)$.
C. $\forall x \in (-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **D.** $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Lời giải.

Biểu thức $(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ có nghĩa khi $x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1. \end{array}\right.$
Chọn đáp án A □

Câu 32. Tập xác định của hàm số $y=x^{2018}$ là
A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $2018 \in \mathbb{Z}^+$ nên tập xác định của hàm số $y=x^{2018}$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là
A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$. **B.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;2]$.

Lời giải.

Điều kiện $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-1)^{\frac{2}{5}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tập xác định của hàm số $y=(x-3)^{-\sqrt{5}}$ là

A. $(-2;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-x-2)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định : $x^2-x-2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 2 \end{cases}$.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=\left[\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$ xác định $\Leftrightarrow 3x-5>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}$, suy ra tập xác định của hàm số trên là $\mathscr{D}=\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-1)^{-3}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\varnothing$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{2016}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=(1;2)$.

Lời giải.

Vì 2016 nguyên dương nên hàm số có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tìm tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = (-\infty; 0)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ nên điều kiện xác định là $x > 0$, vậy $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tập xác định của hàm số $y = (x+1)^{-2}$ là

A. $[-1; +\infty)$. **B.** $(-1; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (x+1)^{-2}$ có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định là $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Vậy TXĐ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Đạo hàm của hàm số đã cho là

A. $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \ln \sqrt{2}$. **B.** $y' = x^{\sqrt{2}}$.

C. $y' = x^{\sqrt{2}} \ln \sqrt{2}$. **D.** $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ta có: $y' = \left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Hàm số $y = x^{\pi+1} + (x^2-1)^{2\mathrm{e}}$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 1. \\ x > 0 \end{cases}$

Vậy tập xác định là $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Tập xác định của hàm số $y = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **C.** $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = [-1; +\infty)$.

Lời giải.

Do số mũ không phải là số nguyên nên điều kiện xác định của hàm số là $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2-1)^{-3}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

C. $\mathscr{D} = (-1; 1)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-1\neq 0$ hay $x\neq \pm 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2+x-2)^{-2}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(-2;1)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

Lời giải.

Biểu thức $(x^2+x-2)^{-2}$ có nghĩa khi $x^2+x-2\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1\\ x\neq -2.\end{cases}$

Suy ra $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x+2)^{0,1}$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;-2)$. **B.** $\mathscr{D}=[-2;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Số 0,1 là số không nguyên nên điều kiện xác định của hàm số là $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$. Vậy $\mathscr{D}=(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(3x-6)^{-3}$ là

A. $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=[2;+\infty]$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $3x-6\neq 0$. Điều này tương đương với $x\neq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-x-2)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(0;\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Lời giải.

Vì -3 là số nguyên âm nên hàm số $y=(x^2-x-2)^{-3}$ xác định khi và chỉ khi:

$$x^2-x-2\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1\\ x\neq 2\end{cases}$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{-2016}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

C. $\mathscr{D}=(1;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2-3x+2\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Tập xác định của hàm số $y=(2x-x^2)^{\pi}$ là

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $[0;2]$.

Lời giải.

Vì π không là số nguyên nên hàm số xác định khi và chỉ khi $2x-x^2>0$. Giải bất phương trình này, ta thu được tập xác định của hàm số là $(0;2)$

Chọn đáp án B □

Câu 52. Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-\frac{1}{3}}$ là

A. $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=(0;2)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x-2>0\Leftrightarrow x>2$. Suy ra $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Hàm số $y=(2x-1)^{-4}$ có tập xác định là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\mathscr{D}=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right]$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(2x-1)^{\sqrt{3}}$ xác định khi $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Hàm số $y=(4x^2-1)^{-4}$ có tập xác định là

A. $\mathscr{D}=[0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{1}{2}$ nên tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ xác định khi và chỉ khi $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là:

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 58. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Vì $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Vậy tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các số 1, 2, 3, 4, 5?

A. A_5^4. **B.** P_5. **C.** C_5^4. **D.** P_4.

Câu 60. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$.

A. $\mathscr{D}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $2x-1>0$ hay $x>\frac{1}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$ là $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $\mathscr{D}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 63. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-1)^{-2}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(-1;1)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x^2-1)^{-2}$ là hàm số lũy thừa có số mũ -2 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi $x^2-1\neq 0$.

Vậy $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ là tập xác định của hàm số đã cho.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $y=\sqrt[3]{x}$. **B.** $y=x^4$. **C.** $y=x^{-4}$. **D.** $y=x^{-\frac{3}{4}}$.

Lời giải.

Hiển nhiên $\sqrt[3]{x_1} > \sqrt[3]{x_2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 > x_2$. Vậy $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án A □

Câu 66. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là
A. $(0; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.
Vì hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ có số mũ $\dfrac{1}{5}$ không nguyên nên hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 67. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.
A. $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. **D.** $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Lời giải.
Hàm số xác định khi $3x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$. Vậy $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.
Chọn đáp án A □

Câu 68. Tìm tập xác định của hàm số $y = (9x^2 - 1)^{\frac{1}{5}}$.
A. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$.
C. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.
Hàm số xác định khi $9x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{3} \\ x < -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. Vậy $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.
Chọn đáp án C □

Câu 69. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ thì cơ số phải thỏa mãn điều kiện nào sau đây?
A. Cơ số phải là số thực khác 0. **B.** Cơ số phải là số nguyên.
C. Cơ số phải là số thực tùy ý. **D.** Cơ số phải là số thực dương.

Lời giải.
Lũy thừa với số mũ hữu tỉ thì cơ số phải là số thực dương.
Chọn đáp án D □

Câu 70. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$.
A. $\mathscr{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
C. $\mathscr{D} = (2; 3)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Lời giải.
Hàm số $y = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$ xác định khi và chỉ khi

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số $y=(x^2-5x+6)^{-2019}$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ là
A. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số luỹ thừa $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ có số mũ bằng $\dfrac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$.
Do đó điều kiện xác định của hàm số là

$$x+1>0\Leftrightarrow x>-1.$$

Suy ra tập xác định của hàm số là

$$\mathscr{D}=(-1;+\infty).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Tập xác định của hàm số $f(x)=(2x^2-3x-9)^{\frac{1}{2}}$ là
A. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(3;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]\cup[3;+\infty)$.
C. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup[3;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2};-1\right]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x^2-3x-9>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{3}{2}\\x>3.\end{array}\right.$
Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(3;+\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Cho hàm số $y=x^{\pi}$. Tính $y''(1)$.
A. $y''(1)=0$. **B.** $y''(1)=\ln^2\pi$. **C.** $y''(1)=\pi\ln\pi$. **D.** $y''(1)=\pi(\pi-1)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\pi\cdot x^{\pi-1}$ nên $y''=\pi(\pi-1)\cdot x^{\pi-2}$.
Do đó $y''(1)=\pi(\pi-1)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2+2x-3)^{\sqrt{2}}$.
A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$. **D.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+2x-3>0\Leftrightarrow x<-3$ hoặc $x>1$.
Vậy $\mathscr{D}=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x)=(4x-3)^{\frac{1}{2}}$.
A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$. **C.** $\mathscr{D}=\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $4x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x)=(4x-3)^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$. **C.** $\mathscr{D}=\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=(4x-3)^{\frac{1}{2}}$ có số mũ $\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ nên xác định khi và chỉ khi $4x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$.

Vậy $\mathscr{D}=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Tập xác định của hàm số $y=(3x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;3)$.

C. $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{0;3\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(3x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ xác định khi $3x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(0;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(1-x)^{\sqrt{2}}$.

A. $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y=(1-x)^{\sqrt{2}}$ là hàm số lũy thừa với số mũ vô tỉ nên có điều kiện xác định: $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$.

Vậy tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=(-\infty;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-3}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-3}$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-1)^{-4}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(-1;1)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$ (-4 là số mũ nguyên âm).

Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-5)^{\sqrt{3}}$.

A. $\mathscr{D}=[5;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=(5;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;5)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x-5>0\Leftrightarrow x>5$.

Vậy $\mathscr{D}=(5;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{3}}$.

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $-\dfrac{1}{3}$ không nguyên nên: $y=(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{3}}$ xác định khi và chỉ khi $x^2-3x+2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(5+4x-x^2)^{\sqrt{2019}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1;5\}$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(1;5)$. **D.** $\mathscr{D}=(-1;5)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5+4x-x^2>0\Leftrightarrow -1<x<5$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(-1;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Tìm tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{-3}$.

A. $(-\infty;2]$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(2-x)^{-3}$ xác định khi $2-x\neq 0$ hay $x\neq 2$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{-3}$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-2)^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D}=[2;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-2)^{\frac{1}{2}}$ xác định khi $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(-x^2+3x-2)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=(1;2)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=[1;2]$.

Lời giải.

Điều kiện $-x^2+3x-2>0 \Leftrightarrow 1<x<2$.

Vậy $\mathscr{D}=(1;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{-4}$ là

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-1)^{-4}$ xác định khi và chỉ khi $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{-2019}$ là

A. $\{1\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-1)^{-2019}$ là hàm số lũy thừa có số mũ nguyên âm nên nó xác định

$$\Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Hàm số $y=(4x^2-1)^4$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$.

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2:+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $(\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ xác định khi và chỉ khi $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2. \end{array}\right.$

Vậy $\mathscr{D}=(\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-1)^{-4}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$. Do đó tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Tập xác định của hàm số $y=(-x^2+6x-8)^{\sqrt{2}}$ là

A. $\mathscr{D}=(2;4)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$. **C.** $\mathscr{D}=(4;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (-x^2+6x-8)^{\sqrt{2}}$ là hàm lũy thừa có số mũ không nguyên nên hàm số xác định khi $-x^2+6x-8>0 \Leftrightarrow x \in (2;4)$

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, tập xác định của hàm số $y=(1+x)^{\alpha}$ là

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^n$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Tìm tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{-\frac{5}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\mathscr{D}=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có số mũ $-\dfrac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Hàm số $f(x)=2^{3x+4}$ có đạo hàm là

A. $f'(x)=\dfrac{3\cdot 2^{3x+4}}{\ln 2}$. **B.** $f'(x)=3\cdot 2^{3x+4}\ln 2$.

C. $f'(x)=2^{3x+4}\ln 2$. **D.** $f'(x)=\dfrac{2^{3x+4}}{\ln 2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(a^u)'=u'\cdot a^u\ln a$

Ta có $f'(x)=(3x+4)'\cdot 2^{3x+4}\ln 2=3\cdot 2^{3x+4}\ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(4-x^2)^{\frac{1}{5}}$.

A. $\mathscr{D}=[-2;3]$. **B.** $\mathscr{D}\setminus\{\pm 2\}$. **C.** $\mathscr{D}=(-2;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy hàm số đã cho có tập xác định $\mathscr{D}=(-2;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. Xét hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ có cơ số $a = \dfrac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{-3}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B**. $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$. **C**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D**. $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Biểu thức $(x-1)^{-3}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án C □

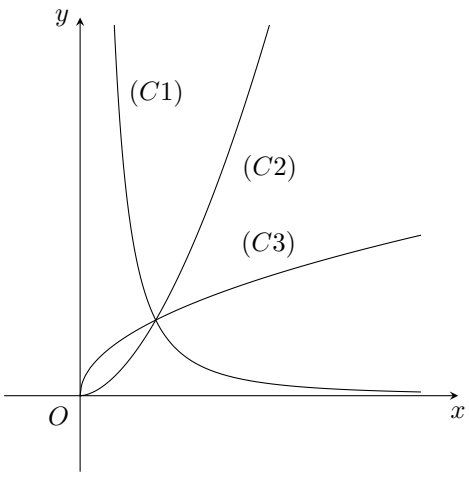
ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. C	5. D	6. D	7. C	8. C	9. C	10. B
11. C	12. B	13. A	14. B	15. C	16. C	17. D	18. B	19. C	20. B
21. B	22. A	23. C	24. C	25. C	26. C	27. C	28. A	29. A	30. C
31. A	32. B	33. C	34. B	35. D	36. B	37. A	38. B	39. C	40. B
41. D	42. D	43. B	44. C	45. D	46. D	47. C	48. C	49. D	50. B
51. B	52. A	53. B	54. B	55. B	56. A	57. C	58. C	59. A	60. C
61. C	62. B	63. D	64. C	65. A	66. C	67. A	68. C	69. D	70. D
71. D	72. A	73. D	74. B	75. D	76. D	77. B	78. D	79. C	80. A
81. C	82. B	83. A	84. D	85. B	86. C	87. A	88. D	89. D	90. D
91. D	92. A	93. A	94. A	95. B	96. D	97. B	98. C	99. C	100. C

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho ba hàm số $y=x^{\sqrt{3}}, y=x^{\frac{1}{2}}, y=x^{-2}$. Khi đó đồ thị của ba hàm số $y=x^{\sqrt{3}}, y=x^{\frac{1}{2}}, y=x^{-2}$ lần lượt là:

A. $(C3),(C2),(C1)$. **B.** $(C2),(C3),(C1)$. **C.** $(C2),(C1),(C3)$. **D.** $(C1),(C3),(C2)$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị (C_1) ta thấy nó đi xuống từ trái sang phải. Là đồ thị của hàm số nghịch biến nên nó là đồ thị của hàm số $y=x^{-2}$.

Vì $\sqrt{3}>1$ nên đồ thị của hàm số $y=x^{\sqrt{3}}$ là (C_2)

Do đó (C_3) là đồ thị của hàm số $y=x^{\frac{1}{2}}$;

Vậy đáp án là: B.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=(2x-3)^{\frac{5}{6}}$. Tính $f'(2)$.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{-5}{6}$. **D.** $\frac{-5}{3}$.

Lời giải.

TXD: $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có $f(x)=(2x-3)^{\frac{5}{6}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}.(2x-3)^{\frac{-1}{6}} \Rightarrow f'(2)=\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2+2x-3)^e$.

A. $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

C. $(-3;1)$. **D.** $[-3;1]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0)=0$.

B. $y'(x_0)=0$ và $y''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

C. $y'(x_0)=0$ và $y''(x_0)=0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.

D. $y'(x_0)=0$ và $y''(x_0)\neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

Lời giải.

☑ Hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$, nên hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0)=0$, **A** đúng.

☑ $y'(x_0)=0$ và $y''(x_0)=0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số, **B** đúng, theo điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

☑ $y'(x_0)=0$ và $y''(x_0)=0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số, **C** sai.

Ví dụ, xét hàm số $f(x)=x^4-1$.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=4x^3 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Ta có $f''(x)=12x^2 \Rightarrow f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $f(x)=x^4-1$ có $f'(0)=0; f''(0)=0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại $x=0$, $y_{CT}=-1$.

+ $y'(x_0)=0$ và $y''(x_0)\neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số, **D** đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Hàm số $f(x)=(x^2-3x+2)^{-3}-2\sqrt{x}$ xác định với

A. $x\in[0;+\infty)$. **B**. $x\in[0;+\infty)\backslash\{1;2\}$. **C**. $x\in(0;+\infty)\backslash\{1;2\}$. **D**. $x\in[0;+\infty)\backslash\{1\}$.

Câu 7. Cho $a>b>0$ thỏa mãn $a^{\frac{5}{6}}>a^{\frac{2}{3}}, b^{\frac{3}{4}}>b^{\frac{4}{5}}$. Khi đó:

A. $(a-1)(b-1)>0$. **B**. $(a-1)(b-1)<0$. **C**. $0<a<1, b\geq 1$. **D**. $0<b\leq 1, a>1$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-2x-3)^{-4}$.

A. $\mathbb{R}$. **B**. $(-1;3)$.

C. $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D**. $\mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-4)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$. **D.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 11. Cho $\log_3 x=t$. Hãy biểu diễn $P=\log_{\frac{1}{3}}^2(9x)$ theo t.

A. $P=t^2+4t+4$. **B.** $P=-t^2-4t-4$. **C.** $P=2t+4$. **D.** $P=-2t-4$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x^2$. **B.** $y=x^{-4}$. **C.** $y=x^{\frac{5}{2}}$. **D.** $y=x^{-\frac{5}{2}}$.

Lời giải.

$y=x^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow y'=-\dfrac{5}{2}.x^{-\frac{7}{2}}<0\quad\forall x>0$ nên hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{-\mathrm{e}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(1;2)$.

Câu 14. Tập xác đinh của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\sqrt{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[1;2]$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}}$.

A. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}-1}$. **B.** $y'=\sqrt{3}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}+1}$.

C. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. **D.** $y'=\sqrt{3}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}-1}$.

Lời giải.

$y'=\sqrt{3}\cdot(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}-1}\cdot(x^2-3x+2)'=\sqrt{3}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(3-x)^{\frac{1}{4}}$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;3)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-3)$. **C.** $\mathscr{D}=(3;+\infty;)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $3-x>0\Leftrightarrow x<3\Leftrightarrow x\in(-\infty;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-3x-4)^{-3}$ là

A. $\mathscr{D}=(-1;4)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=[-1;4]$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-3x-4\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq 4.\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho hàm số $y = x^{-\frac{3}{4}}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm tiệm đứng.

B. Đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm ngang.

C. Đồ thị hàm số luôn đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

D. Là hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^{-\frac{3}{4}}$ có các tính chất

☑ Đồ thị hàm số nhận trục tung làm tiệm đứng.

☑ Đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm ngang.

☑ Là hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $y = (4-x^2)^{\sqrt{3}}$. Hàm số xác định trên tập nào dưới đây?

A. $[-2;2]$. **B**. $(2;+\infty)$. **C**. $(-2;2)$. **D**. $(-\infty;2)$.

Lời giải.

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$, suy ra hàm số xác định khi $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tìm tập xác định của hàm số $y = (2x-4)^{-8}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **C**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **D**. $\mathscr{D} = (2;+\infty)$.

Lời giải.

Vì -8 là số nguyên âm nên điều kiện xác định của hàm số $y = (2x-4)^{-8}$ là:

$2x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \Rightarrow \mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $\log_{\sqrt{a}} a$.

A. 2. **B**. -2. **C**. $\frac{1}{2}$. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$?

A. $y = (2+\sqrt{x})^{\pi}$. **B**. $y = \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^{\pi}$. **C**. $y = (2+x^2)^{\pi}$. **D**. $y = (2+x)^{\pi}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (2+\sqrt{x})^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = [0;+\infty)$.

Hàm số $y = \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hàm số $y = (2+x^2)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = (2+x)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-2;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Gọi $\mathbb{D}$ là tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{x+3}{2-x}\right)^{\sqrt{2}}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên thuộc miền $\mathbb{D}$?

A. 3. **B**. 6. **C**. Vô số. **D**. 4.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\dfrac{x+3}{2-x} > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$ nên có tất cả 4 số nguyên.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hàm số $y = (2x-1)^{\sqrt{3}}$. Tìm tập xác định của hàm số.

A. $\mathscr{D} = (1;+\infty)$. **B**. $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **D**. $\mathscr{D} = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

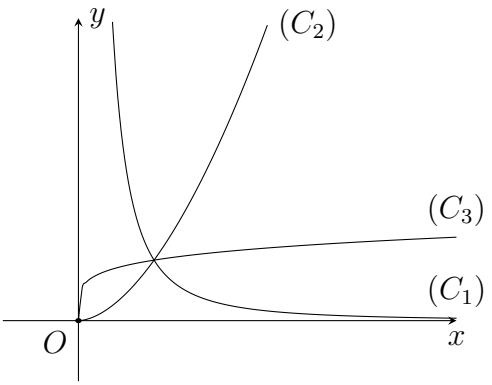
Chọn đáp án (B) □

Câu 25.

Cho ba hàm số $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{\frac{1}{5}}$, $y = x^{-2}$. Khi đó đồ thị của ba hàm số đó lần lượt là

A. (C_3), (C_2), (C_1). **B**. (C_2), (C_3), (C_1).

C. (C_2), (C_1), (C_3). **D**. (C_1), (C_3), (C_2).



Lời giải.

Đồ thị của ba hàm số đó lần lượt là $(C_2): y = x^{\sqrt{3}}$, $(C_3): y = x^{\frac{1}{5}}$, $(C_1): y = x^{-2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2-3x)^{-4}$.

A. $\mathscr{D} = (0;3)$. **B**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;3\}$.

C. $\mathscr{D} = (-\infty;0) \cup (3;+\infty)$. **D**. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

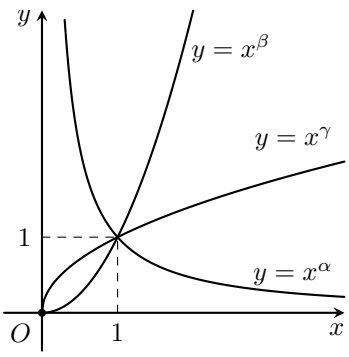
Lời giải.

Vì -4 là số nguyên âm nên điều kiện xác định của hàm số là $x^2-3x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;3\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$, $y = x^{\beta}$, $y = x^{\gamma}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



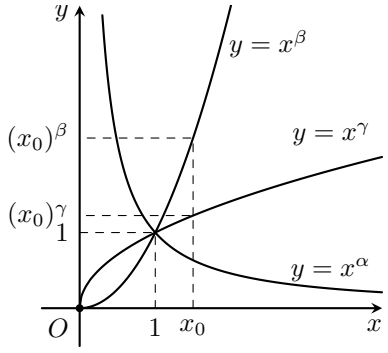
A. $\alpha > \beta > \gamma$. **B**. $\beta > \alpha > \gamma$. **C**. $\beta > \gamma > \alpha$. **D**. $\gamma > \beta > \alpha$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $y = x^\alpha$ nghịch biến nên $\alpha < 0$, các hàm số $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ đồng biến nên $\beta, \gamma > 0$.

Với $x_0 > 1$ ta có $(x_0)^\beta > (x_0)^\gamma \Rightarrow \beta > \gamma$.

Từ đó suy ra $\beta > \gamma > \alpha$.



Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho $(a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}}$. Khi đó ta có thể kết luận về a là

A. $\left[\begin{array}{l} a < 1 \\ a \geq 2 \end{array}\right.$. **B**. $1 < a \leq 2$. **C**. $\left[\begin{array}{l} a \leq 1 \\ a \geq 2 \end{array}\right.$. **D**. $a \geq 2$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} (a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}} \\ -\dfrac{2}{3} < -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a - 1 \geq 1 \Rightarrow a \geq 2$

Chọn đáp án D □

Câu 29. Tìm tập xác định của hàm số $y = (1-2x)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D = (0;+\infty)$. **B**. $D = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$. **C**. $D = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$. **D**. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải.

$y = (1-2x)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi và chỉ khi $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y = (4-x^2)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$. **B**. $(-2;2)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D**. $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

Lời giải.

Hàm xác định khi: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào xác định với mọi giá trị thực của x?

A. $y = (2x-1)^{\frac{1}{3}}$. **B**. $y = (2x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$. **C**. $y = (1-2x)^{-3}$. **D**. $y = (1+2\sqrt{x})^3$.

Lời giải.

$y = (2x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$ xác định khi $2x^2+1 > 0, x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. **C.** $\mathscr{D} = (2; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Tìm tập xác định của hàm số $y = (3x - x^2)^{\frac{2}{3}}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathscr{D} = (0; 3)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

Lời giải.

Vì $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-3}$.

A. $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathscr{D} = (-\infty; 2) \cup (1; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi: $x^2 + x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = 10$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 5$.

Lời giải.

Bằng cách đổi biến số $t = \frac{x}{2}$, ta được

$$I = \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)d(2t) = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 20.$$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Với x là số thực tuỳ ý, xét các mệnh đề sau

1) $x^n = \underbrace{x.x.\cdots.x}_{n \text{ số}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$. 2) $(2x-1)^0 = 1$.

3) $(4x+1)^{-2} = \dfrac{1}{(4x+1)^2}$. 4) $(x-1)^{\frac{1}{3}} + (5-x)^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{5-x} = 2$.

Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta thấy $x^n = \underbrace{x.x.\cdots.x}_{n \text{ số}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ là mệnh đề đúng.

Ta thấy $(2x-1)^0 = 1$ là mệnh đề sai khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Ta thấy $(4x+1)^{-2} = \dfrac{1}{(4x+1)^2}$ là mệnh đề sai khi $x = -\dfrac{1}{4}$.

Ta thấy $(x-1)^{\frac{1}{3}} + (5-x)^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{5-x} = 2$ là mệnh đề sai $\forall x \notin (1;5)$.

Vậy chỉ có 1 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2-1)^{-2}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B**. $\mathscr{D} = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

C. $\mathscr{D} = (-1;1)$. **D**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (x^2-1)^{-2}$ là hàm số lũy thừa có số mũ -2 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi $x^2 - 1 \neq 0$.

Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ là tập xác định của hàm số đã cho.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Tập xác định của hàm số $y = (x^2+x-12)^{-3}$ là

A. $\mathscr{D} = (-4;3)$. **B**. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4;3\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus (-4;3)$. **D**. $\mathscr{D} = (-\infty;-4) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Do số mũ là số nguyên âm nên ta có điều kiện $x^2 + x - 12 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4;3\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D} = [1;+\infty)$. **B**. $\mathscr{D} = (1;+\infty)$. **C**. $\mathscr{D} = (-\infty;1)$. **D**. $\mathscr{D} = (0;1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $\mathscr{D} = (1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2-3x+2)^{-\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$. **B**. $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

C. $\mathscr{D} = (1;2)$. **D**. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa khi $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tìm đạo hàm của hàm số $y=(5-x)^{\sqrt{3}}$.

A. $y'=-(5-x)^{\sqrt{3}}\ln|5-x|$. **B.** $y'=\dfrac{\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}}}{x-5}$.

C. $y'=\dfrac{\sqrt{3}}{(x-5)^{\sqrt{3}-1}}$. **D.** $y'=\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}-1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\sqrt{3}\cdot(5-x)^{\sqrt{3}-1}\cdot(5-x)'=-\dfrac{\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}}}{5-x}=\dfrac{\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}}}{x-5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Tìm tập xác định của hàm số $y=(1-2x)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $1-2x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$, suy ra tập xác định $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho $\log_2 5=a,\log_5 3=b$. Tính $\log_{24}15$ theo a và b.

A. $\dfrac{a(1+b)}{ab+3}$. **B.** $\dfrac{a(1+2b)}{ab+1}$. **C.** $\dfrac{b(1+2a)}{ab+3}$. **D.** $\dfrac{a}{ab+1}$.

Lời giải.

Do $\log_2 5=a,\log_5 3=b$ nên $\log_2 3=ab$.

Ta có $\log_{24}15=\log_{24}3+\log_{24}5=\dfrac{1}{\log_3 24}+\dfrac{1}{\log_5 24}=\dfrac{1}{3\log_3 2+1}+\dfrac{1}{3\log_5 3+3\log_5 2}$.

Suy ra $\log_{24}15=\dfrac{1}{\dfrac{3}{ab}+1}+\dfrac{1}{b+\dfrac{3}{a}}=\dfrac{ab+a}{ab+3}=\dfrac{a(b+1)}{ab+3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Tập xác định của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^n$ với n không nguyên có tập xác định là tập các số thực dương.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(x^2+m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. Mọi giá trị m. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\geq 0$.

Lời giải.

Do $\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số $y=(x^2+m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2+m>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m>0$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Gọi $\mathscr{D}$ là tập xác định của hàm số $y=(6-x-x^2)^{-\frac{1}{3}}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\{3\}\in\mathscr{D}$. **B.** $\{-3\}\in\mathscr{D}$. **C.** $(-2;2)\subset\mathscr{D}$. **D.** $\mathscr{D}\subset(-2;5)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $6-x-x^2>0\Leftrightarrow -3<x<2$. Từ đó suy ra trong các khẳng định trên chỉ có một khẳng định đúng là $(-2;2)\subset\mathscr{D}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\sqrt{2}}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải.

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Vậy tập xác định của hàm số là $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Hàm số $y=(4-x^2)^{-4}$ có tập xác định là

A. $\mathscr{D}=(0;+\infty]$. **B.** $\mathscr{D}=(-2;2)$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=(4-x^2)^{-4}$ xác định khi và chỉ khi $4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^{\sqrt{3}}$.

A. $\mathcal{D}=(-\infty;5)$. **B.** $\mathcal{D}=[1;5)$. **C.** $\mathcal{D}=[1;3)$. **D.** $\mathcal{D}=[1;+\infty)$.

Lời giải.

Chú ý: Hàm số $y=(f(x))^a$ với a không nguyên thì điều kiện xác định là $f(x)>0$.

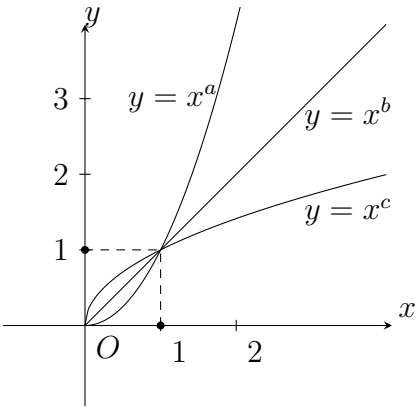
Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x-1}>0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}<2 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x<5.$

Chọn đáp án B □

Câu 50.

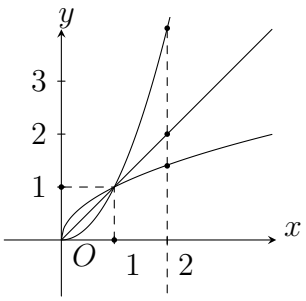
Cho đồ thị các hàm số $y=x^a$, $y=x^b$, $y=x^c$ trên miền $(0;+\infty)$ (hình vẽ bên cạnh). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $a>b>c$. **B.** $b>c>a$. **C.** $c>b>a$. **D.** $a>c>b$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, với $x=2$ ta thấy $2^a>2^b>2^c$ dễ dàng suy ra $a>b>c$.



Chọn đáp án A □

Câu 51. Tìm tập xác định $\mathbb{D}$ của hàm số $y=(x^2+x-2)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì -3 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi: $x^2+x-2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{cases}$

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=R\setminus\{1;-2\}$

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tìm đạo hàm y' của hàm số $y=\sqrt[3]{(1-3x)^5}$ trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

A. $y'=-5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$. **B.** $y'=\dfrac{5}{3}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. **C.** $y'=-5(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. **D.** $y'=\dfrac{5}{3}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Với điều kiện $x<\dfrac{1}{3}$, ta có $y=\sqrt[3]{(1-3x)^5}=(1-3x)^{\frac{5}{3}}$. Khi đó:

$y'=\left[(1-3x)^{\frac{5}{3}})\right]'=\dfrac{5}{3}\cdot(1-3x)'\cdot(1-3x)^{\frac{2}{3}}=-5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

Vậy $y'=-5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Hàm số $f(x)=(3-x)^{\frac{7}{2}}$ có tập xác định là

A. $\mathscr{D}=(-\infty;3)$. **B.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;0)$. **D.** $\mathscr{D}=(3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $3-x>0\Leftrightarrow x<3$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(2-x)^{1-\sqrt{3}}$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;2]$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(2-x)^{1-\sqrt{3}}$ là hàm số luỹ thừa, có số mũ $1-\sqrt{3}$ nên có tập xác định là $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Tìm đạo hàm số của hàm số $y=\sqrt[4]{x+2}$, $x>-2$.

A. $y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x+2}}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(x+2)^3}}$. **D.** $y'=4\sqrt[3]{x+2}$.

Lời giải.

Có $y'=\dfrac{(x+2)'}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Hàm số $y=(9-x^2)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. **C.** $\mathscr{D}=(-3;3)$. **D.** $\mathscr{D}=[-3;3]$.

Lời giải.

Điều kiện: $9-x^2>0\Leftrightarrow -3<x<3$.

Từ đó: $\mathscr{D}=(-3;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-2)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D}=(1;2)$. **B.** $\mathscr{D}=[1;2]$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

$y=(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2:+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2:+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-\sqrt{x})^{-2}$.

A. $\mathscr{D}=(0:+\infty)\setminus\{1\}$. **B.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=[0;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=[0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Lời giải.

$y=(x-\sqrt{x})^{-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}>0 \Leftrightarrow x\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m,n\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2+n^2=43$. **B.** $2m^2+n=15$. **C.** $m^2-n^2=25$. **D.** $3m^2-2n=2$.

Lời giải.

Ta có $A=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4\cdot a^{-\frac{2}{7}}}=a^{\frac{2}{7}}$, từ đó $m=2,n=7$ nên $2m^2+n=15$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Nếu $(7+4\sqrt{3})^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$. **B.** $a>1$. **C.** $a>0$. **D.** $a<0$.

Lời giải.

Vì $(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})=1$ nên $7-4\sqrt{3}=(7+4\sqrt{3})^{-1}$.

Do đó: $(7+4\sqrt{3})^{a-1}<7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow (7+4\sqrt{3})^{a-1}<(7+4\sqrt{3})^{-1}$

$\Leftrightarrow a-1<-1$ (do $7+4\sqrt{3}>1$) $\Leftrightarrow a<0$

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-1)^{-\frac{1}{5}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=[1;+\infty)$.

Lời giải.

Vì hàm số $y=(x-1)^{-\frac{1}{5}}$ là hàm số lũy thừa với số mũ không nguyên, nên điều kiện xác định là $x-1>0 \Leftrightarrow x\in(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Tập xác định của hàm số $y=(4x^2-1)^{-4}$ là

A. $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2-1\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{1}{2} \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

Chọn đáp án C □

Câu 64. Hàm số $y=x^{\pi}+(x^2-1)^{\mathrm{e}}$ có tập xác định là

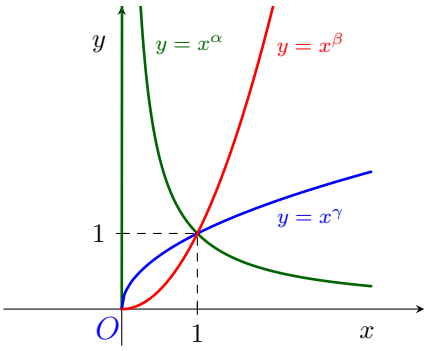
A. $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=(-1;1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Hình vẽ sau là đồ thị của ba hàm số $y=x^{\alpha}, y=x^{\beta}, y=x^{\gamma}$ với $x>0$ và α,β,γ là các số thực cho trước. mệnh đề nào dưới đây là đúng.



A. $\gamma>\beta>\alpha$. **B.** $\beta>\alpha>\gamma$. **C.** $\alpha>\beta>\gamma$. **D.** $\beta>\gamma>\alpha$.

Lời giải.

Hàm số x^{α} nghịch biến nên $\alpha<0$.

Các hàm số x^{β}, x^{γ} đồng biến nên $\beta,\gamma>0$. Tại $x=3$ thì $3^{\beta}>3^{\gamma}\Rightarrow\beta>\gamma$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho a,b là 2 số thự dương khác 1 thỏa mãn: $a^{\frac{2}{3}}<a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b\dfrac{7}{5}>\log_b\dfrac{4}{3}$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $0<a<1;0<b<1$. **B.** $a>1;0<b<1$.

C. $0<a<1;b>1$. **D.** $a>1;b>1$.

Lời giải.

Ta có : $\dfrac{2}{3}<\dfrac{4}{5}$ nên $a^{\frac{2}{3}}<a^{\frac{4}{5}}\Rightarrow a>1$.

Lại có $\dfrac{7}{5}>\dfrac{4}{3}$ nên $\log_b\dfrac{7}{5}>\log_b\dfrac{4}{3}\Rightarrow b>1$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Giá trị của a để hàm số $y=(a^2-3a-3)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $a>4$. **B.** $-1<a<4$. **C.** $a<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} a>4 \\ a<-1 \end{array}\right.$.

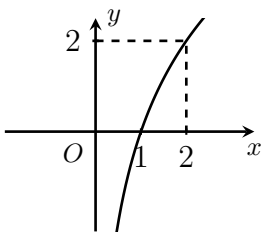
Lời giải.

Hàm số $y=(a^2-3a-3)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a^2-3a-3>1 \Leftrightarrow a^2-3a-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>4 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 68.

Tìm a để hàm số $y=\log_a x\,(0<a\neq 1)$ có đồ thị là hình bên.



A. $a=\sqrt{2}$. **B.** $a=2$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $y(2)=2 \Leftrightarrow \log_a 2=2 \Leftrightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Tập xác định D của hàm số: $y=\log_2(x^2-2x-3)$ là

A. $\mathscr{D}=(-1;3)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=[-1;3]$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là : $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-5x+6)^{-2018}$.

A. $(2;3)$. **B.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus(2;3)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Lời giải.

Vì -2018 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 3. \end{cases}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Tìm tập xác định của hàm số $y=[x^2(x+3)]^{\sqrt{3}}$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=(-3;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(-3;+\infty)\setminus\{0\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2(x+3)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x\neq 0$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-3;+\infty)\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Hàm số $y=(x^2-x)^{\frac{3}{2}}$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hay $x > 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$, $g(x) = \sin x$. Tính giá trị của $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $-\dfrac{5}{6}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

☑ $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{5}{6}$.

☑ $g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = 1$

Vậy $\dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \left(1 + \sqrt{x-1}\right)^{\sqrt{5}}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = [1; +\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Với điều kiện $x \geq 1$, ta có $1 + \sqrt{x-1} > 0$. Vậy $\mathscr{D} = [1; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **SAI**?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

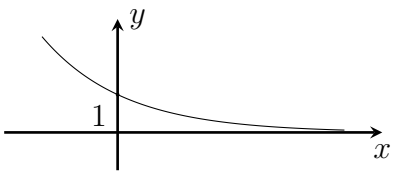
Câu 76. Tập xác định của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$ là

A. $\mathscr{D} = [3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = (3; +\infty)$.

Câu 77.

Hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $y = \log_2 x$. **B.** $y = \log_{\frac{\pi}{5}} x$. **C.** $y = \left(\dfrac{\pi}{5}\right)^x$. **D.** $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.



Lời giải.

Đồ thị của hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ và có tiệm cận ngang $y = 0$. Trong các đáp án chỉ có hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{5}\right)^x$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Cho biết năm 2003, Việt Nam có 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$. Hỏi năm 2018 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỷ lệ tăng dân số hàng năm là không đổi?

A. 100861000. **B.** 102354624. **C.** 100699267. **D.** 100861016.

Lời giải.

Sử dụng công thức $N_k = N_0(1+a)^k$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. **B.** $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

C. $\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2+x+1)'=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+1)=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 80. Hàm số $y=\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}+2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{x^2-2x-3}}$, $\forall x\neq -1, x\neq 3$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$\sqrt[3]{16}+2$	↘	2	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^4-3x^2-4)^{\sqrt{2}}$.

A. $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^4-3x^2-4>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>4\\x^2<-1\ (\text{loại})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x<-2\end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Hàm số $y=(4x^2-1)^{-4}$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^{\frac{\pi}{2}}$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1 là

A. $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$. **B.** $y=\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{2}+1$. **C.** $y=\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}-1$. **D.** $y=\dfrac{\pi}{2}x+1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}}$, $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y(1) = 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}}$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1 là

$$y = y'(1)(x-1) + y(1) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus [0;2]$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus (0;2)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus [0;2]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

C. $\mathscr{D} = (-\infty; +\infty) \setminus \{1,2\}$. **D.** $\mathscr{D} = [1;2]$.

Lời giải.

Hàm xác định khi $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$.

A. $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = [1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = (1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Do đó $\mathscr{D} = (1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 87. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$.

A. $\mathscr{D} = [3;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = (3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy $\mathscr{D} = (3;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Tập xác định của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $\mathscr{D} = (-2;2)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = (2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-2;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không có nghĩa?

A. $1{,}3^{-\frac{3}{4}}$. **B.** $(-3)^{\frac{2}{3}}$. **C.** $(-2)^{-3}$. **D.** $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

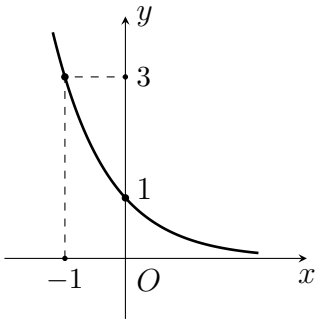
Biểu thức $(-3)^{\frac{2}{3}}$ không có nghĩa vì $-3<0$ và $\dfrac{2}{3}$ không nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 90.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong các hàm số có trong các phương án A,B,C,D. Đó là hàm số nào?

A. $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **B.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.



Lời giải.

Từ đồ thị, suy ra hàm nghịch biến nên cơ số nhỏ hơn 1.

Mặt khác, đồ thị qua $(-1;3)$ nên hàm số thỏa mãn là $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^3-27)^{\frac{\pi}{2}}$ là

A. $\mathscr{D}=(3;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $\mathscr{D}=[3;+\infty)$.

Lời giải.

Do $\dfrac{\pi}{2}$ không nguyên nên hàm số xác định khi $x^3-27>0\Leftrightarrow x>3$.

Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=(3;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Hàm số $y=(4-x^2)^{\frac{3}{5}}$ có tập xác định là

A. $(-\infty;2]\cup[2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-2;2]$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định hàm số đã cho là $4-x^2>0\Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-2;2)$.

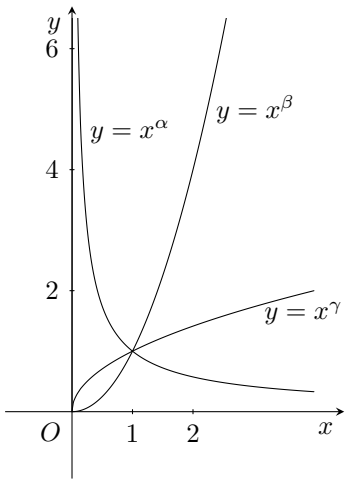
Chọn đáp án D □

Câu 93.

Cho các hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$, $y=x^\beta$, $y=x^\gamma$ có đồ thị như hình vẽ.

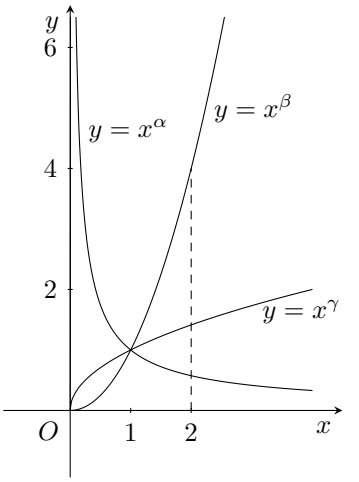
Chọn đáp án đúng.

A. $\gamma>\beta>\alpha$. **B.** $\beta>\gamma>\alpha$. **C.** $\beta>\alpha>\gamma$. **D.** $\alpha>\beta>\gamma$.



Lời giải.

Xét đường thẳng $x=2$ cắt đồ thị các hàm số $y=x^{\alpha}$, $y=x^{\beta}$, $y=x^{\gamma}$.
Từ đồ thị suy ra $2^{\alpha}<2^{\gamma}<2^{\beta} \Leftrightarrow \alpha<\gamma<\beta$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 94. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ là

A. $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=(0;1)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ xác định khi và chỉ khi $x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<1$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(0;1)$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 95. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-12x+36)^{\frac{1}{2}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D}=(6;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{6\}$. **D.** $\mathscr{D}=[6;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-12x+36>0 \Leftrightarrow x\neq 6$.
Vậy $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{6\}$.
Chọn đáp án C ☐

Câu 96. Tập xác định của hàm số $y=(3x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$.

Lời giải.

• $3x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<3$ nên $\mathscr{D}=(0;3)$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 97. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-2x+3)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-2x+3\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2\neq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$.
Chọn đáp án C ☐

Câu 98. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-3x-4)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$.

C. $\mathscr{D}=(-1;4)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-3x-4>0 \Leftrightarrow x<-1$ hoặc $x>4$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

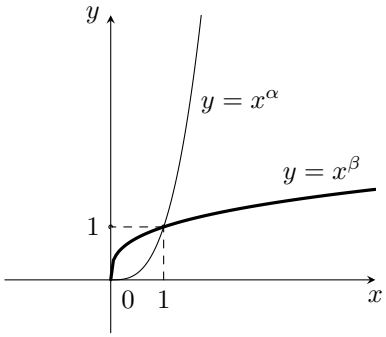
Câu 99. Cho các số thực α và β. Đồ thị các hàm số $y=x^\alpha$, $y=x^\beta$ trên khoảng $(0;+\infty)$ như hình vẽ bên, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=x^\beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0<\beta<\alpha<1$.

B. $\alpha<0<\beta<1$.

C. $0<\beta<1<\alpha$.

D. $\beta<0<1<\alpha$.



Lời giải.

Do hai hàm số $y=x^\alpha$ và $y=x^\beta$ cùng đồng biến trên $(0;+\infty)$

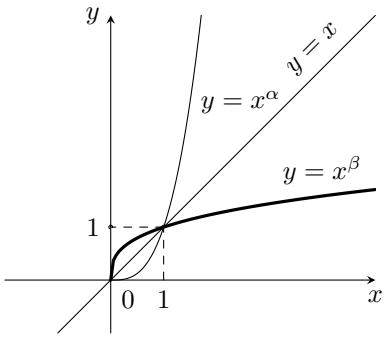
$\Rightarrow \alpha>0,\ \beta>0$.

Xét tại $x=2$, theo đồ thị ta có

☑ $2^\beta<2^1 \Leftrightarrow \beta<1$. (1)

☑ $2^\alpha>2^1 \Leftrightarrow \alpha>1$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0<\beta<1<\alpha$.



Chọn đáp án C □

Câu 100. Tính đạo hàm của hàm số $y=(x^2-x+1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $y'=\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

C. $y'=\dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2-x+1}}$.

D. $y'=\dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{3}\cdot(x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x-1)=\dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. D	4. A	5. C	6. B	7. D	8. D	9. A	10. D
11. A	12. D	13. C	14. D	15. D	16. A	17. D	18. C	19. C	20. C
21. A	22. C	23. D	24. B	25. B	26. B	27. C	28. D	29. B	30. B
31. B	32. D	33. C	34. D	35. C	36. C	37. D	38. B	39. B	40. B
41. B	42. B	43. A	44. C	45. C	46. C	47. A	48. C	49. B	50. A
51. C	52. A	53. A	54. C	55. A	56. C	57. B	58. D	59. A	60. B
61. D	62. C	63. C	64. A	65. D	66. D	67. D	68. A	69. B	70. D
71. D	72. B	73. A	74. B	75. D	76. D	77. C	78. C	79. A	80. B
81. A	82. C	83. B	84. A	85. B	86. C	87. D	88. A	89. B	90. C
91. A	92. D	93. B	94. D	95. C	96. B	97. C	98. A	99. C	100. D

❸ Mức độ VD-VDC

Câu 1. Cho $f(x)=\dfrac{x^2}{-x+1}$. Tính $f^{(2018)}(x)$

A. $-\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2018}}$. **B.** $\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2019}}$. **C.** $-\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2019}}$. **D.** $\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2018}}$.

Lời giải.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2}{-x+1}=-x-1-\dfrac{1}{x-1}$ $f'(x)=-1+\dfrac{1}{(x-1)^2}; f'(x)=-\dfrac{1.2}{(x-1)^3}; f'(x)=\dfrac{1.2.3}{(x-1)^4}$

Dự đoán: $f^{(2018)}(x)=\dfrac{-2018!}{(x-1)^{2019}}$

(Có thể chứng minh tổng quát bằng phương pháp quy nạp. Nhưng do đây là bài thi Trắc nghiệm nên bỏ qua!)

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hai số thực m,n thỏa mãn $n<m$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\frac{m}{2}}>\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)^{\frac{n}{6}}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\frac{m}{2}}\le\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)^{\frac{n}{6}}$.

C. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\frac{m}{2}}<\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)^{\frac{n}{6}}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\frac{m}{2}}=\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)^{\frac{n}{6}}$.

Câu 3. Cho a,b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ là

A. $-\sqrt{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $-2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Từ $\log_a b=\sqrt{3}$ ta suy ra $b=a^{\sqrt{3}}$.

Do đó $\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^{\sqrt{3}}}}{\sqrt{a}}=a^{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2\sqrt{3}-3}{6}}$ và $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=a^{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}$.

Từ đó suy ra $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{3}-2)}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Hàm số $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Mặt khác $y'=0$ tại $x=\dfrac{2}{5}$ và y' không xác định tại $x=0$. Ta có bảng biến thiên đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		$\dfrac{2}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y\left(\frac{2}{5}\right)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số y có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y=(1+3x)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$. **B.** $y'=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{3}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$.

Lời giải.

$$y'=\frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+3x)'=(1+3x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{(1+3x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Trong các hàm số được cho dưới đây, hàm số nào có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;1)$?

A. $y=(1-x)^2$. **B.** $y=(1-x)^{\mathrm{e}}$. **C.** $y=1-x$. **D.** $y=(1-x)^{-2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $y=(1-x)^2$ là $\forall x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện xác định của hàm số $y=(1-x)^{\mathrm{e}}$ là $1-x>0$.

Điều kiện xác định của hàm số $y=1-x$ là $\forall x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện xác định của hàm số $y=(1-x)^{-2}$ là $1-x\neq 0$.

Vậy hàm số $y=(1-x)^e$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Đồ thị hàm số $y=x^3-(3m+1)x^2+(m^2+3m+2)x+3$ có điểm cực tiểu và điểm cực đại nằm về hai phía trục tung khi

A. $1<m<2$. **B.** $-2<m<-1$. **C.** $2<m<3$. **D.** $-3<m<-2$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-2(3m+1)x+m^2+3m+2$.

Đồ thị có điểm cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta'=(3m+1)^2-3(m^2+3m+2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{3-\sqrt{129}}{12}\\ m>\dfrac{3+\sqrt{129}}{12}.\end{array}\right.$$

Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases}x_1\cdot x_2=\dfrac{m^2+3m+2}{3}\\ x_1+x_2=\dfrac{6m+2}{3}.\end{cases}$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung khi và chỉ khi

$$a\cdot c<0\Leftrightarrow m^2+3m+2<0\Leftrightarrow m^2+3m+2<0\Leftrightarrow -2<m<-1.$$

Vậy $-2<m<-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ với $0<a,\ a\neq 1$ đối xứng nhau qua trục Oy.

B. Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $0<a,\ a\neq 1$ luôn đi qua điểm $(a;1)$.

C. Hàm số $y=a^x$ với $a>1$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x_0; a^{x_0})$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$.

Xét $N\left(-x_0; \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Rõ ràng

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0} = (a^{-1})^{-x_0} = a^{x_0}.$$

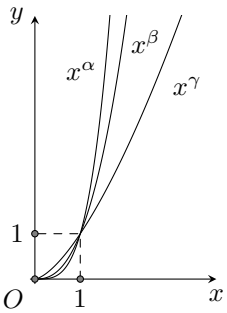
Khi đó $N(-x_0; a^{x_0})$. Và ta thấy rằng hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục Oy.

Do đó đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục Oy.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta, y = x^\gamma$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\gamma < \beta < \alpha < 0$.

B. $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$.

C. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.

D. $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy

- ☑ Với $0 < x < 1$ thì $x^\alpha < x^\beta < x^\gamma < x^1$ suy ra $\alpha > \beta > \gamma > 1$.
- ☑ Với $x > 1$ thì $x^1 < x^\gamma < x^\beta < x^\alpha$ suy ra $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Vậy $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2; \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

Khi đó $I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}(1-2x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

$I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}(2x-1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Biết $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 \mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2(a+b-c)=7$. **B.** $2(a+b-c)=5$. **C.** $2(a+b+c)=5$. **D.** $2(a+b+c)=7$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{6}{x+2} + \frac{9}{(x+2)^2}\right) \mathrm{d}x = \left(x - 6\ln|x+2| - \frac{9}{x+2}\right)\Big|_0^1 \\ &= (1 - 6\ln 3 - 3) - \left(0 - 6\ln 2 - \frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2} + 6\ln 2 - 6\ln 3. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $a = \dfrac{5}{2}$, $b = 6$, $c = -6$. Suy ra $2(a+b+c) = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - (m-3) + 2017m$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(0;3)$ là đoạn $T = [a;b]$. Tính $a^2 + b^2$

A. $a^2+b^2=13$. **B.** $a^2+b^2=8$. **C.** $a^2+b^2=10$. **D.** $a^2+b^2=5$.

Lời giải.

Tập xác đinh $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2(m_1)x - (m-3)$.

☑ Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;3)$ tức là $y' \geq 0$, $\forall x \in (0;3) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1} \geq m$, $\forall x \in (0;3)$.

Xét $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên $(0;3)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên.

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	2	↗	$\dfrac{18}{7}$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq m\, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow m \leq 2$. (1)

☑ Hàm số đã cho đồng biến trên $(-3;1)$ tức là $y' \leq 0$, $\forall x \in (-3;1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1} \geq m$, $\forall x \in (-3;1)$.

Xét $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên $(-3;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (loại)}\\x=-2.\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên.

x	-3		-2		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{6}{5}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le m\Leftrightarrow m\ge 1$. (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $-1\le m\le 2$ hay $m\in[-1;2]$.

Suy ra $a=-1$, $b=2$. Khi đó $a^2+b^2=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho $a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=a$ với a,b và c là các số hữu tỉ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $c=a$. **B**. $a=b$. **C**. $a=b=c\neq 0$. **D**. $b=c$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=a&\Leftrightarrow\log_6(3^a\cdot 2^b\cdot c^c)=a\Leftrightarrow 3^a\cdot 2^b\cdot 5^c=6^a\\&\Leftrightarrow 2^{a-b}=5^c\\&\Leftrightarrow a-b=c\log_2 5.\end{aligned}$$

Vì a,b và c là các số hữu tỉ nên $c=0$ do đó $a=b$.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. B	5. C	6. B	7. B	8. A	9. D	10. C
11. C	12. D	13. B							

BÀI 3 LÔGARIT

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b, (a, b > 0; a \neq 1).$$

Tính chất 1. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có tính chất sau:

$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1; a^{\log_a b} = b; \log_a a^\alpha = \alpha.$$

Ví dụ 1. Hãy tìm lôgarit của mỗi số 3; 1; $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ theo sơ số 3.

Lời giải.

Ta lần lượt có:

$$\log_3 3 = 1; \log_3 1 = 0; \log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = \log_3 3^{\frac{-3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

□

Ví dụ 2. Tính $\log_{0.5} \dfrac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{64}$.

Lời giải.

Ta lần lượt có:

$$\log_{0.5} \frac{1}{2} = \log_{0.5} 0.5 = 1.$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 3.$$

□

2 Các quy tắc tính lôgarit

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có các quy tắc sau:

- ☑ $\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$;
- ☑ $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$. Đặc biệt, với $a, b > 0$, $a \neq 1$ thì $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.
- ☑ $\log_a b_1^\alpha = \alpha \log_a b_1$. Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

Ví dụ 3. Tính $\dfrac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} = \dfrac{\log_7 16}{\log_7 \dfrac{15}{30}} = \dfrac{\log_7 2^4}{\log_7 2^{-1}} = \dfrac{4\log_7 2}{-\log_7 2} = -4.$ □

Ví dụ 4. Hãy so sánh $\log 2 + \log 3$ và $\log 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\log 2 + \log 3 = \log 6 > \log 5.$$

□

3 Công thức đổi cơ số

Cho ba số dương a, b, c và $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Đặc biệt: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, với $b \neq 1$; $\log_a^\alpha b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$, với $\alpha \neq 0$.

Ví dụ 5. Tính $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4.\log_2 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4.\log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}}(2\log_3 2.\log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}}(2\log_3 3) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_2^{-2} 2 = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}.$$

□

4 Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên

- Lôgarit cơ số 10 gọi là lôgarit thập phân, $\log_{10} N$, $(N > 0)$ thường được gọi là $\lg N$ hay $\log N$.
- Lôgarit cơ số e gọi là lôgarit tự nhiên, $\log_e N$, $(N > 0)$, được viết là $\ln N$.

Ví dụ 6. Biểu diễn $\log 64$ theo $a = \log_2 5$.

Lời giải.

Ta có $\log 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 10} = \dfrac{\log_2 2^6}{\log_2(2.5)} = \dfrac{6\log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 5} = \dfrac{6}{1+a}.$ □

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Tính giá trị của biểu thức chứa logarit.

Phương pháp giải. Sử dụng các định nghĩa, tính chất và qui tắc tính lôgarit để tính một biểu thức chứa lôgarit

Ví dụ 7. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

Lời giải.

$a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 4^2} = 4^2 = 16.$ □

Ví dụ 8. Tính giá trị của biểu thức $A = 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

Lời giải.

$A = \log_2 12^2 + \log_2 5^3 - (\log_2 15 + \log_2 150) = \log_2 12^2 \cdot 5^3 - \log_2 15 \cdot 150 = \log_2 \dfrac{18000}{2250} = \log_2 8 = 3.$ □

Ví dụ 9. Giá trị của biểu thức $P = \log_2 16 \cdot \log_3 27 \cdot \log_8 32 \cdot \log_3 \left(\dfrac{1}{9}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$P = \log_2 16 \cdot \log_3 27 \cdot \log_8 32 \cdot \log_3 \left(\dfrac{1}{9}\right) = 4\log_2 2 \cdot 3\log_3 3 \cdot \dfrac{5}{3}\log_2 2 \cdot (-2)\log_3 3 = -40.$ □

Ví dụ 10. Rút gọn biểu thức $P = \log_a b^2 + 2\log_{a^2} b^4 + 3\log_{a^3} b^6 - 4\log_{a^4} b^8$.

Lời giải.

$P = \log_a b^2 + 2\log_{a^2} b^4 + 3\log_{a^3} b^6 - 4\log_{a^4} b^8 = 2\log_a b + 4\log_a b + 6\log_a b - 8\log_a b = 4\log_a b.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$.

Lời giải.

$P = \log_7 6 - \log_7 14 - \log_7 21 = \log_7 \dfrac{6}{14 \cdot 21} = \log_7 \dfrac{1}{49} = -2.$ □

Bài 2. Cho $0 < a \neq 1$, tính giá trị của biểu thức $P = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$.

Lời giải.

$P = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e = \ln^2 a + 2\ln a \log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e = 2\ln^2 a + 2.$ □

Bài 3. Cho $0 < a \neq 1$, tính giá trị của biểu thức $P = 2\ln a + 3\log_a e + \dfrac{3}{\ln a} - \dfrac{2}{\log_a e}$.

Lời giải.

$P = 2\ln a + 3\log_a e + \dfrac{3}{\ln a} - \dfrac{2}{\log_a e} = 2\ln a + 3\log_a e + 3\log_a e - 2\ln a = 6\log_a e = \dfrac{6}{\ln a}.$ □

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a (a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a})$.

Lời giải.

$P = \log_a (a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a}) = \log_a (a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}) = \dfrac{37}{10}.$ □

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdots \log_{16} 15$.

Lời giải.

$A = \log_{16} 15 \cdot \log_{15} 14 \cdots \log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 = \log_{16} 2 = \dfrac{1}{4}$. □

Bài 6. Rút gọn biểu thức $P = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{a \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}}$.

Lời giải.

$P = -\log_a \dfrac{a \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}} = -\log_a a^{\frac{91}{60}} = -\dfrac{91}{60}$. □

Bài 7. Tính giá trị của biểu thức $P = 4^{3\log_8 3 + 2\log_{16} 5}$.

Lời giải.

$P = 4^{3\log_8 3 + 2\log_{16} 5} = 4^{\log_2 3} \cdot 4^{\log_4 5} = 3^2 \cdot 5 = 45$. □

Bài 8. Cho $0 < a, b$ và $a, b \neq 1$, tính giá trị biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$.

Lời giải.

$P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = 6\log_a b \cdot 4\log_b a = 24\log_a b \cdot \log_b a = 24$. □

Bài 9. Cho $P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a} = 4\log_a b + 2\log_a \left(\dfrac{a}{b^2}\right) = 4\log_a b + 2(\log_a a - \log_a b^2) = 2$. □

Bài 10. Cho $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$. Tìm giá trị của x.

Lời giải.

$\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_3 8 + \log_3 5 - 2\log_3 3 = \log_3 \dfrac{40}{9} \Rightarrow x = \dfrac{40}{9}$. □

Bài 11. Cho $\log_7 \dfrac{1}{x} = 2\log_7 a - 6\log_{49} b$. Tìm giá trị của x.

Lời giải.

$\log_7 \dfrac{1}{x} = 2\log_7 a - 6\log_{49} b = \log_7 a^2 - \log_7 b^3 = \log_7 \dfrac{a^2}{b^3} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{a^2}{b^3} \Rightarrow x = \dfrac{b^3}{a^2}$. □

Bài 12. Cho $a, b > 0$, nếu viết $\log_5 \left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2} = x\log_5 a + y\log_5 b$ thì xy bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$\log_5 \left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2} = \log_5 a^{-2} - \log_5 b^{-\frac{1}{6}} = -2\log_5 a + \dfrac{1}{6}\log_5 b$.

Cân bằng hệ số ta được: $x = -2, y = \dfrac{1}{6} \Rightarrow xy = -\dfrac{1}{3}$. □

Bài 13. Cho $a, b > 0$. Nếu viết $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{x}{15}\log_3 a + \dfrac{y}{15}\log_3 b$ thì $x + y$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}} = \log_3 a^{\frac{2}{5}} + \log_3 b^{\frac{2}{15}} = \dfrac{2}{5}\log_3 a + \dfrac{2}{15}\log_3 b$.

Cân bằng hệ số ta được: $x=2, y=2 \Rightarrow x+y=4$. □

DẠNG 2. Biểu diễn logarit theo các tham số.

Phương pháp giải.

Bước 1: Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số a và b về dạng logarit với cơ số và đối số là tích các số nguyên tố.

Bước 2: Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn $x, y, z, \ldots$ Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn là $x, y, z, \ldots$ ta tìm các ẩn này theo a, b.

Bước 3: Giải hệ tìm được tìm $x, y, z, \ldots$ theo a, b. Từ đó tính được biểu thức theo các tham số a, b.

Các công thức nền tảng là $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\dfrac{1}{\log_a b} = \log_b a$.

Ví dụ 11. Cho $a = \log_2 14$. Biểu diễn $\log_{49} 16$ theo a.

Lời giải.

Ta có: $\log_{49} 16 = \log_{7^2} 2^4 = 2\log_7 2 = 2.\dfrac{1}{\log_2 7} = \dfrac{2}{\log_2 \dfrac{14}{2}} = \dfrac{2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \dfrac{2}{a-1}$. □

Ví dụ 12. Cho $a = \log_{12} 18$. Tính $\log_{24} 54$ theo a.

Lời giải.

Đầu tiên ta biến đổi

$a = \log_{12} 18 = \log_{12}(3^2.2) = 2\log_{12} 3 + \log_{12} 2 = 2.\dfrac{1}{1+2\log_3 2} + \dfrac{1}{2+\log_2 3} = \dfrac{2+\log_3 2}{1+2\log_3 2} = \dfrac{2+x}{1+2x}$.

Giải tìm $x = \log_3 2$ theo a ta được $\log_3 2 = \dfrac{a-2}{1-2a}$.

Vậy ta đưa biểu thức cần biểu diễn về cơ số 3 nên được

$$\log_{24} 54 = \frac{\log_3(3^3.2)}{\log_3(2^3.3)} = \frac{3+\log_3 2}{1+3\log_3 2} = \frac{-5a+1}{a-5}$$

. □

Ví dụ 13. Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b.

Lời giải.

Đầu tiên ta có hệ $\begin{cases} a = \log_5 18 = \log_5 2 + 2\log_5 3 \\ b = \log_5 60 = 2\log_5 2 + \log_5 3 + 1 \end{cases}$.

Đặt $x = \log_5 2$ và $y = \log_5 3$ từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} x+2y = a \\ 2x+y = b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 2 = \dfrac{-a+2b-2}{3} \\ y = \log_5 3 = \dfrac{2a-b+1}{3} \end{cases}.$$

Nên $\log_3 2 = \dfrac{\log_5 2}{\log_5 3} = \dfrac{-a+2b-2}{2a-b+1}$. □

Ví dụ 14. Cho $a = \log_7 12$ và $b = \log_{12} 14$. Tính $\log_{54} 168$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có $a = \log_7 12 \Leftrightarrow a = \log_7 3 + 2\log_7 2$.

Mặt khác $ab = \log_7 12.\log_{12} 14 = \log_7 14 = \log_7 2 + 1 \Rightarrow \log_7 2 = ab - 1$.

Thay vào trên ta được $\log_7 3 = a - 2\log_7 2 = a - 2(ab-1) = a - 2ab + 2$.

Từ đó ta biến đổi biểu thức về cơ số 7 ta được

$\log_{54} 168 = \dfrac{\log_7 168}{\log_7 54} = \dfrac{3\log_7 2 + \log_7 3 + 1}{3\log_7 3 + \log_7 2}$

$= \dfrac{3\log_7 2 + \log_7 3 + 1}{3\log_7 3 + \log_7 2} = \dfrac{3ab - 3 + a - 2ab + 2 + 1}{3a - 6ab + 6 + ab - 1} = \dfrac{ab + a}{3a - 5ab + 5}$. □

Ví dụ 15. Cho $a = \log_{56} 18$ và $b = \log_{36} 48$. Hãy tính $\log_{21} 6$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có hệ $\begin{cases} a = \log_{2^3.7}\left(3^2.2\right) = \dfrac{2\log_2 3 + 1}{3 + \log_2 7} \\ b = \log_{2^3.3^2}\left(2^4.3\right) = \dfrac{4 + \log_2 3}{2 + 2\log_2 3} \end{cases}$

Đặt $x = \log_2 3$ và $y = \log_2 7$ ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3+y} = a \\ \dfrac{4+x}{2+2x} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2b+4}{2b-1} \\ y = \dfrac{-6ab+3a-2b+7}{a(2b-1)} \end{cases}$.

Suy ra $\log_{21} 6 = \dfrac{\log_2 3 + 1}{\log_2 3 + \log_2 7} = \dfrac{x+1}{x+y} = \dfrac{-3a}{8ab - 7a + 2b - 7}$. □

Ví dụ 16. Cho $\log_2 14 = a$. Tính $\log_{56} 32$ theo a .

Lời giải.

Ta có : $\log_{56} 32 = \dfrac{1}{\log_{32} 56} = \dfrac{1}{\log_{2^6} 14 \cdot 4} = \dfrac{1}{6(\log_2 14 + \log_2 4)} = \dfrac{1}{6a + 12}$. □

Ví dụ 17. Cho $\log_3 5 = a$. Tính $\log_{75} 45$ theo a.

Lời giải.

Ta có $\log_{75} 45 = \log_{5^2.3}(3^2 \cdot 5) = 2\log_{5^2.3} 3 + \log_{5^2.3} 5 = \dfrac{2}{\log_3(5^2 \cdot 3)} + \dfrac{1}{\log_5(5^2 \cdot 3)} = \dfrac{2}{2\log_3 5 + 1} + \dfrac{1}{2 + \log_5 3} = \dfrac{2}{1+2a} + \dfrac{1}{2+a}$. □

Ví dụ 18. Cho $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = a$. Tính $\log 40$ theo a .

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = a \Leftrightarrow a = -\dfrac{2}{3}\log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 5 = -\dfrac{3a}{2}$.

Vậy $\log 40 = 1 + \log_{10} 4 = 1 + 2\log_{10} 2 = 1 + \dfrac{2}{\log_2 10} = 1 + \dfrac{2}{\log_2 (2\cdot 5)} = 1 + \dfrac{2}{1+\log_2 5} = \dfrac{6-3a}{2-3a}$. □

Ví dụ 19. Biết $\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Tính $\log 15$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có $\log 15 = \log(3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = \log 3 + \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = b + 1 - a$. □

Ví dụ 20. Cho $\log_{30} 3 = a, \log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a, b.

Lời giải.

Ta có $\log_{30} 1350 = \log_{30}(5\cdot 3^2 \cdot 30) = \log_{30} 5 + 2\log_{30} 3 + \log_{30} 30 = b + 2a + 1$. □

Ví dụ 21. Cho $\log_2 5 = a, \log_5 3 = b$. Tính $\log_{24} 15$ theo a, b.

Lời giải.

Ta có $\log_2 5 \cdot \log_5 3 = \log_2 3 = ab \Rightarrow \dfrac{1}{\log_3 2} = \dfrac{1}{ab}$.

$\Rightarrow \log_{24} 15 = \log_{24} 3 + \log_{24} 5 = \dfrac{1}{\log_3(3\cdot 2^3)} + \dfrac{1}{\log_5(3.2^3)} = \dfrac{1}{1+3\log_3 2} + \dfrac{1}{\log_5 3 + 3\log_5 2} = \dfrac{ab+a}{ab+3}$. □

Ví dụ 22. Cho $\log_2 3 = a$, $\log_5 3 = b$. Biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có:$\log_6 45 = 2\log_6 3 + \log_6 5 = \dfrac{2}{\log_3(2\cdot 3)} + \dfrac{1}{\log_5(2\cdot 3)} = \dfrac{2}{1+\log_3 2} + \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3}$.

Mặt khác $\log_5 2 = \dfrac{\log_5 3}{\log_2 3} = \dfrac{b}{a}; \log_3 2 = \dfrac{1}{a}$.

$\Rightarrow \log_6 45 = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{a}} + \dfrac{1}{\dfrac{b}{a}+b} = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$. □

Ví dụ 23. Cho $a = \log_2 3$ và $b = \log_2 5$. Biểu diễn $\log_2 \sqrt[6]{360}$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có $\log_2 \sqrt[6]{360} = \dfrac{1}{6}\log_2 360 = \dfrac{1}{6}\log_2(2^3\cdot 3^2\cdot 5) = \dfrac{1}{6}(3\log_2 2 + 2\log_2 3 + \log_2 5) = \dfrac{1}{6}(3+2a+b) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{6}b$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Đặt $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_6 35$ theo a, b, c.

Lời giải.

☑ Ta có $\log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \dfrac{1}{3}\log_3 5 = a \Rightarrow 3a = \log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2 5 = 3ac$.

☑ $\log_8 7 = \log_{2^3} 7 = \dfrac{1}{3}\log_2 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b.$

☑ Suy ra $\log_6 35 = \dfrac{\log_2(7\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 7}{1+\log_2 3} = \dfrac{3ac+3b}{1+c}$

□

Bài 15. Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_5 3 = b$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a, b.

Lời giải.

☑ Ta có $\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5} = b \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \log_2 5.$

☑ Suy ra $\log_6 45 = \dfrac{\log_2(3^2\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1+\log_2 3} = \dfrac{2a+\dfrac{a}{b}}{1+a} = \dfrac{a(2b+1)}{b(1+a)}$

□

Bài 16. Cho biết $\log 3 = a$, $\log 2 = b$. Hãy tính $\log_{125} 30$ theo a, b.

Lời giải.

☑ Ta có: $\log 125 = \log 5^3 = 3\log 5 = 3\log\dfrac{10}{2} = 3(\log 10 - \log 2) = 3(1-b).$

☑ $\log 30 = \log 3 + \log 10 = 1 + a.$

☑ Suy ra $\log_{125} 30 = \dfrac{\log 30}{\log 125} = \dfrac{1+a}{3(1-a)}$

□

Bài 17. Cho $\log_2 3 = m$, $\log_2 5 = n$. Tính theo m và n giá trị của $\log_2 \sqrt{0,3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 \sqrt{0,3} = \log_2 (3\cdot 10^{-1})^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 (3\cdot 10^{-1}) = \dfrac{1}{2}[\log_2 3 - \log_2 10]$
$= \dfrac{1}{2}[\log_2 3 - \log_2 5 - \log_2 2] = \dfrac{1}{2}[m-n-1].$ □

Bài 18. Cho $\log_a b = \sqrt{2}$. Tính $\log_{a^2 b} \dfrac{b^2}{\sqrt{a}}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2 b} \dfrac{b^2}{\sqrt{a}} = \dfrac{\log_a\left(\dfrac{b^2}{\sqrt{a}}\right)}{\log_a (a^2 b)} = \dfrac{2\log_a b - \dfrac{1}{2}\log_a a}{2\log_a a + \log_a b} = \dfrac{2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}-1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}.$ □

Bài 19. Cho $m = \log 3$, $n = \log 5$. Tính $\log_{30} 8$ theo m, n.

Lời giải.

☑ Ta có $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3\log\dfrac{10}{5} = 3(1-\log 5) = 3(1-m).$

☑ $\log 30 = \log(3\cdot 10) = \log 3 + \log 10 = m+1.$

☑ Suy ra $\log_{30} 8 = \dfrac{\log 8}{\log 30} = \dfrac{3(1-n)}{1+m}$

□

Bài 20. Cho $\log_2 3 = a$, biểu diễn $\log_{12} 18$ và $\log_{24} 54$ qua a.

Lời giải.

☑ Ta có $\log_{12} 18 = \dfrac{\log_2(3^2\cdot 2)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \dfrac{2\log_2 3 + 1}{2+\log_2 3} = \dfrac{2a+1}{a+2}.$

☑ Tương tự $\log_{24} 54 = \dfrac{\log_2 (3^2 \cdot 2^2)}{\log_2 (2^3 \cdot 3)} = \dfrac{2\log_2 3 + 2}{3 + \log_2 3} = \dfrac{2a+2}{a+3}$.

□

Bài 21. Cho $\log_2 5 = m$, biểu diễn $\log_4 1250$ theo m.

Lời giải.

$\log_4 1250 = \dfrac{1}{2}\log_2 1250 = \dfrac{1}{2}\log_2 (2 \cdot 5^4) = \dfrac{1}{2}(1 + 4\log_2 5) = \dfrac{1}{2}(1+4m)$. □

Bài 22. Cho $a = \log_3 2$. Tính $\log_6 2$ và $\log_{12} 4$ theo a.

Lời giải.

Ta có $\log_6 2 = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 6} = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 3 + \log_3 2} = \dfrac{a}{a+1}$.

Mà $\log_{12} 4 = \dfrac{\log_3 4}{\log_3 3 + \log_3 4} = \dfrac{\log_3 2^2}{1 + \log_3 2^2} = \dfrac{2a}{1+2a}$. □

Bài 23. Cho $a = \log_2 14$. Tính $\log_{49} 32$ theo a.

Lời giải.

Đầu tiên ta biến đổi

$a = \log_2 14 = \log_2 2 + \log_2 7 \Leftrightarrow \log_2 7 = a - 1$.

Đưa về cơ số 2 ta được $\log_{49} 32 = \dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 7^2} = \dfrac{5}{2(a-1)}$. □

Bài 24. Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_4 1250 &= \log_{2^2} (2 \cdot 5^4) = \frac{1}{2}\log_2 (2 \cdot 5^4)\\ &= \frac{1}{2}(1 + 4\log_2 5) = 2a + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 25. Cho $\log_2 5 = a, \log_2 3 = b$. Hãy tính $\log_{45} 1800$ theo a, b.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{45} 1800 &= \frac{\log_2 1800}{\log_2 45} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2)}{\log_2 3^2 \cdot 5}\\ &= \frac{\log_2 2^3 + \log_2 3^2 + \log_2 5^2}{\log_2 3^2 + \log_2 5} = \frac{3 + 2a + 2b}{a + 2b}.\end{aligned}$$

□

Bài 26. Cho $\log_3 15 = a, \log_3 10 = b$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a, b.

Lời giải.

Ta có $a=\log_3 15=\log_3 5+1$ nên $\log_3 5=a-1$. Lại có $b=\log_3 10=\log_3 2+\log_3 5$ suy ra $\log_3 2=b-a+1$. Do đó

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{3}} 50 &= 2\log_3(2\cdot 5^2)\\ &= 2\log_3 2+4\log_3 5=2a+2b-2.\end{aligned}$$

□

Bài 27. Cho $\log_a x=p, \log_b x=q, \log_{abc} x=r$. Biết $0<a\neq 1$, $0<b\neq 1$, $0<c\neq 1$ và $0<x\neq 1$. Hãy tính $\log_c x$ theo p,q,r.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\log_x abc=\dfrac{1}{r}$, suy ra

$$\log_x a+\log_x b+\log_x c=\frac{1}{r}.$$

Do đó

$$\log_x c=\frac{1}{r}-\log_x a-\log_x b=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}.$$

Vậy $\log_c x=\dfrac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. □

Bài 28. Cho $\log_2 3=a, \log_3 5=b, \log_7 2=c$. Hãy tính $\log_{140} 63$ theo a,b,c.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\log_{140} 63=\log_{140}(3^2\cdot 7)=2\log_{140} 3+\log_{140} 7\\ &=\frac{2}{\log_3 140}+\frac{1}{\log_7 140}=\frac{2}{\log_3(2^2\cdot 5\cdot 7)}+\frac{1}{\log_7(2^2\cdot 5\cdot 7)}\\ &=\frac{2}{2\log_3 2+\log_3 5+\log_3 7}+\frac{1}{2\log_7 2+\log_7 5+1}.\end{aligned}$$

Từ giả thiết ta được

$$\log_3 2=\frac{1}{a};\log_7 5=\log_7 2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 5=cab$$

$$\log_3 7=\frac{1}{\log_7 -3}=\frac{1}{ca}.$$

Vậy $\log_{140} 63=\dfrac{2}{\frac{2}{a}+b+\frac{1}{ca}}=\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$. □

Bài 29. Đặt $\log_2 a=m;\ \log_2 b=n$. Tính giá trị biểu thức $Q=\log_{\sqrt{8}}\sqrt[3]{ab^2}-4\log_{0.125}\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{a^3b^7}}$ theo m,n.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&Q=\log_{\sqrt{8}}\sqrt[3]{ab^2}-4\log_{0.125}\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{a^3b^7}}\\ &=2\log_8(ab^2)^{\frac{1}{3}}+4\log_8\frac{ab^{\frac{1}{3}}}{(a^3b^7)^{\frac{1}{4}}}\\ &=\frac{2}{9}\log_2(ab^2)+\frac{4}{3}\log_2\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{17}{12}}\right)\end{aligned}$$

$= \dfrac{2}{9}\log_2 a + \dfrac{4}{9}\log_2 b + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \dfrac{17}{9}\log_2 b$
$= \dfrac{5}{9}\log_2 a - \dfrac{13}{9}\log_2 b = \dfrac{5}{9}m - \dfrac{13}{9}n.$ □

Bài 30. Hãy biểu diễn các biểu thức logarit sau

a) Cho $a = \log_2 3; b = \log_3 7$. Hãy tính $\log_{24} 14$ theo a, b.

b) Cho $a = \log_2 5; b = \log_3 5$. Hãy tính $\log 75$ theo a, b.

Lời giải.

a) Ta có $\log_{24} 14 = \dfrac{\log_2 14}{\log_2 24} = \dfrac{\log_2 7 + 1}{\log_2 3 + \log_2 8} = \dfrac{\log_2 3.\log_3 7 + 1}{\log_2 3 + 3} = \dfrac{ab+1}{a+3}$

b) Ta có $\log 75 = \dfrac{\log_5 75}{\log_5 10} = \dfrac{\log_5 25 + \log_5 3}{\log_5 5 + \log_5 2} = \dfrac{2 + \dfrac{1}{\log_3 5}}{1 + \dfrac{1}{\log_2 5}} = \dfrac{(2b+1)a}{b(a+1)}$ □

Bài 31. Cho $\log_{15} 3 = a$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo a.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{15} 3 = \dfrac{1}{\log_3 15} = \dfrac{1}{1 + \log_3 5} \Rightarrow \log_3 5 = \dfrac{1}{a} - 1.$

Do đó $\log_{25} 15 = \dfrac{\log_3 15}{\log_3 25} = \dfrac{1 + \log_3 5}{2\log_3 5} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{a} - 1}{2\left(\dfrac{1}{a} - 1\right)} = \dfrac{1}{2(1-a)}.$ □

Bài 32. Cho $\log_{12} 6 = a; \log_{12} 7 = b$. Hãy tính $\log_2 7$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có $\log_2 7 = \dfrac{\log_{12} 7}{\log_{12} 2} = \dfrac{\log_{12} 7}{\log_{12} 12 - \log_{12} 6} = \dfrac{b}{1-a}.$ □

Bài 33. Tính $\log_2 2016$ theo a và b biết $\log_2 7 = a$ và $\log_3 7 = b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 2016 = \log_2 (2^5.3^2.7) = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7$
$= 5 + 2\dfrac{\log_2 7}{\log_3 7} + \log_2 7 = \dfrac{2a + 5b + ab}{b}.$ □

Bài 34. Cho $\log 2 = m$ và $\log 3 = n$. Tính $P = \log \sqrt[5]{0,108}$ theo m và n.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{1}{5}\log(0,108) = \dfrac{1}{5}\log\dfrac{108}{1000} = \dfrac{1}{5}\log\dfrac{2^2.3^3}{10^3} = \dfrac{1}{5}(2\log 2 + 3\log 3 - 3) = \dfrac{2m + 3n - 3}{5}.$ □

Bài 35. Biết $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$. Tính $\log_{12} 35$ theo a, b và c.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{27} 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5$; $b = \log_8 7 \Rightarrow 3b = \log_2 7$; $c = \log_2 3$.

Do đó
$\log_{12} 35 = \dfrac{\log_2 35}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 7}{2 + \log_2 3} = \dfrac{3ac + 3b}{c+2} = \dfrac{3(ac+b)}{c+2}.$ □

Bài 36. Cho $\log_6 10 = a$ và $\log_{12} 45 = b$. Hãy tính $\log_{30} 54$ theo a, b.

Lời giải.

Ta có: $a = \log_{2.3}(2.5) = \dfrac{1+\log_2 5}{1+\log_2 3}$

$b = \log_{3.2^2}(3^2.5) = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{2+\log_2 3}$.

Đặt $x = \log_2 5, y = \log_2 3$. Ta được $\begin{cases} a = \dfrac{1+x}{1+y} \\ b = \dfrac{2y+x}{2+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay - x = 1 - a \\ (b-2)y - x = -b \end{cases}$

Suy ra $(a-b+2)y = 1+b-a \Rightarrow y = \dfrac{1+b-a}{a-b+2} \Rightarrow x = \dfrac{(b-2)(1+b-a)}{2+a-b} + b = \dfrac{b+2a-2}{2+a-b}$.

Do đó

$$\log_{30} 54 = \log_{3.2.5}(3^3.2) = \frac{1+3\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2 5} = \frac{1+3x}{1+x+y} = \frac{5-2a+2b}{3+2a+b}$$

. □

Bài 37. Cho $a = \log_{40} 36$, $b = \log_{150} 50$. Hãy tính $\log_{10} 54$ theo a, b.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{2^3.5}(2^2.3^2) = \dfrac{2+2\log_2 3}{3+\log_2 5} = \dfrac{2+2x}{3+y}$.

$b = \log_{3.2.5^2}(5^2.2) = \dfrac{1+2\log_2 5}{1+\log_2 3+2\log_2 5} = \dfrac{1+2y}{1+x+2y}$, trong đó kí hiệu $x = \log_2 3, y = 2\log_2 5$.

Ta được $\begin{cases} ay - 2x = 2 - 3a \\ 2(b-1)y + bx = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aby - 2bx = 2b - 3ab \\ 4(b-1)y + 2bx = 2 - 2b \end{cases}$

$\Rightarrow (ab+4b-4)y = 2 - 3ab \Leftrightarrow y = \dfrac{2-3ab}{ab+4b-4} \Rightarrow 2x = \dfrac{a(2-3ab)}{ab+4b-4} + 3a - 2 = \dfrac{10ab-10a-8b+8}{ab+4b-4}$.

Suy ra

$$\log_{10} 54 = \log_{2.5}(3^3.2) = \frac{1+3\log_2 3}{1+\log_2 5} = \frac{1+3x}{1+y} = \frac{16ab-8b-15a+8}{-2ab+4b-2}$$

. □

Bài 38. Cho $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_5 7$. Hãy tính $\log_{420} 98$ theo a, b, c

Lời giải.

Ta có

$$\log_{420} 98 = \log_{7.5.3.2^2}(7^2.2) = \frac{1+\log_2 7}{2+\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7}$$

Ta có $\log_2 5 = \log_2 3.\log_3 5 = ab$ và $\log_2 7 = \log_2 5.\log_5 7 = abc$.

Suy ra $\log_{420} 98 = \dfrac{1+abc}{2+a+b+c}$. □

DẠNG 3. Tìm giá trị của x thỏa mãn hệ thức lôgarit

Phương pháp giải. Sử dụng các công thức biến đổi lôgarit đưa hệ thức đã cho về dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Từ đó ta có $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ hay } g(x) > 0 \end{cases}$. Giải hệ này ta tìm được x.

Ví dụ 24. Tìm giá trị của x biết $\log_3(x^2-1) + \log_9(x^2-1) = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

Ta có $\log_3(x^2-1) + \log_9(x^2-1) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3(x^2-1) + \dfrac{1}{2}\log_3(x^2-1) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3(x^2-1) = 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. □

Ví dụ 25. Tìm giá trị của x biết $\log_2(x^3 + 2x^2) = 4$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^3+2x^2) = 4 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 2^4 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 39. Tìm giá trị của x biết $\log_3(x^3+2) = 3$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x^3+2) = 3 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3^3 \Leftrightarrow x^3 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{25}$. □

Bài 40. Tìm giá trị của x biết $\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 4x - 6) = -1$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{6}}(x^2-4x-6) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}\right.$. □

Bài 41. Tìm giá trị của x theo a, b biết rằng $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 = \log_3(a^4 \cdot b^7)$.
Vậy $x = a^4 \cdot b^7$. □

Bài 42. Tìm giá trị của x theo a, b biết rằng $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 a^2 - \log_5 b^3 = \log_3\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)$.

Vậy $x = \dfrac{a^2}{b^3}$. □

DẠNG 4. Chứng minh đẳng thức chứa lôgarit

Phương pháp giải. Áp dụng các công thức biến đổi lôgarit, công thức đổi cơ số để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một đại lượng thứ ba, ...

Ví dụ 26. Cho a, b, c là ba số dương và khác 1. Chứng minh rằng $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Lời giải.

Ta có $a = b^{\log_b a}$.

Khi đó $VT = a^{\log_c b} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_c b} = b^{\log_c b \cdot \log_b a} = b^{\log_c a} = VP$. ■ □

Ví dụ 27. Cho a, b, c là các số dương và khác 1. Chứng minh rằng $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{ab} c = \dfrac{1}{\log_c ab}$.

Do đó $VT = \log_a c \cdot \log_c ab = \log_a c \left(\log_c a + \log_c b\right) = \log_a c \cdot \log_c a + \log_a c \cdot \log_c b$

$= 1 + \log_a b = VP$. ■ □

Ví dụ 28. Chứng minh rằng $\dfrac{7}{16} \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) - 4 \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \dfrac{25}{8} \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$.

Lời giải.

Ta có $VT = \dfrac{7}{16} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)^2 - 4 \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \dfrac{25}{8} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)^{-1}$

$= \dfrac{7}{8} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - 4 \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + \dfrac{25}{8} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$

$= \left(\dfrac{7}{8} - 4 + \dfrac{25}{8}\right) \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) = 0 = VP$. ■ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 43. Cho a, b là các số thực dương và khác 1. Chứng minh rằng $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$.

Lời giải.

Ta có $VT = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = b^{\log_b a \sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = b^{\sqrt{(\log_b a)^2 \log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

$= b^{\sqrt{\log_b a}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0 = VP$. ■ □

Bài 44. Cho a, x là các số thực dương, khác 1 và $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2 \log_a x}.$$

Lời giải.

Ta có $VT = \dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_a x} + \ldots + \dfrac{1}{\frac{1}{n}\log_a x} = \dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{2}{\log_a x} + \ldots + \dfrac{n}{\log_a x}$

$= (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \dfrac{1}{\log_a x} = \dfrac{n(n+1)}{2 \log_a x} = VP$. ■ □

Bài 45. Cho a, b là các số thực dương và thỏa mãn $a^2+b^2=7ab$. Chứng minh rằng $\log_7 \dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log_7 a+\log_7 b)$.

Lời giải.

Ta có $a^2+b^2=7ab \Rightarrow (a+b)^2=9ab \Rightarrow \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2=ab$.

Suy ra $\log_7 \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2=\log_7 (ab) \Rightarrow \log_7 \dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log_7 a+\log_7 b)$. ■ □

Bài 46. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x^2+4y^2=12xy$. Chứng minh rằng $2\log(x+2y)=\log x+\log y+4\log 2$.

Lời giải.

Ta có $x^2+4y^2=12xy \Rightarrow (x+2y)^2=16xy$.

Suy ra $\log(x+2y)^2=\log(16xy) \Rightarrow 2\log(x+2y)=\log x+\log y+4\log 2$. ■ □

Bài 47. Cho $a=\log_{12} 18$ và $b=\log_{24} 54$. Chứng minh rằng $5(a-b)+ab=1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a=\log_{12} 18=\dfrac{\log_3 18}{\log_3 12}=\dfrac{\log_3 2+2}{2\log_3 2+1} \\ b=\log_{24} 54=\dfrac{\log_3 54}{\log_3 24}=\dfrac{\log_3 2+3}{3\log_3 2+1} \end{cases}$.

Đặt $x=\log_3 2$, khi đó ta có $\begin{cases} a=\dfrac{x+2}{2x+1} \\ b=\dfrac{x+3}{3x+1} \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} VT=5(a-b)+ab &= 5\left(\frac{x-2}{2x+1}-\frac{x+3}{3x+1}\right)+\frac{x+2}{2x+1}\cdot\frac{x+3}{3x+1} \\ &= \frac{5[(x+2)(3x+1)-(x+3)(2x+1)]+(x+2)(x+3)}{(2x+1)(3x+1)} \\ &= \frac{6x^2+3x+1}{(2x+1)(3x+1)}=1=VP. \end{aligned}$$

■ □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 48. Chứng minh rằng $\log_2 3>\log_3 4$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 3\cdot\log_3 4=2$.

Mặt khác $3>\sqrt{8} \Rightarrow 3>2^{\frac{3}{2}}>2^{\sqrt{2}} \Rightarrow \log_2 3>\sqrt{2}$.

Do đó ta suy ra được $\log_3 4 < \sqrt{2}$.

Vậy $\log_2 3 > \log_3 4$. ■ □

Bài 49. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác vuông, trong đó c là cạnh huyền. Chứng minh rằng $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

Lời giải.

Theo định lý Py-ta-go, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (c+b)(c-b) = a^2$.

Ta có

$$\begin{aligned} VP = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a &= \log_{c+b} a^2 \cdot \log_{c-b} a = \left[\log_{c+b} (c+b)(c-b)\right] \log_{c-b} a \\ &= \left(1 + \log_{c+b} (c-b)\right) \log_{c-b} a = \log_{c-b} a + \log_{c+b} a = VT. \end{aligned}$$

■ □

Bài 50. Cho ba số dương a, b, c khác nhau và khác 1. Cho $N > 0, N \neq 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{\log_a N}{\log_c N} = \dfrac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}$ là điều kiện cần và đủ để a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} &\Leftrightarrow \frac{\log_N c}{\log_N a} = \frac{\frac{1}{\log_N a} - \frac{1}{\log_N b}}{\frac{1}{\log_N b} - \frac{1}{\log_N c}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_N c}{\log_N a} = \frac{\log_N \frac{b}{a} \cdot \log_N c}{\log_N \frac{c}{b} \cdot \log_N a} \Rightarrow \log_N \frac{b}{a} = \log_N \frac{c}{b} \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Do đó a, b, c lập thành cấp số nhân. ■ □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Giá trị của biểu thức $\log_2 5 \cdot \log_5 64$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải.

$\log_2 5 \cdot \log_5 64 = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A. $2\log a + \log b$. **B.** $\log a + 2\log b$. **C.** $2(\log a + \log b)$. **D.** $\log a + \dfrac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

$$\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b.$$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Với a và b là hai số dương tùy ý, $\log_2(a^3b^4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\log_2 a + \dfrac{1}{4}\log_2 b$. **B.** $3\log_2 a + 4\log_2 b$. **C.** $2\left(\log_3 a + \log_4 b\right)$. **D.** $4\log_2 a + 3\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(a^3b^4\right) = \log_2 a^3 + \log_2 b^4 = 3\log_2 a + 4\log_2 b.$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Biết $\log_2 a = x$ và $\log_2 b = y$, biểu thức $\log_2\left(4a^2b^3\right)$ bằng

A. x^3y^2. **B.** $2x + 3y + 2$. **C.** $x^2 + y^3 + 4$. **D.** $6xy$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(4a^2b^3\right) = \log_2 4 + \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2\log_2 a + 3\log_2 b + 2 = 2x + 3y + 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho a là số thực dương tùy ý khác 3, giá trị của $\log_{\frac{a}{3}}\left(\dfrac{a^2}{9}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{a}{3}}\left(\dfrac{a^2}{9}\right) = \log_{\frac{a}{3}}\left(\dfrac{a}{3}\right)^2 = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hai số thực a, b với $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_{a^3}|b| = \dfrac{1}{2}\log_a|b|$. **B.** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a|b|$. **C.** $\dfrac{1}{2}\log_a a^2 = 1$. **D.** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Dễ thấy các phương án A, B, C đều đúng theo tính chất logarit. Đáp án D sai vì chưa biết $b > 0$ hay $b < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định **đúng**

A. $\log_a b < 0$. **B.** $\ln a > \ln b$. **C.** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **D.** $2^a > 2^b$.

Lời giải.

Phương pháp:

Xét tính đúng sai của từng đáp án dựa vào điều kiện của a, b.

Cách giải:

a) $\log_a b < \log_a 1 = 0$ (vì $0 < a < 1$ và $b > 1$) nên $\log_a b < 0$ đúng.

b) $\ln a < \ln b$ vì $a < b$ nên $\ln a > \ln b$ sai.

c) Vì $0 < 0,5 < 1$ và $a < b$ nên $(0,5)^a > (0,5)^b$ nên $(0,5)^a < (0,5)^b$ sai.

d) Vì $2 > 1$ và $a < b$ nên $2^a < 2^b$ nên $2^a > 2^b$ sai.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho a, b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$. Tìm kết luận **đúng**.

A. $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$.

B. $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$.

C. $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$.

D. $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng tính chất của logarit nhận xét tính đúng sai của từng đáp án.

Cách giải:

① $\ln a + \ln b = \ln(ab) \neq \ln(a+b)$ nên $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$ sai.

② $\ln(a+b) \neq \ln a \cdot \ln b$ nên $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$ sai.

③ $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b} \neq \ln(a-b)$ nên $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$ sai.

④ $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ nên $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Với a, b là hai số thực dương tùy ý, $\ln \dfrac{a^4 e}{b}$ bằng

A. $4\ln a - \ln b + 1$.

B. $4\ln b - \ln a + 1$.

C. $4\ln a + \ln b - 1$.

D. $4\ln a + \ln b + 1$.

Lời giải.

Ta có: $\ln \dfrac{a^4 e}{b} = \ln a^4 + \ln e - \ln b = 4\ln a + 1 - \ln b = 4\ln a - \ln b + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho $a, b > 0$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\log(ab^2) = 2\log a + 2\log b$.

B. $\log(ab) = \log a - \log b$.

C. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.

D. $\log(ab^2) = \log a + 2\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 27\log_a b$.

B. $P = 15\log_a b$.

C. $P = 9\log_a b$.

D. $P = 6\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + \dfrac{6}{2}\log_a b = 3\log_a b + 3\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho $a, b, c > 0, a \neq 1; b \neq 1$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$.

B. $\log_a b. \log_b c = \log_a c$.

C. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

D. $\log_{a^c} b = c \log_a b$.

Lời giải.

Sai, vì $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tính giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ với $a > 0, a \neq 1$.

A. 8. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 16} = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a \sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a \left(a \sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right) \\ &= \log_a \left(a \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \log_a \left(a \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \log_a \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \log_a a^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

B. $\ln \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{3} \ln a$.

C. $\ln a^5 = \dfrac{1}{5} \ln a$.

D. $\ln (3 + a) = \ln 3 + \ln a$.

Lời giải.

Ta có $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log a = x$, $\log b = y$. Tính $P = \log (a^2 b^3)$

A. $P = 6xy$. **B.** $p = x^2 y^3$. **C.** $P = x^2 + y^3$. **D.** $P = 2x + 3y$.

Lời giải.

Ta có $\log (a^2 b^3) = \log (a^2) + \log (b^3) = 2 \log a + 3 \log b = 2x + 3y$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Với các số thực dương x, y. Ta có 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và các số $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó y bằng

A. 225. **B.** 15. **C.** 105. **D.** $\sqrt{105}$.

Lời giải.

Từ 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên công bội $q = \dfrac{2}{4^4} = \dfrac{1}{2^7}$

Suy ra $4^4 = 8^x \cdot \dfrac{1}{2^7} \Rightarrow x = 5$.

Mặt khác $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra

$$\log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 x) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = (\log_2 45 + \log_2 5) : 2 \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 \sqrt{225} \Leftrightarrow y = 15.$$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho $a, b > 0$, $\log_3 a = p$, $\log_3 b = p$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_3 \left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r + pm - qd$. **B.** $\log_3 \left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r + pm + qd$.

C. $\log_3 \left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r - pm - qd$. **D.** $\log_3 \left(\dfrac{3^r}{a^m b^d}\right) = r - pm + qd$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 \left(\dfrac{3}{a^m b^d}\right) = \log_3 3^r - \log_3 \left(a^m b^d\right) = r - \log_3 a^m - \log_3 b^d = r - m \log_3 a - d \log_3 b$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho $a = \log_3 2, b = \log_3 5$. Khi đó $\log 60$ bằng

A. $\dfrac{-2a + b - 1}{a + b}$. **B.** $\dfrac{2a + b + 1}{a + b}$. **C.** $\dfrac{2a + b - 1}{a + b}$. **D.** $\dfrac{2a - b - 1}{a + b}$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, \log_a b^c = c \log_a b$ (các biểu thức trên đều xác định).

Cách giải:

$$\log 60 = \frac{\log_3 60}{\log_3 10} = \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{2 \log_3 2 + 1 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{2a + b + 1}{a + b}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$. Khẳng định nào **sai**?

A. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. **B.** $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

C. $\log_a c = c \Leftrightarrow b = a^c$. **D.** $\log_a (b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của Logarit.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Phương trình $\log(x + 1) = 2$ có nghiệm là

A. 11. **B.** 9. **C.** 101. **D.** 99.

Lời giải.

Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Ta có $\log(x + 1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn đáp án D □

Câu 22. Giả sử a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a^2b^3 = 4^4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\log_2 a - 3\log_2 b = 8$. **B.** $2\log_2 a + 3\log_2 b = 8$.

C. $2\log_2 a + 3\log_2 b = 4$. **D.** $2\log_2 a - 3\log_2 b = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\log_2(a^2b^3) = \log_2 4^4 \Leftrightarrow \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 4\log_2 4 \Leftrightarrow 2\log_2 a + 3\log_2 b = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho số thực $a > 0, a \neq 1$. Giá trị $\log_{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{a^2}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{a^2} = \log_{a^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \log_a a = \frac{4}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A. $2\log a + \log b$. **B.** $\log a + 2\log b$. **C.** $2(\log a + \log b)$. **D.** $\log a + \frac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$. **B.** $y' = \frac{1}{x}$. **C.** $y' = \frac{1}{x\log 10}$. **D.** $y' = \frac{1}{x\ln 10}$.

Câu 26. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log(-x^2 + 7x - 12)$.

A. $D = (3;4)$. **B.** $D = [3;4]$. **C.** $D = (-\infty;4)$. **D.** $D = (3;+\infty)$.

Câu 27. Cho số thực $0 < a \neq 1$. Với mọi số thực dương x, y. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. **B.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x - y)$. **D.** $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Theo công thức logarit của một thương nên $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Biết $\log_6 \sqrt{a} = 2$, tính $\log_6 a$.

A. $\log_6 a = 6$. **B.** $\log_6 a = 108$. **C.** $\log_6 a = 4$. **D.** $\log_6 a = 36$.

Câu 29. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. Cơ số của logarit là một số thực tùy ý. **B.** Có số của logarit là mộ số nguyên dương.

C. Cơ số của logarit là một số nguyên. **D.** Cơ số của logarit là một số dương khác 1.

Câu 30. Cơ số x bằng bao nhiêu để $\log_x \sqrt[10]{3} = -0{,}1$.

A. $x = -3$. **B.** $x = -\frac{1}{3}$. **C.** $x = \frac{1}{3}$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $\log_x \sqrt[10]{3} = -0,1 \Leftrightarrow x^{-0,1} = 3^{0,1} \Leftrightarrow x^{-1} = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\log_a \dfrac{a}{b} = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

B. $\log_a(a+b) = \log_a b \log_a c$.

C. $\log_a b = \dfrac{1}{c}\log_a b$.

D. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải.

Theo công thức đổi cơ số ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Giá trị của biểu thức $\log_2 5 \cdot \log_5 64$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải.

$\log_2 5 \cdot \log_5 64 = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và x, y là hai số thực thỏa mãn $xy > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a x^2 = 2\log_a x$.

C. $\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$.

D. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Lời giải.

Các đẳng thức $\log_a x^2 = 2\log_a x$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ sai khi $x < 0$, $y < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây đúng với mọi số dương x, y?

A. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a(x-y)$.

C. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

D. $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Giải bất phương trình $\log_3(x-1) > 2$.

A. $0 < x < 10$. **B.** $x \geq 10$. **C.** $x < 10$. **D.** $x > 10$.

Lời giải.

Ta có: $\log_3(x-1) > 2 \Leftrightarrow x - 1 > 3^2 \Leftrightarrow x > 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(4-x)$ là:

A. $D = [4; +\infty)$. **B.** $D = (-\infty; 4]$. **C.** $D = (4; +\infty)$. **D.** $D = (-\infty; 4)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_3 4 - x$ xác định khi $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho các số thực dương a, b, c và khác 1. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

B. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

C. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

D. $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Biết $\log 3 = m$, $\log 5 = n$, tìm $\log_9 45$ theo m, n.

A. $1 - \dfrac{n}{2m}$.

B. $1 + \dfrac{n}{m}$.

C. $2 + \dfrac{n}{2m}$.

D. $1 + \dfrac{n}{2m}$.

Lời giải.

Ta có $\log_9 45 = \dfrac{\log 3^2 \cdot 5}{\log 3^2} = 1 + \dfrac{\log 5}{2\log 3} = 1 + \dfrac{n}{2m}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\log_a 2 \cdot \log_2 a = 1$.

B. $\log_a 1 = 0$.

C. $\log_a a = 1$.

D. $\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_a 2}$.

Lời giải.

$\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_a 2}$ không phải là công thức đổi cơ số, nếu đúng là $\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_2 a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn đẳng thức $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$.

A. $\dfrac{20}{3}$.

B. $\dfrac{40}{9}$.

C. $\dfrac{25}{9}$.

D. $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 x = \log_3 8 + \log_3 5 - \log_3 9 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 x = \log_3 \frac{40}{9} \Leftrightarrow x = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho các số thực dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\log_a b + \log_a c = \log_a(b + c)$.

B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$.

C. $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

D. $\log_a b + \log_a c = \log_a(b - c)$.

Lời giải.

Với a, b, c và $a \neq 1$ thì $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Với a và b là các số thực dương. Biểu thức $\log_a(a^2 b)$ bằng

A. $2 + \log_a b$.

B. $2 - \log_a b$.

C. $2\log_a b$.

D. $1 + 2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \log_a b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho a, b, c với a, b là các số thực dương khác 1, $c > 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
B. $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.
C. $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$.
D. $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$.

Lời giải.

Ta thấy $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ sai khi $c = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho a, b, c là các số thực dương, a khác 1. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
B. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
C. $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$.
D. $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ nên $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$ sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_3 5 > 0$.
B. $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$.
C. $\log_{0,3} 0{,}8 < 0$.
D. $\log_3 4 > \log_4 \left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Vì $3 > 1$ và $5 > 1$ nên $\log_3 5 > \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 5 > 0$ (đúng).

Vì $2 + x^2 > 1$ và $2016 < 2017$ nên $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$ (đúng).

Vì $\log_3 4 > 0$ và $\log_4 \left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$ nên $\log_3 4 > \log_4 \left(\dfrac{1}{3}\right)$ (đúng).

Vì $0{,}3 < 1$ và $0{,}8 < 1$ nên $\log_{0,3} 0,8 > \log_{0,3} 1 \Leftrightarrow \log_{0,3} 0{,}8 > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho a, b là các số dương phân biệt khác 1 và thỏa mãn $ab = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b = 1$. **B.** $\log_a(b+1) < 0$. **C.** $\log_a b = -1$. **D.** $\log_a(b+1) > 0$.

Lời giải.

Ta có: $ab = 1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$. Từ đó ta có: $\log_a b = \log_a a^{-1} = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln \dfrac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **C.** $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. **D.** $\ln \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Dễ thấy $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho $a > 0; a \neq 1$ và $x; y$ là hai số dương. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$.
B. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
C. $\log_a(xy) = \log_a \cdot \log_a y$.
D. $\log_a(x+y) = \log_a \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

B. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

D. $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Ta không có công thức $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

B. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

D. $\log_a (b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Theo các công thức về logarit.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho các số thực dương a, b, c bất kì và $a \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a \dfrac{b}{c} = \dfrac{\log_a b}{\log_a c}$.

B. $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$.

C. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

D. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_b a - \log_c a$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Cho a, $b > 0$; $a, b \neq 1$ và x, y là hai số thực dương. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

B. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.

D. $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$.

Lời giải.

Có $\log_a \dfrac{1}{x} = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Với hai số thực bất kì $a \neq 0$, $b \neq 0$, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log(a^2b^2) = 2\log(ab)$.

B. $\log(a^2b^2) = 3\log\sqrt[3]{a^2b^2}$.

C. $\log(a^2b^2) = \log(a^4b^6) - \log(a^2b^4)$.

D. $\log(a^2b^2) = \log a^2 + \log b^2$.

Lời giải.

Chọn $a = 1$, $b = -1$, ta có $\log(a^2b^2) = 1$, nhưng $2\log(ab)$ không có nghĩa.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho a, b là hai số dương bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\ln a^b = b \ln a$.

B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$.

C. $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.

D. $\ln \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức logarit của lũy thừa $\ln a^{\alpha} = \alpha \ln a$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Tính $M = \ln \dfrac{1}{2} + \ln \dfrac{2}{3} + \cdots + \ln \dfrac{2017}{2018}$.

A. $M = 2018$. **B.** $M = \ln 2017$. **C.** $M = \ln \dfrac{1}{2017}$. **D.** $M = -\ln 2018$.

Lời giải.

$M = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \cdots + \ln 2017 - \ln 2018 = -\ln 2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho a và b là số hạng thứ nhất và thứ năm của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2 \dfrac{b-a}{d}$ bằng

A. $\log_2 5$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\log_2 9$.

Lời giải.

Ta có $b = a + 4d$ nên $b - a = 4d$. Do đó, $\log_2 \dfrac{b-a}{d} = \log_2 \dfrac{4d}{d} = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho a và b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ năm của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2 \left(\dfrac{b-a}{d}\right)$ bằng

A. $\log_2 5$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\log_2 3$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có: $b = a + 4d \Rightarrow \dfrac{b-a}{d} = 4 \Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{b-a}{d}\right) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\ln \left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln |a| - \ln |b|$. **B.** $\ln \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $\ln \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$. **D.** $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

Lời giải.

Mệnh đề "$\ln \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$" sai vì $a < b < 0$ nên $\ln a$ và $\ln b$ không tồn tại.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Biết $\log_6 a = 2$, $(a > 0)$. Tính $I = \log_6 \left(\dfrac{1}{a}\right)$

A. $I = -2$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $\log_6 a = 2$ $(a > 0) \Leftrightarrow a = 6^2$. Khi đó $I = \log_6 \left(\dfrac{1}{a}\right) = \log_6 (6^2)^{-1} = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y?

A. $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$. **B.** $\log_a(xy) = \log_a x - \log_a y$.

C. $\log_a(xy) = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$. **D.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Lời giải.

Công thức tính logarit của một tích.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Với a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_5 x = 4\log_5 a + 3\log_5 b$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x = 3a + 4b$. **B.** $x = 4a + 3b$. **C.** $x = a^4b^3$. **D.** $x = a^4 + b^3$.

Lời giải.

$\log_5 x = 4\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5 (a^4 \cdot b^3)$. Suy ra $x = a^4b^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và x, y là hai số thực dương tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a(x - y) = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$. **B.** $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

C. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. **D.** $\log_a(x - y) = \log_a x - \log_a y$.

Lời giải.

Theo giáo khoa.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng.

A. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. **B.** $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x \cdot \log_a y$. **D.** $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Với $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương thì ta luôn có $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho ba số dương a, b, c (a và b khác 1). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_b a \cdot \log_b c = \log_b c$. **B.** $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

C. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$. **D.** $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

Lời giải.

Công thức đổi cơ số: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

Quy tắc logarrit của một tích: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Quy tắc logarit của một thương: $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Tính giá trị của biểu thức $I = a \cdot \log_2 \sqrt{8}$.

A. $I = \dfrac{2}{3}$. **B.** $I = \dfrac{3a}{2}$. **C.** $I = \dfrac{2a}{3}$. **D.** $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$I = a \cdot \log_2 \sqrt{8} = a \cdot \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} \cdot a \cdot \log_2 2 = \dfrac{3a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho các số dương a, b, x, y với $a \neq 1, b \neq 1$. Hãy chọn khẳng định **đúng**?

A. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$. **B.** $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.

C. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. **D.** $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Ta có $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho a là số thực dương tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2(8a) = 3 - \log_2 a$. **B.** $\log_2(8a) = 3 + \log_2 a$.

C. $\log_2(8a) = 3\log_2 a$. **D.** $\log_2(8a) = 8\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2(8a) = \log_2 8 + \log_2 a = \log_2 2^3 + \log_2 a = 3 + \log_2 a$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x \cdot \log_a y$. **B.** $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$. **D.** $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Theo lý thuyết ta có $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Với a, b, c là các số thực dương, a và c khác 1 và $\alpha \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. **B.** $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$.

C. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$. **D.** $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

$\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$

A. 1. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 \dfrac{12 \cdot 20}{15} = \log_8 16 = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho $0 < a \neq 1$ và $x > 0, y > 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\log_a(x + y) = \log_a x \log_a y$. **B.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(xy) = \log_a x \log_a y$. **D.** $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

Lời giải.

Theo quy tắc tính lôgarit thì $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Cho $0 < a \neq 1$ và $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $\log_a b^2 = 2\log_a b$. **B.** $\log_a a^b$=b. **C.** $\log_a 1 = 0$. **D.** $\log_a a = 1$.

Lời giải.

Nếu $b < 0$ thì $\log_a b$ không tồn tại. Vậy mệnh đề $\log_a b^2 = 2\log_a b$ sai.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$ bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 3} = a^{\log_a 3^2} = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây đúng với mọi số dương x, y?

A. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$. **B.** $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a(x + y)$. **D.** $\log_a(x - y) = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Theo công thức ta có $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ với mọi số dương a, x, y và $a \neq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho ba số dương a, b, c và $a \neq 1$, $b \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $a^{\log_a b} = b; \log_a(a^b) = b$. **B.** $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

C. $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$. **D.** $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$.

Lời giải.

Với ba số dương a, b, c và $a \neq 1$, $b \neq 1$, ta có:

- ☑ $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$.
- ☑ $a^{\log_a b} = b^{\log_a a} = b$ và $\log_a(a^b) = b \log_a a = b$.
- ☑ $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$.
- ☑ $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Giá trị của biểu thức $\log_4 25 + \log_2 1{,}6$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\log_4 25 + \log_2 1{,}6 = \log_{2^2} 5^2 + \log_2 \dfrac{8}{5} = \log_2 5 + \log_2 8 - \log_2 5 = \log_2 2^3 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 77. Với x là số thực dương tùy ý, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_{100} x = \log x$. **B.** $\log_{100} x = 2 \log x$. **C.** $\log_{100} x = \dfrac{1}{2} \log x$. **D.** $\log_{100} x = -\log x$.

Lời giải.

Ta có $\log_{100} x = \log_{10^2} x = \dfrac{1}{2} \log_{10} x = \dfrac{1}{2} \log x$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Với a, b, c là các số thực dương khác 1, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$. **B.** $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$. **C.** $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

Lời giải.

Với a, b, c dương và khác 1, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ mới là công thức đổi cơ số đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Cho các số thực $a, b > 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_a \dfrac{a}{b} = \log_b a$. **B.** $\log_a \dfrac{a}{b} = 1 + \log_a b$. **C.** $\log_a \dfrac{a}{b} = \log_a b$. **D.** $\log_a \dfrac{a}{b} = 1 - \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_a \dfrac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Biết $\log_6 a = 2 (0 < a \neq 1)$. Tính $I = \log_a 6$.

A. $I = 36$. **B.** $I = \dfrac{1}{2}$. **C.** $I = 64$. **D.** $I = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_a 6 = \dfrac{1}{\log_6 a} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a = \log_a 2$. **B.** $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_2 a}$. **C.** $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_a 2}$. **D.** $\log_2 a = -\log_a 2$.

Lời giải.

Với a là số thực dương tùy ý khác 1, mệnh đề đúng là mệnh đề: $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_a 2}$

Chọn đáp án C □

Câu 82. Cho a, b, c, d là các số dương và $a \neq 1$, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$. **B.** $-\log_a b = \log_a \left(\dfrac{1}{b}\right)$.

C. $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a (b + c)$. **D.** $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$.

Lời giải.

$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a (b + c)$ sai, đúng phải là $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. **B.** $\log_a b + \log_a c = \log_a (b - c)$.

C. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$. **D.** $\log_a b + \log_a c = \log_a (b + c)$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ (vì a, b, c dương và $a \neq 1$).

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tính $P = \log_{2^{2018}} 4 - \dfrac{1}{1009} + \ln \mathrm{e}^{2018}$.

A. 2000. **B.** 1009. **C.** 1000. **D.** 2018.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{2^{2018}} 2^2 - \dfrac{1}{1009} + 2018 \cdot \ln \mathrm{e} = \dfrac{1}{1009} - \dfrac{1}{1009} + 2018 = 2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho a, b, c là các số thực dương và a, $b \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$. **B.** $a^{\log_a b} = b$.

C. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. **D.** $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Lời giải.

Ta có

① Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

② Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

B. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

D. $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$.

Lời giải.

Các công thức $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ là các tính chất của logarit nên đúng.

Công thức $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ nên $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$ là sai.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(2108a) = 2018 \ln a$.

B. $\ln a^{2018} = \dfrac{1}{2018} \ln a$.

C. $\ln a^{2018} = 2018 \ln a$.

D. $\ln(2018a) = \dfrac{1}{2018} \ln a$.

Lời giải.

Ta thấy mệnh đề đúng là $\ln a^{2018} = 2018 \ln a$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Với a, b là các số thực dương bất kì, $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{\sqrt{a}} b = \dfrac{1}{2} \log_a b$. **B.** $\log_{\sqrt{a}} b = -\dfrac{1}{2} \log_a b$. **C.** $\log_{\sqrt{a}} b = -2 \log_a b$. **D.** $\log_{\sqrt{a}} b = 2 \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{a}} b = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = 2 \log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Cho a là số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_3(3a) = 3 + \log_3 a$.

B. $\log_3(3a) = 1 + a$.

C. $\log_3(3a) = 1 + \log_3 a$.

D. $\log_3(3a) = \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3(3a) = \log_3 3 + \log_3 a = 1 + \log_3 a.$$

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho $0 < a \neq 1$ và $x > 0$, $y > 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$.

C. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

D. $\log_a(x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $\log_{a\sqrt{a}} a\sqrt[3]{a}$.

A. $\dfrac{8}{9}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

$\log_{a\sqrt{a}} a\sqrt[3]{a} = \log_{a^{\frac{3}{2}}} a^{\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho số thực $a > 0, a \neq 1$. Giá trị $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} a^{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{bmatrix} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{bmatrix}$. **D.** $\begin{bmatrix} 0 < b, a < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{bmatrix}$.

Câu 94. Với mọi số thực dương a, b, x, y và a, b khác 1, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. **B.** $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$.

C. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. **D.** $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a \dfrac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x \neq \dfrac{1}{\log_a x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log \sqrt{a} = 2\log a$. **B.** $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$.

C. $\log \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\log a$. **D.** $\log \dfrac{b}{a} = \log b - \log a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức logarit của một thường và logarit của một lũy thừa suy ra đáp án sai là $\log \sqrt{a} = 2\log a$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Với a là số thực dương bất kì và $a \neq 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln a^5 = \dfrac{1}{5}\ln a$. **B.** $\log_{a^5} \mathrm{e} = 5\log_a \mathrm{e}$. **C.** $\log_{a^5} \mathrm{e} = \dfrac{1}{5\ln a}$. **D.** $\ln a^5 = \dfrac{5}{\ln a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^5} \mathrm{e} = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln a^5} = \dfrac{1}{5\ln a}$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$, $\log_b \dfrac{1}{2} < \log_b \dfrac{2}{3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 1$, $0 < b < 1$. **B.** $a > 1$, $b > 1$.

C. $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. **D.** $0 < a < 1$, $b > 1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5} \\ a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$; $\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3} \\ \log_b \dfrac{1}{2} < \log_b \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b > 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Với a là một số thực dương bất kì, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$. **B.** $\ln(3 + a) = \ln 3 + \ln a$.

C. $\ln \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{3} \ln a$. **D.** $\ln a^5 = \dfrac{1}{5} \ln a$.

Lời giải.

Theo công thức lôgarit của một tích ta có $\ln 3a = \ln 3 + \ln a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 \left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$. **B.** $\log_2 (x^2 - y) = 2 \log_2 x - \log_2 y$.

C. $\log_2 (xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$. **D.** $\log_2 (xy) = \log_2 x + \log_2 y$.

Lời giải.

Ta có công thức $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ (với điều kiện có nghĩa).

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_a \sqrt[3]{a}$.

A. $I = \dfrac{1}{3}$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -3$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. B	5. C	6. D	7. A	8. D	9. A	10. D
11. D	12. D	13. C	14. C	15. A	16. D	17. B	18. C	19. B	20. D
21. D	22. B	23. A	24. B	25. D	26. A	27. A	28. C	29. D	30. C
31. D	32. A	33. C	34. C	35. D	36. D	37. D	38. D	39. D	40. B
41. C	42. A	43. C	44. C	45. C	46. C	47. A	48. B	49. D	50. D
51. C	52. C	53. A	54. A	55. D	56. B	57. C	58. B	59. A	60. D
61. C	62. C	63. B	64. A	65. B	66. A	67. B	68. C	69. B	70. B
71. B	72. A	73. A	74. A	75. C	76. B	77. C	78. B	79. D	80. B
81. C	82. C	83. A	84. D	85. C	86. D	87. C	88. D	89. C	90. A
91. A	92. D	93. B	94. D	95. A	96. C	97. D	98. A	99. D	100. A

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho $a, b, c > 0, a, b \neq 1$. Tính $A = \log_a(b^2).log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c)$.

A. $\log_a c$. **B.** 1. **C.** $\log_a b$. **D.** $\log_a bc$.

Lời giải.

Có: $A = \log_a(b^2).log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c) = 2log_a b.\dfrac{1}{2}\log_b(bc) - \log_a(c)$

$= 2log_a b.\dfrac{1}{2}(\log_b b + \log_b c) - \log_a(c)$

$= \log_a b.(1 + \log_b c) - \log_a c = \log_a b + \log_a b.\log_b c - \log_a c = \log_a b + \log_a c - \log_a c = \log_a b.$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho a, b là hai số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_3(3ab)^3 = 3(1 + \log_3 a + \log_3 b)$. **B.** $\log_3(3ab)^3 = 3 + 3\log_3(ab)$.

C. $\log_3(3ab)^3 = (1 + \log_3 a + \log_3 b)^3$. **D.** $\log_3(3ab)^3 = 3 + \log_3(ab)^3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_3(3ab)^3 &= 3(\log_3 3 + \log_3 a + \log_3 b)\\ &= 3(1 + \log_3 a + \log_3 b)\\ &= 3 + 3\log_3 ab\\ &= 3 + \log_3(ab)^3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a^3}{125}\right)$.

A. $I = -\dfrac{1}{3}$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = \dfrac{1}{3}$. **D.** $I = 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a^3}{125}\right) = \log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a}{5}\right)^3 = 3\log_{\frac{a}{5}}\left(\dfrac{a}{5}\right) = 3.$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4a}$. **C.** $\dfrac{4}{3a}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

$$\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \frac{3}{4}\log_2 3 = \frac{3}{4\log_3 2} = \frac{3}{4a}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

A. $\dfrac{a+b}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3(a+b)}$. **C.** $3(a+b)$. **D.** $\dfrac{3}{a+b}$.

Lời giải.

$$\log_{15} 8 = 3\log_{15} 2 = \frac{3}{\log_2 15} = \frac{3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3}{a+b}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Rút gọn biểu thức $B=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{a.\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt{a}.\sqrt[4]{a}}$, (giả sử tất cả các điều kiện đều được thỏa mãn) ta được kết quả là

A. $\dfrac{60}{91}$. **B.** $-\dfrac{91}{60}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $B=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{a\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}}=\log_{a^{-1}}\dfrac{a\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}=\log_{a^{-1}}\dfrac{a^{\frac{29}{12}}}{a^{\frac{3}{4}}}=\log_{a^{-1}}a^{\frac{5}{3}}=-\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho $\log_a b=2$; $\log_a c=3$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(ab^3c^3\right)$.

A. $P=251$. **B.** $P=21$. **C.** $P=22$. **D.** $P=252$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a\left(ab^3c^3\right)=\log_a a+\log_a b^3+\log_a c^3=1+3\log_a b+5\log_a c=1+3\cdot2+5\cdot3=22$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Đặt $a=\log_7 11, b=\log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}$ theo a và b.

A. $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=6a+\dfrac{9}{b}$. **B.** $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=6a-\dfrac{9}{b}$.

C. $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=6a-9b$. **D.** $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{9}{b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt[3]{7}}\dfrac{121}{8}=3\left(\log_7 121-\log_7 8\right)=6\log_7 11-9\log_7 2=6\cdot\log_7 11-9\cdot\dfrac{1}{\log_2 7}=6a-\dfrac{9}{b}$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho số thực $a>0$, $a\neq1$. Giá trị của $\log_{a^2}\left(\sqrt[7]{a^3}\right)$ bằng

A. $\dfrac{3}{14}$. **B.** $\dfrac{6}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}\left(\sqrt[7]{a^3}\right)=\dfrac{1}{2}\log_a a^{\frac{3}{7}}=\dfrac{3}{14}\log_a a=\dfrac{3}{14}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Đặt $\log_5 2=a$. Khi đó $\log_{25}800$ bằng.

A. $\dfrac{5a+2}{2}$. **B.** $\dfrac{2a-5}{2}$. **C.** $\dfrac{5a-2}{2}$. **D.** $\dfrac{2a+5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{25}800=\dfrac{\log_5 800}{\log_5 25}=\dfrac{\log_5 2^5\cdot5^2}{\log_5 5^2}=\dfrac{5\log_5 2+2}{2}=\dfrac{5a+2}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Đặt $a=\log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

A. $\dfrac{3a-1}{a-1}$. **B.** $\dfrac{3a+1}{a+1}$. **C.** $\dfrac{4a-1}{a-1}$. **D.** $\dfrac{4a+1}{a+1}$.

Lời giải.

$\log_6 48=\log_6 3+\log_6 16=\dfrac{1}{\log_3 2+1}+\dfrac{4}{\log_2 3+1}=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{4}{\dfrac{1}{a}+1}=\dfrac{4a+1}{a+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tính giá trị biểu thức: $P=\log_{a^2}a^{10}b^2+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{5}}b^{-2}$ (Với $0<a\neq1;0<b\neq1$)

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right).$

$= \log_{a^2} a^{10} + \log_{a^2} b^2 + \log_{\sqrt{a}} a - \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} - 2\log_{\frac{1}{3}} b.$

$= 5 + \log_a b + 2 - \log_a b - 6 = 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{array}\right.$.

Lời giải.

TH1: $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow 0 < b < 1$.

TH2: $a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow b > 1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 14. Đặt $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

A. $\log_6 5 = \dfrac{1}{a+b}$. **B.** $\log_6 5 = \dfrac{ab}{a+b}$. **C.** $\log_6 5 = a^2 + b^2$. **D.** $\log_6 5 = a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5}} = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(2018a) = 2018\log a$. **B.** $\log a^{2018} = \dfrac{1}{2018}\log a$.

C. $\log(2018a) = \dfrac{1}{2018}\log a$. **D.** $\log a^{2018} = 2018\log a$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các công thức: $\log ab = \log a + \log b$; $\log a^n = n\log a$

Cách giải:

Ta có: $\log(2018a) = \log 2018 + \log a$

$\log a^{2018} = 2018\log a$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a$, với $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\log_2 x$ bằng bao nhiêu?

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^a$. **B.** a^2. **C.** 2^{1-a}. **D.** 4^{1-a}.

Lời giải.

Ta có $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$

$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) - 1 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 - 2a$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2^{2-2a} = 4^{1-a}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a

A. $\frac{3a-1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3-a}$. **C.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

☑ $a = \log_{12} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2^2) + \log_2 3} = \frac{\log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{1-a}$.

☑ $\log_{24} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 24} = \frac{\log_2(2.3^2)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + 2\cdot\frac{2a}{1-a}}{3 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{3a+1}{3-a}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Đặt $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$. Biểu diễn đúng $\log_6 5$ của theo a, b là

A. $\frac{1}{a+b}$. **B.** $a+b$. **C.** $\frac{ab}{a+b}$. **D.** $\frac{a+b}{ab}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \log_a b + \log_a c = \log_a bc\,(0 < a, b \neq 1; c > 0)$.

Cách giải: Ta có:

$\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{a}$.

$\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{b}$.

$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định đúng:

A. $\ln a > \ln b$. **B.** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **C.** $\log_a b < 0$. **D.** $2^a > 2^b$.

Lời giải.

Ta có:

① $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < b < 1$).

② $(0,5)^a < (0,5)^b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < b < 1$).

③ $\log_a b < 0 \Leftrightarrow b > 1$ (đúng vì $0 < a < 1 < b$).

④ $2^a > 2^b \Leftrightarrow a > b$ (sai vì $0 < a < 1 < b$).

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Với $a=\log_2 7$, $b=\log_5 7$. Tính giá trị của $\log_{10} 7$.

A. $\dfrac{ab}{a+b}$. **B.** $\dfrac{1}{a+b}$. **C.** $a+b$. **D.** $\dfrac{a+b}{ab}$.

Lời giải.

Biến đổi $\log_{10} 7=\dfrac{1}{\log_7 10}=\dfrac{1}{\log_7 2+\log_7 5}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Với a, b là hai số thực dương. Khi đó, $\log\left(a^2b\right)$ bằng

A. $2\log a-\log b$. **B.** $2\log a+b$. **C.** $2\log a+\log b$. **D.** $2\log b+\log a$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(a^2b\right)=\log a^2+\log b=2\log a+\log b$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\log_9 a^4+\log_3 b=8$ và $\log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9$. Giá trị biểu thức $P=ab+1$ bằng

A. 82. **B.** 27. **C.** 243. **D.** 244.

Lời giải.

Theo điều kiện ta có $\begin{cases}\log_9 a^4+\log_3 b=8\\ \log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_3 a+\log_3 b=8\\ \log_3 a+3\log_3 b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 a=3\\ \log_3 b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=27\\ b=9.\end{cases}$

Vậy $P=ab+1=244$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Số $20182019^{20192020}$ có bao nhiêu chữ số?

A. 147501991. **B.** 147501992. **C.** 147433277. **D.** 147433276.

Lời giải.

Phương pháp: Số các chữ số của số a^m là $[\log a^m]+1$ chữ số.

Cách giải:

Ta có: $[\log 20182019^{20192020}]+1=[20192020\log 20182019]+1=147501991+1=14750192$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho $\log_3 x=3\log_3 2$. Khi đó giá trị của x là

A. 8. **B.** 6. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 9.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\log_a b^c=c\log_a b\,(0<a\neq 1, b>0)$, ta có $\log_3 x=3\log_3 2\Leftrightarrow\log_3 x=\log_3 2^3\Leftrightarrow x=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_a(ab^3c^5)$.

A. $P=251$. **B.** $P=22$. **C.** $P=21$. **D.** $P=252$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a(ab^3c^5)=\log_a a+\log_a b^3+\log_a c^5=1+3\log_a b+5\log_a c=1+6+15=22$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Với các số thực $a,b>0,a\neq 1$ tùy ý, biểu thức $\log_{a^2}\left(ab^2\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}+4\log_a b$. **B.** $2+4\log_a b$. **C.** $\frac{1}{2}+\log_a b$. **D.** $2+\log_a b$.

Lời giải.

$\log_{a^2}(ab^2)=\log_{a^2}a+\log_{a^2}b^2=\frac{1}{2}\log_a a+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_a b=\frac{1}{2}+\log_a b$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Với các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b)$. **B.** $\frac{1}{2}(1+\log_2 a+\log_2 b)$.

C. $1+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$. **D.** $2+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Lời giải.

Ta có: $a^2+b^2=6ab\Leftrightarrow(a+b)^2=8ab$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \log_2(a+b)^2=\log_2 8ab\\ &\Leftrightarrow 2\log_2(a+b)=\log_2 8+\log_2 a+\log_2 b\\ &\Leftrightarrow \log_2(a+b)=\frac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b).\end{aligned}$$

.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Với a, b, c là các số thực dương tùy ý khác 1 và $\log_a c=x$, $\log_b c=y$. Khi đó giá trị của $\log_c(ab)$ bằng

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. **B.** $\frac{xy}{x+y}$. **C.** $\frac{1}{xy}$. **D.** $x+y$.

Lời giải.

Với a, b, c là các số thực dương tùy ý khác 1, ta có $\log_c a=\frac{1}{x}$ và $\log_c b=\frac{1}{y}$.

Khi đó $\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho $\log_{12}3=a$. Tính $\log_{24}18$ theo a.

A. $\frac{3a+1}{3+a}$. **B.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3-a}$. **D.** $\frac{3a+1}{3-a}$.

Lời giải.

Có $a=\log_{12}3=\frac{1}{\log_3 12}=\frac{1}{\log_3 3+\log_3 4}=\frac{1}{1+2\log_3 2}\Rightarrow\log_3 2=\frac{1-a}{2a}$.

Lại có $\log_{24}18=\frac{\log_3 18}{\log_3 24}=\frac{\log_3 9+\log_3 2}{\log_3 3+\log_3 8}=\frac{2+\log_3 2}{1+3\log_3 2}=\frac{2+\frac{1-a}{2a}}{1+3\cdot\frac{1-a}{2a}}=\frac{3a+1}{3-a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Đặt $\log_3 2=a$, khi đó $\log_{16}27$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{3}{4a}$. **C.** $\frac{4}{3a}$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{16}27=\log_{2^4}3^3=\frac{3}{4}\log_2 3=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\log_3 2}=\frac{3}{4a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$. **B.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$. **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Câu 32. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\pi^{1-x}$. **B.** $y=\ln(x^2+1)$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{2x+1}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\sqrt{2}}$.

Câu 33. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

A. $(0;3)$. **B.** $(e;+\infty)$. **C.** $(1;e^2)$. **D.** $(0;e)$.

Câu 34. Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^2-2x+1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(1;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **C.** $D=[1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 35. Đồ thị của hai hàm số nào sau đây đối xứng với nhau qua trục tung?

A. $y=3^x$ và $y=3^{-x}$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ và $\log_2 x$.

C. $y=3^x$ và $y=\log_3 x$. **D.** $y=3^{-x}$ và $y=\log_3 x$.

Câu 36. Tính giá trị của biểu thức $M=\log_2 3.\log_3 4.\log_4 5...\log_{63} 64$.

A. $M=5$. **B.** $M=7$. **C.** $M=6$. **D.** $M=\log_{2015} 2017$.

Câu 37. Với số thực $a>1, b\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_a ab^2=1+2\log_a |b|$. **B.** $\log_a ab^2=1+2\log_a b$.

C. $\log_a ab^2=1-2\log_a b$. **D.** $\log_a ab^2=1+2\log_a(-b)$.

Câu 38. Rút gonj biểu thức $Q=a^{\log_{a^2}\sqrt{a}}$, với $a>1$.

A. $\sqrt[4]{a}$. **B.** a. **C.** $\sqrt{a}$. **D.** a^4.

Câu 39. Nếu $a>1, 0<b<1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b<0$. **B.** $\log_a b>0$. **C.** $\log_a b=0$. **D.** $\log_a b>1$.

Câu 40. Cho biết $\log_a b=2$. Tính $\log_{a^2} ab$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 41. Cho hai số dương a, b $(a\neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\log_a a^\alpha=\alpha$. **B.** $a^{\log_a b}=b$. **C.** $\log_a a=2a$. **D.** $\log_a 1=0$.

Lời giải.

$\log_a a=2a$ là **sai** vì $\log_a a=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Tính giá trị của biểu thức $A=8^{\log_2 3}+9^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

A. $A=31$. **B.** $A=5$. **C.** $A=11$. **D.** $A=17$.

Lời giải.

$A=8^{\log_2 3}+9^{\frac{1}{\log_2 3}}=\left(2^{\log_2 3}\right)^3+\left(3^{\log_3 2}\right)^2=3^3+2^2=31$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[0;2]$?

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m^2+1}{(x+m)^2} > 0\ \forall x \in [0;2]$, do đó hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$. Suy ra $\dfrac{2m-1}{2+m} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho $a > 0, b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{b}{4}; \log_2 a = \dfrac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

A. 16. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 18.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \log_a b = \dfrac{b}{4} \\ \log_2 a = \dfrac{16}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{\frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Rightarrow b = \left(2^{\frac{16}{b}}\right)^{\frac{b}{4}} = 16 \Rightarrow b = 16, a = 2 \Rightarrow a + b = 18.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho 2 số thực a và b với $a > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_{a^2} |b| = \dfrac{1}{2}\log_a |b|$. **B.** $\dfrac{1}{2}\log_a a^2 = 1$. **C.** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a |b|$. **D.** $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a |b|$ nên khẳng định $\dfrac{1}{2}\log_a b^2 = \log_a b$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho a, b là các số thực dương và khác 1. Đặt $\alpha = \log_a 5$, $\beta = \log_b 5$. Hãy biểu diễn $\log_{ab^2} 25$ theo α, β.

A. $\dfrac{2}{\alpha+\beta}$. **B.** $\dfrac{2\alpha\beta}{2\alpha+\beta}$. **C.** $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+2\beta}$. **D.** $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Lời giải.

$\alpha = \log_a 5 \Leftrightarrow \log_5 a = \dfrac{1}{\alpha}$;

$\beta = \log_b 5 \Leftrightarrow \log_5 b = \dfrac{1}{\beta}$.

Ta có $\log_{ab^2} 25 = 2\log_{ab^2} 5 = \dfrac{2}{\log_5 ab^2} = \dfrac{2}{\log_5 a + 2\log_5 b} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\alpha} + 2\cdot\dfrac{1}{\beta}} = \dfrac{2\alpha\beta}{\beta+2\alpha}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hai số thực a, b với $1 < a < b$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $\log_b a < 1 < \log_a b$. **B.** $\log_a b < \log_b a < 1$. **C.** $\log_a b < 1 < \log_b a$. **D.** $1 < \log_a b < \log_b a$.

Lời giải.

Do $1 < a < b$ nên suy ra $\begin{cases} \log_b a < \log_b b = 1 \\ 1 = \log_a a < \log_a b \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Đặt $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$, $Q = \log_7 \dfrac{1}{2} + \log_7 \dfrac{2}{3} + \cdots + \log_7 \dfrac{2014}{2015} + \log_7 \dfrac{2015}{2016}$. Tính Q theo a, b.

A. $-5a - 2b - 1$. **B.** $5a + 2b - 1$. **C.** $5a + 2b + 1$. **D.** $5a - 2b - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \log_7\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2014}{2015}\cdot\frac{2015}{2016}\right) = \log_7\frac{1}{2016} \\ &= -\log\left(2^5\cdot 3^2\cdot 7\right) = -5\log_7 2 - 2\log_7 3 - 1 = -5a - 2b - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là các số thực âm. mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a(x^2y^4) = 2(\log_a|x| + \log_a y^2)$. **B.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(-x^2y) = 2\log_a(-x) + \log_a y$. **D.** $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_a(-x)}{\log_a(-y)}$.

Lời giải.

Ta có, $\log_a(x^2y^4) = \log_a x^2 + \log_a y^4 = 2\log_a|x| + 2\log_a y^2 = 2(\log_a|x| + \log_a y^2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho $a, b, c > 0$, $a, b \neq 1$. Tính $A = \log_a b^2 \cdot \log_b\sqrt{bc} - \log_a c$.

A. $\log_a c$. **B.** 1. **C.** $\log_a b$. **D.** $\log_a bc$.

Lời giải.

Ta có $A = 2\log_a b\cdot\frac{1}{2}\log_b(bc) - \log_a c = \log_a(bc) - \log_a c = \log_a b$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Nếu $\log_8 p = m$ và $\log_{p^3} 3 = n$ thì giá trị của tích $m\cdot n$ bằng

A. $\frac{1}{9}\log_2 3$. **B.** $9\log_2 3$. **C.** $9\log_3 2$. **D.** $\frac{1}{9}\log_3 2$.

Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases}\log_8 p = m\\ \log_{p^3} 3 = n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}\log_2 p = m\\ \frac{1}{3}\log_p 3 = n\end{cases} \Rightarrow m\cdot n = \frac{1}{9}\log_2 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Giá trị của biểu thức $M = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$ khi được rút gọn là

A. 2. **B.** $2 + 2\ln^2 a$. **C.** $2\ln^2 a - 2$. **D.** $\ln^2 a$.

Lời giải.

Ta có $M = \ln^2 a + \log_a^2 e + 2\ln a\log_a e + \ln^2 a - \log_a^2 e = 2\ln^2 a + 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Biết $\log x = 5\log m + \frac{2}{3}\log n - \frac{1}{4}\log p$. Giá trị của x bằng

A. $\frac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$. **B.** $m^5\sqrt[3]{n^2}\sqrt[4]{p}$. **C.** $\frac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{p^4}$. **D.** $m^5 + \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[4]{p}$.

Lời giải.

$\log x = \log m^5 + \log n^{\frac{2}{3}} - \log p^{\frac{1}{4}} = \log\left(\frac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}\right) \Rightarrow x = \frac{m^5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho $\log_{0,2} x > \log_{0,2} y$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $y > x \geq 0$. **B.** $x > y > 0$. **C.** $x > y \geq 0$. **D.** $y > x > 0$.

Lời giải.

Do $0 < 0,2 < 1$ nên $y > x > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a b + \log_c b = \log_a 2016 . \log_c b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $ab = 2016$. **B.** $bc = 2016$. **C.** $abc = 2016$. **D.** $ac = 2016$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_a b + \log_c b = \log_a 2016 . \log_c b$$

$$\Leftrightarrow (\log_a b + \log_c b) \log_b c = \log_a 2016 . \log_c b . \log_b c$$

$$\Leftrightarrow \log_a c + 1 = \log_a 2016 \Leftrightarrow ac = 2016.$$

Chọn đáp án D □

Câu 56. Giả sử $a, b > 0$; $x > y > 0$; $a, b, y \neq 1$; $a \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a (x + y)$. **B.** $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a (x - y)$.

C. $\log_a b = -\log_b a$. **D.** $\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x$.

Lời giải.

Dựa vào các tính chất lôgarit.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho $a > 0, a \neq 1$. Đặt $x = \log_3 a$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a^2 + \log_a 9$$

A. $P = \dfrac{1 - 10x^2}{x}$. **B.** $P = \dfrac{2(1 - x^2)}{x}$. **C.** $P = \dfrac{2 - 5x^2}{x}$. **D.** $P = -3x$.

Lời giải.

Ta có: $P = -\log_3 a - 4\log_3 a + \dfrac{2}{\log_3 a} = -5x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2 - 5x^2}{x}$

Chọn đáp án C □

Câu 58. Với các số thực dương x, y. Ta có 8^x, 4^4, 2 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và các số $\log_2 45$, $\log_2 y$, $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Khi đó y bằng

A. 225. **B.** 15. **C.** 105. **D.** $\sqrt{105}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có hệ $\begin{cases} 8^x \cdot 2 = 4^8 \\ \log_2 45 + \log_2 x = 2\log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ 45x = y^2. \end{cases}$

Vậy $x = 5, y = 15$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho số thực x thỏa mãn $\log_2 (\log_4 x) = \log_4 (\log_2 x) - a$, $a \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\log_2 x$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{2^a}$. **B.** a^2. **C.** 2^{1-a}. **D.** 4^{1-a}.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) - a \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) - 1 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) - a$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 - 2a$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2^{2-2a} = 4^{1-a}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho $a, b > 0, \log_3 a = p, \log_3 b = q$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\log_3\left(\frac{3^r}{a^m \cdot b^d}\right) = r + p \cdot m - q \cdot d.$ **B.** $\log_3\left(\frac{3^r}{a^m \cdot b^d}\right) = r + p \cdot m + q \cdot d.$

C. $\log_3\left(\frac{3^r}{a^m \cdot b^d}\right) = r - p \cdot m - q \cdot d.$ **D.** $\log_3\left(\frac{3^r}{a^m \cdot b^d}\right) = r - p \cdot m + q \cdot d.$

Lời giải.

Ta có

$$\log_3\left(\frac{3^r}{a^m b^d}\right) = \log_3 3^r - \log_3\left(a^m b^d\right)$$
$$= r - \log_3 a^m - \log_3 b^d$$
$$= r - m\log_3 a - d\log_3 b$$
$$= r - p \cdot m - q \cdot d.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Cho $a = \log_3 15$, $b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b.

A. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2(a + b - 1).$ **B.** $\log_{\sqrt{3}} 50 = 4(a + b + 1).$

C. $\log_{\sqrt{3}} 50 = a + b - 1.$ **D.** $\log_{\sqrt{3}} 50 = 3(a + b + 1).$

Lời giải.

Ta có $a = \log_3 15 = 1 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 5 = a - 1.$

Vậy $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2\log_3 50 = 2(\log_3(5 \cdot 10)) = 2(\log_3 5 + \log_3 10) = 2(a + b - 1).$

Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Cho $\log_2 6 = a; \log_2 7 = b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b.

A. $\log_3 7 = \frac{b}{a-1}.$ **B.** $\log_3 7 = \frac{a}{b-1}.$ **C.** $\log_3 7 = \frac{b}{1-a}.$ **D.** $\log_3 7 = \frac{a}{1-b}.$

Lời giải.

$$\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{\log_2 7}{\log_2 6 - 1} = \frac{b}{a-1}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho các số thực dương a, b, c với a và b khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = \log_a c\ .$ **B.** $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = \frac{1}{4}\log_a c\ .$

C. $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = 4\log_a c\ .$ **D.** $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a c\ .$

Lời giải.

Ta có $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a b \cdot \log_{b^{\frac{1}{2}}} c = 4\log_a b \cdot \log_b c = 4\log_a c.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Giá trị của $a^{8\log_{a^2}7}, (0<a\neq 1)$ bằng

A. 7^4. **B.** 7^2. **C.** 7^{16}. **D.** 7^8.

Lời giải.

Ta có: $a^{8\log_{a^2}7}=a^{4\log_a 7}=a^{\log_a 7^4}=7^4$

Chọn đáp án A □

Câu 65. Nếu $a=\log_{30}3$ và $b=\log_{30}5$ thì

A. $\log_{30}1350=a+2b+1$. **B.** $\log_{30}1350=2a+b+1$.

C. $\log_{30}1350=a+2b+2$. **D.** $\log_{30}1350=2a+b+2$.

Lời giải.

Ta có:$\log_{30}1350=\log_{30}(30.3^2.5)=1+\log_{30}3^2+\log_{30}5=1+2\log_{30}3+\log_{30}5=1+2a+b$

Chọn đáp án B □

Câu 66. Giá trị của biểu thức $P=49^{\log_7 6}+10^{1+\log 3}-3^{\log_9 25}$ là

A. $P=61$. **B.** $P=35$. **C.** $P=56$. **D.** $P=65$.

Lời giải.

$P=6^{\log_7 49}+10\cdot 10^{\log 3}-3^{\log_3 5}=6^2+10\cdot 3-5=36+30-5=61$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho $\log_2 7=a$, $\log_3 7=b$ khi đó $\log_6 7$ bằng

A. $\dfrac{1}{a+b}$. **B.** a^2+b^2. **C.** $a+b$. **D.** $\dfrac{ab}{a+b}$.

Lời giải.

$$\log_6 7=\frac{1}{\log_7 6}=\frac{1}{\log_7 2+\log_7 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 68. Nhận xét nào sau đây là đúng?

A. $\log_3 ab=\log_3 a+\log_3 b\ \ \forall a,b>0$. **B.** $\log_3(a+b)=\log_3 a+\log_3 b\ \ \forall a,b>0$.

C. $\log_3\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}\ \ \forall a,b>0$. **D.** $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1\ \ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất lôgarit và điều kiện có nghĩa của biểu thức lôgarit, mệnh đề đúng là $\log_3 ab=\log_3 a+\log_3 b\ \ \forall a,b>0$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Biết $a=\dfrac{\log_2(\log_2 10)}{\log_2 10}$. Giá trị của 10^a là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\log_2 10$.

Lời giải.

$a=\dfrac{\log_2(\log_2 10)}{\log_2 10}=\log_{10}(\log_2 10)$

$\Rightarrow 10^a=\log_2 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Biết rằng $\log 7=a$ và $\log_5 100=b$. Hãy biểu diễn $\log_{25}56$ theo a và b.

A. $\dfrac{ab+3b+6}{4}$. **B.** $\dfrac{ab+b-6}{4}$. **C.** $\dfrac{ab+3b-6}{4}$. **D.** $\dfrac{ab-3b-6}{4}$.

Lời giải.

Ta có $b=\log_5 100=2+2\log_5 2\Rightarrow \log_5 2=\dfrac{b-2}{2}$.

Lại có $ab=\log 7\cdot\log_5 100=2\log_5 7$.

Suy ra $\log_{25}56=\dfrac{1}{2}\left(3\log_5 2+\log_5 7\right)=\dfrac{3b-6+ab}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho các số thực $a<b<0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\ln\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

B. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|$.

C. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\ln(a^2)-\ln(b^2)$.

D. $\ln(ab)^2=\ln(a^2)+\ln(b^2)$.

Lời giải.

Với $a<b<0$, ta có: $\ln\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}\ln|ab|=\dfrac{1}{2}(\ln|a|+\ln|b|)$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Đặt $a=\log_2 3; b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20}12$ theo a,b.

A. $\log_{20}12=\dfrac{ab+1}{b-2}$. **B.** $\log_{20}12=\dfrac{a+b}{b+2}$. **C.** $\log_{20}12=\dfrac{a+2}{ab+2}$. **D.** $\log_{20}12=\dfrac{a+1}{b-2}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{20}12=\dfrac{\log_4 12}{\log_4 20}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}\log_2 3}{1+\dfrac{1}{2}\log_2 5}=\dfrac{2+\log_2 3}{2+\log_2 3.\log_3 5}=\dfrac{2+a}{ab+2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Đặt $a=\ln 3$, $b=\ln 5$. Tính $I=\ln\dfrac{3}{4}+\ln\dfrac{4}{5}+\ln\dfrac{5}{6}+\ldots+\ln\dfrac{124}{125}$ theo a và b.

A. $I=a+3b$. **B.** $I=a-2b$. **C.** $I=a+2b$. **D.** $I=a-3b$.

Lời giải.

$I=\ln\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{124}{125}\right)=\ln\dfrac{3}{125}=\ln 3-\ln 125=\ln 3-3\ln 5=a-3b$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Biết $\log_2 x=a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P=\log_2 4x^2$.

A. $P=2+a$. **B.** $P=4+2a$. **C.** $P=4+a$. **D.** $P=2+2a$.

Lời giải.

Có $P=\log_2 4x^2=\log_2 4+\log_2 x^2=2+2\log_2 x=2+2a$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho $\log_a x=-1$ và $\log_a y=4$. Tính giá trị của $P=\log_a(x^2y^3)$.

A. $P=-14$. **B.** $P=3$. **C.** $P=10$. **D.** $P=65$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a(x^2y^3)=2\log_a x+3\log_a y=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho các số thực dương a,b. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_2\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{b^3}=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-\dfrac{1}{3}\log_2 b$.

B. $\log_2\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{b^3}=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+3\log_2 b$.

C. $\log_2\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{b^3}=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+\dfrac{1}{3}\log_2 b$.

D. $\log_2\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{b^3}=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-3\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 \dfrac{2\sqrt[3]{a}}{b^3} = \log_2 2 + \log_2 a^{\frac{1}{3}} - \log_2 b^3 = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - 3\log_2 b$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 77. Cho $x = a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a x$.

A. $P = 0$. **B.** $P = \dfrac{5}{3}$. **C.** $P = \dfrac{2}{3}$. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

Do $a > 0, a \neq 1$ nên $x = a\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = a^{1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)} = a^{\frac{5}{3}}$. Từ đó ta tính được $P = \log_a a = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 78. Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $\log_2 \sqrt[6]{360} = \dfrac{1}{2} + a\log_2 3 + b\log_2 5$. Khi đó tổng $a + b$ có giá trị là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{18}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 \sqrt[6]{360} = \log_2 \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\log_2 3 + \dfrac{1}{6}\log_2 5$. Suy ra $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{1}{6} \Rightarrow a + b = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 79. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Cho 2 cạnh của một tam giác vuông quay quanh cạnh còn lại thì ta được một hình nón tròn xoay.

B. Cho đường thẳng L cắt Δ và quay quanh Δ thì ta được một mặt nón tròn xoay.

C. Cho đường thẳng L song song với Δ và quay quanh Δ thì ta được một mặt trụ tròn xoay.

D. Một hình chóp bất kì luôn có duy nhất một mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 80. Tính giá trị của biểu thức $N = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0 < a \neq 1$.

A. $N = \dfrac{-3}{4}$. **B.** $N = \dfrac{4}{3}$. **C.** $N = \dfrac{3}{2}$. **D.** $N = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $N = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}} = \log_a \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = \log_a a^{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 81. Giá trị của $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \ldots + \log_2 256$ là

A. 48. **B.** 36. **C.** 56. **D.** $8 \cdot \log_2 256$.

Lời giải.

$M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \ldots + \log_2 256$

$= \log_2 2 + \log_2 2^2 + \log_2 2^3 + \ldots + \log_2 2^8 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = \dfrac{8 \cdot (8+1)}{2} = 36$

Chọn đáp án B ☐

Câu 82. Với $0 < a \neq 1$, biểu thức nào dưới đây có giá trị dương?

A. $\log_a \left(\log_2 \left(2^{\frac{1}{a}}\right)\right)$. **B.** $\log_a \left(\dfrac{1}{\log 10}\right)$. **C.** $\log_a \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)$. **D.** $\log_2 \left(\log_{\sqrt[4]{a}} a\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\log_{\sqrt[4]{a}} a\right) = \log_2\left(\log_{a^{\frac{1}{4}}} a\right) = \log_2 4 = 2 > 0$.

Cách khác: Chọn giá trị cụ thể cho a, chẳng hạn $a = 2$ để thay trực tiếp vào 4 phương án. Chỉ có phương án D cho kết quả là dương.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Với hai số thực dương a, b tuỳ ý và $\dfrac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a = b\log_6 2$. **B.** $a = b\log_6 3$. **C.** $a = 36b$. **D.** $2a + 3b = 0$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 a}{\log_3 6} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 a - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 \dfrac{a}{b} = 2$.

Vậy $a = 36b$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Đặt $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Hãy biểu diễn $\log_2 7$ theo a và b.

A. $\dfrac{b}{a+1}$. **B.** $\dfrac{b}{1-a}$. **C.** $\dfrac{a}{b-1}$. **D.** $\dfrac{a}{b+1}$.

Lời giải.

$$\log_2 7 = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 2} = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} \frac{12}{6}} = \frac{\log_{12} 7}{1 - \log_{12} 6} = \frac{b}{1-a}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Tính $\log_{24} 600$ theo a, b

A. $\log_{24} 600 = \dfrac{2ab + a - 3b}{a + 3b}$. **B.** $\log_{24} 600 = \dfrac{2 + a + b}{a + b}$.

C. $\log_{24} 600 = \dfrac{2ab + a + 3b}{a + 3b}$. **D.** $\log_{24} 600 = \dfrac{2ab + 1}{3a + b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{24} 600 = \dfrac{\log_5 600}{\log_5 24} = \dfrac{2 + 3\log_5 2 + \log_5 3}{3\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{2 + \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{2ab + a + 3b}{a + 3b}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho n là số nguyên dương và $a > 0$, $a \neq 1$. Tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2\,033\,136 \log_a 2019.$$

A. $n = 2017$. **B.** $n = 2016$. **C.** $n = 2018$. **D.** $n = 2019$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\,033\,136 \log_a 2019 &= \log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 \\ &= \log_a 2019 + 2\log_a 2019 + \cdots + n\log_a 2019 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \log_a 2019. \end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{n(n+1)}{2} = 2\,033\,136$ hay $n = 2016$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho $\log_2 5 = a; \log_3 5 = b$. Tính $\log_6 5$ theo a, b.

A. $a^2 + b^2$. **B.** $\dfrac{1}{a+b}$. **C.** $\dfrac{ab}{a+b}$. **D.** $a + b$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 5 = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Cho $\log_2 m = a$, $A = \log_m(8m)$ với $m > 0$, $m \neq 1$. Tìm mối liên hệ giữa A và a.

A. $A = \dfrac{a+3}{a}$. **B.** $A = \dfrac{-a+3}{a}$. **C.** $A = a(a+3)$. **D.** $A = a(-a+3)$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_m(8m) = \log_m 8 + \log_m m = 3\log_m 2 + 1 = \dfrac{3}{a} + 1 = \dfrac{a+3}{a}$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Cho $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Một học sinh đã tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{a^n} b}$ như sau

Bước 1: $P = \log_b a + \log_b a^2 + \cdots + \log_b a^n$.

Bước 2: $P = \log_b(a.a^2 \cdots a^n)$.

Bước 3: $P = \log_b(a^{1+2+3+\cdots+n})$.

Bước 4: $P = n(n-1)\log_b \sqrt{a}$.

Hỏi bạn học sinh đó giải **sai** từ bước nào?

A. Bước 4. **B.** Bước 1. **C.** Bước 3. **D.** Bước 2.

Lời giải.

Ta có $P = \log_b a + \log_b a^2 + \cdots + \log_b a^n = \log_b(a \cdot a^2 \cdots a^n) = \log_b(a^{1+2+3+\cdots+n}) = n(n+1)\log_b \sqrt{a}$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b; a \neq 1; \log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$.

A. $T = -\dfrac{2}{5}$. **B.** $T = \dfrac{2}{5}$. **C.** $T = \dfrac{2}{3}$. **D.** $T = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba} = \dfrac{\log_a \sqrt[3]{ba}}{\log_a \dfrac{\sqrt{a}}{b}} = \dfrac{\dfrac{1}{3}(\log_a b + 1)}{\dfrac{1}{2} - \log_a b} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln 7ab$. **B.** $3\ln(a+b) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. **D.** $\ln(a+b) = \dfrac{3}{2}(\ln a + \ln b)$.

Lời giải.

Ta có

$a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Rightarrow \ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = \ln(ab) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho a là số thực dương khác 1. Tính giá trị biểu thức

$$P = \log_a 2018 + \log_{\sqrt{a}} 2018 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2018 + \cdots + \log_{\sqrt[2018]{a}} 2018.$$

A. 2017^{2018}. **B.** $2018 \cdot 2019 \cdot \log_a 2018$.

C. $1009 \cdot 2019 \cdot \log_a 2018$. **D.** $2019 \cdot \log_a 2018$.

Lời giải.

Ta có

$$P = \log_a 2018 + 2\log_a 2018 + 3\log_a 2018 + \ldots + 2018\log_a 2018 = \frac{(1+2018)\cdot 2018}{2}\log_a 2018.$$

Ta chọn được đáp án đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Biết $\log_7 2 = m$, khi đó giá trị của $\log_{49} 28$ được tính theo m là

A. $\dfrac{1+2m}{2}$. **B.** $\dfrac{m+2}{4}$. **C.** $\dfrac{1+m}{2}$. **D.** $\dfrac{1+4m}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{49} 28 = \log_{7^2} 28 = \dfrac{1}{2}\log_7 (7\cdot 2^2) = \dfrac{1}{2}(\log_7 7 + \log_7 2^2) = \dfrac{1}{2}(1 + 2\log_7 2) = \dfrac{1}{2}(1+2m)$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Biết $\log a = 2$ và $\log b = 3$, khi đó giá trị của $\log(a^2 \cdot b^3)$ là

A. 31. **B.** 13. **C.** 30. **D.** 108.

Lời giải.

$\log(a^2 \cdot b^3) = 2\log a + 3\log b = 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$. **B.** $2\log_2 \dfrac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$.

C. $\log_2 \dfrac{a+b}{2} = 2(\log_2 a + \log_2 b)$. **D.** $4\log_2 \dfrac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b$.

Lời giải.

Đẳng thức ở giả thiết tương đương với $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab$. Lấy lô-ga-rít cơ số 2 vào 2 vế của đẳng thức này, ta được $2\log_2 \dfrac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Đặt $a = \log_5 3$. Tính theo a giá trị biểu thức $\log_9 1125$.

A. $\log_9 1125 = 1 + \dfrac{3}{2a}$. **B.** $\log_9 1125 = 2 + \dfrac{3}{a}$. **C.** $\log_9 1125 = 2 + \dfrac{2}{3a}$. **D.** $\log_9 1125 = 1 + \dfrac{3}{a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_9 1125 = \log_9(5^3 \cdot 3^2) = \dfrac{3}{2\log_5 3} + 1 = 1 + \dfrac{3}{2a}$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Cho $\log_a b = 2$ với $a, b > 0$, $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_a(ab) = 3$. **B.** $\log_a(a^2 b) = 4$. **C.** $\log_a(b^2) = 4$. **D.** $\log_a(ab^2) = 3$.

Lời giải.

Ta có

- ☑ $\log_a(ab) = \log_a a + \log_a b = 1 + 2 = 3$.
- ☑ $\log_a(a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + 2 = 4$.
- ☑ $\log_a b^2 = 2\log_a b = 4$.
- ☑ $\log_a(ab^2) = \log_a a + \log_a b^2 = 1 + 2\log_a b = 5$.

Vậy khẳng định $\log_a(ab^2) = 3$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho a, b, c là các số thực dương và $a, b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$. **B.** $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

C. $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$. **D.** $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$

Chọn đáp án A □

Câu 99. Năm 1992, người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết đến cho đến lúc đó). Hãy tìm số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân.

A. 227830 chữ số. **B.** 227834 chữ số. **C.** 227832 chữ số. **D.** 227831 chữ số.

Lời giải.

Ta có $\log p < \log 2^{756839} = 756839 \log 2 \approx 227831{,}2409$. Suy ra $10^{227831} \leq p < 10^{227832}$. Vậy p có 227832 chữ số.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$. **B.** $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

C. $\ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. **D.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

Lời giải.

Ta có

- ☑ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right) = \ln(a^2) - \ln(b^2)$ (đúng).
- ☑ $\ln(ab)^2 = \ln(a^2 b^2) = \ln(a^2) + \ln(b^2)$ (đúng).
- ☑ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$ (đúng).

Vì $a < b < 0$ nên $\ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}\ln(ab) = \dfrac{1}{2}(\ln(-a) + \ln(-b))$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. B	5. D	6. D	7. C	8. B	9. A	10. A
11. D	12. B	13. B	14. B	15. D	16. D	17. B	18. C	19. C	20. A
21. C	22. D	23. B	24. A	25. B	26. C	27. A	28. A	29. D	30. B
31. C	32. D	33. D	34. B	35. A	36. C	37. A	38. A	39. A	40. A
41. C	42. A	43. A	44. D	45. D	46. B	47. A	48. A	49. A	50. C
51. A	52. B	53. A	54. D	55. D	56. D	57. C	58. B	59. D	60. C
61. A	62. A	63. C	64. A	65. B	66. A	67. D	68. A	69. D	70. C
71. A	72. C	73. D	74. D	75. C	76. D	77. B	78. D	79. C	80. D
81. B	82. D	83. C	84. B	85. C	86. B	87. C	88. A	89. A	90. D
91. C	92. C	93. A	94. B	95. B	96. A	97. D	98. A	99. C	100. C

3 Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $a^2+4b^2=5ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\log(a+2b)=5(\log a+\log b)$.
B. $\log(a+1)+\log b=1$.
C. $2\log\dfrac{a+2b}{3}=\dfrac{\log a+\log b}{2}$.
D. $\log(a+2b)=\log a-\log b$.

Lời giải.

Ta có $a^2+4b^2=5ab\Leftrightarrow(a+2b)^2=9ab$.
Logarit cơ số 10 hai vế ta được

$$\begin{aligned}\log(a+2b)^2=\log(9ab) &\Leftrightarrow 2\log(a+2b)=\log 9+\log a+\log b\\ &\Leftrightarrow 2(\log(a+2b)-\log 3)=\log a+\log b\\ &\Leftrightarrow 2\log\frac{a+2b}{3}=\frac{\log a+\log b}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $T=\dfrac{a}{b}$.

A. $T=\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$. **B.** $T=7-2\sqrt{6}$. **C.** $T=7+2\sqrt{6}$. **D.** $T=\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}=t$, ta được $a=9^t$, $b=16^t$, $\dfrac{5b-a}{2}=12^t$.
Suy ra $\dfrac{5\cdot 16^t-9^t}{2}=12^t\Leftrightarrow 5\cdot 16^t-2\cdot 12^t-9^t=0\Leftrightarrow 5-2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^t-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\sqrt{6}-1$.
Do đó $\dfrac{a}{b}=\dfrac{9^t}{16^t}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}=(\sqrt{6}-1)^2=7-2\sqrt{6}$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x-y$.

A. 4. **B.** -4. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+y>0\\ x-y>0\end{cases}$. Từ đó suy ra $x>0$.
$\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\geq 1\Leftrightarrow\log_4(x^2-y^2)\geq 1\Leftrightarrow x^2-y^2\geq 4\Leftrightarrow x\geq\sqrt{y^2+4}$ (do $x>0$).
$P=2x-y\geq 2\sqrt{y^2+4}-y$ với $y\in\mathbb{R}$.
Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{y^2+4}-y$ với $y\in\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{y^2+4}}-1=\dfrac{2y-\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{y^2+4}}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow 2y=\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y^2=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Bảng biến thiên

y	$-\infty$		$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} f(y) = 2\sqrt{3} = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Suy ra $P \geq 2\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \sqrt{y^2+4} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Vậy $\min P = 2\sqrt{3}$ đạt được khi $(x;y) = \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho $a > 0, b > 0$ thoả mãn $\log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của $\dfrac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + a^2b + 3b^3}$ bằng

A. $\dfrac{6-\sqrt{13}}{11}$. **B.** $\dfrac{82-17\sqrt{13}}{69}$. **C.** $\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$. **D.** $\dfrac{3-\sqrt{13}}{11}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 16^t = a + 3b \\ 9^t = a \\ 12^t = b \end{cases} \Rightarrow 9^t + 3.12^t = 16^t \Rightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^t + 3\left(\frac{3}{4}\right)^t = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = \frac{a}{b}$$

Vậy $\dfrac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + a^2b + 3b^3} = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho $a, b > 0; a, b \neq 1; a \neq b^2$. Biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \dfrac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a}$ có giá trị bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$P = \log_{\sqrt{a}} b^2 + \frac{2}{\log_{\frac{a}{b^2}} a} = 4\log_a b + 2\log_a \frac{a}{b^2} = 4\log_a b + 2\left(\log_a a - 2\log_a b\right) = 2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$ và $\log_a b + \log_b a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{ab} \dfrac{a^2+b}{2}$.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b + \log_b a^2 = 3 \Leftrightarrow \log_a b + 2\log_b a = 3$. (1)

Đặt $t = \log_a b$. Do $1 < a < b \Leftrightarrow t > \log_a b \Rightarrow t > 1$.

Khi đó (1) trở thành: $t + \dfrac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (không thỏa)} \\ t = 2 \text{ (thỏa)} \end{array}\right.$.

Với $t = 2$ ta có $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Suy ra $T = \log_{ab} \dfrac{a^2 + b}{2} = \log_{a^3} a^2 = \dfrac{2}{3}\log_a a = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho tập hợp $A = \{2^k | k = \overline{1..10}\}$ có 10 phần tử là các lũy thừa của 2. Chọn ngẫu nhiên từ tập A hai số khác nhau a và b. Xác suất để $\log_a b$ là một số nguyên bằng

A. $\dfrac{17}{90}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{19}{90}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = \mathrm{A}_{10}^2 = 90$.

Gọi B: "$\log_a b$ là một số nguyên".

Ta có: $\log_a b$ là một số nguyên $\Leftrightarrow b = a^n$ với $a \neq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

$a = 2$ thì b có 10 cách chọn.

$a = 2^2$ thì b có 5 cách chọn.

$a = 2^3$ thì b có 3 cách chọn.

$a = 2^4$ thì b có 2 cách chọn.

$a = 2^5$ thì b có 2 cách chọn.

$a = 2^6$ thì b có 1 cách chọn.

$a = 2^7$ thì b có 1 cách chọn.

$a = 2^7$ thì b có 1 cách chọn.

$a = 2^8$ thì b có 1 cách chọn.

$a = 2^9$ thì b có 1 cách chọn.

$a = 2^{10}$ thì b có 1 cách chọn.

Suy ra $n(B) = 27$.

$\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho $a\log_6 3 + b\log_6 2 + c\log_6 5 = 5$ với a, b, c là các số tự nhiên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $a = b$. **B.** $a > b > c$. **C.** $b < c$. **D.** $c = b$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3^a.2^b.5^c = 5$. Do $a, b, c \in \mathbb{N}$ nên chỉ có 1 bộ số $(a; b; c) = (0; 0; 1)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho x, y là các số dương lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)}$.

A. $M = \dfrac{1}{2}$. **B.** $M = \dfrac{1}{3}$. **C.** $M = \dfrac{1}{4}$. **D.** $M = 1$.

Lời giải.

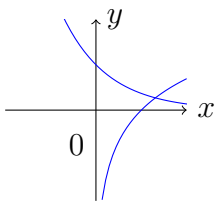
Ta có $x^2+9xy=6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2=0 \Leftrightarrow x=3y$.

Khi đó $M=\dfrac{1+2\log_{12}3y+\log_{12}y}{2\log_{12}6y}=\dfrac{\log_{12}12y+\log_{12}3y}{\log_{12}36y^2}=\dfrac{\log_{12}36y^2}{\log_{12}36y^2}=1$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.

Cho hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a;b>1$. **B.** $0<a;b<1$. **C.** $0<a<1<b$. **D.** $0<b<1<a$.

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_4\left(2^{-2016}.2^{16}.\sqrt{2}\right)$

A. $T=-\dfrac{3999}{4}$. **B.** $T=-\dfrac{3999}{2}$. **C.** T không xác định. **D.** $T=-2016$.

Lời giải.

$T=\log_4\left(2^{-\frac{3999}{2}}\right)=-\dfrac{3999}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho $a,b>0$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $\ln^2(ab)=\ln a^2+\ln b^2$. **B.** $\ln\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}\left(\ln\sqrt{a}+\ln\sqrt{b}\right)$.

C. $a^{\ln b}=b^{\ln a}$. **D.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Câu 13. Đặt $\log_2 60=a$ và $\log_5 15=b$. Tính $P=\log_2 12$ theo a và b.

A. $P=\dfrac{ab+a-2}{b}$. **B.** $P=\dfrac{ab-a+2}{b}$. **C.** $P=\dfrac{ab+2a+2}{b}$. **D.** $P=\dfrac{ab+a+2}{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 60=2+\log_2 3+\log_2 5=a$ và $\log_5 15=1+\log_5 3=1+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=b$

Suy ra $\log_2 3=\dfrac{ab-a-2b+2}{b}$

Vậy $P=\log_2 12=2+\log_2 3=2+\dfrac{ab-a-2b+2}{b}=\dfrac{ab-a+2}{b}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Đặt $\log_2 3=a$ và $\log_2 5=b$. Tính $P=\log_3 240$ theo a và b.

A. $P=\dfrac{a+2b+3}{a}$. **B.** $P=\dfrac{2a+b+3}{a}$. **C.** $P=\dfrac{a+b+3}{a}$. **D.** $P=\dfrac{a+b+4}{a}$.

Lời giải.

Ta có: $P=\log_3 240=1+4\log_3 2+\log_3 5=1+4\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a+b+4}{a}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hai số thực dương x,y bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2(x^2y)=\log_2 x+2\log_2 y$. **B.** $\log_2\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 y}$.

C. $\log_2(x^2+y)=2\log_2 x.\log_2 y$. **D.** $\log_2(x^2y)=2\log_2 x+\log_2 y$.

Câu 16. Nếu $\log_{12}6=a,\log_{12}7=b$ thì $\log_2 7$ bằng

A. $\dfrac{a}{a-1}$. **B.** $\dfrac{a}{1-b}$. **C.** $\dfrac{b}{1-a}$. **D.** $\dfrac{a}{b+1}$.

Câu 17. Cho biết $a>0, a\neq 1, b>0, ab^2\neq 1$ và $\log_{ab^2} a^2b=3$. Tính $\log_a b$.

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** -5.

Câu 18. Cho hai số thực dương x, y và thỏa mãn $x^2+16y^2=92xy$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log(x+4y)=1+\dfrac{1}{2}(\log x+\log y)$. **B.** $\log(x+4y)=2+\dfrac{1}{2}(\log x+\log y)$.

C. $\log(x+4y)=1+\dfrac{1}{2}(\log x-\log y)$. **D.** $\log(x+4y)=2+\log x+\log y$.

Câu 19. Cho biết $\log_2 3=x, \log_3 5=y$. Tính $\log_6 15$ theo x, y.

A. $\dfrac{x+xy}{x+1}$. **B.** $\dfrac{x-xy}{x+1}$. **C.** $\dfrac{x+xy}{xy+1}$. **D.** $\dfrac{x+y}{x+1}$.

Câu 20. Cho $c=\log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c.

A. $\log_{25} 15=\dfrac{1}{2-c}$. **B.** $\log_{25} 15=\dfrac{1}{2(c-1)}$. **C.** $\log_{25} 15=\dfrac{1}{2(1-c)}$. **D.** $\log_{25} 15=\dfrac{1}{2(1+c)}$.

Lời giải.

$c=\log_{15} 3=\dfrac{1}{\log_3 15}=\dfrac{1}{\log_3(3\cdot 5)}=\dfrac{1}{1+\log_3 5}\Rightarrow \log_3 5=\dfrac{1-c}{c}$.

$\log_{25} 15=\log_{5^2} 15=\dfrac{1}{2}\log_5 15=\dfrac{1}{2}\log_5(5\cdot 3)=\dfrac{1}{2}(1+\log_5 3)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{c}{1-c}\right)=\dfrac{1}{2(1-c)}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tính giá trị của biểu thức $P=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+\ldots+\log(\tan 89^\circ)$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}P&=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+\ldots+\log(\tan 89^\circ)\\&=\log(\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\ldots\tan 89^\circ)=\log[\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\ldots\tan(90^\circ-2^\circ)\cdot\tan(90^\circ-1^\circ)]\\&=\log(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\ldots\cot 2^\circ\cdot\cot 1^\circ)=\log((\tan 1^\circ\cdot\cot 1^\circ)(\tan 2^\circ\cdot\cot 2^\circ)\ldots)\\&=\log 1=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Biết a, b là các số nguyên thỏa $\log_{1350} 2=1+a\log_{1350} 3+b\log_{1350} 5$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $3a-5b=2$. **B.** $a^2-b^2=4$. **C.** $a-2b=1$. **D.** $ab=8$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_{1350} 2 = 1 + a\log_{1350} 3 + b\log_{1350} 5\\
\Leftrightarrow\ & 1350^{\log_{1350} 2} = 1350 \cdot \left(1350^{\log_{1350} 3}\right)^a \cdot \left(1350^{\log_{1350} 5}\right)^b\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1350 \cdot 3^a \cdot 5^b\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{675} = 3^a \cdot 5^b\\
\Leftrightarrow\ & 3^{-3} \cdot 5^{-2} = 3^a \cdot 5^b\\
\Leftrightarrow\ & 3^{a+3} \cdot 5^{b+2} = 1\\
\Leftrightarrow\ & \log_3 3^{a+3} + \log_3 5^{b+2} = 0\\
\Leftrightarrow\ & (a+3) + (b+2) \cdot \log_3 5 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = -3 \\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $a - 2b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\log(a+b) = \dfrac{3}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.

C. $3\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. **D.** $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải.

Ta có: $a^2 + b^2 = 7ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab$

$\Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log(9ab)$

$\Leftrightarrow 2\log(a+b) = 2\log 3 + \log a + \log b$

$\Leftrightarrow \log(a+b) - \log 3 = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$

$\Leftrightarrow \log\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}\log ab$

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho $n > 1$ là một số nguyên. Tính giá trị của biểu thức

$$\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \cdots + \frac{1}{\log_n n!}.$$

A. n. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $n!$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{\log_2 n!} + \dfrac{1}{\log_3 n!} + \cdots + \dfrac{1}{\log_n n!} = \log_{n!} 2 + \log_{n!} 3 + \cdots + \log_{n!} n = \log_{n!} n! = 1.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Biết $\log_2 7 = a, \log_3 7 = b$, tính $S = \log_2 2016$ theo a, b.

A. $S = \dfrac{2a + 5b + ab}{b}$. **B.** $S = \dfrac{2b + 5a + ab}{a}$. **C.** $S = \dfrac{5a + 2b + ab}{b}$. **D.** $S = \dfrac{2a + 5b + ab}{a}$.

Lời giải.

Ta có $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow \log_2 2016 = \log_2(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7$

$\Rightarrow S = 5 + \dfrac{2\log_7 3}{\log_7 2} + \log_2 7 = 5 + \dfrac{a}{b} + a = \dfrac{5b + ab + 2a}{b}$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $A = \log_{12} 35$ theo a, b, c.

A. $A = \dfrac{3b+3ac}{c+3}$. **B.** $A = \dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **C.** $A = \dfrac{3b+3ac}{c+2}$. **D.** $A = \dfrac{3b+3ac}{c+1}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\log_3 5 = 3a, \log_2 7 = 3b$.

$$A = \frac{\log_2 35}{\log_3 12} = \frac{\log_3 5 + \log_3 7}{1 + 2\log_3 2} = \frac{3a + \frac{3b}{c}}{1 + \frac{2}{c}} = \frac{3b+3ac}{c+2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{x-y-z}{x+y+z}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** $-\dfrac{13}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

* Điều kiện: $x+y+z>0$

* Ta có: $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right) = x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$

$\Leftrightarrow 2\log_{16}[4(x+y+z)] + [4(x+y+z)] = 2\log_{16}[2x^2+2y^2+2z^2+1] + [2x^2+2y^2+2z^2+1](*)$ *

Xét hàm số $f(t) = 2\log_{16} t + t$ trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(t) = \dfrac{2}{t\cdot \ln 16} + 1 > 0; \forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(t) = 2\log_{16} t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Từ $(*)$ ta có

$2x^2+2y^2+2z^2+1 = 4(x+y+z) \Leftrightarrow (S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+\dfrac{1}{2} = 0.$

$F = \dfrac{x-y-z}{x+y+z} \Leftrightarrow F(x+y+z) = x-y-z \Leftrightarrow (P)\colon (F-1)x+(F+1)y+(F+1)z = 0$

* Mặt phẳng (P) có điểm chung với mặt cầu (S) nên ta có:

$$\mathrm{d}(I;(P)) \leqslant R \Leftrightarrow \frac{|3F+1|}{\sqrt{(F-1)^2+(F+1)^2+(F+1)^2}} \leqslant \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 3F^2+2F-13 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-2\sqrt{10}}{3} \leqslant F \leqslant \frac{-1+2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \min F + \max F = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho $a>0$, $b>0$ thoả mãn $a^2+9b^2 = 10ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log(a+b)+\log b = 1$. **B.** $\log\dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\log a+\log b}{2}$.

C. $3\log(a+3b) = \log a - \log b$. **D.** $2\log(a+3b) = 2\log a + \log b$.

Lời giải.

Ta có $a^2+9b^2 = 10ab \Leftrightarrow a^2+9b^2+6ab = 16ab \Leftrightarrow (a+3b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+3b}{4}\right)^2 = ab$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 = \log ab \Leftrightarrow 2\log\frac{a+3b}{4} = \log a + \log b \Leftrightarrow \log\frac{a+3b}{4} = \frac{\log a+\log b}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 29. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{210}{\log_3 x}$ đúng với mọi $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2n+3$.

A. $P = 32$. **B.** $P = 40$. **C.** $P = 43$. **D.** $P = 23$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{2}{\log_3 x}+\dfrac{3}{\log_3 x}+\cdots+\dfrac{n}{\log_3 x}=\dfrac{n(n+1)}{2\log_3 x}$.
Do đó $\dfrac{n(n+1)}{2}=210\Leftrightarrow n^2+n-420=0\Leftrightarrow n=20$. Vậy $P=43$.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a\neq 1$, $a\neq\dfrac{1}{b}$ và $\log_a b=\sqrt{5}$. Tính $P=\log_{\sqrt{ab}}\dfrac{b}{\sqrt{a}}$.

A. $P=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{4}$. **B.** $P=\dfrac{11+3\sqrt{5}}{4}$. **C.** $P=\dfrac{11-2\sqrt{5}}{4}$. **D.** $P=\dfrac{11+3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{\log_a\dfrac{b}{\sqrt{a}}}{\log_a\sqrt{ab}}=\dfrac{\log_a b-\log_a\sqrt{a}}{\log_a\sqrt{a}+\log_a\sqrt{b}}=\dfrac{\log_a b-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b}=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho ba số thực dương x,y,z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a\,(a\neq 1)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1959x}{y}+\dfrac{2019y}{z}+\dfrac{60z}{x}$.

A. $\dfrac{2019}{2}$. **B.** 60. **C.** 2019. **D.** 4038.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} xz=y^2 \\ \log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z=2\log_{\sqrt{a}} y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xz=y^2 \\ xz^3=y^4 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z.$
Do đó: $P=\dfrac{1959x}{y}+\dfrac{2019y}{z}+\dfrac{60z}{x}=1959+2019+60=4038.$
Chọn đáp án D □

Câu 32. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $T=a+b$?

A. $T=6$. **B.** $T=4$. **C.** $T=11$. **D.** $T=8$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)=t\Rightarrow\begin{cases} x=9^t \\ y=6^t \\ x+y=4^t \end{cases}$
$\Rightarrow 9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{t}-1=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{t}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Ta lại có: $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2} \\ \left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}\Rightarrow T=a+b=6$
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho $\log_{12} 3=a$. Khi đó $\log_{24} 18$ có giá trị tính theo a là

A. $\dfrac{3a-1}{3-a}$. **B.** $\dfrac{3a+1}{3-a}$. **C.** $\dfrac{3a+1}{3+a}$. **D.** $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

Ta có phân tích: $24 = 12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$ và $18 = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{2}}$.

Ta có: $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_{12} 18}{\log_{12} 24} = \dfrac{\log_{12}\left(3^{\frac{3}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{2}}\right)}{\log_{12}\left(12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}\right)} = \dfrac{\frac{3}{2} \cdot \log_{12} 3 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log_{12} 3} = \dfrac{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}a} = \dfrac{3a+1}{3-a}$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

A. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y) = t$. Ta có $\begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x + 2y = 4^t & (3) \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6^t}{9^t} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$.

Thay $(1), (2)$ vào (3) ta được

$$2 \cdot 6^t + 2 \cdot 9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = 1 + \sqrt{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} & \text{(nhận)} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = 1 - \sqrt{3} & \text{(loại).} \end{array}\right.$$

Vậy $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Với a, b thỏa mãn để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 1$. Khi đó giá trị của biểu thức $S = \log_2(3a + 2b)$ bằng

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax + b) = a + b$.

Vì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$ nên liên tục tại $x_0 = 1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$.

Ta lại có

- ☑ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.
- ☑ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{ax - a + 1 - 1}{x - 1} = a$.

Vì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow a = 2$.

Thay vào (1) ta được $b = -1$.

Vậy $S = \log_2(3a + 2b) = \log_2 4 = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Biết $\log_6 2 = a, \log_6 5 = b$. Tính $I = \log_3 5$ theo a, b.

A. $I = \dfrac{b}{1+a}$. **B.** $I = \dfrac{b}{1-a}$. **C.** $I = \dfrac{b}{a-1}$. **D.** $I = \dfrac{b}{a}$.

Lời giải.

Ta có $a=\log_6 2=\dfrac{1}{\log_2 6}=\dfrac{1}{1+\log_2 3}\Rightarrow \log_2 3=\dfrac{1-a}{a}$.

Mặt khác $b=\log_6 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 6}=\dfrac{\log_2 5}{1+\log_2 3}=a\cdot\log_2 5\Rightarrow \log_2 5=\dfrac{b}{a}$.

Do đó $I=\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{1-a}{a}}=\dfrac{b}{1-a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+\cdots+\log(\tan 89^\circ).$$

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}P&=\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\log(\tan 3^\circ)+\cdots+\log(\tan 89^\circ)\\&=\log(\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdots\tan 89^\circ)\\&=\log(\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdots\tan 44^\circ\cdot\tan 45^\circ\cdot\cot 44^\circ\cdots\cot 3^\circ\cdot\cot 2^\circ\cdot\cot 1^\circ)\\&=\log 1=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho $a>0$, $b>0$ và $a\neq 1$ thỏa mãn $\log_a b=\dfrac{b}{4}$; $\log_2 a=\dfrac{16}{b}$. Tính tổng $a+b$.

A. 16. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 18.

Lời giải.

Ta có $\log_a b=\dfrac{b}{4}\Rightarrow b=a^{\frac{b}{4}}$; $\log_2 a=\dfrac{16}{b}\Rightarrow a=2^{\frac{16}{b}}$.

Do đó, $b=\left(2^{\frac{16}{b}}\right)^{\frac{b}{4}}=2^4=16$, suy ra $a=2$.

Vậy $a+b=18$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho x, y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}} y=\dfrac{2y}{5}$, $\log_{\sqrt[3]{5}} x=\dfrac{15}{y}$. Tính giá trị của $P=y^2+x^2$.

A. $P=17$. **B.** $P=50$. **C.** $P=51$. **D.** $P=40$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{x}} y=\dfrac{2y}{5}\Leftrightarrow 2\log_x y=\dfrac{2y}{5}\Leftrightarrow \log_x y=\dfrac{y}{5}$ (1).

Lại có $\log_{\sqrt[3]{5}} x=\dfrac{15}{y}\Leftrightarrow 3\log_5 x=\dfrac{15}{y}\Leftrightarrow \log_5 x=\dfrac{5}{y}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\log_x y=\dfrac{1}{\log_5 x}\Leftrightarrow \log_x y=\log_x 5\Leftrightarrow y=5$.

Suy ra $\log_x y=\dfrac{y}{5}\Rightarrow \log_x 5=1\Leftrightarrow x=5$. Khi đó $P=x^2+y^2=50$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Đặt $\log_2 3 = a; \log_2 5 = b$. Hãy biểu diễn $P = \log_3 240$ theo a và b.

A. $P = \dfrac{2a+b+4}{a}$. **B.** $P = \dfrac{2a-b+3}{a}$. **C.** $P = \dfrac{a-b+3}{a}$. **D.** $P = \dfrac{a+b+4}{a}$.

Lời giải.

$\log_3 240 = 4 \cdot \log_3 2 + \log_3 5 + 1 = \dfrac{4 + \log_2 5 + \log_2 3}{\log_2 3} = \dfrac{a+b+4}{a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$.

A. $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$. **B.** $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$.

C. $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. **D.** $\log(a+b) = \dfrac{1}{2} + \log a + \log b$.

Lời giải.

Với a, b là các số thực dương, ta có

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab \\ \Leftrightarrow &\log(a+b)^2 = \log(10ab) \Leftrightarrow 2\log(a+b) = 1 + \log a + \log b \\ \Leftrightarrow &\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho $\log_6 45 = a + \dfrac{\log_2 5 + b}{\log_2 3 + c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $a + b + c$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải.

$\log_6 45 = \dfrac{\log_2 45}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2 (3^2.5)}{\log_2 (2.3)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \dfrac{2(1 + \log_2 3) + \log_2 5 - 2}{\log_2 3 + 1} = 2 + \dfrac{\log_2 5 - 2}{\log_2 3 + 1}$

$\Rightarrow a = 2, b = -2, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 8. **C.** 2^{18}. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \dfrac{1}{3}\log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3. \end{cases}$

Vậy $ab = 2^9$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Biết rằng m, n là các số nguyên thỏa mãn $\log_{360} 5 = 1 + m\log_{360} 2 + n\log_{360} 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3m + 2n = 0$. **B.** $m^2 + n^2 = 25$. **C.** $mn = 4$. **D.** $m + n = -5$.

Lời giải.

Ta có $1 + m\log_{360} 2 + n\log_{360} 3 = \log_{360} 360 \cdot 2^m \cdot 3^n = \log_{360} 2^{3+m} \cdot 3^{2+n} \cdot 5$.

Do đó $m = -3$ và $n = -2$, suy ra $m + n = -5$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Đặt $a=\log_2 3$; $b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo a, b.

A. $\log_{20} 12=\dfrac{ab+1}{b-2}$. **B.** $\log_{20} 12=\dfrac{a+b}{b+2}$. **C.** $\log_{20} 12=\dfrac{a+2}{ab+2}$. **D.** $\log_{20} 12=\dfrac{a+1}{b-2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{20} 12=\log_{20} 3+2\log_{20} 2=\dfrac{1}{\log_3 20}+\dfrac{2}{\log_2 20}=\dfrac{1}{\log_3 5+2\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_2 5+2}=\dfrac{1}{\log_3 5+2\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_2 3\cdot\log_3 5+2}=\dfrac{1}{b+\dfrac{2}{a}}+\dfrac{2}{ab+2}=\dfrac{a+2}{ab+2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T=\dfrac{a}{b}$.

A. $0<T<\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}<T<\dfrac{2}{3}$. **C.** $-2<T<0$. **D.** $1<T<2$.

Lời giải.

Đặt $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}=t\Rightarrow\begin{cases}a=16^t\\ b=20^t\\ \dfrac{2a-b}{3}=25^t\end{cases}$.

Suy ra $2\cdot 16^t-20^t=3\cdot 25^t\Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-1=3\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^t\Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{4}{5}\right)^t=-1\\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Do $\left(\dfrac{4}{5}\right)^t>0$ nên $\left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{3}{2}\Rightarrow T=\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho $0<a\neq 1; x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_a 3=x$; $\log_a 5=y$. Khi đó $(x+y)\log_{15} a$ là

A. $2(x+y)$. **B.** $x+y$. **C.** 1. **D.** $(x+y)^2$.

Lời giải.

Vì $x+y=\log_a 3+\log_a 5=\log_a 15$ nên $(x+y)\log_{15} a=\log_a 15\cdot\log_{15} a=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tính tổng $S=1+2^2\log_{\sqrt{3}} 3+3^2\log_{\sqrt[3]{3}} 3+4^2\log_{\sqrt[4]{3}} 3+\ldots+2018^2\log_{\sqrt[2018]{3}} 3$.

A. $1009^2.2019^2$. **B.** $1009^2.2018^2$. **C.** 2019^2. **D.** $1008^2.2018^2$.

Lời giải.

$S=1+2^3\log_3 3+3^3\log_3 3+4^4\log_3 3+\ldots+2018^3\log_3 3$.

$S=1^3+2^3+3^3+\ldots+2018^3$.

Bằng quy nạp chứng minh được $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Áp dụng $n=2018\Rightarrow S=\dfrac{2018^2.2019^2}{4}=1009^2.2019^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Đặt $a=\ln 3$, $b=\ln 5$. Tính $I=\ln\dfrac{3}{4}+\ln\dfrac{4}{5}+\ln\dfrac{5}{6}+\cdots+\ln\dfrac{124}{125}$ theo a và b.

A. $I=a-2b$. **B.** $I=a+3b$. **C.** $I=a+2b$. **D.** $I=a-3b$.

Lời giải.

Ta có: $I = \ln\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{124}{125}\right) = \ln\frac{3}{125} = \ln 3 - 3\ln 5 = a - 3b.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho $x = 2018!$. Tính giá trị của biểu thức $A = -\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_3 x} - \cdots - \frac{1}{\log_{2018} x}$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 2018. **D.** -2018.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_3 x} - \cdots - \frac{1}{\log_{2018} x} \\ &= -\left(\log_x 2 + \log_x 3 + \cdots + \log_x 2018\right) \\ &= -\left(\log_x\left(2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2018\right)\right) \\ &= -\left(\log_x 2018!\right) \\ &= -\left(\log_x x\right) = -1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Giả sử $\log 2$ là 0,3010. Khi viết 2^{2018} trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

A. 607. **B.** 608. **C.** 609. **D.** 606.

Lời giải.

Ta có: $\log 2 = 0{,}3010 \Rightarrow \log 2^{2018} = 2018\cdot 0{,}3010 = 607{,}4180$.

Suy ra: $607 < \log 2^{2018} < 608 \Leftrightarrow 10^{607} < 2^{2018} < 10^{608}$, nên 2^{2018} có 608 chữ số khi viết trong hệ thập phân.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Số chữ số của số tự nhiên 3^{2017} là

A. 962. **B.** 963. **C.** 964. **D.** 961.

Lời giải.

Gọi số chữ số của 3^{2017} là n, khi đó

$$10^{n-1} < 3^{2017} < 10^n \Leftrightarrow \log 10^{n-1} < \log 3^{2017} < \log 10^n \Leftrightarrow n - 1 < 2017\log 3 < n.$$

Do đó $n - 1 = [2017\log 3] \Leftrightarrow n = [2017\log 3] + 1 = 963$.

Chú ý:

- ☑ $[x]$ là phần nguyên của x, chẳng hạn $[1{,}215] = 1$.
- ☑ Tổng quát: Với $a, x \in \mathbb{N}^*$, số các chữ số của a^x là $n = [x\log a] + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 98ab$. Tính $P = \ln\left(\frac{a+b}{10}\right)$.

A. $P = 2\ln(ab)$. **B.** $P = 2\ln(10ab)$. **C.** $P = \frac{1}{2}\ln(10ab)$. **D.** $P = \frac{1}{2}\ln(ab)$.

Lời giải.

Do $a, b > 0$ nên $a + b = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{98ab + 2ab} = \sqrt{100ab}$.

Suy ra $P = \ln\left(\frac{a+b}{10}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{100ab}}{10}\right) = \ln\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\ln(ab)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \cdots + \ln(\tan 89^\circ)$.

A. $P = \dfrac{1}{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = \ln(\tan 1^\circ . \tan 2^\circ . \tan 3^\circ \cdots \tan 88^\circ . \tan 89^\circ) = \ln T$.

Ta thấy $T = \tan 1^\circ . \tan 89^\circ \cdots \tan 44^\circ . \tan 46^\circ . \tan 45^\circ = \tan 1^\circ . \cot 1^\circ \cdots \tan 44^\circ . \cot 44^\circ . \tan 45^\circ$.

Ta thấy $T = 1$, vậy $\ln T = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Tìm tổng $S = 1 + 2^2 \log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + 4^2 \log_{\sqrt[4]{2}} 2 + ... + 2017^2 \log_{\sqrt[2017]{2}} 2$.

A. $S = 1008^2 \cdot 2017^2$. **B.** $S = 1007^2 \cdot 2017^2$. **C.** $S = 1009^2 \cdot 2017^2$. **D.** $S = 1010^2 \cdot 2017^2$.

Lời giải.

Ta có $S = 1 + 2^2 \log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + 4^2 \log_{\sqrt[4]{2}} 2 + \cdots + 2017^2 \log_{\sqrt[2017]{2}} 2 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + 2017^3$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2 (n+1)^2}{4}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng với $n = 2017$, ta có

$S = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + 2017^3 = \dfrac{2017^2 \cdot (2017+1)^2}{4} = \dfrac{2017^2 \cdot 2018^2}{4} = 1009^2 \cdot 2017^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho $a > 0, a \neq 1$ và x, y là hai số thực khác 0. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a x^2 = 2 \log_a x$. **B.** $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$. **D.** $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho $x = \log_6 30$, $y = \log_{12} 15$ và $\log_2 3 = \dfrac{1 + ax + by}{x - cy}$. Tính $S = 2a + 3b - c$ biết a, b, c là các số nguyên.

A. $S = 3$. **B.** $S = 9$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 7$.

Lời giải.

Có $x = \log_6 30 = \dfrac{\log_2 30}{\log_2 6} = \dfrac{1 + \log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 5 = (1 + \log_2 3)(x - 1)$

$y = \log_{12} 15 = \dfrac{\log_2 15}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3} \Leftrightarrow y(2 + \log_2 3) = \log_2 3 + x - 1 + x \log_2 3 - \log_2 3$

$\Leftrightarrow (x - y) \log_2 3 = 1 - x + 2y \Leftrightarrow \log_2 3 = \dfrac{1 - x + 2y}{x - y} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b - c = 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho $\log 2 = a$. Tính $\log \dfrac{125}{4}$ theo a.

A. $3 - 5a$. **B.** $4(1 + a)$. **C.** $6 + 7a$. **D.** $2(5 + a)$.

Lời giải.

Ta có $\log 2 = a \Leftrightarrow \log_2 10 = 1 + \log_2 5 = \dfrac{1}{a}$

$$\Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{1-a}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_5 2 = \frac{1}{1-a}.$$

Mà $\log \dfrac{125}{4} = \log 125 - \log 4 = 3\log 5 - 2\log 2$

$$= \frac{3}{1+\log_5 2} - 2a = \frac{3}{\dfrac{1}{1-a}} - 2a = 3 - 5a.$$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho $\alpha = \log_3 189$. Biểu thức $\log_{189} 7$ được biểu diễn theo α là

A. $\dfrac{\alpha+3}{\alpha}$. **B.** $\dfrac{\alpha+2}{\alpha}$. **C.** $\dfrac{\alpha-3}{\alpha}$. **D.** $\dfrac{\alpha-2}{\alpha}$.

Lời giải.

Ta có $\alpha = \log_3 189 = \log_3(3^3 \cdot 7) = 3 + \log_3 7 \Rightarrow \log_3 7 = a - 3$.

Do đó, ta có $\log_{189} 7 = \dfrac{1}{\log_7 189} = \dfrac{1}{\log_7(3^3 \cdot 7)} = \dfrac{1}{1+3\log_7 3} = \dfrac{\log_3 7}{\log_3 7 + 3} = \dfrac{\alpha-3}{\alpha-3+3} = \dfrac{\alpha-3}{\alpha}$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Đặt $a = \ln 2; b = ln5$. Hãy biểu diễn $I = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + ... + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ theo a và b.

A. $I = -2(a+b)$. **B.** $I = 2(a+b)$. **C.** $I = -2(a-b)$. **D.** $I = 2(a-b)$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} = \ln\frac{1}{100}$$

$$= -\ln 100 = -2\ln(2.5) = -2(\ln 2 + \ln 5) = -2(a+b)$$

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho $a\log_2 3 + b\log_6 2 + c\log_6 3 = 5$ với a, b, c là các số tự nhiên. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $a = b$. **B.** $a > b > c$. **C.** $b < c$. **D.** $b = c$.

Lời giải.

Ta có $a\log_2 3 + b\log_6 2 + c\log_6 3 = 5 \Leftrightarrow \log_6 2^b + \log_6 3^c = \log_2 2^5 - \log_2 3^a \Leftrightarrow \log_6 2^b 3^c = \log_2 \dfrac{2^5}{3^a}$.

Đặt $\begin{cases} t = \log_6 2^b 3^c \\ t = \log_2 \dfrac{2^5}{3^a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^b 3^c = 6^t \\ \dfrac{2^5}{3^a} = 2^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^b 3^c = 6^t \\ 2^5 = 3^a 2^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ t = 5 \\ b = c = 5 \end{cases}$ (vì a, b, c là các số tự nhiên).

Chọn đáp án D □

Câu 62. Cho $x = 2017!$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{\log_{2^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + ... + \dfrac{1}{\log_{2017^2} x}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $A = \dfrac{1}{\log_{2^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + ... + \dfrac{1}{\log_{2017^2} x} = \log_x 2^2 + \log_x 3^2 + ... + \log_x 2007^2 = \log_x(2^2.3^2...2007^2) = \log_x(2.3...2007)^2 = 2\log_x(2.3...2007) = 2\log_{2007!}(2.3...2007) = 2$

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho $0 < a \neq 1, b > 0$ thỏa mãn điều kiện $\log_a b < 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} 1 < b < a \\ 0 < b < a < 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} 1 < a < b \\ 0 < a < b < 1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 < b \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$. **D.** $0 < b < 1 \leq a$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a b < 0 \Leftrightarrow \log_a b < \log_a 1$.

TH: $a > 1 \Rightarrow \log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow b < 1$. Kết hợp điều kiện, ta được $0 < b < 1 < a$.

TH: $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow b > 1$. Kết hợp điều kiện, ta được $0 < a < 1 < b$.

Vậy khẳng định đúng là : $\left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 < b \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$ thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 = 4ab$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $2\log_a(a-b) = \log_a(2ab)$. **B.** $\log_a(4ab) = \log_a a^2 + \log_a b^2$.

C. $2\log_a(a+b) = 1 + \log_a 6b$. **D.** $\log_a(4ab) = 2\log_a(a+b)$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 6ab \Leftrightarrow \log_a(a+b)^2 = \log_a(6ab) \Leftrightarrow 2\log_a(a+b) = 1 + \log_a 6b$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Biết $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. Tính $\log_{1000} 27$ theo a, b.

A. $\dfrac{b}{1+ab}$. **B.** $\dfrac{a}{1+ab}$. **C.** $\dfrac{ab}{1+ab}$. **D.** $\dfrac{1}{1+ab}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_{1000} 27 &= \log_{10^3} 27 = \frac{1}{3}\log_{10} 27 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\log_2 27}{\log_2 10} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\log_2 3^3}{\log_2(2\cdot 5)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\log_2 3}{1+\log_2 5} \\ &= \frac{3\log_2 3}{1+\log_2 3\cdot\log_3 5} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a}{1+ab} \\ &= \frac{a}{1+ab}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho $\log 3 = a$ và $\log 5 = b$. Tính $\log_6 1125$.

A. $\dfrac{3a+2b}{a-1+b}$. **B.** $\dfrac{2a+3b}{a+1-b}$. **C.** $\dfrac{3a+2b}{a+1-b}$. **D.** $\dfrac{3a-2b}{a+1+b}$.

Lời giải.

$$\log_6 1125 = \frac{\log 1125}{\log 6} = \frac{\log(3^2 \cdot 5^3)}{\log\left(\frac{10}{5} \cdot 3\right)} = \frac{\log 3^2 + \log 5^3}{\log 10 - \log 5 + \log 3} = \frac{2\log 3 + 3\log 5}{\log 10 - \log 5 + \log 3} = \frac{2a + 3b}{a + 1 - b}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Với mọi số $a > 0;\ b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$ thì đẳng thức nào sau đây **đúng**

A. $\lg \dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\lg a + \lg b}{2}$.
B. $\lg(a+3b) = \lg a + \lg b$.
C. $\lg(a+1) + \lg b = 1$.
D. $2\lg(a+3b) = \lg a + \lg b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + 9b^2 = 10ab \Leftrightarrow a^2 + 6ab + 9b^2 = 16ab$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a+3b}{4}\right)^2 = ab \Leftrightarrow 2\lg\dfrac{a+3b}{4} = \lg ab$
$\Leftrightarrow \lg\dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\lg a + \lg b}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7,4\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Để lãnh được số tiền ít nhất 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi)

A. 13 năm .
B. 12 năm .
C. 14 năm .
D. 15 năm .

Lời giải.

Gọi n là số năm người đó có 250 triệu.

Ta có: $250 \cdot 10^6 = 100 \cdot 10^6 (1 + 7,4\%)^n \Leftrightarrow n = \log_{1+7,4\%}\left(\dfrac{250 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^6}\right) \approx 13$ (năm).

Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Cho a, b, c là ba số thực dương, khác 1 và $abc \neq 1$. Biết $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \dfrac{1}{4}$, $\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15}$. Khi đó, giá trị của $\log_c 3$ bằng bao nhiêu?

A. $\log_c 3 = \dfrac{1}{3}$.
B. $\log_c 3 = \dfrac{1}{2}$.
C. $\log_c 3 = 3$.
D. $\log_c 3 = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15} \Rightarrow \log_3 abc = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a 3} + \dfrac{1}{\log_b 3} + \log_3 c = \dfrac{15}{2}$
$\Leftrightarrow \log_3 c = \dfrac{15}{2} - \dfrac{1}{2} - 4 = 3 \Leftrightarrow \log_c 3 = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Biết $\log_a c = 2, \log_b c = 3$. Tính $P = \log_c(ab)$.

A. $P = \dfrac{5}{6}$.
B. $P = 1$.
C. $P = \dfrac{2}{3}$.
D. $P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \dfrac{1}{\log_a c} + \dfrac{1}{\log_b c} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Cho $\log_{12} 27 = a$. Hãy biểu diễn $\log_6 24$ theo a.

A. $\log_6 24 = \dfrac{a-9}{a+3}$.
B. $\log_6 24 = \dfrac{9-a}{a+3}$.
C. $\log_6 24 = \dfrac{a-9}{a-3}$.
D. $\log_6 24 = \dfrac{9-a}{a-3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \dfrac{3}{\log_3 3 + \log_3 4} = \dfrac{3}{1 + 2\log_3 2}$

Mà $\log_{12} 27 = a \Rightarrow \dfrac{3}{1 + 2\log_3 2} = a \Rightarrow \dfrac{3 - a}{2a} = \log_3 2 \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{3 - a}$.

Do đó $\log_6 24 = \log_6 6 + \log_6 4 = 1 + 2\log_6 2 = 1 + \dfrac{2}{\log_2 6} = 1 + \dfrac{2}{\log_2 2 + \log_2 3} = 1 + \dfrac{2}{1 + \log_2 3}$

$= 1 + \dfrac{2}{1 + \dfrac{2a}{3 - a}} = \dfrac{9 - a}{a + 3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2 (3.2^x - 2) = 2x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Điều kiện : $3.2^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3.2^x > 2 \Leftrightarrow 2^x > \dfrac{2}{3}$. Khi đó phương trình:

$\log_2 (3.2^x - 2) = 2x \Leftrightarrow 3.2^x - 2 = 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 3.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \text{ thỏa đk} \\ 2^x = 2 \text{ thỏa đk} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là: $0 + 1 = 1$

Chọn đáp án B □

Câu 73. Giả sử trong khai triển $(1 + ax)(1 - 3x)^6$ với $a \in \mathbb{R}$ thì hệ số của số hạng chứa x^3 là 405. Tính a.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải.

Ta có $(1 + ax) \cdot (1 - 3x)^6 = (1 + ax) \cdot \sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k (-3)^k x^k$.

Số hạng chứa x^3 là $1 \cdot \mathrm{C}_6^3 (-3)^3 x^3 + ax \cdot \mathrm{C}_6^2 (-3)^2 x^2 = (135a - 540)x^3$.

Theo giả thiết suy ra $135a - 540 = 405 \Leftrightarrow a = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Cho dãy (u_n) là một cấp số nhân có tất cả các số hạng đều dương và có công bội q. Xét dãy (v_n) với $v_n = \log_a u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, trong đó $0 < a \neq 1$. Xác định công sai d của cấp số cộng (v_n).

A. $d = \log_a \dfrac{1}{q}$. **B.** $d = \log_a 2q$. **C.** $d = \log_a q$. **D.** $d = \log_a q^2$.

Lời giải.

Ta có $u_n = q \cdot u_{n-1} \Leftrightarrow \log_a u_n = \log_a (q \cdot u_{n-1}) = \log_a q + \log_a u_{n-1} \Leftrightarrow v_n = \log_a q + v_{n-1}$.

Do đó (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = \log_a q$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a + b)$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)\Rightarrow \begin{cases} a=4^t \\ b=6^t \\ a+b=9^t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t>0.$

Vậy ta có $a+b=9^t \Leftrightarrow 4^t+6^t=9^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^t-1=0 \Rightarrow t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho $\log_3\left(\sqrt{a^2+9}+a\right)=2$. Giá trị biểu thức $\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right)$ bằng

A. 3. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Từ giả thiết có $\sqrt{a^2+9}+a=9 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+9}-a=1$. Ta có

$$\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right)=\log_3\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)^2=\log_3 1=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 77. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_3-4)=\ln(2u_n-4n+3)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Tính tổng $S_{100}=u_1+u_2+\cdots+u_{100}$.

A. 4950. **B**. 10000. **C**. 9999. **D**. 10100.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} &2u_n-4n+3=u_3-4,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \\ \Rightarrow\ &u_n=\frac{u_3+4n-7}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Thay $n=3$, ta được $u_3=5$, do đó $u_n=2n-1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy

$$S_{100}=\sum_{n=1}^{100}u_n=\sum_{n=1}^{100}(2n-1)=\frac{100(1+199)}{2}=10000.$$

Chọn đáp án B □

Câu 78. Cho các số thực a,b thỏa mãn $\sqrt[3]{a^{14}}>\sqrt[4]{a^7}$, $\log_b\left(2\sqrt{a+1}\right)<\log_b\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>1,b>1$. **B**. $0<a<1<b$.

C. $0<b<1<a$. **D**. $0<a<1,0<b<1$.

Lời giải.

Điều kiện để các căn thức có nghĩa là $a>0$.

Ta có $\sqrt[3]{a^{14}}>\sqrt[4]{a^7} \Leftrightarrow a^{\frac{14}{3}}>a^{\frac{7}{4}} \Rightarrow a>1.$ (1)

Xét hiệu $\left(2\sqrt{a+1}\right)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+2}\right)^2=4a+4-\left(2a+2+2\sqrt{a(a+2)}\right)=2a+2-2\sqrt{a(a+2)}$.

Vì $a>1$ nên $2a+2=a+a+2\geq 2\sqrt{a(a+2)}$, dấu " = " không xảy ra.

Vậy

$$\begin{aligned} 2a+2>2\sqrt{a(a+2)} &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{a+1}\right)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+2}\right)^2>0 \\ &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{a+1}\right)^2>\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+2}\right)^2 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{a+1}>\sqrt{a}+\sqrt{a+2}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $\log_b\left(2\sqrt{a+1}\right) < \log_b\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+2}\right) \Rightarrow 0 < b < 1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $0 < b < 1 < a$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Giá trị của biểu thức $M = xy + yz + xz$ là

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Đặt $2^x = 3^y = 6^{-z} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 t \\ y = \log_3 t \\ z = -\log_6 t \end{cases}$.

Mặt khác $\log_6 t = \dfrac{1}{\log_t 6} = \dfrac{1}{\log_t 3 + \log_t 2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 t} + \dfrac{1}{\log_2 t}} = \dfrac{\log_3 t \cdot \log_2 t}{\log_3 t + \log_2 t}$.

Khi đó $M = xy + yz + xz = \log_2 t \cdot \log_3 t - \log_3 t \cdot \log_6 t - \log_2 t \cdot \log_6 t = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Cho ba số thực dương a, b, c đều khác 1 thỏa mãn $\log_a b = 2\log_b c = 4\log_c a$ và $a+2b+3c = 48$. Khi đó $P = abc$ bằng bao nhiêu?

A. 324. **B.** 243. **C.** 521. **D.** 512.

Lời giải.

Do a, b, c là các số dương và đều khác 1 nên $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$ đều khác 0.

Ta có

$$\log_a b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_b c = 2\log_b^2 c \Leftrightarrow \log_a c = 2\log_b^2 c.$$
$$\log_a b = 4\log_c a \Leftrightarrow \log_c a \cdot \log_a b = 4\log_c^2 a \Leftrightarrow \log_c b = 4\log_c^2 a.$$

Suy ra $\log_a c \cdot \log_c b = 8\log_b^2 c \cdot \log_c^2 a \Leftrightarrow \log_a b = 8\log_b^2 a \Leftrightarrow \log_a^3 b = 8 \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Thế $b = a^2$ vào $\log_a b = 2\log_b c$ ta được $\log_b c = 1$ hay $b = c$.

Theo giả thiết ta có

$$a + 2b + 3c = 48 \Leftrightarrow 5a^2 + a - 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -\dfrac{16}{5}. \end{array}\right.$$

Vì a là số dương nên $a = 3$. Do đó $b = c = 9$.

Vậy $P = abc = 3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thoả mãn $\log(x+y) = z$ và $\log\left(x^2+y^2\right) = z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\dfrac{31}{2}$. **B.** $\dfrac{29}{2}$. **C.** $-\dfrac{31}{2}$. **D.** $-\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log\left(x^2+y^2\right) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ x^2+y^2 = 10 \cdot 10^z \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{10^{2z} - 10 \cdot 10^z}{2}.$$

Khi đó

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)=10^z\left(10\cdot 10^z-\frac{10^{2z}-10\cdot 10^z}{2}\right)=15\cdot 10^{2z}-\frac{1}{2}\cdot 10^{3z}.$$

Vậy $a=15, b=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a+b=\dfrac{29}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho dãy số (u_n) với 89 số hạng thỏa mãn $u_n=\tan n^\circ,\quad \forall n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 89$. Gọi P là tích của tất cả 89 số hạng của dãy số. Giá trị của biểu thức $\log P$ là

A. 89. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 10.

Lời giải.

$\forall n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 89$, ta có $\tan\left(90^\circ-n^\circ\right)=\cot n^\circ\Rightarrow \tan n^\circ\cdot\tan(90^\circ-n^\circ)=1$. Khi đó

$$\begin{aligned}P&=u_1\cdot u_2\cdots u_{89}=\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ\\&=(\tan 1^\circ\cdot\tan 89^\circ)\cdot(\tan 2^\circ\cdot\tan 88^\circ)\cdots(\tan 44^\circ\cdot\tan 46^\circ)\cdot\tan 45^\circ\\&=1\cdot 1\cdots 1=1\Rightarrow\log P=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Cho $\log_7 12=x$; $\log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$ (trong đó a, b, c là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B**. $S=19$. **C**. $S=10$. **D**. $S=15$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{12}24\log_{24}54=\log_{12}54=\log_{12}\frac{12^8}{24^5}=8-5\log_{12}24\Rightarrow\log_{24}54=\frac{8-5y}{y}\Rightarrow\log_{54}24=\frac{y}{8-5y}.$$

và

$$\log_7 54=\log_7 12\log_{12}54=x(8-5y)\Rightarrow\log_{54}7=\frac{1}{x(8-5y)}.$$

Từ đó ta có

$$\log_{54}168=\log_{54}7+\log_{54}24=\frac{xy+1}{-5xy+8x}$$

suy ra $a=1, b=-5, c=8\Rightarrow S=1+2(-5)+3\cdot 8=15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 84. Với số thực a thỏa mãn $a>0$ và $a\ne 1$ thì mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a x^n=n\log_a x(x>0)$.

B. $\log_a\sqrt[n]{x}=n\log_a x(x>0$, n là số nguyên dương lẻ).

C. $\log_{a^n}x=n\log_a x(x>0, n$ khác $0)$.

D. $\log_a x^n=n\log_a x(x\ne 0$, n là số nguyên dương chẵn).

Lời giải.

Theo định lí 3(bài Logarit) thì: Lôgarit của một lũy thừa bằng tích của số mũ với lôgarit của cơ số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$. **B.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$. **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Câu 86. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2=23ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_5(a+b)=1+\log_{25} a+\log_{25} b$. **B.** $\ln\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$.

C. $2\log\dfrac{a+b}{5}=\log a+\log b$. **D.** $2\log_5(a+b)=1+\log_5 a+\log_5 b$.

Lời giải.

Ta có $a^2+b^2=23ab\Leftrightarrow(a+b)^2=25ab\Leftrightarrow\left(\dfrac{a+b}{5}\right)^2=ab$ (*)

- ☑ Lấy lôgarit thập phân hai vế của (*), ta có
  $2\log\dfrac{a+b}{5}=\log a+\log b$.
- ☑ Lấy lôgarit tự nhiên hai vế của (*), ta được
  $2\ln\dfrac{a+b}{5}=\ln(ab)=\ln a+\ln b\Rightarrow\ln\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$.
- ☑ Lấy lôgarit cơ số 5 hai vế của (*) ta được
  $2\left[\log_5(a+b)-\log_5 5\right]=\log_5(ab)\Leftrightarrow 2\left[\log_5(a+b)-1\right]=\log_5 a+\log_5 b$
  $\Leftrightarrow\log_5(a+b)=\dfrac{1}{2}\left(\log_5 a+\log_5 b\right)+1=1+\log_{25} a+\log_{25} b$.
- ☑ Lấy lôgarit cơ số 5 hai vế của (*), ta được
  $2\left[\log_5(a+b)-\log_5 5\right]=\log_5(ab)\Leftrightarrow 2\log_5(a+b)=2+\log_5 a+\log_5 b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(\log\left(\log\mathrm{e}\right)\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Đặt $g(x)=f(x)-6$ (*), hàm số $g(x)$ cũng có tập xác định $\mathbb{R}$.

Dễ thấy $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $-x\in\mathbb{R}$, và ta có

$$g(-x)=f(-x)-6=a\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)+b\sin(-x)=a\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-b\sin x$$
$$=a\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-b\sin x=-a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-b\sin x=-g(x)$$

Suy ra hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Ta thấy: $\log\left(\ln 10\right)=\log\left(\dfrac{1}{\log\mathrm{e}}\right)=-\log\left(\log\mathrm{e}\right)$, nên nếu đặt $t=\log\left(\ln 10\right)$ thì $\log\left(\log\mathrm{e}\right)=-t$.

Theo giả thiết có $f(-t)=2$, từ (*) ta có $g(-t)=f(-t)-6=2-6=-4$. Cần tính $f(t)$.

Từ (*) và kết hợp hàm g là hàm số lẻ ta có: $f(t)=g(t)+6=-g(-t)+6=4+6=10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f(2)+f(3)+\cdots+f(2018)=\ln a-\ln b+\ln c-\ln d$ với a,b,c,d là các số nguyên, trong đó a,b,d là các số nguyên tố và $a<b<c<d$. Tính $P=a+b+c+d$.

A. 1986. **B.** 1698. **C.** 1689. **D.** 1968.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(2)+f(3)+\cdots+f(2018) &= \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)\\ &= \ln\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)\right]\\ &= \ln\frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(2018^2-1)}{(2\cdot 3\cdots 2018)^2}\\ &= \ln\frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdots 2017\cdot 2018}{(2\cdot 3\cdots 2018)^2}\\ &= \ln\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots 2017)(3\cdot 4\cdot 5\cdots 2019)}{(2\cdot 3\cdots 2018)^2} = \ln\frac{2017!\cdot\dfrac{2019!}{1\cdot 2}}{(2018!)^2}\\ &= \ln\frac{2019}{2018\cdot 2} = \ln\frac{3\cdot 763}{2^2\cdot 1009} = \ln 3-\ln 4+\ln 673-\ln 1009. \end{aligned}$$

Vậy $a+b+c+d=3+4+673+1009=1689$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Cho số thực a,b thoả mãn $a>b>1$ và $\dfrac{1}{\log_a b}+\dfrac{1}{\log_b a}=\sqrt{2018}$. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{\log_{ab} b}-\dfrac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

A. $P=\sqrt{2014}$. **B.** $P=\sqrt{2016}$. **C.** $P=\sqrt{2018}$. **D.** $P=\sqrt{2020}$.

Lời giải.

Vì $a>b>1$ nên ta có $\begin{cases}\log_a b<1\\ \log_b a>1\end{cases}\Rightarrow \log_b a-\log_a b>0.$ (1)

Ta thấy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_b a}=\sqrt{2018}\\ \Leftrightarrow\ &\log_b a+\frac{1}{\log_b a}=\sqrt{2018}\\ \Leftrightarrow\ &\log_b^2 a+\frac{1}{\log_b^2 a}=2016. \end{aligned}\quad (2)$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} &P=\frac{1}{\log_{ab} b}-\frac{1}{\log_{ab} b}\\ \Leftrightarrow\ &P=\log_b(ab)-\log_a(ab)\\ \Leftrightarrow\ &P=\log_b a-\log_a b \quad (3)\\ \Leftrightarrow\ &P=\log_b a-\frac{1}{\log_b a}\\ \Leftrightarrow\ &P^2=\log_b^2 a+\frac{1}{\log_b^2 a}-2 \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (2) và (4) ta được $P^2=2014$. (5)

Từ (1), (3) và (5) ta được $P=\sqrt{2014}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}$, với $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Có bao nhiêu số n để $f(n)=a$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta thấy $f(n)$ bé nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(n)\leqslant f(n+1)\\ f(n)\leqslant f(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}\leqslant\dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 (n+1))}{9^{n+1}}\\ \dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}\leqslant\dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 (n-1))}{9^{n-1}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9\leqslant\log_3(n+1)\\ \log_3 n\leqslant 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\geqslant 3^9-1\\ n\leqslant 3^9\end{cases}\Leftrightarrow n\in\{3^9-1,3^9\}.$$

Vậy có hai giá trị của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Với $\log_{27}5=a$, $\log_3 7=b$ và $\log_2 3=c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

A. $\dfrac{(3a+b)c}{1+b}$. **B.** $\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$. **C.** $\dfrac{(3a+b)c}{1+a}$. **D.** $\dfrac{(3b+a)c}{1+c}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{27}5=a\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow\log_3 5=3a$. Khi đó

$$\log_6 35=\frac{\log_3 35}{\log_3 6}=\frac{\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 2+1}=\frac{3a+b}{\dfrac{1}{c}+1}=\frac{(3a+b)c}{1+c}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 92. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $\log_a b=\dfrac{3}{2}$, $\log_c d=\dfrac{5}{4}$. Nếu $a-c=9$, thì $b-d$ nhận giá trị nào?

A. 85. **B.** 71. **C.** 76. **D.** 93.

Lời giải.

☑ Ta có $b=a^{\frac{3}{2}}$, $d=c^{\frac{5}{4}}$. Do b, d là các số nguyên dương nên $a=x^2$, $c=y^4$, với x, y là các số nguyên dương.

☑ Ta có $a-c=x^2-y^4=(x-y^2)\cdot(x+y^2)=9$. Suy ra $(x-y^2;x+y^2)=(1;9)$. Dễ dàng suy ra $x=5$, $y=2$.

☑ Do đó, $b-d=x^3-y^5=93$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Cho $S_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^2+4^2+\cdots+2018^2}$ và $S_2=\left(2-\sqrt{3}\right)^{1^2+3^2+\cdots+2017^2}$. Kết quả của $\log_{26+15\sqrt{3}}(S_1S_2)$ bằng

A. 679057. **B.** 579067. **C.** 679067. **D.** 470071.

Lời giải.

Ta có $(2k)^2-(2k-1)^2=4k-1$ suy ra

$$S_1S_2=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^2-1^2+4^2-3^2+\cdots+2018^2-2017^2}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{4\cdot1-1+4\cdot2-1+\cdots+4\cdot1009-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2037171}$$

Vậy $\log_{26+15\sqrt{3}}(S_1S_2) = \dfrac{1}{3}\log_{2+\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2037171} = 679057.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 94. Cho hàm số $f(x) = \log_{2017}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$. Tổng $S = f\left(\dfrac{1}{2019}\right) + f\left(\dfrac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)$ bằng

A. $S = 1008$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 1009$.

Lời giải.

Nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = \log_{2017}\dfrac{a}{1-a} + \log_{2017}\dfrac{b}{1-b} = \log_{2017} 1 = 0$. Suy ra

$$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right) = 0.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 95. Giả sử $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$. Tìm tất cả các giá trị của a, b thoả mãn đẳng thức $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

A. $-1 < a < 1$ và $-1 < b < 1$. **B.** $-1 < a \le 0$ và $-1 < b \le 0$.

C. $a = b = 0$. **D.** $0 \le a < 1$ và $0 \le b < 1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D} = (-1;1)$ nên ta phải có $a, b \in (-1;1)$. Ta có

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \ln\frac{1-a}{1+a} + \ln\frac{1-b}{1+b} = \ln\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} \\ &= \ln\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}} = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right). \end{aligned}$$

Vậy với mọi $a, b \in (-1;1)$ ta đều có $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 96. Cho $a = \log_m 3$ và $b = \log_n 3$, với m, n là các số thực dương khác 1. Tính $P = \log_3(nm^2)$.

A. $P = \dfrac{ab}{a+b}$. **B.** $P = \dfrac{a+2b}{ab}$. **C.** $P = \dfrac{2ab}{a+b}$. **D.** $P = \dfrac{2a+b}{ab}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_3(nm^2) = \log_3 n + 2\log_3 m = \dfrac{1}{\log_n 3} + \dfrac{2}{\log_m 3} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{a} = \dfrac{a+2b}{ab}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 97. Số nguyên dương lớn nhất không vượt quá $A = \dfrac{2^{2018}}{3^{1272}}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $A = \mathrm{e}^{\ln A} = \mathrm{e}^{\ln\frac{2^{2018}}{3^{1272}}} = \mathrm{e}^{2018\ln 2 - 1272\ln 3} \approx 3{,}804$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 98. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

A. $\dfrac{3a-1}{3-a}$. **B.** $\dfrac{3a+1}{3-a}$. **C.** $\dfrac{3a+1}{3+a}$. **D.** $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

Ta có $a=\log_{12}3=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 3}{2+\log_2 3}\Rightarrow \log_2 3=\dfrac{2a}{1-a}$.

Suy ra $\log_{24}18=\dfrac{\log_2(3^2\cdot 2)}{\log_2(2^3\cdot 3)}=\dfrac{2\log_2 3+1}{3+\log_2 3}=\dfrac{1+2\cdot\dfrac{2a}{1-a}}{3+\dfrac{2a}{1-a}}=\dfrac{3a+1}{3-a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Đặt $a=\log_2 3$, $b=\log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45=\dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m+n+p$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_6 45 &= \frac{\log_2 45}{\log_2 6}=\frac{\log_2(5\cdot 9)}{\log_2(2\cdot 3)}=\frac{\log_2 5+2\log_2 3}{1+\log_2 3}\\ &= \frac{\log_2 3\cdot\log_3 5+2\log_2 3}{1+\log_2 3}=\frac{\dfrac{a}{b}+2a}{1+a}\\ &= \frac{a+2ab}{ab+b}=\frac{a(1+2b)}{b(a+1)}.\end{aligned}$$

Theo đề bài $\log_6 45=\dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}\Leftrightarrow\dfrac{a(1+2b)}{b(a+1)}=\dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ suy ra $m=1$, $n=2$, $p=1$. Vậy $m+n+p=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Số các chữ số của 5^{2018} khi viết trong hệ thập phân là

A. 1412. **B.** 1409. **C.** 1410. **D.** 1411.

Lời giải.

Ta có $\log 5^{2018}=2018\log 5$ có phần nguyên là 1410. Vậy số 5^{2018} có $1410+1=1411$ chữ số.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. C	5. C	6. D	7. B	8. A	9. D	10. C
11. A	12. C	13. B	14. D	15. D	16. C	17. A	18. A	19. A	20. C
21. A	22. C	23. D	24. C	25. A	26. C	27. D	28. B	29. C	30. A
31. D	32. A	33. B	34. B	35. B	36. B	37. A	38. D	39. B	40. D
41. A	42. A	43. A	44. D	45. C	46. D	47. C	48. A	49. D	50. B
51. B	52. B	53. D	54. D	55. C	56. D	57. A	58. A	59. C	60. A
61. D	62. B	63. C	64. C	65. B	66. B	67. A	68. A	69. A	70. A
71. B	72. B	73. C	74. C	75. B	76. B	77. B	78. C	79. A	80. B
81. B	82. C	83. D	84. A	85. A	86. D	87. B	88. C	89. A	90. A
91. B	92. D	93. A	94. C	95. A	96. B	97. B	98. B	99. B	100. D

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Đầu năm 2016, Curtis Cooper và các cộng sự tại nhóm nghiên cứu Đại học Central Mis-souri, Mỹ công bố số nguyên tố lớn nhất tại thời điểm đó. Số nguyên tố này là một dạng Mersenne, có giá trị bằng $M = 2^{74207281} - 1$. Hỏi M có bao nhiêu chữ số?

A. 2233862. **B**. 22338623. **C**. 22338617. **D**. 22338618.

Lời giải.

Nếu $10^n \le M < 10^{n+1}\,(n \in \mathbb{N}^*)$ thì số M có $n+1$ chữ số.

Trước hết, ta xác định số chữ số của $M+1 = 2^{74207281}$.

Ta có

$$10^n \le 2^{74207281} < 10^{n+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^n \le 2^{74207281} \\ 10^{n+1} > 2^{74207281} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le \log\left(2^{74207281}\right) \\ n+1 > \log\left(2^{74207281}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \le 74207281 \cdot \log 2 \approx 22338617,5 \\ n+1 > 74207281 \cdot \log 2 \approx 22338618 \end{cases} \Leftrightarrow n = 22338617$$

Vậy $M+1 = 2^{74207281}$ có $n+1 = 22338618$ chữ số.

Bây giờ, ta tìm số chữ số của $M = 2^{74207281} - 1$.

Vì $M+1$ là số có 22338618 chữ số nên M hoặc có 22338618 chữ số hoặc có 22338617 chữ số.

Nếu M có 22338617 chữ số thì $M+1 = 10^{22338617} \Leftrightarrow 2^{74207281} = 10^{22338617} \Leftrightarrow 2^{51868664} = 5^{22338617}$.

Điều này là vô lý do 2 là số chẵn và 5 là số lẻ.

Vậy $M = 2^{74207281} - 1$ là số có 22338618 chữ số.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Đặt $a = \log_2 3; b = \log_3 5$. Biểu diễn đúng của $\log_{20} 12$ theo a, b là

A. $\dfrac{ab+1}{b-2}$. **B**. $\dfrac{a+b}{b+2}$. **C**. $\dfrac{a+1}{b-2}$. **D**. $\dfrac{a+2}{ab+2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $\log_2 5 = ab$, từ đây ta tính được

$$\begin{aligned} \log_{20} 12 &= 2\log_{20} 2 + \log_{20} 3 \\ &= \frac{2}{\log_2 20} + \frac{1}{\log_3 20} \\ &= \frac{2}{2+\log_2 5} + \frac{1}{2\log_3 2 + \log_3 5} \\ &= \frac{2}{2+ab} + \frac{1}{\dfrac{2}{a} + b} \\ &= \frac{a+2}{ab+2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\log(a+1) + \log b = 1$. **B**. $\log \dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$.

C. $3\log(a+3b) = \log a - \log b$. **D**. $2\log(a+3b) = \log a + \log b$.

Lời giải.

Ta có
$a^2+9b^2=10ab \Leftrightarrow (a+3b)^2=16ab.$
Suy ra
$\log{(a+3b)^2}=\log(16ab) \Leftrightarrow 2\log{(a+3b)}=2\log 4+\log(ab) \Leftrightarrow \log\dfrac{a+3b}{4}=\dfrac{\log a+\log b}{2}.$
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho các số dương a, b với $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\log_a b<1<\log_b a$. **B.** $1<\log_a b<\log_b a$. **C.** $\log_b a<1<\log_a b$. **D.** $\log_b a<\log_a b<1$.

Lời giải.

$\forall a,\, b$ ta có $1<a<b \Rightarrow \begin{cases} 0<\log_a a<\log_a b \\ 0<\log_b a<\log_b b \end{cases} \Rightarrow \log_b a<1<\log_a b.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Biết số nguyên dương M sẽ có chữ số đầu tiên là k (khi biểu diễn thập phân) nếu $\log k \le \{\log M\}<\log(k+1)$ trong đó ký hiệu $\{a\}$ chỉ phần lẻ của số thập phân a (ví dụ $\{300{,}2\}=0{,}2$). Hỏi số $M=2^{400}$ có chữ số đầu tiên là bao nhiêu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\log M=\log 2^{400}=400\cdot\log 2\approx 120{,}41.$$

Suy ra $\{\log M\}\approx 0{,}41$.
Rõ ràng $\log 2<\{\log M\}<\log 3$ nên chữ số chữ số đầu tiên của M là 2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho $\log_{35}81=a$, $\log_{63}49=b$. Tính $\log_5 3$ theo a, b.

A. $\dfrac{ab-2b}{ab+4a-8}$. **B.** $\dfrac{2ab+4b-8}{ab-2a}$. **C.** $\dfrac{4ab-b+2a}{2b-ab}$. **D.** $\dfrac{ab-2a}{2ab+4b-8}$.

Lời giải.

☑ Theo giả thiết $\dfrac{1}{a}=\log_{81}35=\dfrac{1}{4}\log_3 5+\dfrac{1}{4}\log_3 7$ (1) và $\dfrac{1}{b}=\log_{49}63=\dfrac{1}{2}+\log_7 3$.

☑ Suy ra $\log_7 3=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-b}{2b}\Rightarrow\log_3 7=\dfrac{2b}{2-b}$.

☑ Ta có $\log_3 5=\dfrac{4}{a}-\log_3 7=\dfrac{4}{a}-\dfrac{2b}{2-b}=\dfrac{2ab+4b-8}{a(b-2)}\Rightarrow\log_5 3=\dfrac{ab-2a}{2ab+4b-8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho biểu thức $P=\log_{a^3}\dfrac{a^2}{\sqrt{b}}-\log_b a^6$ (với a, b là các số thực dương lớn hơn 1). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P_{\min}=-\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\max}=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $P_{\min}=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $P_{\max}=-\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $P=\log_{a^3}\dfrac{a^2}{\sqrt{b}}-\log_b a^6=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}\log_a b-6\log_b a$.
Đặt $t=\log_a b$, do $a, b>1$ nên $t>0$.
Ta được $P=\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{6}-\dfrac{6}{t}\Rightarrow\dfrac{2}{3}-P=\dfrac{t}{6}+\dfrac{6}{t}\ge 2\Rightarrow P\le-\dfrac{4}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{t}{6}=\dfrac{6}{t}\Rightarrow t=6\Leftrightarrow b=a^6$.

Vậy $P_{\max}=-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow b=a^6$ chẳng hạn $a=2,b=64$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho x và y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\dfrac{(2+\log_6 y)(1+\log_3 2)}{\log_5 x}=\log_3 5$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

A. $\dfrac{x}{y}=\log_6 5$. **B.** $\dfrac{x}{y}=36$. **C.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{36}$. **D.** $\dfrac{x}{y}=\log_5 6$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{(2+\log_6 y)(1+\log_3 2)}{\log_5 x}=\log_3 5\\
\Leftrightarrow\ & 2+\log_3 4+\log_6 y\,[1+\log_3 2]=\log_3 x\\
\Leftrightarrow\ & \log_6 y\log_3 6=\log_3\frac{x}{36}\\
\Leftrightarrow\ & \log_3 y=\log_3\frac{x}{36}\\
\Leftrightarrow\ & y=\frac{x}{36}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{y}=36.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho $a,b,x>0$; $a>b$ và $b,x\neq 1$ thỏa mãn $\log_x\dfrac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\dfrac{1}{\log_b x^2}$. Khi đó, tính $P=\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}$.

A. $P=\dfrac{5}{4}$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\dfrac{16}{15}$. **D.** $P=\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2}\\
\Leftrightarrow\ & \log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\log_{x^2} b\\
\Leftrightarrow\ & \log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\log_x\sqrt{b}=\log_x\sqrt{ab}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{a+2b}{3}=\sqrt{ab}\\
\Leftrightarrow\ & (a+2b)^2=9ab\\
\Leftrightarrow\ & a^2-5ab+4b^2=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}a=b\ \text{(loại vì giả thiết } a>b)\\ a=4b.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $a=4b$ thay vào P ta được $P=\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\dfrac{17}{4}}\right)$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\cdots+f\left(\frac{2018}{2019}\right).$$

A. $T=\dfrac{2019}{2}$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=1009$.

Lời giải.

Ta có $f(1-x)=\log_2\left(1-x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+\dfrac{17}{4}}\right)=\log_2\left(-x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\dfrac{17}{4}}\right)$.

Do đó $f(x)+f(1-x)=\log_2\left[x^2-x+\dfrac{17}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]=\log_2 4=2$.

Vậy $T=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1009}{2019}\right)+f\left(\dfrac{1010}{2019}\right)=1009\cdot 2=2018$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho ba số $a+\log_2 3$, $a+\log_4 3$, $a+\log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$(a+\log_4 3)^2=(a+\log_2 3)(a+\log_8 3).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&a^2+2a\log_4 3+(\log_4 3)^2=a^2+a(\log_2 3+\log_8 3)+\log_2 3\cdot\log_8 3\\
\Leftrightarrow\ &a\log_2 3+\frac{1}{4}(\log_2 3)^2=a\frac{4}{3}\log_2 3+\frac{1}{3}(\log_2 3)^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{3}a=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\log_2 3\\
\Leftrightarrow\ &a=-\frac{1}{4}\log_2 3.
\end{aligned}$$

Do đó $a+\log_2 3=\dfrac{3}{4}\log_2 3$ và $a+\log_4 3=\dfrac{1}{4}\log_2 3$. Suy ra công bội của cấp số nhân bằng $\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm số nguyên dương n sao cho $\log_{2018}2019+2^2\log_{\sqrt{2018}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{2018}}2019+\cdots+n^2\log_{\sqrt[n]{2018}}2019=1010^2\cdot 2021^2\log_{2018}2019$.

A. $n=2021$. **B.** $n=2019$. **C.** $n=2020$. **D.** $n=2018$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_{2018}2019+2^2\log_{\sqrt{2018}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{2018}}2019+\cdots+n^2\log_{\sqrt[n]{2018}}2019=1010^2\cdot 2021^2\\
\Leftrightarrow\ &\left(1+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)\log_{2018}2019=1010^2\cdot 2021^2\log_{2018}2019\\
\Leftrightarrow\ &\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=1010^2\cdot 2021^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n(n+1)}{2}=1010\cdot 2021\\
\Leftrightarrow\ &n=2020.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương a $(a \neq 1)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x}$.

A. 60. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** $\dfrac{2019}{2}$.

Lời giải.

Ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên $y^2 = xz \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$. (1)

Ba số $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên

$$2\log_{\sqrt{a}} y = \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z \Leftrightarrow y^4 = xz^3 \Leftrightarrow \frac{y^3}{z^3} = \frac{x}{y}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $\dfrac{y^3}{z^3} = \dfrac{y}{z} \Leftrightarrow \dfrac{y}{z} = 1$ (do $y, z > 0$), suy ra $\dfrac{x}{y} = 1$, $\dfrac{x}{z} = 1$ và $\dfrac{z}{x} = 1$.

Vậy $P = 1959 + 2019 + 60 = 4038$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

A. $P = 23$. **B.** $P = 41$. **C.** $P = 43$. **D.** $P = 32$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{190}{\log_3 x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{\log_3 x} + \cdots + \frac{n}{\log_3 x} = \frac{190}{\log_3 x} \\ \Leftrightarrow\ & 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 190 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 190 \Leftrightarrow n = 19. \end{aligned}$$

Vậy $P = 2n + 3 = 41$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho $a\log_{2019} 9 + b\log_{2019} 673 = 2018$ với $a,\ b \in \mathbb{N}$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $b = 2a$. **B.** $b = a^2$. **C.** $a = b^2$. **D.** $a = 2b$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} a\log_{2019} 9 + b\log_{2019} 673 = 2018 \ &\Leftrightarrow\ \log_{2019} 9^a + \log_{2019} 673^b = 2018 \\ &\Leftrightarrow\ \log_{2019}\left(9^a \cdot 673^b\right) = 2018 \\ &\Leftrightarrow\ 9^a \cdot 673^b = 2019^{2018} \\ &\Leftrightarrow\ 3^{2a} \cdot 673^b = 673^{2018} \cdot 3^{2018} \\ &\Leftrightarrow\ 673^{2018-b} = 3^{2a-2018}. \quad (1) \end{aligned}$$

Do 673 và 3 nguyên tố cùng nhau nên từ (1) suy ra

$$\begin{cases} 2a = 2018 \\ b = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = 2018 \end{cases} \Rightarrow b = 2a.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Biết $\log \sin x + \log \cos x = -1$ và $\log(\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{2}(\log n - 1)$. Giá trị của n là

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải.

Ta có

$$-1 = \log \sin x + \log \cos x = \log(\sin x \cos x) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{10}.$$

Lại có

$$\log(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log n - 1) \Rightarrow \log(\sin x + \cos x)^2 = \log \frac{n}{10}$$

nên

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 = \frac{n}{10} &\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{n}{10} \\ &\Rightarrow n = 12. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho các số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $m = \log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b) \Rightarrow \begin{cases} a = 9^m, b = 12^m \\ a + b = 16^m \end{cases} \Rightarrow 9^m + 12^m = 16^m.$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2m} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{m} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{m} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{(loại)} \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^{m} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(thỏa mãn).} \end{array}\right.$

Vậy ta có $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{m} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho $\log_{12} 18 = a$. Khi đó $\log_2 3$ bằng

A. $\dfrac{2a+1}{a-2}$. **B.** $\dfrac{a-2}{2a-1}$. **C.** $\dfrac{2a-1}{a-2}$. **D.** $\dfrac{2a-1}{2-a}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{12} 18 = a &\Rightarrow a = \frac{\ln 18}{\ln 12} = \frac{\ln 2\cdot 3^2}{\ln 2^2\cdot 3}\\ &\Rightarrow a = \frac{\ln 2 + 2\ln 3}{2\ln 2 + \ln 3} = \frac{1 + 2\cdot\dfrac{\ln 3}{\ln 2}}{2 + \dfrac{\ln 3}{\ln 2}} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}\\ &\Rightarrow a\left(2 + \log_2 3\right) = 1 + 2\log_2 3\\ &\Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a - 1}{2 - a}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, biết rằng

$$\log_2(\sin x) + \log_2(\cos x) = -2 \text{ và } \log_2(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log_2 n + 1).$$

Giá trị của n bằng bao nhiêu?

A. $n = \dfrac{1}{4}$. **B.** $n = \dfrac{5}{2}$. **C.** $n = \dfrac{1}{2}$. **D.** $n = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin x > 0$ và $\cos x > 0$, cho nên $\sin x + \cos x > 0$.

Lại có $\log_2 n$ xác định khi $n > 0$.

Ta có

$$\log_2(\sin x) + \log_2(\cos x) = -2 \Leftrightarrow \log_2(\sin x\cos x) = -2 \Leftrightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{4}.$$

Mặt khác

$$\log_2(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(\log_2 n + 1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2^{\frac{1}{2}(\log_2 n + 1)}.$$

Suy ra

$$1 + 2\sin x\cos x = 2^{\log_2 n + 1} \Leftrightarrow 1 + 2\cdot\frac{1}{4} = 2^{\log_2 n}\cdot 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2n \Leftrightarrow n = \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $n = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho các số thực a, b thoả mãn $1 < a < b$ và $\log_a b + \log_b a^2 = 3$. Tính giá trị biểu thức $T = \log_{ab}\dfrac{a^2 + b}{2}$.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\log_a b + \log_b a^2 = 3\\ \Leftrightarrow\ &\log_a b + 2\log_b a = 3\\ \Leftrightarrow\ &(\log_a b)^2 - 3\log_a b + 2 = 0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&\log_a b = 1\\ &\log_a b = 2\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&a = b\\ &b = a^2.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vì $1 < a < b$ nên ta chọn $b = a^2$. Khi đó

$$T = \log_{ab} \frac{a^2 + b}{2} = \log_{a^3} a^2 = \frac{2}{3} \log_a a = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P = 6$. **B.** $P = -6$. **C.** $P = -\frac{1}{6}$. **D.** $P = \frac{1}{6}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $0 < x \neq 1$.

Ta có $P = \dfrac{1}{\log_x \dfrac{a}{b^2}} = \dfrac{1}{\log_x a - 2\log_x b}$.

Mặt khác $\log_x a = \dfrac{1}{\log_a x} = \dfrac{1}{2}, \log_x b = \dfrac{1}{\log_b x} = \dfrac{1}{3}$.

Thế vào P ta được $P = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}} = -6$.

Vậy $P = -6$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$. Phương trình $f(x) = 5$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2|$.

A. $S = 0$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2 + x + C, f(1) = 5 \Rightarrow C = 3$.

Do đó $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2| = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương, $a \neq 1$, $c \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{3}{2}$; $\log_c d = \dfrac{5}{4}$ và $a - c = 9$. Khi đó $b - d$ bằng

A. 93. **B.** 9. **C.** 13. **D.** 21.

Lời giải.

Ta có $\log_a b = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{b^2}$; $\log_c d = \dfrac{5}{4} \Rightarrow c = \sqrt[5]{d^4}$.

Lại có $a - c = 9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[5]{d^4} = 9 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[5]{d^2}\right)\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[5]{d^2}\right) = 9$.

Vì a, b, c, d là các số nguyên dương nên $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{d^4}$ nguyên dương, do đó $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[5]{d}$ nguyên dương

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{b} - \sqrt[5]{d^2} = 1 \\ \sqrt[3]{b} + \sqrt[5]{d^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{b} = 5 \\ \sqrt[5]{d^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 125 \\ d = 32. \end{cases}$$

Do đó $b - d = 93$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Biết $\log_{12} 27 = a$. Tính $\log_6 16$ theo a.

A. $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. **B.** $\dfrac{4(3+a)}{3-a}$. **C.** $\dfrac{3-a}{4(3+a)}$. **D.** $\dfrac{3+a}{4(3-a)}$.

Lời giải.

Ta có

$$a=\log_{12}27=3\log_{12}3=\frac{3}{\log_3 12}=\frac{3}{1+2\log_3 2}\Rightarrow \log_3 2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{a}-1\right)=\frac{3-a}{2a}.$$

$$\Rightarrow\ \log_6 16=4\log_6 2=\frac{4}{\log_2 6}=\frac{4}{1+\log_2 3}=\frac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}}=\frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 9. **B.** 6. **C.** $\dfrac{27}{4}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải.

Do $a,\ b>0$ nên $\begin{cases}16a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{16a^2b^2}\\ 4a+5b+1>1\end{cases}\Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)\geqslant\log_{4a+5b+1}(8ab+1).$

Do đó $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)\geqslant\log_{4a+5b+1}(8ab+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)$

$\geqslant 2$ (áp dụng BĐT Cô-si).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2=b^2\,;a>0,b>0\\ 8ab+1=4a+5b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=b>0\\ 2b^2+1=6b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\ b=3.\end{cases}$

Vậy $a+2b=\dfrac{27}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho các số dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $a=b^c$, $b=c^a$, $c=a^b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $abc=1$. **B.** $abc=a+b+c$. **C.** $abc=\dfrac{a+b+c}{3}$. **D.** $abc=\dfrac{3}{a+b+c}$.

Lời giải.

Logarit hóa cả hai vế của các đẳng thức đã cho ta có

$$\begin{cases}\ln a=c\ln b\\ \ln b=a\ln c\\ \ln c=b\ln a\end{cases}\Rightarrow \ln a\cdot\ln b\cdot\ln c\cdot=abc\cdot\ln a\cdot\ln b\cdot\ln c.$$

Do $a,b,c\neq 1$ nên $\ln a,\ln b,\ln c\neq 0$. Suy ra $abc=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+mx^5+2$ với $m\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log\mathrm{e}))=6$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

A. $f(\log(\ln 10))=-2$. **B.** $f(\log(\ln 10))=8$. **C.** $f(\log(\ln 10))=-6$. **D.** $f(\log(\ln 10))=4$.

Lời giải.

☑ Ta có $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-mx^5+2=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)-mx^5+2$

$=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-mx^5+2.$

☑ $\forall x$, ta có $f(x)+f(-x)=4$. Mà $\log(\ln 10)=\log\left(\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}\right)=-\log(\log \mathrm{e})$.

☑ Do đó $f(\log(\log \mathrm{e}))+f(\log(\ln 10))=4 \Rightarrow f(\log(\ln 10))=4-6=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho a là số thực dương và khác 1. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\log_{\frac{1}{a^3}} a=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a^{\log_{\sqrt{a}} 3}=9$. **C.** $\log_a \dfrac{1}{a^3}=-3$. **D.** $\log_{a^3} \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

☑ A Đúng. Vì $\log_{\frac{1}{a^2}}=\log_{a^{-2}} a=-\dfrac{1}{2}$.

☑ B Đúng. Vì $a^{\log_{\sqrt{a}} 3}=a^{\log_{a^{\frac{1}{2}}} 3}=a^{2log_a 3}=\left(a^{\log_a 3}\right)^2=9$.

☑ C Đúng. Vì $\log_a \dfrac{1}{a^3}=\log_a a^{-3}=-3$.

☑ D Sai. Vì $\log_{a^3} \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}\log_a a=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Biết $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$. Tính $\log_2 x$.

A. $\sqrt{26}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt[3]{9}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(\frac{1}{3}\log_2 x\right)=\frac{1}{3}\log_2(\log_2 x)\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\frac{1}{3}+\log_2(\log_2 x)=\frac{1}{3}\log_2(\log_2 x)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2}{3}\log_2(\log_2 x)=-\log_2\frac{1}{3}=\log_2 3\\
\Leftrightarrow\ &\log_2(\log_2 x)=\log_2\left(3^{\frac{3}{2}}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\log_2 x=3\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=4^x 9^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f(x)<1 \Leftrightarrow x(\log 4+\log 9^x)<0$. **B.** $f(x)<1 \Leftrightarrow \log 4+\log 9^x<0$.

C. $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_4 9<0$. **D.** $f(x)>1 \Leftrightarrow x+x^2\log_4 9>0$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<1 \Leftrightarrow \log_4 f(x)<\log_4 1 \Leftrightarrow x+x^2\log_4 9<0 \Leftrightarrow x(\log 4+\log 9^x)<0$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6-\ln u_8=\ln u_4-1$ và $u_{n+1}=u_n\cdot \mathrm{e}$ với mọi $n\geq 1$. Tìm u_1.

A. e^{-4}. **B.** e^{-3}. **C.** e^2. **D.** e.

Lời giải.

Vì $u_{n+1}=u_n\cdot \mathrm{e}$ nên dãy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=\mathrm{e}$.

Theo đề ta có $\ln^2 u_6-(\ln u_8+\ln u_4)+1=0 \Leftrightarrow \ln^2 u_6-\ln(u_8\cdot u_4)+1=0$.

Mặt khác, ta có $u_8\cdot u_4=u_1\cdot q^7\cdot u_1\cdot q^3=u_1^2\cdot q^{10}=(u_1\cdot q^5)^2=u_6^2$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\ln^2 u_6 - \ln u_6^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln^2 u_6 - 2\ln u_6 + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln u_6 = 1 \Leftrightarrow u_6 = \mathrm{e} \Leftrightarrow u_1 \cdot \mathrm{e}^5 = \mathrm{e} \Leftrightarrow u_1 = \mathrm{e}^{-4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \dfrac{x+y}{6}$. Tính $P = \dfrac{x}{y}$.

A. $P = \dfrac{2}{3}$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \dfrac{x+y}{6} = t$. Từ đó ta có

$$\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ \dfrac{x+y}{6} = 4^t \end{cases} \Rightarrow \frac{x(x+y)}{6} = y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{x}{y} = 2 & \text{(Thỏa mãn)} \\ \dfrac{x}{y} = -3 & \text{(Loại).} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho x và y là các số thực lớn hơn 1 và thỏa mãn $x^2 = xy + 6y^2$. Tính giá trị của $P = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)} + 1$.

A. $P = 3$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

Với điều kiện x, y là các số thực lớn hơn 1 ta có

$$\begin{aligned} x^2 = xy + 6y^2 &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-3y) + 2y(x-3y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3y)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = 3y. \end{aligned}$$

Khi đó

$$P = \frac{1 + \log_{12} 3y + \log_{12} y}{2\log_{12} 6y} + 1 = \frac{\log_{12} 12 + \log_{12} 3y + \log_{12} y}{\log_{12}(6y)^2} + 1 = \frac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} + 1 = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Biết $\log_a x = \log_b y = N$, với a, b, x, y là các số thực dương và a, b khác 1. Khi đó N bằng

A. $\log_{ab} \dfrac{x}{y}$. **B.** $\log_{a+b}(xy)$. **C.** $\log_{ab}(xy)$. **D.** $\log_{a+b} \dfrac{x}{y}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \log_a x = N \\ \log_b y = N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^N \\ y = b^N \end{cases}$. Suy ra $xy = a^N \cdot b^N = (ab)^N \Leftrightarrow N = \log_{ab}(xy)$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho $a, b > 0$ và $2\log_2 b - 3\log_2 a = 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2b - 3a = 2$. **B.** $b^2 = 4a^3$. **C.** $2b - 3a = 4$. **D.** $b^2 - a^3 = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\log_2 \left(\dfrac{b^2}{a^3}\right) = 2 \Leftrightarrow b^2 = 4a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho $\log_3\left(\sqrt{a^2+9}+a\right)=2$. Giá trị biểu thức $\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{a^2+9}+a\right)\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)=9$.
Từ giả thiết ta có $\sqrt{a^2+9}+a=9\Leftrightarrow\sqrt{a^2+9}-a=1$. Ta có

$$\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right)=\log_3\left(a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}+a^2\right)$$

$$=\log_3\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)^2=\log_3 1=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho $\log_7 12=x$; $\log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$ (trong đó a, b, c là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{12}24\log_{24}54=\log_{12}54=\log_{12}\frac{12^8}{24^5}=8-5\log_{12}24\Rightarrow\log_{24}54=\frac{8-5y}{y}\Rightarrow\log_{54}24=\frac{y}{8-5y}.$$

và

$$\log_7 54=\log_7 12\log_{12}54=x(8-5y)\Rightarrow\log_{54}7=\frac{1}{x(8-5y)}.$$

Từ đó ta có

$$\log_{54}168=\log_{54}7+\log_{54}24=\frac{xy+1}{-5xy+8x}$$

suy ra $a=1,b=-5,c=8\Rightarrow S=1+2(-5)+3\cdot 8=15$.
Chọn đáp án D □

Câu 38. Xét các số thực a,b thỏa mãn $a\geq b>1$. Biết rằng $P=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $k\in(-1;0)$. **C.** $k\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $k\in(2;3)$.

Lời giải.

Ta có $P=1+\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}$. Đặt $t=\sqrt{1-\log_a b}\Rightarrow t\in(0;1]$ và $P=f(t)=-t^2+t+2$.
Do tam thức $-t^2+t+2$ có hoành độ đỉnh $t=\dfrac{1}{2}\in(0;1]$ nên $\max\limits_{(0;1]}f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Khi đó $\log_a b=\dfrac{3}{4}\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hai số thực $a,b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{1}{\log_{(ab)}a}+\dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}}b}$.

A. $\min S=\dfrac{4}{9}$. **B.** $\min S=\dfrac{9}{4}$. **C.** $\min S=\dfrac{9}{2}$. **D.** $\min S=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$S=\log_a(ab)+\dfrac{1}{4}\log_b(ab)=1+\log_a b+\dfrac{1}{4}(1+\log_b a)=\log_a b+\dfrac{1}{4\log_a b}+\dfrac{5}{4}$

Vì $a>1, b>1$ nên $\log_a b>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có

$S\geq 2\sqrt{\log_a b.\dfrac{1}{4\log_a b}}+\dfrac{5}{4}=1+\dfrac{5}{4}=\dfrac{9}{4}$

Dấu " = " xảy ra khi $\log_a b=\dfrac{1}{4\log_a b}\Leftrightarrow(\log_a b)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=-\dfrac{1}{2}(l)\\ \log_a b=\dfrac{1}{2}(TM)\end{array}\right.$

Với $\log_a b=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b=a^{\frac{1}{2}}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $3a-4>b>0$ và biểu thức $P=\log_a\left(\dfrac{a^3}{4b}\right)+\dfrac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{4+b}}a\right)^2$ có giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=3a+b$.

A. 8. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{25}{2}$. **D.** 14.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\leq 2017\\ x^2-(m+2)x+2m+3\geq 0\end{cases}$$

A. $m\geq -3$. **B.** $m>-3$. **C.** $m\geq -2$. **D.** $m\leq -2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\geq -1$.

Xét $-1\leq x\leq 1$ ta có:$2017x\leq 2017$ (1).

Và $2x\leq 2\Leftrightarrow 3^{2x}\leq 3^2\Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3^{\sqrt{x+1}}\leq 3^2\cdot 3^{\sqrt{x+1}}$

$\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}}\leq 3^{2+\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}\leq 0$ (2).

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\leq 2017$

Do đó bất phương trình $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\leq 2017$ (I) thỏa mãn $-1\leq x\leq 1$.

Xét $x>1$ tương tự ta có: $2017x>2017$ (3).

và $2x>2\Leftrightarrow 3^{2x}>3^2\Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3^{\sqrt{x+1}}>3^2\cdot 3^{\sqrt{x+1}}$

$\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}}>3^{2+\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}>0$ (4).

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta có: $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x>2017$ do đó bất phương trình (I) không thỏa mãn $x>1$.

Vậy bất phương trình (I) có nghiệm là: $-1\leq x\leq 1$.

Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm thì bất phương trình $x^2-(m+2)x+2m+3\geq 0$ (II) phải có nghiệm thỏa mãn $-1\leq x\leq 1$.

Khi đó: $x^2-(m+2)x+2m+3\geq 0(II)\Leftrightarrow x^2-2x+3\geq m(x-2)\Leftrightarrow m\geq\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ với $-1\leq x\leq 1$.

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{3}\in[-1;1]\\ x=2+\sqrt{3}\notin[-1;1]\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	-1		$2-\sqrt{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	$2-2\sqrt{3}$	↘	-2

Dựa vào bảng biến thiên, hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho $0 \leq x; y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{136}{3}$. **B.** $\dfrac{391}{16}$. **C.** $\dfrac{383}{16}$. **D.** $\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.

Biến đổi giả thiết $\dfrac{2017^{1-y}}{2017^x} = \dfrac{x^2+2018}{(1-y)^2+2018}$. Xét $f(t) = 2017^t(t^2+2018)$ với $0 \leq t \leq 1$. Ta thu được $x+y=1$. Xét $S = 16(xy)^2 - 2(xy) + 2$ với $0 \leq xy \leq \dfrac{1}{4}$. Lập bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{25}{2}$, giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{191}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho biểu thức $A = \log(2017 + \log(2016 + \log(2015 + \log(\cdots + \log(3 + \log 2)\cdots))))$. Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017; \log 2018)$. **B.** $(\log 2019; \log 2020)$. **C.** $(\log 2018; \log 2019)$. **D.** $(\log 2020; \log 2021)$.

Lời giải.

Đặt $A_n = \log(n + \log(n-1 + \log(n-2 + \log(\cdots + \log(3 + \log 2)\cdots))))$, khi đó $A_n = \log(n + A_{n-1})$.

Ta nhận thấy $0 < \log 2 = A_2 < 1$, từ đó suy ra

$0 < \log 3 < A_3 = \log(3 + A_2) < \log 4 < A_4 < \cdots < \log 9 < A_9 = \log(9 + A_9) < \log 10 = 1$.

Tương tự ta có

$1 = \log 10 < A_{10} = \log(10 + A_9) < \cdots < \log 99 < A_{98} = \log(98 + A_{97}) < \log 100 = 2$.

$2 = \log 100 < A_{100} = \log(100 + A_{99}) < \cdots < \log 999 < A_{997} = \log(997 + A_{996}) < \log 1000 = 3$.

Với mọi k nguyên dương, $1000 < k < 10.000$ ta có $3 < \log k < 4$.

Từ đó suy ra $3 < \log 2020 < A_{2017} = \log(2017 + A_{2016}) < \log 2021$.

Vậy $A \in (\log 2020; \log 2021)$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

C. $\log(a+b) = \dfrac{1}{2} + \log a + \log b$. **D.** $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$.

Lời giải.

Với $a, b > 0$ ta có

$$a^2+b^2=8ab \Leftrightarrow (a+b)^2=10ab \Leftrightarrow \log(a+b)^2=\log(10ab)$$
$$\Leftrightarrow 2\log(a+b)=\log(10)+\log a+\log b$$
$$\Leftrightarrow \log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b).$$

Vậy với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề đúng là "$\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$".

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $u_n=\dfrac{f(1)\cdot f(3)\ldots f(2n-1)}{f(2)\cdot f(4)\ldots f(2n)}$. Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n+u_n<-\dfrac{10239}{1024}$.

A. $n=23$. **B.** $n=29$. **C.** $n=21$. **D.** $n=33$.

Lời giải.

Xét $g(n)=\dfrac{f(2n-1)}{f(2n)}=\dfrac{(4n^2-2n+1)^2+1}{(4n^2+2n+1)^2+1}$.

Đặt $\begin{cases}a=4n^2+1\\ b=2n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\pm 2b=(2n\pm 1)^2\\ a=b^2+1\end{cases}$

$$\Rightarrow g(n)=\frac{(a-b)^2+1}{(a+b)^2+1}=\frac{a^2-2ab+b^2+1}{a^2+2ab+b^2+1}=\frac{a^2-2ab+a}{a^2+2ab+a}=\frac{a-2b+1}{a+2b+1}=\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}.$$

$$\Rightarrow u_n=\prod_{i=1}^{n}g(i)=\frac{2}{10}\cdot\frac{10}{26}\cdot\frac{26}{50}\cdots\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}=\frac{2}{(2n+1)^2+1}=\frac{1}{2n^2+2n+1}.$$

Do đó, ta có $\log_2 u_n+u_n<-\dfrac{10239}{1024}\Leftrightarrow\log_2\dfrac{1}{2n^2+2n+1}+\dfrac{1}{2n^2+2n+1}<-\dfrac{10239}{1024}$.

Thử từng đáp án, ta được kết quả.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+3y)$. Tính giá trị $\dfrac{x}{y}$.

A. $\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+3y)=t$. Suy ra: $x=9^t, y=12^t, x+3y=16^t$. Khi đó ta có $x(x+3y)=y^2$. Chia hai vế cho y^2 ta được phương trình $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+3\dfrac{x}{y}-1=0$. Giải ra ta được $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y+1=2\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=3^{x+y-4}+(x+y+1)\cdot 2^{7-x-y}-3\cdot(x^2+y^2)$ bằng

A. $-\dfrac{9476}{243}$. **B.** -76. **C.** $\dfrac{193}{3}$. **D.** $\dfrac{148}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\geq 2\\ y\geq -3.\end{cases}$

Ta có

$$x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad (x+y+1)^2=4\cdot\left(x+y+1+2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3}\right). \tag{2.1}$$

Ta thấy $2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3}\le x+y+1$ nên từ (1) ta được

$$\begin{aligned}&(x+y+1)^2\le 8\cdot(x+y+1)\\ \Rightarrow\ &x+y+1\le 8\\ \Rightarrow\ &x+y\le 7.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ta thấy $2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3}\ge 0$ nên từ (1) ta được

$$\begin{aligned}&(x+y+1)^2\ge 4\cdot(x+y+1)\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x+y+1\le 0\\ &x+y+1\ge 4\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x+y+1=0\ (\text{vì } x+y+1\ge 0)\\ &x+y+1\ge 4\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x+y=-1\\ &x+y\ge 3.\end{aligned}\right.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Ta thấy $\begin{cases}x^2\ge 2x\ (\text{do } x\ge 2)\\ y^2+1\ge 2y\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+1\ge 2(x+y)$. Khi đó, ta được

$$M\le 3^{x+y-4}+(x+y+1)\cdot 2^{7-x-y}-6\cdot(x+y)+3.$$

Đặt $t=x+y$, từ (2) và (3) ta được $t=-1$ hoặc $3\le t\le 7$.
Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)\cdot 2^{7-t}-6\cdot t+3$.
Ta có $f(-1)=\dfrac{2188}{243}$.
Ta có $f'(t)=3^{t-1}\cdot\ln 3+2^{7-t}-(t+1)\cdot 2^{7-t}\cdot\ln 2-6$.
Ta có $f''(t)=3^{t-4}\cdot\ln^2 3+[(t+1)\cdot\ln 2-2]\cdot 2^{7-t}\cdot\ln 2>0,\forall\, t\in[3;7]$.
Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$.
Ta thấy $f'(t)$ liên tục trên $(3;7)$ và $f'(3)\cdot f'(7)<0$ do vậy có duy nhất $t_0\in(3;7)$: $f'(t_0)=0$.
Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

t	3		t_0		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{148}{3}$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	-4

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $M=f(3)=\dfrac{148}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho các số hạng dương a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức

$$P=(b-c)\log_3 a+2(c-a)\log_9 b+3(a-b)\log_{27} c.$$

A. $P=3$. **B.** $P=1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Ta có

☑ a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của cấp số cộng nên $\begin{cases} a=u_1+(m-1)d \\ b=u_1+(n-1)d \\ c=u_1+(p-1)d \end{cases}$ trong đó u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.

☑ a, b, c lần lượt là số hạng thứ m, n, p của cấp số nhân nên $\begin{cases} a=u_1'\cdot q^{m-1} \\ b=u_1'\cdot q^{n-1} \\ c=u_1'\cdot q^{p-1} \end{cases}$ trong đó u_1', q lần lượt là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

Do đó,

$$\begin{aligned} P&=(b-c)\log_3 a+2(c-a)\log_9 b+3(a-b)\log_{27} c \\ &=(n-p)d\log_3\left(u_1'\cdot q^{m-1}\right)+(p-m)d\log_3\left(u_1'\cdot q^{n-1}\right)+(m-n)d\log_3\left(u_1'\cdot q^{p-1}\right) \\ &=(n-p)(m-1)d\log_3 q+(p-m)(n-1)d\log_3 q+(m-n)(p-1)d\log_3 q \\ &=[mn-n-mp+p+np-p-mn+m+mp-m-np+n]\,d\log_3 q=0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho x, y là các số thực dương thỏa $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

A. $\dfrac{x}{y}=4$. **B.** $\dfrac{x}{y}=3$. **C.** $\dfrac{x}{y}=5$. **D.** $\dfrac{x}{y}=2$.

Lời giải.

Ta có $\log_9 x=\log_6 y\Leftrightarrow y=6^{\log_9 x}=(2.3)^{\frac{1}{2}\log_3 x}=2^{\frac{1}{2}\log_3 x}.3^{\frac{1}{2}\log_3 x}=\left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Khi đó $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\left(x.2^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ (1)

Ta có $\log_9 x=\log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)\Rightarrow\dfrac{x+y}{6}=4^{\log_9 x}=2^{\log_3 x}\Rightarrow y=6.2^{\log_3 x}-x$.

Khi đó $\dfrac{y}{x}=\dfrac{6.2^{\log_3 x}-x}{x}=6\cdot\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}-1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $6\cdot\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}-1=\left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\left(\dfrac{2^{\log_3 x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x}{y}=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Xét các số thực dương x, y thỏa $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P=x+y$.

A. $P_{min}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{3}$. **B.** $P_{min}=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{3}$. **C.** $P_{min}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{min}=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải.

Từ giả thiết: $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$

$\Leftrightarrow\log_3(1-y)+1+3(1-y)=\log_3(x+3xy)+3xy+x$

$\Leftrightarrow\log_3[3(1-y)]+3(1-y)=\log_3(x+3xy)+(3xy+x)$ (∗).

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác do $x, y > 0$ nên $x + 3xy > 0 \Rightarrow 1 - y > 0 \Rightarrow 3(1-y); 3xy + x \in (0; +\infty)$. Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 3(1-y) = x + 3xy \Leftrightarrow y = \dfrac{-x+3}{3x+3}$ thế vào P ta được:

$$P = x + \frac{-x+3}{3x+3} \text{ với } x > 0 \Rightarrow P' = 1 - \frac{12}{(3x+3)^2}; P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{12}-3}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{-\sqrt{12}-3}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta được $\min P = P\left(\dfrac{\sqrt{12}-3}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$1^2 \log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + \ldots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1010^2 \cdot 2019^2 \log_a 2019$.

A. 2019. **B**. 2018. **C**. 2017. **D**. 2016.

Lời giải.

$VT = 1^2 \log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + \ldots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019$.

$VT = 1^3 \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + \ldots + n^3 \log_a 2019$.

$VT = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) \log_a 2019$.

$VP = 1010^2 \cdot 2019^2 \cdot \log_a 2019$.

$VT = VP \Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) \log_a 2019 = 1010^2 \cdot 2019^2 \cdot \log_a 2019$

$\Leftrightarrow \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 1010^2.2019^2 \Leftrightarrow (n^2+n) = (2020 \cdot 2019)^2$

$\Leftrightarrow n^2 + n = 2020 \cdot 2019 \Leftrightarrow n = 2019$ vì $n > 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230. **B**. 231. **C**. 233. **D**. 234.

Lời giải.

Theo giả thiết $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với mọi $b \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Ta lại có $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4_1^u} = \dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ (1).

Dễ thấy $2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4^{u_1}} \geq 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} = \dfrac{8}{\log_3\left[\left(\frac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \leq 8$ nên (1) tương đương

với $2 \cdot 4^{u_1} + \dfrac{8}{4^{u_1}} = 8$ và $\dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} = 8$ hay $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \dfrac{1-2^n}{1-2} = \dfrac{2^n - 1}{2}$.

Do đó, $S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \dfrac{2^n-1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow \log_5 \dfrac{2^n-1}{2} > 100 \Leftrightarrow n > 233$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=6$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=8$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = t$.

Theo đề ra ta có $\begin{cases} \log_9 x = \log_6 y = t \\ \log_9 x = \log_4(x+y) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t & (2.4) \\ y' = 6^t & (2.5) \\ x+y = 4^t & (2.6) \\ \dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t & (2.7) \end{cases}$

Từ (2.4), (2.5) và (2.6) ta có $9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow (3^t)^2 + (3\cdot 2)^t - 4^t = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Thế vào (2.7) ta được $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow a=1; b=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho n là một số nguyên dương và $0 < a \neq 1$, tìm n sao cho
$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019$.

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2016.

Lời giải.

Dễ dàng chứng bằng quy nạp rằng $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Suy ra

$$\begin{aligned} & \log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\ \Leftrightarrow\ & (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \log_a 2019 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1008^2 \cdot 2017^2 \\ \Leftrightarrow\ & n = 2016. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geqslant 0$, $b_2 > b_1 \geqslant 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương $n (n > 1)$ nhỏ nhất sao cho $b_n > 2018 a_n$.

A. $n = 20$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 14$. **D.** $n = 16$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3-3x$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

+ Với $0\le a_1<a_2$

Từ giả thiết $f(a_2)-f(a_1)=-2<0\Rightarrow f(x)$ giảm trên $(a_1;a_2)\Rightarrow 0\le a_1<a_2\le 1$.

Khi đó: $\begin{cases} f(a_1)\leqslant f(0)=0 \\ f(a_2)\geqslant f(1)=-2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f(a_1)\le 0 \\ f(a_2)+2\ge 0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f(a_1)\le 0 \\ f(a_1)\ge 0 \end{cases}\Rightarrow f(a_1)=0\Rightarrow a_1=0.$

Và $f(a_2)+2=0\Rightarrow f(a_2)=-2\Rightarrow a_2=1$.

Vậy cấp số cộng (a_n) có $\begin{cases} a_1=0 \\ d=1. \end{cases}$

+ Với $1\le b_1<b_2$

Từ giả thiết: $f(\log_2 b_2)-f(\log_2 b_1)=-2<0\Rightarrow f(x)$ giảm trên $(\log_2 b_1;\log_2 b_2)$

$\Rightarrow 0\leqslant \log_2 b_1<\log_2 b_2\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant b_1<b_2\leqslant 2$.

Khi đó: $\begin{cases} f(\log_2 b_1)\leqslant f(0)=0 \\ f(\log_2 b_2)\geqslant f(1)=-2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f(\log_2 b_1)\leqslant 0 \\ f(\log_2 b_2)+2\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f(\log_2 b_1)\leqslant 0 \\ f(\log_2 b_1)\geqslant 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(\log_2 b_1)=0\Rightarrow \log_2 b_1=0\Rightarrow b_1=1$.

Và $f(\log_2 b_2)+2=0\Rightarrow f(\log_2 b_2)=-2\Rightarrow \log_2 b_2=1\Rightarrow b_2=2$.

Vậy cấp số nhân (b_n) có $\begin{cases} b_1=1 \\ q=2. \end{cases}$

+ Khi đó: $b_n>2018a_n\Leftrightarrow 1\cdot 2^{n-1}>2018\,(0+(n-1))\Leftrightarrow 2^{n-1}>2018\,(n-1)$.

Dùng chức năng Calc của máy tính ta chọn được $n=16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2=5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2=7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

A. $P=56$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=64$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\log_8|x|+\log_4 y^2=5 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2|x|+\frac{1}{2}\log_2 y^2=5\\ &\Leftrightarrow \log_2\sqrt[3]{|x|}+\log_2|y|=5\\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|}\cdot|y|=2^5\\ &\Leftrightarrow |x|\cdot|y|^3=\left(2^5\right)^3=2^{15}\quad(1).\end{aligned}$$

Tương tự $\log_8|y|+\log_4 x^2=7\Leftrightarrow |y|\cdot|x|^3=2^{21}\quad(2)$.

Lấy (1) nhân (2) được $x^4\cdot y^4=2^{36}\Leftrightarrow x^2\cdot y^2=2^{18}\quad(3)$.

Lấy (1) chia (2) được $\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{2^6}\Leftrightarrow x^2=2^6\cdot y^2\quad(4)$.

Thay (4) vào (3) được $2^6 \cdot y^4 = 2^{18} \Leftrightarrow y^4 = 2^{12} = (2^3)^4 \Leftrightarrow |y| = 2^3 = 8$.
Thay $|y| = 8$ vào (4) được $x^2 = 2^6 \cdot 64 = (2^6)^2 \Leftrightarrow |x| = 2^6 = 64$. Do đó $P = |x| - |y| = 56$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \dfrac{1}{3}$, $b > 1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A. $9 + 2^{\sqrt{3}}$. **B.** $3 + 9^{\sqrt{2}}$. **C.** $3 + 3\sqrt{2}$. **D.** $2 + 9\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $3a > 1$, $b > 1$ nên $\log_{3a} b > 0$, $\log_b 3a > 0$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta được
$\log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81) \geq \log_{3a} b + \log_b (18a^2 - 9a^2) = \log_{3a} b + 2\log_b 3a \geq 2\sqrt{2}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3a > 1,\ b > 1 \\ a^4 = 81 \\ \log_{3a} b = 2\log_b 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}}. \end{cases}$
Khi đó ta được $a + b = 3 + 9^{\sqrt{2}}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Biết $\log_2 \left(\sum\limits_{k=1}^{100} \left(k \times 2^k\right) - 2 \right) = a + \log_c b$ với a,b,c là các số nguyên và $a > b > c > 1$. Tổng $a + b + c$ là

A. 203. **B.** 202. **C.** 201. **D.** 200.

Lời giải.

Đặt $S = \sum\limits_{k=1}^{100} \left(k \times 2^k\right)$. Suy ra

$$\begin{aligned} S &= 2S - S \\ &= \left(1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + 100 \cdot 2^{101}\right) - \left(1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 100 \cdot 2^{100}\right) \\ &= 100 \cdot 2^{101} - 2 - 2^3 - 2^4 - \cdots - 2^{100} \\ &= 100 \cdot 2^{101} - 2 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} \\ &= 99 \cdot 2^{101} + 2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\log_2 \left(\sum_{k=1}^{100} \left(k \times 2^k\right) - 2 \right) = \log_2 (99 \cdot 2^{101}) = 101 + \log_2 99.$$

Vậy $a = 101$, $b = 99$, $c = 2$ và $a + b + c = 202$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho a, b, c là ba số thực dương, $a > 1$ và thỏa mãn $\log_a^2(bc) + \log_a \left(b^3c^3 + \dfrac{bc}{4}\right)^2 + 4 + \sqrt{4 - c^2} = 0$. Số bộ $(a; b; c)$ thỏa mãn điều kiện đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $4-c^2\geq 0\Leftrightarrow -2\leq c\leq 2$, kết hợp giả thiết ta có $0<c\leq 2$.
Do $a>1$ nên ta có

$$\begin{aligned}\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2} &\geq \log_a^2(bc)+\log_a\left(2\sqrt{b^3c^3\cdot\frac{bc}{4}}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}\\ &=\log_a^2(bc)+4\log_a(bc)+4+\sqrt{4-c^2}\\ &=(\log_a(bc)+2)^2+\sqrt{4-c^2}\geq 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a(bc)+2=0\\ \sqrt{4-c^2}=0\\ b^3c^3=\dfrac{bc}{4}\\ a>1\\ b>0\\ 0<c\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc=\dfrac{1}{a^2}\\ c=2\\ bc=\dfrac{1}{2}\\ a>1\\ b>0\\ 0<c\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=\dfrac{1}{4}\\ c=2.\end{cases}$

Vậy có duy nhất một bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Cho các số thực $a,b>1$ thỏa mãn $a^{\log_b a}+16b^{\log_a\left(\frac{b^8}{a^3}\right)}=12b^2$. Giá trị của biểu thức $P=a^3+b^3$ là

A. $P=20$. **B.** $P=125$. **C.** $P=72$. **D.** $P=39$.

Lời giải.

Đặt $c=\log_b a$ thì $a=b^c$, thay vào hệ thức đã cho thu được $b^{c^2}+16b^{\frac{8}{c}-3}=12b^2$. Ta có

$$S=b^{c^2}+16b^{\frac{8}{c}-3}=b^{c^2}+8b^{\frac{8}{c}-3}+8b^{\frac{8}{c}-3}\geq 3\sqrt[3]{64b^{c^2+\frac{16}{c}-6}}=12\sqrt[3]{b^{c^2+\frac{16}{c}-6}}.$$

Lại có $c^2+\dfrac{16}{c}-6=c^2+\dfrac{8}{c}+\dfrac{8}{c}-6\geq 3\sqrt[3]{c^2\cdot\dfrac{8}{c}\cdot\dfrac{8}{c}}-6=6\Rightarrow S\geq 12\sqrt[3]{b^6}=12b^2$.
Để hệ thức đã cho xảy ra thì các dấu "=" trong các đánh giá trên xảy ra, tức là $c=2$, $b=2$ và do đó $a=4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0<a<1$, $\dfrac{1}{8}<b<1$, $\dfrac{3}{8}<c<1$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3}{16}\log_a\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{16}\right)+\dfrac{1}{4}\log_b\left(\dfrac{c}{2}-\dfrac{3}{16}\right)+\dfrac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3}\leq M<2$. **B.** $M\geq 2$. **C.** $\sqrt{2}\leq M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

☑ $\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{8b-1}{16}=\dfrac{8b-1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\leq\left(\dfrac{\frac{8b-1}{4}+\frac{1}{4}}{2}\right)^2=b^2$. Đẳng thức xảy ra khi $b=\dfrac{1}{4}$.

☑ $\dfrac{c}{2}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{8c-3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\leq\left(\dfrac{\frac{8c-3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4}\right)^4=c^4$. Đẳng thức xảy ra khi $c=\dfrac{1}{2}$.

Do đó,

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{3}{16}\log_a b^2 + \frac{1}{4}\log_b c^4 + \frac{1}{3}\log_c a \\ &\geq \frac{3}{8}\log_a b + \log_b c + \frac{1}{3}\log_c a \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{8}\log_a b \cdot \log_b c \cdot \frac{1}{3}\log_c a} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$, $c = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\sqrt{2} \leq M = \dfrac{3}{2} < \sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho $f(x) = \log_2 \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$. Giá trị của biểu thức $f(f(1)) + f(f(2)) + \cdots + f(f(40))$ bằng

A. 410. **B.** 820. **C.** 40. **D.** 1640.

Lời giải.

Với $x > 0$ ta có

$$f(f(x)) = \log_2 \frac{2^{\log_2 \frac{2^x+1}{2^x-1}} + 1}{2^{\log_2 \frac{2^x+1}{2^x-1}} - 1} = \log_2 \frac{\frac{2\cdot 2^x}{2^x-1}}{\frac{2}{2^x-1}} = \log_2 \frac{2 \cdot 2^x}{2} = x.$$

Do đó $f(f(1)) + f(f(2)) + \cdots + f(f(40)) = 1 + 2 + \cdots + 40 = 820$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho hàm số $f(x) = -\ln(x^2 + x)$. Tính $P = \mathrm{e}^{f(1)} + \mathrm{e}^{f(2)} + \cdots + \mathrm{e}^{f(2019)}$.

A. $P = \dfrac{2020}{2019}$. **B.** $P = \dfrac{2019}{2020}$. **C.** $P = \mathrm{e}^{2019}$. **D.** $P = -\dfrac{2019}{2020}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = -\ln(x^2 + x) \Rightarrow \mathrm{e}^{-f(x)} = x^2 + x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{e}^{f(1)} + \mathrm{e}^{f(2)} + \cdots + \mathrm{e}^{f(2019)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$, $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$.

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $[0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$, suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $a_2 > 0$ nên $f(a_2) \geq -2$. Suy ra $f(a_1) = f(a_2) + 2 \geq 0$. (1)
Giả sử $a_1 \geq 1$. Vì $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên $f(a_2) > f(a_1)$, suy ra $f(a_1) - 2 > f(a_1)$, vô lý. Vậy $a_1 \in [0; 1]$, do đó $f(a_1) \leq 0$. (2)
Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} f(a_1) = 0 \\ f(a_2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng (a_n) là $a_n = n - 1$.
Một cách tương tự, đặt $t_1 = \log_2 b_1$ và $t_2 = \log_2 b_2$. Từ giả thiết suy ra $f(t_2) + 2 = f(t_1)$. Vì $1 \leq b_1 < b_2$ nên $0 \leq t_1 < t_2$. Lập luận như trên ta có

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân (b_n) là $b_n = 2^{n-1}$. Do đó

$$b_n > 2019 a_n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2019(n-1). \quad (3)$$

Suy ra số nguyên dương nhỏ nhất thỏa (3) là $n = 16$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \dfrac{axy + 1}{bxy + cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 19$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 15$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \log_7 12 = x \\ \log_{12} 24 = y \end{cases} \Rightarrow xy = \log_7 12 \cdot \log_{12} 24 = \log_7 24.$$

Ta có

$$\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 (24 \cdot 7)}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + \log_7 7}{\log_7 54} = \frac{xy + 1}{\log_7 54} \Rightarrow a = 1.$$

Lại có

$$\begin{aligned} bxy + cx = \log_7 54 &\Leftrightarrow b\log_7 24 + c\log_7 12 = \log_7 54 \\ &\Leftrightarrow \log_7(24^b \cdot 12^c) = \log_7 54 \\ &\Leftrightarrow 24^b \cdot 12^c = 54 \\ &\Leftrightarrow 3^{b+c} \cdot 2^{3b+2c} = 3^3 \cdot 2^1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ 3b + 2c = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra, $P = a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 8 = 15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho a, b, c là ba số thực dương, khác 1 và $abc \neq 1$. Biết $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \dfrac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15}$. Khi đó, giá trị của $\log_c 3$ bằng bao nhiêu?

A. $\log_c 3 = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\log_c 3 = 2$. **C.** $\log_c 3 = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\log_c 3 = 3$.

Lời giải.

$\log_{abc} 3 = \dfrac{2}{15} \Leftrightarrow \log_3 abc = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + 4 + \log_3 c = \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 c = 3$.

Do đó $\log_c 3 = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho 3 số thực dương a, b, c $(a, b, c \neq 1)$ và không cùng bằng nhau thỏa mãn $a^{\log_b c} = b^{\log_c a} = c^{\log_a b}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $a + b + c$.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2\sqrt{2}$. **C.** $m = 3\sqrt[3]{3}$. **D.** $m = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

☑ Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \neq c$.
Khi đó từ $a^{\log_b c} = b^{\log_c a} = c^{\log_a b}$, lấy log cơ số a, ta có

$$\begin{aligned} &\log_b c = \log_c a \cdot \log_a b = \log_a c \cdot \log_a b \\ \Rightarrow\ &\log_b c = \log_c b = \log_a c \cdot \log_a b. \end{aligned}$$

Từ $\log_b c = \log_c b \Rightarrow \log_b c = \dfrac{1}{\log_b c} \Rightarrow \log_b c = -1$ (vì $b \neq c$) $\Rightarrow b = \dfrac{1}{c}$.
Khi đó $\log_a c \cdot \log_a b = -1 \Rightarrow (\log_a b)^2 = 1$ và $(\log_a c)^2 = 1$.

☑ Không mất tính tổng quát giả sử $\log_a b = 1$ và $\log_a c = -1$. Từ đó $a = b = \dfrac{1}{c}$.

☑ Vậy $a + b + c = 2a + \dfrac{1}{a}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \dfrac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $c = \sqrt{2}$. Vậy $m = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Cho $a=\log_5 2$; $b=\log_5 3$. Khi đó $\log_{10} 6$ bằng

A. $\dfrac{a+b}{1+b}$. **B.** $\dfrac{a+b}{1+a}$. **C.** $\dfrac{1+a}{a+b}$. **D.** $\dfrac{ab}{1+a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{10} 6=\dfrac{\log_5 6}{\log_5 10}=\dfrac{\log_5 2+\log_5 3}{1+\log_5 2}=\dfrac{a+b}{1+a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗	4	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{f^2(x)-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Xét phương trình $f^2(x)-4=0\Leftrightarrow [f(x)-2][f(x)+2]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(x)=-2. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên suy ra

☑ $f(x)=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x=x_1, & x_1\in(1;2) \\ x=x_2, & x_2\in(2;+\infty). \end{array}\right.$

☑ $f(x)=-2\Leftrightarrow x=x_3, \quad x_3\in(-\infty;0)$.

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{x(x-2)}{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\dfrac{x-2}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$.

$\Rightarrow g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12} 24=y$, $\log_{54} 168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{54} 168=3\log_{54} 2+\log_{54} 7+\log_{54} 3=\frac{3}{\log_2 54}+\frac{1}{\log_7 54}+\frac{1}{\log_3 54}$$
$$=\frac{3}{1+3\log_2 3}+\frac{1}{\log_7 2+3\log_7 3}+\frac{1}{3+\log_3 2}. \quad (*)$$

Lại có

$$\begin{cases}\log_7 12 = x\\ \log_{12} 24 = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_7 12 = x\\ \log_7 24 = xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\log_7 2 + \log_7 3 = x\\ 3\log_7 2 + \log_7 3 = xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_7 2 = xy - x\\ \log_7 3 = 3x - 2xy.\end{cases}$$

Khi đó $\log_2 3 = \log_2 7 \cdot \log_7 3 = \dfrac{1}{xy-x} \cdot 3x - 2y = \dfrac{3-2y}{y-1}$.

Suy ra $\log_3 2 = \dfrac{y-1}{3-2y}$.

Thay vào $(*)$ ta được

$$\begin{aligned}\log_{54} 168 &= \frac{3}{1+3\frac{3-2y}{y-1}} + \frac{1}{xy - x + 3(3x-2xy)} + \frac{1}{3+\frac{y-1}{3-2y}}\\ &= \frac{3(y-1)}{y-1+9-6y} + \frac{1}{8x-5xy} = \frac{3-2y}{8-5y}\\ &= \frac{3(y-1)}{8-5y} + \frac{3-2y}{8-5y} + \frac{1}{x(8-5y)} = \frac{xy+1}{8x-5xy}.\end{aligned}$$

Suy ra $a = 1$, $b = -5$, $c = 8$. Khi đó S=a+2b+3c=15.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Cho tổng $S = \dfrac{1}{1!2017!} + \dfrac{1}{3!2015!} + \dfrac{1}{5!2013!} + \ldots + \dfrac{1}{2017!1!}$. Biết $S = \dfrac{2^a}{b!}$ đặt $P = b - a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P \in (-1;1)$. **B.** $P \in (-2;0)$. **C.** $P \in (0;2)$. **D.** $P \in (2;4)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}& S = \frac{1}{1!2017!} + \frac{1}{3!2015!} + \frac{1}{5!2013!} + \ldots + \frac{1}{2017!1!}\\ \Leftrightarrow\ & 2018! \cdot S = \frac{2018!}{1!2017!} + \frac{2018!}{3!2015!} + \frac{2018!}{5!2013!} + \ldots + \frac{2018!}{2017!1!}\\ \Leftrightarrow\ & 2018! \cdot S = \mathrm{C}_{2018}^1 + \mathrm{C}_{2018}^3 + \mathrm{C}_{2018}^5 + \ldots + \mathrm{C}_{2018}^{2017}\\ \Leftrightarrow\ & 2018! \cdot S = \frac{2^{2018}}{2}\\ \Leftrightarrow\ & S = \frac{2^{2017}}{2018!}.\end{aligned}$$

Khi đó $a = 2017$ và $b = 2018 \Rightarrow P = 1 \in (0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3(x+y+2) = 1 + \log_3\left(\dfrac{x-1}{y} + \dfrac{y-1}{x}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $(a,b) = 1$. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_3(x+y+2) = 1 + \log_3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(x+y+2) = \log_3\left[3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)\right] \\ \Leftrightarrow\ & x+y+2 = 3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right) \\ \Leftrightarrow\ & xy(x+y+2) = 3\left(x^2+y^2-x-y\right). \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $S = x+y > 0$, $P = xy > 0$, $(*) \Leftrightarrow P(S+2) = 3\left(S^2-S-2P\right) \Leftrightarrow P = \dfrac{3S^2-3S}{S+8}$.

Lại có $0 < P \le \dfrac{S^2}{4}$, từ đó suy ra $0 < \dfrac{3S^2-3S}{S+8} \le \dfrac{S^2}{4} \Rightarrow S > 1$. (do $S > 0$)

Ta có $\dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{S^2-2P}{P} = \dfrac{S^2+2S+6}{3S-3} = f(S)$.

$f'(S) = \dfrac{3S^2-6S-24}{(3S-3)^2}$,

$f'(S) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 4 \\ S = -2 \notin (1;+\infty) \end{array}\right.$.

S	1		4		$+\infty$
$f'(S)$		$-$	0	$+$	
$f(S)$		↘	$\dfrac{10}{3}$	↗	

Suy ra $f(S) \ge f(4) = \dfrac{10}{3}$. Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ và các hoán vị.

Vậy $\begin{cases} a = 10 \\ b = 3 \end{cases}$ nên $a+b = 13$.

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. C	5. B	6. D	7. B	8. B	9. A	10. C
11. D	12. C	13. C	14. B	15. A	16. B	17. C	18. D	19. D	20. D
21. B	22. C	23. A	24. A	25. C	26. A	27. A	28. D	29. B	30. B
31. A	32. B	33. C	34. C	35. B	36. A	37. D	38. A	39. B	40. D
41. C	42. B	43. D	44. B	45. A	46. A	47. D	48. C	49. D	50. B
51. A	52. D	53. A	54. D	55. D	56. A	57. B	58. B	59. B	60. C
61. C	62. B	63. B	64. D	65. D	66. A	67. B	68. B	69. C	70. D
71. C	72. D								

5 Bài toán thực tế

Câu 1. Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

A. $9,1$ giờ. **B**. $9,7$ giờ. **C**. $10,4$ giờ. **D**. $11,3$ giờ.

Lời giải.

Gọi lượng bèo ban đầu là x $(x > 0)$.
Số lượng bèo phủ kín mặt nước trong chậu là $x \cdot 10^{12}$.
Sau t (giờ) thì số bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu nên ta có

$$x \cdot 10^t = \frac{1}{5}x \cdot 10^{12} \Rightarrow t = 12 + \log\frac{1}{5} \simeq 10,4 \text{ (giờ)}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Ông Bình dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiễn lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Tính số tiền x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Bình gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi vừa đủ mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng.

A. 300 triệu đồng. **B**. 280 triệu đồng. **C**. 289 triệu đồng. **D**. 308 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền ban đầu là N_0, ta có

$$N_0((1+r)^3 - 1) = 60 \Leftrightarrow N_0 \approx 289$$

Chọn đáp án D.
Chọn đáp án C □

Câu 3. Chu kì bán hủy của chất phóng xạ Plutôni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là lượng phóng xạ ban đầu, r là tỷ lệ phân hủy hàng năm $(r < 0)$, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 100 gam Pu^{239} sau bao lâu còn 20 gam?

A. 73180 năm. **B**. 53120 năm. **C**. 56562 năm. **D**. 65562 năm.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $e^{24360r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = -\frac{\ln 2}{24360}$. Vậy ta cần tìm t sao cho

$$e^{rt} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 5}{r} \approx 56562$$

Vậy chọn đáp án D.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Ông A gửi vào ngân hàng số tiến theo kỳ hạn một năm với lãi suất kép 12%/năm. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì ông A nhận lại được số tiền (bao gồm cả vốn lẫn lãi) gấp ba lần số tiền gửi ban đầu?

A. 8 năm. **B**. 11 năm. **C**. 9 năm. **D**. 10 năm.

Lời giải.

Gọi M là số tiền ông A gửi, n là số năm ông A đã gửi, số tiền ông nhận được là $T = M \cdot (1 + 12\%)^n$.
Để số tiền nhận được gấp ba lần số tiền ban đầu thì

$$T = 3M \Leftrightarrow (1 + 12\%)^n = 3 \Leftrightarrow n = \log_{1+12\%} 3 \approx 9{,}69 \text{ năm}.$$

Vậy sau tối thiểu 10 năm thì ông A nhận được gấp ba lần số tiền ban đầu.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Ông An gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% trên 1 năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông An nhận được tính cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu đồng?

A. $10^8 \cdot (1 + 0{,}0007)^{10}$. **B.** $10^8 \cdot (1 + 0{,}07)^{10}$. **C.** $10^8 \cdot 0{,}07^{10}$. **D.** $10^8 \cdot (1 + 0{,}7)^{10}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức lãi kép, số tiền nhận được sẽ là

$$\$ = 10^8 \cdot (1 + 0{,}07)^{10} \approx 196{,}7 \text{ triệu đồng}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0{,}025x^2\,(30 - x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (đơn vị miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. 15 mg. **B.** 30 mg. **C.** 25 mg. **D.** 20 mg.

Lời giải.

Điều kiện: $0 \le x \le 30$.
Ta có $G(x) = -0{,}025x^3 + 0{,}75x^2$; $G'(x) = -0{,}075x^2 + 1{,}5x$.
Xét $G'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}075x^2 + 1{,}5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = 0. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	0		20		30
$G'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	100	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 100 tại $x = 20$.
Vậy cần tiêm 20 mg thuốc cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.
Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. C	4. D	5. B	6. D

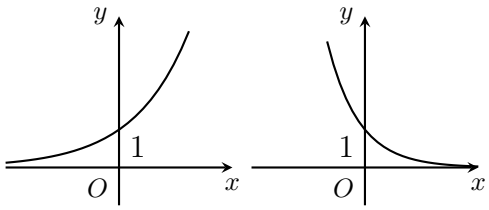
BÀI 4 HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$ $(a > 0)$ có

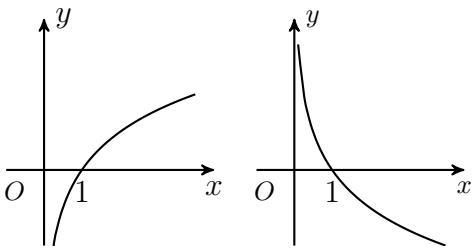
- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = a^x \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 1$.
- Đồ thị



2 Hàm số logarit

Hàm số $y = \log_a x$ có

- Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
- $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\forall x \in (0; +\infty)$.
- Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.
- Đồ thị



B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Tính giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp giải. Sử dụng các giới hạn sau

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{3x}}{5x}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} = 3. \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{3x} = 3.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{2}{5}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{5}$.

□

Ví dụ 2. Tính giới hạn

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4x+1)}{x}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4x+1)}{x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4x+1)}{4x}=4$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

□

DẠNG 2. Các bài toán liên quan đến đạo hàm hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp giải. Sử dụng các công thức sau

☑ $(a^x)'=a^x\ln a$ và $\left(a^{u(x)}\right)'=u'(x)a^{u(x)}\ln a$.

☑ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ và $(\log_a u(x))'=\dfrac{u'(x)}{u(x)\ln a}$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y=2018^x$.

② $y=\ln(x^2+1)$.

③ $y=e^{1+\sqrt{x^2+1}}$.

④ $\log_3(2x+1)$.

Lời giải.

① Ta có $y'=2018^x\cdot\ln 2018$.

② Ta có $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)}$.

③ $y'=\dfrac{x\cdot e^{1+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$.

④ $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

□

Ví dụ 4. Hàm số $y=\ln(-x^2+16)$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-2x}{-x^2+16}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x<0\\ x>4\end{array}\right.$.

□

Ví dụ 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x.\mathrm{e}^x$ trên $[-2; 1]$. Tính giá trị của $P = M \cdot m$.

Lời giải.

Ta có $y' = e^x(1 + x)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Xét $f(-2) = -2e^{-2}$, $f(-1) = -e^{-1}$, $f(1) = e$.
Vậy $M = e, m = \dfrac{-1}{e}$ suy ra $P = M \cdot m = -1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Tính các giới hạn sau

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^3+1)}{2x}$

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\tan x}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x+3} - e^3}{2x}$

Lời giải.

ĐS:1) 0; 2) 2; 3)2; 4) $\dfrac{5e^3}{2}$ □

Bài 2. Tính các đạo hàm sau

① $y = 3^{2x}$.

② $y = 3^{x^2-2x+3}$.

③ $y = \mathrm{e}^{1-2x}$.

④ $y = 2^{2x+3}$.

⑤ $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

⑥ $y = x^2 \cdot 2^x$.

⑦ $y = 2^{\sin x}$.

⑧ $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + 2}{\sin x}$.

⑨ $y = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\right)$.

Lời giải.

① $y' = 2.3^{2x}.\ln 3$.

② $y' = 2(x-1).3^{x^2-2x+3}.\ln 3$.

③ $y' = -2\mathrm{e}^{1-2x}$.

④ $2.2^{2x+3}.\ln 2$.

⑤ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

⑥ $y' = 2^x\left(2x + x^2\ln 2\right)$.

⑦ $y' = \cos x.2^{\sin x}.\ln 2$.

⑧ $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - 2\cos x}{\sin^2 x}$.

⑨ $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}\left(1 + \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\right)}$.

□

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Lời giải.

ĐS: $\min\limits_{[-2;0]} = \dfrac{1}{4} - \ln 2$. □

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2+1) - 2mx + 2$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - 2m$. Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm các giá trị m để

$$y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $m \leq -\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn ycbt. □

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+2).\mathrm{e}^{3x}$ trên đoạn $[-3;0]$.

Lời giải.

ĐS: $\min\limits_{[-3;0]} y = \dfrac{-1}{3\mathrm{e}^7}$. □

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}\right)$. Tính $f'(2)$.

Lời giải.

ĐS: $f'(2) = -\dfrac{2}{3}$. □

Bài 7. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \ln x$.

Lời giải.

ĐS: $y^{(n)} = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$. □

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\sin 2x}$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Lời giải.

ĐS: $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3\mathrm{e}}$. □

Bài 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y = x^2 + \ln(x+m+2)$ đồng biến trên tập xác định của nó.

Lời giải.

- ☑ Tập xác định $K = (-m-2; +\infty)$.
- ☑ $y' = 2x + \dfrac{1}{x+m+2} > 0, \forall x \in K \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2(m+2)x + 1 > 0, \forall x \in K$.

TH1: $\Delta' = (m+2)^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{2} \leq m \leq -2+\sqrt{2}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3,-2,-1\}$.

TH2: Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 không lớn hơn $-m-2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\Delta' > 0$; $(x_1+m+2)(x_2+m+2) \geq 0$; $\dfrac{S}{2} < -m-2$. Từ đó ta giải được $m < -2-\sqrt{2}$.
Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2017; 2017]$ nên $m \in \{-2017, -2016, \cdots, -4\}$
Từ hai trường hợp trên thì có 2017 giá trị của m thỏa mãn. □

Bài 10. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \ln(x^2+1) + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
$y' = \dfrac{2x}{x^2+1} + m = \dfrac{mx^2+2x+m}{x^2+1}$
Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m > 0$ và $1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$. □

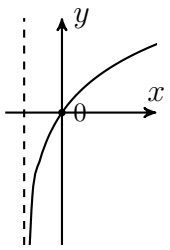
DẠNG 3. Đồ thị hàm số mũ và đồ thị hàm số logarit

Phương pháp giải.

Ví dụ 6. Hãy vẽ đồ thị hàm số $y = \log_2(x+1)$.

Lời giải.

- ☑ Tập xác định: $\mathcal{D} = (-1; +\infty)$.
- ☑ $y' = \dfrac{1}{(x+1).\ln 2} > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$.
  Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
- ☑ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm tiệm cận đứng.



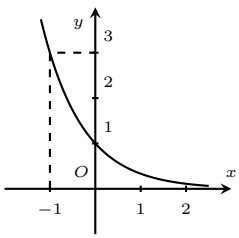
□

Ví dụ 7. Hãy vẽ đồ thị hàm số $y = 3^{-x}$.

Lời giải.

Ta có $y = 3^{-x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

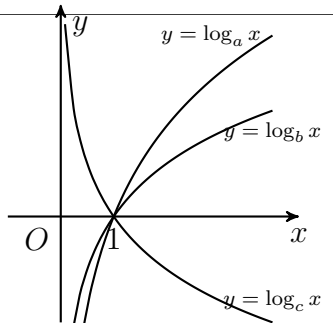
- ☑ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ☑ $y' = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x . \ln\dfrac{1}{3} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- ☑ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ (trục Ox) làm tiệm cận ngang.



□

Ví dụ 8.

Cho ba số thực dương a, b, c khác 1.
Đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Hãy so sánh a, b, c và 1.



Lời giải.

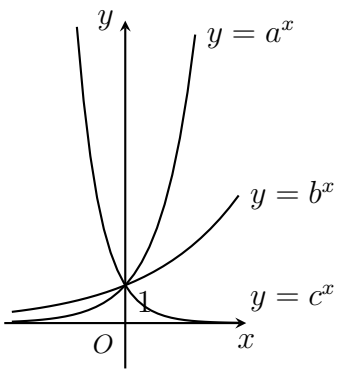
Dựa vào đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ ta thấy hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ là hàm số đồng biến, $y = \log_c x$ là hàm số nghịch biến.
Do đó, $a > 1$, $b > 1$, $c < 1$.
Hơn nữa, từ đồ thị ta thấy:

- ☑ Khi $x > 1$ thì $\log_a x > \log_b x \Leftrightarrow \log_a x > \log_b a . \log_a x \Leftrightarrow \log_a x.(\log_b a - 1) < 0$.
  Vì $a > 1$, $x > 1$ nên $\log_a x > 0$.
  Do đó, bất phương trình trên tương đương với $\log_b a < 1 \Leftrightarrow \log_b a < \log_b b \Leftrightarrow a < b$ (vì hàm số $y = \log_b x$ đồng biến).
- ☑ Khi $0 < x < 1$ thì $\log_a x < \log_b x \Leftrightarrow \log_a x < \log_b a . \log_a x \Leftrightarrow \log_a x.(\log_b a - 1) > 0$.
  Vì $a > 1$, $0 < x < 1$ nên $\log_a x < 0$.
  Do đó, bất phương trình trên tương đương với $\log_b a < 1 \Leftrightarrow a < b$.

Vậy $c < 1 < a < b$. □

Ví dụ 9.

Cho các hàm số mũ $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy so sánh a, b, c và 1.

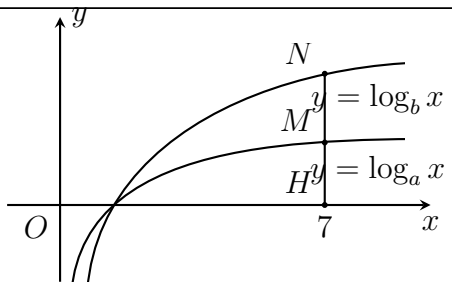


Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $y = c^x$ nghịch biến nên $c < 1$ và đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ đồng biến nên $a > 1$, $b > 1$.
Mặt khác, khi $x > 0$ thì $a^x > b^x$, nên $a > b$.
Vậy $0 < c < 1 < b < a$. □

Ví dụ 10.

Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $\log_b x$ lần lượt tại H, M và N. Biết rằng $HM = MN$. Tìm mối quan hệ giữa a và b.



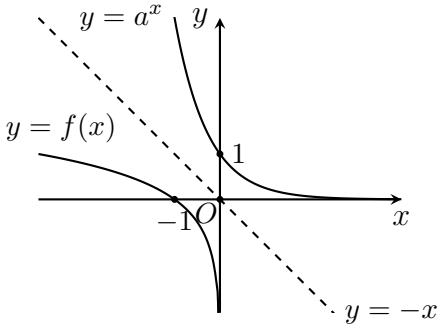
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} HM = y_M = \log_a 7 \\ MN = y_N - y_M = \log_b 7 - \log_a 7 \end{cases}$.

Vì $HM = MN$ nên $\log_a 7 = \log_b 7 - \log_a 7 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{a}} 7 = \log_b 7 \Leftrightarrow a = b^2$ □

Ví dụ 11.

Cho hàm số $y = a^x$ có đồ thị như hình vẽ, $y = f(x)$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ qua đường thẳng $y = -x$. Tìm $f(x)$.



Lời giải.

Phép đối xứng trục qua đường thẳng $y = -x$ biến mỗi điểm có tọa độ $(x; y)$ thành điểm có tọa độ $(-y; -x)$.

Mỗi điểm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ có dạng $(u; a^u)$, lấy đối xứng qua (d) ta được điểm có tọa độ $(-a^u; -u)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Do đó $f(-a^u) = -u$.

Đặt $x = -a^u$, khi đó $x = \log_a(-x)$.

Vậy $f(x) = -\log_a(-x)$.

□

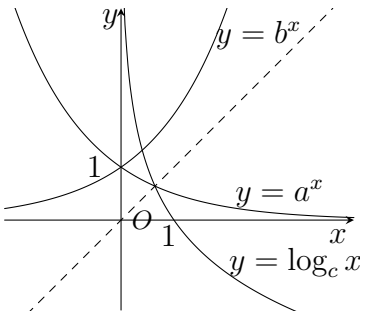
Ví dụ 12.

Cho a, b, c là các số thực dương khác 1.

Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ đối xứng nhau qua trục Oy.

Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = \log_c x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ như hình vẽ bên.

Hãy so sánh a, b, c và 1.



Lời giải.

Vì hàm số $y = a^x$ và $\log_c x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$, $0 < c < 1$; hàm số $y = b^x$ đồng biến nên $b > 1$.

Vì đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ đối xứng nhau qua trục tung nên với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$a^x = b^{-x} \Leftrightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$$

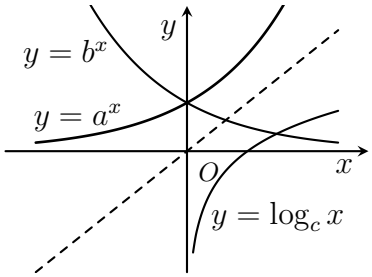
□

.

Phép đối xứng trục qua đường thẳng $y = x$ biến mỗi điểm có tọa độ (x, y) thành điểm có tọa độ $(y; x)$. Do đó, phép đối xứng trục qua đường thẳng $y = x$ biến mỗi điểm có tọa độ $(u; a^u)$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ thành điểm có tọa độ $(a^u; u)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \log_c x$.
Hay $u = \log_c a^u = u \Leftrightarrow u = u.\log_c a \Leftrightarrow \log_c a = 1 \Leftrightarrow a = c$.
Vậy $0 < a = c < 1 < b$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 11.
Cho các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy so sánh a, b, c.



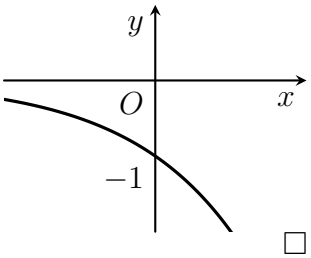
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta được: $b < a < c$ □

Bài 12. Hãy vẽ đồ thị hàm số $y = -2^x$

Lời giải.

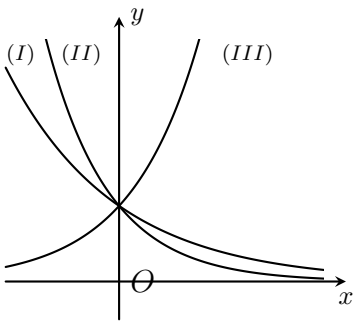
Đồ thị hàm số $y = -2^x$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = 2^x$ qua trục Ox



□

Bài 13.

Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ lần lượt được kí hiệu (I), (II), (III) như hình vẽ bên. Hãy so sánh a, b, c.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta được: $b < a < c$ □

DẠNG 4. Một số ứng dụng

Phương pháp giải.

Ví dụ 13. Cho $f(x) = \dfrac{2016^x}{2016^x + \sqrt{2016}}$. Tính giá trị biểu thức

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

Lời giải.

Vì $f(1-x) = \dfrac{\sqrt{2016}}{2016^x + \sqrt{2016}}$ nên $f(x) + f(1-x) = 1$.

Suy ra $S = f\left(\dfrac{1}{2017}\right) + f\left(\dfrac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$

$= \left[f\left(\dfrac{1}{2017}\right) + f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)\right] + \left[f\left(\dfrac{2}{2017}\right) + f\left(\dfrac{2015}{2017}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\dfrac{1008}{2017}\right) + f\left(\dfrac{1009}{2017}\right)\right]$

$= 1008.$ □

Ví dụ 14. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x + 3}, x \in \mathbb{R}$ và hai số $a; b$ thỏa mãn $a + b = 1$. Tính $f(a) + f(b)$.

Lời giải.

Ta có $f(a) + f(b) = \dfrac{9^{1-b}}{9^{1-b} + 3} + \dfrac{9^b}{9^b + 3} = \dfrac{\frac{9}{9^b}}{\frac{9}{9^b} + 3} + \dfrac{9^b}{9^b + 3} = \dfrac{9}{9 + 3 \cdot 9^b} + \dfrac{9^b}{9^b + 3} = 1.$ □

Ví dụ 15. Một người vay số tiền là a đồng, kì hạn một tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là $r\%$ một tháng (hình thức này gọi là tính lãi trên dư nợ giảm dần, nghĩa là tính lãi trên số tiền mà người vay còn nợ ở thời điểm hiện tại), số tháng vay là n tháng, sau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau, số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là x đồng. Tìm công thức tính x? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian vay.

Lời giải.

Gọi P_n là số tiền còn lại sau tháng thứ n. Sau tháng thứ nhất, số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1+r) = ad$ với $d = 1 + r$. Trả x đồng thì số tiền còn lại sau tháng thứ nhất là: $P_1 = ad - x = ad - x\dfrac{d-1}{d-1}$. Sau tháng thứ hai số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad - x)(1 + r) = (ad - x)d$. Trả x đồng thì số tiền còn lại sau tháng thứ hai là:

$$P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x\frac{d^2 - 1}{d - 1}.$$

Sau tháng thứ ba, số tiền gốc và lãi là:

$$ad^2 - x(d+1) + [ad^2 - x(d+1)]r = [ad^2 - x(d+1)](1 + r) = [ad^2 - xx(d+1)]d$$

Trả x đồng thì số tiền còn lại sau tháng thứ ba là:

$$P_3 = [ad^2 - x(d+1)]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = [ad^2 - x(d+1)]d.$$

Bằng quy nạp toán học ta suy ra số tiền còn lại sau tháng thứ n là:

$$P_n = ad^n - x\frac{d^n - 1}{d - 1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{với } d = 1 + r.$$

Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có:

$$P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x\frac{d^n - 1}{d - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ad^n(d-1)}{d^n - 1}.$$

Khi đó $x = \dfrac{a(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$. □

Ví dụ 16. Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng một năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau. Hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ?

Lời giải.

Mỗi tháng ông A sẽ phải trả số tiền cho ngân hàng là

$$x = \frac{a(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} = \frac{220(1+1{,}15\%)^{12} \cdot 1{,}15\%}{(1+1{,}15\%)^{12} - 1} = \frac{220 \cdot 1{,}0115^{12} \cdot 0{,}0115}{1{,}0115^{12} - 1}.$$

với $a = 200; r = 1{,}15\%; n = 12$. □

Ví dụ 17. Bạn Nam trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ học phí nên Nam quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 3 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất 3% một năm. Sau khi tốt nghiệp, Nam phải trả góp hàng tháng số tiền T không đổi cùng với lãi suất 0,25% một tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà Nam phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là bao nhiêu?

Lời giải.

Sau bốn năm, số tiền nam nợ ngân hàng là

$$s = 3000000[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)] = 12927407.43.$$

Lúc này ta coi như bạn Nam nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là 12927407.43 đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có

$$T = \frac{N(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407.4(1+0{,}0025)^{60} \cdot 0{,}005}{(1+0{,}0025)^{60} - 1} \approx 2322289.$$

□

Ví dụ 18. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% năm. Hỏi người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu được trả với lãi suất $\frac{5}{12}\%$ một tháng?

Lời giải.

Gọi a là tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất.

Sau một tháng, số tiền cả gốc cả lãi sẽ là $a(1+r)$.

Sau n tháng, số tiền cả gốc, cả lãi là $T=a(1+r)^n$.

Số tiền sau 10 năm với lãi suất 5% một năm là

$$10000000(1+5\%)=162888946{,}27.$$

Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất $\frac{5}{12}\%$ tháng là

$$10000000(1+\frac{5}{12}\%)^{120}=16470094{,}98.$$

Vậy người đó nhận được số tiền gửi theo lãi suất $\frac{5}{12}\%$ tháng nhiều hơn 1881486,7069 đồng. □

Ví dụ 19. Ông An gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% một năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông An nhận được tính cả gốc và lãi là bao nhiêu?

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép $C=x(1+r)^n$ với giả thiết

$$x=100000000=10^8; r=7\%=0{,}07; n=10.$$

Vậy số tiền nhận được cả gốc và lãi sau 10 năm là $10^8(1+0{,}07)^{10}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+\cdots+f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f\left(\frac{2017}{2017}\right).$$

Lời giải.

Ta có $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}-2}{9^{1-x}+3}=\dfrac{1}{3}$. Khi đó

$$P=\sum_1^{1008}\left[f\left(\frac{k}{2017}\right)+f\left(1-\frac{k}{2017}\right)\right]+f\left(\frac{2017}{2017}\right)=\sum_1^{1008}\frac{1}{3}+f(1)=\frac{4039}{12}.$$

□

Bài 15. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$.
Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2018}\right)+f\left(\dfrac{2}{2018}\right)+f\left(\dfrac{3}{2018}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2017}{2018}\right)$

Lời giải.

Đáp số $S=\dfrac{2017}{2}$. □

Bài 16. Ông Vương dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x\in\mathbb{N}$) ông Vương gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép $P_n=x(1+x)^n$, trong đó P_n là tổng giá trị đạt được sau n kì, x là vốn gốc, r là lãi suất mỗi kì. Số tiền lãi thu được sau n kì là

$$P_n-x=x(1+x)^n-x=x[(1+r)^n-1].$$

Áp dụng với $n=3; r=6{,}5\%$, số tiền lãi là 30 triệu đồng ta được

$$30=x[(1+6{,}5\%)^3-1]\Rightarrow x\approx 144{,}27.$$

Vậy số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng. □

Bài 17. Ông Ba đem một tỉ đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 4 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi một năm sau, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông Ba còn lại bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông Ba gửi không thay đổi.

Lời giải.

Số tiền gửi ban đầu là 1000 (triệu đồng). Số tiền tiết kiệm của ông Ba sau tháng thứ n là $1000(1+0{,}005)^n$ (triệu đồng). Kể từ ngày gửi cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu, vậy số tiền của ông Ba sau 12 tháng là $1000\cdot 1{,}005^{12}-48$ (triệu đồng). □

Bài 18. Số lượng của một loài vi khuẩn sau t giờ được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t)=Q_0\cdot e^{0{,}195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100000 con?

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $Q(t)=5000e^{0{,}195t}$.
Để số lượng vi khuẩn là 100000 con thì $5000e^{0{,}195t}=100000\Leftrightarrow e^{0{,}195t}=2\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{0{,}195}\ln 20\approx 15{,}36$ (h). □

Bài 19. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, năm 2016 dân số Việt Nam ước tính 94444200 người. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,07%. Cho biết sự tăng dân số được tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào, dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

Lời giải.

Gọi n là số năm để dân số đạt mức 120 triệu người tính mốc từ năm 2016.

Ta có $120000000 = 94444200e^{n \cdot 0{,}0107} \Rightarrow n \approx \dfrac{\ln 1{,}27}{0{,}0107} \approx 22{,}34$.

Vậy trong năm thứ 23 (tức là năm $2016 + 23 = 2039$) thì dân số đạt mức 120 triệu người. □

Bài 20. Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng (tính theo đơn vị là giờ). Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuân tăng gấp đôi ban đầu là bao lâu?

Lời giải.

Ta có $300 = 100e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 3}{5}$.

Theo yêu cầu bài toán ta lại có

$$200 = 100e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt} = 2 \Leftrightarrow rt = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{5 \ln 2}{\ln 3} \approx 3{,}15\,(\text{h})$$

□

Bài 21. Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0.5% một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 125 triệu?

Lời giải.

Sau một tháng, người đó nhận được $100 + 100 \cdot 0{,}5\% = 100 \cdot 1{,}005$ (triệu đồng).

Sau hai tháng, người đó nhận được:

$100 \cdot 1{,}005 + 100 \cdot 1{,}005 \cdot 0{,}005 = 100 \cdot 1{,}005(1 + 0{,}005) = 100 \cdot 1{,}005^2$ triệu đồng.

Sau n tháng, người đó nhận được $100 \cdot 1{,}005^n$ triệu đồng.

Theo đề $100 \cdot 1{,}005^n = 125 \Rightarrow n = 44{,}7$.

Do n nguyên nên suy ra $n = 45$ tháng. □

Bài 22. Năm 2014, một người đã tiết kiệm được x triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần $1{,}55x$ triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 6,9% một năm, theo hình thức lãi kép và không rút trước kì hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng, giá bán nhà đó không thay đổi).

Lời giải.

Số tiền tiết kiệm sau n năm là $x(1+6{,}9\%)^n$.

Ta cần tìm n để $x(1+6{,}9\%)^n = 1{,}55x \Leftrightarrow (1+6{,}9\%)^n = 1{,}55 \Leftrightarrow n \approx 6{,}56$.

Do đó, người gửi tiết kiệm cần gửi trọn 7 kì hạn, tức là 7 năm.

Vậy đến năm 2021 người đó sẽ có đủ tiền cần thiết. □

Bài 23. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6,5% năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi khoảng bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

Lời giải.

Gọi x là số tiền gửi ban đầu. Giả sử sau n năm số tiền vốn và lãi là $2x$.

Ta có $2x = x \cdot 1{,}065^n \Leftrightarrow 1{,}065^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_2 1{,}065 \Leftrightarrow n \approx 11$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(4 - x^2)$ là tập hợp nào sau đây?

A. $\mathscr{D} = (-2; 2)$. **B.** $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $\mathscr{D} = [-2; 2]$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2; 2\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Điều kiện để hàm số $y = \log_a f(x)\,(0 < a \neq 1)$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

Cách giải:

Điều kiện xác định $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho biểu thức $P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P = x^{-2}$. **B.** $P = x^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $P = x^{\frac{1}{2}}$. **D.** $P = x^2$.

Lời giải.

$P = x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$?

A. $y = (2 + \sqrt{x})^{\pi}$. **B.** $y = \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\pi}$. **C.** $y = (2 + x^2)^{\pi}$. **D.** $y = (2 + x)^{\pi}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (2 + \sqrt{x})^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

Hàm số $y = \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hàm số $y = (2 + x^2)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = (2 + x)^{\pi}$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hai số thực a và b với $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $\log_{a^2} |b| = \dfrac{1}{2} \log_a |b|$. **B.** $\dfrac{1}{2} \log_a a^2 = 1$. **C.** $\dfrac{1}{2} \log_a b^2 = \log_a |b|$. **D.** $\dfrac{1}{2} \log_a b^2 = \log_a b$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{2} \log_a b^2 = \log_a |b|$ nên câu D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \dfrac{3 - x}{2x}$ là

A. $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = (0; 3]$.

C. $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = (0; 3)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $\dfrac{3 - x}{2x} > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \log(x - 2)^2$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y=\log_a f(x)$ xác định nếu $f(x)$ xác định và $f(x)>0$.

Cách giải:

Hàm số $y=\log(x-2)^2$ xác định nếu $(x-2)^2>0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Vậy TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Chú ý: Khi giải nhiều học sinh biến đổi $(x-2)^2>0\Leftrightarrow x>2$ rồi chọn $\mathscr{D}=(2;+\infty)$ là sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tìm đạo hàm của hàm số $y=\ln(1+e^{2x})$.

A. $y'=\dfrac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức đạo hàm $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$ và $(e^u)'=u'.e^u$.

Cách giải:

Ta có $y'=(\ln(1+e^{2x}))'=\dfrac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}}=\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{2019}|x|$, $\forall x\neq 0$.

A. $y'=\dfrac{1}{|x|\ln 2019}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{|x|}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 2019}$. **D.** $y'=x\ln 2019$.

Lời giải.

Theo công thức đạo hàm, ta có $y'=\dfrac{1}{x\ln 2019}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực?

A. $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **C.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

Lời giải.

Loại phương án C và D vì các hàm số trong các phương án này không xác định trên $\mathbb{R}$.

Chọn A vì $\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho các mệnh đề sau

(I). Cơ số của lôgarit phải là số dương.

(II). Chỉ số số thực dương mới có lôgarit.

(III). $\ln(A+B)=\ln A+\ln B$ với mọi $A>0, B>0$.

(IV). $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$ với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Số mệnh đề đúng là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

(I) Sai vì cơ số của $\log_a b$ chỉ cần thỏa mãn $0<a\neq 0$.

(II) Đúng vì điều kiện có nghĩa của $\log_a b$ là $b>0$.

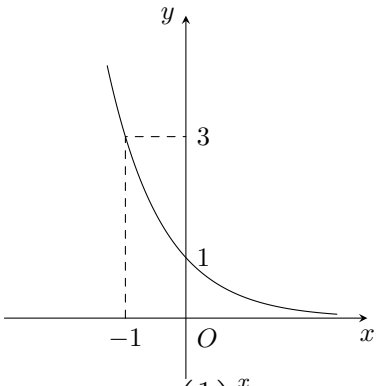
(III) Sai vì $\ln A + \ln B = \ln(AB) \neq \ln(A+B)$ với $A, B > 0$.

(IV) Sai vì nếu $a, b, c < 0$ thì các biểu thức $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ không có nghĩa.

Chọn đáp án A ☐

Câu 11.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$. **B.** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. **C.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Đồ thị đi xuống nên hàm số đã cho là nghịch biến nên loại A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;3)$ nên chỉ có đáp án C thỏa.

Chọn đáp án C ☐

Câu 12. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. **B.** $y = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$. **C.** $y = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Do $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 13. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_5 x$. **B.** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$. **D.** $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$.

Lời giải.

chú ý rằng $\frac{e}{3} < 1$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 14. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

A. $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$. **B.** $y = \log_2(x^2 - x)$. **C.** $y = \left(\frac{e}{3}\right)^{2x}$. **D.** $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$ có cơ số $a = \sqrt{10} - 3$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Hàm số $y = \log_2(x^2 - x)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\frac{e}{3}\right)^{2x}$ có $\frac{e}{3} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ có $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 15. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$. **B.** $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$. **D.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x$ là hàm số mũ, có cơ số $0<a=\dfrac{2}{e}<1$ nên hàm sốnghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Đạo hàm của hàm số $y=\ln(5-3x^2)$ là

A. $\dfrac{6}{3x^2-5}$. **B.** $\dfrac{2x}{5-3x^2}$. **C.** $\dfrac{6x}{3x^2-5}$. **D.** $\dfrac{-6x}{3x^2-5}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính đạo hàm $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

Cách giải: $[\ln(5-3x^2)]'=\dfrac{-6x}{5-3x^2}=\dfrac{6x}{3x^2-5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tìm tập xác định của hàm số $y=\ln(1-x)$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)$. **B.** $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(-\infty;1)$. **D.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\ln(1-x)$ xác định $\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$. Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^x$.

A. $y'=\dfrac{2^x}{\ln 2}$. **B.** $y'=2^x\ln 2$. **C.** $y'=x.2^{x-1}\ln 2$. **D.** $y'=x.2^{x-1}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức đạo hàm $(a^x)'=a^x\ln a$. Do đó ta có $(2^x)'=2^x\ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

- ☑ Nếu $a>1$ thì hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- ☑ Nếu $0<a<1$ thì hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải: Ta có $\dfrac{\pi}{3}>1\Rightarrow$ Hàm số $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

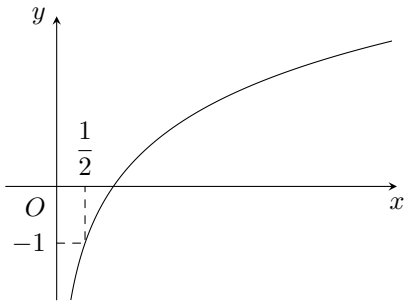
Chọn đáp án A □

Câu 20.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

A. $y=\log_2(2x)$. **B.** $y=\log_2 x$.

C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$. **D.** $y=\log_{\sqrt{2}}x$.



Lời giải.

Từ hình vẽ suy ra hàm số đồng biến nên loại hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

Lại từ hình vẽ suy đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Kiểm tra ta thấy $-1\neq\log_2\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\right);-1=\log_2\dfrac{1}{2}$ và $-1\neq\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}$ nên loại các hàm số $y=\log_2(2x)$ và $y=\log_{\sqrt{2}}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y=\sin x+\log_3 x^3\ (x>0)$ là

A. $y'=\cos x+\dfrac{3}{x\ln 3}$. **B.** $y'=-\cos x+\dfrac{1}{x^3\ln 3}$.

C. $y'=\cos x+\dfrac{1}{x^3\ln 3}$. **D.** $y'=-\cos x+\dfrac{1}{x\ln 3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\sin x)'=\cos x,\ (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ (0<a\neq 1)$, ta có $y'=\cos x+\dfrac{3}{x\ln 3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_9(x^2+1)$.

A. $y'=\dfrac{1}{(x^2+1)\ln 9}$. **B.** $y'=\dfrac{x}{(x^2+1)\ln 3}$. **C.** $y'=\dfrac{2x\ln 9}{x^2+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2\ln 3}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 9}=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)\,2\ln 3}=\dfrac{x}{(x^2+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=2^{\log_2(x-1)^2}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.

Câu 24. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số $y=\log_a x$ với $a>1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ đối xứng nhau qua trục hoành.

C. Hàm số $y=\log_a x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

D. Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$ có tiệm cận ngang.

Câu 25. Cho hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}}x$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

C. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là trục Oy.

D. Hàm số đã cho có đạo hàm $y'=-\dfrac{1}{\ln 3}$.

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $y=5^x$.

A. $y'=x.5^{x-1}$. **B.** $y'=5^x$. **C.** $y'=\dfrac{5^x}{\ln 5}$. **D.** $y'=5^x.\ln 5$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(a^x)'=a^x\ln a$. Suy ra $y'=(5^x)'=5^x.\ln 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$.

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$ nên tập xác định của hàm số $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \ln(4x - x^2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $f'(5) = 1$. **B.** $f'(2) = 0$. **C.** $f'(2) = 1$. **D.** $f'(-1) = 0$.

Câu 29. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số $y = e^{10x+2017}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \log_{1,2} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

C. $a^{x+y} = a^x + a^y; \forall a > 0, a \neq 1, x, y \in \mathbb{R}$.

D. $\log(a + b) = \log a + \log b; \forall a > 0, b > 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = e^{10x+2017}$, ta có:

$y' = 10e^{10x+2017} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $y = e^{10x+2017}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **B.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có điều kiện: $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = -\log(2x - x^2)$.

A. $\mathscr{D} = \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\mathscr{D} = (0; 2)$. **C.** $\mathscr{D} = [0; 2]$. **D.** $\mathscr{D} = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$. **B.** $y = \log_2(x^2 - x)$. **C.** $y = \left(\dfrac{e}{3}\right)^{2x}$. **D.** $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_{\sqrt{10}-3} x$ có cơ số $a = \sqrt{10} - 3 < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Hàm số $y = \log_2(x^2 - x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\dfrac{e}{3}\right)^{2x}$ có $\dfrac{e}{3} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{x}$ có $\dfrac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định?

A. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$. **B.** $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$. **C.** $\ln x$. **D.** $y=\pi^x$.

Lời giải.

Vì $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ nên $y=y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

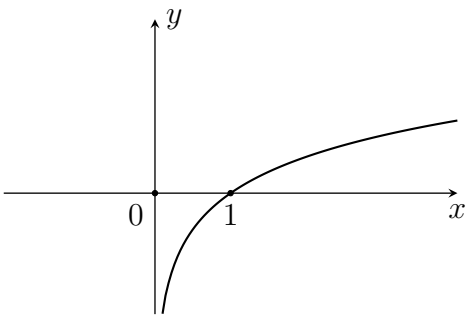
A. $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^x$. **B.** $y=(\sqrt{\pi})^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^x$. **D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{2}{\pi}<1$ nên $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Đồ thị sau đây của hàm số nào?



A. $y=2^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **D.** $y=\log_2 x$.

Lời giải.

Ta có các nhận xét sau về hàm mũ và logarit

① Hàm mũ $y=a^x$ có đồ thị luôn nằm phía trên trục Ox và là hàm đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$.

② Hàm logarit $y=\log_a x$ có đồ thị luôn nằm bên phải trục Oy và là hàm đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$.

Ta thấy đồ thị hàm số đã cho nằm về phía bên phải trục Oy và là hàm đồng biến do đó ta chọn đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Đạo hàm của hàm số $y=3^x$ là

A. $y'=-\dfrac{3^x}{\ln 3}$. **B.** $y'=3^x\ln 3$. **C.** $y'=\dfrac{3^x}{\ln 3}$. **D.** $y'=-3^x\ln 3$.

Lời giải.

Công thức đạo hàm hàm số mũ là $y=a^x$ (với $a>0$) là $y'=a^x\cdot\ln a$.

Do đó $y=3^x$ có đạo hàm là $y'=3^x\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$. **D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Hàm $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ là hàm mũ có cơ số bằng $\dfrac{2}{\mathrm{e}}\in(0;1)$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ là hàm mũ có cơ số bằng $\dfrac{\pi}{3}>1$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ chỉ xác định trên $(0;+\infty)$.

Hàm $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$ có $y'=\dfrac{4x}{(2x^2+1)\ln\frac{\pi}{4}}$ nên nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_5(x^2+2)$.

A. $y'=\dfrac{1}{(x^2+2)\ln 5}$. **B.** $y'=\dfrac{2x}{(x^2+2)}$. **C.** $y'=\dfrac{2x\ln 5}{(x^2+2)}$. **D.** $y'=\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(x^2+2)'}{(x^2+2)\ln 5}=\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

A. $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(0;1)$.

Câu 40. Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số dương x?

A. $(\log x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln 10}$. **B.** $(\log x)'=\dfrac{\ln 10}{x}$. **C.** $(\log x)'=x\ln 10$. **D.** $(\log x)'=\dfrac{x}{\ln 10}$.

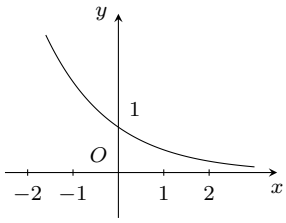
Lời giải.

Ta có $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}\ \forall x>0$.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số được liệt kê trong bốn phương án **A**, **B**, **C**, **D** dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=-x^2+2x+1$. **B.** $y=\log_{0,5}x$.

C. $y=\dfrac{1}{2^x}$. **D.** $y=2^x$.

Lời giải.

Hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định, đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0;1)$, nhận đường thẳng $x=0$ làm tiệm cận ngang. Từ đó chỉ có hàm số $y=\dfrac{1}{2^x}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hàm số $y=a^x, 0<a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y=a^x$ có đường tiệm cận ngang là trục hoành.

C. Đồ thị hàm số $y=a^x$ có đường tiệm cận đứng là trục tung.

D. Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên tập xác định của nó khi $a>1$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x+1)$.

A. $y' = \dfrac{1}{(x+1)\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{x+1}$. **C.** $y' = \dfrac{x}{(x+1)\ln 2}$. **D.** $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)\ln 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x+1)$.

A. $y' = \dfrac{3}{3x+1}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{3x+1}$. **C.** $y' = \dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{(3x+1)\ln 3}$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{3}{(3x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $y = a^x$ với $0 < a < 1$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $0 < a \neq 1$ luôn đi qua điểm $(a; 1)$.

C. $y = a^x$ với $a > 1$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

D. Đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ (với $0 < a \neq 1$) đối xứng với nhau qua trục Oy.

Lời giải.

Xét hai hàm số $y = f(x) = a^x$ và $y = g(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $f(-x) = a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = g(x)$

Suy ra đồ thị các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đối xứng với nhau qua trục Oy.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Một người gửi 75 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $5,4\%$/năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi sau 6 năm thì người đó nhận về số tiền là bao nhiêu kể cả gốc và lãi? (làm tròn đến nghìn đồng).

A. 102.826.000 đồng. **B.** 97.860.000 đồng. **C.** 150.260.000 đồng. **D.** 120.628.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thu được sau 6 năm là $C = 75(1 + 0.054)^6 = 102.826.470$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Đạo hàm của hàm số $y = x2^x$ là

A. $y' = (1 + x\ln 2)2^x$. **B.** $y' = (1 - x\ln 2)2^x$. **C.** $y' = (1+x)2^x$. **D.** $y' = 2^x + x^2 2^{x-1}$.

Lời giải.

$y' = (x2^x)' = 2^x + x2^x \ln 2 = 2^x(1 + x\ln 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2+1)$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $f'(1) = \dfrac{1}{2\ln 2}$. **C.** $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 2}$. **D.** $f'(1) = 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$ nên $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. **D.** $y=2^{-x}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $\dfrac{\pi}{3}>1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x-3}$.

A. $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x-3}$. **B.** $f'(x)=-2\mathrm{e}^{2x-3}$. **C.** $f'(x)=2\mathrm{e}^{x-3}$. **D.** $f'(x)=\mathrm{e}^{2x-3}$.

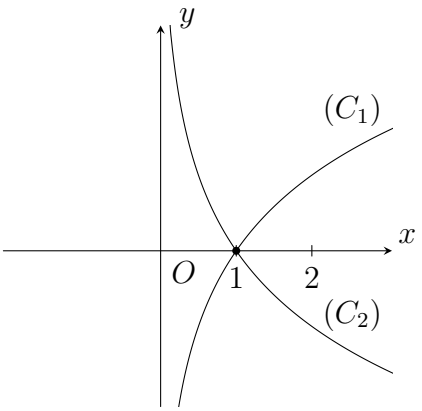
Lời giải.

Ta có: $f'(x)=(2x-3)'\cdot\mathrm{e}^{2x-3}=2\mathrm{e}^{2x-3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 51.

Cho hai hàm số $y=\log_a x$, $\log_b x$ (với a, b là hai số dương khác 1) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2) như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $0<a<1<b$. **B.** $0<a<b<1$.

C. $0<b<1<a$. **D.** $0<b<a<1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị (C_1) tăng suy ra hàm số $y=\log_a x$ có cơ số $a>1$. Đồ thị (C_2) giảm suy ra hàm số $y=\log_b x$ có cơ số $0<b<1$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x+3^x$.

A. $y'=2\cos 2x+x3^x-1$. **B.** $y'=-\cos 2x+3^x$.

C. $y'=-2\cos 2x-3^x\ln 3$. **D.** $y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=\log_3 x$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=x^3+x+1$. **D.** $y=x^4-x^2-2$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3+x+1$ có $y'=3x^2+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên y là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

A. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)$. **B.** $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=[-1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Suy ra tập xác định $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hàm số $y=a^x$ với $0<a\neq 1$ có đồ thị (C). Hãy chọn khẳng định **sai**.

A. Đồ thị (C) đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x$ qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

B. Đồ thị (C) không có tiệm cận.

C. Đồ thị (C) đi lên từ trái sang phải khi $a>1$.

D. Đồ thị (C) luôn đi qua điểm có tọa độ $(0;1)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=a^x$ luôn nhận trục hoành là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Giá trị $f'(1)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B**. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $1+\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vậy $f'\left(1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Hàm số nào sau đây **không phải** là hàm số mũ?

A. $y=3^x$. **B**. $y=\dfrac{1}{4^x}$. **C**. $y=\pi^x$. **D**. $y=x^\pi$.

Lời giải.

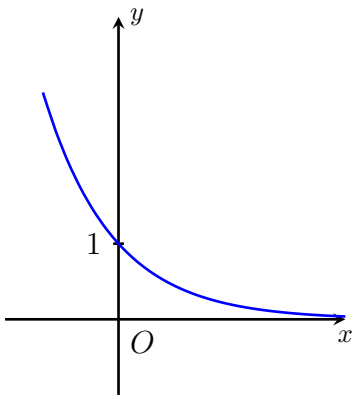
Hàm số $y=x^\pi$ là hàm số lũy thừa, không phải là hàm số mũ.

Chọn đáp án D □

Câu 58.

Hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào trong 4 hàm số dưới đây?

A. $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. **B**. $y=(\sqrt{2})^x$. **C**. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **D**. $y=3^x$.



Lời giải.

Đồ thị đã cho là của một hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó. Trong bốn phương án đã cho, chỉ có hàm số $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ thỏa mãn điều này.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho hàm số $f(x)=\log_2(x^2+1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng

A. 2. **B**. $4\ln 2$. **C**. $\dfrac{1}{\ln 2}$. **D**. $1+\ln 2$.

Lời giải.

Với $f(x)=\log_2(x^2+1)$ ta có $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Cho hàm số $y=\mathrm{e}^{x^2-4x+1}$, trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B**. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **D**. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=(2x-4)\mathrm{e}^{x^2-4x+1}$; $y'=0\Leftrightarrow x=2$.

$y'<0\Leftrightarrow x<2$; $y'>0\Leftrightarrow x>2$.

Vậy hàm số y nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho hàm số $y=12^x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số luôn nằm phía trên trục hoành.

D. Đồ thị hàm số luôn nằm bên phải trục tung.

Câu 62. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\ln x$. **B**. $y=\log_{0,99}x$. **C**. $y=\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^x$. **D**. $y=x^{-3}$.

Lời giải.

Do $\begin{cases}0<0{,}99<1\\ 0<\sqrt{\dfrac{3}{4}}<1\end{cases}$ nên các hàm số $y=\log_{0,99}x$ và $y=\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

Ta thấy $y=x^{-3}$ có $y'=\dfrac{-3}{x^4}<0,\ \forall x\neq 0$ nên $y=x^{-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Trong các hàm số sau, hàm số nào có cùng tập xác định với hàm số $y=x^{\frac{1}{5}}$?

A. $y=x^{\pi}$. **B**. $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$. **C**. $y=\sqrt{x}$. **D**. $y=\sqrt[3]{x}$.

Lời giải.

Ta có tập xác định hàm số $y=x^{\frac{1}{5}}$ là $(0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y=x^{\pi}$ cũng có tập xác định là $(0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

☑ Hàm số $y=\sqrt{x}$ có tập xác định là $[0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y=\sqrt[3]{x}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Hàm số nào sau đây được gọi là hàm số lũy thừa?

A. $y = x^{-3}$. **B.** $y = 3^{-x}$. **C.** $y = \mathrm{e}^x$. **D.** $y = \ln x$.

Lời giải.

Ta có

- ☑ Hàm số $y = x^{-3}$ là hàm số lũy thừa.
- ☑ Hàm số $y = 3^{-x}$ và hàm số $y = \mathrm{e}^x$ là hàm số mũ.
- ☑ Hàm số $y = \ln x$ là hàm số lôgarit.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$.

A. $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 3}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{x}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$. **D.** $y' = 3^x \cdot \ln 3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = (\log_3 x)' = \dfrac{1}{x \ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \mathrm{e}^{x^2-2x}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = [0;2]$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;2\}$. **D.** $\mathscr{D} = \varnothing$.

Lời giải.

Hàm số $y = \mathrm{e}^{x^2} - 2x$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = (\sqrt{2})^x$. **B.** $y = (0,5)^x$. **C.** $y = \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x$. **D.** $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Hàm số mũ đồng biến trên tập xác định khi cơ số $a > 1$ nên chọn $y = (\sqrt{2})^x$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. **B.** $y = \log_3 x$. **C.** $y = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x$. **D.** $y = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$.

Lời giải.

Chú ý hàm $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Từ đó ta có hàm $y = \log_3 x$ đồng biến trên tập xác định.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là

A. $y' = \dfrac{1}{x \ln 3}$. **B.** $y' = \dfrac{x}{\ln 3}$. **C.** $y' = \dfrac{\ln 3}{x}$. **D.** $y' = x \ln 3$.

Lời giải.

Nhắc lại: $y = \log_a x$ thì có đạo hàm $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Từ đó $y = \log_3 x$ có đạo hàm $y' = \dfrac{1}{x \ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_{2018}(2x-1)$ là

A. $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D} = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho $a>0, b>0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $(a+b)^x=a^x+b^x$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=a^x\cdot b^{-x}$. **C.** $a^{x+y}=a^x+a^y$. **D.** $a^x\cdot b^y=(a\cdot b)^{x\cdot y}$.

Lời giải.

Ta thấy $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}=a^x\cdot b^{-x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị của hàm số $y=\ln x$ có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị của hàm số $y=2^{-x}$ có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị của hàm số $y=\ln(-x)$ không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị của hàm số $y=2^x$ có tiệm cận ngang.

Lời giải.

Ta thấy $y=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Do vậy, đồ thị hàm số $y=2^{-x}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Tập xác định của hàm số $y=\ln|4-x^2|$ là

A. $\mathbb{R}\backslash[-2;2]$. **B.** $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải.

Điều kiện: $4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ và $x\neq 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Đạo hàm của hàm số $y=3^{2x}$ bằng

A. $y'=3^{2x}$. **B.** $y'=\dfrac{3^{2x}}{\ln 3}$. **C.** $y'=2\cdot 3^{2x}\ln 3$. **D.** $y'=3^{2x}\cdot\ln 3$.

Lời giải.

Ta có $y'=2\cdot 3^{2x}\ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Hàm số nào sau đây là hàm số mũ?

A. $y=(\sin x)^3$. **B.** $y=3^x$. **C.** $y=x^3$. **D.** $y=\sqrt[3]{x}$.

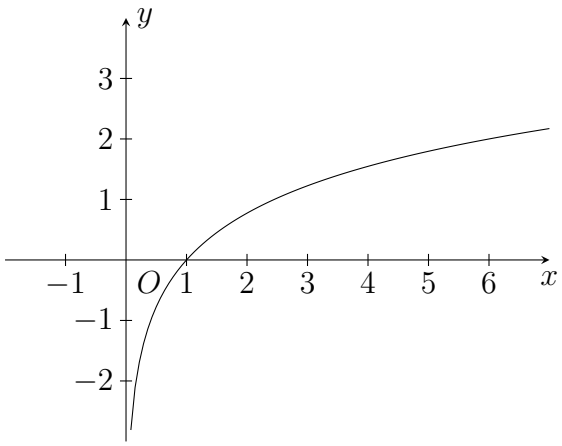
Lời giải.

Các hàm số $y=(\sin x)^3$, $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$ là các hàm số lũy thừa với số mũ hữu tỉ, hàm số $y=3^x$ là hàm số mũ với cơ số là 3.

Chọn đáp án B □

Câu 76.

Hàm số nào sau đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ:



A. $y=\log_{0,6} x$. **B**. $y=\log_{\sqrt{6}} x$.

C. $y=\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$. **D**. $y=6^x$.

Lời giải.

Ta có: $y(1)=0$ và hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên chỉ có hàm số $y=\log_{\sqrt{6}} x$ thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 77. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$. **B**. $y=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\mathrm{e}}\right)^x$.

C. $y=\log_7\left(x^4+5\right)$. **D**. $y=\left(\dfrac{\sqrt{2018}-\sqrt{2015}}{10^{-1}}\right)^x$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\mathrm{e}}>1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\mathrm{e}}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Ông V gửi tiết kiệm 200 triệu đồng vào ngân hàng với hình thức lãi kép và lãi suất 7,2% một năm. Hỏi sau 5 năm ông V thu về số tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với số nào sau đây?

A. 283.145.000 đồng. **B**. 283.155.000 đồng. **C**. 283.142.000 đồng. **D**. 283.151.000 đồng.

Lời giải.

Gọi T là tổng số tiền thu được sau 5 năm.

Khi đó $T=200.000.000\left(1+\dfrac{7,2}{100}\right)^5\approx 283.142.000$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định?

A. $y=\log x$. **B**. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **C**. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **D**. $y=1-4^x$.

Lời giải.

☑ Hàm số $y=\log x$ đồng biến trên tập xác định $(0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định $(0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y=1-4^x$ nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_3(2x+1)$.

A. $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 3}$. **B**. $y'=\dfrac{1}{2x+1}$. **C**. $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$. **D**. $y'=(2x+1)\ln 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^5}}$.

A. $\mathscr{D} = (\ln 5; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = [\ln 5; +\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{5\}$. **D.** $\mathscr{D} = (5; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau đây 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu phần trăm diện tích hiện nay?

A. $(1-x)^4$. **B.** $1 - \dfrac{4x}{100}$. **C.** $1 - \left(\dfrac{x}{100}\right)^4$. **D.** $\left(1 - \dfrac{x}{100}\right)^4$.

Lời giải.

Diện tích rừng lúc đầu là S, diện tích rừng sau 4 năm là S_0; $x\% = \dfrac{x}{100}$. Ta có

$$S = S_0\left(1 - \frac{x}{100}\right)^n = S_0\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{S}{S_0} = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho hàm số $y = 3^{x+1}$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $y'(1) = \dfrac{9}{\ln 3}$. **B.** $y'(1) = 3\ln 3$. **C.** $y'(1) = 9\ln 3$. **D.** $y'(1) = \dfrac{3}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3^{x+1}\ln 3$ nên $y'(1) = 9\ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Cho hàm số $y = (a+1)^x$ với $a > -1$ và $a \neq 0$. Tập giá trị của hàm số đã cho là

A. $[0; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $a > -1$ và $a \neq 0$, ta có $(a+1)^x > 0\,\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó tập giá trị của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho các hàm số $y = \log_{2018} x$, $y = \left(\dfrac{\pi}{e}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số nghịch biến trên tập xác định của hàm số đó?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Có hai hàm số nghịch biến trên tập xác định của hàm số đó là $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ và $y = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_2 x$. **B.** $y = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$. **C.** $y = e^{-x}$. **D.** $y = \log_{\frac{2}{5}} x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2 x$ $(x > 0)$ có $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 2} > 0$, $\forall x > 0$ nên là hàm đồng biến.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

A. $[0; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_3 x$ xác định trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Tính đạo hàm của hàm số $y = x \ln x$.

A. $y' = \ln x + 1$. **B.** $y' = \ln x$. **C.** $y' = \ln x - 1$. **D.** $y' = \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

$y' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Cho các số thực x, y và a thỏa mãn $x > y$, $a > 1$. Khi đó, điều nào sau đây là đúng?

A. $a^x < a^y$. **B.** $a^x \leq a^y$. **C.** $a^x > a^y$. **D.** $a^x \geq a^y$.

Lời giải.

Hàm số $f(t) = a^t$, $a > 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x > y \Rightarrow a^x > a^y$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_3(-x^2 + 3x)$.

A. $\mathscr{D} = (0; 3)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

C. $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(10 - 2x)$ là gì?

A. $(-\infty; 2)$. **B.** $(5; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 10)$. **D.** $(-\infty; 5)$.

Lời giải.

Điều kiện: $10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 5$. Suy ra tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x + 2017$ là

A. $y' = \dfrac{5^x}{5 \ln 5}$. **B.** $y' = 5^x \ln 5$. **C.** $y' = \dfrac{5^x}{\ln 5}$. **D.** $y' = 5^x$.

Lời giải.

$y = 5^x + 2017 \Rightarrow y' = 5^x . \ln 5$

Chọn đáp án B □

Câu 93. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log(2x + 1)$.

A. $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 10}$. **B.** $y' = \dfrac{2}{2x+1}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 10}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2x+1}$.

Lời giải.

$y = \log(2x + 1) \Rightarrow y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 10}$

Chọn đáp án A □

Câu 94. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_2 \dfrac{x+3}{x-2}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = (2; +\infty)$.

C. $\mathscr{D} = (-3; 2)$. **D.** $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định : $\dfrac{x+3}{x-2} > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Vậy $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_2 \sqrt{6-x}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; 6]$. **B.** $\mathscr{D} = (6; +\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = (-\infty; 6)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-2)$.

A. $y' = \dfrac{1}{(2x-2)\ln 3}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{x-1}$. **C.** $\dfrac{1}{(x-1)\ln 3}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2x-2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(2x-2)\ln 3} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 97. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^{1-2x}$.

A. $y' = 3^{1-2x}\ln 3$. **B.** $y' = (1-2x)3^{-2x}$. **C.** $y' = -2.3^{1-2x}\ln 3$. **D.** -2.3^{1-2x}.

Lời giải.

Ta có $y' = (1-2x)'3^{1-2x}\ln 3 = -2.3^{1-2x}\ln 3$

Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}} x$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. **B.** Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $M(0; 1)$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy. **D.** Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox.

Lời giải.

Ta có: Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ có tiệm cận đứng là trục Oy.

Chọn đáp án (C) □

Câu 99. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. **B.** $y = \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x$. **C.** $y = (0,5)^x$. **D.** $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$.

Lời giải.

Ta có: $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_3(3-x)$.

A. $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **C.** $\mathscr{D} = (-\infty; 3)$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3-x>0 \Leftrightarrow x<3$. Suy ra, $\mathscr{D}=(-\infty;3)$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. D	5. D	6. B	7. D	8. C	9. A	10. A
11. C	12. C	13. D	14. D	15. C	16. C	17. C	18. B	19. A	20. B
21. A	22. B	23. A	24. B	25. B	26. D	27. A	28. B	29. A	30. B
31. B	32. D	33. B	34. A	35. D	36. B	37. A	38. D	39. B	40. A
41. C	42. C	43. A	44. C	45. D	46. A	47. A	48. C	49. B	50. A
51. C	52. D	53. C	54. B	55. B	56. C	57. D	58. C	59. C	60. D
61. D	62. A	63. A	64. A	65. A	66. A	67. A	68. B	69. A	70. C
71. B	72. B	73. B	74. C	75. B	76. B	77. B	78. C	79. A	80. C
81. D	82. D	83. C	84. C	85. C	86. A	87. D	88. A	89. C	90. A
91. D	92. B	93. A	94. D	95. C	96. C	97. C	98. C	99. D	100. C

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đồng biến khi $a>1$.

B. Hàm số logarit $y=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

C. Hàm số mũ $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số mũ $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng tính chất hàm mũ và lôgarit.

- Hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đồng biến khi $a>1$ và nghịch biến khi $0<a<1$.
- Hàm số lôgarit $y=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$ có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị $\mathbb{R}$; đồ thị có tiệm cận đứng là trục Ox.
- Hàm số mũ $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị $(0;+\infty)$; đồ thị có tiệm cận ngang là trục Oy.

Cách giải:

Phát biểu sai là: Hàm số mũ $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

Sửa lại: Hàm số mũ $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Ông Toán gửi ngân hàng 150 triệu đồng với lãi suất 0,8%/tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm số tiền lãi ông Toán thu được là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đồng)

A. 15.050.000 đồng. **B**. 165.050.000 đồng. **C**. 165.051.000 đồng. **D**. 15.051.000 đồng.

Lời giải.

Ta có $P_n=P_0\cdot(1+r)^n$, trong đó P_0 là số tiền gửi ban đầu; r là lãi suất; n là số kỳ hạn đã gửi.

Số tiền ông Toán thu được sau 1 năm là $P_{12}=150.000.000\cdot(1+0.8\%)^{12}=165.050.000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_8(6x-5)$.

A. $y'=\dfrac{2}{(6x-5)\ln 2}$. **B**. $y'=\dfrac{1}{(6x-5)\ln 8}$. **C**. $y'=\dfrac{6}{6x-5}$. **D**. $y'=\dfrac{6}{(6x-5)\ln 4}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(6x-5)'}{(6x-5)\cdot\ln 8}=\dfrac{6}{3(6x-5)\cdot\ln 2}=\dfrac{2}{(6x-5)\cdot\ln 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$. **B**. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$. **C**. $y=\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^x$. **D**. $y=\log_2 x$.

Lời giải.

Nhận xét:

☑ Hàm số $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì cơ số $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)<1$.

☑ Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ có tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$ nên không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

☑ $y=\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì có cơ số $\left(\dfrac{4}{\pi}\right)>1$.

☑ Hàm số $y=\log_2 x$ có tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$ nên không thể nghich biến hoặc đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-3x-4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash(-1;4)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2-3x-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<-1.\end{array}\right.$

Vậy $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Hàm số $f(x)=\log_2(x^2-2x)$ có đạo hàm

A. $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x^2-2x}$. **B.** $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$.

C. $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$. **D.** $f'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Lời giải.

$$f'(x)=(\log_2(x^2-2x))'=\frac{(x^2-2x)}{(x^2-2x)\ln 2}=\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Hàm số $y=(x^2-x+1)\mathrm{e}^x$ có đạo hàm là

A. $y'=(2x-1)\mathrm{e}^x$. **B.** $y'=(x^2-x)\mathrm{e}^x$. **C.** $y'=(x^2+x)\mathrm{e}^x$. **D.** $y'=(x^2+1)\mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=(x^2-x+1)'\,\mathrm{e}^x+(x^2-x+1)\,(\mathrm{e}^x)'=(x^2+x)\,\mathrm{e}^x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào không xác định trên $\mathbb{R}$?

A. $y=3^x$. **B.** $y=\log(x^2)$. **C.** $y=\ln(|x|+1)$. **D.** $y=(0{,}3)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y=\log(x^2)$ xác định khi $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Với giá trị nào của x thì biểu thức $B=\log_2(2x-1)$ xác định?

A. $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $x\in(-1;+\infty)$. **C.** $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Để biểu thức $B=\log_2(2x-1)$ xác định thì $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

A. $y=2^{1-3x}$. **B.** $y=\log_2(x-1)$. **C.** $y=\log_2(2^x+1)$. **D.** $y=\log_2(x^2+1)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\log_2(2^x+1)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=\dfrac{2^x}{2^x+1}>0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=\log_2(2^x+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho $9^x+9^{-x}=14$. Khi đó biểu thức $M=\dfrac{2+81^x+81^{-x}}{11-3^x-3^{-x}}$ có giá trị bằng

A. 14. **B.** 49. **C.** 42. **D.** 28.

Lời giải.

☑ $81^x+81^{-x}=9^{2x}+9^{-2x}=(9^x+9^{-x})^2-2\cdot 9^x\cdot 9^{-x}=(9^x+9^{-x})^2-2=194$.

☑ $(3^x+3^{-x})^2=9^x+9^{-x}+2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x+3^{-x}=4\\3^x+3^{-x}=-4(\text{ vô lý})\end{array}\right.\Rightarrow 3^x+3^{-x}=4$.

Từ đó suy ra $M=\dfrac{2+81^x+81^{-x}}{11-3^x-3^{-x}}=\dfrac{2+81^x+81^{-x}}{11-(3^x+3^{-x})}=\dfrac{2+194}{11-4}=28$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong các hàm số dưới đây, đồ thị hàm số nào nhận trục tung là đường tiệm cận?

A. $y=\log_3 x$. **B.** $y=\dfrac{1}{3^x}$. **C.** $y=\dfrac{1}{x+1}$. **D.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng:

① Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq-\dfrac{d}{c}\right)$ nhận đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ làm tiệm cận đứng.

② Đồ thị hàm số $y=\log_a x,(x>0)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

③ Đồ thị hàm số $y=a^x,(a>0)$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang (không có tiệm cận đứng).

Cách giải:

① Đồ thị hàm số $y=\log_3 x,(x>0)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

② Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3^x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ và $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang (không có tiệm cận đứng).

③ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng và $y=0$ làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Hàm số $y=3^{x^2+2}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{3^{x^2+2}}{\ln 3}$. **B.** $y'=\dfrac{2x\cdot 3^{x^2+2}}{\ln 3}$. **C.** $y'=2x\cdot 3^{x^2+2}\cdot\ln 3$. **D.** $y'=2x\cdot 3^{x^2+2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(3^{x^2+2}\right)'=3^{x^2+2}\ln 3\cdot(x^2+2)'=2x\cdot 3^{x^2+2}\ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x\quad(0<a\neq 1)$ qua điểm $I(2;2)$. Giá trị của $f(4-a^{2018})$ là

A. -2020. **B.** 2014. **C.** -2014. **D.** 2020.

Lời giải.

Gọi $M\left(x;\log_a x\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\log_a x$ thì điểm đối xứng với M qua I là $M'\left(4-x;4-\log_a x\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Do đó $f\left(4-x\right)=4-\log_a x$. Suy ra: $f\left(4-a^{2018}\right)=4-\log_a a^{2018}=-2014$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$?

A. 2020. **B**. 2021. **C**. 2018. **D**. 2019.

Lời giải.

Đặt $t=lnx$. Khi đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)=\dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-3m+6>0\\ 3m\notin(0;6)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<2\\ m\le 0 \text{ hoặc } m\ge 2\end{cases}\Rightarrow m\le 0.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2019,-2018,...,0\}$.

Vậy có tất cả 2020 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{\log x+1}-1$.

A. $\mathscr{D}=(10;+\infty)$. **B**. $\mathscr{D}=(9;+\infty)$. **C**. $\mathscr{D}=(-\infty;9)$. **D**. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\ \log x+1-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ \log x+1\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ x+1\ge 10\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 9.$

Vậy $\mathscr{D}=(9;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

A. 30 tháng. **B**. 40 tháng. **C**. 35 tháng. **D**. 31 tháng.

Lời giải.

Ta có $T=\dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$.

Giả sử sau n tháng sau anh A nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có

$$\frac{3}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n-1\right](1+0,6\%)>100\Leftrightarrow n>30,3.$$

Vậy sau ít nhất sau 31 tháng thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$. **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.

C. $D=[-3;2]$. **D.** $D=(-3;2)$.

Lời giải.

Hàm số $\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ có nghĩa khi $\dfrac{x+3}{2-x}>0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{3}}x$. **C.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2+1)$. **D.** $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y=a^x$ với $0<a<1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải:

Xét đáp án A có: $\dfrac{\pi}{3}\approx 1.047>0\Rightarrow y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên loại đáp án A.

Loại đáp án B vì TXĐ là:$(0;+\infty)$.

Xét đáp án C có: $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln\dfrac{\pi}{4}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow$ hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow$ loại đáp án C.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$ là

A. $\mathscr{D}=[1;2]$. **B.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=(1;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Lời giải.

Phương pháp

Hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)>0$

Hàm số $y=\ln f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)>0$

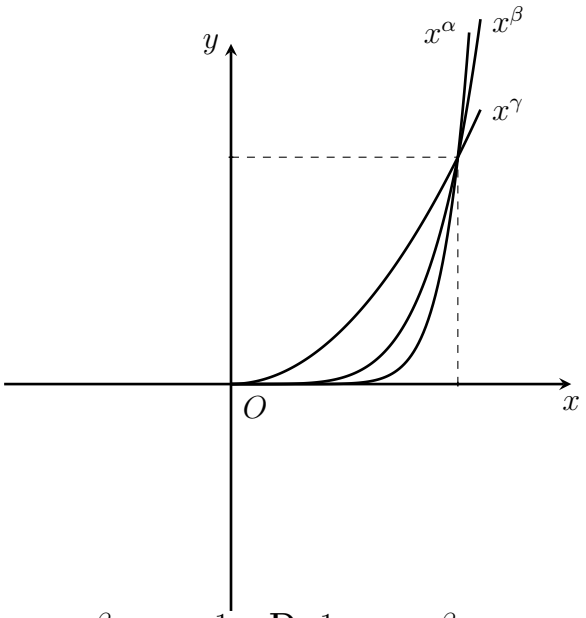
Cách giải:

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}2-x>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>1\end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21.

Cho đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$; $y=x^{\beta}$; $y=x^{\gamma}$ trên $(0;+\infty)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\gamma<\beta<\alpha<0$. **B.** $0<\gamma<\beta<\alpha<1$. **C.** $0<\alpha<\beta<\gamma<1$. **D.** $1<\gamma<\beta<\alpha$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng đơn điệu của hàm số mũ $y=a^x$: Với $0<a<1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với $a>1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải:

Ta có: $a<x<1$ thì $x^{\alpha}<x^{\beta}<x^{\gamma}<x^2 \Rightarrow \alpha>\beta>\gamma>1$

Với $x>1$ thì : $a^1<x^{\gamma}<x^{\beta}<x^{\alpha} \Rightarrow 1<\gamma<\beta<\alpha$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};3\right]$ theo thứ tự là

A. 1 và e. **B.** 1 và $\frac{1}{2}+\ln 2$. **C.** 1 và $\mathrm{e}-1$. **D.** $\frac{1}{2}+\ln 2$ và $\mathrm{e}-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=1-\frac{1}{x}$, suy ra $y'=0 \Leftrightarrow x=1 \in \left(\frac{1}{2};3\right)$. Do đó $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2, y(1)=1, y(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y=\mathrm{e}-1$ và $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};3\right]} y=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{2^x}{\ln 2}-2x+3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. **B.** Hàm số có giá trị cực tiểu là $y=\frac{2}{\ln 2}+1$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số đạt cực trị tại $x=1$.

Lời giải.

Ta có $y'=2^x-2 \Rightarrow \forall x \in (0;1), y'>0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 80 triệu đồng

(cả vốn ban đầu lẫn lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 4 năm. **B**. 7 năm. **C**. 5 năm. **D**. 6 năm.

Lời giải.

Số tiền người đó thu được sau n năm là $P = A\left(1+r\right)^n = 50\left(1+8{,}4\%\right)^n$ (triệu đồng).

$P \geq 80 \Leftrightarrow 1{,}084^n \geq \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}084}\dfrac{8}{5} \approx 5{,}83.$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\log_2(5-x)}$ là

A. $(-\infty;5)\setminus\{4\}$. **B**. $(5;\infty)$. **C**. $(-\infty,5)$. **D**. $[5;+\infty)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện $\begin{cases} 5-x>0 \\ \log_2(5-x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ 5-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

☑ Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty;5)\setminus\{4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Hàm số $y = \ln\left(x^2+mx+1\right)$ xác định với mọi giá trị của x khi

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ \\ m>2 \end{array}\right.$. **B**. $m>2$. **C**. $-2<m<2$. **D**. $m<2$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2+mx+1>0, \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2.$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.

D. Hàm số đã cho có tập xác định là $D = R\setminus\{0\}$.

Lời giải.

Phương pháp: Xét hàm số $y = \log_a x$ ta có:

+) TXĐ: $D = (0;+\infty)$.

+) Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm TCĐ.

+) Có $a>1$ thì hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $0<a<1$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

+) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;0),(a;1)$ và nằm bên phải trục tung.

Cách giải: Tập xác định của hàm số: $|x|>0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Rightarrow$ đáp án D đúng.

Ta có: $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x & \text{khi} \quad x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x) & \text{khi} \quad x<0\end{cases}$.

Vì $0<a=\dfrac{1}{2}<1 \Rightarrow$ hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-4x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m>-4$. **B.** $m<0$. **C.** $m<-4$. **D.** $m<-3$.

Lời giải.

Hàm số $y=\log\left(x^2-4x-m+1\right)$ xác định khi và chỉ khi $x^2-4x-m+1>0$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1>0\\ 16+4m-4<0\end{cases} \Leftrightarrow m<-3$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\log_3 x^2$. **B.** $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$. **C.** $y=\log x^3$. **D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{-x}$.

Lời giải.

Do $\dfrac{\mathrm{e}}{4}<1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là

A. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. **D.** $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$.

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathrm{R}\setminus\{0\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

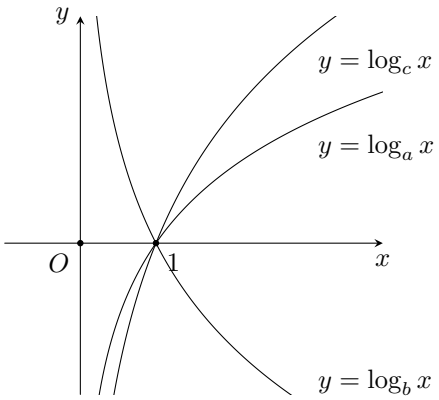
Hàm số xác định khi $x>0$. Tập xác định của hàm số là $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \log_x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b < c < a$. **B**. $b < a < c$. **C**. $a < b < c$. **D**. $c < a < b$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số suy ra $b < 1 < c < a$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hàm số $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số chẵn.

B. Tập giá trị của hàm số $y = \ln(x^2+1)$ là $[0; +\infty)$.

C. Hàm số $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

D. $\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

☑ $y(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $y(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow \exists x\colon y(x) \neq y(-x)$. Nên hàm số $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ không là hàm chẵn.

☑ Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên $\ln(x^2+1) \geq \ln 1 = 0$. Vậy Tập giá trị của hàm số $y = \ln(x^2+1)$ là $[0; +\infty)$.

☑ Hàm số $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ xác định khi và chỉ khi $\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x$ (hiển nhiên).

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]' &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \log_2 \dfrac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 2}$.

A. $\mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$. **B**. $[0; 1) \cup (2; +\infty)$. **C**. $(2; +\infty)$. **D**. $[0; +\infty) \setminus \{2\}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định khi

$$\frac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1 \\ 2 < x. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Hàm số $y = x2^x$ có đạo hàm là

A. $y' = (1 - x\ln 2)2^x$. **B.** $y' = (1 + x\ln 2)2^x$. **C.** $y' = (1 + x)2^x$. **D.** $y' = 2^x + x^2 2^{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x2^x)' = 2^x + x2^x \ln 2 = (1 + x\ln 2)2^x$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là

A. $f'(x) = \frac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **B.** $f'(x) = \frac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **D.** $f'(x) = \frac{1}{\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức đạo hàm của các hàm số cơ bản và hàm hợp $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Cách giải:

Ta có $f'(x) = \left(\sqrt{\ln(\ln x)}\right)' = \frac{[\ln(\ln x)]'}{2\sqrt{\ln(\ln x)}} = \frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{2\sqrt{\ln(\ln x)}} = \frac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{4x+x^2}$ trên đoạn $[-3;0]$.

A. $\frac{1}{e^2}$. **B.** e^3. **C.** $\frac{1}{e^3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $f(x) = e^{4x+x^2} \Rightarrow f'(x) = (4 + 2x)\cdot e^{4x+x^2}$.

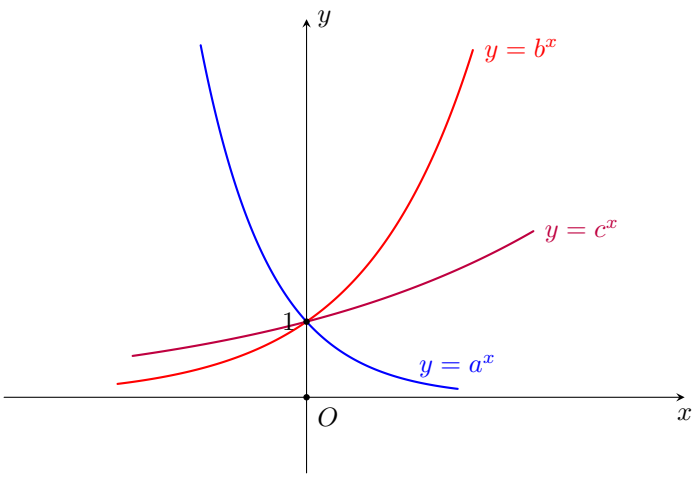
$f'(x) = 0 \Rightarrow (4 + x)\cdot e^{4x+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-3;0]$.

Khi đó $f(-3) = e^{-3}$; $f(-2) = e^{-4}$; $f(0) = 1$.

Nên $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$; $y = b^x$; $y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<1<c<b$. **B.** $1<a<c<b$. **C.** $1<a<b<c$. **D.** $a<1<b<c$.

Lời giải.

Do hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow a<1$.

Do hàm số $y=b^x$ và $y=c^x$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow b;c>1$.

Ta có: $\forall x \in (0;+\infty):\ b^x>c^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{c}\right)^x>1 \Rightarrow \dfrac{b}{c}>1 \Rightarrow b>c$. Vậy $a<1<c<b$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{-2x^2+5x-2}+\ln\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^2-1}}$.

A. $\mathscr{D}=[1;2]$. **B.** $\mathscr{D}=(1;2)$. **C.** $\mathscr{D}=[1;2)$. **D.** $\mathscr{D}=(1;2]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} -2x^2+5x-2\geq 0 \\ \dfrac{1}{x^2-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\leq x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leq 2.$

Vậy $\mathscr{D}=(1;2]$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$ là:

A. $f'(x)=-\dfrac{2}{(3^x+1)^2}\cdot 3^x$. **B.** $f'(x)=\dfrac{2}{(3^x+1)^2}\cdot 3^x$.

C. $f'(x)=\dfrac{2}{(3^x+1)^2}\cdot 3^x\ln 3$. **D.** $f'(x)=-\dfrac{2}{(3^x+1)^2}\cdot 3^x\ln 3$.

Lời giải.

$$f'(x)=\frac{(3^x-1)'(3^x+1)-(3^x-1)(3^x+1)'}{(3^x+1)^2}$$
$$=\frac{3^x\ln 3\,(3^x+1)-(3^x-1)3^x\ln 3}{(3^x+1)^2}=\frac{3^x\ln 3\,(3^x+1-3^x+1)}{(3^x+1)^2}=\frac{2}{(3^x+1)^2}\cdot 3^x\ln 3$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\log_2 x}{x}$ là

A. $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. **B.** $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$. **C.** $f'(x)=\dfrac{1-\log_2 x}{x^2\ln 2}$. **D.** $f'(x)=\dfrac{1-\log_2 x}{x^2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(\log_2 x)'\cdot x-(\log_2 x)\cdot (x)'}{x^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}x-\log_2 x}{x^2}=\dfrac{\dfrac{1}{\ln 2}-\log_2 x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá khoảng 600.000 đồng để làm quà cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống tiết kiệm 10.000 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ liên tục những ngày sau, mỗi ngày bạn bỏ ống tiết kiệm 5.000 đồng. Biết trong năm đó, tháng 1 có 31 ngày, tháng 2 có 28 ngày, tháng 3 có 31 ngày và tháng 4 có 30 ngày. Gọi a (đồng) là số tiền An có được đến sinh nhật của mình (ngày sinh nhật An không bỏ tiền vào ống). Khi đó ta có

A. $a \in [610000; 615000)$. **B**. $a \in [605000; 610000)$.

C. $a \in [600000; 605000)$. **D**. $a \in [595000; 600000)$.

Lời giải.

Theo giả thiết An quyết định bỏ ống tiết kiệm vào ngày 1 tháng 1 đến ngày 30 tháng 4 nên tổng số ngày bạn An bỏ tiết kiệm là 120 ngày.

Ngày thứ nhất An bỏ ống tiết kiệm là 10.000 đồng.

119 ngày sao đó An bỏ ống là $119 \cdot 5000 = (120-1) \cdot 5000 = 600.000 - 5000$ đồng.

Vậy tổng số tiền An bỏ ống tiết kiệm là $600.000 - 5000 + 10.000 = 605.000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. 130.650.280 (đồng). **B**. 30.650.000 (đồng). **C**. 139.795.799 (đồng). **D**. 139.795.800 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n , với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có: $T_1 = T_0 + rT_0 = T_0(1+r)$ Đầu năm thứ 2 , người đó có tổng số tiền là:

$$T_0(1+r) + T_0 = T_0[(1+r)+1] = \frac{T_0}{[(1+r)-1]}\left[(1+r)^2 - 1\right] = \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right]$$

Do đó: $T_2 = \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right] + \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right] r = \frac{T_0}{r}\left[(1+r^2) - 1\right](1+r)$

Tổng quát: Ta có: $T_n = \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$

Áp dụng vào bài toán, ta có: $10^9 = \frac{T_0}{0,07}\left[(1+0,07)^6 - 1\right](1+0,07) \Rightarrow T_0 \approx 130.650.280$ đồng

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = 3^x \cdot 2^x$. Khi đó đạo hàm $f'(x)$ của hàm số là

A. $f'(x) = 3^x \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 3$. **B**. $f'(x) = 6^x \ln 6$.

C. $f'(x) = 2^x \ln 2 - 3^x \ln x$. **D**. $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln x$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 3^x \cdot 2^x = (3 \cdot 2)^x = 6^x$. Cho nên $f'(x) = 6^x \ln 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$. **B**. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$. **C**. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. **D**. $y = \log_2(\sqrt{x}+1)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Hàm số $y = \log_a x\,(0 < a \neq 1)$ đồng biến trên TXĐ khi $a > 1$ và nghịch biến trên TXĐ khi $0 < a < 1$.

Hàm số $y = a^x\,(0 < a \neq 1)$ đồng biến trên TXĐ khi $a > 1$ và nghịch biến trên TXĐ khi $0 < a < 1$.

Cách giải:

Đáp án A: $\sqrt{3} > 1$, nên hàm số đồng biến trên TXĐ.
Đáp án B: $\dfrac{\pi}{4} < 1$, nên hàm số nghịch biến trên TXĐ.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. **B.** $y = \log_{\frac{\pi}{3}} (x^2+1)$. **C.** $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **D.** $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

☑ Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ có tập xác định là $(0;+\infty)$ và có cơ số $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ nên nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y = \log_{\frac{\pi}{3}} (x^2+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln\dfrac{\pi}{3}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên y' đổi dấu khi qua $x = 0$, suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

☑ Hàm số $y = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $0 < \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

☑ Hàm số $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $\dfrac{\pi}{3} > 1$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Hàm số $f(x) = \log_2 (x^2-2x)$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x^2-2x}$. **B.** $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$.

C. $f'(x) = \dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$. **D.** $f'(x) = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2} = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5(x^2+x+1)$

A. $y' = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 5}$. **B.** $y' = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)}$.

C. $y' = (2x+1)\ln 5$. **D.** $y' = \dfrac{1}{(x^2+x+1)\ln 5}$.

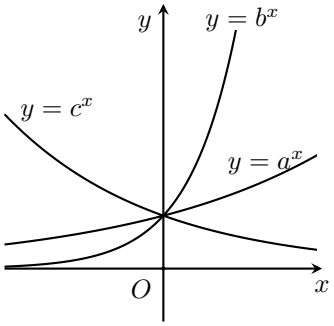
Câu 49. Cho hàm số $y = \sqrt{4+3x-x^2} + \dfrac{1}{\log_3 x^2} + (16-x^2)^{\frac{2}{3}}$ có tập xác định là $\mathcal{D}$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc $\mathcal{D}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 50.

Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$, trong đó a,b,c là các số thực dương khác 1,được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>b>c$. **B.** $b>a>c$. **C.** $a>c>b$. **D.** $c>b>a$.



Lời giải.

Vẽ đường thẳng $x=1$ cắt các đồ thị hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ lần lượt tại các điểm có tung độ bằng a,b,c. Từ đồ thị suy ra $b>a>c$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4(x-6)+\log_4(x+6)=3$.

A. $S=\{-\sqrt{117};\sqrt{117}\}$. **B.** $S=\{\sqrt{117}\}$.

C. $S=\{10\}$. **D.** $S=\{10;-10\}$.

Câu 52. Số nghiệm của phương trình $2^x-2^{2-x}=\sqrt{2}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 53. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log(\ln 2x)$.

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln 2x}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 2x.\ln 10}$. **C.** $y'=\dfrac{2}{x\ln 2x.\ln 10}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{2x\ln 2x.\ln 10}$.

Câu 54. Tính đạo hàm của hàm số $y=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x$.

A. $y'=2x-2+\mathrm{e}^x$. **B.** $y'=(2x-2)\mathrm{e}^x$. **C.** $y'=x^2+\mathrm{e}^x$. **D.** $y'=x^2.\mathrm{e}^x$.

Câu 55. Hàm số nào sau đây có cực trị?

A. $y=x^3+1$. **B.** $y=\ln(x+1)$. **C.** $y=x.\mathrm{e}^x$. **D.** $y=\mathrm{e}^x$.

Câu 56. Tìm tập xác định của hàm số $y=\log\dfrac{x-2}{1-x}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **B.** $\mathscr{D}=(1;2)$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1;2\}$.

Câu 57. Trong các hàm số $f(x)=\ln\dfrac{1}{\sin x}; g(x)=\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}; h(x)=\ln\dfrac{1}{\cos x}$, hàm số nào có đạo hàm bằng $\dfrac{1}{\cos x}$?

A. $g(x)$. **B.** $h(x)$. **C.** Không có. **D.** $f(x)$.

Câu 58. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2^{1-2x}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} f(x)=\dfrac{1}{4}$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} f(x)=-2$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} f(x)=\dfrac{1}{8}$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} f(x)=2$.

Câu 59. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\sqrt{3}-1\right)^x$. **B.** $y=\log_5(x+1)$. **C.** $y=\left(\sqrt{3}+1\right)^x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

Câu 60. Cho a là số dương khác 1. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$.

B. Hai đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

C. Hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ có cùng tập giá trị.

D. Hai đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đều có đường tiệm cận.

Lời giải.

Ta có: hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

Hàm số $y=\log_a x$ có tập giá trị là $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Cho a,b,c là các số dương $(a,b\neq 1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b(\alpha\neq 0)$.

B. $\log_a\left(\dfrac{b}{a^3}\right)=\dfrac{1}{3}\log_a b$.

C. $a^{\log_b a}=b$.

D. $\log_a c=\log_b c\cdot\log_a b$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a c=\log_a b\cdot\log_b c$

Chọn đáp án D □

Câu 62. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_3(2x-1)$.

A. $y'=\dfrac{1}{2x-1}$.

B. $y'=\dfrac{2}{(2x-1)\ln 3}$.

C. $y'=\dfrac{2}{2x-1}$.

D. $y'=\dfrac{1}{(2x-1)\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(2x-1)'}{(2x-1)\ln 3}=\dfrac{2}{(2x-1)\ln 3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **không đúng**?

A. Đạo hàm của hàm số là $y'=\dfrac{\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}$.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;e^3]$ là 0.

C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

D. Tập xác định của hàm số là $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ xác định khi $x>0\Rightarrow$ Tập xác định là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$ suy ra C sai, D đúng.

Đạo hàm của hàm số $y'=\dfrac{(\ln^2 x)'\cdot x-x'\cdot\ln^2 x}{x^2}=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$ suy ra A đúng.

Cho $y'=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=e^2\end{array}\right.$. Tính $\left\{\begin{array}{l}y(1)=0\\ y(e^2)=\dfrac{4}{e^2}\\ y(e^3)=\dfrac{9}{e^3}\end{array}\right.\Rightarrow\min\limits_{[1;e^3]}y=0$ suy ra B đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho α là một số thực dương khác 1. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

① Hàm số $y=\log_\alpha x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

② Hàm số $y=\log_\alpha x$ là hàm đơn điệu trên khoảng $(0;+\infty)$.

③ Đồ thị hàm số $y=\log_\alpha x$ và đồ thị hàm số $y=\alpha^x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

④ Đồ thị hàm số $y=\log_\alpha x$ nhận Ox là một tiệm cận.

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Hàm số $y=\log_\alpha x$ có tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$ nên mệnh đề 1 đúng.

Hàm số $y=\log_\alpha x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nếu $\alpha>1$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nếu $0<\alpha<1$ nên mệnh đề 2 đúng.

Đồ thị hàm số $y=\log_\alpha x$ và đồ thị hàm số $y=\alpha^x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ nên mệnh đề

3 đúng.

Đồ thị hàm số $y = \log_\alpha x$ nhận Oy là một tiệm cận nên mệnh đề 4 sai.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Tập xác định của hàm số $y = \ln\left(x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 10}\right)$ là

A. $5 \le x \le 14$. **B.** $2 < x < 14$. **C.** $2 \le x < 14$. **D.** $5 \le x < 14$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x - 2 > \sqrt{x^2 - 3x - 10} \\ x^2 - 3x - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 4x + 4 > x^2 - 3x - 10 \\ x^2 - 3x - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x < 14$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá khoảng 600.000 đồng để làm quà cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống tiết kiệm 10.000 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ liên tục những ngày sau, mỗi ngày bạn bỏ ống tiết kiệm 5.000 đồng. Biết trong năm đó, tháng 1 có 31 ngày, tháng 2 có 28 ngày, tháng 3 có 31 ngày và tháng 4 có 30 ngày. Gọi a (đồng) là số tiền An có được đến sinh nhật của mình (ngày sinh nhật An không bỏ tiền vào ống). Khi đó ta có

A. $a \in [610000; 615000)$. **B.** $a \in [605000; 610000)$.

C. $a \in [600000; 605000)$. **D.** $a \in [595000; 600000)$.

Lời giải.

Theo giả thiết An quyết định bỏ ống tiết kiệm vào ngày 1 tháng 1 đến ngày 30 tháng 4 nên tổng số ngày bạn An bỏ tiết kiệm là 120 ngày.

Ngày thứ nhất An bỏ ống tiết kiệm là 10.000 đồng.

119 ngày sao đó An bỏ ống là $119 \cdot 5000 = (120 - 1) \cdot 5000 = 600.000 - 5000$ đồng.

Vậy tổng số tiền An bỏ ống tiết kiệm là $600.000 - 5000 + 10.000 = 605.000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho hàm số $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $M = \frac{1}{2}$. **B.** $M = \frac{7}{8} + \ln 2$. **C.** $M = \frac{7}{8} - \ln 2$. **D.** $M = \ln 2 - 1$.

Lời giải.

$y' = \frac{1}{x} - x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right] \\ x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \end{array}\right.$.

$f(1) = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{7}{8} - \ln 2$; $f(2) = \ln 2 - 1$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Tính đạo hàm của hàm số $y = x \cdot e^x$.

A. $y = e^x$. **B.** $y = e^x - xe^x$. **C.** $y = (x+1)e^x$. **D.** $y = x + e^x$.

Lời giải.

Ta có $y' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x^2+1)$.

A. $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{(x^2+1)}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{(x^2+1)\ln 2}$.

Lời giải.

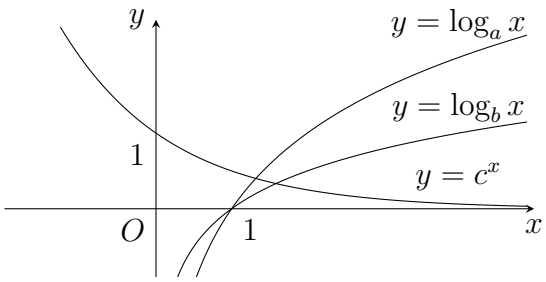
$y = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\cdot \ln 2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\cdot \ln 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = c^x$ (a, b, c là các hằng số dương khác 1) như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b < c < a$. **B.** $b > a > c$.

C. $a > b > c$. **D.** $a < b < c$.



Lời giải.

Dễ thấy hàm số $y = c^x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$.

☑ $\forall\, x > 1$ thì $\log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b$.

☑ $\forall\, 0 < x < 1$ thì $\log_a x < \log_b x \Leftrightarrow a > b$.

Vậy $c < b < a$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Một người gửi vào Ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất $0,6\%$ tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì số tiền người đó là bao nhiêu?

A. $55,664000$ triệu. **B.** $54,694000$ triệu. **C.** $55,022000$ triệu. **D.** $54,368000$ triệu.

Lời giải.

Sau khi hết kì hạn, số tiền người đó nhận được là

$$T = 50 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0,6\%)^{15} = 54,694000 \text{ triệu.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = \mathrm{e}^{\sin 3x}$. Giá trị của $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng

A. -3. **B.** $-\sqrt{3\mathrm{e}}$. **C.** $\sqrt{3\mathrm{e}}$. **D.** 3.

Lời giải.

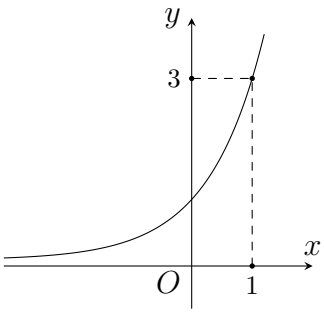
Ta có $f'(x) = 3 \cdot \cos 3x \cdot \mathrm{e}^{\sin 3x}$.

Ta được $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \cos \pi \cdot \mathrm{e}^{\sin \pi} = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 73.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. **B.** $y=3^{-x}$. **C.** $y=\dfrac{3}{3^{x-1}}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$.

Lời giải.

Ta thấy $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$.

Ta có đồ thị hàm số $y=3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và đi qua điểm $A(1;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1;e^3]$ bằng

A. $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{9}{\mathrm{e}^3}$. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-\ln^2 x+2\ln x}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\mathrm{e}^2.\end{array}\right.$

Ta có $\left\{\begin{array}{l}y(1)=0\\y(\mathrm{e}^2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\\y(\mathrm{e}^3)=\dfrac{9}{\mathrm{e}^3}\end{array}\right.\Rightarrow\max\limits_{x\in[1;\mathrm{e}^3]}y=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt[3]{2x-9}+(x-3)^{\frac{5}{3}}$.

A. $\mathscr{D}=(3;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **C.** $\mathscr{D}=\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{3;\dfrac{9}{3}\right\}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là tập nghiệm của bất phương trình $x-3>0\Leftrightarrow x>3$. Vậy $\mathscr{D}=(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x+e^x)$.

A. $y'=\dfrac{1+e^x}{\ln 2}$. **B.** $y'=\dfrac{1+e^x}{x+e^x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{(x+e^x)\ln 2}$. **D.** $y'=\dfrac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{(x+e^x)'}{(x+e^x)\ln 2}=\dfrac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Hàm số $F(x)=x^2\ln(\sin x-\cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sin x-\cos x}$.

B. $f(x)=2x\ln(\sin x-\cos x)+\dfrac{x^2}{\sin x-\cos x}$.

C. $f(x)=2x\ln(\sin x-\cos x)+\dfrac{x^2(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}$.

D. $f(x)=\dfrac{x^2(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=F'(x)=2x\ln(\sin x-\cos x)+x^2\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)=\log_3\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\right)$. Khi đó $f'(1)$ bằng

A. $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$. **B**. $\dfrac{2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$. **C**. $\dfrac{4\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$. **D**. $\dfrac{2}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\log_3\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\cdot\ln 3}\cdot\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}-1}{2018}=\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}-1}{(\mathrm{e}^{x^2}-x)\cdot\ln 3}$.

Suy ra $f'(1)=\dfrac{2\cdot 1\cdot\mathrm{e}^1-1}{(\mathrm{e}^1-1)\cdot\ln 3}=\dfrac{2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây **sai**?

A. Hàm số $y=\left(\dfrac{2018}{\pi}\right)^{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=\log x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số $y=\ln(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

☑ Các hàm số $y=\log x$ và $y=2^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên đồng biến trên các khoảng xác định.

☑ Hàm số $y=\ln(-x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;0)$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{1}{x}<0,\ \forall x\in(-\infty;0)$ nên nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

☑ Xét hàm số $y=\left(\dfrac{2018}{\pi}\right)^{x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $y'=2x\left(\dfrac{2018}{\pi}\right)^{x^2+1}\ln\left(\dfrac{2018}{\pi}\right)$.

Ta có $\begin{cases}y'>0 \text{ nếu } & x>0\\ y'<0 \text{ nếu } & x<0\end{cases}$. Nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Tìm đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

A. $y'=\dfrac{2}{2x+1}$. **B**. $y'=\dfrac{1}{2x+1}$. **C**. $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$. **D**. $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2}=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi của kỳ trước được cộng vào vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm gửi tiền vào ngân hàng gần bằng với kết quả nào sau đây. Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 212 triệu đồng. **B**. 216 triệu đồng. **C**. 210 triệu đồng. **D**. 220 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền người đó có được sau 6 tháng (2 kỳ hạn) là

$$100000000 \cdot (1 + 0{,}02)^2 = 104040000 \text{ (đồng)}.$$

Người đó gửi thêm vào 100 triệu nên số tiền gốc mới là 204040000 đồng.
Số tiền người đó có được sau 1 năm (thêm 2 kỳ hạn nữa) là

$$204040000 \cdot (1 + 0{,}02)^2 = 212238216 \text{ (đồng)}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính tổng $M + N$.

A. $M + N = 3\mathrm{e}$. **B**. $M + N = \mathrm{e}$. **C**. $M + N = 2\mathrm{e} - 1$. **D**. $M + N = 2\mathrm{e} + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \mathrm{e}^{-x} \cdot (2x - x^2)$.

Trên khoảng $(-1;1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$.

☑ $\begin{cases} y(-1) = \mathrm{e} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$

Vì hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ nên $M = \mathrm{e}$, $N = 0$. Do đó $M + N = \mathrm{e}$.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x+1}\ln x$.

A. $y' = \dfrac{x\ln x + 2(x+1)}{2x\sqrt{x+1}}$. **B**. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x+1}}$.

C. $y' = \dfrac{x + \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$. **D**. $y' = \dfrac{3x+2}{2x\sqrt{x+1}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln x + \sqrt{x+1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x\ln x + 2(x+1)}{2x\sqrt{x+1}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (2018 - x)^{\frac{1}{5}}$.

A. $\mathscr{D} = (-\infty; 2018]$. **B**. $\mathscr{D} = (-\infty; 2018)$. **C**. $\mathscr{D} = (0; 2018)$. **D**. $\mathscr{D} = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Để hàm số có nghĩa thì $2018 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2018$. Vậy $\mathscr{D} = (-\infty; 2018)$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của a để cho hàm số $f(x) = (1 + \ln a)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\dfrac{1}{e} < a < 1$. **B**. $a > 1$. **C**. $a > 0$. **D**. $a > e$.

Lời giải.

$f(x) = (1 + \ln a)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + \ln a > 1 \Leftrightarrow a > 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Tính đạo hàm của hàm số $y = x + \ln^2 x$.

A. $y' = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$. **B.** $y' = 1 + 2\ln x$. **C.** $y' = 1 + \dfrac{2}{x\ln x}$. **D.** $y' = 1 + 2x\ln x$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 1 + 2\ln x \cdot (\ln x)' = 1 + 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = -x$.

B. Đồ thị của hai hàm số $y = \mathrm{e}^x$ và $y = \ln x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

C. Đồ thị của hai hàm số $y = 2^x$ và $y = \dfrac{1}{2^x}$ đối xứng nhau qua trục hoành.

D. Đồ thị của hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ đối xứng nhau qua trục tung.

Lời giải.

Do đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$ và đồ thị hàm số $y = \ln x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất ($y = x$).

Chọn đáp án B □

Câu 88. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2}$.

A. $y' = \dfrac{x \cdot 2^{1+x^2}}{\ln 2}$. **B.** $y' = x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 4$. **C.** $y' = x^2 \cdot 2^{1+x^2}$. **D.** $y' = x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2$.

Lời giải.

Với $y = 2^{x^2}$ ta có $y' = (x^2)' \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 = 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 4$

Chọn đáp án B □

Câu 89. Tìm tập xác định của hàm số $y = 2^{\sqrt{x}} + \log(3 - x)$.

A. $[0; +\infty)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(-\infty; 3)$. **D.** $[0; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [0; 3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Chị Thanh gửi ngân hàng 155 triệu đồng, với lãi suất $1,02\%$ một quý. Hỏi sau một năm số tiền chị Thanh nhận được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn đến hàng phần nghìn)

A. $161,325$. **B.** $161,422$. **C.** $161,421$. **D.** $161,324$.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép, thì sau một năm chị Thanh sẽ nhận được số tiền là

$A = 155\,(1 + 1,02\%)^4 = 161,421$

Chọn đáp án C □

Câu 91. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ trên tập xác định của nó là

A. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **B.** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

C. $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **D.** $f'(x) = \dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

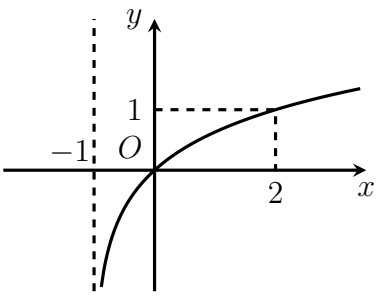
Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(\ln(\ln x))'}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}=\dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 92.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào bên dưới



A. $y=\log_3(x+1)$.

B. $y=\log_3 x+1$.

C. $y=\log_2(x+1)$.

D. $y=\log_2 x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy tập xác định $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$ và tại $x=2$ thì $y=1$ nên chỉ có $y=\log_3(x+1)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2+x)^{\sqrt{2}-1}$.

A. $\mathscr{D}=(-1;+\infty)\backslash\{0\}$.

B. $\mathscr{D}=(-\infty;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

D. $\mathscr{D}=(-1;0)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x^2+x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>0\end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho hàm số $f(x)=\ln^2(x^2-2x+5)$. Tìm các giá trị của x để $f'(x)>0$.

A. $x>0$.

B. $x>1$.

C. $\forall x\in\mathbb{R}$.

D. $x\neq 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2\ln(x^2-2x+5).\dfrac{2x-2}{x^2-2x+5}$

$x^2-2x+5=(x-1)^2+4\geq 4\Rightarrow\ln(x^2-2x+5)\geq\ln 4>0$

Do đó $f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-2>0\Leftrightarrow x>1$

Chọn đáp án B □

Câu 95. Chọn câu khẳng định đúng trong các câu sau.

A. Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi $0<a<1$.

B. Đồ thị hàm số $y=a^x$ luôn nằm bên phải trục tung.

C. Đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục tung với $a>0,a\neq 1$.

D. Đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục hoành với $a>0,a\neq 1$.

Lời giải.

Hàm số mũ $y=a^x$ $(a>0)$

① Luôn nhận giá trị dương với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số mũ luôn nằm phía trên trục Ox.

② Có đạo hàm $y=a^x\cdot\ln a$, do đó tính đơn điệu của hàm số mũ phụ thuộc vào $\ln a$.

– Nếu $a>1\Rightarrow\ln a>0$ thì hàm số mũ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

– Nếu $0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0$ thì hàm số mũ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Từ các nhận xét trên ta suy ra các câu A, B, D đều sai. Đáp án đúng là C.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Tập xác định của hàm số: $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **B**. $(1; 3)$. **C**. $(-\infty; 1)$. **D**. $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm xác định khi $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 97. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

B. Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

C. Hàm số $y = \log_{0,2} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

D. Hàm số $y = \log_2(\sqrt{x} + 1)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Giải bất phương trình $3^{x^2} < 2^x$

A. $x \in (0; +\infty)$. **B**. $x \in (0; 1)$. **C**. $x \in (0; \log_2 3)$. **D**. $x \in (0; \log_3 2)$.

Lời giải.

Ta có: $3^{x^2} < 2^x \Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} < \log_3 2^x \Leftrightarrow x^2 < x \log_3 2 \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \log_3 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hàm số $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{f^2(x)}$

A. $y' = \dfrac{2x - 2}{(x^2 - 2x)^2}$. **B**. $y' = \dfrac{4 - 4x}{(x^2 - 2x) \cdot \ln^3(x^2 - 2x)}$.

C. $y' = \dfrac{x - 1}{2(x^2 - 2x)}$. **D**. $y' = \dfrac{-4x + 4}{(x^2 - 2x) \cdot \ln^4(x^2 - 2x)}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \ln(x^2 - 2x) \Rightarrow f^2(x) = \ln^2(x^2 - 2x) \Rightarrow (f^2(x))' = 2 \cdot \ln(x^2 - 2x) \cdot \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x}$.

Suy ra: $y' = \dfrac{-(f^2(x))'}{f^4(x)} = \dfrac{4 - 4x}{(x^2 - 2x) \cdot \ln^3(x^2 - 2x)}$

Chọn đáp án B □

Câu 100. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$.

A. $y' = 2^{2x+2} \ln 2$. **B**. $y' = 2^{2x+2} \ln 16$. **C**. $y' = 2^{2x+3} \ln 2$. **D**. $y' = 4^{x+2} \ln 4$.

Lời giải.

$y' = (2x + 3)' 2^{2x+3} \ln 2 = 2 \cdot 2^{2x+3} \ln 2 = 2^{2x+2} \ln 2^4 = 2^{2x+2} \ln 16$

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. A	4. A	5. C	6. D	7. C	8. B	9. D	10. C
11. D	12. A	13. C	14. C	15. A	16. B	17. D	18. D	19. D	20. C
21. D	22. C	23. A	24. D	25. A	26. C	27. A	28. D	29. B	30. D
31. A	32. A	33. A	34. B	35. B	36. A	37. D	38. A	39. D	40. C
41. B	42. B	43. A	44. B	45. B	46. C	47. D	48. A	49. B	50. B
51. C	52. C	53. B	54. D	55. C	56. B	57. A	58. D	59. C	60. C
61. D	62. B	63. C	64. C	65. D	66. B	67. A	68. C	69. A	70. C
71. B	72. A	73. D	74. A	75. A	76. D	77. C	78. B	79. A	80. D
81. A	82. B	83. A	84. B	85. B	86. A	87. B	88. B	89. D	90. C
91. D	92. A	93. C	94. B	95. C	96. A	97. A	98. D	99. B	100. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Tỉ lệ tăng dân số ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 có 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế đến năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A. 105.971.355 người. **B**. 106.118.331 người. **C**. 107.232.573 người. **D**. 107.232.574 người.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức lãi kép, không kỳ hạn: $A_n = M(1+r\%)^n$.

Với: A_n là số tiền nhận được sau tháng thứ n,

M là số tiền gửi ban đầu,

n là thời gian gửi tiền (tháng),

r là lãi suất định kì (%).

Cách giải:

Từ năm 2014 đến năm 2030 cách nhau số năm là: $2030-2014=16$ năm.

Dân số Việt Nam năm 2030: $A_{16} = 90728900(1+1{,}05\%)^{16} \approx 107232574$ (người).

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{25} \dfrac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T = \dfrac{a}{b}$.

A. $0 < T < \dfrac{1}{2}$. **B**. $\dfrac{1}{2} < T < \dfrac{2}{3}$. **C**. $1 < T < 2$. **D**. $-2 < T < 0$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

Cách giải:

$$\text{Đặt } \log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 16^t \\ b = 20^t \\ 2a-b = 3.25^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.16^t - 20^t = 3.25^t \quad (1) \\ \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^t. \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{16}{25}\right)^t - \left(\frac{4}{5}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{2t} - \left(\frac{4}{5}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{4}{5}\right)^t = -1 < 0 \\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{3}{2}.$$

Vậy $T = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 1 < T < 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Một sinh viên A mua máy tính xách tay theo hình thức trả góp với giá tiền 20 triệu đồng, mức lãi suất $1,2\%$/tháng trong năm đầu tiên, mỗi tháng anh A phải trả 800 ngàn đồng, cả gốc và lãi. Sau một năm lãi suất tăng lên là $1,5\%$/tháng và anh A phải trả 1 triệu đồng cả gốc và lãi mỗi tháng

(trừ tháng cuối). Hỏi sau tối đa bao nhiêu tháng anh A trả hết nợ (tháng cuối trả không quá 500 ngàn đồng)

A. 28 tháng. **B**. 26 tháng. **C**. 25 tháng. **D**. 27 tháng.

Lời giải.

Phương pháp:

Giả sử anh A nợ ngân hàng a (ngàn đồng), mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng x ngàn đồng, lãi suất ngân hàng là $r(\%)$/tháng. Số tiền anh A còn nợ ngân hàng :

- Gọi P_n là số tiền còn nợ lại sau tháng thứ n.
- ***Sau tháng thứ nhất*** số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1 + r) = ad$ với $d = 1 + r$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ nhất*** là: $P_1 = ad - x = ad - x.\dfrac{d-1}{d-1}$.
- ***Sau tháng thứ hai*** số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad - x)r = (ad - x)(1 + r) = (ad - x)d$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ 2*** là:
  $P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d + 1) = ad^2 - x.\dfrac{d^2-1}{d-1}$.
  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ 3*** là:
  $P_3 = [ad^2 - x(d + 1)]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x.\dfrac{d^3-1}{d-1}$.
  . . . . . .
- Số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** n là
  $P_n = ad^n - x.\dfrac{d^n-1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1 + r)^n - x.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.
  Với $d = 1 + r$.
- Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có
  $P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x.\dfrac{d^n-1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1} \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\dfrac{x}{x-ar}\right)$.

Cách giải:

Số tiền sinh viên A còn nợ sau 1 năm (12 tháng) đầu là:

$P_{12} = 20 \cdot 10^6 \cdot (1 + 1,2\%)^{12} - 800 \cdot 10^3 \cdot \dfrac{(1+1,2\%)^{12}-1}{1,2\%} \approx 12.818.000$ (đồng).

Gọi n là số tháng (tính từ năm thứ hai) mà sinh viên A trả được hết nợ, với số tiền nợ gốc $a = 12.818.000$ đồng, ta có:

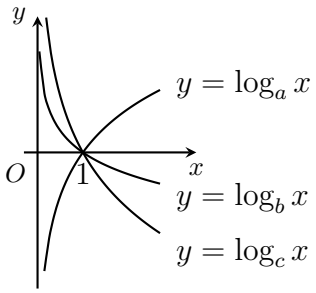
$$\begin{aligned} P_n = 0 &\Leftrightarrow a(1 + r)^n - x.\frac{(1+r)^n-1}{r} = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\left(\frac{x}{x-ar}\right) \\ &\Leftrightarrow n = \log_{1+1,5\%}\left(\frac{10^6}{10^6 - 12818 \cdot 10^3 \cdot 1,5\%}\right) \approx 14,3. \end{aligned}$$

Vậy, số tháng để sinh viên A trả hết nợ là: $12 + 15 = 27$ (tháng).

Chọn đáp án (D) □

Câu 4.

Cho a, b, c dương và khác 1. Các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $b > c > a$.

B. $a > b > c$.

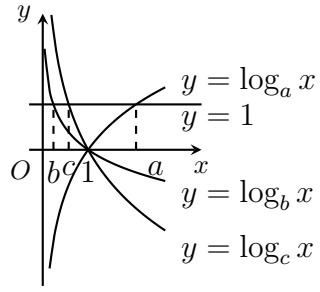
C. $a > c > b$.

D. $c > b > a$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ là a, b, c.

Từ đồ thị ta có $a > c > b$.



Chọn đáp án C □

Câu 5. Do thời tiết ngày càng khắc nghiệt và nhà cách xa trường học, nên một thầy giáo muốn đúng 5 năm nữa có 500 triệu đồng để mua ô tô đi làm. Để đạt nguyện vọng, thầy có ý định mỗi tháng dành ra một số tiền cố định gửi vào ngân hàng (hình thức lãi kép) với lãi suất $0,5\%$/tháng. Hỏi số tiền ít nhất cần dành ra mỗi tháng để gửi tiết kiệm là bao nhiêu (chọn đáp án gần nhất với số tiền thực)?

A. 7.632.000. **B**. 6.820.000. **C**. 7.540.000. **D**. 7.131.000.

Lời giải.

Gọi số tiền ít nhất mà thầy giáo cần dành ra mỗi tháng để gửi tiền tiết kiệm là x (đồng).

Số tiền tiết kiệm gửi vào ngân hàng sau 60 tháng là

$$T_{60} = x\left(1{,}005^1 + 1{,}005^2 + \cdots + 1{,}005^{60}\right) = x \cdot 1{,}005 \cdot \frac{1{,}005^{60} - 1}{0{,}005}$$

Theo đề bài ta có: $x \cdot 1{,}005 \cdot \dfrac{1{,}005^{60} - 1}{0{,}005} = 5 \cdot 10^8 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \cdot 10^8 \cdot 0{,}005}{1{,}005\left(1{,}005^{60} - 1\right)} = 7130747.$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ / tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

A. 104 triệu đồng. **B**. 106 triệu đồng. **C**. 102 triệu đồng. **D**. 108 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 1 là $100.1{,}006 - 0{,}5$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 2 là

$(100 \cdot 1{,}006 - 0{,}5) \cdot 1{,}006 - 0{,}5 = 100 \cdot (1{,}006)^2 - 0{,}5\,(1 + 1{,}006)$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 3 là

$100 \cdot (1{,}006)^3 - 0{,}5\left[1 + 1{,}006 + (1{,}006)^2\right]$ (triệu đồng).

Cứ như vậy, số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 36 là

$$100 \cdot (1{,}006)^{36} - 0{,}5 \cdot \left[1 + 1{,}006 + (1{,}006)^2 + \cdots + (1{,}006)^{35}\right] = 100 \cdot (1{,}006)^{36} - 0{,}5 \cdot \frac{1 - (1{,}006)^{36}}{1 - 1{,}006}$$

$= 104{,}0050268$ (triệu đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 7. Có bao nhiêu cách phân tích số 15^9 thành tích của ba số nguyên dương, biết rằng các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính một lần?

A. 517. **B**. 516. **C**. 493. **D**. 492.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 15^9 &= 3^9.5^9 = \underbrace{3\ldots3}_{9 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{9 \text{ số } 5} \\ &= \underbrace{\underbrace{3\ldots3}_{a_1 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{b_1 \text{ số } 5}}_{\text{Đặt là } x}.\underbrace{\underbrace{3\ldots3}_{a_2 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{b_2 \text{ số } 5}}_{\text{Đặt là } y}.\underbrace{\underbrace{3\ldots3}_{a_3 \text{ số } 3}.\underbrace{5\ldots5}_{b_3 \text{ số } 5}}_{\text{Đặt là } z} \end{aligned}$$

Viết lại là: đặt $x = 3^{a_1}.5^{b_1}, y = 3^{a_2}.5^{b_2}, z = 3^{a_3}.5^{b_3}$

Suy ra ta có hệ:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$$

Xét ba trường hợp

☑ Trường hợp 1: 3 số x, y, z bằng nhau $\to$ có 1 cách chọn

☑ Trường hợp 2: Trong ba số có hai số bằng nhau, giả sử $x = y \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_3 = 9 \\ 2b_1 + b_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 9 - 2a_1 \\ b_3 = 9 - 2b_1 \end{cases}$$

Suy ra có 5 cách chọn a_1 và 5 cách chọn b_1

☑ Trường hợp 3: Số cách chọn ba số phân biệt.

Số cách chọn $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$ là $C_{11}^2.C_{11}^2$

Suy ra số cách chọn ba số phân biệt là $C_{11}^2.C_{11}^2 - 24.3 - 1$

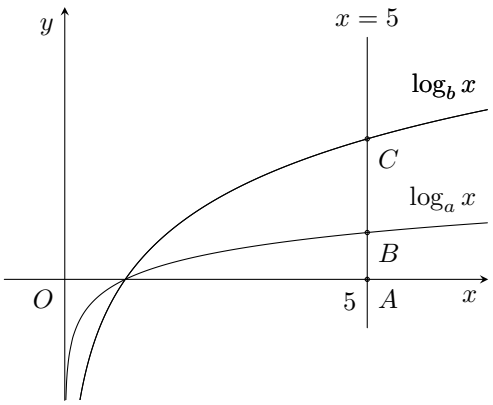
Vậy số cách phân tích số 15^9 thành tích ba số nguyên dương là $\dfrac{C_{11}^2.C_{11}^2 - 24.3 - 1}{3!} + 25 = 517$

Chọn đáp án A □

Câu 8.

Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đay là **đúng**?

A. $a=5b$. **B**. $a=b^2$. **C**. $a=b^3$. **D**. $a^3=b$.



Lời giải.

Ta có $A(5;0), B\left(5;\log_a 5\right), C\left(5;\log_b 5\right)$.

$CB=2AB \Leftrightarrow \log_b 5-\log_a 5=2\log_a 5 \Leftrightarrow \log_b 5=3\log_a 5 \Leftrightarrow \log_5 b=\dfrac{1}{3}\log_5 a \Leftrightarrow a=b^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 70656000 đồng. **B**. 65393000 đồng. **C**. 79760000 đồng. **D**. 74813000 đồng.

Lời giải.

Số tiền chị Loan thu được ở năm thứ nhất là

+ Gửi kỳ hạn theo quý: $200000000(1+r_1)^4=A$.

+ Gửi kỳ hạn theo tháng: $200000000(1+r_2)^{12}=B$.

Số tiền chị Loan thu được ở sau năm thứ hai là

+ Gửi kỳ hạn theo quý: $\dfrac{A}{2}(1+r_1)^4$.

+ Gửi kỳ hạn theo tháng: $\left(\dfrac{A}{2}+B\right)(1+r_2)^{12}$.

Số tiền lãi chị Loan thu được là $\dfrac{A}{2}(1+r_1)^4+\left(\dfrac{A}{2}+B\right)(1+r_2)^{12}-400000000=74813000$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+4}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+\cdots+f'(2019)$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B**. $\dfrac{2024}{2023}$. **C**. $\dfrac{2022}{2023}$. **D**. $\dfrac{2020}{2023}$.

Lời giải.

Với $x\in[0;+\infty)$ ta có $x+1>0$ và $x+4>0$ nên $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+4}=\ln(x+1)-\ln(x+4)$.

Từ đó $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= f'(0)+f'(3)+f'(6)+\ldots+f'(2019) \\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2023}\right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới bác Năm đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi xuất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác Năm đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x = 13$. **B.** $x = 15$. **C.** $x = 12$. **D.** $x = 14$.

Lời giải.

Lãi suất mỗi tháng là $\frac{x}{12}\%$. Theo công thức lãi kép, ta có

$$100 \cdot \left(1 + \frac{x}{12}\%\right)^{24} = 129{,}512 \Rightarrow \frac{x}{12}\% = \sqrt[24]{\frac{129{,}100}{100}} - 1 \approx 0{,}0108.$$

Vậy $x \approx 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho $M = \log_{12} x = \log_3 y$. Khi đó M bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\log_4 \frac{x}{y}$. **B.** $\log_{36} \frac{x}{y}$. **C.** $\log_9(x-y)$. **D.** $\log_{15}(x+y)$.

Lời giải.

Do $M = \log_{12} x = \log_3 y$ nên $\begin{cases} x = 12^M > 0 \\ y = 3^M > 0 \end{cases}$.

Suy ra $\frac{x}{y} = \frac{12^M}{3^M} = 4^M$ hay $M = \log_4 \frac{x}{y}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính khoảng 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng trưởng $1,5\%$ mỗi năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người?

A. 2. **B.** 28. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n$

Suy ra: $n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)$

Trong đó: $A = 7; S_n = 10; r = 1,5\% = \frac{1,5}{100}$.

Ta được $n = 23,95622454$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow x\ln y + x\mathrm{e}^y \geq y\ln x + y\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \frac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \geq \frac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x}$.

Đặt $f(t) = \frac{\ln t + \mathrm{e}^t}{t}$, với $t > 1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)+1-\ln t}{t^2}$.

Xét hàm số $g(t)=\mathrm{e}^t(t-1)+1-\ln t$ có $g'(t)=\mathrm{e}^t(t-1)+\mathrm{e}^t-\dfrac{1}{t}>0$, mọi $t>1$. Suy ra $g(t)>g(1)>0$ với mọi $t>1$, suy ra $f'(t)>0$ với mọi $t>1$.

Do vậy $\dfrac{\ln y+\mathrm{e}^y}{y}\geq\dfrac{\ln x+\mathrm{e}^x}{x}\Leftrightarrow y\geq x\Rightarrow\log_x y>1$. Vậy nên

$$\begin{aligned}P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x=\frac{1}{2}(1+\log_x y)+\frac{1}{\log_x y}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\\&\geq\frac{1}{2}+\sqrt{2}\\&=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Sau hai năm 3 tháng (tháng thứ 28) người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Hỏi người đó được rút về bao nhiêu tiền?

A. $100\cdot[(1{,}01)^{27}-1]$ triệu đồng. **B.** $101\cdot[(1{,}01)^{26}-1]$ triệu đồng.

C. $101\cdot[(1{,}01)^{27}-1]$ triệu đồng. **D.** $100\cdot[(1{,}01)6-1]$ triệu đồng.

Lời giải.

Gọi a là số tiền cứ đầu mỗi tháng gửi tiết kiệm ngân hàng, r là lãi suất kép trên tháng.

T_n là số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n tháng.

Cuối tháng thứ 1: $a(1+r)$.

Cuối tháng thứ 2: $a(1+r)+a(1+r)^2$.

Cuối tháng thứ 3: $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3$.

$\cdots$

Cuối tháng thứ n: $T_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$.

$\Rightarrow T_n=a[(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^n]=a(1+r)\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.

$\Rightarrow T_n=\dfrac{a}{r}(1+r)[(1+r)^n-1]$.

Áp dụng công thức $T_n=\dfrac{a}{r}(1+r)[(1+r)^n-1]=\dfrac{1}{0{,}01}(1{,}01)[(1{,}01)^{27}-1]=101[(1{,}01)^{27}-1]$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Hàm số luôn xác định trên $(1;+\infty)$, có $y'=x-m+\dfrac{1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}-m$.

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x-1}\geq m,\forall x\in(1;+\infty)$.

Với $x>1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$g(x)=x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$, (thỏa mãn).

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} g(x)=3$, hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\le 3$ mà $m\in\mathbb{Z}^+$, suy ra $m\in\{1;2;3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\ln 2018-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.Tính $S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(2017)$

A. $\dfrac{4035}{2018}$. **B.** 2017. **C.** $\dfrac{2016}{2017}$. **D.** $\dfrac{2017}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{x}{x+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $S=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}=1-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{2017}{2018}$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\log_2 x-2}{\log_2 x-m-1}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$.

A. $m<-2$ hoặc $m>1$. **B.** $m\le -2$ hoặc $m=1$.

C. $m<-2$ hoặc $m=1$. **D.** $m<-2$.

Lời giải.

☑ Đặt $t=\log_2 x$; Ta có $x\in(4;+\infty)\Rightarrow t\in(2;+\infty)$.

☑ Hàm số được viết lại $y=\dfrac{mt-2}{t-m-1}$. (1)

☑ Vì $t=\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán Tương đương với (1) nghịch biến trên $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m(m+1)+2<0\\ m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>1\end{array}\right.\\ m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m<-2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A. $m\ge\dfrac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m<\dfrac{1}{4}$. **D.** $m>\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

☑ Điều kiện $4^x-2^x+m>0$.

☑ Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m>-4^x+2^x,\forall x\in\mathbb{R}$. (*)

☑ Đặt $t=2^x$, $t>0$. Khi đó $(*)$ trở thành $m>-t^2+t,\forall t>0\Leftrightarrow\max\limits_{(0;+\infty)}\lim f(t)$

với $f(t)=-t^2+t$, $t>0$.

- Ta có $f'(t)=-2t+1$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.
- Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$.
- Vậy $m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{4x+7}{\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-6m+10\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là:

A. $(2;4)\setminus\{3\}$. **B.** $[2;4]\setminus\{3\}$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: +) Hàm số $y = \log_a f(x)(0 < a \neq 1)$ xác định $\Leftrightarrow f(x > 0)$.

+) Hàm số $\dfrac{1}{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \neq 0$.

Cách giải: Hàm số $y = \dfrac{4x+7}{\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-6m+10\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-6m+10\right) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2-2x+m^2-6m+10 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+m^2-6m+10 \neq 1, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2-2x+m^2-6m+10 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(m-3)^2 \neq 1, \forall x \in \mathbb{R} \\ (x-1)^2+(m-3)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 \neq 1-(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R} \\ (x-1)^2+(m-3)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 > 1 \\ m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 2 \end{array}\right. \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 2 \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2+2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 1009.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+2} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+2} - m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{2x}{x^2+2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow 4-2x^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}.\end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Suy ra $m\le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, m là số nguyên trong đoạn $[-2019;2019]$ nên có 2019 số.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Tìm m của hàm số $y=\dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m\le -2$. **D.** $-2<m\le 1$.

Lời giải.

$y=\dfrac{5^{-x}+2}{5^{-x}-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-5^{-x}\ln 5\,(5^{-x}-m)+5^{-x}\ln 5\,(5^{-x}+2)}{(5^{-x}-m)^2}=\dfrac{5^{-x}\ln 5(2+m)}{(5^{-x}-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}m+2>0\\ 5^{-x}-m\ne 0,\forall x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ 5^{-x}\ne m,\forall x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\le 1\end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,5% tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

A. 139. **B.** 140. **C.** 100. **D.** 138.

Lời giải.

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A triệu đồng, lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là: $S_1=A(1+r)-1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_2=[A(1+r)-1](1+r)-1=A(1+r)^2-(1+r)-1$$

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n=A(1+r)^n-(1+r)^{n-1}-(1+r)^{n-2}-\cdots-(1+r)-1=A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có

$$S_n = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow (1+r)^n(Ar-1)+1 = 0 \tag{2.8}$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1+r}\frac{1}{1-Ar} \Leftrightarrow n = -\log_{1+r}(1-Ar). \tag{2.9}$$

Với $A = 100$ triệu đồng, $r = 0{,}005$ ta có $n \approx 138{,}9757216$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Một người vay ngân hàng số tiền 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng số tiền 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau n tháng người đó trả hết nợ. Khi đó n gần với số nào dưới đây?

A. 13. **B**. 15. **C**. 16. **D**. 14.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&P(1+r)^n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]\\
\Leftrightarrow\ &50(1+1{,}1\%)^n = \frac{4}{1{,}1\%}\left[(1+1{,}1\%)^n - 1\right]\\
\Leftrightarrow\ &50(1+1{,}1\%)^n = \frac{4}{1{,}1\%}(1+1{,}1\%)^n - \frac{4}{1{,}1\%}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{4}{1{,}1\%} = \frac{3450}{11}(1+1{,}1\%)^n\\
\Leftrightarrow\ &(1+1{,}1\%)^n = \frac{80}{69} \Rightarrow n = \log_{1+1{,}106}\frac{80}{69} \approx 13{,}52.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

A. 2018. **B**. 1009. **C**. 2019. **D**. 2017.

Lời giải.

Phương pháp: Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi và chỉ khi $f(x) > 0$.

Cách giải:

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 1 + m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

$$\text{Do } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 2018] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 0) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2018; -2017; \cdots; -1\}.$$

Vậy có 2018 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong mặt phẳng, với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y = \log_a x, y = \log_{\sqrt{a}} x$ và $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$, với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a.

A. $a = \sqrt{3}$. **B**. $a = \sqrt[3]{6}$. **C**. $a = \sqrt{6}$. **D**. $a = \sqrt[6]{3}$.

Lời giải.

Do A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_{\sqrt{a}} x, y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$ nên $A(m; \log_a m), B(n, 2\log_a n$ trong đó $m, n, p > 0$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} \log_a m = 2\log_a n \\ |m-n| = 6 \\ p = n \\ |3\log_a p - 2\log_a n| = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n^2 \\ |n^2 - n| = 6 \\ |\log_a n| = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 3 \\ a = \sqrt[6]{3} \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $a = \sqrt[6]{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau

A. Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ luôn đi qua điểm $M(a; 1)$.

B. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

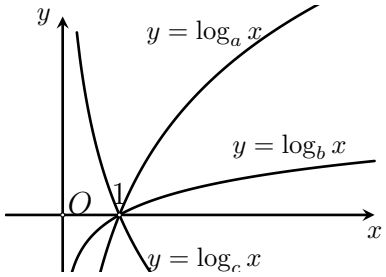
C. Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 28.

Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ $(0 < a, b, c \neq 1)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng?**

A. $b > a > c$. **B**. $a > b > c$. **C**. $b > c > a$. **D**. $a > c > b$.



Câu 29. Cho hàm số $y = \ln \dfrac{1}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $xy' + 1 = -e^y$. **B**. $xy' + 1 = e^y$. **C**. $xy' - 1 = e^y$. **D**. $xy' - 1 = e^y$.

Lời giải.

Ta có $e^y = e^{\ln \frac{1}{x+1}} = \dfrac{1}{x+1}$.

$y' = -\dfrac{x+1}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow xy' + 1 = -y' \Rightarrow xy' + 1 = \dfrac{1}{x+1} = e^y$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ sổ tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hằng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền sẽ được nhập vào thành tiền gốc và sổ tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn 1 năm tiếp theo).

A. 1.689.966.000 VNĐ. **B**. 2.639.636.000 VNĐ.

C. 3.689.966.000 VNĐ. **D**. 1.669.266.000 VNĐ.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền nhận được sau 18 năm gửi là

$500000000(1 + 0,07)^{18} = 1.689.966.000$ (VNĐ).

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \ln 2017 - \ln \dfrac{x+1}{x}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \ldots + f'(2018)$.

A. $S=\dfrac{4037}{2019}$. **B**. $S=\dfrac{2018}{2019}$. **C**. $S=\dfrac{2017}{2018}$. **D**. $S=2018$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\ldots+f'(2018)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}=1-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{2018}{2019}$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $y=(x-2)^{-\frac{1}{2}}$. Bạn Toán tìm tập xác định của hàm số bằng cách như sau:

Bước 1. Ta có $y=\dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Bước 2. Hàm số xác định $\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Bước 3. Vậy tập xác định của hàm số là $D=(2;+\infty)$.

Lời giải trên của bạn Toán đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

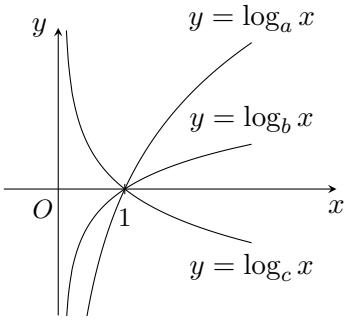
A. Bước 3. **B**. Bước 1. **C**. Đúng. **D**. Bước 2.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 33.

Đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ (với a,b,c là ba số dương khác 1), được biểu diễn trên cùng một mặt phẳng toạ độ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

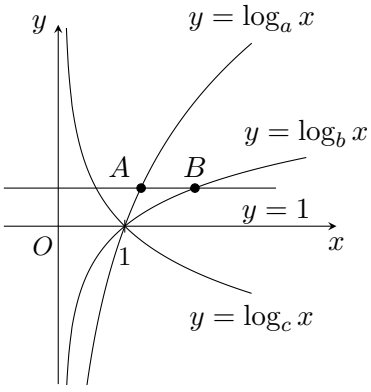


A. $c<b<a$. **B**. $c>a>b$.

C. $c<a<b$. **D**. $c>b>a$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $\begin{cases}0<c<1\\a>1\\b>1.\end{cases}$



Gọi A,B lần lượt là giao điểm của $(d)\colon y=1$ với đồ thị của $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$.

Ta thấy $\begin{cases}x_A=a\\x_B=b\\x_A<x_B\end{cases}\Rightarrow a<b.$

Vậy $c<a<b$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho các số thực a,b sao cho $0<a,b\neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2018},\sqrt[5]{\dfrac{1}{2019}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $a>1,b>1$. **B**. $a>1,0<b<1$.

C. $0<a<1,b>1$. **D**. $0<a<1,0<b<1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=a^x$ đi qua điểm $M\left(\sqrt{2018},\sqrt[5]{\dfrac{1}{2019}}\right)$ nên ta có

$$a^{\sqrt{2018}}=\sqrt[5]{\frac{1}{2019}}<1\Rightarrow 0<a<1.$$

Đồ thị hàm số $y=\log_b x$ đi qua điểm $M\left(\sqrt{2018},\sqrt[5]{\dfrac{1}{2019}}\right)$ nên ta có

$$\log_b\sqrt{2018}=\sqrt[5]{\frac{1}{2019}}>0\Rightarrow b>1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\log(mx-m+2)$ xác định trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B**. 5. **C**. Vô số. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $mx-m+2>0$ $(*)$.

Nếu $m=0$ thì $(*)\Leftrightarrow 2>0$ luôn đúng với $\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, thoả mãn.

Nếu $m>0$ thì $(*)\Leftrightarrow x>\dfrac{m-2}{m}$.

Để hàm số đã cho xác định trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thì $\dfrac{m-2}{m}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{m-4}{2m}<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}$.

Nếu $m<0$ thì $(*)\Leftrightarrow x<\dfrac{m-2}{2}$, loại.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thoả mãn bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hàm số $y=(x+1)\mathrm{e}^{3x}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $y''+6y'+9y=0$. **B**. $y''-6y'+9y=0$.

C. $y''+6y'+9y=10x\mathrm{e}^x$. **D**. $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Ta có $y'=e^{3x}(3x+4)$, $y''=e^{3x}(9x+15)$.

$y''+6y'+9y=e^{3x}(36x+48)$ và $y''-6y'+9y=e^{3x}.0=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Vào 4 năm trước, chị Thương có gửi vào ngân hàng một số tiền là 20 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kỳ hạn. Số tiền hiện tại chị nhận được là 29,186792 triệu đồng. Biết rằng, lãi suất ngân hàng tại thời điểm mà chị Thương gửi tiền là 0,8%/tháng. Hỏi kỳ hạn k mà chị Thương đã chọn là bao nhiêu tháng?

A. $k=3$ tháng. **B**. $k=5$ tháng. **C**. $k=4$ tháng. **D**. $k=6$ tháng.

Lời giải.

Đặt $a=0{,}8\%=0{,}008$, $N_0=20$ triệu, $N=29{,}186792$ triệu.

Đổi 4 năm $=48$ tháng.

Chị Thương gửi kỳ hạn k tháng nên lãi suất mỗi kỳ là ka, số chu kì tính lãi trong 48 tháng là $\dfrac{48}{k}$.
Áp dụng công thức tính lãi kép, số tiền chị Thương nhận được cả gốc và lãi là $N = N_0(1+ak)^{\frac{48}{k}}$.
Thay số và thử $k = 4$, ta được đẳng thức đúng.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$.

A. $S = \varnothing$. **B.** $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

C. $S = \{0; 3\}$. **D.** $S = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

① Tập xác định $\mathbb{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

② Ta có $f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm $S = \varnothing$.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2017}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

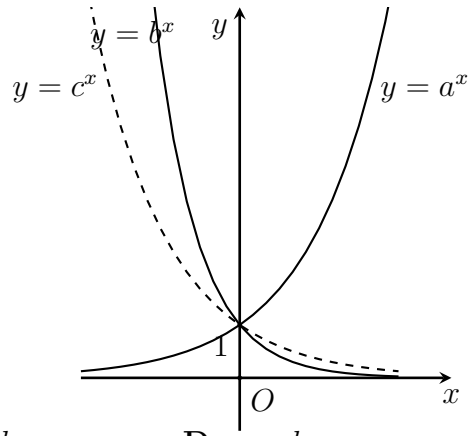
A. $m \le 0$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m \le -1$. **D.** $m \ge -1$.

Lời giải.

Ta cần tìm m sao cho $mx - m + 2 > 0$ với mọi $x \ge 1$. Nếu $m < 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx - m + 2) = -\infty$, cho nên $m \ge 0$.
+ Với $m = 0$, $mx - m + 2 = 2 > 0$ với mọi x.
+ Với $m > 0$, $mx - m + 2 > 0, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{m-2}{m}, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{m} \le 1$ (luôn đúng khi $m > 0$).
Vậy $m \ge 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 40.

Trên hình vẽ, đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c.



A. $c > b > a$. **B.** $b > c > a$. **C.** $a > c > b$. **D.** $a > b > c$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy các hàm số $y = c^x, y = b^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, do đó $0 < b, c < 1$. Lại có $x > 0 \Rightarrow c^x > b^x$ và $x < 0 \Rightarrow c^x < b^x$ nên $c > b$. Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $a > 1$. Vậy $a > c > b$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Giả sử x, y là những số thực dương thỏa mãn: $\log_{16}(x+y) = \log_9 x = \log_{12} y$. Tính giá trị của biểu thức $P = 1 + \dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

A. $P=16$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $P=3+\sqrt{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\cdot y\geq 0$ và $x+y\geq 0$. Đặt $t=\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$.

Ta được: $\begin{cases} x=9^t \\ y=12^t \\ x+y=16^t \end{cases}$.

Suy ra $9^t+12^t=16^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{16}\right)^t+\left(\dfrac{12}{16}\right)^t=\left(\dfrac{16}{16}\right)^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Theo giả thiết ta có: $P=1+\dfrac{x}{y}+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^t+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t}=2$.

Vậy $P=2$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7 %/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9 %/tháng. Đến tháng thứ 10, sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6 %/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này, bác Mạnh không rút tiền ra)

A. 5436521,164 đồng. **B.** 5452711,729 đồng. **C.** 5436566,169 đồng. **D.** 5452733,453 đồng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền gửi ban đầu; r % là lãi suất trên một kỳ gửi; N là số kỳ gửi và C là số tiền thu được cả gốc và lãi sau N kỳ. Khi đó ta có công thức tính: $C=A\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^N$. Áp dụng công thức này vào bài toán, ta có sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền (đồng) là:

$$C=5\cdot 10^6\cdot(1+0{,}007)^6\cdot(1+0{,}009)^3\cdot(1+0{,}006)^3=5452733{,}453.$$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Tính đạo hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$.

A. $\mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin x\cos x$. **B.** $\mathrm{e}^{\cos^2 x}$. **C.** $\mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x$. **D.** $2\mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin x$.

Lời giải.

$y'=\mathrm{e}^{\sin^2 x}\cdot\left(\sin^2 x\right)'=\mathrm{e}^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x=\mathrm{e}^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x$.

Chọn đáp án C □

Câu 44.

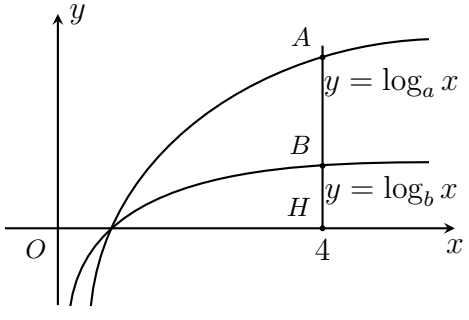
Cho điểm $H(4;0)$ và đường thẳng $x=4$ cắt hai đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại hai điểm A,B sao cho $AB=2BH$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b=a^3$.

B. $a=b^3$.

C. $a=3b$.

D. $b=3a$.



Lời giải.

Ta có $AB = 2BH \Leftrightarrow |\log_a 4| = 3\,|\log_b 4| \Leftrightarrow |\log_4 b| = 3\,|\log_4 a|$.

Từ đồ thị hàm số ta có $|\log_4 b| = 3\,|\log_4 a| \Rightarrow \log_4 b = 3\log_4 a \Rightarrow b = a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn thành phố A đạt xấp xỉ 905.300 người. Mỗi năm dân số thành phố tăng thêm 1,37%. Để thành phố A thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1 thì đến năm học $2024-2025$ số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 (mỗi phòng 35 học sinh) gần nhất với số nào sau đây; biết rằng sự di cư đến, đi khỏi thành phố và số trẻ tử vong trước 6 tuổi đều không đáng kể, ngoài ra trong năm sinh của lứa học sinh lớp 1 đó toàn thành phố có 2400 người chết?

A. 322. **B**. 321. **C**. 459. **D**. 458.

Lời giải.

Từ năm 2011 đến năm 2018 (năm có học sinh vào lớp 1 của năm học $2024-2025$) dân số tăng là $905300(1+0{,}0137)^8 - 905300(1+0{,}0137)^7 + 2400 \approx 16042.0367$ người.

Đến năm học $2024-2025$ số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 là $\dfrac{16042.0367}{35} \approx 458$ phòng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho hàm số $y = x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x^2y'' + xy' - 2y = 0$. **B**. $x^2y'' - xy' - 2y = 0$.

C. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$. **D**. $x^2y' - xy'' + 2y = 0$.

Lời giải.

Ta có: $y = x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right]$.

$y' = \cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x)$.

$y'' = -\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$.

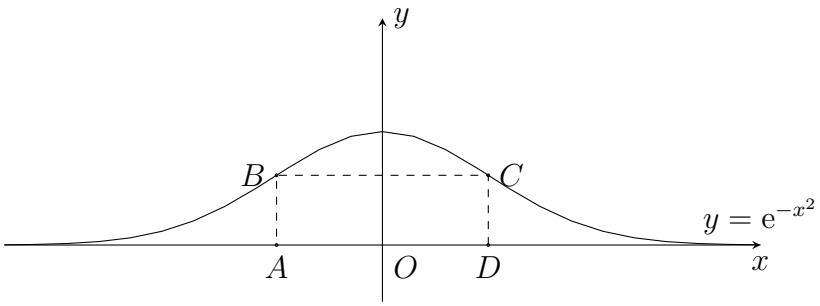
Ta có

$x^2y'' - xy' + 2y = -2x\sin(\ln x) - 2x\cos(\ln x) + 2x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47.

Cho đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ như hình vẽ, $ABCD$ là hình chữ nhật thay đổi sao cho B và C luôn thuộc đồ thị hàm số đã cho, AD nằm trên trục hoành. Giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là:



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. **B**. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$. **D**. $\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Lời giải.

Gọi $C\left(a; \mathrm{e}^{-a^2}\right)$ với $a > 0$. Khi đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S = 2a \cdot \mathrm{e}^{-a^2} = f(a)$.

Ta có $f'(a)=2\left(\mathrm{e}^{-a^2}-2a^2\cdot\mathrm{e}^{-a^2}\right)=0\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(a)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		‖		$+$	0	$-$	
$f(x)$		‖ -H		↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	↘	

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hàm số $y=\sqrt{\log_2(\ln x)}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\mathrm{e}$.
B. Tập xác định của hàm số là $[1;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(1;\mathrm{e})$.
D. Hàm số đồng biến trên $(\mathrm{e};+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}\ln x>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

$y'=\dfrac{(\log_2(\ln x))'}{2\sqrt{\log_2(\ln x)}}=\dfrac{(\ln x)'}{2\ln 2\cdot\ln x\cdot\sqrt{\log_2(\ln x)}}=\dfrac{1}{2\ln 2\cdot x\cdot\ln x\cdot\sqrt{\log_2(\ln x)}}>0,\ \forall x>1.$

Vậy hàm số đồng biến trên $(\mathrm{e};+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)$, với $a>1,b>1$ và $P=\log_a^2 b+16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

Ta có: $a>1,b>1\Rightarrow\log_a b>0$. Suy ra:

$$P=\log_a^2 b+\frac{16}{\log_a b}=\log_a^2 b+\frac{8}{\log_a b}+\frac{8}{\log_a b}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\log_a^2 b\cdot\frac{8}{\log_a b}\cdot\frac{8}{\log_a b}}=12.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\log_a^2 b=\frac{8}{\log_a b}\Leftrightarrow\log_a b=2\Rightarrow m=\log_a(ab)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(1+\log_a b)=1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Một chất điểm chuyển động có phương trình vận tốc là $v(t)=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{t^2-2t}$ (m/s) (t (giây) là thời gian chuyển động). Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên, vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $v=\mathrm{e}+1$ (m/s). **B.** $v=\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ (m/s). **C.** $v=\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (m/s). **D.** $v=\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$ (m/s).

Lời giải.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $v(t)=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{t^2-2t}$ trên đoạn $[0;10]$.

$v'(t)=(2t-2)\,\mathrm{e}^{t^2-2t}; v'(t)=0\Leftrightarrow t=1\in[0;10]$.

Tính $v(0)=\mathrm{e}+1, v(1)=\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}, v\,(10)=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{80}$.

Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $v(1)=\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (m/s).

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho x,y là các số thực dương, thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y\le\log_{\frac{1}{3}}(x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2x+3y$.

A. $P_{\min}=7+3\sqrt{2}$. **B.** $P_{\min}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=7-2\sqrt{10}$. **D.** $P_{\min}=7+2\sqrt{10}$.

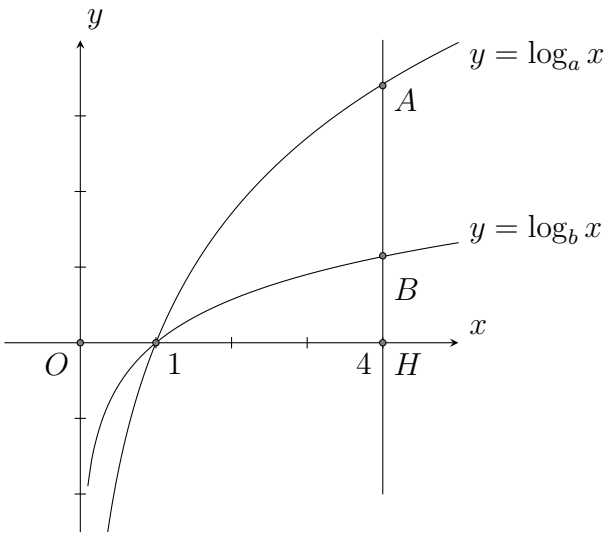
Lời giải.

$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y\le\log_{\frac{1}{3}}(x+y^2)\Leftrightarrow xy\ge x+y^2\Leftrightarrow x(y-1)\ge y^2$. Từ đây, do x,y dương nên ta suy ra $y>1$ và $x\ge\dfrac{y^2}{y-1}=y+1+\dfrac{1}{y-1}$.

Do đó, $P\ge5y+2+\dfrac{2}{y-1}=5(y-1)+\dfrac{2}{y-1}+7\ge2\sqrt{10}+7$. Dấu bằng xảy ra khi $y=1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}, x=2+\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho điểm $H(4;0)$, đường thẳng $x=4$ cắt đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $\log_b x$ lần lượt tại hai điểm A,B sao cho $AB=2BH$, Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a=3b$. **B.** $b=3a$. **C.** $b=a^3$. **D.** $a=b^3$.

Lời giải.

Ta có $A(4;\log_a 4), B(4;\log_b 4)$.

Do đó $AB=2BH\Leftrightarrow|\log_a 4-\log_b 4|=2|\log_b 4|\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\log_a 4-\log_b 4=2\log_b 4\\&\log_a 4-\log_b 4=-2\log_b 4\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\log_a 4=3\log_b 4\\&\log_a 4=-\log_b 4\end{aligned}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\dfrac{1}{\log_4 a}=\dfrac{3}{\log_4 b}\\&\dfrac{1}{\log_4 a}=-\dfrac{1}{\log_4 b}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&b=a^3\\&ab=1.\end{aligned}\right.$

Từ đồ thị suy ra hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ là các hàm đồng biến.
Suy ra $a > 1, b > 1 \Rightarrow ab > 1$. Vậy $b = a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 53. Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

A. $x = 145$ triệu đồng. **B.** $x = 154$ triệu đồng. **C.** $x = 150$ triệu đồng. **D.** $x = 140$ triệu đồng.

Lời giải.

Ta có công thức lãi kép $T = A(1+r)^n$.
Tiền lãi ông Tú có sau 3 năm sẽ là tiền gốc cộng lãi trừ đi số tiền gốc ban đầu.
Ta có $A(1+6,5\%)^3 - A \geq 30 \Leftrightarrow A \geq \dfrac{30}{(1+6,5\%)^3 - 1} \approx 144,26$ triệu.
Chọn đáp án A □

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x - \ln x$. Biết trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M. Tính $M + m$.

A. $M + m = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$. **B.** $M + m = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + 1$.
C. $M + m = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1$. **D.** $M + m = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1$.

Lời giải.

☑ Trên $[1;\mathrm{e}]$ ta có $f'(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$.
☑ $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \notin [1;\mathrm{e}]. \end{array}\right.$
☑ $f(1) = 0 = m$, $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1 = M$.
Vậy $M + m = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1$.
Chọn đáp án C □

Câu 55. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \ln\left(x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 10}\right)$.

A. $\mathscr{D} = [5;14]$. **B.** $\mathscr{D} = (2;14)$. **C.** $\mathscr{D} = [2;14)$. **D.** $\mathscr{D} = [5;14)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 10} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x < 14.$$

Chọn đáp án D □

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in [-\infty; -2] \cup [2; +\infty]$. **B**. $[-2; 2]$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **D**. $(-2; 2)$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x) = \ln(2\mathrm{e}^x + m)$ có $f'(-\ln 2) = \dfrac{3}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (1; 3)$. **B**. $m \in (-5; -2)$. **C**. $m \in (1; +\infty)$. **D**. $m \in (-\infty; 3)$.

Lời giải.

$f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x + m}$

$f'(-\ln 2) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\mathrm{e}^{-\ln 2}}{2\mathrm{e}^{-\ln 2} + m} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+m} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $N = A.e^{rt}$ trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$) và t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 250 con và sau 12 giờ là 1500 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 216 lần số lượng vi khuẩn ban đầu?

A. 66 giờ. **B**. 48 giờ. **C**. 36 giờ. **D**. 24 giờ.

Lời giải.

Theo công thức ta có $1500 = 250 \cdot e^{12r} \Leftrightarrow e^{12r} = 6 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{12} \cdot \ln 6$.

Khi đó $54000 = 250 \cdot e^{\frac{t}{12}\ln 6} \Leftrightarrow 6^{\frac{t}{12}} = 216 \Leftrightarrow \dfrac{t}{12} = \log_6 216 = 3 \Leftrightarrow t = 36$ giờ.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất là $6,9\%$/năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào nhất sau đây?

A. 116 570 000 đồng. **B**. 107 667 000 đồng. **C**. 105 370 000 đồng. **D**. 111 680 000 đồng.

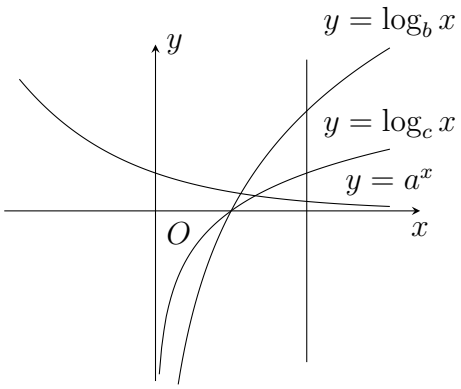
Lời giải.

Số tiền thu được là $8.10^7(1 + 6,9\%)^5 \approx 111\ 680\ 000$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 60.

Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng.



A. $c > b > a$. **B**. $b > a > c$.

C. $a > b > c$. **D**. $b > c > a$.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ là hàm nghịch biến nên $0 < a < 1$ và lấy 1 hoành độ bất kỳ dóng lên ta có $c > b > 1$ nên $c > b > a$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $[-1; 1]$. **D.** $(-\infty; -1]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} - m.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; f(-1) = -1; f(1) = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -1 \geq m$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A. $m < \frac{1}{4}$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \geq \frac{1}{4}$. **D.** $m > \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2^x - 4^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = 2^x - 4^x$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4^x \ln 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 = 4^x \ln 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m > \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Ông A vay ngân hàng 96 triệu đồng với lãi suất 1% tháng theo hình thức mỗi tháng trả góp số tiền giống nhau sao cho đúng hai năm thì hết nợ. Hỏi số tiền ông phải trả hàng tháng là bao nhiêu? (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. 4,53 triệu đồng. **B.** 4,54 triệu đồng. **C.** 4,51 triệu đồng. **D.** 4,52 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $T = 96$ triệu đồng, $r = 1\%$, số tiền ông A phải trả hàng tháng là m.

Số tiền gốc sau 1 tháng là $T + T \cdot r - m = T(1+r) - m$.

Số tiền gốc sau 2 tháng là $[T(1+r) - m] - [T(1+r) - m]\, x - m = T(1+r)^2 - m[(1+r)+1]$.

Số tiền gốc sau 3 tháng là $T(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$.

Tương tự, số tiền gốc còn lại sau 24 tháng là $T(1+r)^{24} - m\left[(1+r)^{23} + ... + (1+r) + 1\right] = 0$ (vì hết nợ).

Do đó $m = \dfrac{T(1+r)^{24}}{(1+r)^{23} + ... + (1+r) + 1} = \dfrac{Tr}{1 - \dfrac{1}{(1+r)}} \backsimeq 4{,}519$ triệu đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{2^x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.

B. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại.

D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có $y = x \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow y' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + x \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot (1 - x\ln 2)$.

Do đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\ln 2}$. Ta có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

Suy ra, y đạt cực đại tại $x = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \in (-4; 1)$.

B. $m \in [1; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

D. $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x, t \in \mathbb{R}$ khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ suy ra $g(t) = -4t + 3$ (không thỏa mãn).

Với $m \neq 0$ suy ra $g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -4. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = \ln 2017 - \ln\dfrac{x+1}{x}$. Tính tổng

$$S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \cdots + f'(2018).$$

A. $S = \dfrac{4037}{2019}$.

B. $S = \dfrac{2018}{2019}$.

C. $S = \dfrac{2017}{2018}$.

D. $S = 2018$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \cdots + \dfrac{1}{2018} - \dfrac{1}{2019} = \dfrac{2018}{2019}$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Đồ thị hàm số $y=\ln(-x)$ không có đường tiệm cận ngang.

B. Hàm số $y=\ln x^2$ không có cực trị.

C. Hàm số $y=\ln x^2$ có một điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=\ln x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\ln(-x)$ trên tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét hàm số $y=\ln x^2$ trên tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ có $y'=\dfrac{2}{x}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Rõ ràng, hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án C ☐

Câu 68. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\ln x$. **B**. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **C**. $y=x^3+2x-1$. **D**. $y=x^4+2x^2+1$.

Lời giải.

☑ Hàm số $y=\ln x$ có tập xác định $\mathscr{D}=(0;+\infty)$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y=x^3+2x-1$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $y'=3x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Hàm số $y=x^4+2x^2+1$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, $y'=4x^3+4x=4x(x^2+1)<0,\ \forall x\in(-\infty;0)$ nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 69. Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4%/năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12%/năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc và lãi tính từ lúc gửi tiền ban đầu là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

A. 63.545.193 đồng. **B**. 100.214.356 đồng. **C**. 83.737.371 đồng. **D**. 59.895.767 đồng.

Lời giải.

☑ Lãi suất cho chu kỳ đầu (3 kỳ hạn đầu tiên) là $\dfrac{8{,}4\%\times 3}{12}\approx 2{,}1\%$.

☑ Lãi suất cho chu kỳ cuối (4 kỳ hạn cuối) là $\dfrac{12\%\times 3}{12}\approx 3\%$.

Vậy số tiền ông thu được là $50 \times (1{,}021)^3 \times (1{,}03)^4 = 59.895.767$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Ông Bình gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1 % một quý, gửi trong 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73 % một tháng trong vòng 9 tháng. Tổng lợi tức ông Bình có được sau khi rút tiền ở hai ngân hàng là 27507768,13 đồng. Hỏi số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu đồng và 180 triệu đồng. **B**. 200 triệu đồng và 120 triệu đồng.

C. 180 triệu đồng và 140 triệu đồng. **D**. 120 triệu đồng và 200 triệu đồng.

Lời giải.

Đổi 15 tháng = 5 quý. Gọi số tiền gửi trong ngân hàng X là x triệu đồng và trong ngân hàng Y là $320 - x$ triệu đồng. Khi đó tổng lợi tức mà ông nhận được ở hai ngân hàng là

$$x(1 + 2{,}1\%)^5 + (320 - x)(1 + 0{,}73\%)^9 - 320 = 27507768{,}13.$$

Giải ra $x = 140$ triệu đồng. Vậy số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y là 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t gần với kết quả nào sau đây nhất?

A. 3 giờ 9 phút. **B**. 3 giờ 2 phút. **C**. 3 giờ 30 phút. **D**. 3 giờ 18 phút.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $300 = 100 \cdot e^{5r} \Rightarrow r = \dfrac{\ln 3}{5}$.

Khi số vi khuẩn tăng gấp đôi ban đầu, ta có

$$200 = 100 \cdot e^{t \cdot \frac{\ln 3}{5}} \Rightarrow t \approx 3{,}155.$$

Suy ra $t = 3$ giờ 9 phút.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^x$ trong khoảng $\left(\dfrac{1}{2018}; +\infty\right)$.

A. $x_{CT} = e$. **B**. $x_{CT} = \dfrac{1}{e}$. **C**. $y_{CT} = e^e$. **D**. $y_{CT} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Lời giải.

Có $y = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$.

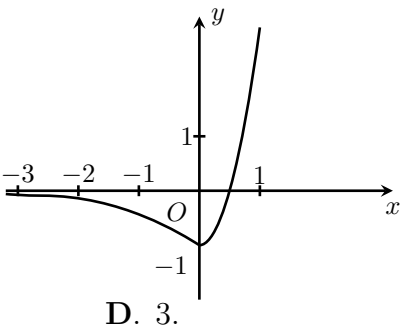
$y' = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$.

x	$\frac{1}{2018}$		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y		↘	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{\mathrm{CT}} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2.3^x$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

(1) Đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số (C) tại điểm có hoành độ là $x = \log_3 2$.

(2) Bất phương trình $f(x) \geq -1$ có nghiệm duy nhất.

(3) Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có tập nghiệm là $(-\infty; \log_3 2)$.

(4) Đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số (C) tại 2 điểm phân biệt.

A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Đồ thị (C) cắt trục hoành suy ra phương trình hoành độ giao điểm

$$3^{2x} - 2.3^x = 0 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2 \Rightarrow (1) \text{ đúng và } (4) \text{ sai.}$$

Từ đồ thị suy ra $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (2)$ sai.

Từ đồ thị suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in (\log_3 2; +\infty) \Rightarrow (3)$ sai.

Vậy có 1 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi xuất $r = 0{,}5\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó với tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

A. 45 tháng. **B**. 46 tháng. **C**. 47 tháng. **D**. 44 tháng.

Lời giải.

Gọi T_0, r, n, T_n lần lượt là số tiền gốc ban đầu, lãi suất một tháng, số tháng gửi ngân hàng và tổng số tiền có được sau n tháng gửi.

Theo giả thiết $T_0 = 100$ triệu, $r = 0,5\%, T_n \geq 125$.

Ta có: $T_n = T_0(1+r)^n \Rightarrow (1+r)^n = \dfrac{T_n}{T_0} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \dfrac{T_n}{T_0}$

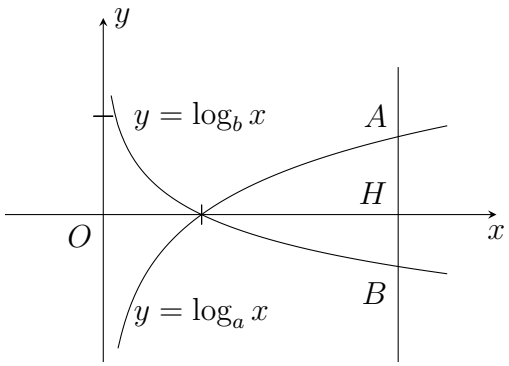
$\Rightarrow n \geq \log_{1+0,5\%} \dfrac{125}{100} \approx 44,74.$

Vậy cần ít nhất 45 tháng để người đó có nhiều hơn 125 triệu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75.

Cho a và b là các số thực dương khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục tung mà cắt các đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ và trục hoành lần lượt tại A, B và H ta đều có $2HA=3HB$ (hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a^2b^3=1$. **B**. $3a=2b$. **C**. $2a=3b$. **D**. $a^3b^2=1$.

Lời giải.

Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_1;y_2)$. Ta có $\begin{cases} y_1=\log_a x_1 \Leftrightarrow x_1=a^{y_1} \\ y_2=\log_b x_1 \Leftrightarrow x_1=b^{y_2} \end{cases} \Rightarrow a^{y_1}=b^{y_2}$.

Mà $2HA=3HB$ nên $2y_1=-3y_2$. Suy ra

$$a^{-\frac{3y_2}{2}}=b^{y_2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^3}\right)^{y_2}=(b^2)^{y_2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3}=b^2 \Leftrightarrow a^3b^2=1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 76. Một người lập kế hoạch gửi tiết kiệm ngân hàng như sau: Đầu tháng 1 năm 2018, người đó gửi 10 triệu đồng; sau mỗi đầu tháng tiếp theo, người đó gửi số tiền nhiều hơn 10% so với số tiền đã gửi ở tháng liền trước đó. Biết rằng lãi suất ngân hàng không đổi là $0,5\%$ mỗi tháng và được tính theo hình thức lãi kép. Với kế hoạch như vậy, đến hết tháng 12 năm 2019, số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm là bao nhiêu (Làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 922.756.000 đồng. **B**. 832.765.000 đồng. **C**. 918.165.000 đồng. **D**. 926.281.000 đồng.

Lời giải.

Với $A=10$ triệu, $a=0,1$, $r=0,005$.

Đầu tháng 2: $A(1+r)+A(1+a)$.

Đầu tháng 3: $A(1+r)^2+A(1+a)(1+r)+A(1+a)^2$.

Đầu tháng 4: $A(1+r)^3+A(1+a)(1+r)^2+A(1+a)^2(1+r)+A(1+a)^3$.

...

Đầu tháng n: $A\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}(1+a)+\cdots+(1+r)(1+a)^{n-2}+(1+a)^{n-1}\right]$.

Hết tháng n: $A\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}(1+a)+\cdots+(1+r)(1+a)^{n-2}+(1+a)^{n-1}\right](1+r)$.

Gọi B là số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm đến hết tháng 12 năm 2019.

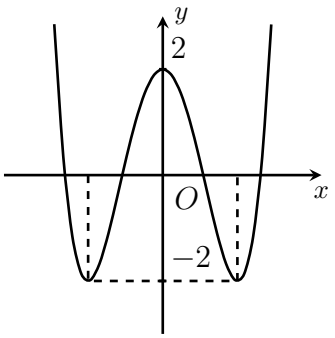
Khi đó $n=24$.

Ta có $B=A\cdot\dfrac{(1+a)^n-(1+r)^n}{a-r}(1+r)=922.756.396,2$.

Chọn đáp án A □

Câu 77.

Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.



A. 2. **B**. 3.
C. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy rằng $f'(x)$ đổi dấu 4 lần nên hàm số $y = f'(x)$ có 4 cực trị.
Xét hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.
Ta có $y' = f'(x)\left(3^{f(x)} \ln 3 + 2^{f(x)} \ln 2\right)$.
Vì $3^{f(x)} \ln 3 + 2^{f(x)} \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của y' là dấu của $f'(x)$. Do đó y' đổi dấu 4 lần hay hàm số đã cho có 4 cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x) = 2018 \ln(\mathrm{e}^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{\mathrm{e}})$. Tính giá trị biểu thức
$$T = f'(1) + f'(2) + ... + f'(2017).$$

A. $T = \dfrac{2019}{2}$. **B**. $T = 1009$. **C**. $T = \dfrac{2017}{2}$. **D**. $T = 1008$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2018}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e}}$.
Ta sẽ chứng minh nếu $a + b = 2018$ thì $f'(a) + f'(b) = 1$. Thật vậy, đặt $k = \dfrac{1}{2018}$ thì

$$\begin{aligned} f'(a) + f'(b) &= \frac{\mathrm{e}^{ka}}{\mathrm{e}^{ka} + \sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}^{kb}}{\mathrm{e}^{kb} + \sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{k(a+b)} + \sqrt{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{ka} + \sqrt{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{kb}}{(\mathrm{e}^{ka} + \sqrt{\mathrm{e}}) \cdot (\mathrm{e}^{kb} + \sqrt{\mathrm{e}})} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{k(a+b)} + \sqrt{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{ka} + \sqrt{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{kb}}{\mathrm{e}^{k(a+b)} + \sqrt{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{ka} + \sqrt{e} \cdot \mathrm{e}^{kb} + \mathrm{e}} \\ &= 1 \quad (\text{vì } k = \frac{1}{2018} \text{ và } a + b = 2018) \end{aligned}$$

Mặt khác, $f'(1009) = \dfrac{1}{2}$, do đó:
$T = f'(1) + f'(2) + ... + f'(2017) = 1008 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2017}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.

A. $m + n = 12$. **B**. $m + n = \dfrac{25}{2}$. **C**. $m + n = 14$. **D**. $m + n = 10$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + 4\log_c a + 4\log_c b$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các cặp số dương $\log_a b$ và $\log_b a; \log_a c$ và $4\log_c a; \log_b c$ và $4\log_c b$ ta

được: $P \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} + 2\sqrt{4\log_a c \cdot \log_c a} + 2\sqrt{4\log_b c \cdot \log_c b} \Rightarrow P \geq 10$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b \\ c = b^2 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} m = 10 \\ n = 2 \end{cases}$, suy ra $m + n = 12$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Tìm tập hợp gồm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **C.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **D.** $(-1; 1)$.

Lời giải.

$y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi $f(x) = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

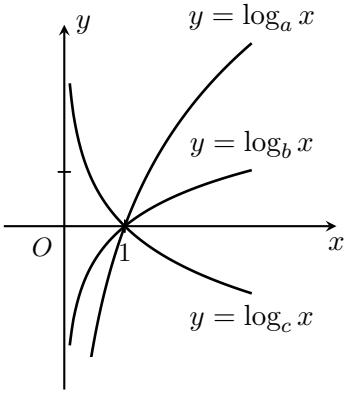
Điều này tương đương với $f'(x) < 0,\ \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ -m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m < 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 81.

Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > c > b$. **B.** $b > c > a$. **C.** $b > a > c$. **D.** $a > b > c$.



Lời giải.

Từ đồ thị và tính chất hàm logarit ta có $0 < c < 1$, $a > 1$, $b > 1$.

Với cùng một giá trị x ta có $\log_a x > \log_b x \Leftrightarrow \log_x a < \log_x b \Leftrightarrow a < b$. Vậy $b > a > c$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = 7^{x^3+3x^2+(9-3m)x+1}$ đồng biến trên $[0; 1]$?

A. 5. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 7^{x^3+3x^2+(9-3m)x+1} \cdot (3x^2 + 6x + 9 - 3m) \cdot \ln 7$.

Hàm số đồng biến trên $[0; 1] \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 9 - 3m \geq 0\ \forall x \in [0; 1]$.

$\Leftrightarrow m \leq x^2 + 2x + 3,\ \forall x \in [0; 1]$.

Đặt $g(x) = x^2 + 2x + 3$ ta có $g'(x) = 2x + 2 \geq 0,\ \forall x \in [0; 1]$

Ta có bảng biến thiên

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	3	$\nearrow$	18

Từ đó suy ra $m \leq 3$, vậy có đúng 3 giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Một người gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi được nhập vào tiền vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đó đúng 6 tháng người đó được lĩnh số tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây biết trong thời gian này người đó không rút tiền và lãi xuất không đổi?

A. 204848000 đồng. **B**. 204847000 đồng. **C**. 204034000 đồng. **D**. 204032000 đồng.

Lời giải.

Số tiền nhận được sau 6 tháng là $2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}004^6 = 204848256{,}8$ đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Một kỹ sư nhận được mức lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Biết rằng cứ sau hai năm thì mức lương của kỹ sư đó tăng thêm 10%. Tính tổng số tiền T (đồng) mà kỹ sư đó nhận được sau 10 năm làm việc (kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

A. 633.600.000. **B**. 1.172.179.000. **C**. 1.529.993.000. **D**. 3.059.985.000.

Lời giải.

Sau 10 năm, tổng số tiền mà kỹ sư đó có được là

$$T = 24 \cdot 8.000.000 \cdot \left[1 + (1+0{,}1)^2 + \cdots + (1+0{,}1)^5\right] \approx 1.172.179.000 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-25;25]$ để hàm số $y = 16^x - 4^{x+2} - 2mx + 2018$ đồng biến trên khoảng $(1;4)$?

A. 3. **B**. 4. **C**. 10. **D**. 28.

Lời giải.

Có $y' = 16^x \ln 16 - 4^{x+2} \ln 4 - 2m$.
Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;4)$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in (1;4)$.
$\Leftrightarrow 16^x \ln 16 - 4^{x+2} \ln 4 - 2m \geq 0, \forall x \in (1;4) \Leftrightarrow \dfrac{m}{\ln 2} \leq 2 \cdot 16^x - 16 \cdot 4^x, \forall x \in (1;4)$
Đặt $t = 4^x$, với $x \in (1;4)$ thì $t \in (4;256)$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{m}{\ln 2} \leq f(t) = 2t^2 - 16t, \forall t \in (4;256)$.
$f'(t) = 4t - 16$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

t	$-\infty$		4		256		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$			
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-32	$\nearrow$	130048	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên $(1;4)$ thì $\dfrac{m}{\ln 2} \le -32 \Leftrightarrow m \le -32\ln 2$.
Kết hợp với điều kiện, suy ra $-25 \le m \le -32\ln 2 \approx -15{,}374$.
Vậy có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng theo hình thức gửi góp hàng tháng. Lãi suất tiết kiệm gửi góp cố định là $0,55\%$/tháng. Lần đầu tiên người đó gửi 2.000.000 đồng. Cứ sau mỗi tháng người đó gửi số tiền bằng số tiền của tháng liền trước đó. Hỏi sau 5 năm (kể từ lần gửi đầu tiên) người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi xấp xỉ bao nhiêu đồng?

A. 138948873. **B**. 144492513. **C**. 141713091. **D**. 142492514.

Lời giải.

- ☑ Gọi số tiền gốc mang đi gửi là $u_0 = A$.
- ☑ Số tiền sau kỳ thứ nhất là $u_1 = A + Ar = A(1+r)$.
- ☑ Số tiền sau kỳ thứ hai là $u_2 = [A(1+r)+A](1+r) = A(1+r)^2 + A(1+r)$.
- ...
- ☑ Số tiền sau kỳ thứ n là $u_n = A(1+r)[1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{n-1}] = A(1+r)\cdot\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.

Áp dụng cho $n = 60$, $r = 0{,}0055$, $A = 2.000.000$ (đồng) ta được $u_{60} \simeq 142492514$ (đồng).
Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất $8{,}4\%$/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 9. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 7.

Lời giải.

Số tiền gửi ban đầu A đồng với lãi suất $r\%$, sau n năm được tính theo công thức $P_n = A(1+r)^n$.
Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned} & A(1+r)^n = 2A \\ \Leftrightarrow\ & 1{,}084^n = 2 \\ \Leftrightarrow\ & n = \log_{1{,}084} 2 \approx 8{,}594. \end{aligned}$$

Vậy sau 9 năm người gửi thu được gấp đôi số tiền ban đầu.
Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương, anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi ít nhất sau bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu, biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B**. 12. **C**. 13. **D**. 10.

Lời giải.

Ta có bảng

Năm	Số tiền tiết kiệm được (triệu đồng)
2	$u_2 = 12 \times 10 \times 0{,}12$
3	$u_3 = 12 \times 10 \times 0{,}12 \times 1{,}12$
4	$u_4 = 12 \times 10 \times 0{,}12 \times 1{,}12^2$
$\cdots$	$\cdots$
n	$u_n = 12 \times 10 \times 0{,}12 \times 1{,}12^{n-2}$

Sau n năm thì tổng số tiền tiết kiệm được của anh A là

$$u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = 120\left(1{,}12^{n-1} - 1\right).$$

Vì anh A được hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe nên anh ta phải trả 340 triệu đồng. Suy ra

$$120\left(1{,}12^{n-1} - 1\right) = 340 \Rightarrow n \approx 12{,}86.$$

Vậy cần ít nhất 13 năm thì anh A đủ tiền mua xe.
Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Ông An gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên đến khi rút toàn bộ tiền gốc và lãi được bao nhiêu?(biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm ông An gửi tiền)

A. 217,695 triệu đồng. **B**. 231,815 triệu đồng. **C**. 197,201 triệu đồng. **D**. 190,271 triệu đồng.

Lời giải.

Tổng số tiền vốn và lãi ông An thu được sau 5 năm là $T_5 = 60(1 + 8\%)^5$.
Tổng số tiền vỗn và lãi ông An thu được sau 10 năm là $T = (T_5 + 60)(1 + 8\%)^5 = 217{,}695$ triệu đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Số giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 2019. **B**. 2017. **C**. 2018. **D**. 1009.

Lời giải.

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ điều kiện cần và đủ là

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - m + 1 > 0 \quad \text{với} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & m < x^2 - 2x + 1 \quad \text{với} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & m < (x-1)^2 \quad \text{với} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & m < 0. \end{aligned}$$

Như vậy, các giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ thỏa mãn là:

$$-2018; -2017; -2016; \ldots; -2; -1.$$

Do đó có 2018 các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 79760000. **B**. 74813000. **C**. 65393000. **D**. 70656000.

Lời giải.

Số tiền 200 triệu tính theo kì hạn quý sau 1 năm là $200 \cdot (2{,}1\% + 1)^4$ (triệu đồng).

Số tiền 200 triệu tính theo kì hạn tháng sau 1 năm là $200 \cdot (0{,}73\% + 1)^{12}$ (triệu đồng).

Do sau giả thiết suy ra số tiền tính theo quý lấy lãi tiếp tục trong 1 năm được

$A = 100 \cdot (2{,}1\% + 1)^4 \cdot (2{,}1\%)^4$ (triệu đồng).

Tương tự số tiền tính theo tháng lấy lãi tiếp tục trong 1 năm được

$B = \left[200 \cdot (0{,}73\% + 1)^{12} + 100 \cdot (2{,}1\% + 1)^4\right] \cdot (1 + 0{,}73\%)^{12}$ (triệu đồng).

Vậy số tiền chị lãi là $M = A + B - 400 = 74{,}813$ (triệu đồng).

Chọn đáp án B □

Câu 92. Ông A muốn sau 5 năm có 1.000.000.000 đồng để mua ô tô Camry. Hỏi rằng ông A phải gửi ngân hàng mỗi tháng số tiền gần nhất với số tiền nào sau đây? Biết lãi suất hàng tháng là $0,5\%$, tiền lãi sinh ra hằng tháng được nhập vào tiền vốn số tiền gửi hàng tháng là như nhau.

A. $a = 14.261.000$ (đồng). **B**. $a = 14.260.500$ (đồng).

C. $a = 14.261.500$ (đồng). **D**. $a = 14.260.000$ (đồng).

Lời giải.

Coi rằng người đó gửi tiền vào thời điểm cuối tháng, áp dụng công thức Lãi kép, gửi hàng tháng:

$$T_n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r),$$

trong đó $T_{60} = 1000.000.000$, $r = \dfrac{0,5}{100}$ và M là số tiền gửi hàng tháng.

$$M = \frac{1.000.000.000 \cdot \dfrac{0,5}{100}}{\left(1 + \dfrac{0,5}{100}\right)\left[\left(1 + \dfrac{0,5}{100}\right)^{60} - 1\right]} = 14261494,06 \approx 14.261.500.$$

Chọn đáp án C □

Câu 93. Đồ thị của hàm số $y = g(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x$ $(a > 0; a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B**. -2020. **C**. 2020. **D**. -2016.

Lời giải.

Lấy điểm $A\left(x_0; a^{x_0}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$, điểm B đối xứng với điểm A qua điểm $I(1;1)$ có toạ độ $B\left(2-x_0; 2-a^{x_0}\right)$.
Điểm B thuộc đồ thị hàm số $y = g(x)$ nên hàm $g(x)$ có dạng $g(x) = 2 - a^{2-x}$.
Suy ra: $g\left(2+\log_a \dfrac{1}{2018}\right) = 2 - a^{-\log_a \frac{1}{2018}} = 2 - a^{\log_a 2018} = -2016$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho hàm số $f(x) = x^x$ với $x > 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$.

B. $f'(1) = 1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

Lời giải.

Ta có $\ln f(x) = x \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = (1+\ln x)x^x$.
Vậy $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A: giá khoan của mét khoan đầu tiên là 8000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: giá khoan của mét khoan đầu tiên là 6000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 mét và 25 mét để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

A. Luôn chọn A.

B. Luôn chọn B.

C. Giếng 20 mét chọn A, còn giếng 25 mét chọn B.

D. Giếng 20 mét chọn B, còn giếng 25 mét chọn A.

Lời giải.

Chi phí khi cơ sở A khoan giếng 20 mét và 25 mét lần lượt là $20 \cdot 8000 + 19 \cdot 20 \cdot 250 = 255000$ đồng và $25 \cdot 8000 + 24 \cdot 25 \cdot 250 = 350000$ đồng.
Chi phí khi cơ sở B khoan giếng 20 mét và 25 mét lần lượt là $6000 \cdot \dfrac{1{,}07^{20} - 1}{0{,}07} = 245972{,}9539$ đồng và $6000 \cdot \dfrac{1{,}07^{25} - 1}{0{,}07} = 379494{,}2263$ đồng.

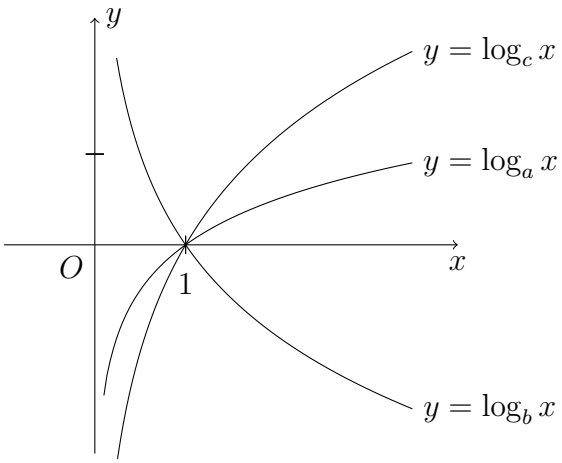
Chọn đáp án D □

Câu 96.

Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $b < a < c$. **B**. $c < a < b$.

C. $b < c < a$. **D**. $a < b < c$.



Lời giải.

Ta có hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến, $y = \log_a x$, $y = \log_c x$ đồng biến nên $0 < b < 1$ và $a, c > 1$.
Chẳng hạn với $x = 2$ dựa vào đồ thị ta thấy

$$0 < \log_a 2 < \log_c 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a} < \frac{1}{\log_2 c} \Leftrightarrow \log_2 a > \log_2 c \Leftrightarrow a > c.$$

Do đó $b < c < a$.
Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$, $\sqrt{a} \le b < a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

A. 7. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có

$$P = \frac{1}{1 - \log_a b} + 4\left(\frac{1}{\log_a b} - 1\right) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4,$$

với $t = \log_a b$. Vì $b > 1$, $\sqrt{a} \le b < a$ nên $\frac{1}{2} \le t < 1$. Lại có

$$P' = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4}{t^2}, \quad P' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
P'		$-$	0	$+$	
P	6	↘	5	↗	$+\infty$

Nên giá trị nhỏ nhất của P là 5.
Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hai số thực x, y bất kỳ thỏa mãn $2^x+2^y=2018$. Tìm giá trị lớn nhất của $S=x+y$.

A. $S_{\max}=2\log_2 2018$. **B.** $S_{\max}=2\log_2 1009$. **C.** $S_{\max}=\log_2 2018$. **D.** $S_{\max}=\log_2 1009$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương 2^x, 2^y ta được:

$$\frac{2^x+2^y}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot 2^y}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2^x\cdot 2^y\leq\left(\frac{2^x+2^y}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 2^x\cdot 2^y\leq 1009^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \log_2(2^x\cdot 2^y)\leq\log_2 1009^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x+y\leq 2\log_2 1009.$$

Dấu "=" xảy ra khi $2^x=2^y\Leftrightarrow x=y=\log_2 1009$.

Vậy $S_{\max}=2\log_2 1009$ khi $x=y=\log_2 1009$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x-2}{9^x+3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$S=f\left(\frac{1}{600}\right)+f\left(\frac{3}{600}\right)+f\left(\frac{5}{600}\right)+\cdots+f\left(\frac{599}{600}\right).$$

A. $S=150$. **B.** $S=599$. **C.** $S=\dfrac{149}{3}$. **D.** $S=50$.

Lời giải.

Lấy $a+b=1$. Ta có:

$f(a)+f(b)=\dfrac{9^a-2}{9^a+3}+\dfrac{9^b-2}{9^b+3}$

$=1-\dfrac{2(9^a+9^b+6)}{3(9^a+9^b+6)}$

$=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $S=\dfrac{300}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=50$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Bác Hiếu đầu tư 99 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,25% năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì bác Hiếu thu được bao nhiêu tiền lãi?(giả sử rằng lãi suất hàng năm không đổi và làm tròn số đến hàng phần nghìn).

A. 147,155 triệu đồng. **B.** 48,155 triệu đồng. **C.** 8,7 triệu đồng. **D.** 58,004 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền bác Hiếu gửi ban đầu là M, lãi suất định kì là r, số tiền bác được lãnh sau 5 năm là $T=M(1+r)^5$.

Số tiền lãi là $S = T - M = M(1+r)^5 - M = 99 \cdot 10^6((1+8{,}25\%)^5 - 1) \approx 48154897$ đồng.

Vậy số tiền lãi bác nhận được là 48,155 triệu đồng

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. C	5. D	6. A	7. A	8. C	9. D	10. C
11. D	12. A	13. D	14. C	15. C	16. C	17. D	18. D	19. D	20. D
21. A	22. D	23. A	24. D	25. A	26. D	27. B	28. A	29. B	30. A
31. B	32. C	33. C	34. C	35. A	36. B	37. C	38. A	39. B	40. C
41. B	42. D	43. C	44. A	45. D	46. C	47. A	48. D	49. C	50. C
51. D	52. C	53. A	54. C	55. D	56. D	57. D	58. C	59. D	60. A
61. D	62. D	63. D	64. C	65. C	66. B	67. C	68. C	69. D	70. A
71. A	72. D	73. C	74. A	75. D	76. A	77. D	78. C	79. A	80. A
81. C	82. D	83. A	84. B	85. C	86. D	87. A	88. C	89. A	90. C
91. B	92. C	93. D	94. A	95. D	96. C	97. C	98. B	99. D	100. B

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.

A. $m + n = 14$. **B.** $m + n = \dfrac{25}{2}$. **C.** $m + n = 12$. **D.** $m + n = 10$.

Lời giải.

Phương pháp:

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, (a, b > 0; a, b \neq 1)$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Cách giải:

Do $a, b, c > 1$ nên $\log_a b, \log_c a, \log_b c > 0$.

$$\begin{aligned} P &= \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab) = \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + 4\log_c a + 4\log_a b \\ &= (\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + 4\log_c a) + (\log_b c + 4\log_c b) \\ &= \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b}\right) + \left(\frac{1}{\log_c a} + 4\log_c a\right) + \left(\log_b c + \frac{4}{\log_b c}\right) \\ &\geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b}} + 2\sqrt{\frac{1}{\log_c} \cdot 4\log_c a} + 2\sqrt{\log_b c \cdot \frac{4}{\log_b c}} = 2 + 4 + 4 = 10. \end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \log_a b = \dfrac{1}{\log_a b} \\ \dfrac{1}{\log_c a} = 4\log_c a \\ \log_b c = \dfrac{4}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 1 \\ \log_c a = \dfrac{1}{2} \\ \log_b c = 2. \end{cases}$

Vậy, đạt giá trị nhỏ nhất là 10 khi $\log_b c = 2 \Rightarrow m = 10, n = 2 \Rightarrow m + n = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ hết sau 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế, lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng bao nhiêu ngày? (làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 37 ngày. **B.** 41 ngày. **C.** 40 ngày. **D.** 43 ngày.

Lời giải.

Phương pháp:

Lượng thức ăn mà trang trại ăn hết ở ngày thứ k là: $M(1 + 4\%)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.

Cách giải:

Theo dự định, mỗi ngày, trang trại ăn hết $1 : 100 = \dfrac{1}{100}$ (lượng thức ăn).

Lượng thức ăn mà trang trại ăn hết ở ngày thứ k là: $\dfrac{1}{100}(1 + 4\%)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.

Xác định số tự nhiên n nhỏ nhất để

$$\begin{aligned} &\frac{1}{100} + \frac{1}{100}(1 + 4\%) + \frac{1}{100}(1 + 4\%)^2 + \cdots + \frac{1}{100}(1 + 4\%)^{n-1} \geq 1. \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot 1,04 + \frac{1}{100} \cdot 1,04^2 + \cdots + \frac{1}{100} \cdot 1,04^{n-1} \geq 1. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{100}\left(1+1,04+1,04^2+\cdots+1,04^{n-1}\right)\geq 1.$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{100}\cdot\frac{1,04^{n-1}-1}{1,04-1}\geq 1.$$
$$\Leftrightarrow \quad 1,04^{n-1}-1\geq 4\Leftrightarrow n-1\geq \log_{1,04}5\Leftrightarrow n\geq \log_{1,04}5+1\Leftrightarrow n\geq 42,03\Rightarrow n_{\min}=43.$$

Vậy thực tế lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng 43 ngày.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% /tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây ?

A. 2,22 triệu đồng. **B**. 3,03 triệu đồng. **C**. 2,25 triệu đồng. **D**. 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.
Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$.
Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r)-m$.
Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r)-m](1+r)=M(1+r)^2-m(1+r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r)^2-m(1+r)-m](1+r)=M(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n\geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-m(1+r)^{n-2}-\ldots-m(1+r)-m=M(1+r)^n-\frac{m[(1+r)^{n-1}-1]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n-\frac{m[(1+r)^{n-1}-1]}{r}=0\Rightarrow m=\frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n-1}.$$

Thay số với $M=100.000.000$, $r=1\%$, $n=5\times 12=60$ ta được $m\approx 2,22$ (triệu đồng).
Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=2019\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}\right)$. Tính giá trị biểu thức

$$A=f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(2018).$$

A. 2018. **B**. 1009. **C**. $\dfrac{2017}{2}$. **D**. $\dfrac{2019}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = 2019\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}\right)'}{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}}$

Do đó

$$\begin{aligned} f'(x)+f'(2019-x) &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{2019-x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{2019-x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}} = 1 \end{aligned}$$

Bởi vậy $2A = [f'(1)+f'(2018)]+[f'(2)+f'(2017)]+\cdots+[f'(2018)+f'(1)] = 2018$

Nên $A = \dfrac{2018}{2} = 1009$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Bác An gửi vào ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi xuất $0,7\%$/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi xuất tăng lên $0,9\%$/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi xuất giảm xuống $0,6\%$/ tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Hỏi sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền gần nhất với số nào sau đây?

A. 5.453.000 đồng. **B**. 5.436.000 đồng. **C**. 5.468.000 đồng. **D**. 5.463.000 đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền gửi vào là M đồng, lãi xuất r/ tháng.

Cuối tháng thứ n: số vốn tích lũy được là:

$T_n = M(1+r)^n$.

Số vốn tích lũy của bác An sau 6 tháng gửi tiền với lãi suất $0,7\%$/ tháng là:

$T_1 = 5(1,007)^6$ triệu đồng.

Số vốn tích lũy của bác An sau 9 tháng gửi tiền (3 tháng tiếp theo với lãi suất $0,9\%$/ tháng) là:

$T_2 = T_1.(1,009)^3 = 5.(1,007)^6.(1,009)^3$ triệu đồng.

Do đó số tiền bác An lĩnh được sau 1 năm (12 tháng) từ ngân hàng (3 tháng tiếp theo sau đó với lãi suất $0,6\%$/ tháng) là:

$T = T_2.(1,006)^3 = 5.(1,007)^6.(1,009)^3.(1,006)^3$ triệu đồng $\approx 5452733,453$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+3)16^x + (2m-1)\,4^x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $-3 < m < -1$. **B**. $-1 < m < -\dfrac{3}{4}$. **C**. $-1 < m < 0$. **D**. $m \geq -3$.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x, t > 0$ thì phương trình thành $(m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1 = 0 \quad (2)$.

Phương trình ban đầu có hai nghiệm trái dấu tương đương với (2) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$.

Đặt $P(t) = (m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1$.

$$\begin{cases} m+3\neq 0 \\ (m+3)P(1)<0 \\ (m+3)P(0)>0 \\ \dfrac{t_1+t_2}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(4m+3)<0 \\ (m+3)(m+1)>0 \\ \dfrac{-(2m-1)}{2(m+3)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<\dfrac{-4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>-1 \end{array}\right. \\ -3<m<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<-\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 7. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y\leq \log_{\frac{1}{2}}(x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P=x+3y$

A. $P_{min}=\dfrac{17}{2}$. **B.** $P_{min}=8$. **C.** $P_{min}=9$. **D.** $P_{min}=\dfrac{25\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

- ☑ Sử dụng công thức $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$ $(0<a\neq 1, x, y>0)$, giải bất phương trình lôgarit cơ bản $\log_a f(x)\leq \log_a g(x)$ $(0<a<1)\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$.
- ☑ Rút x theo y thế vào P.
- ☑ Đưa P về dạng $\mathrm{P}=f(y)$. Lập BBT và tìm GTNN của $\mathrm{P}=f(y)$.

Cách giải:

Theo bài ra ta có:

$\log_{\frac{1}{2}x}+\log_{\frac{1}{2}y}\leq \log_{\frac{1}{2}}(x+y^2)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(xy)\leq (x+y^2)\Leftrightarrow xy\geq x+y^2$

$x(y-1)\geq y^2>0$. Mà $x>0\Rightarrow y-1>0\Leftrightarrow y>1$.

$x\geq \dfrac{y^2}{y-1}$. Khi đó ta có $\mathrm{P}=x+3y\geq \dfrac{y^2}{y-1}+3y$ với $y>1$.

Xét hàm số $f(y)=\dfrac{y^2}{y-1}+3y$ với $y>1$ ta có:

$$f'(y)=\frac{2y(y-1)-y^2}{(y-1)^2}+3=\frac{y^2-2y+3y^2-6y+3}{(y-1)^2}=\frac{4y^2-8y+3}{(y-1)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

BBT:

y	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(y)$	$-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

Từ BBT ta thấy $\min\limits_{y>1} f(y)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=9$.

Vậy $\mathrm{P}\geq 9$ hay $\mathrm{P}_{min}=9$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 2,22 triệu đồng. **B**. 3,03 triệu đồng. **C**. 2,25 triệu đồng. **D**. 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.
Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M + Mr = M(1 + r)$.
Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1 + r) - m$.
Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1 + r) - m](1 + r) = M(1 + r)^2 - m(1 + r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1 + r)^2 - m(1 + r) - m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$\left[M(1 + r)^2 - m(1 + r) - m\right](1 + r) = M(1 + r)^3 - m(1 + r)^2 - m(1 + r) - m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n \geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1 + r)^n - m(1 + r)^{n-1} - m(1 + r)^{n-2} - \ldots - m(1 + r) - m = M(1 + r)^n - \frac{m\left[(1 + r)^n - 1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1 + r)^n - \frac{m\left[(1 + r)^{n-1} - 1\right]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{M(1 + r)^n r}{(1 + r)^n - 1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).
Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m trong đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình

$$\ln(mx) = 2\ln(x + 2)$$

có hai nghiệm phân biệt?

A. 2009. **B**. 2011. **C**. 2010. **D**. 4020.

Lời giải.

Điều kiện $x > -2$. Phương trình tương đương

$$\ln(mx) = \ln(x + 2)^2 \Leftrightarrow mx = (x + 2)^2$$

Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm, phương trình tương đương $m = \dfrac{(x + 2)^2}{x}$. Lập bảng biến thiên ta có điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $m > 8$. Vậy có tất cả 2010 giá trị thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Tìm m để phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^3+mx^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m$ có nghiệm duy nhất.

A. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$. **B.** $m < -\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$. **D.** $m > -\frac{1}{4}$.

Câu 11. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$.

A. $P = 2 + 3\sqrt{2}$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 2\sqrt{2} + 3$. **D.** $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Từ $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow (x-1)y \geq x^2$.

Nếu $0 < x \leq 1$ thì $y \geq xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow 0 \geq x^2$ (vô lý).

Nếu $x > 1$ thì $(x-1)\, y \geq x^2 \Leftrightarrow y \geq \dfrac{x^2}{x-1}$. Vậy $P = x + y \geq x + \dfrac{x^2}{x-1}$.

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{x^2}{x-1}$ trên $(1; +\infty)$. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ (nhận).} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x) = f\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gởi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng A với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gởi tiền là $0,6\%$ / tháng. Gọi A đồng là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3.500.000.000 < A < 3.550.000.000$. **B.** $3.400.000.000 < A < 3.450.000.000$. .

C. $350.000.000 < A < 3.400.000.000$. **D.** $3.450.000.000 < A < 3.500.000.000$.

Lời giải.

Gọi a (đồng) là số tiền người đó gởi vào ngân hàng mỗi tháng, r là lãi suất của ngân hàng.

Cuối tháng thứ nhất, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.r = a(1+r)$. Đầu tháng thứ hai, người đó có số tiền là: $a(1+r) + a = a\left[(1+r)+1\right] = \dfrac{a}{\left[(1+r)-1\right]}\left[(1+r)^2 - 1\right] = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right]$.

Cuối tháng thứ hai, người đó có số tiền là:

$T_2 = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right] + \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right].r = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^2 - 1\right](1+r)$.

Tổng quát, cuối tháng thứ n thì người đó tích lũy được số tiền là: $T_n = \dfrac{a}{r}.\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$. Theo đề bài ta có: $a = 4000000$, $r = 0,006$, $n = 300$ (tháng). Vậy số tiền người ấy có được sau 25 năm là: $A = T_{300} = \dfrac{4000000}{0,006}\left[(1+0,006)^{300} - 1\right](1+0,006) = 3.364.866.655$ (đồng).

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho a, b là các số thực và hàm số $f(x) = a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + b\sin x\cos 2018x + 6$. Biết $f\left(2018^{\ln 2019}\right) = 10$. Tính $P = f\left(-2019^{\ln 2018}\right)$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 10$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 6 = a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + b\sin x\cos 2018x$.

Do $\sqrt{x^2+1}+x>|x|+x\geq 0$ nên hàm số $g(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$. Lại có

$$\begin{aligned} g(-x) &= a\log^{2019}\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)+b\sin(-x)\cos(-2018x)\\ &= a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-b\sin x\cos 2018x\\ &= a\log^{2019}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-b\sin x\cos 2018x\\ &= -a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-b\sin x\cos 2018x=-g(x). \end{aligned}$$

Suy ra $g(x)$ là hàm số lẻ.
Lại có $2018^{\ln 2019}=2019^{\ln 2018}$ và $f\left(2018^{\ln 2019}\right)=10$ nên $g\left(2018^{\ln 2019}\right)=4$ và $g\left(-2019^{\ln 2018}\right)=-g\left(2018^{\ln 2019}\right)=-4$. Từ đó suy ra $f\left(-2019^{\ln 2018}\right)=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng với mãi suất 12 %/ năm theo thỏa thuận: Cứ mỗi tháng ông A phải trả cho ngân hàng a triệu đồng và lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ (a tính theo đơn vị triệu đồng). Hỏi giá trị a bằng bao nhiêu để ông A trả hết nợ ngân hàng sau đúng 3 tháng.

A. $a=\dfrac{100\cdot(0{,}01)^3}{3}$ triệu đồng. **B.** $a=\dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3-1}$ triệu đồng.

C. $a=\dfrac{100\cdot(0{,}03)^3}{3}$ triệu đồng. **D.** $a=\dfrac{120\cdot(1{,}12)^3}{(1{,}12)^3-1}$ triệu đồng.

Lời giải.

Ta có lãi suất 12% /năm nên lãi suất theo tháng là 1% / tháng.
Đặt $M=100,\ r=0{,}01,\ h=r+1=1{,}01$.
Nợ của ông A sau 1 tháng là $M\cdot h-a$
Nợ của ông A sau 2 tháng là $(M\cdot h-a)\cdot h-a=M\cdot h^2-a\cdot(h+1)$
Nợ của ông A sau 3 tháng là $(M\cdot h^2-a\cdot(h+1))h-a=M\cdot h^3-a\cdot\dfrac{h^3-1}{h-1}$.
Vì ông A trả hết nợ sau 3 tháng nên
$M\cdot h^3-a\cdot\dfrac{h^3-1}{h-1}=0\Leftrightarrow a=\dfrac{M\cdot h^3\cdot(h-1)}{h^3-1}=\dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3-1}$.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2018)\right]$$

A. $S=2018$. **B.** $S=\dfrac{1}{2018}$. **C.** $S=\sqrt{2018}$. **D.** $S=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$.

Lời giải.

① Trước hết ta chứng minh với $a+b=1$ thì $f(a)+f(b)=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$. Thật vậy

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)=&\frac{1}{2018^a+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\=&\frac{1}{\sqrt{2018}}\left(\frac{1}{2018^{a-\frac{1}{2}}+1}+\frac{1}{2018^{b-\frac{1}{2}}+1}\right)\\=&\frac{1}{\sqrt{2018}}\left(\frac{1}{2018^{a-\frac{1}{2}}+1}+\frac{1}{2018^{1-a-\frac{1}{2}}+1}\right)\\=&\frac{1}{\sqrt{2018}}\left(\frac{1}{2018^{a-\frac{1}{2}}+1}+\frac{2018^{a-\frac{1}{2}}}{2018^{a-\frac{1}{2}}+1}\right)\\=&\frac{1}{\sqrt{2018}}.\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trên ta có

$$\begin{aligned}f(-2017)+f(2018)&=\frac{1}{\sqrt{2018}}\\f(-2016)+f(2016)&=\frac{1}{\sqrt{2018}}\\&\cdots\cdots\cdots\\f(0)+f(1)&=\frac{1}{\sqrt{2018}}\end{aligned}$$

Vậy $S=\sqrt{2018}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2018}}\cdot 2018=2018$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+1$

A. $P_{\min}=8$. **B.** $P_{\min}=16$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=2$.

Lời giải.

$\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$ xác định $\Leftrightarrow\dfrac{1-2x}{x+y}>0$.

Do $x,y>0$ nên $1-2x>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$

Khi đó: $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ln(1-2x)-\ln(x+y)=(x+y)-(1-2x)\\&\Leftrightarrow\ln(1-2x)+(1-2x)=\ln(x+y)+(x+y)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ với $t>0$

Hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0;\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(1-2x)=f(x+y)\\&\Leftrightarrow 1-2x=x+y\Leftrightarrow y=1-3x>0\end{aligned}$$

Do đó: $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x\left(1-3x\right)}}+1\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}+1$ (Dấu bằng xảy ra khi $x=1-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}+1; x\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{\left(1-2x\right)^2}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{\left(1-2x\right)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2=\left(1-2x\right)^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{1}{3}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	9

Vậy $P_{\min}=8$ tại $x=\dfrac{1}{4}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $3^x=5^y=15^{\frac{2017}{x+y}-z}$. Gọi $S=xy+yz+zx$. Khẳng định nào đúng?

A. $S\in(1;2016)$. **B.** $S\in(0;2017)$. **C.** $S\in(0;2018)$. **D.** $S\in(2016;2017)$.

Lời giải.

Đặt $t=3^x=5^y=15^{\frac{2017}{x+y}-z}$. Suy ra, $0<t\neq 1$ và $x=\log_3 t, y=\log_5 t, \dfrac{2017}{x+y}-z=\log_{15}t\Rightarrow xz+yz=2017-(x+y)\log_{15}t$.

Ta có $S=xy+(yz+zx)=\log_3 t\cdot\log_5 t+2017-(x+y)\log_{15}t=\log_3 t\cdot\log_5 t-(\log_3 t+\log_5 t)\cdot\log_{15}t+2017$.

Vì $\log_{15}t=\dfrac{1}{\log_t 15}=\dfrac{1}{\log_t 3+\log_t 5}=\dfrac{\log_3 t\cdot\log_5 t}{\log_3 t+\log_5 t}$. Vậy $S=2017$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho a,b là các số thực và $f(x)=a\ln^{2017}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+bx\sin^{2018}x+2$. Biết $f(5^{\log_c 6})=6$, tính giá trị của biểu thức $P=f\left(-6^{\log_c 5}\right)$ với $0<c\neq 1$.

A. $P=-2$. **B.** $P=6$. **C.** $P=4$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Ta có $f(5^{\log_c 6})=f(6^{\log_c 5})=6$.

Mặt khác, ta có $f(-x)=a\cdot\ln^{2017}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-bx\cdot\sin^{2018}x+2=-f(x)+4$. Vì vậy $f(-6^{\log_c 5})=f(-5^{\log_c 6})=-f(5^{\log_c 6})+4=-2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \dfrac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $3+2\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y\\ \Leftrightarrow &\log_3(2x+y+1) - \log_3(x+y) = 3(x+y) - (2x+y+1) + 1\\ \Leftrightarrow &\log_3(2x+y+1) + (2x+y+1) = \log_3[3(x+y)] + 3(x+y). \ (1)\end{aligned}$$

Xét hàm số $y = f(a) = \log_3 a + a$ trên $(0;+\infty)$.
Dễ thấy hàm số $y = f(a)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Do đó, $(1) \Leftrightarrow f(2x+y+1) = f(3(x+y)) \Leftrightarrow 2x+y+1 = 3(x+y) \Leftrightarrow x+2y = 1$.
Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{y}}$

$$\geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{\frac{1}{4}+y}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{4}+y} + \frac{1}{\frac{1}{4}+y}$$

$$\geq \frac{(1+1+1)^2}{x+\frac{1}{4}+y+\frac{1}{4}+y} = \frac{9}{x+2y+\frac{1}{2}} = 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 20. Một người mua một căn hộ chung cư với giá 500 triệu đồng. Người đó trả trước 100 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính theo tổng số tiền còn nợ là 0,5% mỗi tháng. Kể từ ngày mua, mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng (cả gốc lẫn lãi). Tính thời gian tối thiểu (làm tròn đến hàng đơn vị) để người đó trả hết nợ.

A. 140 tháng. **B.** 136 tháng. **C.** 133 tháng. **D.** 144 tháng.

Lời giải.

☑ Đặt $P_0 = 400$ triệu đồng, $a = 4$ triệu đồng, $r = 0{,}5\%$.
☑ Số tiền người đó còn lại sau tháng thứ n được tính theo công thức

$$P_n = P_0 \cdot (1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

☑ Người đó trả hết nợ khi

$$\begin{aligned}&P_n \leq 0 \Leftrightarrow -0,5 \cdot 1{,}005^n + 1 \leq 0\\ &\Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}005} 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2018^x}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$.

A. $S=2017$. **B.** $S=1008$. **C.** $S=\sqrt{2016}$. **D.** $S=1006$.

Lời giải.

Xét hai số thực dương a và b sao cho $a+b=1$. Ta có

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)&=\frac{2018^a}{2018^a+\sqrt{2018}}+\frac{20018^b}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{2\cdot 2018^a2018^b+\sqrt{2018}\left(2018^a+2018^b\right)}{2018^a2018^b+\sqrt{2018}\left(2018^a+2018^b\right)+2018}\\&=1\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}S&=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+\cdots+f\left(\frac{2016}{2017}\right)\\&=\left[f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1008}{2017}\right)+f\left(\frac{1009}{2017}\right)\right]=1008.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $a>0$ thỏa mãn $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A. $0<a<1$. **B.** $1<a<2017$. **C.** $0<a\le 2017$. **D.** $a\ge 2017$.

Lời giải.

Xét hàm $f(x)=\dfrac{\ln(2^x+2^{-x})}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2^x-2^{-x})\ln 2^x-(2^x+2^{-x})\ln(2^x+2^{-x})}{x^2(2^x+2^{-x})}$.

Vì $\ln 2^x<\ln(2^x+2^{-x})$ và $0<2^x-2^{-x}<2^x+2^{-x}$ nên $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

Do vậy

$$\begin{aligned}&\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)^a\\\Leftrightarrow&2017\ln(2^a+2^{-a})\le a\ln(2^{2017}+2^{-2017})\\\Leftrightarrow&\frac{\ln(2^a+2^{-a})}{a}\le\frac{\ln(2^{2017}+2^{-2017})}{2017}\\\Leftrightarrow&a\ge 2017.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $\log(x+2y)=\log x+\log y$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{1+2y}+\dfrac{4y^2}{1+x}$ là

A. 6. **B.** $\dfrac{32}{5}$. **C.** $\dfrac{31}{5}$. **D.** $\dfrac{29}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\log(x+2y)=\log xy\Leftrightarrow x+2y=xy$.

Đặt $2y=z$, ta có $x,z>0$ thỏa mãn $2(x+z)=xz\le\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2\Rightarrow x+z\ge 8$. Lại có

$$P=\frac{x^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{(x+z)^2}{2+x+z}=x+z-2+\frac{4}{2+x+z}.$$

Xét $f(t)=t-2+\dfrac{4}{2+t}$, $f'(t)=1-\dfrac{4}{(t+2)^2}>0$, $\forall t\geq 8$ nên $\min\limits_{t\geq 8} f(t)=f(8)=\dfrac{32}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{32}{5}$ khi $x=z=4$ hay $(x;y)=(4;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\leq 1$. Khi biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3\left(\log_2 a^a+\log_2 b^b+\log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì tổng $a+b+c$ là

A. 3. **B.** $3\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $x=\log_2 a$, $y=\log_2 b$, $z=\log_2 c$.

Ta có $\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c\leq 1\Rightarrow x^3+y^3+z^3\leq 1; 0\leq x,y,z\leq 1$.

Biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3(ax+by+cz)$.

Xét hàm số $f(t)=t-\log_2 t$ với $t\in[1;2]$. $f'(t)=1-\dfrac{1}{t\ln 2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t_0=\dfrac{1}{\ln 2}$.

Suy ra $f(t)\leq \max\{f(1),f(2),f(t_0)\}=1,\ x\in[1;2]$.

Do đó, $a-x-1\leq 0\Rightarrow a^3-3ax-x^3-1=(a-x-1)\left(a^2+x^2+1+a+ax-x\right)\leq 0$.

Suy ra $a^3-3ax\leq x^3+1$.

Biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3(ax+by+cz)\leq x^3+y^3+z^3+3\leq 4, P_{\max}=4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai trong ba số x, y, z bằng 0 và số còn lại bằng 1. Vậy $a+b+c=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Gọi S là tập hợp các cặp số thực $(x;y)$ sao cho $x\in[-1;1]$ và

$$\ln(x-y)^x-2017x=\ln(x-y)^y-2017y+\mathrm{e}^{2018}.$$

Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\mathrm{e}^{2018}(y+1)-2018x^2$ với $(x;y)\in S$ đạt được tại $(x_0;y_0)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in(-1;0)$. **B.** $x_0=-1$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0\in[0;1)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>y$. Từ giả thiết ta có

$$(x-y)\left[\ln(x-y)-2017\right]=\mathrm{e}^{2018}.$$

Đặt $t=x-y>0$, xét hàm số $f(t)=t(\ln t-2017)-\mathrm{e}^{2018}$. Suy ra $f'(t)=\ln t-2016$. Ta có bảng biến thiên của $f(t)$

t	0		e^{2016}		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\mathrm{e}^{2018}$	$\searrow$	$f\left(\mathrm{e}^{2016}\right)<0$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=0$ có duy nhất một nghiệm mà $f\left(\mathrm{e}^{2018}\right)=0$ nên suy ra $x-y=\mathrm{e}^{2018}$ hay $y=x-\mathrm{e}^{2018}$. Khi đó

$$P=-2018x^2+\mathrm{e}^{2018}x-\mathrm{e}^{2018}\left(\mathrm{e}^{2018}-1\right).$$

Tam thức bậc hai P có hệ số $a<0$ và hoành độ đỉnh là $\dfrac{\mathrm{e}^{2018}}{4036}>1$ nên $\max\limits_{[-1;1]}P=P(1)$. Vậy $x_0=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2018)\right]$$

A. $S=\sqrt{2018}$. **B.** $S=\dfrac{1}{2018}$. **C.** $S=2018$. **D.** $S=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$.

Lời giải.

Xét hai số $a,b\in\mathbb{R}$ sao cho $a+b=1\Leftrightarrow a-1=-b$.

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)&=\frac{1}{2018^a+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}=\frac{1}{2018\cdot 2018^{a-1}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{1}{2018\cdot 2018^{-b}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2018}(\sqrt{2018}\cdot 2018^{-b}+1)}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}\\&=\frac{2018^b}{\sqrt{2018}(\sqrt{2018}+2018^b)}+\frac{1}{2018^b+\sqrt{2018}}=\frac{2018^b+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}(\sqrt{2018}+2018^b)}=\frac{1}{\sqrt{2018}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2018)\right]\\&=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(2018)+f(-2016)+f(2017)+\cdots+f(0)+f(1)\right]=\sqrt{2018}\cdot\frac{2018}{\sqrt{2018}}=2018.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác A đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi suất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác A đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa bác A và ngân hàng là bao nhiêu?

A. $x=14$. **B.** $x=15$. **C.** $x=13$. **D.** $x=12$.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép ta có $129.512.000=100.000.000\left(1+\dfrac{x}{1200}\right)^{24}$.

Suy ra $x=\left(\sqrt[24]{\dfrac{129.512.000}{100.000.000}}-1\right)\cdot 1200\simeq 13$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\log_3\left(-x^2+mx+2m+1\right)$ xác định với mọi $x\in(1;2)$.

A. $m\geq-\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\geq\dfrac{3}{4}$. **C.** $m>\dfrac{3}{4}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2+mx+2m+1>0, \forall x \in (1;2)$$
$$\Leftrightarrow \quad m > \frac{x^2-1}{x+2} = g(x), \forall x \in (1;2)$$

Xét $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2} = x-2+\dfrac{3}{x+2} \Rightarrow g'(x) = 1-\dfrac{3}{(x+2)^2} > 0,\ \forall x \in (1;2).$

Do $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \dfrac{3}{4}$. Vậy $m \geq \dfrac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho $0 < a \neq 1$. Xét x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$S = 3x^2\left(\log_a\left[\left(\sqrt[3]{-a}\right)^2 \cdot a^{\frac{-1}{3}}\right]\right)y^2 + \dfrac{\log 3}{6\log 2}\left(\log_{0,1} 10^{2,4}\right)\left(\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{1023} 1024\right)xy.$

A. $\min S = 0$. **B.** $\min S = -4$. **C.** $\min S = -3$. **D.** $\min S = 1$.

Lời giải.

Ta có $(x+y)^2 \geqslant 4xy \Rightarrow xy \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant xy \leqslant 1$.

Biến đổi biểu thức trở thành: $S = x^2y^2 - 4xy = t^2 - 4t$, với $t = xy$ và $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$S' = 2t-4$, $S' = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (loại)

$S(0) = 0, S(1) = -3$. Suy ra: $\min S = -3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x+2}$. Khi đó tổng $f(0) + f\left(\dfrac{1}{10}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{19}{10}\right)$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{59}{6}$. **B.** 10. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải.

Với $a+b=2$ ta có: $f(a)+f(b) = f(a)+f(2-a) = \dfrac{2^a}{2^a+2} + \dfrac{2^{2-a}}{2^{2-a}+2} = \dfrac{2^a}{2^a+2} + \dfrac{2}{2^a+2} = 1$.

Suy ra: $f(0)+f(1)+\left[f\left(\dfrac{1}{10}\right)+f\left(\dfrac{19}{10}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\dfrac{9}{10}\right)+f\left(\dfrac{11}{10}\right)\right] = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{2+2}+9\cdot 1 = \dfrac{59}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \leq 4y-1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{6(2x+y)}{x} + \ln\dfrac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$. Tính ab.

A. $ab = 45$. **B.** $ab = 81$. **C.** $ab = 115$. **D.** $ab = 108$.

Lời giải.

Từ $xy \leq 4y-1$ chia 2 vế cho y^2 ta được $\dfrac{x}{y} \leq \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{y^2} = 4 - \left(2-\dfrac{1}{y}\right)^2 \leq 4$.

Đặt $\dfrac{x}{y} = t$ thì $0 < t \leq 4$.

Khi đó $P = f(t) = 12 + \dfrac{6}{t} + \ln(t+2)$ có $f'(t) = \dfrac{-6}{t^2} + \dfrac{1}{t+2} = \dfrac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}$.

Ta có $t^2-6t-12 < 0 \Leftrightarrow t \in (3-\sqrt{21}; 3+\sqrt{21}) \supset (0;4]$. Suy ra $f'(t) < 0, \quad \forall t \in (0;4]$.

Vậy $\min\limits_{(0;4]} f(t) = f(4) = \dfrac{27}{2} + \ln 6$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{27}{2} + \ln 6$ khi $y = \dfrac{1}{2}, x = 2$.

Khi đó $a = \dfrac{27}{2}; b = 6 \Rightarrow ab = 81$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1)\cdot 2^{2xy-1}=(x^2+y)\cdot 2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A. $y_{\min}=3$. **B.** $y_{\min}=2$. **C.** $y_{\min}=1$. **D.** $y_{\min}=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $(xy-1)\,2^{2xy-1}=(x^2+y)\,2^{x^2+y}\Leftrightarrow (2xy-1-1)\,2^{2xy-1}=(x^2+y+1-1)\,2^{x^2+y+1}$. (1)

Xét hàm $f(t)=(t-1)\cdot 2^t$ với $t\geq 1$.

Khi đó $f'(t)=2^t+(t-1)\cdot 2^t\cdot \ln 2>0$ với $t\geq 1$.

Từ (1) $\Leftrightarrow 2xy-1=x^2+y+1\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2+2}{2x-1}$.

$y'=\dfrac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\,(\text{nhận})\\ x=-1\,(\text{loại})\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	-2	↘	‖	↘	2	↗	$+\infty$
		$-\infty$	‖	$+\infty$			

Vậy $y_{\min}=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_{2018}(mx-m+2)$ xác định trên $[1;+\infty)$.

A. $m<0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m\leq 0$. **D.** $m>0$.

Lời giải.

Ta có hàm số luôn xác định tại $x=1$.

Do đó ta chỉ cần tìm giá trị m để hàm số xác định trên $(1;+\infty)$.

Hàm số xác định trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow mx-m+2>0,\forall x>1\Leftrightarrow m>\dfrac{2}{1-x},\forall x>1$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2}{1-x}$, ta có $f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}>0,\forall x>1$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học Bách Khoa Hà Nội nhưng do không đủ tiền nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khóa học 4 năm, Hùng phải trả nợ (cả gốc lẫn lãi) bằng hình thức trả góp hàng tháng, mỗi tháng trả T đồng (T không đổi), và phải trả hết nợ trong 5 năm. Tìm T (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng từ khi bắt đầu trả nợ, ngân hàng tính lãi theo lãi suất mới là $0,25\%$/tháng.

A. 253.982. **B**. 232.289. **C**. 345.821. **D**. 567.900.

Lời giải.

Sau 1 năm học số tiền Hùng nợ là $3 + 3r = 3(1 + r)$.

Sau 2 năm học số tiền Hùng nợ là $3(1 + r)^2 + 3(1 + r)$.

Tương tự sau 4 năm học số tiền Hùng nợ là

$$3(1 + r)^4 + 3(1 + r)^3 + 3(1 + r)^2 + 3(1 + r) = 12.927.407,43 = A$$

Số tiền nợ A này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Sau 1 tháng số tiền còn nợ là $A + Ar - T = A(1 + r) - T$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ là $A(1 + r) - T + (A(1 + r) - T)\, r - T = A(1 + r)^2 - T(1 + r) - T$.

Tương tự, sau 60 tháng số tiền còn nợ là $A(1 + r)^{60} - T(1 + r)^{59} - T(1 + r)^{58} - \cdots - T(1 + r) - T$.

Bạn Hùng trả hết nợ khi $A(1 + r)^{60} - T(1 + r)^{59} - T(1 + r)^{58} - \cdots - T(1 + r) - T = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad A(1 + r)^{60} - T\left[(1 + r)^{59} - (1 + r)^{58} - \cdots - (1 + r) - 1\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A(1 + r)^{60} - T\frac{(1 + r)^{60} - 1}{1 + r - 1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad T = \frac{Ar(1 + r)^{60}}{(1 + r)^{60} - 1}
\end{aligned}$$

Suy ra $T = \dfrac{12.927.407,4 \cdot (1 + 0,0025)^{60} \cdot 0,0025}{(1 + 0,0025)^{60} - 1} \approx 232,289$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho $f(x) = \dfrac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính giá trị biểu thức $S = f\left(\dfrac{1}{2019}\right) + f\left(\dfrac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)$.

A. $S = 2018$. **B**. $S = \sqrt{2018}$. **C**. $S = 2019$. **D**. $S = 1009$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$, $f(1 - x) = \dfrac{2018^{1-x}}{2018^{1-x} + \sqrt{2018}} = \dfrac{2018}{2018 + 2018^x\sqrt{2018}} = \dfrac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2018} + 2018^x}$.

Suy ra $f(x) + f(1 - x) = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
2S = \quad & \left[f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right)\right] \\
& + \cdots + \left[f\left(\frac{2017}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{1}{2019}\right)\right] = 2018.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{2018}{2} = 1009$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

A. $P = 6$. **B.** $P = 2 + 3\sqrt{2}$. **C.** $P = 3 + 2\sqrt{2}$. **D.** $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Bất đề bài cho tương đương với

$$xy \geq x^2 + y \qquad (1).$$

Nếu $x \leq 1$, ta có $xy \leq y < y + x^2$ (vô lí). Do đó $x > 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow\ & y(x-1) \geq x^2 \\ \Leftrightarrow\ & y \geq \frac{x^2}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & x + y \geq x + \frac{x^2}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & x + y \geq 2x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$2(x-1) + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{2(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $P = x + y \geq 2\sqrt{2} + 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \dfrac{\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thoả mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

A. 1. **B.** $\log(2^{\mathrm{e}})$. **C.** $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\ln 10}{\mathrm{e}}}}$. **D.** $10^{\sqrt{\frac{\log \mathrm{e}}{2}}}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a x = \log(a^x) \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln a} = x\dfrac{\ln a}{\ln 10} \Leftrightarrow (\ln a)^2 = \dfrac{\ln 10 \ln x}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, khi đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$. Suy ra: $\max\limits_{x>0} f(x) = f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Dẫn tới: $(\ln a)^2 \leq \dfrac{\ln 10}{\mathrm{e}} \Rightarrow a \leq \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\ln 10}{\mathrm{e}}}}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \mathrm{e}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$, khi $x \in [0; \ln 4]$ ta có $t \in [1; 4]$ nên $u = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x \in [-4; 0]$. Do đó

$$\min_{u\in[-4;0]} |u+m| = \begin{bmatrix} 0 & \text{nếu} & m \in [0;4] \\ \min\{|m|; |m-4|\} & \text{nếu} & m \notin [0;4] \end{bmatrix}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} m \notin [0;4] \\ m = -6 \vee m - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = -6 \vee m = 10.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $5^x + 25^y + 125^z = 2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2}$.

A. $\dfrac{1}{6}\log_5 2016$. **B**. $\dfrac{1}{3}\log_5 2018$. **C**. $\dfrac{1}{2}\log_5 2017$. **D**. $\log_5 2016$.

Lời giải.

Đặt $a = 5^x, b = 25^y, c = 125^z \Rightarrow a, b, c \geq 1$ và $a + b + c = 2018$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} &(a-1)(b-1)(c-1) + (a-1)(b-1) + (b-1)(c-1) + (a-1)(c-1) \geq 0 \\ &\Rightarrow abc \geq a + b + c - 2 \\ &\Rightarrow abc \geq 2016. \end{aligned}$$

Suy ra $5^{x+2y+3z} \geq 2016 \Rightarrow x + 2y + 3z \geq \log_5 2016 \Rightarrow \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2} \geq \dfrac{1}{6}\log_5 2016$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \log_5 2016, y = z = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \dfrac{4(3b-1)}{9} + 8\log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1$.

A. $A = 6$. **B**. $3\sqrt[3]{2}$. **C**. 8. **D**. 7.

Lời giải.

Ta có: $(3b-2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{4(3b-1)}{9} \leq b^2$. Khi đó:

$$\begin{aligned} P &\geq \log_a b^2 + 8\log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1 \\ &= 2\log_a b + 8\log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1 \\ &= \log_a b + \log_a b + 8\log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1 \\ &= (\log_a b - 1) + (\log_a b - 1) + 8 \cdot \left(\frac{1}{\log_a b - 1}\right)^2 + 1 \\ &\geq 3\sqrt[3]{(\log_a b - 1) \cdot (\log_a b - 1) \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{\log_a b - 1}\right)^2} + 1 = 7. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}; b = \dfrac{2}{3}$ và $\min(P) = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho các số thực a, b, c không âm thoả mãn $2^a + 4^b + 8^c = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c$. Giá trị của biểu thức $4^M + \log_M m$ bằng

A. $\dfrac{2809}{500}$. **B.** $\dfrac{281}{50}$. **C.** $\dfrac{4096}{729}$. **D.** $\dfrac{14}{25}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$4 = 2^a + 4^b + 8^c \geq 3\sqrt[3]{2^a \cdot 4^a \cdot 8^c} = 3\sqrt[3]{2^{a+2b+3c}} \Rightarrow a + 2b + 3c \leq \log_2 \frac{64}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $2^a = 4^b = 8^c = \dfrac{4}{3}$.
Lại có $a, b, c \geq 0$ nên $2^a \geq 1; 4^b \geq 1; 8^c \geq 1$, dẫn tới

$$(2^a - 1)\left(4^b - 1\right)(8^c - 1) + (2^a - 1)\left(4^b - 1\right) + \left(4^b - 1\right)(8^c - 1) + (2^a - 1)(8^c - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^a \cdot 4^b \cdot 8^c \geq 2^a + 4^b + 8^c - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{a+2b+3c} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad a + 2b + 3c \geq 1.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 1; b = c = 0$.
Vậy ta có $M = \log_2 \dfrac{64}{27}, m = 1$ nên $4^M + \log_M m = \dfrac{4096}{729}$.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

A. $\min P = -80$. **B.** $\min P = -91$. **C.** $\min P = -83$. **D.** $\min P = -63$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 0$.
Ta có

$$\begin{aligned} & x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} x + y \geq 4 \\ x + y \leq 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

☑ Xét trường hợp $x + y \leq 0$, từ điều kiện ta suy ra

$$x + y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} + \sqrt{y+3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Khi đó, $P = 4(3^2 + (-3)^2) + 15 \cdot 3 \cdot (-3) = -63$.

☑ Xét trường hợp $x+y \geq 4$, ta có

$$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right) \leq 2\sqrt{2\left(x+y\right)} \Leftrightarrow x+y \leq 8 \Rightarrow x+y \in [4;8].$$

Xét biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy$.
Đặt $t=x+y \in [4;8] \Rightarrow P=4t^2+7xy$.
Lại có

$$\begin{aligned} & (x+3)(y+3) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & xy \geq -3(x+y)-9 \\ \Rightarrow \quad & P \geq 4(x+y)^2-21(x+y)-63=4t^2-21t-63. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=4t^2-21t-63$ trên đoạn $[4;8]$ suy ra $P_{\min}=f(4)=-83$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x(x+1)}}$. Tính giá trị biểu thức $T=f(1)\cdot f(2)\cdots f(2017)\cdot \sqrt[2018]{\mathrm{e}}$.

A. $T=1$. **B.** $T=\mathrm{e}^{\frac{1}{2018}}$. **C.** $T=\mathrm{e}$. **D.** $T=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & T=\left(\prod_{x=1}^{2017} f(x)\right)\cdot \sqrt[2018]{\mathrm{e}}=\left(\prod_{x=1}^{2017} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x+1)}}\right)\cdot \sqrt[2018]{\mathrm{e}} \\ \Rightarrow \quad & \ln T=\sum_{x=1}^{2017}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2018}=\sum_{x=1}^{2017}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2018}=1. \\ \Rightarrow \quad & T=\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3\dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** $3+2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_3\frac{2x+y+1}{x+y}=x+2y \quad & \Leftrightarrow \quad \log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=x+2y. \\ & \Leftrightarrow \quad \log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=3(x+y)-(2x+y+1)-1 \\ & \Leftrightarrow \quad \log_3(2x+y+1)+(2x+y+1)=\log_3 3(x+y)+3(x+y) \quad (*). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$, ta có
$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0, \forall t>0$.
$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Phương trình $(*) \Leftrightarrow f(2x+y+1)=f(3(x+y))$
$\Leftrightarrow 2x+y+1=3(x+y)$

$\Leftrightarrow x = 1 - 2y$.

Mà $x > 0 \Rightarrow 0 < y < \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P = \dfrac{1}{1-2y} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

Đặt $t = \sqrt{y} > 0$ thì $P = g(t) = \dfrac{1}{1-2t^2} + \dfrac{2}{t}$ với $t > 0$.

$$g'(t) = \frac{4t}{(1-2t^2)^2} - \frac{2}{t^2} = \frac{4t^3 - 2(1-4t^2+4t^4)}{t^2(1-2t^2)^2} = \frac{2(-4t^4+2t^3+4t^2-1)}{t^2(1-2t^2)^2}.$$

Ta có $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{9+\sqrt{33}}{36}} + \sqrt[3]{\dfrac{9-\sqrt{33}}{36}}. \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu ta có $P_{\min} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} = 3(y - \sqrt{1+x}) - y^2 + x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = x - y$.

A. $\min K = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $\min K = -\dfrac{5}{4}$. **C.** $\min K = -2$. **D.** $\min K = -1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > -1, y > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = 3(y - \sqrt{1+x}) - y^2 + x \\ \Leftrightarrow &\log_2 y - 1 - \log_2 \sqrt{1+x} = 3y - 3\sqrt{1-x} - y^2 + x \\ \Leftrightarrow &y^2 - 3y + \log_2 y = 1 + x - 3\sqrt{1+x} + \log_2 \sqrt{1+x} \\ \Leftrightarrow &f(y) = f(\sqrt{1+x}) \end{aligned}$$

trong đó $f(x) = x^2 - 3x + \log_2 x$ xác định trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{x \ln 2} = \dfrac{(2\ln 2)x^2 - (3\ln 2)x + 1}{x \ln 2} > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Do đó f là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ mà $f(y) = f(\sqrt{1+x})$ nên suy ra $y = \sqrt{1+x}$.

Do đó K trở thành $K = x - \sqrt{1+x} = \left(\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} \geq -\dfrac{5}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{3}{4}$ và $y = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng Vietcombank. Lãi suất hàng năm không thay đổi là $7,5\%$/năm. Nếu anh Nam hàng năm không rút lãi thì sau 5 năm số tiền anh Nam nhận được cả vốn lẫn lãi (kết quả làm tròn đến hàng ngàn) là

A. 143.563.000 đồng. **B.** 2.373.047.000 đồng. **C.** 137.500.000 đồng. **D.** 133.547.000 đồng.

Lời giải.

Gọi t là số tiền vốn gửi tiết kiệm, p là lãi suất hàng năm, n là số năm gửi tiết kiệm.

Sau một năm số tiền nhận được là $T(1) = t + t \cdot p = t(1+p)$.

Sau hai năm số tiền nhận được là $T(2) = T(1) + T(1) \cdot p = T(1)(1+p) = t(1+p)^2$.

Vậy sau n năm số tiền nhận được là $T(n) = t(1+p)^n$.
Suy ra sau 5 năm số tiền nhận được là $T(5) = 100.000.000(1+0,075)^5 \approx 143.563.000$.
Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \dfrac{1}{2}[1+\log_2(1-xy)]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 2(x^3+y^3) - 3xy$.

A. 7. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiên $\begin{cases} x-y>0 \\ 1-xy>0. \end{cases}$
Ta có nhận xét

$$(x-y)^2 - 2(1-xy) = x^2+y^2-2.$$

Nên đặt $a = x-y > 0$ và $b = 1-xy > 0$. Khi đó điều kiện được viết lại

$$3^{a^2-2b}\log_2 a = \frac{1}{2}[1+\log_2 b].$$

Hay

$$3^{a^2}\log_2 a^2 = 3^{2b}\log_2(2b).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t \log_2 t$ trên miền $(0;+\infty)$.
Có $f'(t) = 3^t(\log_2 t)\ln 3 + \dfrac{3^t}{t\ln 2} = \dfrac{3^t}{t\ln 2}(t\log_2 t \ln 3 \ln 2 + 1)$.
Xét thêm hàm số $g(t) = t\log_2 t \ln 3 \ln 2 + 1$ trên miền $(0;+\infty)$.
Ta có $g'(t) = (\log_2 t + \dfrac{1}{\ln 2})\ln 3 \ln 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 t + \log_2 \mathrm{e} = 0 \Leftrightarrow \log_2(t\mathrm{e}) = 0 \Leftrightarrow t\mathrm{e} = 1 \Leftrightarrow t = \mathrm{e}^{-1}.$$

Bảng biến thiên của $g(t)$.

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	↘	$-\mathrm{e}^{-1}\ln 3 + 1$	↗	$+\infty$

Do $-\mathrm{e}^{-1}\ln 3 + 1 > 0$ nên kết luận được $g(t) > 0$ với mọi $t \in (0;+\infty)$. Từ đó suy ra $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (0;+\infty)$. Nhận được $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Điều kiện đã cho tương đương với $a^2 = 2b$, hay $(x-y)^2 = 2(1-xy)$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 2. \quad (1)$$

Nhận thấy điều kiện sau khi rút gọn (1) và biểu thức M đều là các biểu thức đối xứng với x, y. Nên đặt $S = x+y$ và $P = xy$.
Viết lại M như sau

$$M = 2[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] - 3xy = 2(S^3 - 3PS) - 2P = 2S^3 - 6PS - 3P.$$

Điều kiện (1) suy ra $S^2-2P=2\Rightarrow 2P=S^2-2$. Thay vào M ta được

$$M=2S^3-3(S^2-2)S-\frac{3}{2}(S^2-2)=-S^3-\frac{3}{2}S^2+6S+3.$$

Coi M là một hàm đối với S, ta tìm miền giá trị của S như sau

$$(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=4\Rightarrow -2\le S\le 2.$$

Xét hàm số $M(S)$ trên $[-2;2]$. Ta có $M'=-3S^2-3S+6=0\Leftrightarrow \hoac{S=1\\S=-2}$.

Tính $M(-2)=-7, M(1)=\dfrac{13}{2}, M(2)=1$.

Suy ra $M\le\dfrac{13}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $S=1$ hay

$$\heva{x+y=1\\x^2+y^2=2\\x>y\\1-xy>0}\Leftrightarrow\heva{x+y=1\\xy=-\dfrac{1}{2}\\x>y}\Leftrightarrow\heva{x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}.}$$

Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $\dfrac{13}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho các số $a,b>1$ thỏa mãn $\log_2 a+\log_3 b=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}$.

A. $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$. **B.** $\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{\log_2 3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}(\log_2 3+\log_3 2)$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}}$.

Lời giải.

Ta có $P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}=\sqrt{\log_3 2}\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 3}\sqrt{\log_3 b}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có $P^2\le(\log_3 2+\log_2 3)(\log_2 a+\log_3 b)=\log_3 2+\log_2 3$. Suy ra $P\le\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho hai hàm số

$$f(x)=\ln\left(x-1009+\sqrt{(x-1009)^2+2018\mathrm{e}}\right);h(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}+\mathrm{e}}\right).$$

Giả sử $S=f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)$ và $T=h\left(\dfrac{1}{2018}\right)+h\left(\dfrac{2}{2018}\right)+h\left(\dfrac{3}{2018}\right)+\cdots+h\left(\dfrac{2017}{2018}\right)$.

Khi đó $\dfrac{S}{T}$ bằng

A. $\ln 2018$. **B.** $1+\ln 2018$. **C.** $1+\ln 2017$. **D.** 2018.

Lời giải.

Ta có nhận xét $f(x)+f(2018-x)=1+\ln 2018$, suy ra

$$S=1008(1+\ln 2018)+f(1009)=\frac{2017}{2}(1+\ln 2018).$$

Mặt khác $h(x)+h(1-x)=1$, suy ra $T=1008+h\left(\dfrac{1009}{2018}\right)=\dfrac{2017}{2}$. Do đó $\dfrac{S}{T}=1+\ln 2018$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2018)$ để phương trình $m+10x = m\mathrm{e}^x$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 9. **B**. 2017. **C**. 2016. **D**. 2007.

Lời giải.

Với $x=0$, phương trình trở thành $m=m$ (luôn đúng), suy ra với mọi $m \in (0;2018)$ phương trình luôn có 1 nghiệm $x=0$.

Với $x \neq 0$, ta có $m+10x = m\mathrm{e}^x \Leftrightarrow m = \dfrac{10x}{\mathrm{e}^x-1}$.

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{10x}{\mathrm{e}^x-1}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta có $f'(x)=\dfrac{10(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Thật vậy, xét hàm số $g(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1$. Ta có $g'(x)=\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)=-xe^x$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	10 ‖ 10	$\searrow$	0

Suy ra yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} 0<m<2018 \\ m \neq 10. \end{cases}$

Do đó, có 2016 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hai số thực $a, b > 1$ sao cho tồn tại số thực $0 < x \neq 1$ thỏa mãn $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B**. $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$. **C**. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **D**. $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)} \\ \Rightarrow\ & x^{\log_b a} = (x^2)^{\log_a b} \\ \Rightarrow\ & \log_b a = 2\cdot\log_a b \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln a}{\ln b} = 2\cdot\frac{\ln b}{\ln a} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ln^2 a = 2 \cdot \ln^2 b$$
$$\Rightarrow \ln a = \sqrt{2} \ln b, \ (\text{vì } a, b > 1).$$

Ta được

$$\begin{aligned} P &= \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) \\ &= 3\ln^2 b - \left(1+\sqrt{2}\right)\ln b \\ &= \left(\sqrt{2}\ln b - \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{12} \\ &\geq -\frac{3+2\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Biết rằng trong tất cả các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2+y^2+2) \leq 2+\log_2(x+y-1)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+4y-m=0$. Khi đó, hãy tính tổng các giá trị m tìm được.

A. 20. **B.** 46. **C.** 28. **D.** 14.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2+y^2+2) \leq 2+\log_2(x+y-1) \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 2$.

Do chỉ có một cặp $(x;y)$ duy nhất thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x+4y-m=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 2 \end{cases}$ nên đường thẳng $3x+4y-m=0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

Do đó, $\dfrac{|3.2+4.2-m|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-36 \\ m=64. \end{array}\right.$

Từ đó chọn được đáp án.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy \\ \Leftrightarrow\ &3(x+y)+\log_{\sqrt{3}}(3(x+y)) = \left(x^2+y^2+xy+2\right)+\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right). \end{aligned}$$

Hay $f(3(x+y)) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right)$ với $f(t) = t+\log_{\sqrt{3}} t$ có $f'(t) = 1+\dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} > 0, \forall t > 0$.

Do vậy

$$\begin{aligned} &3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \\ \Leftrightarrow\ &\left(4x^2+4xy+y^2\right)+3(y^2-2y+1)-6(2x+y)+5=0 \\ \Rightarrow\ &(2x+y)^2-6(2x+y)+5 = -3(y-1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Suy ra $1 \le 2x+y \le 5$. Do đó $P = 1 + \dfrac{2x+y-5}{x+y+6} \le 1$.

Vậy $P_{\max} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Số giá trị nguyên của $m \in (-200; 2000)$ để $3 \cdot a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 2$ với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ là

A. 199. **B**. 2199. **C**. 200. **D**. 2002.

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt{\log_a b}$, điều kiện $x > 0$. Ta có $\begin{cases} \sqrt{\log_b a} = \dfrac{1}{x} \\ x^2 = \log_a b \Rightarrow b = a^{x^2} \end{cases}$, thu được

$3a^x - (a^{x^2})^{\frac{1}{x}} > mx + 2 \Leftrightarrow 3a^x - a^x > mx + 2 \Leftrightarrow 2a^x > mx + 2 \Leftrightarrow m < \dfrac{2(a^x - 1)}{x}$. $(*)$

Vì $a > 1$, $x > 0$ nên $\dfrac{a^x - 1}{x} > 0$ và $\lim\limits_{x \to (0)^+} \dfrac{a^x - 1}{x} = 0$.

Từ đó suy ra $(*)$ đúng khi và chỉ khi $m \le 0$.

Kết hợp điều kiện của m, ta được $m \in (-200; 0]$. Tập này có 200 số nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \dfrac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ là

A. $4\log_2 6$. **B**. $\dfrac{4}{\ln 2} - 4\log_2\left(\dfrac{4}{\ln 2}\right)$.

C. $4(1 - \log_2 3)$. **D**. -4.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \dfrac{2}{b} \Leftrightarrow ab^2 = 4$. Đặt $t = 4a^3 + b^3$, áp dụng BĐT Côsi ta có

$$t = 4a^3 + b^3 = 4a^3 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}b^3 \ge 3\sqrt[3]{4a^3 \cdot \frac{1}{2}b^3 \cdot \frac{1}{2}b^3} = 12.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a, b > 0 \\ ab^2 = 4 \\ 4a^3 = \dfrac{1}{2}b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

Xét $g(t) = t - 4\log_2 t$, $t \ge 12$. Khi đó $\min P = \min\limits_{t \ge 12} g(t)$. Ta có $g'(t) = 1 - 4\dfrac{1}{t \ln 2}$, $g'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \dfrac{4}{\ln 2} \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \ge 12$. Khi đó $\min\limits_{t \ge 12} g(t) = g(12) = 12 - 4\log_2 12 = 4(1 - \log_2 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhưng vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3% /năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất $0,25\%$ /tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là bao nhiêu?

A. 232.289 đồng. **B**. 309.604 đồng. **C**. 215.456 đồng. **D**. 232.518 đồng.

Lời giải.

+Tính tổng số tiền mà Hùng nợ sau 4 năm học:
Sau 1 năm số tiền Hùng nợ là: $3+3r=3(1+r)$.
Sau 2 năm số tiền Hùng nợ là: $3(1+r)^2+3(1+r)$.
Tương tự: Sau 4 năm số tiền Hùng nợ là:
$3(1+r)^4+3(1+r)^3+3(1+r)^2+3(1+r)=12.927.407,43=A$
+Tính số tiền T mà Hùng phải trả trong 1 tháng:
Sau 1 tháng số tiền còn nợ là: $A+A\cdot r-T=A(1+r)-T$.
Sau 2 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)-T+(A(A(1+r)-T))\cdot r-T=A(1+r)^2-T(1+r)-T$.
Tương tự sau 60 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)^{60}-T(1+r)^{59}-T(1+r)^{58}-\cdots-T(1+r)-T$.
Hùng trả hết nợ khi và chỉ khi $A(1+r)^{60}-T(1+r)^{59}-T(1+r)^{58}-\cdots-T(1+r)-T=0$
$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\left[(1+r)^{59}+(1+r)^{58}+\cdots+(1+r)+1\right]=0$
$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\dfrac{(1+r)^{60}-1}{1+r-1}=0\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\dfrac{(1+r)^{60}-1}{r}=0$
$\Leftrightarrow T=\dfrac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60}-1}\Leftrightarrow T\approx 232.289$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho hàm số $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_2) đối xứng với (C_1) qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B**. $(-1;0)$. **C**. $(0;1)$. **D**. $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm $g(x)=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có điều kiện xác định: $x>0$.
Vì (C_2) đối xứng với (C_1) qua gốc tọa độ nên $\forall x_0>0$ ta có:

$$(x_0;g(x_0))\in(C_1)\Leftrightarrow(-x_0;-g(x_0))\in(C_2)\Leftrightarrow f(-x_0)=-g(x_0).$$

Vậy $\forall x<0$, ta có $f(x)=-g(-x)=-\log_{2018}\left(\dfrac{1}{-x}\right)=\log_{2018}(-x)$. Ta có

$$y=|f(x)|=|\log_{2018}(-x)|=\begin{cases}\log_{2018}(-x), & x\le -1\\ -\log_{2018}(-x), & -1<x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 2018}, & x<-1\\ -\dfrac{1}{x\ln 2018}, & -1<x<0.\end{cases}$$

$\Rightarrow y'<0$ khi $x<-1$ và $y'>0$ khi $-1<x<0$.
$\Rightarrow y=|f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên $(-1;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ và có bảng biến thiên như như sau

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	↘	-1

Phương trình $f(2^{\sin x})=3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$?

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$ ta xét phương trình $\sin x=m$ (1).

- ☑ Phương trình (1) có nghiệm khi $0\le m\le 1$.
- ☑ $0\le m<\dfrac{1}{2}$ hoặc $m=1$: phương trình (1) có 1 nghiệm.
- ☑ $\dfrac{1}{2}\le m<1$: phương trình (1) có 2 nghiệm.

Với mọi $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]\Rightarrow 0\le\sin x\le 1\Rightarrow 1\le 2^{\sin x}\le 2$.

Đặt $t=2^{\sin x}$, $t\in[1;2]$. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=3$ có hai nghiệm thỏa:

- ☑ $1<t<\sqrt{2}\Leftrightarrow 1<2^{\sin x}<\sqrt{2}\Leftrightarrow 0<\sin x<\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(2^{\sin x})=3$ có 1 nghiệm.
- ☑ $\sqrt{2}<t<2\Leftrightarrow\sqrt{2}<2^{\sin x}<2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\sin x<1\Rightarrow f(2^{\sin x})=3$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình $f(2^{\sin x})=3$ có 3 nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{3}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(\dfrac{3b-1}{4}\right)+12\log^2_{\frac{b}{a}}a-3$.

A. $\min P=13$. **B**. $\min P=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C**. $\min P=9$. **D**. $\min P=\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Ta có $(2b-1)^2(b+1)\ge 0\Rightarrow 3b-1\le 4b^3$ và điều kiện bài toán suy ra $\log_a b>0$.

Từ đó suy ra $P\ge 3\log_a b+\dfrac{12}{(\log_a b-1)^2}-3=\dfrac{3\log_a b\cdot(\log_a b-3)^2}{(\log_a b-1)^2}+9\ge 9$.

Khi $b=\dfrac{1}{2},a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ thì $P=9$. Vậy, $\min P=9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=e^{\frac{3x-\sqrt{mx^2+1}}{x-\sqrt{(2018-m)x^2+1}}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. 2019. **B**. 2017. **C**. 2016. **D**. 2018.

Lời giải.

- ☑ TH1: $m<0$ hoặc $m>2018$, không thỏa mãn vì TXĐ là miền không dần đến vô cực.
- ☑ TH2: Với $m\in[0;2018]$ thì

$$\lim_{x\to+\infty}y=e^{\frac{3-\sqrt{m}}{1-\sqrt{2018-m}}};\qquad \lim_{x\to-\infty}y=e^{\frac{3+\sqrt{m}}{1+\sqrt{2018-m}}};\qquad 1-\sqrt{2018-m}\ne 0\Rightarrow m\ne 2017.$$

Do đó $m \in \{0, \ldots, 2018\} \setminus \{2017\} \Rightarrow$ có 2018 giá trị của m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overrightarrow{AB}$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $y = 0$, các điểm A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x, y = 2\log_a x, y = 3\log_a x$. Tìm a.

A. $a = \sqrt[6]{3}$. **B.** $a = \sqrt{3}$. **C.** $a = \sqrt[3]{6}$. **D.** $a = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Giả sử $A\left(p; \log_a p\right), B\left(q; 2\log_a q\right)$ $(p > 0, q > 0)$. Khi đó

$$\begin{cases} 6 = AB = |p - q| \\ \log_a p = 2\log_a q = \log_a q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = |p - q| \\ p = q^2 \end{cases} \Rightarrow |q^2 - q| = 6$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} q^2 - q - 6 = 0 \\ q^2 - q + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = -2 \\ q = 3 \end{array}\right. \Rightarrow q = 3.$$

Vậy $C\left(3; 3\log_a 3\right)$. Do $BC = 6 = \log_a 3$ nên $a^6 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a + b + c$ là

A. 3. **B.** $3.2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \leq 1; 0 \leq x, y, z \leq 1$.

$\log_2 a^a = a\log_2 a = ax \Rightarrow P = a^3 + b^3 + c^3 - 3\left(ax + by + cz\right)$.

Xét hàm số $f(t) = t - \log_2 t, t \in [1; 2]$.

$f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t\ln 2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow f(t) \leq \max\left\{f(1), f(2), f\left(t_0\right)\right\} = 1$.

Suy ra $t - \log_2 t \leq 1, \forall t \in [1; 2] \Rightarrow a - x - 1 \leq 0$.

Ta có $a^3 - 3ax - x^3 - 1 = (a - x - 1)\left(a^2 + x^2 + 1 + a + ax - x\right) \leq 0$.

Suy ra $P \leq x^3 + y^3 + z^3 + 3 \leq 4. P_{\max} = 4$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \in \{0, 1\} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2020.

Lời giải.

Đặt $z = \log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$, ta có $f(z) = 6^z - 2 \cdot 4^z = m$. $f'(z) = 6^z \ln 6 - 2 \cdot 4^z \cdot \ln 4$, $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{\ln 16}{\ln 6}\right) = z_0$, $f(z_0) \approx -2,01$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(z)$

z	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$	0	$\searrow$	$f(z_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có nghiệm khi $m \geq f(z_0)$ suy ra $m \in \{-2; -1; 0; \cdots; 2017\}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{3m + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}} = 2^x$ có nghiệm thực?

A. Không tồn tại m. **B**. 6. **C**. Vô số. **D**. 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{3m + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}} = 2^x \\
\Leftrightarrow\ &3m + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = (2^x)^3 \\
\Leftrightarrow\ &3m + 27 \cdot 2^x + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = (2^x)^3 + 27 \cdot 2^x \\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}\right)^3 + 27\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = (2^x)^3 + 27 \cdot 2^x. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 27 \cdot t$, $(t \in \mathbb{R})$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 27 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x}\right) = f\left(2^x\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3m + 27 \cdot 2^x} = 2^x \Leftrightarrow 3m + 27 \cdot 2^x = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{3x} - 27 \cdot 2^x = 3m$.

Đặt $y = 2^x$ và xét hàm $g(y) = y^3 - 27y$ với $y > 0$.

Ta có $g'(y) = 3y^2 - 27$. Suy ra $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

Bảng biến thiên:

y	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'(y)$				$-$	0	$+$	
$g(y)$				$\searrow$	-54	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra để phương trình có nghiệm thực thì $3m \geq -54 \Leftrightarrow m \geq -18$.

Vậy có vô số giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm thực.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Cho hàm số $f(x)=(a^2+1)\ln^{2017}(x+\sqrt{1+x^2})+bx\sin^{2018}x+2$ với a,b là các số thực và $f(7^{\log 5})=6$. Tính $f(-5^{\log 7})$.

A. $f(-5^{\log 7})=4$. **B.** $f(-5^{\log 7})=-2$. **C.** $f(-5^{\log 7})=2$. **D.** $f(-5^{\log 7})=6$.

Lời giải.

Nhận xét: $7^{\log 5}=5^{\log 7}=-(-5^{\log 7})$.

Xét hàm số $f(-x)=(a^2+1)\ln^{2017}(-x+\sqrt{1+x^2})-bx\sin^{2018}x+2$.

Ở biểu thức chứa logarit tự nhiên, ta nhân với lượng liên hợp của $-x+\sqrt{1+x^2}$ và biến đổi, được kết quả là

$$f(-x)=-(a^2+1)\ln^{2017}(x+\sqrt{1+x^2})-bx\sin^{2018}x+2.$$

Suy ra $f(-5^{\log 7})=-\big(f(7^{\log 5})-2\big)+2=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$.

A. $m\le -2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$ hoặc $m=1$.

C. $m<-2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$ nên

$$\begin{cases} y'=\dfrac{-m^2-m+2}{(\ln x-m-1)^2}\cdot\dfrac{1}{x}<0 \\ m+1\ne\ln x,\ \forall x\in(e^2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2-m+2<0\\ m+1\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-2\end{array}\right.\\ m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow m<-2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho hai số thực a,b thỏa mãn các điều kiện $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Do $a^2+b^2>1$ nên

$$\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1\Leftrightarrow a+b\ge a^2+b^2\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}.$$

Gọi

$$(C)\colon\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Ta có

$$P=2a+4b-3\Leftrightarrow 2a+4b-3-P=0.$$

Đặt $\Delta_P\colon 2x+4y-3-P=0$. Để P đạt giá trị lớn nhất thì Δ_P tiếp xúc với (C).

Ta có

$$d(I,\Delta_P)=\frac{|2x_0+4y_0-3-P|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|-P|=\sqrt{10}.$$

Vậy P lớn nhất bằng $\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hái số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+2y$ là

A. $P_{\min} = \dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min} = -5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min} = -3+6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9-(x-1)(y+1) = 9+2(y+1)-(x+1)(y+1)\\ \Rightarrow\ &[(x+1)(y+1)]^{y+1} = \frac{3^{9+2(y+1)}}{3^{(x+1)(y+1)}}\\ \Rightarrow\ &3^{(x+1)(y+1)}[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 3^9\cdot 9^{(y+1)}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Với mỗi $y>0$, đặt $f(t) = 3^t t^{y+1}$, $t>0$. Dễ thấy $f'(t) = 3^t t^{y+1}\ln 3 + (y+1)3^t t^y > 0$, với mọi $t>0$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, kết hợp (1), ta được

$$(x+1)(y+1) = 9.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}P = x+2y &= (x+1)+2(y+1)-3\\ &\geq 2\sqrt{2(x+1)(y+1)}-3 = -3+6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 3\sqrt{2}-1$, $y = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. Vậy $P_{\min} = -3+6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+3} - x\ln x$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$. Khi đó tích Mm bằng

A. $2\sqrt{7}+4\ln 2$. **B.** $2\sqrt{7}+4\ln 5$. **C.** $2\sqrt{7}-4\ln 5$. **D.** $2\sqrt{7}-4\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} - (\ln x+1) < \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} - (\ln x+1) < -\ln x < 0$, $\forall x\in[1;2]$.

Do đó, hàm số $y = \sqrt{x^2+3} - x\ln x$ nghịch biến trên $[1;2]$.

Vậy $Mm = y(1)\cdot y(2) = 2\left(\sqrt{7}-2\ln 2\right) = 2\sqrt{7}-4\ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Biết rằng a là số thực dương sao cho bất đẳng thức $3^x + a^x \geqslant 6^x + 9^x$ đúng với mọi số thực x. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in(10;12]$. **B.** $a\in(16;18]$. **C.** $a\in(14;16]$. **D.** $a\in(12;14]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}3^x + a^x \geqslant 6^x + 9^x &\Leftrightarrow a^x - 18^x \geqslant 6^x + 9^x - 3^x - 18^x\\ &\Leftrightarrow a^x - 18^x \geqslant 3^x(2^x-1) - 9^x(2^x-1)\\ &\Leftrightarrow a^x - 18^x \geqslant -3^x(2^x-1)(3^x-1) \quad (*)\end{aligned}$$

Ta thấy

☑ Nếu $x \geqslant 0$ thì $\begin{cases} 2^x \geqslant 1 \\ 3^x \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow (2^x-1)(3^x-1) \geqslant 0 \Rightarrow -3^x(2^x-1)(3^x-1) \leq 0.$

☑ Nếu $x < 0$ thì $\begin{cases} 2^x < 1 \\ 3^x < 1 \end{cases} \Rightarrow (2^x-1)(3^x-1) > 0 \Rightarrow -3^x(2^x-1)(3^x-1) < 0.$

Suy ra $-3^x(2^x-1)(3^x-1) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $(*)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$a^x - 18^x \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{18}\right)^x \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 18.$$

Vậy $a = 18 \in (16; 18]$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hai số thực dương thay đổi a, b và thỏa mãn điều kiện $\ln a \cdot (1 - \ln b) = \ln b \cdot \sqrt{4 - \ln^2 a}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\log_b a$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. $2(\sqrt{2}-1)$. **B.** $2(\sqrt{2}+1)$. **C.** $2(1-\sqrt{2})$. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Đặt $x = \ln a, y = \ln b$, ta có $\log_b a = \dfrac{x}{y}$ và

$$\ln a \cdot (1 - \ln b) = \ln b \cdot \sqrt{4 - \ln^2 a} \Leftrightarrow x(1-y) = y\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = x + \sqrt{4-x^2}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Ta có $f(2) = 2$, $f(-2) = -2$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, suy ra $M = 2\sqrt{2}$, $m = -2$ và $M + m = 2(\sqrt{2}-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. 130650280 (đồng). **B.** 130650000 (đồng). **C.** 139795799 (đồng). **D.** 139795800 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n, với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có: $T_1 = T_0 + rT_0 = T_0(1+r)$.

Đầu năm thứ 2, người đó có tổng số tiền là:

$$T_0(1+r) + T_0 = T_0[(1+r)+1] = \frac{T_0}{[(1+r)-1]}\left[(1+r)^2 - 1\right] = \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right].$$

Do đó: $T_2 = \dfrac{T_0}{r} \cdot \left[(1+r)^2 - 1\right] + \dfrac{T_0}{r} \cdot \left[(1+r)^2 - 1\right] \cdot r = \dfrac{T_0}{r} \cdot [(1+r^2) - 1](1+r)$.

...

Ta có: $T_n = \dfrac{T_0}{r} \cdot [(1+r)^n - 1](1+r)$.

Áp dụng vào bài toán, ta có $10^9 = \dfrac{T_0}{0,07} \cdot \left[(1+0,07)^6 - 1\right](1+0,07) \Rightarrow T_0 \approx 130650280$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}$ với $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Có bao nhiêu số n để $f(n)=a$?

A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&f(n)\leq f(n+1)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}\leq\frac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)\,(\log_3(n+1))}{9^{n+1}}\\ \Leftrightarrow\ &9\leq\log_3(n+1)\Leftrightarrow 3^9-1\leq n.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=3^9-1$. Từ đó suy ra $f\left(3^9-1\right)=f\left(3^9\right)<f\left(3^9+1\right)<\cdots$

Tương tự ta có $f(2)>f(3)>\cdots>f\left(3^9-1\right)=f\left(3^9\right)$

Từ đó suy ra có hai giá trị của n để $f(n)=a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\leq b<a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}} a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. 6. **B**. 7. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{a}{b}} a=\dfrac{1}{\log_a\dfrac{a}{b}}=\dfrac{1}{\log_a a-\log_a b}=\dfrac{1}{1-\log_a b}$.

Ngoài ra, $\log_{\sqrt{b}}\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_a\dfrac{a}{b}}{\log_a\sqrt{b}}=\dfrac{\log_a a-\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a b}=\dfrac{2\,(1-\log_a b)}{\log_a b}$.

Suy ra $P=\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{4(1-t)}{t}$, trong đó $t=\log_a b\in\left[\dfrac{1}{2};1\right)$ với mọi $b>1$ và $\sqrt{a}\leq b<a$.

Ta có $P'(t)=\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{4}{t^2}$; $P'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	6	↘	5	↗	$+\infty$

Suy ra $P_{\min}=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $1<x<\sqrt{y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(\log_x y-1)^2+8\left(\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}}\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

A. 18. **B**. 9. **C**. 27. **D**. 30.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
P &= (\log_x y - 1)^2 + 8\left(\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= (\log_x y - 2 + 1)^2 + 8\left(\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \frac{\sqrt{y}}{x} \cdot \sqrt{x}\right)^2 \\
&= \left(\log_x \frac{y}{x^2} + 1\right)^2 + 8\left(1 + \frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} x\right)^2 \\
&= \left(2\log_x \frac{\sqrt{y}}{x} + 1\right)^2 + 8\left(1 + \frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} x\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} x} + 1\right)^2 + 8\left(1 + \frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} x\right)^2.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} x$ với $t > 0$.
Suy ra

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{2}{t} + 1\right)^2 + 8\left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 \\
&= \frac{4}{t^2} + \frac{4}{t} + 1 + 8 + 8t + 2t^2 \\
&= \left(\frac{4}{t^2} + 4t + 4t\right) + \left(2t^2 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t}\right) + 9 \\
&\geqslant 12 + 6 + 9 = 27.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 76. Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/ tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức thanh toán trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh An trả hết nợ ngân hàng? (Tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

A. 68. **B**. 65. **C**. 66. **D**. 67.

Lời giải.

Gọi A là số tiền vay, r là lãi suất, a là số tiền trả hàng tháng. Khi đó:
Tháng thứ 1:
Nợ gốc A.
Lãi phát sinh $A \cdot r$.
Nợ sau thanh toán: $A \cdot (1 + r) - a$.
Tháng thứ 2:
Nợ gốc $A \cdot (1 + r) - a$.
Lãi phát sinh $[A(1 + r) - a] \cdot r$.
Nợ sau thanh toán: $[A \cdot (1 + r) - a] \cdot (1 + r) - a = A \cdot (1 + r)^2 - a \cdot (1 + r) - a$.
Tháng thứ 3:
Nợ gốc $A \cdot (1 + r)^2 - a \cdot (1 + r) - a$.
Lãi phát sinh $[A \cdot (1 + r)^2 - a \cdot (1 + r) - a] \cdot r$.

Nợ sau thanh toán:

$$\left[A\cdot(1+r)^2-a\cdot(1+r)-a\right]\cdot(1+r)-a=A\cdot(1+r)^3-a\cdot(1+r)^2-a\cdot(1+r)-a.$$

Tháng thứ N: Ông An có nợ sau khi thanh toán là
$A\cdot(1+r)^N-a\cdot(1+r)^{N-1}-\cdots-a\cdot(1+r)^2-a\cdot(1+r)^1-a=$
$A\cdot(1+r)^N-a\cdot\dfrac{\left[(1+r)^N-1\right]}{r}$
Do vậy, để trả hết nợ vào tháng thứ N thì

$$A\cdot(1+r)^N-a\cdot\frac{\left[(1+r)^N-1\right]}{r}=0\Leftrightarrow a=\frac{A\cdot r\cdot(1+r)^N}{(1+r)^N-1}.$$

Áp dụng với $\begin{cases}A=500\\ r=0{,}0085\\ a=10\end{cases}$ ta được $N\approx 65{,}38$.
Vậy tổng thời gian trả hết nợ là 66 tháng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Cho các số thực a, b thay đổi, thoả mãn $a>\dfrac{1}{3}$, $b>1$. Khi biểu thức $P=\log_{3a}b+\log_b(a^4-9a^2+81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b$ bằng

A. $3+9^{\sqrt{2}}$. **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$. **C.** $2+9\sqrt{2}$. **D.** $3+3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Với điều kiện của bài toán, ta có

$$\begin{aligned}P=\log_{3a}b+\log_b(a^4-9a^2+81) &\geq \sqrt{\log_{3a}b\cdot\log_b(a^4-9a^2+81)}\\ &= \sqrt{\log_{3a}(a^4-9a^2+81)}\\ &= \sqrt{\log_{3a}((a^2-9)^2+9a^2)}\\ &\geq \sqrt{\log_{3a}(9a^2)}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a^2-9=0\\ \log_{3a}b=\log_b(a^4-9a^2+81)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=9^{\sqrt{2}}.\end{cases}$
Vậy $a+b=3+9^{\sqrt{2}}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)=2019\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $A=f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(2018)$.

A. 2018. **B.** 1009. **C.** $\dfrac{2017}{2}$. **D.** $\dfrac{2019}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2019\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{e}\right)\right]'=2019\cdot\dfrac{1}{2019}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}}$.
Với số thực α cho trước, ta xét tổng $f'(\alpha)+f'(2019-\alpha)$. Ta có

$$f'(\alpha)+f'(2019-\alpha)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{2019-\alpha}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{2019-\alpha}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2019}}}{\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2019}}+\sqrt{\mathrm{e}}}+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2019}}}=1.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} f'(1)+f'(2018) &= 1.\\ f'(2)+f'(2017) &= 1.\\ &\dots\\ f'(1009)+f'(1010) &= 1. \end{aligned}$$

Từ kết quả trên $\Rightarrow A = 1009$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Ngày 01 tháng 6 năm 2018 ông An vay ngân hàng số tiền 1 tỷ đồng với lãi suất 0,9% một tháng. Ông và ngân hàng thỏa thuận hình thức hoàn nợ như sau: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là 20 triệu đồng. Hỏi theo cách hoàn nợ đó, đến ngày 01 tháng 6 năm 2019, trước khi ông An mang trả ngân hàng số tiền 20 triệu như những tháng trước thì số tiền còn lại mà ông An còn nợ ngân hàng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian ông An trả nợ (kết quả làm tròn đến triệu đồng).

A. 861 triệu đồng. **B**. 859 triệu đồng. **C**. 881 triệu đồng. **D**. 780 triệu đồng.

Lời giải.

Giả sử số tiền vay ban đầu là P, lãi suất vay là r.

Ta có

- ☑ Số tiền nợ sau 1 tháng vay (sau khi trả 20 triệu đồng) là $P_1 = P(1+r) - 20$.
- ☑ Số tiền nợ sau 2 tháng vay (sau khi trả 20 triệu đồng) là

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1(1+r) - 20\\ &= [P(1+r) - 20](1+r) - 20\\ &= P(1+r)^2 - 20[(1+r)+1]. \end{aligned}$$

- ☑ Số tiền nợ sau 3 tháng vay (sau khi trả 20 triệu đồng) là

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2(1+r) - 20\\ &= P(1+r)^2 - 20[(1+r)+1](1+r) - 20\\ &= P(1+r)^3 - 20[(1+r)^2 + (1+r) + 1]. \end{aligned}$$

- ☑ Số tiền nợ sau n tháng vay (sau khi trả 20 triệu đồng) là

$$\begin{aligned} P_n &= P(1+r)^n - 20[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]\\ &= P(1+r)^n + \frac{20}{r}[1 - (1+r)^n]. \end{aligned}$$

Vậy số tiền nợ sau 12 tháng vay (sau khi trả 20 triệu đồng) là

$$P_{12} = 1000(1+0{,}9\%)^{12} + \frac{20}{0{,}9\%}[1 - (1+0{,}9\%)^{12}] \approx 861 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy trước khi ông An mang trả ngân hàng số tiền 20 triệu thì số tiền còn nợ của ông An là

$$861 + 20 = 881 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\dfrac{(\log_3 2)\,(\log_3 3)\,(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}$, với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 2$. Có bao nhiêu giá trị của n để $f(n)=a$?

A. 2. **B**. Vô số. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

- Ta có $f(n+1)=f(n)\cdot\dfrac{\log_3(n+1)}{9}$ và $f(n)=f(n-1)\dfrac{\log_3 n}{9}$.
- $f(n)=a$ là giá trị nhỏ nhất nên

$$\begin{cases} f(n)\leq f(n+1)\\ f(n)\leq f(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq\dfrac{\log_3(n+1)}{9}\\ \dfrac{\log_3 n}{9}\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(n+1)\geq 9\\ \log_3 n\leq 9\end{cases}\Leftrightarrow 3^9-1\leq n\leq 3^9.$$

- Như vậy có 2 giá trị của n thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $xy\leq 4y-1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{6\,(2x+y)}{x}+\ln\dfrac{x+2y}{y}$ được biểu diễn dưới dạng $a+\ln b$ với $a\in\mathbb{Q}$, b nguyên dương. Tích ab bằng

A. 45. **B**. 81. **C**. 108. **D**. 115.

Lời giải.

Do $x>0$, $y>0$ nên $xy\leq 4y-1\Leftrightarrow xy+1\leq 4y\leq 4y^2+1\Leftrightarrow 0<\dfrac{x}{y}\leq 4$.

$$P=\frac{6\,(2x+y)}{x}+\ln\frac{x+2y}{y}=12+6\frac{y}{x}+\ln\left(\frac{x}{y}+2\right).$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, với $0<t\leq 4$ ta có $P=f(t)=12+\dfrac{6}{t}+\ln(t+2)$.

$f'(t)=-\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3-\sqrt{21}\notin(0;4]\\ t=3+\sqrt{21}\notin(0;4]\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	0		4
$f'(t)$	‖	$-$	
$f(t)$	‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{27}{2}+\ln 6$

Vậy $\min P=\min\limits_{(0;4]}f(t)=f(4)=\dfrac{27}{2}+\ln 6$. Suy ra $a=\dfrac{27}{2}$, $b=6$, $ab=81$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho $\log(x+2y)=\log x+\log y,(0<x,y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{1+2y}}\mathrm{e}^{\frac{y^2}{1+x}}}$.

A. $\min P=\mathrm{e}^{\frac{5}{8}}$. **B**. $\min P=\mathrm{e}$. **C**. $\min P=\mathrm{e}^{\frac{8}{5}}$. **D**. $\min P=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\log(x+2y)=\log x+\log y\Leftrightarrow x+2y=xy$. với $(0<x,y)$.

$x+2y=xy=\dfrac{1}{2}x\cdot 2y\leq\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2\Rightarrow x+2y\geq 8$.

$P = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}} = \mathrm{e}^{f(x,y)}$ với $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4+8y} + \dfrac{y^2}{1+x}$.

$f(x;y) = \dfrac{x^2}{8y+4} + \dfrac{(2y)^2}{4+4x} \geq \dfrac{(x+2y)^2}{8+4(x+2y)}$.

Đặt $t = x+2y$, $t \geq 8$ suy ra $f(x;y) \geq g(t)$, $g(t) = \dfrac{t^2}{4t+8}$.

Xét $g(t) = \dfrac{t^2}{4t+8} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{4t^2+16t}{4t+8} > 0, \forall t \geq 8 \Rightarrow g(t) \geq \dfrac{8}{5}$.

Từ đó suy ra $P \geq \mathrm{e}^{g(t)} \geq \mathrm{e}^{\frac{8}{5}}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 4; y = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\mathrm{e}^{\frac{8}{5}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. $P_{\max} = 0$. **B.** $P_{\max} = 2$. **C.** $P_{\max} = 1$. **D.** $P_{\max} = 3$.

Lời giải.

Giả thiết bài toán tương đương $f(3(x+y)) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right)$ với $f(t) = t + \log_{\sqrt{3}} t$.

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} > 0, \forall t > 0$.

Do vậy

$$\begin{aligned} & f(3(x+y)) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \\ \Leftrightarrow\ & 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \\ \Rightarrow\ & (2x+y)^2 - 6(2x+y) + 5 = -3(y-1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Khi đó $1 \leq 2x+y \leq 5$.

Do đó $P = 1 + \dfrac{2x+y-5}{x+y+6} \leq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2, y = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Ngày 20/5/2019, ngày con trai đầu lòng chào đời, chú Tuấn quyết định mở một tài khoản tiết kiệm ở ngân hàng cho con với lãi suất $0,5\%$/tháng. Kể từ đó, cứ vào ngày 21 hàng tháng, chú sẽ gửi vào tài khoản một triệu đồng. Sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 22/5/2036, số tiền trong khoản tiết kiệm đó là bao nhiêu? (làm tròn đến triệu đồng)

A. 388 triệu đồng. **B.** 387 triệu đồng. **C.** 390 triệu đồng. **D.** 391 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi T là số tiền gửi vào hàng tháng, T_n là số tiền sau tháng n kể từ ngày gửi lần đầu.

Sau 1 tháng, số tiền trong tài khoảng là $T_1 = T + T \cdot r = T(1+r)$.

Sau 2 tháng, số tiền trong tài khoảng là $T_2 = T\left[(1+r)^2 + (1+r)\right]$.

Sau 3 tháng, số tiền trong tài khoảng là $T_3 = T\left[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)\right]$.

...

Cứ như vậy, số tiền trong tài khoản sau n tháng là

$$T_n = T\left[(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + \cdots + (1+r)\right] = T(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Số tiền trong khoản tiết kiệm vào ngày 22/5/2036 (sau 216 tháng) là: $S = T_{216} + T = 390$ triệu đồng.
Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247. **B.** 248. **C.** 229. **D.** 290.

Lời giải.

Có $u_{n+1} = 2u_n = 2^n u_1$. Xét $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ $(*)$
Đặt $t = \log u_1 - 2\log u_{10}$, điều kiện $t \geq -2$.
Phương trình $(*)$ trở thành

$$\sqrt{2+t} = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1.$$

$t = -1 \Leftrightarrow \log u_1 - 2\log u_{10} = -1$ (Với $\log u_{10} = \log(2^9 u_1) = 9\log 2 + \log u_1$).
Suy ra $\log u_1 = 1 - 18\log 2 \Leftrightarrow u_1 = 10^{1-18\log 2}$.
Mặt khác

$$u_n = 2^{n-1}u_1 = 2^{n-1} \cdot 10^{1-18\log 2} = 2^n \cdot 5 \cdot 10^{-18\log 2} > 5^{100} \Rightarrow n > \log_2\left(5^{99} \cdot 10^{18\log 2}\right) \approx 247{,}87.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 248.
Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho biểu thức $P = \log_{a^3} \dfrac{a^2}{\sqrt{b}} - \log_b a^6$ (với a, b là các số thực dương lớn hơn 1). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P_{\min} = -\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\max} = -\dfrac{4}{3}$. **C.** $P_{\min} = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $P_{\max} = -\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{a^3} \dfrac{a^2}{\sqrt{b}} - \log_b a^6 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\log_a b - 6\log_b a$.
Đặt $t = \log_a b$, do $a, b > 1$ nên $t > 0$.
Ta được $P = \dfrac{2}{3} - \dfrac{t}{6} - \dfrac{6}{t} \Rightarrow \dfrac{2}{3} - P = \dfrac{t}{6} + \dfrac{6}{t} \geq 2 \Rightarrow P \leq -\dfrac{4}{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{t}{6} = \dfrac{6}{t} \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow b = a^6$.
Vậy $P_{\max} = -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow b = a^6$ (chẳng hạn $a = 2$, $b = 64$).
Chọn đáp án B □

Câu 87. Ngày 20/5/2018, ngày con trai đầu lòng chào đời, chú Tuấn quyết định mở một tài khoản tiết kiệm ở ngân hàng cho con với lãi suất 0,5%/tháng. Kể từ đó, cứ vào ngày 21 hàng tháng, chú sẽ gửi vào tài khoản một triệu đồng. Sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 22/5/2036, số tiền trong tài khoản tiết kiệm đó là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

A. 388 triệu đồng. **B.** 387 triệu đồng. **C.** 390 triệu đồng. **D.** 391 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi T là số tiền gửi vào hàng tháng ($T = 1$ triệu đồng), T_n là số tiền sau n tháng kể từ ngày gửi lần đầu.

Sau 1 tháng, số tiền trong tài khoản là $T_1 = T + Tr = T(1+r)$.
Sau 2 tháng, số tiền trong tài khoản là $T_2 = (T_1 + T_1 r) + T + Tr = T\left[(1+r)^2 + (1+r)\right]$.
Sau 3 tháng, số tiền trong tài khoản là $T_3 = (T_2 + T_2 r) + (T + Tr) = T\left[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)\right]$.
Cứ như vậy, số tiền trong tài khoản sau n tháng là

$$\begin{aligned} T_n &= T\left[(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + \ldots + (1+r)\right] \\ &= T(1+r)\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r) + 1\right] \\ &= T(1+r)\cdot\frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

Như vậy, số tiền trong tài khoản tính đến ngày 22/5/2036 (sau 216 tháng) là

$$S = T_{216} + T = 1.(1+0,005)\cdot\frac{(1+0,005)^{216} - 1}{0,005} + 1 \approx 390(\text{triệu đồng})$$

Vậy số tiền trong tài khoản (làm tròn đến triệu đồng) là 390 triệu đồng.
Chọn đáp án C □

Câu 88. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(\cos x + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$. **B.** $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. **C.** $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-\sin x}{\cos x + 2} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\frac{\sin x + m\cos x + 2m}{\cos x + 2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & -(\sin x + m\cos x + 2m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin x + m\cos x \leq -2m, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{1+m^2} \leq -2m \Leftrightarrow \begin{cases} -2m \geq 0 \\ 4m^2 \geq 1 + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2 \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & m \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 89. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$
$\Leftrightarrow 2\log_3 3(x+y) + 3(x+y) = 2\log_3 (x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2) \quad (*)$
Xét hàm số $f(t) = 2\log_3 t + t, t > 0$.

$f'(t) = 2\dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Phương trình (*) tương đương:

$$\begin{aligned} & f\left[3(x+y)\right] = f\left(x^2+y^2+xy+2\right). \\ \Leftrightarrow\ & 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2. \\ \Leftrightarrow\ & xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có: $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leqslant \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy.$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y+1$.
Kết hợp với đẳng thức (1) suy ra: $x \leqslant \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$
Đặt $t = x+y, t > 0$.
Suy ra: $P = \dfrac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leqslant \dfrac{2t+1+\dfrac{(t+1)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \dfrac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$
Ta có: $f'(t) = \dfrac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$
Bảng biến thiên:

x	0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:
$\max P = \max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án C ☐

Câu 90. Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \dfrac{(\log_2 3)(\log_3 3)(\log_3 4)\cdots(\log_3 n)}{9^n}$, với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Có bao nhiêu số n để $f(n) = a$?

A. 2. **B**. Vô số. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $f(n+1) = f(n) \cdot \dfrac{\log_3(n+1)}{9}$, $f(n) = f(n-1) \cdot \dfrac{\log_3 n}{9}$.
Do a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)$ nên $f(n) = a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(n) \leq f(n+1) \\ 0 \leq f(n) \leq f(n-1). \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(n) \leq f(n) \cdot \dfrac{\log_3(n+1)}{9} \\ f(n-1) \cdot \dfrac{\log_3 n}{9} \leq f(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(n+1) \geq 9 \\ \log_3 n \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3^9 - 1 \leq n \leq 3^9.$$

Vậy có 2 giá trị của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A ☐

Câu 91. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 9. **B.** 6. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Do $a>0, b>0$ nên ta có $\begin{cases}(9a^2+b^2)+1\geqslant 6ab+1 \text{ (bất đẳng thức AM-GM)}\\ 3a+2b+1>1.\end{cases}$

$$\Rightarrow \log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)\geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab+1)$$

Từ đó $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)\geqslant \log_{3a+2b+1}(6ab+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)$

$\geqslant 2$ (bất đẳng thức AM-GM).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a=b>0\\ 3a+2b+1=6ab+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 92. Cho các số thực x, y thỏa mãn $0\leq x, y\leq 1$ và $\log_3\dfrac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$$\log_3\frac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0 \Leftrightarrow \log_3(x+y)-\log_3(1-xy)+xy+x+y-1=0$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)(*)$$

Xét hàm số $f(x)=\log_3 t+t$ trên $(0;2)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}\ln 3+1>0, \forall t\in(0;2)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x+y=1-xy\Leftrightarrow y(1+x)=1-x\Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

Thay vào P, ta được $P=2x+y=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$.

Ta có $P'(x)=2-\dfrac{2}{(1+x)^2}\geq 0, \forall x\in[0;1]$.

Suy ra $\min P=P(0)=1$ đạt được khi $x=0, y=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-6		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2x-2)-2\mathrm{e}^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2f'(2x-2) - 2\mathrm{e}^x$.
Suy ra $y' \le 0 \Leftrightarrow f'(2x-2) \le \mathrm{e}^x$ (1).

Từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} f'(2x-2) \le 0 \\ \mathrm{e}^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(2x-2) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2 \le -6 \\ -4 \le 2x-2 \le -2 \\ -2 \le 2x-2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ -1 \le x \le 0 \\ 0 \le x \le 1. \end{array}\right.$

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(-1;0)$, $(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \ge \ln(x^2+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x+y$.

A. $P = 6$. **B.** $P = 2+3\sqrt{2}$. **C.** $P = 3+2\sqrt{2}$. **D.** $P = \sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \ln x + \ln y \ge \ln(x^2+y) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(xy) \ge \ln(x^2+y) \\ \Leftrightarrow\ & xy \ge x^2+y \\ \Leftrightarrow\ & y(x-1) \ge x^2 > 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} x > 1 \\ y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó suy ra $y \ge \dfrac{x^2}{x-1}$ và

$$\begin{aligned} P = x+y &\ge \frac{x^2}{x-1} + x \\ &\ge 2(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3 \\ &\ge 2\sqrt{2(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}} + 3 \\ &\ge 2\sqrt{2}+3. \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 3+2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

A. $P_{\max} = 10$. **B.** $P_{\max} = 0$. **C.** $P_{\max} = 1$. **D.** $P_{\max} = \ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} &\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)-\ln 2} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \\ &\Leftrightarrow \frac{2^{\ln(x+y)}}{2^{\ln 2}} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \\ &\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 10} \\ &\Rightarrow \ln(x+y) = \log\left(2^{\ln 10}\right) = \ln 10 \cdot \log 2 \\ &\Rightarrow x+y = \mathrm{e}^{\ln 10 \cdot \log 2} = 10^{\log 2} = 2 \\ &\Rightarrow x+y = 2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho P^2, ta được

$$P^2 = [(x+1)\ln x + (y+1)\ln y]^2 \le (x+y+2)^2(\ln x + \ln y)^2 = 16\ln^2(xy).$$

$\Rightarrow P \le 4\ln(xy) = 4\ln[x(2-x)]$. Xét hàm số $f(x) = \ln[x(2-x)]$ trên khoảng $(0;2)$.
$f'(x) = \dfrac{2-2x}{x(2-x)} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.
Ta có bảng biến thiên

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $P_{\max} = 4 \cdot 0 = 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Cho hai số thực x, y dương thỏa mãn $\log_{x+y}(x^2+y^2) \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $A = 48(x+y)^3 - 156(x+y)^2 + 133(x+y) + 4$.

A. $M = 29$. **B.** $M = 30$. **C.** $M = \dfrac{505}{36}$. **D.** $M = \dfrac{1369}{36}$.

Lời giải.

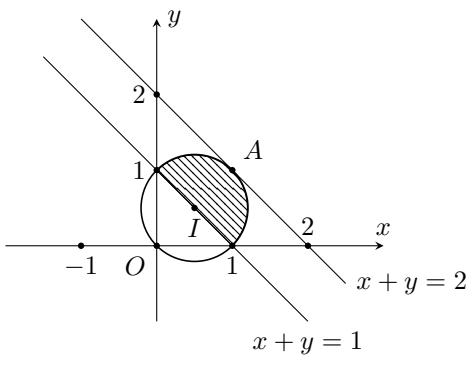
Ta xét hai trường hợp:

☑ **TH1:**

$$\log_{x+y}(x^2+y^2) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 1 \\ x^2+y^2 \le x+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 1 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{2} (*) \end{cases} \quad (1).$$

Tập nghiệm của $(*)$ là tọa độ tất cả các điểm thuộc hình tròn tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ bán kính $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Miền nghiệm của hệ (1) là phần tô màu như hình vẽ.



Đặt $t = x + y \Rightarrow 1 < t \leq 2$.

Khi đó $A = f(t) = 48t^3 - 156t^2 + 133t + 4$.

$f'(t) = 144t^2 - 312t + 133$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{19}{12} \\ t = \dfrac{7}{12}. \end{array}\right.$

Do đó, $\max\limits_{1<t\leq 2} f(t) = 30 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x + y = 2$.

x	1		$\frac{19}{12}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	29	↘		↗	30

☑ **TH2:** $\log_{x+y}(x^2+y^2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y < 1 \\ x^2 + y^2 \geq x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y < 1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (2).

Từ hình vẽ, suy ra (2) không thỏa điều kiện $x > 0$, $y > 0$ nên bị loại.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}}(x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{17}{2}$. **B.** $P_{\min} = 8$. **C.** $P_{\min} = 9$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{25\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}}(x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} xy \leq \log_{\frac{1}{2}}(x + y^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad xy \geq x + y^2 \Leftrightarrow x(y - 1) \geq y^2.$$

Do $x > 0$, $y > 0$ nên $y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$ và $x \geq \dfrac{y^2}{y-1}$.

Suy ra $P = x + 3y \geq \dfrac{y^2}{y-1} + 3y = 4y + 1 + \dfrac{1}{y-1}$.

Xét hàm số $f(y) = 4y + 1 + \dfrac{1}{y-1}$, $y > 1$.

Ta có $f'(y) = 4 - \dfrac{1}{(y-1)^2}$;

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 1 = \dfrac{1}{2} \\ y - 1 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Do $y > 1$ nên chọn $y = \dfrac{3}{2}$.

Lập bảng biến thiên hàm số $f(y)$

y	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$		↘	9	↗	

Ta thấy $f(y) \geq f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 9$.

Vậy $P \geq f(y) \geq 9$ hay $\min P = 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;\, y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;5\}$. **B.** $S=\{-7;-5;-1;1;5;7\}$.

C. $S=\{-5;-1;1;5\}$. **D.** $S=\{-1;1\}$.

Lời giải.

Giả sử điểm $M(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ $x^2+y^2+2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$.

Suy ra điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(-1;2)$ bán kính $R_1=2$.

Lại có

$$\begin{aligned} & \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2+(y-2)^2 \leq m^2. \end{aligned}$$

Suy ra điểm $M(x;y)$ thuộc hình tròn (C_2) tâm $K(2;2)$ bà bán kính $R_2=|m|$.

Để tồn tại duy nhất 1 điểm $M(x;y)$ thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow IK=R_1+R_2 \Leftrightarrow 3=2+|m| \Leftrightarrow m=\pm 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 99. Với mọi số thực $x,\ y$ thỏa điều kiện $\log_2\left(\dfrac{xy+1}{x^2+y^2}\right)=2(x^2+y^2)-xy$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^4+y^4}{2xy+1}$. Tính giá trị biểu thức $Q=15m+2\log_2 M$.

A. $Q=0$. **B.** $Q=1$. **C.** $Q=-2$. **D.** $Q=-1$.

Lời giải.

Điều kiện $xy+1>0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2\left(\frac{xy+1}{x^2+y^2}\right)=2(x^2+y^2)-xy \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left(\frac{xy+1}{2(x^2+y^2)}\right)=2(x^2+y^2)-xy-1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(xy+1)+(xy+1)=\log_2[2(x^2+y^2)]+2(x^2+y^2). \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t,\ t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\ \forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(xy+1)=f(2(x^2+y^2)) \Leftrightarrow xy+1=2(x^2+y^2)$.

Mặt khác,

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^2+y^2}{2}+1 \leq 2(x^2+y^2) \leq \frac{x^2+y^2}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq x^2+y^2 \leq \frac{2}{3}.$$

Ta có $P=\dfrac{x^4+y^4}{2xy+1}=\dfrac{(x^2+y^2)^2-2(xy)^2}{2xy+1}$. Thay $xy=2(x^2+y^2)-1$, đặt $t=x^2+y^2$, khi đó

$$P(t)=\frac{-7t^2+8t-2}{4t-1} \text{ với } \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}.$$

Khi đó $P'(t)=\dfrac{-28t^2+14t}{(4t-1)^2}$, $P'(t)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\notin\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{2}{3}\right]\\ t=\dfrac{1}{2}\in\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{2}{3}\right]\end{array}\right.$.

Ta có $P\left(\dfrac{2}{5}\right)=P\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{15}$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $M=\dfrac{1}{4}$, $m=\dfrac{2}{15}$, suy ra $Q=15\cdot\dfrac{2}{15}-2\cdot\log_2\dfrac{1}{4}=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{x^2\cdot 2^{x^2+1}}{x-1}+(y-1)\cdot 2^{x+y-xy}=0$. Tìm giá trị lớn nhất M của y, biết rằng $x>1$.

A. $M=-\dfrac{7}{2}$. **B.** $M=-3$. **C.** $M=1$. **D.** $M=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x^2\cdot 2^{x^2+1}}{x-1}+(y-1)\cdot 2^{x+y-xy}=0\Leftrightarrow x^2\cdot 2^{x^2}=(x+y-xy-1)\cdot 2^{x+y-xy-1}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t\cdot 2^t$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^t+t\cdot 2^t\ln 2>0,\ \forall t\geq 0$.

Vậy hàm số $f(t)=t\cdot 2^t$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Từ (1) ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x^2)=f(x+y-xy-1)\Leftrightarrow x+y-xy-1=x^2\Leftrightarrow y=\frac{x^2-x+1}{1-x}\ (x>1).$$

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$. Cho $y'=0\Rightarrow -x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \text{(loại)}\\ x=2\ \text{(nhận)}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số y như sau

x	1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	-3	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $M=-3$.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. A	6. B	7. C	8. A	9. C	10. A
11. C	12. C	13. C	14. B	15. A	16. A	17. C	18. A	19. D	20. A
21. B	22. D	23. B	24. C	25. C	26. C	27. C	28. B	29. C	30. A
31. B	32. B	33. B	34. B	35. D	36. C	37. C	38. D	39. A	40. D
41. C	42. C	43. C	44. C	45. B	46. A	47. B	48. A	49. B	50. C
51. B	52. C	53. C	54. C	55. C	56. A	57. A	58. A	59. C	60. D
61. A	62. C	63. D	64. C	65. B	66. C	67. A	68. D	69. D	70. B
71. A	72. A	73. A	74. C	75. C	76. C	77. A	78. B	79. C	80. A
81. B	82. C	83. C	84. C	85. B	86. B	87. C	88. B	89. C	90. A
91. C	92. B	93. C	94. C	95. B	96. B	97. C	98. D	99. C	100. B

5 Bài toán thực tế

Câu 1. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng, lãi suất $1,95\%$ một kì theo thể thức lãi kép. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu kì, người gửi sẽ có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu, giả sử người đó không rút lãi trong tất cả các kì.

A. 36 kì. **B**. 35 kì. **C**. 34 kì. **D**. 33 kì.

Lời giải.

Số tiền cả gốc lẫn lãi người đó nhận được sau n kì là: $A(1+r)^n$ (với A: tiền gốc ban đầu, r: lãi suất). Để số tiền lãi người đó nhận được lớn hơn tiền gốc ban đầu thì:

$$A(1+r)^n - A > A \Leftrightarrow (1+r)^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 = \log_{1+1,956} 2 \approx 35,89 \Rightarrow n = 36.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Một người mua một căn hộ với giá 900 triệu đồng. Người đó trả trước với số tiền là 500 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là 0,5 % mỗi tháng. Kể từ ngày mua, sau đúng mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng (cả gốc lẫn lãi). Tìm thời gian (làm tròn đến hàng đơn vị) để người đó trả hết nợ.

A. 133 tháng. **B**. 139 tháng. **C**. 136 tháng. **D**. 140 tháng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền người đó vay ngân hàng (đồng), a là số tiền người đó trả hàng tháng, r (%) là lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ mỗi tháng. Khi đó

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ nhất $R_1 = A(1+r)$.
- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ hai là $R_2 = [A(1+r) - a](1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r)$.
- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ ba là

$$R_3 = [A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r) = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r).$$

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ n là

$$R_n = A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - \cdots - a(1+r).$$

Tháng thứ n trả xong nợ, tức là

$$R_n = a \Leftrightarrow a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Áp dụng với $A = 400$ triệu đồng, $r = 0,5$ % và $a = 4$ triệu đồng, ta có $n = 139$ tháng.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau một năm lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Sau 5 năm người đó rút tiền bao gồm cả gốc và lãi. Hỏi người đó rút được số tiền là bao nhiêu?

A. 101 triệu đồng. **B**. 90 triệu đồng. **C**. 81 triệu đồng. **D**. 70 triệu đồng.

Lời giải.

Tiền có được sau 5 năm là $S = 50.(1+0,07)^5 \approx 70$ triệu đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Một người tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty Bảo Việt với thể lệ như sau: cứ đến tháng 9 hàng năm người đó đóng vào công ty là 12 triệu đồng với lãi suất hàng năm không đổi là 6%/năm. Hỏi sau đúng 18 năm kể từ ngày đóng, người đó thu về được tất cả bao nhiêu tiền? Kết quả được làm tròn đến hai chữ số phần thập phân.

A. $403,32$ (triệu đồng). **B**. $293,32$ (triệu đồng).

C. $412,23$ (triệu đồng). **D**. $393,12$ (triệu đồng).

Lời giải.

Áp dụng công thức tính nhanh
$T_n = A\dfrac{(1+r\%)^n - 1}{r\%} + A\left((1+r\%)^n - 1\right)$
ta có $T_{18} = 393,12$ triệu đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng với lãi suất kép 1% mỗi tháng. Sau hai năm 3 tháng (tháng thứ 28) người đó có công việc nên đã rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi về. Hỏi người đó rút về bao nhiêu tiền?

A. $100\left[(1{,}01)^{27} - 1\right]$ triệu đồng. **B**. $101\left[(1{,}01)^{26} - 1\right]$ triệu đồng.

C. $101\left[(1{,}01)^{27} - 1\right]$ triệu đồng. **D**. $100\left[(1{,}01)^{26} - 1\right]$ triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền nếu người đó rút sau khi gửi 1 tháng là: 1,01 triệu đồng.
Số tiền nếu người đó rút sau khi gửi 2 tháng là: $(1 + 1{,}01) \cdot 1{,}01 = 1{,}01 + 1{,}01^2$ triệu đồng.
...
Số tiền nếu người đó rút sau khi gửi 27 tháng là:
$1{,}01 + 1{,}01^2 + \cdots + 1{,}01^{27} = 1{,}01 \cdot \dfrac{1{,}01^{27} - 1}{1{,}01 - 1} = 101\left(1{,}01^{27} - 1\right)$ triệu đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào một ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất sau đây?

A. 635.000 đồng. **B**. 645.000 đồng. **C**. 613.000 đồng. **D**. 535.000 đồng.

Lời giải.

Gọi r là lãi suất kép hàng tháng.
Gọi T_n là số tiền người đó có được ở cuối tháng thứ n, ta có:
- Cuối tháng thứ nhất người đó có số tiền là: $T_1 = T + T \cdot r = T(1+r)$.
- Đầu tháng thứ hai, người đó gửi số tiền là:
$T(1+r) + T = T\left[(1+r) + 1\right] = \dfrac{T}{(1+r) - 1} \cdot \left[(1+r)^2 - 1\right] = \dfrac{a}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right]$.
- Cuối tháng thứ hai người đó có số tiền là:
$T_2 = \dfrac{T}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right] + \dfrac{T}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right] r = \dfrac{T}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right](1+r)$.
- Cuối tháng thứ n người đó có số tiền là:
$T_n = \dfrac{T}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$.
Suy ra: $T = \dfrac{T_n r}{\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)}$.

Do đó số tiền ban đầu người đó gửi là:
$T = \dfrac{10000000 \cdot 0{,}6\%}{[(1+0{,}6\%)^{15}-1](1+0{,}6\%)} \approx 635301$ đồng.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết đến tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 635.000. **B**. 535.000. **C**. 613.000. **D**. 643.000.

Lời giải.

Số tiền cuối tháng thứ 15 người đó nhận được là $T \cdot (1+r)\dfrac{(1+r)^{15}-1}{(1+r)-1} = 10 \cdot 10^6$, với $r = 0.6\%$. Vậy số tiền ban đầu gửi vào đầu mỗi tháng là $T = \dfrac{10^7 \cdot r}{(1+r)(1,006^{15}-1)} = 635.301.4591$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 8. Một sinh viên ra trường đi làm vào ngày 1/1/2018 với mức lương khởi điểm là a đồng/tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta 40% lương. Anh ta dự định mua một căn nhà có giá trị tại thời điểm 1/1/2018 là 1 tỉ đồng và cũng sau 2 năm giá trị căn nhà tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được ngôi nhà đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng)?

A. 21.776.600. **B**. 55.033.000. **C**. 14.517.000. **D**. 11.487.000.

Lời giải.

Số tiền mà người đàn ông để dành được sau 10 năm là

$$24a \cdot \frac{(1{,}1)^5-1}{0{,}1} \cdot 0{,}6 \text{ (đồng)}.$$

Giá trị của ngôi nhà sau 10 năm là

$$10^9 (1+0{,}05)^5 \text{ (đồng)}.$$

Do đó mức lương khởi điểm của người đàn ông thỏa mãn

$$24a \cdot \frac{(1{,}1)^5-1}{0{,}1} \cdot 0{,}6 = 10^9 (1+0{,}05)^5$$

Từ đó ta được $a \approx 14.517.000$.
Chọn đáp án C □

Câu 9. Hết ngày 31 tháng 12 năm 2017, dân số tỉnh X là 1,5 triệu người. Với tốc độ tăng dân số hàng năm không thay đổi là 1,5% và chỉ có sự biến động dân số do sinh - tử thì trong năm 2027 (từ 1/1/2027 đến hết ngày 31/12/2027) tại tỉnh X có tất cả bao nhiêu trẻ em được sinh ra, giả sử rằng tổng số người tử vong trong năm 2027 là 2700 người và chỉ là những người trên hai tuổi.

A. 28812. **B**. 28426. **C**. 23026. **D**. 23412.

Lời giải.

Dân số của tỉnh X đến cuối năm 2027 là $1500000\,(1+0{,}015)^{10} \approx 1740811$.
Dân số tỉnh X tăng lên trong năm 2027 là $1500000\,(1+0{,}015)^{10} - 1500000\,(1+0{,}015)^9 \approx 25726$.
Vậy số trẻ em được sinh ra trong năm 2027 của tỉnh X là $25726 - 2700 = 23026$.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Ông A mua một ngôi nhà xây thô trị giá 2,5 tỉ nhưng chưa có tiền hoàn thiện. Ông vay ngân hàng 1 tỉ để hoàn thiện với lãi suất 0,5 % mỗi tháng. Biết sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay ông đều đặn trả ngân hàng mỗi tháng 20 triệu. Hỏi tháng cuối cùng trả hết nợ ông A còn dư cầm về bao nhiêu tiền?

A. 6.543.233 đồng. **B**. 6.000.000 đồng. **C**. 6.386.434 đồng. **D**. 6.937.421 đồng.

Lời giải.

Gọi $T_0 = 1$ tỉ $= 1000$ triệu, $T = 20$ triệu, T_n là số tiền còn nợ sau n tháng, $r = 0{,}5\%$ là lãi suất một tháng.

Sau tháng thứ nhất: $T_1 = T_0 + T_0.r - T = T_0(1+r) - T$.

Sau tháng thứ hai: $T_2 = T_1 + T_1.r - T = T_1(1+r) - T = T_0.(1+r)^2 - T[(1+r)+1]$.

Sau tháng thứ ba: $T_3 = T_2 + T_2.r - T = T_0.(1+r)^3 - T[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$.

Sau n tháng: $T_n = T_0.(1+r)^n - T\left[(1+r)^{n-1} + \ldots + (1+r) + 1\right] = T_0.(1+r)^n - T.\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Giả sử sau n tháng trả hết nợ $\Rightarrow T_n = 0 \Leftrightarrow T_0.(1+r)^n = T.\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow r.T_0.(1+r)^n = T.(1+r)^n - T$

Suy ra $(1+r)^n = \dfrac{T}{T - r.T_0} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \dfrac{T}{T - r.T_0} = \log_{1+0{,}5\%} \dfrac{20}{20 - 0{,}5\%.1000} \approx 57{,}68$.

Sau 58 tháng thì ông A sẽ trả hết nợ.

Ta có $T_{58} = 1000.(1+0{,}5\%)^{58} - 20 \cdot \dfrac{(1+0{,}5\%)^{58} - 1}{0{,}5\%} = -6.386.434$ đồng.

Vậy sau 58 tháng trả nợ thì ông A còn dư cầm về số tiền là 6.386.434 đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Để người đó nhận được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi)

A. 12 năm. **B**. 13 năm. **C**. 14 năm. **D**. 15 năm.

Lời giải.

Gọi x là số năm cần gửi tiền để có được 250 triệu ($x > 0$, năm). Ta có

$$250 = 100 \cdot (1 + 0{,}07)^x \Rightarrow x \approx 13{,}54.$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Ngân hàng BIDV Việt Nam đang áp dụng hình thức lãi kép với mức lãi suất: không kỳ hạn là 0,2%/ năm, kỳ hạn 3 tháng là 4,8%/ năm. Ông A đến ngân hàng BIDV để gửi tiết kiệm với số tiền ban đầu là 300 triệu đồng. Nếu gửi không kỳ hạn mà ông A muốn thu về cả vốn và lãi bằng hoặc vượt quá 305 triệu đồng thì ông A phải gửi ít nhất n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$). Hỏi nếu cùng số tiền ban đầu và cùng số tháng đó, ông A gửi tiết kiệm có kỳ hạn 3 tháng thì ông A sẽ nhận được số tiền cả vốn và lãi là bao nhiêu (giả sử rằng trong suốt thời gian đó lãi suất ngân hàng không đổi và nếu chưa đến kỳ hạn mà rút tiền thì số tháng dư so với kỳ hạn sẽ được tính lãi suất không kỳ hạn).

A. 444.785.421 đồng. **B**. 446.490.147 đồng. **C**. 444.711.302 đồng. **D**. 447.190.465 đồng.

Lời giải.

Lãi suất không kỳ hạn theo tháng là $\dfrac{1}{60}\%$.

Lãi suất kỳ hạn 3 tháng theo chu kỳ là 1,2%.

Số tiền cả gốc và lãi sau n tháng gửi lãi suất không kỳ hạn là $300 \cdot \left(1+\frac{1}{60}\%\right)^n$ (triệu đồng).

Theo bài ra $300 \cdot \left(1+\frac{1}{60}\%\right)^n \geq 305 \Leftrightarrow n \geq \log_{1+\frac{1}{6000}} \frac{305}{300} = 99{,}18$.

Vậy số tháng gửi không kỳ hạn là $n = 100$.

Trong 100 tháng gửi theo kỳ hạn 3 tháng có 33 chu kỳ tính lãi và 1 tháng tính lãi không kỳ hạn. Vậy tổng số tiền cả gốc và lãi là $300 \cdot \left(1+1{,}2 \cdot \frac{1}{100}\right)^{33} \cdot \left(1+\frac{1}{6000}\right) = 444.785.421$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

A. 31 tháng. **B**. 35 tháng. **C**. 30 tháng. **D**. 40 tháng.

Lời giải.

Ta có $P = 3$ triệu đồng, $r = 0{,}006$.

Sau tháng thứ nhất anh A có tổng số tiền là: $P_1 = P(1+r)$.

Sau tháng thứ hai anh A có tổng số tiền là:

$$\begin{aligned} P_2 &= [P + P(1+r)](1+r) = P[1+(1+r)](1+r) \\ &= P\left[(1+r)+(1+r)^2\right]. \end{aligned}$$

Sau tháng thứ ba anh A có tổng số tiền là:

$$\begin{aligned} P_3 &= \left[P + P\left[(1+r)+(1+r)^2\right]\right](1+r) = P\left[1+\left[(1+r)+(1+r)^2\right]\right](1+r) \\ &= P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3\right]. \end{aligned}$$

Sau tháng thứ tư anh A có tổng số tiền là:

$$\begin{aligned} P_4 &= \left[P + P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3\right]\right](1+r) = P\left[1+\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3\right]\right](1+r) \\ &= P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+(1+r)^4\right]. \end{aligned}$$

$\cdots$

Sau tháng thứ n anh A có tổng số tiền là:

$$P_n = P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\cdots+(1+r)^n\right].$$

Để có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu thì

$$P_n > 100 \Leftrightarrow P\left[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\cdots+(1+r)^n\right] > 100.$$

Với $P = 3$ triệu đồng, $r = 0{,}006$ ta có

$$(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+\cdots+(1+r)^n > \frac{100}{3} \quad (*).$$

Xem vế trái là cấp số nhân với $u_1 = 1+r, q = 1+r$ khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{(1+r)-1} > \frac{100}{3} \Leftrightarrow (1{,}006)^n > \frac{603}{503} \Leftrightarrow n > \log_{1{,}006}\frac{603}{503} \approx 30{,}31.$$

Vì n nguyên dương nên ta chọn $n = 31$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó có được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 9. **B**. 10. **C**. 7. **D**. 8.

Lời giải.

Gọi số tiền ban đầu người đó gửi vào ngân hàng là A, $r = 8{,}4\%$ là lãi suất hàng năm, P_n là số tiền nhận được sau n năm. Vì lãi hàng năm nhập vào vốn nên theo công thức lãi kép ta có

$P_n = A \cdot (1+r)^n \Rightarrow 2A = A \cdot (1+r)^n \Rightarrow 2 = (1+r)^n \Rightarrow n = \log_{1+r} 2 \approx 9.$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Anh Nam dự định sau 8 năm (kể từ lúc gửi tiết kiệm lần đầu) sẽ có đủ 2 tỉ đồng để mua nhà. Mỗi năm anh phải gửi tiết kiệm bao nhiêu tiền (số tiền mỗi năm gửi như nhau ở thời điểm cách lần gửi trước 1 năm)? Biết lãi suất là 8%/năm, lãi hàng năm được nhập vào vốn và sau kỳ gửi cuối cùng anh đợi đúng 1 năm để có đủ 2 tỉ đồng.

A. $2 \times \dfrac{0{,}08}{(1{,}08)^9 - 1{,}08}$ tỉ đồng. **B**. $2 \times \dfrac{0{,}08}{(1{,}08)^8 - 1{,}08}$ tỉ đồng.

C. $2 \times \dfrac{0{,}08}{(1{,}08)^7 - 1}$ tỉ đồng. **D**. $2 \times \dfrac{0{,}08}{(1{,}08)^8 - 1}$ tỉ đồng.

Lời giải.

Gọi M là số tiền anh Nam phải gửi hàng năm. Để sau 8 năm (kể từ lúc gửi tiết kiệm lần đầu) có đủ 2 tỉ đồng, tính luôn cả thời gian anh đợi để rút tiền ra thì anh gửi tất cả 8 lần.

Ta có công thức $T_n = \dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$.

$\Rightarrow M = \dfrac{T_n \times r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} = \dfrac{2 \times 0{,}08}{(1{,}08)^9 - 1{,}08}$ tỉ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Một thầy giáo muốn tiết kiệm tiền để mua cho mình một chiếc xe ô tô nên mỗi tháng gửi ngân hàng 8 000 000 VNĐ với lãi suất 0,5%/ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng thầy giáo có thể mua được chiếc xe Ô tô 400 000 000 VNĐ?

A. 45. **B**. 60. **C**. 55. **D**. 50.

Lời giải.

Gọi $A = 8\ 000\ 000$; $r = 0{,}5\%$/tháng.

Sau 1 tháng thầy giáo có số tiền trong ngân hàng là $T_1 = A(1+r)$.

Sau 2 tháng thầy giáo có số tiền là

$T_2 = (T_1 + A)(1+r) = A\left(1 + (1+r)\right)(1+r) = A(1+r) + A(1+r)^2 = A(1+r)\dfrac{(1+r)^2 - 1}{r}.$

...

Sau n tháng thầy giáo có số tiền là: $T_n = A(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Ta có: $8(1{,}005)\dfrac{(1{,}005)^n - 1}{0{,}005} = 400 \Leftrightarrow (1{,}005)^n = \dfrac{251}{201} \Leftrightarrow n = \log_{1{,}005}\dfrac{251}{201} \approx 44{,}5.$

Để mua được chiếc xe Ô tô 400 000 000 VNĐ với cách gửi tiết kiệm như trên thầy giáo cần tối thiểu 45 tháng.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Một người gửi tiết kiệm với số tiền gửi là A đồng với lãi suất là 6% một năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho

năm tiếp theo. Sau 10 năm người đó rút ra được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn số tiền ban đầu là 100 triệu đồng. Hỏi người đó phải gửi số tiền A bằng bao nhiêu?

A. $145037058,3$ đồng. **B**. $55839477,69$ đồng. **C**. 126446597 đồng. **D**. $111321563,5$ đồng.

Lời giải.

Ta có $A(1+0,06)^{10}-A=10^8 \Rightarrow A=126446597$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Bạn Nam vay một số tiền tại ngân hàng VIB bank và trả góp số tiền đó trong vòng 40 tháng với mức lãi suất là 1,2 %/tháng. Mỗi tháng bạn Nam trả một số tiền bằng nhau và bằng 2 triệu đồng cho ngân hàng. Vậy số tiền bạn Nam đã vay ngân hàng là bao nhiêu. Chọn kết quả gần đúng nhất?

A. 50 triệu đồng. **B**. 40 triệu đồng. **C**. 100 triệu đồng. **D**. 65 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi A (triệu đồng) là tổng số vốn vay, $T=2$ (triệu đồng) là số tiền trả hàng tháng, $r=1{,}2\%$.

Sau lần thứ 1 trả tiền, số tiền tồn nợ ngân hàng là $N_1=A(1+r)-T$.

Sau lần thứ 2 trả tiền, số tiền tồn nợ ngân hàng là $N_2=N_1(1+r)-T=A(1+r)^2-T\left[(1+r)+1\right]$.

Sau lần trả tiền thứ n, số tiền tồn nợ là $N_n=A(1+r)^n-T\left[(1+r)^{n-1}+\cdots+(1+r)+1\right]$

$$\Leftrightarrow N_n=A(1+r)^n-\frac{T}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$$

Sau tháng thứ n, bạn Nam không còn nợ ngân hàng khi $N_n=0\Leftrightarrow A=\dfrac{T\left[(1+r)^n-1\right]}{r(1+r)^n}$

Với $T=2$, $r=1{,}2\%$ ta có $A=\dfrac{2\left[(1+1,2\%)^{40}-1\right]}{1,2\%(1+1,2\%)^{40}}\approx 63{,}241019$ (triệu đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 19. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A\cdot \mathrm{e}^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta đạt mức 120 triệu người?

A. 2026. **B**. 2020. **C**. 2022. **D**. 2025.

Lời giải.

Ta có $S=A\cdot \mathrm{e}^{Nr}\Leftrightarrow N=\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{S}{A}=\dfrac{1}{1,7\%}\ln\dfrac{120}{78{,}6858}\approx 24{,}82523739$.

Vậy sau 25 năm thì dân số đạt 120 triệu người, tức là vào năm 2026.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Ông An gửi tiết kiệm ngân hàng theo hình thức lãi kép với số tiền là m đồng với lãi suất hàng tháng là $r\,\%$. Tính số tiền T gồm cả vốn lẫn lãi mà ông An nhận được sau n tháng gửi tiền.

A. $T=m(1+r)^n$. **B**. $T=m(1+nr)$.

C. $T=\dfrac{m}{r}\left[(r+1)^n-(r+1)\right]$. **D**. $T=m(1+r)^{n+1}$.

Lời giải.

Gọi m là số tiền ông An ban đầu gửi vào ngân hàng; $r\,\%$ là lãi suất hàng tháng.

Cuối tháng thứ nhất số tiền ông An có là $m+mr=m(1+r)$.

Cuối tháng thứ hai số tiền ông An có là $m(1+r)+m(1+r)r=m(1+r)^2$.

. . . . . .

Cuối tháng thứ n số tiền ông An có là $T = m(1+r)^n$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Một kỹ sư mới ra trường làm việc với mức lương khởi điểm là 7.000.000 đồng/tháng. Cứ sau 9 tháng làm việc, mức lương của kỹ sư đó lại được tăng thêm 10%. Hỏi sau 4 năm làm việc tổng số tiền lương kỹ sư đó nhận được là bao nhiêu?

A. 415.367.400 đồng. **B**. 418.442.010 đồng.

C. 421.824.081 đồng. **D**. 407.721.300 đồng.

Lời giải.

Chú ý rằng sau lần tăng lương thứ n thì 1 tháng kỹ sư nhận được: $7 \cdot (1{,}1)^n$ triệu đồng.

Tăng lương	1 Tháng	9 Tháng
Lần 0	7 triệu đồng	$7 \cdot 9$ triệu đồng
Lần 1	$7 \cdot (1{,}1)$ triệu đồng	$7 \cdot (1{,}1) \cdot 9$ triệu đồng
Lần 2	$7 \cdot (1{,}1)^2$ triệu đồng	$7 \cdot (1{,}1)^2 \cdot 9$ triệu đồng
Lần 3	$7 \cdot (1{,}1)^3$ triệu đồng	$7 \cdot (1{,}1)^3 \cdot 9$ triệu đồng
Lần 4	$7 \cdot (1{,}1)^4$ triệu đồng	$7 \cdot (1{,}1)^4 \cdot 9$ triệu đồng
Lần 5	$7 \cdot (1{,}1)^5$ triệu đồng	

Vì kỹ sư làm việc 4 năm tức là được tăng lương 5 lần, nhưng lần thứ 5 kỹ sư chỉ mới làm được 3 tháng. Do vậy, tổng số tiền 4 năm của kỹ sư đó là:

$$7 \cdot 9 \cdot \left[1 + (1{,}1) + (1{,}1)^2 + (1{,}1)^3 + (1{,}1)^4\right] + 7 \cdot (1{,}1)^5 \cdot 3 = 418{,}44201 \text{ triệu đồng} = 418.442.010 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với hình thức lãi suất kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi vào ngân hàng với kỳ hạn và lãi suất như lần trước. Số tiền lãi mà ông An nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 34,480 triệu. **B**. 81,413 triệu. **C**. 107,946 triệu. **D**. 46,933 triệu.

Lời giải.

Số tiền ông An có được sau 5 năm: $T_5 = 100 \cdot (1 + 8\%)^5 \approx 146{,}93$ triệu.

Số tiền còn lại sau khi sửa nhà: $a = 73{,}46$ triệu.

Số tiền ông An nhận được sau khi gửi $a = 73{,}46$ triệu 5 năm với tiền lãi như lần trước
$T = 73{,}46(1 + 8\%)^5 = 107{,}94$ triệu.
Số tiền lãi nhận được là: $(107{,}94 - 73{,}46) + (146{,}93 - 100) = 81{,}41$ triệu.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Ông Nam gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với hình thức lãi kép 0,5 %/tháng. Hỏi Ông Nam cần gửi ít nhất bao nhiêu tháng thì được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 12 triệu đồng? (biết rằng Ông Nam chỉ đến ngân hàng rút tiền khi số tiền đã nhiều hơn 12 triệu đồng)

A. 35 tháng. **B**. 36 tháng. **C**. 37 tháng. **D**. 38 tháng.

Lời giải.

Goi n là số tháng gửi, áp dụng công thức lãi kép ta có

$$12 = 10(1 + 0{,}005)^n \Rightarrow n = \log_{1{,}005} 1{,}2 \approx 37.$$

Vậy Ông Nam cần gửi ít nhất 37 tháng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được 7,1 độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần trận động đất này?

A. 1,17. **B**. 2,2. **C**. 15,8. **D**. 4.

Lời giải.

Gọi M_1, A_1 lần lượt là cường độ, biên độ rung chấn tối đa của trận động đất tại San Francisco.
Gọi M_2, A_2 lần lượt là cường độ, biên độ rung chấn tối đa của trận động đất tại địa điểm còn lại.
Ta có

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = \log \frac{A_1}{A_0} \Rightarrow \frac{A_1}{A_0} = 10^{M_1}.$$
$$M_2 = \log A_2 - \log A_0 = \log \frac{A_2}{A_0} \Rightarrow \frac{A_2}{A_0} = 10^{M_2}.$$

Khi đó $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{10^{M_1}}{10^{M_2}} = 10^{M_1 - M_2} = 10^{1{,}2} \approx 15{,}8$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Sau Tết Đinh Dậu, bé An được tổng số tiền lì xì là 12 triệu đồng. Bố của An gửi toàn bộ số tiền trên của con vào một ngân hàng với lãi suất ban đầu 5%/năm, tiền lãi hằng năm được nhập vào gốc và sau mỗi năm thì lãi suất tăng thêm 0,2% so với năm trước đó. Hỏi sau 5 năm tổng số tiền bé An trong ngân hàng là bao nhiêu?

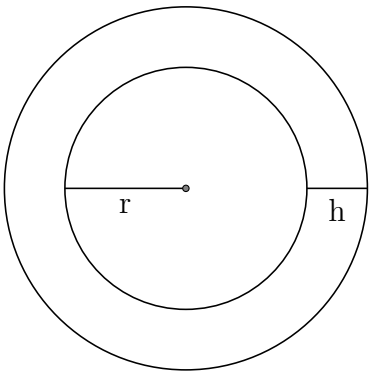
A. 13,5 triệu đồng. **B**. 15,6 triệu đồng. **C**. 16,7 triệu đồng. **D**. 14,5 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $P_0 = 12$ (triệu đồng). Số tiền bé An có trong ngân hàng sau 1 năm là $P_1 = P_0 \times 1{,}05$.
Số tiền bé An có trong ngân hàng sau 2 năm là $P_2 = P_1 \times 1{,}052$.
Số tiền bé An có trong ngân hàng sau 3 năm là $P_3 = P_2 \times 1{,}054$.
Số tiền bé An có trong ngân hàng sau 4 năm là $P_4 = P_3 \times 1{,}056$.
Số tiền bé An có trong ngân hàng sau 5 năm là $P_5 = P_4 \times 1{,}058 \approx 15{,}6$ triệu đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cáp tròn truyền dưới nước bao gồm một lõi đồng và bao quanh lõi đồng là một lõi cách nhiệt như hình vẽ. Nếu $x = \dfrac{r}{h}$ là tỉ lệ bán kính lõi và độ dày của vật liệu cách nhiệt thì bằng đo đạc thực nghiệm người ta thấy rằng vận tốc truyền tải tín hiệu được cho bởi phương trình $v = x^2 \ln \dfrac{1}{x}$ với $0 < x < 1$. Nếu bán kính lõi là 2cm thì vật liệu cách nhiệt có bề dày h(cm) bằng bao nhiêu để tốc độ truyền tải tín hiệu là lớn nhất.



A. $h = 2\mathrm{e}$(cm). **B.** $h = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$(cm). **C.** $h = 2\sqrt{\mathrm{e}}$(cm). **D.** $h = \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$(cm).

Lời giải.

Ta có $v = x^2 \ln \dfrac{1}{x} = -v^2 \ln x \Rightarrow v' = -\left(2x \ln x + x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \ln x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ (loại $x = 0$).

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} v = \lim\limits_{x\to 1} v = 0$ và $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \Rightarrow \max\limits_{(0;1)} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ khi $x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \dfrac{2}{h} \Rightarrow h = 2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $x(t) = x(0) \cdot 2^t$, trong đó $x(0)$ là số lượng vi khuẩn X ban đầu, $x(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t (phút). Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con.

A. 7 phút. **B.** 5 phút. **C.** 8 phút. **D.** 6 phút.

Lời giải.

Ta có $x(2) = x(0) \cdot 2^2 = 625 \cdot 10^3$. Mặt khác $x(t) = x(0) \cdot 2^t = 10 \cdot 10^6 \Rightarrow 2^{t-2} = \dfrac{10^7}{625 \cdot 10^3} \Leftrightarrow t = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Theo thống kê của tổng cục dân số Việt Nam vào đầu năm 2003 dân số nước ta là 80.902.400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%/ năm. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số là không thay đổi. Nếu tính từ năm 2003 thì thời điểm gần nhất để dân số nước ta vượt mức 100 triệu là

A. năm 2017. **B.** năm 2018. **C.** năm 2020. **D.** năm 2010.

Lời giải.

Gọi n là số năm để dân số nước ta vượt mức 100 triệu tính từ năm 2003.

Ta có $80.902.400(1 + 1{,}47\%)^n \geq 100.10^6 \Leftrightarrow n \geq 14{,}52$.

Vậy thời điểm gần nhất để dân số nước ta vượt mức 100 triệu là năm 2018.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100.(0.5)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẩu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cácbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẩu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cácbon 14 còn lại trong mẩu gỗ là 63%. Hãy xác định tuổi của mẩu gỗ được lấy từ công trình đó.

A. 3874. **B**. 3833. **C**. 3834. **D**. 3843.

Lời giải.

Theo bài ta có $65 = 100.(0.5)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow 0.65 = (0.5)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow \dfrac{3754}{A} = \log_{0.5} 0.65 \Leftrightarrow A = \dfrac{3754}{\log_{0.5} 0.65}$.

Do mẫu gỗ còn 63% lượng Cácbon 14 nên ta có:

$63 = 100.(0.5)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow 0.63 = (0.5)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow \dfrac{t}{A} = \log_{0.5} 0.63 \Leftrightarrow t = A.\log_{0.5} 0.63 = \dfrac{3754}{\log_{0.5} 0.65}.\log_{0.5} 0.63 \approx 3833.$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Một sinh viên muốn mua một cái laptop có giá 12,5 triệu đồng nên mỗi tháng gửi tiết kiệm vào ngân hàng 750.000 đồng theo hình thức lãi suất kép với lãi suất 0,72% một tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng sinh viên đó có thể dùng số tiền gửi tiết kiệm để mua được laptop?

A. 16 tháng. **B**. 14 tháng. **C**. 15 tháng. **D**. 17 tháng.

Lời giải.

Đặt $A = 0{,}75$ (triệu đồng).

Số tiền gửi tiết kiệm của sinh viên đó sau n tháng là

$T = A \cdot 1{,}0072^n + A \cdot 1{,}0072^{n-1} + A \cdot 1{,}0072^{n-2} + \cdots + A \cdot 1{,}0072$

$T = A \cdot (1{,}0072^n + 1{,}0072^{n-1} + 1{,}0072^{n-2} + \cdots + 1{,}0072)$

$T = A \cdot \dfrac{1{,}0072 \cdot (1 - 1{,}0072^n)}{1 - 1{,}0072}$

Để sinh viên đó mua được một cái laptop có giá 12,5 triệu đồng thì

$T = 0{,}75 \cdot \dfrac{1{,}0072 \cdot (1 - 1{,}0072^n)}{1 - 1{,}0072} \geq 12{,}5 \Leftrightarrow 1 - 1{,}0072^n \leq -0{,}12$

$\Leftrightarrow 1{,}0072^n \geq 1{,}12 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}0072} 1{,}12 \approx 15{,}8.$

Như vậy, phải ít nhất 16 tháng tháng sinh viên đó có thể dùng số tiền gửi tiết kiệm để mua được laptop.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% trên một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 19 năm. **B**. 20 năm. **C**. 21 năm. **D**. 18 năm.

Lời giải.

Gọi n là số năm cần tìm. Ta có $100(1 + 6\%)^n \geq 300 \Rightarrow (1 + 6\%)^n \geq 3 \Rightarrow n \geq \log_{(1+6\%)}(3) \approx 18,85$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Để thực hiện kế hoạch kinh doanh, ông A cần chuẩn bị một số vốn ngay từ bây giờ. Ông có số tiền là 500 triệu đồng gửi tiết kiệm với lãi suất 0,4%/tháng theo hình thức lãi kép. Sau gần 10 tháng, ông A gửi thêm vào 300 triệu nhưng lãi suất các tháng sau có thay đổi là 0,5%/tháng. Hỏi sau 2 năm kể từ lúc gửi số tiền ban đầu, số tiền ông A nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? (không tính phần thập phân).

A. 8796936000. **B**. 880438640. **C**. 879693510. **D**. 901727821.

Lời giải.

Sau 10 tháng ông A có số tiền $A_{10} = 500(1 + 0{,}4\%)^{10} + 300 = 820363867$.

Sau 2 năm kể từ lúc gửi số tiền ban đầu hay sau 14 tháng kể từ lúc ông A gửi thêm số tiền 300 triệu, số tiền ông A nhận được cả gốc lẫn lãi là $A = A_{10}(1 + 0{,}5\%)^{14} = 879693510$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ dùng cho 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó chỉ đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

A. 40. **B**. 41. **C**. 42. **D**. 43.

Lời giải.

Gọi lượng thức ăn tiêu thụ theo dự định hàng ngày là x. Lượng thức ăn dự trữ của trang trại A là $100x$.

Ta có $x\left(1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + ... + 1{,}04^{n-1}\right) = 100x \Leftrightarrow \dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04 - 1} = 100 \Rightarrow n = \log_{1{,}04} 5 \approx 41{,}035$.

Do đó lượng thức ăn dự trữ chỉ đủ dùng cho 41 ngày.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 79.760.000 đồng. **B**. 74.813.000 đồng. **C**. 65.393.000 đồng. **D**. 70.656.000 đồng.

Lời giải.

Công thức lãi kép $P_n = A(1 + r)^n$

Sau 1 năm gửi tiền, tổng số tiền thu tích luỹ được

+ Từ nguồn tiền gửi theo quý là $Q_1 = 200(1 + 2{,}1\%)^4$ triệu đồng.

+ Từ nguồn tiền gửi theo tháng là $T_1 = 200(1 + 0{,}73\%)^{12}$

Từ đó vốn gửi cho năm thứ hai được tính như sau

+ Vốn gửi theo quý là $\dfrac{1}{2}Q_1 = 100(1 + 2{,}1\%)^4$ triệu đồng.

+ Vốn gửi theo tháng là $\dfrac{1}{2}Q_1 + T_1 = 100(1 + 2{,}1\%)^4 + 200(1 + 0{,}73\%)^{12}$ triệu đồng.

Sau 1 năm gửi nữa (sau tổng cộng 2 năm), số tiền thu được

+ Từ nguồn tiền gửi theo quý (năm sau) là $Q_2 = 100(1 + 2{,}1\%)^4(1 + 2{,}1\%)^4$

+ Từ nguồn tiền gửi theo tháng (năm sau) là

$T_2 = \left[100(1 + 2{,}1\%)^4 + 200(1 + 0{,}73\%)^{12}\right](1 + 0{,}73\%)^{12}$

Vậy tổng số tiền lãi thu được sau 2 năm gửi tiền là $L = (T_2 + Q_2 - 400)10^6 \approx 74.813.000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Thầy Châu vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua xe. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất thầy Châu trả 5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu thầy Châu trả hết số tiền đã vay?

A. 78 tháng. **B**. 76 tháng. **C**. 75 tháng. **D**. 77 tháng.

Lời giải.

Đặt $T = 300$ triệu đồng, $A = 5$ triệu đồng, $r = 0{,}65\%$.

Gọi P_n là số tiền còn nợ ngân hàng sau lần trả tiền thứ n. Khi đó ta có

$P_1 = T(1+r) - A$.

$P_2 = P_1(1+r) - A = T(1+r)^2 - A\dfrac{(1+r)^2-1}{r}$.

$P_3 = P_2(1+r) - A = T(1+r)^3 - A\dfrac{(1+r)^3-1}{r}$.

$\ldots$

$P_n = T(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.

Thầy Châu trả hết số tiền trên thì $T(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n-1}{r} = 0$.

$\Rightarrow 300(1{,}0065)^n - 5 \times \dfrac{(1{,}0065)^n - 1}{0{,}0065} = 0 \Rightarrow n \approx 76{,}29$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Bạn Châu nhận học bổng Vallet 7 triệu đồng, mẹ cho bạn gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 6,8% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm thì bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi gần nhất với 10 triệu đồng? (Giả thiết rằng, lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian bạn Châu gửi.)

A. 5. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 8.

Lời giải.

Số tiền bạn Châu nhận được sau n năm là: $T_n = 7 \cdot (1{,}068)^n$ (triệu đồng).

Xét phương trình:

$$7 \cdot (1{,}068)^n = 10 \Leftrightarrow (1{,}068)^n = \frac{10}{7} \Leftrightarrow n = \log_{1{,}068}\frac{10}{7} \approx 5{,}42.$$

Sau 5 năm bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi là : $T_5 = 7 \cdot (1{,}068)^5 \approx 9{,}726$ (triệu đồng).

Sau 6 năm bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi là : $T_6 = 7 \cdot (1{,}068)^6 \approx 10{,}388$ (triệu đồng).

Như vậy, sau 5 năm thì bạn Châu nhận được cả vốn lẫn lãi gần nhất với 10 triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Ông An mua một chiếc điện thoại di động tại một cửa hàng với giá 18 500 000 đồng và đã trả trước 5 000 000 đồng ngay khi nhận điện thoại. Mỗi tháng, ông An phải trả góp cho cửa hàng trên số tiền không đổi là m đồng. Biết rằng lãi suất tính trên số tiền nợ còn lại là 3,4% /tháng và ông An trả đúng 12 tháng thì hết nợ. Số tiền m là

A. 1 350 203 đồng. **B**. 1 903 203 đồng. **C**. 1 388 824 đồng. **D**. 1 680 347 đồng.

Lời giải.

Đặt $r = 3{,}4\%$ là lãi suất hàng tháng và $a = 1 + r$.

Số tiền vay là $A = 13\,500\,000$.

Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 1: $T_1 = A + Ar - m = A(1+r) - m = Aa - m$.

Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 2: $T_2 = T_1 + T_1 r - m = T_1 a - m = Aa^2 - m(a+1)$.
Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 3: $T_3 = T_2 + T_2 r - m = T_2 a - m = Aa^3 - m(a^2 + a + 1)$.
...
Số tiền ông An còn nợ sau tháng thứ 12: $T_{12} = T_{11} + T_{11} r - m = T_{11} a - m = Aa^{12} - m\left(a^{11} + a^{10} + \cdots + a + 1\right) = Aa^{12} - m\dfrac{a^{12} - 1}{a - 1}$.
Ông An trả đúng 12 tháng thì hết nợ nên: $T_{12} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{Aa^{12}(a-1)}{a^{12} - 1} = 1\,388\,824$.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Ông Bình mua một chiếc xe máy với giá 60 triệu đồng tại một cửa hàng theo hình thức trả góp với lãi suất 8% một năm. Biết rằng lãi suất được chia đều cho 12 tháng và không thay đổi trong suốt thời gian ông Bình trả nợ. Theo quy định của cửa hàng, mỗi tháng ông Bình phải trả một số tiền cố định là 2 triệu đồng (bao gồm tiền nợ gốc và tiền lãi). Hỏi ông Bình trả hết nợ ít nhất là trong bao nhiêu tháng?

A. 35. **B**. 34. **C**. 33. **D**. 32.

Lời giải.

Do lãi suất theo năm là 8% nên lãi suất tính theo tháng là $n = \dfrac{8\%}{12} = \dfrac{2}{300}$.
Cuối tháng 1, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ: $S_1 = 60(1+n) - 2$ triệu đồng.
Cuối tháng 2, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ:
$S_2 = [60(1+n) - 2](1+n) - 2 = 60(1+n)^2 - 2[(1+n) + 1]$ triệu đồng.
Cuối tháng 3, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ
$S_3 = \{60(1+n)^2 - 2[(1+n)+1]\}(1+n) - 2 = 60(1+n)^3 - 2[(1+n)^2 + (1+n) + 1]$.
...
Cuối tháng m, sau khi trả nợ 2 triệu, ông Bình còn nợ 0 đồng, nghĩa là
$0 = 60(1+n)^m - 2\left[(n+1)^{m-1} + (n+1)^{m-2} + \cdots + (n+1) + 1\right]$
Ta có $(n+1)^{m-1} + (n+1)^{m-2} + \cdots + (n+1) + 1$ là tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = n + 1$ gồm m số hạng
$(n+1)^{m-1} + (n+1)^{m-2} + \cdots + (n+1) + 1 = 1 \cdot \dfrac{(n+1)^m - 1}{n + 1 - 1} = \dfrac{(n+1)^m - 1}{n}$
$\Leftrightarrow 0 = 60(1+n)^m - 2\dfrac{(1+n)^m - 1}{n} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{60(1+n)^m \cdot n}{(1+n)^m - 1}$
Ta có $2 = \dfrac{60\left(1 + \dfrac{2}{300}\right)^m \cdot \dfrac{2}{300}}{\left(1 + \dfrac{2}{300}\right)^m - 1} \Leftrightarrow m \approx 33{,}58$.
Vậy ông Bình trả hết nợ sau 34 tháng.
Chọn đáp án B □

Câu 39. Ông Minh gửi ngân hàng số tiền 100 triệu đồng với lãi suất 7% một năm theo hình thức lãi kép. Biết rằng trong suốt quá trình gửi ông không rút tiền lãi. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì ông có nhiều hơn 500 triệu?

A. 24 năm. **B**. 23 năm. **C**. 22 năm. **D**. 25 năm.

Lời giải.

Gọi n là số năm ông Minh gửi, số tiền ông Minh khi gửi n năm là $100(1+0{,}07)^n$. Theo giả thiết ta có

$$100(1+0{,}07)^n > 500 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}07} 5 \approx 23{,}787$$

Vậy ông Minh cần ít nhất 24 năm.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Bạn An gửi tiết kiệm số tiền 58000000 đồng trong 8 tháng tại một ngân hàng thì nhận được 61329000 đồng. Khi đó, lãi suất hàng tháng gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. 0,9%. **B**. 0,6%. **C**. 0,5%. **D**. 0,7%.

Lời giải.

Ta có

$$61329000 = 58000000(1+r)^8 \Leftrightarrow r \approx 0{,}7\%$$

Chọn đáp án D □

Câu 41. Một người gửi ngân hàng số tiền 100 triệu đồng với lãi suất 7% một năm theo hình thức lãi kép. Biết rằng trong suốt quá trình gửi không rút tiền lãi. Hỏi sau 5 năm số tiền của người ấy gần với giá trị nào dưới đây nhất?

A. 142 triệu. **B**. 140 triệu. **C**. 130 triệu. **D**. 150 triệu.

Lời giải.

Số tiền sau 5 năm là $100(1+0,07)^5 = 140{,}255$ triệu.
Chọn đáp án B □

Câu 42. Một người gửi ngân hàng số tiền T với lãi suất 7% một năm theo hình thức lãi kép. Biết rằng trong suốt quá trình gửi không rút tiền lãi. Hỏi sau bao nhiêu năm số tiền của người gấp đôi số tiền ban đầu

A. 11 năm. **B**. 12 năm. **C**. 14 năm. **D**. 10 năm.

Lời giải.

Gọi n là số năm cần gửi, ta có $2T = T(1+0{,}07)^n \Leftrightarrow n \approx 10{,}24$.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Bác An gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9%/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6%/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Hỏi sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền gần nhất với số nào sau đây?

A. 5453000 đồng. **B**. 5436000 đồng. **C**. 5468000 đồng. **D**. 5463000 đồng.

Lời giải.

Số tiền vốn tích luỹ của bác An sau 6 tháng đầu tiên (với lãi suất 0,7%/tháng) là $5 \cdot 1{,}007^6$ triệu đồng.
Số tiền vốn tích luỹ của bác An sau 9 tháng đầu tiên (3 tháng tiếp theo với lãi suất 0,9%/tháng) là $5 \cdot 1{,}007^6 \cdot 1{,}009^3$ triệu đồng.
Số tiền (cả vốn lẫn lãi) tích luỹ của bác An sau 1 năm gửi tiền (3 tháng tiếp theo với lãi suất 0,6%/tháng) là $5 \cdot 1{,}007^6 \cdot 1{,}009^3 \cdot 1{,}006^3 \approx 5{,}453000$ triệu đồng.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Một người mua một căn hộ với giá 900 triệu đồng. Người đó trả trước với số tiền là 500 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là 0,5 % mỗi tháng. Kể từ ngày mua, sau đúng mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng (cả gốc lẫn lãi). Tìm thời gian (làm tròn đến hàng đơn vị) để người đó trả hết nợ.

A. 133 tháng. **B**. 139 tháng. **C**. 136 tháng. **D**. 140 tháng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền người đó vay ngân hàng (đồng), a là số tiền người đó trả hàng tháng, r (%) là lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ mỗi tháng. Khi đó

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ nhất $R_1 = A(1+r)$.
- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ hai là $R_2 = [A(1+r)-a](1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r)$.
- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ ba là

$$R_3 = [A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r) = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r).$$

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ n là

$$R_n = A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - \cdots - a(1+r).$$

Tháng thứ n trả xong nợ, tức là

$$R_n = a \Leftrightarrow a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Áp dụng với $A = 400$ triệu đồng, $r = 0{,}5$ % và $a = 4$ triệu đồng, ta có $n = 139$ tháng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 140 triệu đồng. **B**. 154 triệu đồng. **C**. 145 triệu đồng. **D**. 150 triệu đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép : $P_n = x(1+r)^n$, trong đó

P_n là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì, x là vốn gốc, r là lãi suất mỗi kì.

Ta cũng tính được số tiền lãi thu được sau n kì là : $P_n - x = x(1+r)^n - x = x\left[(1+r)^n - 1\right]$ (*).

Áp dụng công thức (*) với $n = 3$, $r = 6{,}5\%$, số tiền lãi là 30 triệu đồng.

Ta được $30 = x\left[(1+6{,}5\%)^3 - 1\right] \Rightarrow x \approx 144{,}27$.

Vậy số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Thầy Tuấn gửi 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng. Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành 1,15%/tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn 0,9%/tháng. Thầy Tuấn tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 5787710,707 đồng. Hỏi thầy Tuấn đã gửi tổng thời gian bao nhiêu tháng?

A. 18 tháng. **B**. 17 tháng. **C**. 16 tháng. **D**. 15 tháng.

Lời giải.

Gọi x là số tháng mà thầy Tuấn gửi tiền với lãi suất 0,7%/tháng.
Gọi y là số tháng mà thầy Tuấn gửi tiền với lãi suất 0,9%/tháng.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}
&5000000 \cdot (1+0{,}7\%)^x \cdot (1+1{,}15\%)^6 \cdot (1+0{,}9\%)^y = 5787710{,}707\\
\Leftrightarrow\ &1{,}007^x \cdot 1{,}009^y = 1{,}080790424\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} 1{,}007^{x+y} < 1{,}080790424 \\ 1{,}009^{x+y} > 1{,}080790424 \end{cases}\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \log_{1{,}009} 1{,}080790424 < x+y < \log_{1{,}007} 1{,}080790424 \\ x,\ y \in \mathbb{N} \end{cases}\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} 9 \le x+y \le 11 \\ x,\ y \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (*)
\end{aligned}$$

- ☑ Với $x+y=9$, thử $x,\ y \in \mathbb{N}$ ta thấy $(*)$ không thỏa mãn.
- ☑ Với $x+y=10$, thử $x,\ y \in \mathbb{N}$ ta thấy $x=6,\ y=4$ thỏa mãn $(*)$.
- ☑ Với $x+y=11$, thử $x,\ y \in \mathbb{N}$ ta thấy $(*)$ không thỏa mãn.

Vậy, thầy Tuấn gửi tổng thời gian là 16 tháng.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Một người gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,45% tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 10 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi.

A. 210.593.000 đồng. **B**. 209.183.000 đồng. **C**. 209.184.000 đồng. **D**. 211.594.000 đồng.

Lời giải.

Ta có công thức tính lãi kép $P = P_0(1+r\%)^n$.
Số tiền mà người đó nhận được sau 10 tháng là

$$P_{10} = 200(1+0{,}45\%)^{10} = 209{,}184454 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Một người gửi một số tiền vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất $r\%$/năm. Sau 10 năm người đó có số tiền gấp đôi số tiền ban đầu (cả gốc lẫn lãi). Tính r biết rằng lãi suất đó không đổi (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

A. 7,3. **B**. 7,2. **C**. 7,1. **D**. 7,0.

Lời giải.

Gọi A là số tiền gốc người đó gửi ban đầu.
Theo công thức lãi kép, số tiền người đó nhận được sau 10 năm là $A(1+r)^{10}$.
Theo đề bài ta có $A(1+r\%)^{10} = 2A \Leftrightarrow (1+r\%)^{10} = 2 \Leftrightarrow r = 100(\sqrt[10]{2} - 1) \approx 7{,}2$.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Ông A gửi 120 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được cộng nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 10 năm, tổng số tiền lãi mà ông A nhận được là bao nhiêu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và ông A không rút tiền ra?(Lấy kết quả gần đúng theo đến hàng phần trăm).

A. 94,90 triệu đồng. **B**. 95,10 triệu đồng. **C**. 104,10 triệu đồng. **D**. 114,90 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $M = 120,\ r = 0{,}06,\ S_n$ là số tiền của ông A gồm cả vốn lẫn lãi ở cuối năm thứ n.
Ta có

- ☑ Số tiền cuối năm thứ nhất $S_1 = M + r \cdot M = M(1 + r)$.
- ☑ Số tiền cuối năm thứ hai $S_2 = S_1 + S_1 \cdot r = M\,(1 + r)^2$.

  ...
- ☑ Số tiền cuối năm thứ n là $S_n = (1 + r)^n$.

Sau 10 năm tổng số tiền của ông A là $S_{10} = M \cdot (1 + r)^{10}$.
Số tiền lãi của ông A sau 10 năm là $S_{10} - M = M \cdot (1 + 0{,}06)^{10} - M = 120 \cdot (1 + 0{,}006)^{10} - 120 = 94{,}90$ triệu đồng.
Vậy số tiền lãi của ông A thu được sau 10 năm là $S = 94{,}90$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Trong đó, m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã. Biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ. Ban đầu có 250 gam, hỏi sau 36 giờ thì chất đó còn lại bao nhiêu gam? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

A. 87,38 gam. **B**. 88,38 gam. **C**. 88,4 gam. **D**. 87,4 gam.

Lời giải.

Sau 36 giờ ta có: $m(36) = 250 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{36}{24}} = 88,4$. (Kết quả đã làm tròn đến hàng phần chục).

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,5% mỗi tháng theo cách sau: mỗi tháng (vào đầu tháng) người đó gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng và ngân hàng tính lãi suất (lãi suất không đổi) dựa trên số tiền tiết kiệm thực tế của tháng đó. Hỏi sau 5 năm, số tiền của người đó có được gần nhất với số tiền nào dưới đây (cả gốc và lãi, đơn vị triệu đồng)?

A. 701,47. **B**. 701,19. **C**. 701,12. **D**. 701.

Lời giải.

Tiền thu được cuối mỗi tháng là

- ☑ Tháng 1: $T_1 = 10 + 10 \cdot 0{,}5\% = 10(1 + 0{,}5\%)$.
- ☑ Tháng 2: $T_2 = 10 + 10 \cdot 0{,}5\% + 10 + 0{,}5\%(10 + 10 \cdot 0{,}5\% + 10) = 10(1 + 0{,}5\%)^2 + 10(1 + 0{,}5\%)$.

  .....

☑ Tháng 60

$$\begin{aligned} T_{60} &= 10(1+0{,}5\%) + 10(1+0{,}5\%)^2 + \ldots + 10(1+0{,}5\%)^{60} \\ &= 10(1+0{,}5\%) \cdot \frac{(1+0{,}5\%)^{60}-1}{0{,}5\%} \approx 701{,}19 \text{ (triệu đồng).} \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 52. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu 4% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Cứ sau mỗi năm lãi suất tăng 0,3%. Hỏi số năm đầu tiên (kể từ khi bắt đầu gửi tiền) để tổng số tiền người đó nhận được lớn hơn 125 triệu đồng? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng).

A. 4 năm. **B**. 5 năm. **C**. 3 năm. **D**. 6 năm.

Lời giải.

☑ Sau năm thứ nhất, người đó nhận được số tiền là $T_1 = 100\,(1+4\%) = 104$ (triệu đồng).

☑ Sau năm thứ hai, người đó nhận được số tiền là $T_2 = T_1\,(1+4{,}3\%) = 108{,}472$ (triệu đồng).

☑ Sau năm thứ ba, người đó nhận được số tiền là $T_3 = T_2\,(1+4{,}6\%) \approx 113{,}462$ (triệu đồng).

☑ Sau năm thứ tư, người đó nhận được số tiền là $T_4 = T_3\,(1+4{,}9\%) \approx 119{,}021$ (triệu đồng).

☑ Sau năm thứ năm, người đó nhận được số tiền là $T_5 = T_4\,(1+5{,}2\%) \approx 125{,}21$ (triệu đồng).

Chọn đáp án B □

Câu 53. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Năm đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi suất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác Năm đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x = 13$. **B**. $x = 15$. **C**. $x = 12$. **D**. $x = 14$.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép ta có:

$$129512000 = 10^8\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \sqrt{\frac{129512}{10^5}} - 1 \Leftrightarrow x \approx 13,8.$$

Vậy $x = 14$.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng theo thỏa thuận. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ.

A. 24. **B**. 23. **C**. 22. **D**. 25.

Lời giải.

Số tiền nợ còn lại sau 1 tháng: $N_1 = 200 \cdot (1+6\%) - 9 = 200 \cdot 1,006 - 9$.

Số tiền nợ còn lại sau 2 tháng: $N_2 = N_1 \cdot 1,006 - 9 = 200 \cdot (1,006)^2 - 9 \cdot 1,006 - 9$.

Số tiền nợ còn lại sau n tháng:

$$N_n = 200 \cdot 1,006^n - \left(9 \cdot 1,006^{n-1} + 9 \cdot 1,006^{n-2} + \cdots + 9 \cdot 1,006 + 9\right) = 200 \cdot 1,006^n - 9 \cdot \frac{1,006^n - 1}{1,006 - 1}.$$

Người đó trả hết nợ khi $N_n \le 0$

$$200 \cdot 1,006^n - 9 \cdot \frac{1,006^n - 1}{0,006} \le 0 \Leftrightarrow 200t - 9 \cdot \frac{t-1}{0,006} \le 0 \Leftrightarrow t \ge \frac{15}{13} \Leftrightarrow 1,006^n \ge \frac{15}{13} \Rightarrow n \ge 24.$$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Một Thầy giáo gửi 200 triệu đồng loại kỳ hạn 6 tháng vào một ngân hàng với lãi suất $6,9\%$/năm. Hỏi sau 6 năm 9 tháng, Thầy giáo đó nhận số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng Thầy giáo đó không rút lãi ở tất cả các kỳ hạn trước và nếu rút trước thì ngân hàng sẽ trả lãi suất theo loại lãi suất không kỳ hạn $0,002\%$/ngày (Giả sử một tháng có 30 ngày).

A. 471688328 đồng. **B**. 321556228 đồng. **C**. 311392503 đồng. **D**. 302088933 đồng.

Lời giải.

Sau 6 năm 6 tháng thì thầy giáo đã gửi được $2 \cdot 6 + 1 = 13$ kỳ hạn. Số tiền cả gốc và lãi thu được khi đó là: $S_1 = A(1+r)^{13}$ với $r = \dfrac{6,9}{2}\% = 3,45\%$ và $A = 200$ triệu đồng.

Số tiền cả gốc và lại thu được trong 90 ngày cuối là: $S = S_1\,(1+r')^{90}$ với $r' = 0,002\%$.

Do đó: $S = A(1+r)^{13} \cdot (1+r')^{90} = 200 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \dfrac{3,45}{100}\right)^{13} \cdot \left(1 + \dfrac{0,002}{100}\right)^{90} \approx 311392503$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Ông A vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 1%/ tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 4 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần với số tiền nào nhất sau đây?

A. 6,08 triệu đồng. **B**. 5,20 triệu đồng. **C**. 5,27 triệu đồng. **D**. 5,25 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $A = 200$ triệu, $r = 1\%$. Gọi X triệu đồng là số tiền ông A cần trả mỗi tháng, S_n là số tiền dư nợ của ông A sau n tháng trả nợ. Ta có số tiền nợ của ông A

- ☑ Sau 1 trả nợ $S_1 = A(1+r)^1 - X.1$.
- ☑ Sau 2 tháng trả nợ là $S_2 = S_1(1+r) - X = A(1+r)^2 - X\,[1 + (1+r)]$.

  ...
- ☑ Sau n tháng trả nợ là

$$\begin{aligned} S_n &= A(1+r)^n - X\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^{n-1}\right] \\ &= A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \end{aligned}$$

Ông A trả hết nợ sau đúng 4 năm, tức đúng 48 tháng

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{48} = 0 &\Leftrightarrow A(1+r)^{48} - X\frac{(1+r)^{48} - 1}{r} = 0 \\ &\Leftrightarrow X = \frac{A(1+r)^{48} \cdot r}{(1+r)^{48} - 1} \approx 5,27 \text{ triệu đồng.} \end{aligned}$$

Vậy số tiền ông A cần thanh toán hàng tháng là 5,27 triệu đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 169.871.000 đồng. **B**. 171.761.000 đồng. **C**. 172.807.000 đồng. **D**. 169.675.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử số tiền ban đầu là A_0 (triệu đồng) và lãi suất là $r\%$ mỗi tháng. Khi đó, tháng thứ nhất số tiền là $A_1 = A_0(1+r)$.

Tổng số tiền tháng thứ hai là $A_2 = (A_1+2)(1+r) = A_0(1+r)^2 + 2(1+r)$.

Tổng số tiền tháng thứ ba là $A_3 = (A_2+2)(1+r) = A_0(1+r)^3 + 2(1+r) + 2(1+r)^2$.

Tổng số tiền tháng thứ tư là $A_4 = (A_3+2)(1+r) = A_0(1+r)^4 + 2(1+r) + 2(1+r)^2 + 2(1+r)^3$.

...

Tổng số tiền tháng thứ n là $A_n = A_0(1+r)^n + 2\left((1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{n-1}\right)$.

Suy ra $A_n = A_0(1+r)^n + 2(1+r)\dfrac{(1+r)^{23}-1}{r}$.

Vậy sau hai năm ($n = 24$) số tiền ông An nhận được là

$$A_{24} = 100.000.000(1+0{,}008)^{24} + 2(1+0{,}008)\frac{(1+0{,}008)^{23}-1}{0{,}008} \approx 171.761.000.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Bà Hoa gửi vào ngân hàng 120 triệu đồng theo hình thức lãi suất kép. Lãi suất ngân hàng là 8%/năm và không thay đổi qua các năm bà gửi tiền. Sau 5 năm bà cần tiền để sửa nhà nên bà đã rút toàn bộ số tiền và sử dụng một nửa số tiền đó vào việc sửa nhà, số còn lại bà Hoa tiếp tục gửi ngân hàng với hình thức như trên thêm 5 năm nữa. Hỏi tổng số tiền lãi bà Hoa đã thu được sau hai lần gửi gần với số tiền nào dưới đây?

A. 100,412 triệu đồng. **B**. 97,695 triệu đồng. **C**. 139,071 triệu đồng. **D**. 217,695 triệu đồng.

Lời giải.

Sau 5 năm tổng số tiền là $S_1 = 120 \cdot (1+8\%)^5$ triệu đồng.

Sau đó gửi số tiền là $\dfrac{S_1}{2}$ với lãi suất 8%/ năm.

Do đó sau 5 năm nữa số tiền là $S_2 = \dfrac{S_1}{2}(1+8\%)^5$ triệu đồng.

Vậy tổng số tiền lãi bà Hoa đã thu được sau hai lần gửi là

$$S_1 + S_2 - 120 - \frac{S_1}{2} \approx 97{,}695 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Một người mỗi đầu tháng đều gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 535000. **B**. 635000. **C**. 643000. **D**. 613000.

Lời giải.

Áp dụng công thức lãi kép gửi đầu tháng $T = \dfrac{T_n \cdot r}{(r+1)[(r+1)^n - 1]}$.
Trong đó T là tiền vốn gửi vào ngân hàng hàng tháng.
T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng.
n là số tháng.
r là lãi suất hàng tháng.
Ta thay $n = 15$ tháng, $T_n = 10000000$ đồng, $r = 0,6\%$ thay vào công thức ta được

$$T = \frac{10000000 \cdot 0,6\%}{(0,6\% + 1)[(1 + 0,6\%)^{15} - 1]} = 635301,4591.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Ông A vay của ngân hàng 100 triệu đồng; lãi suất mỗi tháng là 1% và hàng tháng ông A đều trả góp ngân hàng 5 triệu đồng (mỗi tháng số tiền lãi sẽ được cộng thêm vào khoản nợ, rồi trừ đi 5 triệu đồng trả góp, lãi tháng sau là 1% của khoản tiền này). Hỏi sau một năm (đã trả góp 12 lần) ông A còn nợ ngân hàng bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 47.210.000 đồng. **B**. 45.636.000 đồng. **C**. 49.270.000 đồng. **D**. 51.848.000 đồng.

Lời giải.

Đặt $M = 100$ triệu, $r = 1\%$, $X = 5$ triệu là số tiền ông A trả mỗi tháng, S_n là số tiền còn nợ của ông A sau n tháng trả góp. Ta có số tiền nợ của ông A

- ☑ Sau 1 tháng trả nợ thì $S_1 = M(1+r)^1 - X.1$.
- ☑ Sau 2 tháng trả nợ thì $S_2 = S_1(1+r) - X = M(1+r)^2 - X[1 + (1+r)]$.

  ...
- ☑ Sau n tháng trả nợ thì

$$\begin{aligned} S_n &= M(1+r)^n - X\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^{n-1}\right] \\ &= M(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \end{aligned}$$

Vậy số tiền ông A còn nợ sau 12 lần trả góp là $S_{12} \approx 49.270.000$ đồng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng. Phương án trả nợ của anh Nam là: sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay anh bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên, sau khi dự án có hiệu quả và đã trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ anh Nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

A. 32 tháng. **B**. 31 tháng. **C**. 29 tháng. **D**. 30 tháng.

Lời giải.

Gọi a là số tiền anh Nam trả hàng tháng. Đặt $r = 0,6\%$.
Giả thiết suy ra sau 5 năm, số tiền còn nợ trong ngân hàng là

$$200(1+r)^{60} - \frac{a}{r}\left[(1+r)^{60} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow a = 3,979 \text{ triệu đồng}.$$

Số tiền anh Nam còn nợ sau 12 tháng

$$M = 200(1+r)^{12} - \frac{a}{r}\left[(1+r)^{12} - 1\right] = 165{,}53 \text{ triệu đồng.}$$

Với số tiền góp 9 triệu đồng 1 tháng, giả sử anh Nam mất n tháng để trả hết nợ, ta có:

$$M(1+r)^n - \frac{9}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0 \Leftrightarrow n = 19{,}5.$$

Vậy sau $12 + 20 = 32$ tháng, anh Nam trả hết nợ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền vào ngân hàng trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền để mua một căn hộ chung cư trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua căn hộ chung cư là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng triệu)?

A. 394 triệu đồng. **B**. 396 triệu đồng. **C**. 397 triệu đồng. **D**. 395 triệu đồng.

Lời giải.

Giả sử A là số tiền người đó gửi vào ngân hàng. Khi đó, số tiền của người đó

- ☑ Sau 1 năm gửi là $S_1 = A(1 + 0{,}08)$.
- ☑ Sau 2 năm gửi là $S_2 = S_1(1 + 0{,}08) = A(1 + 0{,}08)^2$.
- ☑ Sau 3 năm gửi là $S_3 = S_2(1 + 0{,}08) = A(1 + 0{,}08)^3$.

Để đủ tiền mua chung cư theo kế hoạch, ta phải có $S_3 \geq 500 \Leftrightarrow A \cdot 1{,}08^3 \geq 500 \Leftrightarrow A \geq \dfrac{500}{1{,}08^3} \approx 397$ triệu đồng.

Vậy người đó cần gửi vào ngân hàng số tiền ít nhất là 397 triệu đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 70656000. **B**. 65393000. **C**. 79760000. **D**. 74813000.

Lời giải.

① Ta tính số tiền sau lãi 2 năm kể từ khi gửi 200 triệu đồng gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73%.

$$L_1 = 200 \times 1{,}0073^{24} - 200 \approx 38{,}1453 \text{ triệu đồng.}$$

② Ta tính số tiền lãi sau 2 năm kể từ khi gửi 200 triệu đồng gửi theo kì hạn quý với lãi suất 2,1%, sau đúng 1 năm chị Lan rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng.

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(200 \times 1{,}021^4 - 200\right) + \\ &+ \left[\left(\frac{200 \times 1{,}021^4}{2}\right) \times 1{,}021^4 + \left(\frac{200 \times 1{,}021^4}{2}\right) \times 1{,}0073^{12} - 200 \times 1{,}021^4\right] \\ &= 100 \times 1{,}021^8 + 100 \times 1{,}021^4 \times 1{,}0073^{12} - 200 \\ &= 36{,}6674 \text{ triệu đồng.} \end{aligned}$$

Số tiền lãi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được

$$L = L_1 + l_2 \approx 38{,}1453 + 36{,}6674 = 74{,}8127 \text{ triệu đồng} \approx 74813000 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 64. Bạn H trúng tuyển vào Trường Đại học Ngoại Thương nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên H quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất ưu đãi 3%/năm. Ngay sau khi tốt nghiệp Đại học bạn H thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi) với lãi suất theo cách tính mới là 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Tính số tiền hàng tháng mà bạn H phải trả cho ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 323 582 đồng. **B**. 398 402 đồng. **C**. 309 718 đồng. **D**. 312 518 đồng.

Lời giải.

Tiền vay từ năm thứ nhất đến lúc ra trường, bạn H nợ ngân hàng $4000000(1+3\%)^4$.
Tiền vay từ năm thứ hai đến lúc ra trường, bạn H nợ ngân hàng $4000000(1+3\%)^3$.
Tiền vay từ năm thứ ba đến lúc ra trường, bạn H nợ ngân hàng $4000000(1+3\%)^2$.
Tiền vay từ năm thứ tư đến lúc ra trường, bạn H nợ ngân hàng $4000000(1+3\%)^1$.
Vậy, sau 4 năm số tiền bạn H nợ ngân hàng là

$$N = 4000000\left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)^1\right] \approx 17236543.$$

Lúc này ta xem như bạn H nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là $N = 17236543$ đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi $r = 0{,}25\%$/tháng và được trả góp m đồng trong 5 năm.
Số tiền còn nợ cuối tháng thứ nhất là $N(1+r) - m$.
Số tiền còn nợ cuối tháng thứ hai là $[N(1+r) - m](1+r) - m = N(1+r)^2 - m[(1+r)+1]$.
Số tiền còn nợ cuối tháng thứ ba là $N(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$.
. . . . . .
Số tiền còn nợ cuối tháng thứ 60 là $N(1+r)^{60} - m[(1+r)^{59} + (1+r)^{58} + \cdots + (1+r) + 1]$.
Vì phải trả hết nợ sau 5 năm nên

$$N(1+r)^{60} - m[(1+r)^{59} + (1+r)^{58} + \cdots + (1+r) + 1] = 0 \Leftrightarrow m = \frac{N(1+r)^{60}\cdot r}{(1+r)^{60} - 1} \approx 309\,718 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Ông Tuấn đầu tư 500 triệu đồng để mua xe ô tô chở khách. Sau khi mua, thu nhập trung bình mỗi tháng được 10 triệu đồng (sau khi trừ đi các khoản chi phí khác). Tuy nhiên, mỗi năm giá trị xe lại giảm 10% so với năm trước đó. Tổng số tiền lãi sau 4 năm kinh doanh của ông Tuấn bằng bao nhiêu?

A. 480 triệu đồng. **B**. 308,05 triệu đồng.
C. 328,05 triệu đồng. **D**. Lỗ 171,5 triệu đồng.

Lời giải.

Giá trị xe ô tô sau 4 năm là $500\,(1-10\%)^4 = 328{,}05$ (triệu đồng).
Số tiền thu được trong 4 năm kinh doanh là $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ (triệu đồng).
Tổng số tiền lãi sau 4 năm kinh doanh là $480 - (500 - 328{,}05) = 308{,}05$ (triệu đồng).
Chọn đáp án B □

Câu 66. Sau tết Nguyên đán Kỉ Hợi, bé Nam được tổng tiền lì xì là 15 triệu đồng. Bố Nam gửi toàn bộ số tiền trên vào ngân hàng với lãi suất ban đầu là 5%/năm, tiền lãi hàng năm được nhập vào gốc và sau một năm thì lãi suất tăng 0,2% so với năm trước đó. Hỏi sau 5 năm tổng tiền của bé Nam trong ngân hàng là bao nhiêu?

A. 19,5 triệu đồng. **B**. 19,6 triệu đồng. **C**. 13,5 triệu đồng. **D**. 14,5 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền bé Nam trong ngân hàng sau năm thứ nhất là

$$T_1 = 15 \cdot (1 + 0{,}05) = 15 \cdot (1{,}05).$$

Số tiền bé Nam trong ngân hàng sau năm thứ hai là

$$T_2 = T_1 \cdot (1{,}05 + 0{,}002) = 15 \cdot (1{,}05) \cdot (1{,}052).$$

Số tiền bé Nam trong ngân hàng sau năm thứ ba là

$$T_3 = T_2 \cdot (1{,}052 + 0{,}002) = 15 \cdot (1{,}05) \cdot (1{,}052) \cdot (1{,}054).$$

Số tiền bé Nam trong ngân hàng sau năm thứ tư là

$$T_4 = T_3 \cdot (1{,}054 + 0{,}002) = 15 \cdot (1{,}05) \cdot (1{,}052) \cdot (1{,}054) \cdot (1{,}056).$$

Số tiền bé Nam trong ngân hàng sau 5 năm là

$$\begin{aligned} T_5 &= T_4 \cdot (1{,}056 + 0{,}002) = 15 \cdot (1{,}05) \cdot (1{,}052) \cdot (1{,}054) \cdot (1{,}056) \cdot (1{,}058) \\ &= 19{,}5 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,25%/tháng . Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền lãi gần nhất với số nào dưới đây, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 1.590.406 đồng. **B**. 1.509.406 đồng. **C**. 101.590.406 đồng. **D**. 101.509.406 đồng.

Lời giải.

Tổng số tiền gồm cả lãi và tiền gốc người này nhận được sau đúng 6 tháng là

$$100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right)^6 = 101,509406.$$

Do đó số tiền lãi là $101{,}509406 - 100 = 1{,}509406$ triệu $= 1.590.406$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Để biết dung dịch có tính axít, tính bazơ hay trung tính, người ta dùng độ pH để xác định, biết $pH = -\log[H_3O^+]$. Trong đó, pH là chữ đầu của nhóm từ "potential of hydrogen" nghĩa là tiềm lực của hiđrô. Nếu $pH < 7$: dung dịch có tính axít; $pH > 7$: dung dịch có tính bazơ; $pH = 7$: dung dịch trung tính. Hỏi nếu bia có nồng độ ion hiđrô $[H_3O^+] = 0,00008$ thì bia có tính gì?

A. Tính bazơ. **B**. Tính axít. **C**. Trung tính. **D**. Không xác định.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có độ pH của bia là $pH = -\log 0,00008 \approx 4,1 < 7$.

Do đó bia có tính axít.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, nó chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}}(\%)$. Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thu được lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 50%. Hỏi niên đại của công trình kiến trúc là bao nhiêu năm? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 5751 năm. **B**. 5753 năm. **C**. 5750 năm. **D**. 5752 năm.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 50 \Leftrightarrow t = 5750$.

Vậy niên đại công trình kiến trúc là 5750 năm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Gia đình bạn An gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi suất kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm và không thay đổi qua các năm gia đình gửi tiền. Sau 5 năm gia đình bạn An cần tiền để cho bạn đi học, nên gia đình đã rút toàn bộ số tiền và sử dụng một nửa số tiền đó vào việc học của An, số còn lại gia đình tiếp tục gửi ngân hàng với hình thức như trên. Hỏi sau 10 năm gia đình bạn An đã thu được số tiền lãi là bao nhiêu? (đơn vị tính là triệu đồng).

A. $\approx 81,412$. **B**. $\approx 80,412$. **C**. $\approx 100,412$. **D**. $\approx 79,412$.

Lời giải.

☑ Số tiền lãi mà gia đình An nhận được trong phần tiền sau 5 năm rút ra: $\dfrac{100 \cdot 1,08^5}{2} - 50$ triệu.

☑ Số tiền lãi mà gia đình An nhận được trong phần tiền sau 10 năm rút ra: $\dfrac{100 \cdot 1,08^{10}}{2} - 50$ triệu.

Tổng số tiền lãi gia đình An nhận được

$$\frac{100 \cdot 1,08^{10}}{2} + \frac{100 \cdot 1,08^5}{2} - 100 \approx 81,412.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Anh Hùng gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất 8%/năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì anh Hùng thu được bao nhiêu tiền lãi? (giả sử rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi, làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

A. 46,933 triệu đồng. **B**. 146,933 triệu đồng. **C**. 46,932 triệu đồng. **D**. 146,932 triệu đồng.

Lời giải.

Sau 5 năm thì anh Hùng thu được số tiền lãi là $100(1 + 8\%)^5 - 100 \approx 46,933$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Để cấp tiền cho con trai tên Lâm học đại học, ông Anh gửi vào ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất cố định $0,7\%$/tháng, số tiền lãi hàng tháng được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp

theo(thể thức lãi kép). Cuối mỗi tháng, sau khi chốt lãi, ngân hàng sẽ chuyển vào tài khoản của Lâm một khoản tiền giống nhau. Tính số tiền m mỗi tháng Lâm nhận được từ ngân hàng, biết rằng sau bốn năm (48 tháng), Lâm nhận hết số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông Anh gửi vào ngân hàng (kết quả làm tròn đến đồng).

A. $m = 4.920.223$ (đồng). **B**. $m = 5.008.376$ (đồng).

C. $m = 5.008.377$ (đồng). **D**. $m = 4.920.224$ (đồng).

Lời giải.

Số tiền cả lãi và gốc sau 48 tháng là $F_{48} = 200\left(1 + \dfrac{0.7}{100}\right)^{48}$ (triệu).

Số tiền cả gốc và lãi Lâm rút tính đến 48 tháng sau là

$$F = m(1+r)^{47} + m(1+r)^{46} + \cdots + m(1+r) + m = m\left[\frac{\left(1+\dfrac{0.7}{100}\right)^{48} - 1}{\dfrac{0.7}{100}}\right].$$

Suy ra $F_{48} = F \Leftrightarrow m = 4.920.224$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thực lãi kép với lãi suất 5% một năm. Hỏi nếu sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

A. $100\left[(0{,}05)^5 - 1\right]$ triệu đồng. **B**. $100\left[(1{,}05)^5 + 1\right]$ triệu đồng.

C. $100(0{,}05)^5$ triệu đồng. **D**. $100\left[(1{,}05)^5 - 1\right]$ triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền người đó có được sau 5 năm (bao gồm vốn và tiền lãi, theo công thức lãi kép) là

$$100 \cdot (1 + 5\%)^5 = 100 \cdot (1{,}05)^5 \text{ triệu đồng.}$$

Do đó sau 5 năm người đó thu được số tiền lãi là

$$100 \cdot (1{,}05)^5 - 100 = 100\left[(1{,}05)^5 - 1\right] \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án D □

Câu 74. Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền gần bằng với kết quả nào sau đây. Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 210 triệu đồng. **B**. 220 triệu đồng. **C**. 212 triệu đồng. **D**. 216 triệu đồng.

Lời giải.

Sau 6 tháng đầu (2 quý), người đó có $100 \cdot (1 + 0{,}02)^2 = 104{,}04$ triệu đồng.

Vậy sau 1 năm, người đó có $(104 \cdot 04 + 100) \cdot (1 + 0{,}02)^2 \approx 212{,}283$ triệu đồng.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. D	5. C	6. A	7. A	8. C	9. C	10. C
11. C	12. A	13. A	14. A	15. A	16. A	17. C	18. D	19. A	20. A
21. B	22. B	23. C	24. C	25. B	26. C	27. D	28. B	29. B	30. A
31. A	32. C	33. B	34. B	35. D	36. A	37. C	38. B	39. A	40. D
41. B	42. A	43. A	44. B	45. C	46. C	47. C	48. B	49. A	50. C
51. B	52. B	53. D	54. A	55. C	56. C	57. B	58. B	59. B	60. C
61. A	62. C	63. D	64. C	65. B	66. A	67. B	68. B	69. C	70. A
71. A	72. D	73. D	74. C						

BÀI 5 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1 Phương trình mũ cơ bản

Định nghĩa 1. Phương trình mũ cơ bản có dạng

$$a^x = b\,(a > 0, a \neq 1).$$

⚠ *Để giải phương trình trên, chúng ta sử dụng định nghĩa lôgarit.*

① *Với* $b > 0$, *ta có* $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

② *Với* $b \leq 0$, *phương trình vô nghiệm.*

2 Phương trình lô-ga-rít cơ bản

Định nghĩa 2. Phương trình lô-ga-rít cơ bản có dạng

$$\log_a x = b\,(a > 0, a \neq 1).$$

⚠ *Phương trình trên luôn có nghiệm duy nhất* $x = a^b$.

B CÁC DẠNG TOÁN

1 Phương trình mũ

DẠNG 1. Đưa về phương trình mũ cơ bản

Phương pháp giải. Phương trình $\boxed{a^x = b}$ với $0 < a \neq 1$.

Nếu $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1. Giải phương trình sau:

a) $3^x = 5$. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$. c) $5^x = -25$. d) $\pi^x = 0$.

Lời giải.

a. $3^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_3 5$.

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x = -3$.

c. Phương trình $5^x = -25$ vô nghiệm.

d. Phương trình $\pi^x = 0$ vô nghiệm.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình sau:

a) $2^{\sqrt{x+1}}=4$. b) $4^{x^2-2}=16$. c) $5^{x+1}=25$. d) $\sqrt{7}^{\frac{2}{x-3}}=49$.

Lời giải.

a) $2^{\sqrt{x+1}}=4\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\log_2 4\Leftrightarrow x+1=4\Leftrightarrow x=3$.

b) $4^{x^2-2}=16\Leftrightarrow x^2-2=\log_4 16\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

c) $5^{x+1}=25\Leftrightarrow x+1=\log_5 25\Leftrightarrow x=1$.

d) $\sqrt{7}^{\frac{2}{x-3}}=49\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-3}=\log_{\sqrt{7}}49\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-3}=4\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$.

□

Ví dụ 3. Giải phương trình sau:

a) $2^x+2^{x+1}=4$. b) $8^{|2x-1|}=64$. c) $5^{x-\sqrt{x^2+4}}=25$. d) $3^{x+2}\cdot 3^{2-2x}=\dfrac{1}{27}$.

Lời giải.

a) $2^x+2^{x+1}=4\Leftrightarrow 2^x\cdot(1+2^1)=4\Leftrightarrow 2^x=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow x=\log_2\dfrac{4}{3}$.

b) $8^{|2x-1|}=64\Leftrightarrow|2x-1|=\log_8 64\Leftrightarrow|2x-1|=2\Leftrightarrow 2x-1=\pm 2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$

c) $5^{x-\sqrt{x^2+4}}=25\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+4}=\log_5 25\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+4}=2$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+4}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geq 0\\ x^2+4=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x=0\end{cases}\quad\text{(Hệ vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) $3^{x+2}\cdot 3^{2-2x}=\dfrac{1}{27}\Leftrightarrow 3^{(x+2)+(2-2x)}=\dfrac{1}{27}\Leftrightarrow 4-x=\log_3\dfrac{1}{27}\Leftrightarrow 4-x=-3\Leftrightarrow x=7$.

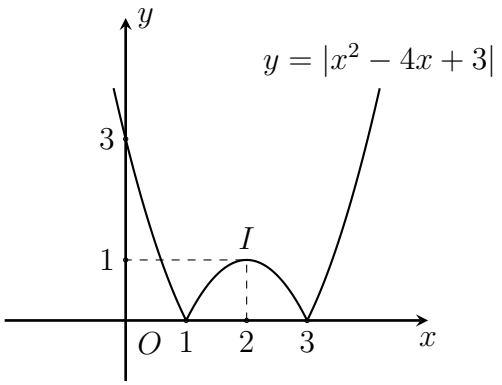
□

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$$\left|x^2-4x+3\right| = \log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right).$$



Xét đồ thị hàm số $y=|x^2-4x+3|$ như hình vẽ. Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$0<\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)<1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^4-m^2<0 \\ m^4-m^2+\dfrac{4}{5}>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -1<m<1 \end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2^{\sqrt{x^2+2}}=8$.

b) $4^{\frac{x-1}{2x+1}}=64$.

c) $6^{x+2}=7$.

Lời giải.

a) $2^{\sqrt{x^2+2}}=8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}=\log_2 8 \Leftrightarrow x^2+2=3^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$.

b) $4^{\frac{x-1}{2x+1}}=64 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x+1}=\log_4 64 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x+1}=3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}$.

c) $6^{x+2}=7 \Leftrightarrow x+2=\log_6 7 \Leftrightarrow x=\log_6 7-2$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+7}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2x}=2$.

b) $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$.

Lời giải.

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+7}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2x}=2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{8-x}=2 \Leftrightarrow 8-x=\log_{\frac{1}{2}} 2 \Leftrightarrow x=9$.

b) $9^{|3x-1|}=3^{8x-2} \Leftrightarrow |3x-1|=\log_9 3^{8x-2} \Leftrightarrow |3x-1|=(8-2x)\log_9 3$

$$\Leftrightarrow |3x-1|=4-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

□

DẠNG 2. Đưa về cùng cơ số

Phương pháp giải. Với $a>0, a\neq 1$: $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Ví dụ 1. Giải phương trình sau:

a) $2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}$.

b) $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

Lời giải.

a) $2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}\Leftrightarrow 2^{x^2-x+8}=2^{2(1-3x)}\Leftrightarrow x^2-x+8=2-6x\Leftrightarrow x^2+5x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$.

b) $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}\Leftrightarrow 2^{-3}\cdot 2^{2(2x-3)}=\left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x}\Leftrightarrow 2^{4x-9}=2^{\frac{5}{2}x}\Leftrightarrow 4x-9=\dfrac{5}{2}x\Leftrightarrow x=6$.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình sau: $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x}\cdot\sqrt[3x]{0,125}}=4\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{N}^*$.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$$\sqrt{2^x\cdot 2^{\frac{2x}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{2x}}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}}=2^{\frac{7}{3}}\Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}=\frac{7}{3}\Leftrightarrow x=3;x=-\frac{1}{5}.$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $(3-2\sqrt{2})^{2x}=3+2\sqrt{2}$.

b) $16^{\frac{x+10}{x-10}}=0{,}125\cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho viết lại $(3-2\sqrt{2})^{2x}=(3-2\sqrt{2})^{-1}\Leftrightarrow 2x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

b) Điều kiện xác định: $x\neq 10;x\neq 15$. Phương trình đã cho viết lại

$$2^{\frac{4x+40}{x-10}}=2^{-3}\cdot 2^{\frac{3x+15}{x-15}}\Leftrightarrow \frac{4x+40}{x-10}=\frac{60}{x-15}\Leftrightarrow 4x^2-80x=0\Leftrightarrow x=0;x=20$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm $x=0;x=20$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3^{\sqrt{x-2}}=9^{x-5}$.

b) $2^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\sqrt{x^2+4}-x-2\right)=4\sqrt{x^2+4}-4x-8$.

c) $6^x-4\cdot 3^x-2^x+4=0$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$. Phương trình đã cho viết lại như sau

$$3^{\sqrt{x-2}}=3^{2(x-5)}\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=2x-10\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 5\\x-2=(2x-10)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 5\\4x^2-39x+102\end{cases}.$$

Giải hệ phương trình trên ta được nghiệm là $x = 6$.

b) Điều kiện xác định $x \neq 0$. Phương trình đã cho viết lại như sau

$$2^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\sqrt{x^2+4} - x - 2\right) = 4\left(\sqrt{x^2+4} - x - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{x}} - 4\right)\left(\sqrt{x^2+4} - x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{x}} = 4 \\ \sqrt{x^2+4} = x+2 \end{array}\right.$$

Giải phương trình $2^{\frac{1}{x}} = 4$ có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.

Phương trình $\sqrt{x^2+4} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+4 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

Đối chiếu với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$.

□

DẠNG 3. Lôgarit hóa

Phương pháp giải. Với $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.

Đặc biệt $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

Ví dụ 1. Giải phương trình sau:

a) $2^{x+1} = 8$.

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-2x} = 27$.

Lời giải.

a) $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow x+1 = \log_2 8 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-2x} = 27 \Leftrightarrow 3-2x = \log_{\frac{1}{3}} 27 \Leftrightarrow 3-2x = -3 \Leftrightarrow x = 3$.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình sau:

a) $2^x \cdot 5^x = 0{,}2 \cdot (10^{x-1})^5$.

b) $3^{4^x} = 4^{3^x}$.

Lời giải.

a) $2^x \cdot 5^x = 0{,}2 \cdot (10^{x-1})^5 \Leftrightarrow (2 \cdot 5)^x = 0{,}2 \cdot 10^{5x-5} \Leftrightarrow x = \log 0{,}2 + 5x - 5$

$\Leftrightarrow 4x = 6 - \log 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4} \cdot \log 2$.

b) $3^{4^x} = 4^{3^x} \Leftrightarrow 4^x = 3^x \cdot \log_3 4 \Leftrightarrow x = \log_4(3^x \cdot \log_3 4)$

$\Leftrightarrow x = x \cdot \log_4 3 + \log_4(\log_3 4) \Leftrightarrow x = \dfrac{\log_4(\log_3 4)}{1 - \log_4 3}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình: $5^{2x^4-5x^2+3}-7^{x^2-\frac{3}{2}}=0$

Lời giải.

Phương trình viết lại như sau $5^{2x^4-5x^2+3}=7^{x^2-\frac{3}{2}}$.

Lấy lôgarit cơ số 7 hai vế, ta được

$$(2x^4-5x^2+3)\log_7 5=(x^2-\frac{3}{2})\Leftrightarrow 2\left(x^2-1\right)\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\log_7 5-\left(x^2-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{3}{2}\right)\left[2\left(x^2-1\right)\log_7 5-1\right]=0$$

Phương trình $x^2-\dfrac{3}{2}=0$ có nghiệm là $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Phương trình $2\left(x^2-1\right)\log_7 5-1=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{\log_5 7}{2}+1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{\log_5 175}{2}}$.

Tập nghiệm của phương trình là $\left\{\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2};\pm\sqrt{\dfrac{\log_5 175}{2}}\right\}$. □

Bài 2. Giải phương trình $3^{x^2-2}\cdot 4^{\frac{2x-4}{x}}=9$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x\neq 0$.

Phương trình viết lại như sau: $\dfrac{3^{x^2-2}}{9}=\dfrac{1}{4^{\frac{2x-4}{x}}}\Leftrightarrow 3^{x^2-4}=2^{\frac{-4x+8}{x}}$.

Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế, ta được: $x^2-4=\dfrac{-4x+8}{x}\cdot\log_3 2\Leftrightarrow(x-2)\left(x+2+\dfrac{4}{x}\log_3 2\right)=0$.

Phương trình $x-2=0$ có nghiệm $x=2$.

Phương trình $\left(x+2+\dfrac{4}{x}\log_3 2\right)=0\Leftrightarrow x^2+2x+4\cdot\log_3 2=0$. Phương trình này vô nghiệm.

Đối chiếu với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$. □

Bài 3. Giải phương trình $3^{\sqrt{x^2-2x}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2-2x\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 2\\x\leq 0\end{array}\right.$.

Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế của phương trình, ta được:

$$\log_3 3^{\sqrt{x^2-2x}}=\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}=|x-1|-x$$

Trường hợp 1: $x\geq 2$. Ta có $\sqrt{x^2-2x}=-1$. Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x\leq 0$. Ta có $\sqrt{x^2-2x}=1-2x\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x\geq 0\\x^2-2x=(1-2x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{2}\\3x^2-2x+1=0.\end{cases}$

Hệ vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Giải phương trình $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại

$$2^{2x^2+2x}+2^{1-x^2}=2^{(2x^2+2x)+(1-x^2)}+1$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}+2^{1-x^2}=2^{2x^2+2x}\cdot 2^{1-x^2}+1\Leftrightarrow (2^{2x^2+2x}-1)(2^{1-x^2}-1)=0.$$

Phương trình $2^{2x^2+2x}-1=0\Leftrightarrow 2x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0;x=-1.$

Phương trình $2^{1-x^2}-1=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$

Phương trình đã cho có nghiệm là $x=0;x=\pm 1.$ □

Bài 2. Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$

Lời giải.

Điều kiện xác định $x\geq -2.$

Phương trình đã cho viết lại

$$16^x\cdot 4^{\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=16\cdot 4^{\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}\Leftrightarrow 16\cdot 4^{\sqrt{x+2}}(16^{x-1}-1)=2^{x^3}(16^{x-1}-1)$$

$$\Leftrightarrow (16^{x-1}-1)(16\cdot 4^{\sqrt{x+2}}-2^{x^3})=0.$$

Phương trình $16^{x-1}-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Phương trình $16\cdot 4^{\sqrt{x+2}}-2^{x^3}=0\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+2}}=2^{x^3}\Leftrightarrow x^3=2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow x^3-8=2(\sqrt{x+2}-2)\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)=\frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}.$$

Trường hợp 1: $x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

Trường hợp 2: $x^2+2x+4=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2}$. Phương trình này vô nghiệm vì vế trái $x^2+2x+4\geq 3,\forall x.$

Vế phải $\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2}\leq 1,\forall x\geq -2.$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm $x=1;x=2.$ □

Bài 3. Giải phương trình $x^4-8\cdot \mathrm{e}^{x-1}=x(x^2\mathrm{e}^{x-1}-8).$

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại

$$x^3\cdot \mathrm{e}^{x-1}-x^4-8x+8\cdot \mathrm{e}^{x-1}=0\Leftrightarrow x^2(\mathrm{e}^{x-1}-x)+8(\mathrm{e}^{x-1}-x)=0\Leftrightarrow (\mathrm{e}^{x-1}-x)(x^3+8)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^{x-1}=x\\ x^3+8=0\end{array}\right.$$

Phương trình $x^3+8=0\Leftrightarrow x=-2.$

Phương trình $\mathrm{e}^{x-1}=x$. Xét hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$ với $x\in\mathbb{R}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $\mathrm{e}^{x-1}-x=0$ có duy nhất một nghiệm $x=1$.
Do đó, phương trình đã cho có nghiệm $x=1; x=-2$. □

Bài 4. Giải phương trình $2^{\log^2_{\sqrt{2}} x}+x^{2\lg_2 x}-20=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Ta có

$$2^{\log^2_{\sqrt{2}} x}=2^{2\cdot\log_{\sqrt{2}} x}=x^{2\cdot\log_{\sqrt{2}} x}$$

Phương trình đã cho viết lại $x^{2\log_{\sqrt{2}} x}+x^{2\log_2 x}-20=0\Leftrightarrow x^{4\log_2 x}+x^{2\log_2 x}-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^{2\log_2 x}=-5\\ \lg^2 x-2\lg x-3=0\end{array}\right.$

□

DẠNG 4. Đặt một ẩn phụ

Phương pháp giải.

☑ $P\left(a^{f(x)}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=a^{f(x)}, t>0\\ P(t)=0\end{cases}$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $9^x-5.3^x+6=0(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$(*)\Leftrightarrow(3^2)^x-5.3^x+6=0\Leftrightarrow(3^x)^2-5.3^x+6=0(**)$

☑ Đặt $t=3^x>0$. Khi đó: $(**)\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2(N)\\ t=3(N)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3^x=2\\ t=3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 2\\ x=1\end{array}\right.$

☑ Vậy nghiệm của phương trình là $x=1\vee x=\log_3 2$.

□

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\dfrac{7^{2x}}{100^x}=6\cdot(0,7)^x+7(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ $(*)\Leftrightarrow\left(\dfrac{7}{10}\right)^{2x}-6\cdot\left(\dfrac{7}{10}\right)^x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{7}{10}\right)^x=7\\ \left(\dfrac{7}{10}\right)^x=-1(\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\dfrac{7}{10}\right)^x=7\Leftrightarrow x=\log_{0,7}7.$

☑ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\log_{0,7}7$.

□

Ví dụ 5. Giải phương trình $2^{1+2x}+15.2^x-8=0\ (*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

☑ $(*)$

$\Leftrightarrow 2.2^{2x} + 15.2^x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2.(2^x)^2 + 15.2^x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 2t^2 + 15t - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = -8 (\text{loại}) \end{array}\right. \end{cases}$$

$2^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$

☑ Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$.

□

Ví dụ 6. Giải phương trình $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 4.2^{2x} - 18.2^x + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 4t^2 - 18t + 8 = 0 \end{cases}$$

☑ $$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

☑ Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

□

Ví dụ 7. Giải phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 6$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2x} + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x - 6 = 0$

☑ $$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x > 0 \\ t^2 + t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2 \\ \\ t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = -3 (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \log_{(2+\sqrt{3})} 2$.

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x = \log_{(2+\sqrt{3})} 2$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Giải phương trình $3^{2x+5}-36.3^{x+1}+9=0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$(*)\Leftrightarrow 27.3^{2(x+1)}-36.3^{x+1}+9=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3^{x+1}>0 \\ 27t^2-36t+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3^{x+1}>0 \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x+1}=1 \\ 3^{x+1}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1$ và $x=-2$.

□

Bài 6. Giải phương trình $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$(*)\Leftrightarrow 3^{2(x^2+x-1)}-\dfrac{10}{3}.3^{(x^2+x-1)}+1=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3^{x^2+x-1}>0 \\ 3t^2-10t+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=1 \\ x^2+x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, x=-2 \\ x=0, x=-1 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có bốn nghiệm $x=-2, x=-1, x=0, x=1$.

□

Bài 7. Giải phương trình $4^{\sqrt{x-2}}+16=10.2^{\sqrt{x-2}}$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện $x\geq 2$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{\sqrt{x-2}} > 0 \\ t^2 - 10t + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{\sqrt{x-2}} > 0 \\ t = 8, t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{x-2}} = 8 \\ \\ 2^{\sqrt{x-2}} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 3 \\ \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ \\ x = 3 \end{array}\right.$$

☑ So với điều kiện phương trình có nghiệm $x = 3$ và $x = 11$.

□

Bài 8. Giải phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} = 12$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện: $x \neq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2.\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 0 \\ t^2 + t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ \\ t = -4 (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow x = -1.$$

☑ So với điều kiện phương trình có nghiệm $x = -1$.

□

Bài 9. Giải phương trình $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện $x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{5} \\ \\ x \geq \sqrt{5} \end{array}\right.$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(2^{x-\sqrt{x^2-5}}\right)^2 - 6.2^{x-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{x-\sqrt{x^2-5}} > 0 \\ t^2 - 6t + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 2 \\ \\ 2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{x^2-5} = 1 \\ \\ x - \sqrt{x^2-5} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-5} = x - 1 \\ \\ \sqrt{x^2-5} = x - 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 5 = (x-1)^2 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 5 = (x-2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \dfrac{9}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \\ x = \dfrac{9}{4} \end{array}\right.$$

☑ Kết hợp với điều kiện, phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{9}{4}$ và $x = 3$.

□

DẠNG 5. Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp

Phương pháp giải. $\alpha.a^{2.f(x)} + \beta.(a.b)^{f(x)} + \gamma.b^{2.f(x)} = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế phương trình cho $b^{2.f(x)}$ rồi đặt $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$

Trong thực hành ta thường chia cho cơ số nhỏ nhất hoặc cơ số lớn nhất.

Ví dụ 8. Giải phương trình $8^x + 18^x = 2.27^x$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 0 \\ 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 0$.

□

Ví dụ 9. Giải phương trình $25^x + 15^x = 2.9^x$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{3}\right)^{x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{5}{3}\right)^{x} > 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \\ t = \left(\frac{5}{3}\right)^{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 0$.

□

Ví dụ 10. Giải phương trình $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 3 + 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x} > 0 \\ 2t^3 + t^2 - 4t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ \\ t = -1 (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

□

Ví dụ 11. Giải phương trình $4^{2x^2} - 2.4^{x^2+x} + 4^{2x} = 0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 4^{2x^2-2x} - 2.4^{x^2-x} + 1 = 0$(Chia hai vế cho $4^{2x} > 0$)

$$\begin{cases} t = 4^{x^2-x} > 0 \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 4^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^x - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \\ x = 1 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 10. Giải phương trình $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$(*)\Leftrightarrow 9^x+6^x-2.4^x=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0\Leftrightarrow \begin{cases} t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}>0 \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2(\text{loại}) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1\Leftrightarrow x=0.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x=0$.

□

Bài 11. Giải phương trình $4^{\sqrt[3]{x+5}+1}+2.2^{\sqrt[3]{x+5}+x}=2.4^x$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$$(*)\Leftrightarrow \frac{4^{\sqrt[3]{x+5}+1}}{4^x}+\frac{2.2^{\sqrt[3]{x+5}+x}}{2^{2x}}-2=0$$
$$\Leftrightarrow 4.4^{\sqrt[3]{x+5}-x}+2.2^{\sqrt[3]{x+5}-x}-2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{\sqrt[3]{x+5}-x} \\ 4t^2+2t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt[3]{x+5}-x}=\frac{1}{2} \\ 2^{\sqrt[3]{x+5}-x}=-1(\text{loại}) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5}=x-1$$
$$\Leftrightarrow x+5=x^3-3x^2+3x-1$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x-6=0\Leftrightarrow x=3.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x=3$.

□

Bài 12. Giải phương trình $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$(*)\Leftrightarrow 2.2^{2x^2}-9.2^{x^2+x}+4.2^{2x}=0$
$$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x}-9.2^{x^2-x}+4=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x^2-x}>0 \\ 2t^2-9t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x}=4 \\ 2^{x^2-x}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=2 \\ x^2-x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

□

Bài 13. Giải phương trình $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x}-6^{\log_2 x}-2.3^{2\log_2 2x}=0\\ &\Leftrightarrow 4.4^{\log_2 x}-6^{\log_2 x}-18.9^{\log_2 x}=0\\ &\Leftrightarrow 4-\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}-18.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}\right]^2=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}>0 \\ 18t^2+t-4=0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ \left[\begin{array}{l} t=\frac{4}{9} \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{4}{9}\Leftrightarrow \log_2 x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

☑ Kết hợp với điều kiện, phương trình có một nghiệm là $x=\frac{1}{4}$.

□

DẠNG 6. Đặt ẩn phu khi tích hai cơ số bằng 1

Phương pháp giải. $a^{f(x)}+b^{f(x)}=c$ với $a.b=1$

Phương pháp:

Đặt $t=a^{f(x)}>0$ suy ra $b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Ta có $\left(\sqrt{2}-1\right).\left(\sqrt{2}+1\right)=1\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^x\left(\sqrt{2}+1\right)^x=1.$

☑ Đặt $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x>0\Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^x=\frac{1}{t}.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{t}+t-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2}+1 \\ t=\sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}+1 \\ \left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1$ và $x=1$.

□

Ví dụ 13. Giải phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Ta có $\left(\sqrt{3}+2\right).\left(2-\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$.

☑ Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0 \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\dfrac{1}{t}$.

$$(*) \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=4 \Leftrightarrow t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2+\sqrt{3} \\ t=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

☑ Với $t=2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=1$.

☑ Với $t=2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-1$.

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1$ và $x=1$.

□

Ví dụ 14. Giải phương trình $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 2^{x^2-x}-\frac{4}{2^{x^2-x}}-3=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x^2-x}>0 \\ t-\dfrac{4}{t}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x^2-x}>0 \\ t^2-3t-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(\text{loại}) \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

□

Ví dụ 15. Giải phương trình $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6$ (1).

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{9}{9^{\cos^2 x}}+9^{\cos^2 x}-6=0$ (2)

Đặt $t=9^{\cos^2 x}$, $(1\le t\le 9)$.

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{9}{t}+t-6=0\Leftrightarrow t^2-6t+9=0$

$\Leftrightarrow t=3\Rightarrow 9^{\cos^2 x}=3\Leftrightarrow 2\cos^2 x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Giải phương trình $\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Ta có $\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right).\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\right)=1\Rightarrow \left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)^x.\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\right)^x=1$

☑ Đặt $t=\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)^x>0$ thì

$$(*)\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}-10=0\Leftrightarrow t^2-10t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5+2\sqrt{6}\\ t=5-2\sqrt{6}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}\\ \left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=-3\end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-3$ và $x=3$.

□

Bài 15. Giải phương trình $\left(5-\sqrt{21}\right)^x+7\left(5+\sqrt{21}\right)^x=2^{x+3}$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

☑ Ta có $\left(5+\sqrt{21}\right).\left(5-\sqrt{21}\right)=4\Rightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)^x.\left(5-\sqrt{21}\right)^x=4^x$

☑ Đặt $t=\left(5+\sqrt{21}\right)^x>0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4^x}{t} + 7.t = 2^{x+3} \Leftrightarrow 7t^2 - 8.2^x t + 4^x = 0$$

$$\Delta' = 16.4^x - 7.4^x = (3.2^x)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4.2^x + 3.2^x}{7} = 2^x \\ t = \dfrac{2^x}{7} \end{array}\right.$$

- ☑ Với $t = 2^x \Rightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)^x = 2^x \Leftrightarrow x = 0$.
- ☑ Với $t = \dfrac{2^x}{7} \Leftrightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)^x = \dfrac{2^x}{7} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5+\sqrt{21}}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{5+\sqrt{21}}} 7$.
- ☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_{\frac{2}{5+\sqrt{21}}} 7$.

□

Bài 16. Giải phương trình $\left(8+3\sqrt{7}\right)^{\sin x} + \left(8-3\sqrt{7}\right)^{\sin x} = 16$ $(*)$.

Lời giải.

- ☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- ☑ Ta có $\left(8+3\sqrt{7}\right).\left(8-3\sqrt{7}\right) = 1 \Rightarrow \left(8+3\sqrt{7}\right)^{\sin x}.\left(8-3\sqrt{7}\right)^{\sin x} = 1$
- ☑ Đặt $t = \left(8+3\sqrt{7}\right)^{\sin x} > 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 16 \Leftrightarrow t^2 - 16t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8+3\sqrt{7} \\ t = 8-3\sqrt{7} \end{array}\right.$$

- ☑ Với $t = 8+3\sqrt{7} \Rightarrow \left(8+3\sqrt{7}\right)^{\sin x} = 8+3\sqrt{7} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Với $t = 8-3\sqrt{7} \Rightarrow \left(8+3\sqrt{7}\right)^{\sin x} = 8-3\sqrt{7} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + l2\pi, l \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Vậy phương trình có họ nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = -\dfrac{\pi}{2} + l2\pi$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

□

DẠNG 7. Đặt hai ẩn phụ và Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Phương pháp giải. Phương pháp

Đặt $\begin{cases} u = a^{f(x)} > 0 \\ v = a^{g(x)} > 0 \end{cases}$ đưa phương trình về dạng tích số hoặc phương trình thuần nhất hoặc hệ phương trình.

Ví dụ 16. Giải phương trình $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ $(*)$.

Lời giải.

- ☑ Đặt $\begin{cases} u = 2^{x^2+x} > 0 \\ v = 2^{2x} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{u}{v} = 2^{x^2-x}$.

$(*) \Leftrightarrow u - 4.\dfrac{u}{v} - v + 4 = 0$

$\Leftrightarrow uv - v^2 - 4u + 4v = 0 \Leftrightarrow v(u-v) - 4(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(v-4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ \\ v = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2+x} = 2^{2x} \\ \\ 2^{2x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \\ x = 1 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

□

Ví dụ 17. Giải phương trình $25.2^x - 10^x + 5^x = 25$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 25.2^x - 25 - 2^x.5^x + 5^x = 0 \Leftrightarrow 25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(25 - 5^x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x - 1 = 0 \\ \\ 25 - 5^x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ \\ 5^x = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \\ x = 2 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

□

Ví dụ 18. Giải phương trình $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 3.3^x(4 + 5^x) - 5(5^x + 4) = 0 \Leftrightarrow (5^x + 4)(3.3^x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x + 4 = 0 \\ \\ 3.3^x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{5}{3}.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \log_3 \frac{5}{3}$.

□

Ví dụ 19. Giải phương trình $4x^2 + x.3^x + 3^{1+x} = 2x^2.3^x + 2x + 6$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow (4x^2 - 2x^2.3^x) + (x.3^x - 2x) + (3.3^x - 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2(2 - 3^x) - x(2 - 3^x) - 3(2 - 3^x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2 - 3^x)(2x^2 - x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 3^x = 0 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 2 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = -1$, $x = \log_3 2$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

□

Ví dụ 20. Giải phương trình $x^2.5^{x-1} - (3^x - 3.5^{x-1}).x + 2.5^{x-1} - 3^x = 0$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 5^x.x^2 - (5.3^x - 3.5^x).x + 2.5^x - 5.3^x = 0$

$\Delta = (5.3^x - 3.5^x)^2 - 4.5^x.(2.56x - 5.3^x) = (5.3^x - 5^x)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 + 5.\left(\dfrac{3}{5}\right)^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{x+2}{5} \end{array}\right. \quad (1)$$

☑ Phương trình (1) có một nghiệm là $x = 1$.

hàm số $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

☑ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$, $x = 1$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Giải phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2}.4^{2x^2+6x+5} + 1(1)$.

☑ Đặt $\begin{cases} u = 4^{x^2-3x+2} > 0 \\ v = 4^{2x^2+6x+5} > 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow u+v=uv+1 \Leftrightarrow (u-1)(1-v)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ \\ v=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2-3x+2}=1 \\ \\ 4^{2x^2+6x+5}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ \\ 2x^2+6x+5=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=-1 \vee x=-5.$

☑ Vậy phương trình có bốn nghiệm là $x=1 \vee x=2 \vee x=-1 \vee x=-5.$.

□

Bài 18. Giải phương trình $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}+2^{1-x^2}=2^{x^2+2x+1}+1 \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}+2^{1-x^2}-2^{x^2+2x+1}-1=0$ (1).

☑ Đặt $\begin{cases} u=2^{2x^2+2x}>0 \\ v=2^{1-x^2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow u.v=2^{x^2+2x+1}$.

$(1) \Leftrightarrow u+v-uv-1=0 \Leftrightarrow (u-1)-v(u-1)=0 \Leftrightarrow (u-1)(1-v)=0$

$$\left[\begin{array}{l} u=2^{2x^2+2x}=1 \\ \\ v=2^{1-x^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+2x=0 \\ \\ 1-x^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$$

☑ Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=1 \vee x=-1 \vee x=0$.

□

Bài 19. Giải phương trình $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}+x.\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}=1+x^2$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện: $x>0$.

☑ Đặt $t=\log_2 x \Rightarrow x=2^t \Rightarrow x^2=4^t$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)^t + 2^t.\left(2-\sqrt{2}\right)^t = 1+4^t$$
$$\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)^t + \left[2\left(2-\sqrt{2}\right)\right]^t = 1+\left[2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\right]^t$$
$$\Leftrightarrow a^t + b^t = 1 + a^t b^t \text{với} \begin{cases} a = 2+\sqrt{2} \\ b = 2\left(2-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left(a^t-1\right) - b^t\left(a^t-1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^t-1\right).\left(1-b^t\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^t = 1 \\ \\ b^t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

☑ Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

□

Bài 20. Giải phương trình $2^{2x} - \sqrt{2^x+6} = 6$ $(*)$.

Lời giải.

☑ Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = \sqrt{u+6} > \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow v^2 = u+6.$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = v+6 \\ v^2 = u+6 \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 = -(u-v) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v = 0 \\ \\ u+v+1 = 0 \end{array}\right.$$

☑ Với $u = v$ thì $u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2 \\ \\ u = 3 \end{array}\right. \Rightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$

☑ Với $u+v+1 = 0$ thì $u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ \\ u = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{21}-1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}.$

☑ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \log_2 3$ và $x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

□

DẠNG 8. Phương pháp hàm số giải phương trình mũ

Phương pháp giải.

Định lí 1. *Nếu hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a;b)$, $y=g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a;b)$.*

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Hướng 1: Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x)=k$, với k là hằng số.

i. Chứng minh hàm số $f(x)$ luôn đồng biến(nghịch biến)trên tập xác định.

ii. Tìm x_0 sao cho $f(x_0)=k$.

iii. Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=k$.

Hướng 2: Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x)=g(x)$, $\mathscr{D}_f, \mathscr{D}_g$ là tập xác định của f và g.

i. Chứng minh $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến (hoặc ngược lại) trên $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

ii. Tìm x_0 sao cho $f(x_0)=g(x_0)$.

iii. Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=g(x)$.

Hướng 3: Đưa phương trình đã cho về dạng $f(u)=f(v)$ mà hàm f tăng hoặc giảm. Do đó $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$.

⚠ ***Chú ý:***

- ☑ *Nếu $h(x)$ và $k(x)$ là hai hàm số liên tục và đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)$ thì $h(x)+k(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)$.*
- ☑ *Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0<a<1$.*

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 21. Giải phương trình $2016^x+2x-2018=0$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(x)=2016^x+2x-2018$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=2016^x\ln 2016+2>0, \forall x\in \mathrm{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. □

Ví dụ 22. Giải phương trình $3^{x^2-x}-3^{x+15}=15+2x-x^2$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Phương trình đã cho tương đương với $3^{x^2-x}+x^2-x=3^{x+15}+x+15 \quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3^t\cdot\ln 3+1>0, \forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x^2-x)=f(x+15) \Leftrightarrow x^2-x=x+15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=5 \end{array}\right.$

Vậy $x=-3; x=5$ là nghiệm của phương trình. □

Ví dụ 23. Giải các phương trình sau.

a) $3^x = 1 + 8^{\frac{x}{2}}$ b) $1 + 7^{\frac{x}{3}} = 2^x$ c) $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải.

a) Chia 2 vế của phương trình cho $3^x > 0$ ta được: $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^x$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{3} + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{\sqrt{8}}{3} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ mà $f(2) = 1$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) $PT \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)^x = 1$

Hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ mà $f(3) = 0$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

c) Chia 2 vế của phương trình cho 5^x ta được: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \quad (*)$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Ta có

$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(1) = 1$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

□

Ví dụ 24. Giải phương trình $2^{x^2-x} + x^2 + 27^{1-x} + 3 = 8^{x-1} + 4x + 3^{x-x^2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2^{x^2-x} + x^2 + 3^{3-3x} + 3 = 2^{3x-3} + 4x + 3^{x-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{x^2-x} + x^2 - x - 3^{x-x^2} = 2^{3x-3} + 3x - 3 - 3^{3-3x} \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $f(t) = 2^t + t - 3^{-t}$

Ta có $f'(t) = 2^t + 1 + 3^{-t}\ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(3x - 3) \Leftrightarrow x^2 - x = 3x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = 3$.

□

Ví dụ 25. Giải phương trình $2 \cdot 3^x + 4^x = 3 - 2018x$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 2.3^x + 4^x$ và $g(x) = 3 - 2018x$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 + 4^x \cdot \ln 4 > 0$ và $g'(x) = -2018 < 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa một nghiệm.

Mà $x = 0$ là một nghiệm của phương trình nên đó là nghiệm duy nhất. □

Ví dụ 26. Giải phương trình $4^x + 6^x = 25x + 2$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $4^x + 6^x - 25x - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 4^x + 6^x - 25x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 4^x \ln 4 + 6^x \ln 6 - 25$, $f''(x) = 4^x \ln^2 4 + 6^x \ln^2 6 > 0$. Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f'(0) = \ln 4 + \ln 6 - 25 < 0$; $f'(2) = 16 \ln 4 + 36 \ln 6 - 25 > 0$

Nên $f'(x)$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0; 2)$.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Dễ thấy $x = 0$ và $x = 2$ là 2 nghiệm của phương trình. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Giải các phương trình:

a) $5^x + 6 = 31^{\frac{x}{2}}$.

b) $4^x = 3^x + 7$.

Lời giải.

a) PT $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{\sqrt{31}}\right)^x + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{31}}\right)^x = 1 \quad (*)$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{5}{\sqrt{31}}\right)^x + 6.\left(\frac{1}{\sqrt{31}}\right)^x$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \left(\frac{5}{\sqrt{31}}\right)^x \cdot \ln \frac{5}{\sqrt{31}} + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{31}}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{31}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(2) = 1$ nên $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) PT $\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 7\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Đặt $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 7\left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^x \ln \frac{1}{4} < 0$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(2)=1$ nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Bài 22. Giải phương trình: $16^x \cdot (2x+1)=8$.

Lời giải.

☑ $x=-\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình.

☑ Với $x \neq -\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành

$$16^x = \frac{8}{2x+1} \qquad (*)$$

Xét $f(x)=16^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x)=\dfrac{8}{2x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ hàm số $f(x)>0$ còn $g(x)<0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm trên khoảng này.

Mặt khác có $x_0=\dfrac{1}{2} \in \left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thỏa $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ nên $(*)$ có duy nhất một nghiệm $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Bài 23. Giải các phương trình sau

a) $2^{x^2}-16^{x-1}+(x-2)^2=0$.

b) $3x \cdot 5^x = 2 \cdot 5^x + 3x + 2$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương với $2^{x^2}+x^2=2^{4x-4}+4x-4$ $(*)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t, \forall t \in \mathbb{R}$. $f'(t)=2^t \ln t+1>0, \forall t$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2)=f(4x-4) \Leftrightarrow x^2=4x-4 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Nhận thấy $x=\dfrac{2}{3}$ không là nghiệm của phương trình. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$5^x=\dfrac{3x+2}{3x-2}$ $(*)$

Vế trái của $(*)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right), \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Vế phải của $(*)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right), \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.Do đó $(*)$ có tối đa 2 nghiệm.

Ta thấy $x=\pm 1$ thỏa mãn $(*)$.

Vậy $x=\pm 1$ là nghiệm của phương trình.

□

Bài 24. Giải phương trình: $3^{\frac{1-x^2}{x^2}}-3^{\frac{1-2x}{x^2}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$.

Nhận xét $\dfrac{1-x^2}{x^2} - \dfrac{1-2x}{x^2} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 3^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right) = 3^{\frac{1-2x}{x^2}} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-2x}{x^2}\right) \qquad (*)$

Xét hàm $f(t) = 3^t + \dfrac{1}{2}t$ có $f'(t) = 3^t \ln t + \dfrac{1}{2} > 0 \forall t$

Suy ra $f(t)$ đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right) = f\left(\dfrac{1-2x}{x^2}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 (L) \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$. □

DẠNG 9. Phương trình mũ chứa tham số

Phương pháp giải. **PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ☑ Cô lập tham số đưa về dùng đồ thị của hàm số để biện luận số nghiệm phương trình.
- ☑ Đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc hai, bậc ba kết hợp định lí Vi-ét để giải.

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm giá trị của tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

a) $\mathrm{e}^{x^2-4x+3} = m$.

b) $25^x - 2m \cdot 5^x + 4m + 5 = 0$.

Lời giải.

a) ĐK: $m > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = \ln m \Leftrightarrow (x-2)^2 = \ln m + 1$

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \ln m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b) Đặt $t = 5^x$ $(t > 0)$ phương trình trở thành:

$$t^2 - 2m \cdot t + 4m + 5 = 0 \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 5 > 0 \\ m > 0 \\ 4m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 5 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 5.$$

□

Ví dụ 2. Định giá trị tham số m để phương trình $2018^{x^2} + m^2 - 2m - 1 = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

$2018^{x^2} + m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2018^{x^2} = -m^2 + 2m + 1$

Ta có $x^2 \geq 0$ nên $2018^{x^2} \geq 1$. Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi

$$-m^2 + 2m + 1 \geq 1 \Leftrightarrow -m^2 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$$

□

Ví dụ 3. Cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

Lời giải.

a) $m = 2$ phương trình đã cho trở thành: $4^x - 4 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

b) Đặt $t = 2^x (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2mt + 2m = 0 \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm t dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \vee m < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$. Theo hệ thức Viet ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 . t_2 = 2m \end{cases}$$

Ta có $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1} . 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa điều kiện).

□

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $m \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

$$m \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x \Leftrightarrow m + 2\left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 5\left(\frac{9}{4}\right)^x = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{9}{4}\right)^x (t > 0)$, phương trình (1) trở thành:

$$2t^2 - 5t + m = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t = -m \qquad (2)$$

Đặt $f(t) = 2t^2 - 5t \Rightarrow f'(t) = 4t - 5, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	‖	↘	$\frac{-25}{8}$	↗	$+\infty$
			-3				

Ta có phương trình (1) có hai nghiệm x dương khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t > 1$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\frac{-25}{8} < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < \frac{25}{8}$.

□

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $3^x+3=m\sqrt{9^x+1}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Đặt $t=3^x, t>0$ phương trình trở thành

$$t+3=m\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow m=\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}=f(t)\quad(*)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ với $t\in(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm duy nhất khi $\left[\begin{array}{l}1<m\le 3\\ m=\sqrt{10}.\end{array}\right.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm m để phương trình $(2+\sqrt{3})^x+m(2-\sqrt{3})^x+1=0$ vô nghiệm.

Lời giải.

$(2+\sqrt{3})^x+m(2-\sqrt{3})^x+1=0\Leftrightarrow(2+\sqrt{3})^x+\dfrac{m}{(2+\sqrt{3})^x}+1=0\qquad(1).$

Đặt $t=(2+\sqrt{3})^x$ $(t>0)$. Phương trình (1) trở thành:

$$t+m\frac{1}{t}+1=0\Leftrightarrow t^2+t+m=0\Leftrightarrow t^2+t=-m\qquad(2)$$

Đặt $f(t)=t^2+t, f'(t)=2t+1>0,\forall t>0.$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ hay $f(t)>f(0)=0.$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm trên $(0;+\infty)$.

Suy ra $-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0.$

□

Bài 2. Định m để phương trình $16^x-2\cdot 12^x+(m-2)9^x=0$ có nghiệm dương.

Lời giải.

$16^x-2\cdot 12^x+(m-2)9^x=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x}-2\left(\dfrac{4}{3}\right)^x+m-2=0\qquad(*)$

Đặt $t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$ $(t>0)$, phương trình $(*)$ trở thành:

$$t^2-2t+m-2=0\Leftrightarrow t^2-2t-2=-m\qquad(**)$$

Đặt $f(t)=t^2-2t-2$, $f'(t)=2t-2$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$.
Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có phương trình $(*)$ có nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình $(**)$ có nghiệm $t>1$
Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m>-3 \Leftrightarrow m<3$. □

Bài 3. Tìm m để phương trình $4^{1+\sqrt{4-x^2}}-(m+2)2^{1+\sqrt{4-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in [-2;2]$.
Đặt $t=2^{1+\sqrt{4-x^2}}; x \in [-2;2] \Rightarrow t \in [2;8]$
$PT \Leftrightarrow t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow (t-2)m=t^2-2t+1.$ $(*)$
Với $t=2$ thì phương trình vô nghiệm.
Với $t \neq 2$, từ $(*)$ ta có $m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$.
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$, với $t \in [2;8]$
Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}, f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

t	2		3		8
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\dfrac{49}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 4$. □

Bài 4. Tìm m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ $(*)$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow 4^{x^2}-4 \cdot 2^{x^2}+6-m=0$
Đặt $t=2^{x^2}(t>0)$. Phương trình trở thành

$$t^2-4t+6-m=0 \qquad (**)$$

Nhận thấy rằng x_0 là nghiệm của $(*)$ thì $-x_0$ cũng là nghiệm của $(*)$ phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phải có nghiệm $x=0$ hay phương trình $(**)$ có một nghiệm $t=1$ và một nghiệm $0<t\neq 1$.

Thay $t=1$ vào $(**)$ suy ra $m=3$.

Với $m=1$ thì phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt là $t=1$ và $t=3$.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ thỏa phương trình

$$4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}=6+\cos y \qquad (1)$$

Lời giải.

$\text{VT}(1)=4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}$. Đặt $t=4^{\sin^2 x}, t\in[1;4]$

$\text{VT}(1)=4^t+\dfrac{4}{t}=f(t)$. TXĐ: $\mathscr{D}=[1;4]$

$f'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}=\dfrac{t^2-4}{t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2\in[1;4]$

Bảng biến thiên

t	1		2		4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	5	↘	4	↗	5

$\Rightarrow VT(1)\leq 5$, dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x=0\\ \sin^2 x=1\end{array}\right.$

Mặt khác $VP(1)=6+\cos y\geq 5$, dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \cos y=-1$

Do đó $PT(1)\Leftrightarrow \begin{cases}4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}=5\\ 6+\cos y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x=0\vee \sin^2 x=1\\ \cos y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ y=\pi+l2\pi\end{cases} (l\in\mathbb{Z})$

Vậy họ nghiệm của phương trình là $\begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ y=\pi+l2\pi\end{cases} (k,l\in\mathbb{Z})$. □

Bài 2. Giải phương trình: $\left(\dfrac{1+a^2}{2018a}\right)^x-\left(\dfrac{1-a^2}{2018a}\right)^x=\dfrac{1}{1009^x}$ (1) với tham số $a\in(0;1)$.

Lời giải.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\left(\dfrac{1+a^2}{2018a}\right)^x$ ta được:

$$(1)\Leftrightarrow 1=\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x+\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x$$

Vì $a \in (0;1)$ nên tồn tại $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\dfrac{\alpha}{2} = a$
Khi đó phương trình được viết lại:

$$1 = \left(\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\right)^x + \left(\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\right)^x \Leftrightarrow 1 = (\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x \quad (2)$$

Đặt $f(x) = (\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.
$\Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của (2).
Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 2$. □

2 Phương trình lô-ga-rít

DẠNG 10. Phương trình logarit cơ bản

Phương pháp giải. Phương trình $\log_a x = b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$, luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b.

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau
① $\log_2(x-5) = 4$.
② $\log_6 x^2 = 2$.

Lời giải.

① Ta có $\log_2(x-5) = 4 \Leftrightarrow x - 5 = 2^4 \Leftrightarrow x = 21$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{21\}$.
② Phương trình đã cho tương đương với $x^2 = 6^2 \Leftrightarrow x = \pm 6$.

□

Ví dụ 7. Tìm x thỏa mãn đẳng thức $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$.

Lời giải.

Ta có $3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_3 8 + \log_3 5 - \log_3 9 = \log_3 \dfrac{40}{9}$.
Do đó $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 \dfrac{40}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{40}{9}$.
Vậy $x = \dfrac{40}{9}$. □

Ví dụ 8. Giải phương trình $\log_{\sqrt{3}} |x+1| = 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{3}} |x+1| = 2 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -4. \end{array}\right.$
Vậy $S = \{-4;2\}$. □

DẠNG 11. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Phương pháp giải. Cho $1 \neq a > 0$.
Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Ví dụ 9. Giải phương trình $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$.

Lời giải.

Với điều kiện $x > -1$, phương trình trở thành

$$\ln(x+1)(x+3) = \ln(x+7) \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = x+7 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1, \\ x = -4. \end{bmatrix}$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm phương trình là $x = 1$. □

Ví dụ 10. Giải phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.

Lời giải.

Với điều kiện $x > 0$, phương trình trở thành

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x = 6 \Leftrightarrow x = 3^6 = 729 > 0.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 729$. □

Ví dụ 11. Giải phương trình $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$.

Lời giải.

Điều kiện $-4 < x < 14$. Ta có

$$\begin{aligned} &\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4 \\ \Leftrightarrow\ &\log_3(x+4) + \log_3(14-x) = 4 \\ \Leftrightarrow\ &\log_3(x+4)(14-x) = 4 \\ \Leftrightarrow\ &-x^2 + 10x + 56 = 3^4 \\ \Leftrightarrow\ &x = 5. \end{aligned}$$

So điều kiện ta được $S = \{5\}$. □

Ví dụ 12. Giải phương trình $\log_3(x^2+4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x-3) = 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > \dfrac{3}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}&\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=0\\&\Leftrightarrow \log_3(x^2+4x)=\log_3(2x-3)\\&\Leftrightarrow x^2+4x=2x-3\Leftrightarrow x^2+2x+3=0.\end{aligned}$$

Phương trình vô nghiệm. □

Ví dụ 13. Giải phương trình $\log_3(2x-1).\ln(-x+5)=\log_{\frac{1}{27}}(2x-1)$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{1}{2}<x<5$. Ta có phương trình

$$\log_3(2x-1).\ln(-x+5)=-\frac{1}{3}\log_3(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(2x-1)=0\\ \ln(-x+5)=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=5-\dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}.\end{array}\right.$$

□

Ví dụ 14. Giải phương trình $\log_2(x+2)+\log_4(x-5)^2+\log_{\frac{1}{2}}8=0$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>-2\\ x\neq 5.\end{cases}$

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\log_2(x+2)+\log_2|x-5|=\log_2 8\\&\Leftrightarrow (x+2)|x-5|=8\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 5\\ (x+2)(x-5)=8\end{cases}\\ \begin{cases}x<5\\ (x+2)(5-x)=8\end{cases}\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{6;\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 3. Cho a là số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a x = \dfrac{1}{2}\log_a 25 + \log_a 3 - 2\log_a 2$. Tìm x.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_a x = \frac{1}{2}\log_a 25 + \log_a 3 - 2\log_a 2\\
&\Leftrightarrow \log_a x = \log_a 5 + \log_a 3 - \log_a 4\\
&\Leftrightarrow \log_a x = \log_a \left(\frac{5\cdot 3}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow x = \frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

□

Bài 4. Giải phương trình $\log_2(x+4) = 4$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x+4) = 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 12$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{12\}$. □

Bài 5. Giải các phương trình sau

① $\log_2[x(x-1)] = 1$.

② $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$.

Lời giải.

① Điều kiện $x < 0$ hoặc $x > 1$. Phương trình trở thành

$$x(x-1) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\\ x = -1. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm phương trình là $x = 2$ và $x = -1$.

② Điều kiện $x > 1$. Phương trình trở thành

$$\log_2(x(x-1)) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\\ x = -1. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm phương trình là $x = 2$.

□

Bài 6. Giải phương trình $\log_9(x+8) - \log_3(x+26) + 2 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -8$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&\log_3(x+8)^2 - \log_3(x+26) + \log_3 9 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\log_3 \frac{(x+8)^2.9}{x+26} = 0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x+8)^2.9}{x+26} = 1\\
\Leftrightarrow\ &9(x+8)^2 = x+26\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-143-\sqrt{649}}{18}\\ x = \dfrac{-143+\sqrt{649}}{18}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm phương trình là $x = \dfrac{-143+\sqrt{649}}{18}$. □

Bài 7. Giải phương trình $\log_2(x-2) - 6\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5} = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 2$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&\log_2(x-2) + \log_2(3x-5) = 2\\
\Leftrightarrow\ &\log_2(x-2)(3x-5) = 2\\
\Leftrightarrow\ &3x^2 - 11x + 6 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{3}\\ x = 1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm phương trình là $x = \dfrac{8}{3}$. □

Bài 8. Giải phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)$.

Lời giải.

Điều kiện $1 < x < 7$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&-\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1 - 2\log_2(7-x)\\
\Leftrightarrow\ &-\log_2(x^2-1) = 1 - \log_2(7-x)^2\\
\Leftrightarrow\ &1 + \log_2(x^2-1) - \log_2(7-x^2) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\log_2 \frac{2\,(x^2-1)}{(7-x)^2} = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -17\\ x = 3. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện nghiệm phương trình là $x = 3$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 9. Giải phương trình

$$\log_2(x^2+x+1)+\log_2(x^2-x+1)=\log_2(x^4+x^2+1)+\log_2(x^4-x^2+1).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&\log_2(x^2+x+1)(x^2-x+1)=\log_2(x^4+x^2+1)+\log_2(x^4-x^2+1)\\
&\Leftrightarrow \log_2\left((x^2+1)^2-x^2\right)=\log_2(x^4+x^2+1)+\log_2(x^4-x^2+1)\\
&\Leftrightarrow \log_2(x^4+x^2+1)=\log_2(x^4+x^2+1)+\log_2(x^4-x^2+1)\\
&\Leftrightarrow \log_2(x^4-x^2+1)=0\Leftrightarrow x^4-x^2=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=0$, $x=1$ và $x=-1$. □

Bài 10. Tìm k để phương trình $\log_2(x+3)+\log_2 x^2=k$ có nghiệm duy nhất?

Lời giải.

Điều kiện $0\neq x>-3$.

Ta có $\log_2(x+3)+\log_2 x^2=k\Leftrightarrow\log_2(x^3+3x^2)=k\Leftrightarrow x^3+3x^2=2^k$.

Đặt $f(x)=x^3+3x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình có nghiệm duy nhất khi $2^k>4\Leftrightarrow k>2$. □

DẠNG 12. Đặt một ẩn phụ

Phương pháp giải. Giải phương trình $f\left[\log_a g(x)\right]=0\,(0<a\neq 1)$.

- **Bước 1:** Đặt $t=\log_a g(x)\qquad(*)$
- **Bước 2:** Tìm điều kiện của t (nếu có).
- **Bước 3:** Đưa về giải phương trình $f(t)=0$ đã biết cách giải.
- **Bước 4:** Thay vào $(*)$ để tìm x.

* **Chú ý**

i) $\log_a f^2(x)=2\log_a|f(x)|$.

ii) $\log_a f^{2k}x=2k\log_a|f(x)|$.

iii) $\log_a f^{2k+1}x=(2k+1)\log_a f(x)$.

iv) $\log_a\left(f(x)g(x)\right)=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x>0$.

Đặt $\log_3 x=t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\\log_3 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=27.\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{3;27\}$. □

Ví dụ 16. Giải phương trình $\log_2 x-\log_x 64=1$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $0<x\neq 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow\log_2 x-6\log_x 2=1$.

Đặt $t=\log_2 x\,(t\neq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t-\frac{6}{t}=1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t^2-t-6=0\\t\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-2.\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\\log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\x=\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{8;\dfrac{1}{4}\right\}$. □

Ví dụ 17. Giải phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-5=0$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x>0$.

Đặt $\sqrt{\log_3^2 x+1}=t\,(t\geq 1)$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \quad \text{(thỏa mãn)} \\ t=-3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\sqrt{\log_3^2 x+1}=2 \Leftrightarrow \log_3^2 x=3 \Leftrightarrow \log_3 x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=3^{\pm\sqrt{3}}$.

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{3^{\sqrt{3}};3^{-\sqrt{3}}\right\}$. □

Ví dụ 18. Giải phương trình $\log_{3-2x}\left(2x^2-9x+9\right)+\log_{3-x}\left(4x^2-12x+9\right)=4$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} 2x^2-9x+9>0 \\ 4x^2-12x+9>0 \\ 0<3-2x\neq 1 \\ 0<3-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{3}{2} \\ x\neq 1. \end{cases}$

Khi đó phương trình $\log_{3-2x}\left(2x^2-9x+9\right)+\log_{3-x}\left(4x^2-12x+9\right)=4$

$\Leftrightarrow \log_{3-2x}(x-3)(2x-3)+\log_{3-x}(2x-3)^2=4$

$\Leftrightarrow \log_{3-2x}|x-3|+\log_{3-2x}|2x-3|+2\log_{3-x}|2x-3|=4$

$\Leftrightarrow \log_{3-2x}(3-x)+\log_{3-2x}(3-2x)+2\log_{3-x}(3-2x)=4$

$\Leftrightarrow \log_{3-2x}(3-x)+1+2\log_{3-x}(3-2x)=4$

$\Leftrightarrow \log_{3-2x}(3-x)+2\log_{3-x}(3-2x)-3=0$.

Đặt $\log_{3-2x}(3-x)=t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$t+\dfrac{2}{t}-3=0 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2. \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{3-2x}(3-x)=1 \\ \log_{3-2x}(3-x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=3-2x \\ 3-x=(3-2x)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm phương trình là $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải phương trình $\log_2^2\left(x^2-1\right)+\log_2(x-1)+\log_2(x+1)-2=0$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Phương trình $\Rightarrow \log_2^2\left(x^2-1\right)+\log_2\left(x^2-1\right)-2=0$.

Đặt $t=\log_2\left(x^2-1\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1=\log_2\left(x^2-1\right) \Rightarrow x^2-1=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ t=-2=\log_2\left(x^2-1\right) \Rightarrow x^2-1=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Vì $x>1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$ □

Bài 12. Giải phương trình $3-\log_2(5^x+2)=2\log_{(5^x+2)}2$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2(5^x+2), t>1$

Phương trình trở thành $3-t=\dfrac{2}{t} \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1. \end{array}\right.$

Vì $t>1$ nên phương trình có nghiệm $t=2 \Leftrightarrow \log_2(5^x+2)=2 \Leftrightarrow 5^x+2=4 \Leftrightarrow 5^x=2 \Leftrightarrow x=\log_5 2$.

□

Bài 13. Giải phương trình $\dfrac{1}{5-\log x}+\dfrac{2}{1+\log x}=1$.

Lời giải.

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} x>0 \\ 5-\log x\neq 0 \\ 1+\log x\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ \log x\neq 5 \\ \log x\neq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 10^5 \\ x\neq \dfrac{1}{10}. \end{array}\right.$

Đặt $t=\log x\,(t\neq 5 \text{và} t\neq -1)$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$\dfrac{1}{5-t}+\dfrac{2}{1+t}=1 \Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=2 \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right.$

+ Với $t=2 \Leftrightarrow \log x=2 \Leftrightarrow x=100$ (thỏa mãn).

+ Với $t=3 \Leftrightarrow \log x=3 \Leftrightarrow x=1000$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=100; x=1000$. □

Bài 14. Giải phương trình $\log_3^2 x+5\sqrt{\log_3^2 x+1}+7=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\geq 0$.

phương trình $\Leftrightarrow t^2+5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-3 & \text{(loại)} \\ t=-2 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{\log_2^2 x-3.\log_2 x+2}=\log_2 x^2-2$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_2 x$.

Phương trình đã cho trở thành

$\sqrt{t^2-3t+2}=2t-2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t-2\geq 0 \\ t^2-3t+2=(2t-2)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t\geq 1 \\ t^2-3t+2=(2t-2)^2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 3t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$. □

DẠNG 13. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Phương pháp giải. Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Ví dụ 19. Giải phương trình $\log_3^2 (x+1) + (x-5)\log_3 (x+1) - 2x + 6 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Đặt $t = \log_3 (x+1)$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 + (x-5)\,t - 2x + 6 = 0$.

Phương trình có $\Delta = (x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 - x. \end{array}\right.$

+ Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_3 (x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn).

+ Với $t = 3 - x \Leftrightarrow \log_3 (x+1) = 3 - x \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2; x = 8$. □

Ví dụ 20. Giải phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}.$

Đặt $u = \log_2 x$. Khi đó phương trình trở thành

$u^2 + \sqrt{u+1} = 1 \Leftrightarrow u^2 = 1 - \sqrt{u+1}$ (1).

Điều kiện của (1) là $\begin{cases} u + 1 \geq 0 \\ 1 - u^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1.$

Đặt $v = \sqrt{u+1}$ $\left(0 \leq v \leq \sqrt{2}\right) \Rightarrow v^2 = u + 1$. Khi đó phương trình được chuyển thành hệ

$$\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v^2 = 1 + u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u+v) \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = 0 \\ u - v + 1 = 0. \end{array}\right.$$

+Với $u + v = 0 \Leftrightarrow v = -u$ ta được

$$u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \text{ (thỏa mãn)}.$$

$+$Với $u-v+1=0$ ta được $u^2+u=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \ \text{(thỏa mãn)} \\ u=-1 \ \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=0 \\ \log_2 x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \ \text{(thỏa mãn)} \\ x=\dfrac{1}{2} \ \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt là $x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Giải phương trình $\log_2^2 x+(x-12)\log_2 x+11-x=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_2 x$; Phương trình $\Leftrightarrow t^2+(x-12)t+(11-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 & (1) \\ t=11-x & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

$(2) \Leftrightarrow \log_2 x=11-x \Leftrightarrow \log_2 x+x-11=0$.

Đặt $g(x)=\log_2 x+x-11$.

Điều kiện $x>0$.

$g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}+1>0, \forall x>0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Mà $g(8)=0 \Rightarrow x=8$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2; x=8$. □

Bài 17. Giải phương trình $\log_2 x(x-1)^2+\log_2 x\log_2(x^2-x)-2=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x>1$.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng $\log_2 \dfrac{(x^2-x)^2}{x}+\log_2 x\log_2(x^2-x)-2=0$.

$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2-x)-\log_2 x+\log_2 x.\log_2(x^2-x)-2=0\ (*)$

Đặt $u=\log_2(x^2-x)$ và $v=\log_2 x$. Đưa phương trình $(*)$ về phương trình

$(u-1)(v+2)=0 \Leftrightarrow u=1$ hoặc $v=-2$.

Với $u=1$ thì $\log_2(x^2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow x=2$ thỏa $x>1$.

Với $v=-2$ thì $\log_2 x=-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (loại).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$. □

Bài 18. Giải phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện là $x\geq 1$.

Đặt $t=x-\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x+\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{t}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 t+\log_3\dfrac{1}{t}=\log_6\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow \log_2 t-\log_3 t+\log_6 t=0$

$\Leftrightarrow \log_2 t(1-\log_3 2+\log_6 2)=0 \Leftrightarrow \log_2 t=0 \Leftrightarrow t=1$.

Do đó $x-\sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-1}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-1 \Leftrightarrow x=1$(thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$. □

DẠNG 14. Mũ hóa

Phương pháp giải. $\log_a f(x) = g(x)\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{g(x)}. \end{cases}$

Ví dụ 21. Giải phương trình $\log_2(x+3) = 1$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -3$.

$\log_2(x+3) = 1 \Leftrightarrow x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$. □

Ví dụ 22. Giải phương trình $\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $5^{x+1} - 25^x > 0$.

$\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2 \Leftrightarrow 5^{x+1} - 25^x = 4 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5.5^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ 5^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_5 4. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; \log_5 4\}$. □

Ví dụ 23. Giải phương trình $\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$.

Lời giải.

Điều kiện $25^x - 2^{2x+1} > 0$.

$\log(25^x - 2^{2x+1}) = x \Leftrightarrow 25^x - 2^{2x+1} = 10^x \Leftrightarrow 25^x - 2.4^x = 10^x$.

$\Leftrightarrow 1 - 2\left(\dfrac{4}{25}\right)^x - \left(\dfrac{10}{25}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^x - 1 = 0\ (*)$

Đặt $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = t\ (t > 0)$. Khi đó $(*)$ trở thành $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \text{(loại)} \\ t = \dfrac{1}{2} & \text{(thỏa mãn)}. \end{array}\right.$

$t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{5}{2}} 2.$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\log_{\frac{5}{2}} 2\right\}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Giải phương trình $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

Lời giải.

Điều kiện $9 - 2^x > 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 9 - 2^x = \dfrac{8}{2^x}$.

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 9.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 3\}$. □

Bài 20. Giải phương trình $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 89) = 2$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ 5 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4. \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với phương trình

$x^2 - 2x + 89 = (5 - x)^2 \Leftrightarrow x = -8.$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-8\}$. □

Bài 21. Giải phương trình: $\log_{x^2}(3 - 2x) = 1$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với phương trình

$3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-3\}$. □

Bài 22. Giải phương trình $\log_2 x . \log_4 x . \log_8 x . \log_{16} x = \dfrac{81}{24}$.

Lời giải.

Đk: $x > 0$.

$\log_2 x . \log_4 x . \log_8 x . \log_{16} x = \dfrac{81}{24} \Leftrightarrow (\log_2 x)\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)\left(\dfrac{1}{3}\log_2 x\right)\left(\dfrac{1}{4}\log_2 x\right) = \dfrac{81}{24}$

$\Leftrightarrow \log_2^4 x = 81 \Leftrightarrow \log_2 x = \pm 3 \Leftrightarrow x = 8$ hoặc $x = \dfrac{1}{8}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho $S = \left\{\dfrac{1}{8};\ 8\right\}$. □

Bài 23. Giải phương trình $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$.

Lời giải.

Đk $2^{x+1} - 3 > 0$.

$\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{4^x + 4}{2^{x+1} - 3} = x \Leftrightarrow \dfrac{4^x + 4}{2^{x+1} - 3} = 2^x.$ (1)

Đặt $t = 2^x,\ t > 0$.

Ta có (1) $\Rightarrow t^2 + 4 = 2t^2 - 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$

$t = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2.$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$. □

DẠNG 15. Phương pháp hàm số giải phương trình lôgarit

Phương pháp giải. ***Phương pháp giải:*** Biến đổi phương trình để sử dụng một trong các tính chất sau:

- ☑ Tính chất 1: Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=k,(1)$ có không quá một nghiệm trên $(a;b)$. Khi đó nếu $x_0\in(a;b)$ là nghiệm của phương trình (1) thì nó là nghiệm duy nhất.
- ☑ Tính chất 2: Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến và hàm số $y=g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến và hàm số $y=g(x)$ luôn đồng biến) trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x),(2)$ có không quá một nghiệm trên $(a;b)$. Khi đó nếu $x_0\in(a;b)$ là nghiệm của phương trình (2) thì nó là nghiệm duy nhất.
- ☑ Tính chất 3: Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v,\forall u,v\in(a;b)$.

Ví dụ 24. Giải phương trình: $\log_2(x-2)=\log_3(x-1)$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

Đặt $\log_2(x-2)=\log_3(x-1)=t$.

$\Rightarrow\begin{cases}x-2=2^t\\x-1=3^t\end{cases}\Rightarrow 3^t-2^t=1\Leftrightarrow 3^t=1+2^t\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t=1\,(*)$.

Dễ thấy $t=1$ là một nghiệm của $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{1}{3}\right)^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t\Rightarrow f'(t)=\left(\frac{1}{3}\right)^t\ln\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^t\ln\frac{1}{2}<0$, nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, $g(t)=1$ là hàm hằng. Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm duy nhất $t=1\Rightarrow x=4$.

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=4$.

□

Ví dụ 25. Giải phương trình: $\log_3(x+2)+\log_7(3x+4)=2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x>-2\\x>-\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}$.

Phương trình có một nghiệm $x=1$.

Xét hàm số $f(x)=\log_3(x+2)+\log_7(3x+4)$ trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$ ta có:

$f'(x)=\frac{1}{(x+2)\ln 3}+\frac{3}{(3x+4)\ln 7}>0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$; $g(x)=2$ là hàm hằng. Nên phương trình đã cho có

một nghiệm duy nhất $x=1$.

□

Ví dụ 26. Giải phương trình: $\log_2(x^2-x-6)+x=\log_2(x+2)+4$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$. Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(x^2-x-6)-\log_2(x+2)=4-x \Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2-x-6}{x+2}=4-x \Leftrightarrow \log_2(x-3)+x=4(2)$.

Vì $\log_2(4-3)+4=4$ nên phương trình (2) có một nghiệm $x=4\in(3;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=\log_2(x-3)+x$, ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{(x-3)\ln 2}+1>0, \forall x\in(3;+\infty)$ nên $f(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Do đó phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=4$.

□

Ví dụ 27. Giải các phương trình: $8\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{(x-1)^2}{2x+1}=x^2-18x-31$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Phân tích kĩ thuật, ta cần tìm $a,b,c\in\mathbb{R}$ sao cho $x^2-18x-31=a(x-1)^2+b(2x-1)+c$.

Đồng nhất hai vế, ta tìm được $a=1,b=-8,c=-24$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$8\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2-8\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=(x-1)^2-8(2x+1)-24$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}(x-1)^2\right)-\frac{1}{8}(x-1)^2=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)-(2x+1).$$

Xét hàm số $g(t)=\log_{\frac{1}{2}}t-t$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có:

$g'(t)=\dfrac{1}{-t\ln 2}-1<0, \forall t\in(0;+\infty)$ nên $g(t)$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó:

$g\left(\frac{1}{8}(x-1)^2\right)=g(2x+1)\Leftrightarrow\dfrac{1}{8}(x-1)^2=2x+1\Leftrightarrow x=9\pm 2\sqrt{22}$. □

Ví dụ 28. Giải phương trình: $\log_2\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-4x+3}+x=x^2-3x+2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{2x^2-4x+3} > 0 \\ 2x^2-4x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$\begin{aligned} &\log_2 \frac{x^2-x+1}{2x^2-4x+3} = x^2-3x+2 \\ \Leftrightarrow &\log_2\left(x^2-x+1\right) - \log_2\left(2x^2-4x+3\right) = x^2-3x+2 \\ \Leftrightarrow &\log_2\left(x^2-x+1\right) + \left(x^2-x+1\right) = \log_2\left(2x^2-4x+3\right) + \left(2x^2-4x+3\right) (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0$, $\forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Khi đó $(*)$ có dạng

$$f\left(x^2-x+1\right) = f\left(2x^2-4x+3\right) \Leftrightarrow x^2-x+1 = 2x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Nên phương trình đã cho có tập nghiệm là $T = \{1;2\}$.

□

Ví dụ 29. Giải phương trình: $\log_2\left(x+3^{\log_6 x}\right) = \log_6 x$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.
Đặt $t = \log_6 x \Rightarrow x = 6^t$. Phương trình đã cho trở thành: $6^t + 3^t = 2^t \Leftrightarrow 3^t + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0\,(*)$.
Xét hàm số $f(t) = 3^t + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1$, ta có:
$f'(t) = 3^t \ln 3 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$ và $f(-1) = 0$ nên $t=-1$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.
Với $t=-1$ suy ra $x = \dfrac{1}{6}$.
Vậy phương trình cho có nghiệm $x = \dfrac{1}{6}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 24. Giải phương trình: $\log_3\left[(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 3x + 4\right] = 2\log_2(x+1)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$.
Phương trình đã cho tương đương với $\log_3(x+2)^3 = 2\log_2(x+1) \Leftrightarrow 3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$.
Đặt $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6t$ suy ra $\begin{cases} x+2 = 3^{2t} \\ x+1 = 2^{3t} \end{cases} \Rightarrow 9^t - 8^t = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^t + \left(\dfrac{8}{9}\right)^t = 1\,(*)$.
Xét hàm $f(t) = \left(\dfrac{1}{9}\right)^t + \left(\dfrac{8}{9}\right)^t$, ta có:
$f'(t) = \left(\dfrac{1}{9}\right)^t \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) + \left(\dfrac{8}{9}\right)^t \ln\left(\dfrac{8}{9}\right) < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, lại có $f(1) = 1$ nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.
Với $t=1$ suy ra $3\log_3(x+2) = 6 \Leftrightarrow x = 7$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=7$. □

Bài 25. Giải phương trình $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_7 x \Rightarrow x = 7^t$ và phương trình đã cho trở thành:

$t = \log_3\left(7^{\frac{t}{2}}+2\right) \Leftrightarrow 7^{\frac{t}{2}}+2 = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$ (1).

Vì hàm số $f(t) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t$ là hàm nghịch biến và $f(2) = 1$ nên (1) có nghiệm duy nhất $t = 2$ suy ra $x = 7$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 7$. □

Bài 26. Giải phương trình $\log_3 \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{2}$ và $x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương $\log_3(2x-1) + (2x-1) = \log_3 3(x-1)^2 + 3(x-1)^2$ $(*)$.

Xét hàm số: $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$ và $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$ với $\forall t > 0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình $(*)$ có dạng $f(2x-1) = f\left[3(x-1)^2\right] \Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ hoặc $x = 2$.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{2}{3}$ hoặc $x = 2$.

□

DẠNG 16. Phương trình lôgarit có chứa tham số

Phương pháp giải. ***Phương pháp giải:***

- ☑ Cô lập tham số để đưa về bài toán dùng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình.
- ☑ Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc hai.

Ví dụ 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log^2_{\sqrt{3}} x - m\log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Vì phương trình có nghiệm nhỏ hơn 1 nên suy ra $0 < x < 1$.

Đặt $\log_{\sqrt{3}} x = t$, với $0 < x < 1 \Rightarrow t < 0$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2 - mt + 1 = 0 \Leftrightarrow t + \dfrac{1}{t} = m$ $(*)$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(-\infty;0)$.

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$ trên khoảng $(-\infty;0)$. ta có:

$f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\notin(-\infty;0)\\t=-1\in(-\infty;0)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$			
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m=-2$ thỏa mãn bài toán. □

Ví dụ 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-m\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\cdot x_2=81$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$. Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1,x_2.

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình đã cho trở thành $t^2-mt+2m-7=0(*)$. Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm t_1,t_2. $\Leftrightarrow m^2-8m+28>0$ thoả mãn với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Theo định lí Vi-ét, ta có

$t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=m\Leftrightarrow\log_3(x_1x_2)=m\Leftrightarrow\log_3 81=m\Leftrightarrow 4=m$ (thỏa mãn).

Vậy với $m=4$ là giá trị cần tìm.

□

Ví dụ 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Với điều kiện $x>-1$, ta có

$\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow mx=(x+1)^2\Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}$. (vì $x=0$ không thỏa mãn).

Xét hàm $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ trên $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. Ta có:

$f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(-1;+\infty)\\x=-1\notin(-1;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m<0\end{array}\right.$. □

Ví dụ 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2 \dfrac{4^x-1}{4^x+1} - m = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = 4^x$, với $x > 0 \Rightarrow t > 1$. Phương trình trở thành $m = \log_2 \dfrac{t-1}{t+1} (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 \dfrac{t-1}{t+1}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có

$f'(t) = \dfrac{2}{(t^2-1)\ln 2} > 0, \forall t > 1$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m < 0$. □

Ví dụ 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$$

có nghiệm thuộc khoảng $(2; 4)$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, do $2 < x < 4 \Rightarrow 0 < x-2 < 2 \Rightarrow t > -1$.

Phương trình đã cho trở thành $(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1} (*)$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(2; 4)$ khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $t > -1$. Ta có:

$f'(t) = \dfrac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \in (-1; +\infty) \\ t = -1 \notin (-1; +\infty) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên khoảng $(-1; +\infty)$

t	-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $-3 \le m < \dfrac{7}{3}$. □

Ví dụ 35. Cho phương trình $\log_5[(m+1)x] = \log_{\sqrt{5}}(x+2)$ với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}(m+1)x = (x+2)^2 \quad (1)\\ x > -2\end{cases}$

$x = 0$ không thỏa (1), nên $(1) \Leftrightarrow m = \dfrac{(x+2)^2}{x} - 1$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x} - 1$ trên $(-2;0)\cup(0;+\infty)$ có:

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$. Bảng biến thiên:

x	-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất khi $\left[\begin{array}{l}m < -1\\ m = 7\end{array}\right.$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 27. Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[16;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$, với $x \geq 16 \Rightarrow t \geq 4$. Phương trình trở thành $\sqrt{t^2-2t-3} = m(t-3)(*)$.

☑ Với $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases}\sqrt{t^2-2t-3} > 0\\ t-3 > 0\end{cases}, \forall t \geq 4$.

☑ Với $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2-2t-3 = m^2(t-3)^2 \Leftrightarrow (1-m^2)t^2 + 2(3m^2-1)t - 3(1+3m^2) = 0$.

- Nếu $m = 1 \Rightarrow t = 3$ không thỏa mãn.
- Nếu $m \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}&\left(1-m^2\right)t^2 + 2\left(3m^2-1\right)t - 3\left(1+3m^2\right) = 0\\ \Leftrightarrow&(t-3)\left[\left(1-m^2\right)t + 1 + 3m^2\right] = 0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}t = 3\\ t = \dfrac{1+3m^2}{m^2-1}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vì $t = 3 \notin [4;+\infty)$ nên để phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow \dfrac{3m^2+1}{m^2-1} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2+5}{m^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{5}$.

□

Bài 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \Rightarrow \log_3^2 x = t^2 - 1$. Với $1 \leqslant x \leqslant 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow 1 \leqslant t \leqslant 2$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t = 2m + 2 (1)$.

Phương trình đã cho có nghiệm trên $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $1 \leqslant t \leqslant 2$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $1 \leqslant t \leqslant 2$, ta thấy $f(t)$ là hàm đồng biến trên đoạn $[1; 2]$. Suy ra $2 = f(1) \leqslant f(t) \leqslant f(2) = 6\ \forall t \in [1; 2]$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2 \leqslant 2m + 2 \leqslant 6 \Leftrightarrow 0 \leqslant m \leqslant 2$. □

Bài 29. Cho phương trình $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2 - 2x + 3\right) = 4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m| + 2\right)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}.\log_2\left(x^2 - 2x + 3\right) = 2^{2|x-m|+2}.\log_2\left(2|x-m| + 2\right)$. $(*)$

Xét hàm $f(t) = 2^t.\log_2 t$ trên $[2; +\infty)$. Ta có $f'(t) = 2^t.\ln 2.\log_2 t + \dfrac{2^t}{t.\ln 2} > 0,\ \forall t > 2$.

Suy ra hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Nhận thấy $(*)$ có dạng $f\left(x^2 - 2x + 3\right) = f\left(2|x-m| + 2\right) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2 = 2(x-m)\\(x-1)^2 = -2(x-m)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 - 4x + 2m + 1 = 0 (1)\\x^2 = 2m - 1 (2)\end{array}\right..$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

- ☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) và (2) đều có nghiệm kép và hai nghiệm này khác nhau
  $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{(1)} = 0\\x^2 = 2m - 1 = 0\end{cases}$. Trường hợp này không có m thỏa mãn.
- ☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm
  $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{(1)} > 0\\x^2 = 2m - 1 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - (2m + 1) > 0\\2m - 1 < 0\end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}.$
- ☑ Trường hợp 3: Phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt
  $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{(1)} < 0\\x^2 = 2m - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - (2m + 1) < 0\\2m - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}.$
- ☑ Trường hợp 4: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) cũng có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm của (1) giống hai nghiệm của (2) hay nói cách khác hai phương trình tương đương. Trường hợp này không có m thỏa mãn.

Vậy $m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ là các giá trị cần tìm. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 30. Cho phương trình $\log_5(5^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{5}} m$, ($m$ là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $25^{x_1}+25^{x_2}\geq 23$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-1$ và $m>0$. Đặt $t=5^x, (t>0)$. Ta có

$$\log_5(5^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{5}} m \Leftrightarrow 5m.5^x-m=5^{2x} \Leftrightarrow t^2-5mt+m=0 \quad (*).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm $t_1,t_2>0$ và $t_1^2+t_2^2 \geqslant 23$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S>0 \\ P>0 \\ S^2-2P\geq 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2-4m\geq 0 \\ m>0 \\ 25m^2-2m-23\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1. \qquad \square$$

Bài 31. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x-\log_3 x^2+3=m$ có nghiệm thực $x\in[1;9]$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_3 x$. Vì hàm số $t(x)=\log_3 x$ là hàm số đồng biến trên $[1;9]$ nên
$0=t(1)\leq t(x)\leq t(9)=2$ hay $0\leq t\leq 2$.
Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t+3=m$.
Xét hàm số $f(t)=t^2-2t+3$ trên $[0;2]$ ta có:
$f'(t)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1$. Bảng biến thiên của hàm số $f(t)=t^2-2t+3$ trên $[0;2]$

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2\leq m\leq 3$. $\square$

Bài 32. Giải các phương trình $\log_3\left(\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right)=x^2+3x+2$.

Lời giải.

Ta thấy: $(2x^2+4x+5)-(x^2+x+3)=x^2+3x+2$.
Do đó, ta đặt: $a=x^2+x+3; b=2x^2+5x+4$ thì ta có được phương trình
$\log_3 a+a=\log_3 b+b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$ (1).
Trong đó, hàm $f(t)=\log_3 t+t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;\infty)$.
Do vậy: $(1)\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow b-a=0\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=-2; x=-1$. $\square$

Bài 33. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_2\left(x^2-2x+5\right)-m\log_{x^2-2x+5}2=5(1)$$

có hai nghiệm phân biệt là nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4(2)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>1$, ta có $(2)\Leftrightarrow x+1>2(x-1)\Leftrightarrow x<3$. Vậy ta có: $1<x<3$.

Đặt $t=\log_2(x^2-2x+5)=\log_2\left((x-1)^2+4\right)\Rightarrow 2<t<3$.

$(1)\Leftrightarrow t-\dfrac{m}{t}=5\Leftrightarrow m=t^2-5t$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-5t$ trên $(2;3)$ ta có:

$f'(t)=2t-5=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$. Bảng biến thiên của hàm số $f(t)=t^2-5t$ trên $(2;3)$

t	2		$\frac{5}{2}$		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	-6

Từ bảng biến thiên ta suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi $-\dfrac{25}{4}<m<-6$. □

Bài 34. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$\log_2^2(x+2)-6\log_2(x+2)+2-m=0$$

có 2 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(-2;14)$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2(x+2)$, với $x\in(-2;14)\Rightarrow t\in(-\infty;4)$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2-6t+2=m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-6t+2$ trên khoảng $(-\infty;4)$. Ta có $f'(t)=2t-6=0\Leftrightarrow t=3$.

t	$-\infty$		3		4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-6

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(-2;14)$ khi $-7<m<-6$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(3x-2)=3$.

A. $x=\dfrac{8}{3}$. **B.** $x=\dfrac{10}{3}$. **C.** $x=\dfrac{16}{3}$. **D.** $x=\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-2)=3 \Leftrightarrow 3x-2=2^3 \Leftrightarrow 3x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$.

A. $x=\dfrac{1}{4}$. **B.** $x=-\dfrac{3}{4}$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x+1=\log_{7+4\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow 2x+1=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $7^{x^2-5x+9}=343$. Tính x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=4$. **B.** $x_1+x_2=6$. **C.** $x_1+x_2=5$. **D.** $x_1+x_2=3$.

Lời giải.

Ta có $7^{x^2-5x+9}=343 \Leftrightarrow 7^{x^2-5x+9}=7^3 \Leftrightarrow x^2-5x+9=3 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$

Do đó tổng hai nghiệm $x_1+x_2=2+3=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x}=\dfrac{1}{4}$ là

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\{1;2\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải.

$2^{x^2-3x}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x}=2^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x=-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Phương trình $3^{x-4}=1$ có nghiệm là

A. $x=-4$. **B.** $x=4$. **C.** $x=0$. **D.** $x=5$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3^{x-4}=3^0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Phương trình $3^{x-4}=1$ có nghiệm là

A. $x=-4$. **B.** $x=5$. **C.** $x=4$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương: $3^{x-4}=1 \Leftrightarrow x-4=\log_3 1=0 \Leftrightarrow x=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

☑ $3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} > 3^3 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$.

☑ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}(x^2-3x) = -1$ là:

A. $\{4\}$. **B.** $\left\{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$.

C. $\{1;-4\}$. **D.** $\{-1;4\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{0,25}\left(x^2-3x\right) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-3x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-3x-4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \text{(nhận)} \\ x=4 & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $S = \{-1;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-2x+4) = 2$ là

A. $\{0;-2\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{0;2\}$.

Lời giải.

Ta có $x^2-2x+4 = 2^2 \Leftrightarrow x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0;2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Phương trình $\log_2(x+1) = 2$ có nghiệm là

A. $x = -3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 8$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

Cách giải: $\log_2(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2^2 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị x thoả mãn $5^{x^2} = 5^x$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $5^{x^2} = 5^x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$.

A. $x=9$. **B.** $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\log_3(x-2)=2\\ \Leftrightarrow\ &x-2=3^2\\ \Leftrightarrow\ &x-2=9\\ \Leftrightarrow\ &x=11.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=11$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tìm tập nghiệm của phương trình $3^{x^2+2x}=1$.

A. $S=\{-1;3\}$. **B.** $S=\{-2;0\}$. **C.** $S=\{-3;1\}$. **D.** $S=\{0;2\}$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2+2x}=1\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2.\end{array}\right.$

Do đó tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2+x}=9$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}3^{x^2+x}=9\ &\Leftrightarrow\ 3^{x^2+x}=3^2\\ &\Leftrightarrow\ x^2+x=2\\ &\Leftrightarrow\ x^2+x-2=0\\ &\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng -2.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-4x)=2$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

$\log_2(x^2-4x)=2\Leftrightarrow x^2-2x=4\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{5}\\x=1+\sqrt{5}.\end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-4x+3}=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $2^{2x^2-4x+3}=2 \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=1 \Leftrightarrow x=1$.
Suy ra phương trình đã cho có đúng một nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Với $a, b \in \mathbb{R}$, nghiệm thực x của phương trình $(a^2+2)^x=b^2+1$ là

A. $\log_{b^2+1}(a^2+2)$. **B.** $\log_{a^2+1}(b^2+2)$. **C.** $\log_{a^2+2}(b^2+1)$. **D.** $\log_{b^2+2}(a^2+1)$.

Lời giải.

Dựa vào định nghĩa lô-ga-rít.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1}-m(2^x+1)>0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$. **B.** $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (0; 1)$. **D.** $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$, $t>0 \Rightarrow t+1>0$.
Bài toán đã cho trở thành
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{t^2}{4(t+1)}>m$, $\forall t>0$. (1)

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2}{4(t+1)}$, $(t>0) \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{4(t+1)^2} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \text{ (loại)} \\ t=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		0 ↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có $m \in (-\infty; 0]$ thảo mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

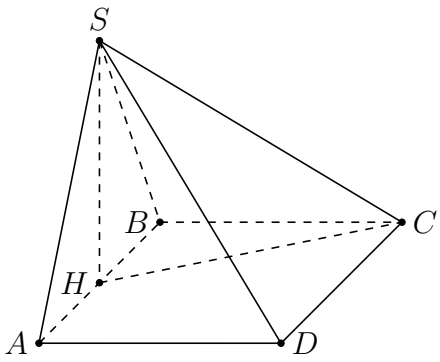
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4a^3}{3}$. Tính độ dài SC.

A. $SC=6a$. **B.** $SC=3a$. **C.** $SC=2a$. **D.** $SC=a\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.

$\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) (do\ (SAB) \perp (ABCD))$.



Ta có $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.
Trong tam giác vuông HBC, ta có

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}.$$

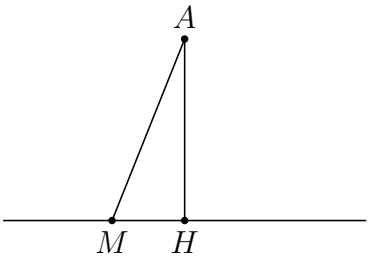
Ta có $SH = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{4a^3}{3}}{4a^2} = a$.
Trong tam giác vuông SHC, ta có $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{6}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x - 4y + z - 12 = 0$ và cách $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của điểm A xuống đường thẳng Δ. Khi đó $AH \leq AM$.



Vậy $\mathrm{d}(A, \Delta)$ lớn nhất khi $H \equiv M$, hay $AM \perp \Delta$.
Ta có $\overleftrightarrow{AM} = (6;-7;1)$.
Gọi $\vec{n}_{(\alpha)} = (3;-4;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Ta có $\left[\overrightarrow{AM}, \overleftrightarrow{n}_{(\alpha)}\right] = (-3;-3;-3)$.

Do $\begin{cases} AM \perp \Delta \\ \Delta \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta$ nhận $\left[\overrightarrow{AM}, \vec{n}_{(\alpha)}\right]$ làm một véc-tơ chỉ phương. Hay $\vec{u}_{\Delta} = (1;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Do $M \in \Delta$ nên phương trình Δ là $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_5(x+1) - \log_5(x-3) = 1$. Tìm S.

A. $S = \{-2;4\}$. **B.** $S = \{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\}$.

C. $S = \{4\}$. **D.** $S = \{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 3$
PT $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-3} = 5 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa). Vậy $S = \{4\}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Phương trình $\log_2(x+1)+\log_2 x=1$ có tập nghiệm là

A. $\{-2;3\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\{1;-2\}$.

Câu 23. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-x^2}$.

A. $S=\{1;-2\}$. **B.** $S=\{-1;2\}$. **C.** $S=\varnothing$. **D.** $S=\{-1;0\}$.

Câu 24. Tìm tập nghiệm của phương trình $\log_2\left[\log\left((x^2-7)+8\right)\right]=0$.

A. $\{1;3\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{-3;3\}$. **D.** $\{-1;-3\}$.

Câu 25. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x+4)=4$.

A. $S=\{-4;12\}$. **B.** $S=\{4\}$. **C.** $S=\{4;8\}$. **D.** $S=\{12\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x+4)=4\Leftrightarrow x+4=2^4\Leftrightarrow x=12$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{12\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\log x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. **B.** $\log_5 x\leq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1$.

C. $\log_{\frac{1}{5}} a>\log_{\frac{1}{5}} b\Leftrightarrow a>b>0$. **D.** $\log_{\frac{1}{5}} a=\log_{\frac{1}{5}} b\Leftrightarrow a=b>0$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{5}} a>\log_{\frac{1}{5}} b\Leftrightarrow b>a>0$ (do $\dfrac{1}{5}<1$).

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tập nghiệm S của phương trình $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0$ là

A. $S=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\left\{\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{\dfrac{-1}{2};2\right\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{1-2x}=\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Tìm tập xác định của hàm số $y=(-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2-x}$.

A. $\mathscr{D}=(-1;2]$. **B.** $\mathscr{D}=[-1;2]$. **C.** $\mathscr{D}(-\infty;2]$. **D.** $\mathscr{D}=(-1;2)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2-x}$ xác định khi $\sqrt{2-x}$ và $y=(-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}$ xác định.

$\sqrt{2-x}$ xác định khi $x\leqslant 2$.

$y=(-x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi $-x^2+3x+4>0\Leftrightarrow -1<x<4$. Vậy ta có điều kiện xác định của hàm số trên là $-1<x\leqslant 2$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Nghiệm của phương trình $\log_2 x=3$ là

A. $x=9$. **B.** $x=6$. **C.** $x=8$. **D.** $x=5$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x=3\Leftrightarrow x=2^3\Leftrightarrow x=8$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x-5)=4$.

A. $x=21$. **B.** $x=3$. **C.** $x=11$. **D.** $x=13$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-5)=4 \Leftrightarrow x-5=2^4 \Leftrightarrow x=21$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Giải phương trình $(2{,}5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

A. $x \geq 1$. **B.** $x=1$. **C.** $x<1$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{7-5x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 7-5x=x+1 \Leftrightarrow x=1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(3x-2)=3$.

A. $x=\frac{29}{3}$. **B.** $x=\frac{11}{3}$. **C.** $x=\frac{25}{3}$. **D.** $x=87$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $3x-2=3^3$ hay $x=\frac{29}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Tìm nghiệm của phương trình $9^x-3^x-6=0$.

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Ta có $9^x-3^x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=3\\3^x=-2\end{array}\right. \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Giải phương trình $\log_2(2x-2)=3$.

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=5$. **D.** $x=4$.

Lời giải.

Điều kiện $x>1$.

$\log_2(2x-2)=3 \Leftrightarrow 2x-2=8 \Leftrightarrow x=5$.

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là $S=\{5\}$.

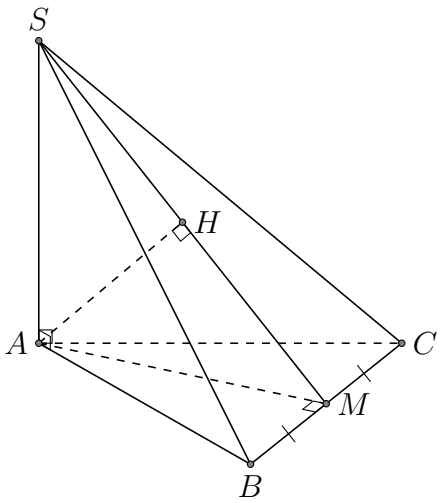
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên bằng SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. d $=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** d $=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** d $=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** d $=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

- ☑ Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $AM \perp BC$.
- ☑ Kẻ AH vuông góc với SM tại H.
- ☑ Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{SA^2}$.
- ☑ Suy ra $\mathrm{d} = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho phương trình $\log_5(5^x-1)\cdot\log_{25}(5^{x+1}-5)=1$. Khi đặt $t=\log_5(5^x-1)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2-1=0$. **B.** $t^2+t-2=0$. **C.** $t^2-2=0$. **D.** $2t^2+2t-1=0$.

Lời giải.

$\log_5(5^x-1)\cdot\log_{25}(5^{x+1}-5)=1 \Leftrightarrow \log_5(5^x-1)\cdot\dfrac{1}{2}\left[1+\log_5(5^x-1)\right]=1.$

Khi đặt $t=\log_5(5^x-1)$, ta được phương trình $t^2+t-2=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho phương trình $9^x-6\cdot3^{x-1}-3=0$. Khi đặt $t=3^x$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $2t^2-3=0$. **B.** $t^2-2t-3=0$. **C.** $t^2-t-3=0$. **D.** $t^2-6t-3=0$.

Lời giải.

Phương trình $9^x-6\cdot3^{x-1}-3=0 \Leftrightarrow 9^x-2\cdot3^x-3=0$.

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, ta được phương trình $t^2-2t-3=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=2$ là

A. $x=\dfrac{5}{2}$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_3(2x+1)=2 \Leftrightarrow 2x+1=3^2 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa điện kiện).

Vậy $x=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Hệ phương trình $\begin{cases}2^{x+y}=8\\2^x+2^y=5\end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}2^{x+y}=8\\2^x+2^y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\2^x+2^y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-x\\(2^x)^2-5.2^x+8=0\end{cases}$$

Hê vô nghiệm vì phương trình $(2^x)^2 - 5.2^x + 8 = 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Nghiệm của phương trình $\log_{2017}(2018x) = 0$.

A. 2017^{2018}. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{2017}(2018x) = 0 \Leftrightarrow 2018x = 1$ hay $x = \dfrac{1}{2018}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Phương trình $\log_3(x+2) = 3$ có nghiệm là

A. 5. **B.** 25. **C.** 7. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x+2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x + 2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow x = 25.$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+3) = 1$.

A. $S\{3\}$. **B.** $S = \{-1\}$. **C.** $S = \{0\}$. **D.** $S = \{1\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $2x + 3 = 3$ hay $x = 0$. Vậy $S = \{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm nghiệm của phương trình $\log_3 x = 2$.

A. $x = 3$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = 8$. **D.** $x = 6$.

Lời giải.

$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Giải phương trình $\log_2(x-2) = 1$.

A. $x = \dfrac{5}{3}$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (2; +\infty)$. Ta có $x - 2 = 2^1 \Leftrightarrow x = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Giải phương trình $2^{x^2+3x} = 1$.

A. $x = 0$, $x = 3$. **B.** $x = 1$, $x = -3$. **C.** $x = 1$, $x = 2$. **D.** $x = 0$, $x = -3$.

Lời giải.

$$2^{x^2+3x}=1 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Phương trình $\log_3(3x-1)=2$ có nghiệm là

A. $x=\dfrac{3}{10}$. **B.** $x=3$. **C.** $x=\dfrac{10}{3}$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Điều kiện: $3x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

$\log_3(3x-1)=2 \Leftrightarrow 3x-1=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Giải phương trình $\log_3(x-2)=211$.

A. $x=3^{211}-2$. **B.** $x=211^3-2$. **C.** $x=211^3+2$. **D.** $x=3^{211}+2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x-2)=211 \Leftrightarrow x-2=3^{211} \Leftrightarrow x=2+3^{211}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2+x}=4$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+x}=4 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho $a>0, b>0$ và $a\neq 1$, $x\in\mathbb{R}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\log_a a=1$. **B.** $a^{\log_a b}=b$.

C. $\log_a b=x \Leftrightarrow a=b^x$. **D.** $\log_a 1=0$.

Lời giải.

Ta thấy $\log_a b=x \Leftrightarrow b=a^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Giải phương trình $\log_2(1-x)=2$.

A. $x=-4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=5$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(1-x)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x=2^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Phương trình $4^x+3\cdot 2^x-4=0$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{ll} 2^x=1 & \\ 2^x=-4 & \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Phương trình $2^{x+1}=8$ có nghiệm là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

Lời giải.

Có $2^{x+1}=8 \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3 \Leftrightarrow x+1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Một người gửi tiết kiệm với lãi xuất không đổi là 8,4%/năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được cả vốn lẫn lãi gấp đôi số tiền ban đầu (lấy giá trị quy tròn)?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải.

Gọi số tiền gửi ban đầu là A. Khi đó số tiền nhận được sau n năm là

$$T=A\left(1+8{,}4\%\right)^n=1{,}084^n\cdot A.$$

Ycbt $\Leftrightarrow 1{,}084^n\cdot A=2A \Leftrightarrow 1{,}084^n=2 \Leftrightarrow n\approx 8{,}59$.

Vậy sau 9 năm người đó sẽ nhận được cả vốn lẫn lãi gấp đôi số tiền ban đầu.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Phương trình $4^{2x-4}=16$ có nghiệm là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Ta có $4^{2x-4}=16 \Leftrightarrow 4^{2x-4}=4^2 \Leftrightarrow 2x-4=2 \Leftrightarrow x=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Phương trình $3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1<x_2$, chọn phát biểu đúng.

A. $x_1x_2=-1$. **B.** $2x_1+x_2=0$. **C.** $x_1+2x_2=-1$. **D.** $x_1+x_2=-2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^x+1=0$$

Đặt $t=3^x>0$, phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned}&3t^2-4t+1=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}3^x=1\\ 3^x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\ x_2=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 57. Giải phương trình $\log_6 x^2 = 2$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $x \in \{\pm 36\}$. **B.** $x \in \{\pm 6\}$. **C.** $x \in \{\pm\sqrt{6}\}$. **D.** $x = 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 = 6^2 \Leftrightarrow x = \pm 6$$

Chọn đáp án B □

Câu 58. Giải phương trình $\log_3(x-1) = 2$.

A. $x = 10$. **B.** $x = 7$. **C.** $x = 9$. **D.** $x = 8$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Phương trình tương đương với $x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án A □

Câu 59. Phương trình $2^{3-4x} = \dfrac{1}{32}$ có nghiệm là bao nhiêu?

A. $x = -3$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

$2^{3-4x} = \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{3-4x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3 - 4x = -5 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Giải phương trình $\log_3(x-4) = 0$.

A. $x = 1$. **B.** $x = 6$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Hỏi phương trình $2^{2x^2-5x-1} = \dfrac{1}{8}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $2^{2x^2-5x-1} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \vee x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 2018x = 3$.

A. $x = 3 + \log_2 2018$. **B.** $x = \dfrac{4}{1009}$. **C.** $x = 3 - \log_2 2018$. **D.** $x = \dfrac{3^2}{2018}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2 2018x = 3 \Leftrightarrow 2018x = 2^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{1009}$ (thỏa điều kiện).

Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho phương trình $3^{2x+2} - 2 \cdot 6^x - 7 \cdot 4^x = 0$. Bằng cách đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ ta thu được phương trình nào sau đây?

A. $7t^2 - 2t - 9 = 0$. **B.** $7t^2 + 2t - 9 = 0$. **C.** $3t^2 - 2t - 7 = 0$. **D.** $3t^2 - 2t + 7 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&3^{2x+2}-2\cdot 6^x-7\cdot 4^x=0\\ \Leftrightarrow&7\cdot 4^2+2\cdot 6^x-9\cdot 9^x=0\\ \Leftrightarrow&7\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^x-9=0\\ \Leftrightarrow&7\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-9=0\end{aligned}$$

Khi đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, ta được phương trình: $7t^2+2t-9=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Giải phương trình $2^x=3$.

A. $x=2^{\sqrt{3}}$. **B.** $x=\log_2 3$. **C.** $x=\log_3 2$. **D.** $x=3^{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $2^x=3\Leftrightarrow x=\log_2 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Tìm nghiệm của phương trình $2^x=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Ta có $2^x=\left(\sqrt{3}\right)^x\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho phương trình $\log^2 x+3\log 10x=0$. Nếu đặt $t=\log x$ thì ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+3t+3=0$. **B.** $t^2+3t-3=0$. **C.** $t^2+3t=0$. **D.** $t^2+10t=0$.

Lời giải.

Ta có $\log^2 x+3\log 10x=0\Leftrightarrow\log^2 x+3\log 10+3\log x=0$.

Đặt $t=\log x$ ta được phương trình $t^2+3t+3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho phương trình $4^x-2^{x+1}+2=0$. Đặt $t=2^x$ thì ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2-t+2=0$. **B.** $4t^2-t+2=0$. **C.** $t^2+2t+2=0$. **D.** $t^2-2t+2=0$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow(2^x)^2-2\cdot 2^x+2=0$. Đặt $t=2^x$ ta được phương trình $t^2-2t+2=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x^2}=9$.

A. $S=\{\sqrt{2};2\}$. **B.** $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$. **C.** $S=\{-\sqrt{2};2\}$. **D.** $S=\{-2;2\}$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow 3^{x^2}=3^2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Giải phương trình $\log_6(x-1)=1$.

A. $x=2$. **B.** $x=7$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=6$.

Lời giải.

Ta có $\log_6(x-1)=1 \Leftrightarrow x-1=6^1 \Leftrightarrow x=7$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=0$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x>1$. Ta có

$$\begin{aligned}\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=0 &\\ \Leftrightarrow \log_2[(x+1)(x-1)]=0&\\ \Leftrightarrow x^2-1=1&\\ \Leftrightarrow x^2=2&\\ \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ (\text{loại } x=-\sqrt{2}).&\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm thực.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Tìm nghiệm x_0 của phương trình $3^{2x+1}=21$.

A. $x_0=\log_9 21$. **B.** $x_0=\log_{21} 8$. **C.** $x_0=\log_{21} 3$. **D.** $x_0=\log_9 7$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1}=21 \Leftrightarrow 3^{2x}=7 \Leftrightarrow 9^x=7 \Leftrightarrow x=\log_9 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5)=4$.

A. $x=21$. **B.** $x=3$. **C.** $x=11$. **D.** $x=13$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-5)=4 \Leftrightarrow x-5=2^4 \Leftrightarrow x=21$.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực.

A. $m\geq 1$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\neq 0$.

Lời giải.

Vì $3^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực thì $m>0$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tìm nghiệm của phương trình $5^{2018x}=\sqrt{5}^{2018}$.

A. $x=1-\log_5 2$. **B.** $x=-\log_5 2$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}5^{2018x}=\sqrt{5}^{2018} &\Leftrightarrow 5^{2018x}=5^{1009}\\ &\Leftrightarrow 2018x=1009\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 75. Tìm nghiệm của phương trình $\log(x-1)=2$.

A. 99. **B**. 101. **C**. e^2-1. **D**. e^2+1.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x-1=10^2 \Leftrightarrow x=101$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A\mathrm{e}^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Theo số liệu từ tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2015 là 91,7 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam trong giai đoạn $2015-2030$ ở mức không đổi là 1,1%. Hãy ước tính dân số Việt Nam năm 2030 (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A. 109,35 triệu người. **B**. 105,97 triệu người. **C**. 477,48 triệu người. **D**. 108,15 triệu người.

Lời giải.

$S=A\mathrm{e}^{Nr} \Rightarrow S=91{,}7\cdot \mathrm{e}^{15\cdot 1{,}1\%}=108{,}15$ triệu người.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $2^x=5$ và $4^y=20$. Tính $x+2y$.

A. $2+2\log_2 5$. **B**. $2+\log_2 5$. **C**. $1+2\log_2 5$. **D**. $4+2\log_2 5$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}2^x=5\\4^y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\log_2 5\\y=\log_4 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\log_2 5\\y=1+\dfrac{1}{2}\log_2 5\end{cases} \Rightarrow x+2y=2+2\log_2 5.$

Chọn đáp án A □

Câu 78. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-5x-1}=\dfrac{1}{8}$ là

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&2^{2x^2-5x-1}=2^{-3}\\ \Leftrightarrow\ &2x^2-5x-1=-3\\ \Leftrightarrow\ &2x^2-5x+2=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Phương trình $\log_2(x-2)=1$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B**. $x=4$. **C**. $x=3$. **D**. $x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2(x-2)=1 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-5x+6}=1$ là

A. $\{-6;-1\}$. **B.** $\{2;3\}$. **C.** $\{1;6\}$. **D.** $\{1;2\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-5x+6}=1=2^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 81. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2^x=3$, $3^y=4$. Tính giá trị của biểu thức $P=8^x+9^y$.

A. 43. **B.** 17. **C.** 24. **D.** $\log_2^3 3+\log_3^2 4$.

Lời giải.

$P=8^x+9^y=(2^x)^3+(3^y)^2=3^3+4^2=43.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Nghiệm của phương trình $\log_4(x-1)=3$ là

A. 66. **B.** 63. **C.** 68. **D.** 65.

Lời giải.

$x=1+4^3=65.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Tìm nghiệm thực của phương trình $2^x=7$.

A. $x=\sqrt{7}$. **B.** $x=\dfrac{7}{2}$. **C.** $x=\log_2 7$. **D.** $x=\log_7 2$.

Lời giải.

Ta có $2^x=7 \Leftrightarrow x=\log_2 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Nếu $\log x=\dfrac{2}{3}\log a-\dfrac{1}{5}\log b$ thì x bằng

A. $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{5}}$. **B.** $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{5}}$. **C.** $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{5}}$. **D.** $a^{\frac{3}{2}}b^{-5}$.

Lời giải.

Ta có $\log x=\dfrac{2}{3}\log a-\dfrac{1}{5}\log b=\log a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow x=a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{5}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $(\log 10x)^2-3\log(100x)=-5$.

A. $T=12$. **B.** $T=110$. **C.** $T=11$. **D.** $T=10$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(1+\log x)^2-3(2+\log x)+5=0 \Leftrightarrow \log^2 x-\log x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x=0 \\ \log x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=10 \end{array}\right..$$

Do đó $T = 11$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Nghiệm của phương trình $\log_4(x+1) = 3$ là

A. $x = 66$. **B.** $x = 63$. **C.** $x = 68$. **D.** $x = 65$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$, với điều kiện, phương trình $\Leftrightarrow x + 1 = 4^3 = 64 \Leftrightarrow x = 63$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Phương trình $\log_2(3x-2) = 3$ có nghiệm là

A. $x = \dfrac{8}{3}$. **B.** $x = \dfrac{10}{3}$. **C.** $x = \dfrac{16}{3}$. **D.** $x = \dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Trong điều kiện $x > \dfrac{2}{3}$, phương trình tương đương với $3x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Nghiệm thực của phương trình $2^{x-3} = 8$ là

A. $x = 0$. **B.** $x = -6$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 6$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $2^{x-3} = 2^3 \Leftrightarrow x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Phương trình $\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2) + 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{6} \\ x \leq -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{6}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3(x^2-6) = \log_3 3(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 6 = 3(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Phương trình $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x>0 \\ x-3>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

$$\begin{aligned} & \log_2 x+\log_2(x-3)=2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2 x(x-3)=2 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-3)=2^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-3x-4=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (loại vì } x>3) \\ x=4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Giải phương trình $\log_3(x-1)=2$

A. $x=10$. **B.** $x=11$. **C.** $x=8$. **D.** $x=7$.

Lời giải.

Tập xác định của phương trình là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. Với điều kiện đó, phương trình

$$\log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Tập nghiệm của phương trình $9^{x+1}=27^{2x+1}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\left\{-\dfrac{1}{4};0\right\}$.

Lời giải.

Ta có $9^{x+1}=27^{2x+1} \Leftrightarrow 9\cdot 9^x=27\cdot 729^x \Leftrightarrow 81^x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Phương trình $\log_3(2x+1)=3$ có nghiệm duy nhất bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\log_3(2x+1)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ 2x+1=27 \end{cases} \Leftrightarrow x=13.$

Chọn đáp án B □

Câu 94. Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{5}}|x+1|=2$ là

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{-10;2\}$. **C.** $S=\{-4;2\}$. **D.** $S=\{-3;2\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{5}}|x+1|=2 \Leftrightarrow |x+1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho phương trình $9^x+2\cdot 3^x-3=0$. Khi đặt $3^x=t$ ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+2t-3=0$. **B.** $12^{2x+1}=0$. **C.** $2t^2-3=0$. **D.** $t^2+t-3=0$.

Lời giải.

Xét phương trình $9^x+2\cdot 3^x-3=0$. Đặt $3^x=t>0$, ta được phương trình $t^2+2t-3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Phương trình $\log_5(x+5)=2$ có nghiệm là

A. $x=20$. **B.** $x=5$. **C.** $x=27$. **D.** $x=30$.

Lời giải.

$\log_5(x+5)=2\Leftrightarrow x+5=25\Leftrightarrow x=20$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=20$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Số nghiệm của phương trình $2^{-x^2+x+2}=1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $2^{-x^2+x+2}=1\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=2.\end{array}\right.$

Phương trình có tập nghiệm $S=\{-1;2\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=2$ là

A. $x=3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=4$. **D.** $x=-3$.

Lời giải.

$\log_2(x-1)=2\Leftrightarrow x-1=4\Leftrightarrow x=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Nghiệm của phương trình $2^{7x-1}=8^{2x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $2^{7x-1}=8^{2x-1}\Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{3(2x-1)}\Leftrightarrow 7x-1=3(2x-1)\Leftrightarrow x=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-4x)=2$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

$\log_2(x^2-4x)=2\Leftrightarrow x^2-2x=4\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{5}\\ x=1+\sqrt{5}.\end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. B	5. B	6. C	7. D	8. D	9. D	10. C
11. D	12. C	13. D	14. A	15. A	16. C	17. C	18. A	19. D	20. D
21. C	22. C	23. B	24. C	25. D	26. C	27. A	28. A	29. C	30. A
31. B	32. A	33. B	34. C	35. A	36. B	37. B	38. C	39. C	40. D
41. B	42. C	43. B	44. B	45. B	46. D	47. C	48. D	49. C	50. C
51. C	52. C	53. A	54. A	55. A	56. C	57. B	58. A	59. C	60. C
61. B	62. B	63. B	64. B	65. A	66. A	67. D	68. B	69. B	70. C
71. D	72. A	73. C	74. C	75. B	76. D	77. A	78. C	79. B	80. B
81. A	82. D	83. C	84. C	85. C	86. B	87. B	88. D	89. C	90. A
91. A	92. B	93. B	94. C	95. A	96. A	97. C	98. B	99. C	100. A

2 Mức độ nhận biết

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là

A. 0. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Phương pháp:

Phương trình $a^x=b\,(a,b>0,a\neq 1)\Leftrightarrow x=\log_a b$.

Cách giải:

Ta có: $2^{2x^2-7x+5}=1\Leftrightarrow 2^{2x^2-7x+5}=2^0\Leftrightarrow 2x^2-7x+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x>\log_2(2x+1)$ là

A. $S=\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B**. $S=\varnothing$. **C**. $S=(-\infty;-1)$. **D**. $S=(1;3)$.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Với $a>1$: $\log_a x>\log_a y\Leftrightarrow x>y$.

+ Với $0<a<1$: $\log_a x>\log_a y\Leftrightarrow x<y$.

Cách giải:

Ta có: $\log_2 x>\log_2(2x+1)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>2x+1 \\ x>0 \\ 2x+1>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<-1 \\ x>0 \\ x>-\frac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x>\log_2(2x+1)$ là $S=\varnothing$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Phương trình $\ln(x-2)\cdot\ln(x+1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$, với điều kiện trên ta có

$\ln(x-2)\cdot\ln(x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(x-2)=0 \\ \ln(x+1)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=1 \\ x+1=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ (nhận)} \\ x=0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Phương trình $7^{2x^2+6x+4}=49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7^{2x^2+6x+4}=7^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-x+2)=1$

A. $\{0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-x+2>0$.

$$\log_2(x^2-x+2)=1 \Leftrightarrow x^2-x+2=2 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x)=2-x$

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\log_3(7-3^x)=2-x \Leftrightarrow 7-3^x=3^{2-x} \Leftrightarrow 7-3^x=\frac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2-7\cdot 3^x+9=0.$ $(*)$

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa $3^{x_1}+3^{x_2}=7;\ 3^{x_1}\cdot 3^{x_2}=9$,

suy ra $3^{x_1+x_2}=3^2 \Leftrightarrow x_1+x_2=2$

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\{1\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{1;3\}$.

Lời giải.

Ta có $9^x-4\cdot 3^x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x\cdot\log_{16} x=\frac{81}{24}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Ta có

$$\log_2 x\cdot\log_4 x.\log_8 x\cdot\log_{16} x=\frac{81}{24} \Leftrightarrow \log_2 x\cdot\log_{2^2} x\cdot\log_{2^3} x\cdot\log_{2^4} x=\frac{81}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\log_2^4 x=\frac{81}{24} \Leftrightarrow \log_2^4 x=81 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=3 \\ \log_2 x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=\frac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Do đó tích các nghiệm của phương trình bằng 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $9^x + 2.3^{x+1} - 7 = 0$ là

A. 0. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x, t > 0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \ \text{(nhận)} \\ t = -7 \ \text{(loại)} \end{bmatrix}$.

Với $t = 1$ thì $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là

A. $x = 2$. **B**. $x = -3$. **C**. $x = -2$. **D**. $x = 1$.

Lời giải.

$2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 7x - 1 = 6x - 3 \Leftrightarrow x = -2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 4x) = 2$ bằng

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Để logarit có nghĩa thì $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 4$.

Khi đó $\log_2(x^2 - 4x) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4x) = \log_2 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{2} > 4$ hoặc $x = 2 - 2\sqrt{2} < 0$, thỏa mãn điều kiện. Phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Số nghiệm nguyên của phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + 1 = 0$ bằng

A. 0. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

$4^{x+1} - 2^{x+2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là

A. 6. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 0.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp đưa về cùng cơ số.

Sử dụng các công thức

a) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$. b) $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ với $(a; b > 0; a \neq 1)$.

Cách giải:

Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \log_2 |x| - \log_2 3 = 1$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{|x|}{3} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{3} = 2 \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ (thoả mãn)} \\ x = -6 \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$

Tổng các nghiệm của phương trình là $6 + (-6) = 0$.

Chú ý: $\log_a x^2 = \log_a |x|$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$ là

A. $\{4\}$. **B.** $\{1; -4\}$.

C. $\left\{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$. **D.** $\{-1; 4\}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

Cách giải:

Điều kiện: $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$

Ta có $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0,25^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(nhận)} \\ x = 4 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-1; 4\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = -2$.

Lời giải.

Ta có: $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Phương trình $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Đặt $P = 2x_1 + 3x_2$. Khi đó

A. $P = 3\log_3 2$. **B.** $P = 3\log_2 3$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 2\log_3 2$.

Lời giải.

Ta có $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3. \end{array}\right.$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0$, $x_2 = \log_2 3$.

Vậy $P = 2x_1 + 3x_2 = 3\log_2 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Phương trình $\log_3(3x - 2) = 3$ có nghiệm là

A. $x = \dfrac{29}{3}$. **B.** $x = 87$. **C.** $x = \dfrac{11}{3}$. **D.** $x = \dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $\log_3(3x - 2) = 3 \Leftrightarrow \log_3(3x - 2) = \log_3 3^3 \Leftrightarrow 3x - 2 = 27 \Leftrightarrow x = \dfrac{29}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Phương trình $3^{1-x}=2+\left(\frac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

$$3^{1-x}=2+\left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+2=0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^x=1\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\log_3 2.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm âm.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Nghiệm của phương trình $9^x-4.3^x-45=0$ là

A. $x=9$. **B**. $x=-5$ hoặc $x=9$.

C. $x=2$ hoặc $x=\log_3 5$. **D**. $x=2$.

Lời giải.

$$9^x-4.3^x-45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=9\\ \\ 3^x=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 20. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2<0$.

A. $S=(-1;1)$. **B**. $S=(-1;0)$. **C**. $S=(-1;1)\setminus\{0\}$. **D**. $S=(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x^2<0 \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ x^2<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ -1<x<1\end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;1)\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

A. 2. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+4x>0\\ 2x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-4\end{array}\right.\\ x>-\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3(x^2+4x)-\log_3(2x+3)=0 \Leftrightarrow \log_3\frac{x^2+4x}{2x+3}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{2x+3}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x=2x+3$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \\ x=-3 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{3}} x-5\log_3 x+4=0$. Tính T

A. $T=84$. **B.** $T=4$. **C.** $T=5$. **D.** $T=-5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$. Ta có

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x-5\log_3 x+4=0 \Leftrightarrow \log^2_3 x-5\log_3 x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x=1 \\ \\ \log_3 x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \\ x=81. \end{array}\right.$$

Vậy $T=84$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho $\log_a b=\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$. **B.** $P=\sqrt{3}-1$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$. **D.** $P=\sqrt{3}+1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\log_a \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\log_a \dfrac{\sqrt{b}}{a}} \\ &= \frac{\log_a \sqrt{b}-\log_a \sqrt{a}}{\log_a \sqrt{b}-\log_a a} \\ &= \frac{\dfrac{1}{2}\log_a b-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}\log_a b-1} \\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Nếu $3^{2x}+9=10\cdot 3^x$ thì giá trị của x^2+1 bằng

A. 1 và 5. **B.** 5. **C.** 0 và 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3^{2x}+9=10\cdot 3^x \\ \Leftrightarrow\ & 3^{2x}-10\cdot 3^x+9=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} 3^x&=1\\ 3^x&=9 \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} x&=0\\ x&=2. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Với $x=0$ thì $x^2+1=1$.
Với $x=2$ thì $x^2+1=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)=0$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 5.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x^2-5x+7=\left(\frac{1}{2}\right)^0$, tổng các nghiệm của phương trình này là 5 (theo định lý Vi-et).

Chọn đáp án D □

Câu 26. Phương trình $2^{x-2}=3^{x^2+2x-8}$ có một nghiệm dạng $x=\log_a b-4$ với a, b là các số nguyên dương thuộc khoảng $(1;5)$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 6. **B.** 14. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & (x-2)\log_3 2=x^2+2x-8 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)\log_3 2=(x-2)(x+4) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} x&=2\\ x&=\log_3 2-4. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy $a=3$; $b=2$ nên $a+2b=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)=\log_2(2x)$ là

A. $S=\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$. **B.** $S=\left\{1+\sqrt{2}\right\}$.

C. $S=\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}$. **D**. $S=\{2;4\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2-1)=\log_2(2x)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=2x\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-1=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=2$.

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

☑ Điều kiện $x>1$.

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\log_2 x+\log_2(x-1)=2 &\Leftrightarrow \log_2 x(x-1)=2\Leftrightarrow x(x-1)=2\\ &\Leftrightarrow x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.\!.\end{aligned}$$

☑ Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{x+\sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 2. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&9^x-6^x=2^{2x+1}\\ \Leftrightarrow\ &9^x-6^x=2\cdot 4^x\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}=2\quad(\text{nhận})\\\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}=-1\quad(\text{loại})\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &x=\log_{\frac{3}{2}}2>0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình không có nghiệm âm nào.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2-\log_2 3=1$ là

A. 6. **B**. 0. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Xét phương trình $\log_4 x^2-\log_2 3=1$, điều kiện $x\neq 0$.

Với điều kiện phương trình $\Leftrightarrow\log_4 x^2=1+\log_2 3=\log_2 6=\log_4 36\Leftrightarrow x^2=36\Leftrightarrow x=\pm 6$.

Do đó tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu ? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. $218,64$ triệu đồng. **B**. $208,25$ triệu đồng. **C**. $210,45$ triệu đồng. **D**. $209,25$ triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 6 tháng: $100 \cdot (1+3\%)^2$.

Tổng số tiền thu được sau 1 năm: $[100(1+3\%)^2+100] \cdot (1+3\%)^2 = 218,64$ triệu đồng

Chọn đáp án A □

Câu 32. Số nghiệm của phương trình $(\log_2 4x)^2 - 3\log_{\sqrt{2}} x - 7 = 0$ là

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc), \log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$.

Cách giải: ĐKXĐ: $x > 0$.

Ta có: $(\log_2 4x)^2 - 3\log_{\sqrt{2}} x - 7 = 0 \Leftrightarrow (2+\log_2 x)^2 - 6\log_2 x - 7 = 0$.

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x &= -1 \\ \log_2 x &= 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x &= \dfrac{1}{2} \\ x &= 8 \end{array}\right. .$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{1}{2}, x = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Số nghiệm của phương trình $\ln(x^2-6x+7) = \ln(x-3)$ là

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2-6x+7 = x-3 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Tìm nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1} = 2-\sqrt{3}$.

A. $x = -\dfrac{3}{4}$. **B**. $x = \dfrac{1}{4}$. **C**. $x = -\dfrac{1}{4}$. **D**. $x = -1$.

Lời giải.

$(7+4\sqrt{3})^{2x+1} = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{4x+2} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow 4x+2 = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

A. 128. **B**. 64. **C**. 9. **D**. 512.

Lời giải.

Cách 1: Điều kiện: $x>0$. $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\\ \log_2 x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}\\ x=2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}\end{array}\right.$ (nhận).

Vậy $x_1x_2=2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}\cdot 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}=128$

Cách 2: Điều kiện: $x>0$. $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0$là phương trình bậc 2 theo $\log_2 x$

có $\Delta=(-7)^2-4.1.9=13>0$. $\Delta=(-7)^2-4.1.9=13>0$

Theo định lý Vi-et ta có: $\log_2 x_1+\log_2 x_2=7\Leftrightarrow \log_2(x_1x_2)=7\Leftrightarrow x_1x_2=2^7=128$

Chọn đáp án A ☐

Câu 36. Biết rằng α, β là các số thực thỏa mãn $2^\beta\left(2^\alpha+2^\beta\right)=8\left(2^\alpha+2^{-\beta}\right)$. Giá trị của $\alpha+2\beta$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $2^\beta\left(2^\alpha+2^\beta\right)=8\left(2^\alpha+2^{-\beta}\right)\Leftrightarrow 2^\beta\left(2^\alpha+2^\beta\right)=8\dfrac{2^\alpha+2^\beta}{2^{\alpha+\beta}}$

$$\Leftrightarrow \left(2^\alpha+2^\beta\right)\left(2^\alpha-\frac{8}{2^{\alpha+\beta}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2^\beta-\frac{8}{2^{\alpha+\beta}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{\alpha+2\beta}=8$$

$$\Leftrightarrow \alpha+2\beta=3.$$

Vậy $\alpha+2\beta=3$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 37. Nghiệm của phương trình $2^{x-3}=\dfrac{1}{2}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $2^{x-3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2^{x-3}=2^{-1}\Leftrightarrow x-3=-1\Leftrightarrow x=2$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 38. Nghiệm các phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là

A. $x=4$. **B.** $x=\dfrac{7}{2}$. **C.** $x=\dfrac{9}{2}$. **D.** $x=5$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$.

$\log_3(2x-1)=2\Leftrightarrow 2x-1=3^2=9\Leftrightarrow 2x=10\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn).

Vậy $x=5$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án D ☐

Câu 39. Xác định số thực x để dãy số $\log 2;\log 7;\log x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

A. $x=\dfrac{7}{2}$. **B.** $x=\dfrac{49}{2}$. **C.** $x=\dfrac{2}{49}$. **D.** $x=\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Phương pháp

Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng thì ta có $2b = a + c$.

Cách giải

Điều kiện $x > 0$.

Ta có 3 số $\log 2; \log 7; \log x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng
nên $2\log 7 = \log 2 + \log x$

$\Leftrightarrow \log 7^2 = \log 2x$

$\Leftrightarrow 2x = 49 \Leftrightarrow x = \dfrac{49}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Số nghiệm thực của phương trình $\log_3 x + \log_3(x-6) = \log_3 7$.

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $x > 6$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_3\left(x^2 - 6x\right) = \log_3 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7. \end{array}\right.$$

So với điều kiện, phương trình có một nghiệm $x = 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$ là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{2(x-1)} + 16 \cdot 2^{x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-1} = -8 + 2\sqrt{17} \\ 2^{x-1} = -8 - 2\sqrt{17} \quad \text{(VN)} \end{array}\right. \\ &\Rightarrow \quad x - 1 = \log_2\left(-8 + 2\sqrt{17}\right) \Leftrightarrow x = 1 + \log_2\left(-8 + 2\sqrt{17}\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7 - 3^x) = 2 - x$ bằng

A. 2. **B**. 1. **C**. 7. **D**. 3.

Lời giải.

$\log_3(7 - 3^x) = 2 - x \Leftrightarrow 7 - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7 - 3^x = \dfrac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 9 = 0. \quad (*)$

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 7 \\ 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 9 \end{cases} \Rightarrow 3^{x_1+x_2} = 3^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1$ là

A. $\{0\}$. **B**. $\{0; 1\}$. **C**. $\{-1; 0\}$. **D**. $\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - x + 2 > 0$, đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_2\left(x^2 - x + 2\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $9^x - 4.3^x + 3 = 0$. Biết $x_1 < x_2$, tìm x_1.

A. $x_1 = 0$. **B.** $x_1 = 1$. **C.** $x_1 = -1$. **D.** $x_1 = 2$.

Lời giải.

$9^x - 4.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Vậy nghiệm $x_1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Tìm các giá trị của m để phương trình $5^{x-1} = m$ có nghiệm thực?

A. $m \geq 0$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m > 1$.

Lời giải.

Vì $5^{x-1} \in (0; +\infty)$ nên điều kiện có nghiệm là $m > 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Số nghiệm của phương trình $6^{2x^2-5x+2} = 1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $4^{x^2} - 3.2^{x^2} - 4 = 0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 48. Số nghiệm của phương trình $10^{\log x} = x^2 + 3x$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 49. Phương trình $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{6}$.

$\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1 \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x^2 - 6}{x - 2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 6}{x - 2} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có một nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho phương trình $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ có một nghiệm duy nhất là a. Tính $P = a \log_3 4 + 1$.

A. $P = 5$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 4^x - 2^{x+1} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2^x = 3 \\ 2^x = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \log_2 3. \end{aligned}$$

Suy ra $P = \log_2 3 \cdot \log_3 4 + 1 = \log_2 4 + 1 = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Họ nghiệm của phương trình $4^{\tan^2 x}+3\cdot 2^{\tan^2 x}-4=0$ là

A. $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x\neq 0$. $(*)$

Ta có

$$\begin{aligned}
&4^{\tan^2 x}+3\cdot 2^{\tan^2 x}-4=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(2^{\tan^2 x}+4\right)\left(2^{\tan^2 x}-1\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &2^{\tan^2 x}=1\\
\Leftrightarrow\ &\tan^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x=0,\ (\text{thỏa } (*))\\
\Leftrightarrow\ &x=k\pi, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Nghiệm của phương trình $3^x\cdot 2^{x+1}=72\cdot 6^a$ là

A. $x=a+1$. **B.** $x=2a$. **C.** $x=a+2$. **D.** $x=a$.

Lời giải.

Ta có $3^x\cdot 2^{x+1}=72\cdot 6^a\Leftrightarrow 6^x=6^{a+2}\Leftrightarrow x=a+2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Tổng hai nghiệm $x_1;x_2$ của phương trình $\log_2\left(2^{(a^2+1)x}+4\cdot 3^{(a^2+1)x}-6^{(a^2+1)x}\right)=2$ là

A. $\dfrac{1}{a^2+1}$. **B.** a^2+1. **C.** $\dfrac{2}{a^2+1}$. **D.** $2(a^2+1)$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned}
&\log_2\left(2^{(a^2+1)x}+4\cdot 3^{(a^2+1)x}-6^{(a^2+1)x}\right)=2\\
\Leftrightarrow\ &2^{(a^2+1)x}+4\cdot 3^{(a^2+1)x}-6^{(a^2+1)x}=4\\
\Leftrightarrow\ &\left[3^{(a^2+1)x}-1\right]\cdot\left[2^{(a^2+1)}-4\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3^{(a^2+1)x}-1=0\\2^{(a^2+1)x}-4=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{2}{a^2+1}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tổng hai nghiệm $x_1+x_2=\dfrac{2}{a^2+1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Giá trị của m để phương trình $16^{x+1}+4^{x-1}-5m=0$ có nghiệm duy nhất là

A. $m\leq 0$. **B.** $m=-\dfrac{1}{192}$. **C.** $m>0$. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

Xét $f(x)=16^{x+1}+4^{x-1}$, ta có $\begin{cases} f'(x)=16^{x+1}\ln 16+4^{x-1}\ln 4>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty. \end{cases}$

Do vậy, $16^{x+1}+4^{x-1}-5m=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 5m>0\Leftrightarrow m>0$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Nghiệm của phương trình $\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)^{(a^2+1)x}-\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]\left[4^x-(b^2+2)\right]=0$ là

A. $x=-\dfrac{1}{a^2+1}\vee x=\log_4(b^2+2)$.
B. $x=\dfrac{1}{a^2+1}\vee x=\dfrac{1}{2}\log_2(b^2+2)$.
C. $x=-\dfrac{1}{a^2+1}\vee x=\log_2 4$.
D. $x=-\dfrac{1}{a^2+1}\vee x=b^2+2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\left[\begin{array}{l}(3-2\sqrt{2})^{(a^2+1)x}=(3-2\sqrt{2})^{-1}\\ 4^x=b^2+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{a^2+1}\\ x=\log_4\left(b^2+2\right).\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 56. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1|=2$.

A. $S=\{-3;2\}$.
B. $S=\{-10;2\}$.
C. $S=\{3\}$.
D. $S=\{-4;2\}$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow |x+1|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-4\end{array}\right.$. Vậy $S=\{-4;2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x-2^{2-x}=\sqrt{2}$.

A. 0.
B. 2.
C. 1.
D. 4.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$ $(t>0)$, ta có phương trình

$$t-\frac{4}{t}=\sqrt{2}\Leftrightarrow t^2-\sqrt{2}t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\sqrt{2}\\ t=-\sqrt{2}\,(\text{loại})\end{array}\right..$$

Từ đó suy ra $2^x=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Số nghiệm của phương trình $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$ là

A. 1.
B. 0.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.

Điều kiện $x>-1$.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \ln\left[(x+1)(x+3)\right] = \ln(x+7) \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(x+3) = x+7 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=-4 \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm.
Chọn đáp án A □

Câu 59. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2$ và đường thẳng $y=5x-6$ là
A. 3. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-2x^2=5x-6 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của hai đồ thị đã cho là 3.
Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho phương trình $4^x-(10m+1)\cdot 2^x+32=0$, biết rằng phương trình này có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1x_2}=1$. Khi đó, khẳng định nào sau đây về m là đúng?
A. $0<m<1$. **B**. $2<m<3$. **C**. $-1<m<0$. **D**. $1<m<2$.

Lời giải.

Đặt $2^x=t,\ (t>0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-(10m+1)t+32=0\,(*)$.
Để phương trình ban đầu có hai nghiệm x_1, x_2 thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(10m+1)^2-4\cdot 32>0 \\ 10m+1>0 \\ 32>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (10m+1-8\sqrt{2})\cdot(10m+1+8\sqrt{2})>0 \\ m>-\dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{8\sqrt{2}-1}{10} \\ m>-\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m>\frac{8\sqrt{2}-1}{10}.$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} t_1+t_2=10m+1 \\ t_1\cdot t_2=32. \end{cases}$
Với $t_1\cdot t_2=32 \Rightarrow 2^{x_1+x_2}=32 \Leftrightarrow x_1+x_2=5$.
Lại có $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1x_2}=1 \Leftrightarrow x_1+x_2+1=x_1x_2$ nên $x_1x_2=6$.
Khi đó ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \Rightarrow t_1=4 \\ X=3 \Rightarrow t_2=8. \end{array}\right.$
Mặt khác, $t_1+t_2=10m+1 \Leftrightarrow 12=10m+1 \Leftrightarrow m=\dfrac{11}{10}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $1<m<2$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

A. 2. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4 &\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^x}=4\\ &\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{2x}-4\left(2-\sqrt{3}\right)^x+1=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\\ \left(2-\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó $x_1^2+2x_2^2=|x_1|^2+2|x_2|^2=1+2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4\cdot 2^{2\log x}-6^{\log x}-18\cdot 3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a?

A. $(a-10)^2=1$.

B. $a^2+a+1=2$.

C. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

D. $a=10^2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&4\left(2^{\log x}\right)^2-(2.3)^{\log x}-18.3^{2\log x}=0\\ \Leftrightarrow\ &4\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}-18=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=-2\ \text{(vô lí)}\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tổng lập phương các nghiệm của phương trình $2^x+2\cdot 3^x-6^x=2$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B**. 1. **C**. 7. **D**. 25.

Lời giải.

$$2^x+2\cdot 3^x-6^x=2\Leftrightarrow 2^x(1-3^x)+2(3^x-1)=0\Leftrightarrow (1-3^x)(2^x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=0\\ 2^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right..$$

Vậy tổng lập phương hai nghiệm là $T=0^3+1^3=1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 64. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$.

A. 1. **B**. 5. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

$\log_3(2x-1)=2 \Leftrightarrow 2x-1=9 \Leftrightarrow x=5$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 65. Tính tổng các nghiệm của phương trình $3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $3^x=t>0$, phương trình trở thành: $t^2-12t+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$ tổng hai nghiệm của phương trình bằng 3.

Chọn đáp án D ☐

Câu 66. Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1} \Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3}=7^{x-1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3=x-1 \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 67. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$.

A. $x=2$. **B**. $x=1$. **C**. $x=-1$. **D**. $x=0$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x>0$, phương trình trở thành:

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & \\ t=-3 & \text{(loại)} \end{array}\right. \Rightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 68. Giải phương trình $\log_{2017}(13x+3)=\log_{2017}16$.

A. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B**. $S=\{1\}$. **C**. $S=\{0\}$. **D**. $S=\{2\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $13x+3=16$. Từ đó ta giải được $x=1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 69. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_6[x(5-x)]=1$.

A. $S=\{2;-6\}$. **B**. $S=\{2;3;4\}$. **C**. $S=\{2;3\}$. **D**. $S=\{-1;2;3\}$.

Lời giải.

$\log_6[x(5-x)]=1 \Leftrightarrow x(5-x)=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$. Vậy $S=\{2;3\}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 70. Tìm tập nghiệm của phương trình $\log_2 x = -x + 6$.

A. $\{4\}$. **B**. $\{2;5\}$. **C**. $\{3\}$. **D**. $\varnothing$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình trở thành $\log_2 x + x - 6 = 0$.

Xét $f(x) = \log_2 x + x - 6$ có $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2} + 1 > 0$ với mọi $x > 0$. Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác ta có $f(4) = 0$ nên phương trình $\log_2 x = -x + 6$ có duy nhất nghiệm $x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Tìm tập nghiệm của phương trình $3^{x^2+4x-1} = 27$.

A. $\{-2\}$. **B**. $\{-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}\}$.

C. $\{-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}\}$. **D**. $\{-2 + 2\sqrt{2}\}$.

Lời giải.

Phương trình $3^{x^2+4x-1} = 27 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $x_1 + x_2 = \log_2 8$. **B**. $x_1.x_2 = 15$. **C**. $x_1.x_2 = \log_2 15$. **D**. $x_1 + x_2 = \log_2 15$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x > 0$, phương trình trở thành $t^2 - 8t + 15 = 0$ (1).

Gọi $t_1; t_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), suy ra $t_1 = 2^{x_1}; t_2 = 2^{x_2}$.

Theo định lí Vi - ét của phương trình (1):

$t_1.t_2 = 15 \Rightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 15 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 15 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \log_2 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy ra có không quá 2 màu.

A. $\dfrac{183}{190}$. **B**. $\dfrac{9}{38}$. **C**. $\dfrac{82}{95}$. **D**. $\dfrac{29}{38}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có không quá 2 màu".

Gọi B là biến cố: "3 viên bi lấy ra có cả 3 màu".

Suy ra $n(B) = 9.6.5 = 270 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{270}{1140} = \dfrac{9}{38}$.

$A = \overline{B} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - \dfrac{9}{38} = \dfrac{29}{38}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Biết rằng phương trình $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$ có hai nghiệm. Hãy tính tổng của hai nghiệm đó.

A. 1. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{x^2-x} > 0$, ta có phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Với $t = 1 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 1.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Tập nghiệm của phương trình $\log_4(9^{50} + 5x^2) = \log_2(3^{50} + 2x)$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\{0; 4 \cdot 3^{50}\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{0; 1\}$.

Lời giải.

Đặt $a = 3^{50}$. Điều kiện: $x > -\dfrac{a}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$a^2 + 5x^2 = (a + 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4a \text{ (cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện).}$$

Chọn đáp án B □

Câu 76. Giải phương trình $4^{x-1} = 8^{3-2x}$.

A. $x = \dfrac{11}{8}$. **B.** $x = \dfrac{4}{3}$. **C.** $x = \dfrac{1}{8}$. **D.** $x = \dfrac{8}{11}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $2^{2(x-1)} = 2^{3(3-2x)} \Leftrightarrow 2(x-1) = 3(3-2x) \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Số nghiệm của phương trình $\log_{x^2-x+2}(x+3) = \log_{x+5}(x+3)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện $x > -3$. Phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} x + 3 = 1 \\ x^2 - x + 2 = x + 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x = \log_2(x^2 - x)$ là

A. $\{2\}$. **B.** $\{0\}$. **C.** $\{0; 2\}$. **D.** $\{1; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau: $x = x^2 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Phương trình $\log_2(x^2-9x)=3$ có tích hai nghiệm bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 27. **D.** -8.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2-9x)=3 \Leftrightarrow x^2-9x=8 \Leftrightarrow x^2-9x-8=0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo định lí Viet suy ra $x_1 \cdot x_2 = -8$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Phương trình $5^{x^2-3x+2}=3^{x-2}$ có một nghiệm dạng $x=\log_a b$ với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 4 và nhỏ hơn 16. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 35. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 25.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 5^{x^2-3x+2}=3^{x-2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2-3x+2=(x-2)\log_5 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-(3+\log_5 3)\,x+2\,(1+\log_5 3)=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta thấy $1-(3+\log_5 3)+(1+\log_5 3)=0$, do vậy $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2.\log_5 15. \end{array}\right.$

Theo giả thuyết, ta được $\begin{cases} a=5 \\ b=15 \end{cases} \Rightarrow a+2b=35$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-6)=\log_2 7$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện $x>6$ $(*)$.

Với điều kiện $(*)$ ta có $\log_2 x+\log_2(x-6)=\log_2 7 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7. \end{array}\right.$

So với $(*)$, ta nhận $x=7$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Phương trình $\log_3(x^2-10x+9)=2$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=10 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=9 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=10 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình đã cho

$$\log_3(x^2-10x+9)=2 \Leftrightarrow x^2-10x+9=9 \Leftrightarrow x^2-10x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=10. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 83. Phương trình $2^{x^2-3x+2}=4$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Hãy tính giá trị của $T=x_1^3+x_2^3$.

A. $T=9$. **B.** $T=1$. **C.** $T=3$. **D.** $T=27$.

Lời giải.

Ta có phương trình đã cho

$$\begin{aligned} 2^{x^2-3x+2}=4 &\Leftrightarrow x^2-3x+2=2\\ &\Leftrightarrow x(x-3)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $T=x_1^3+x_2^3=27$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 84. Phương trình $3^x+4^x=25$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $x=2$ là một nghiệm của phương trình.

Xét hàm số $f(x)=3^x+4^x$ có $f'(x)=3^x\ln 3+4^x\ln 4>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình $f(x)=25$ có duy nhất một nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào **vô nghiệm**?

A. $3^x+2=0$. **B**. $5^x-1=0$. **C**. $\log_2 x=3$. **D**. $\log(x-1)=1$.

Lời giải.

☑ $3^x+2=0\Leftrightarrow 3^x=-2$ (vô lý). Suy ra phương trình vô nghiệm.

☑ $5^x-1=0\Leftrightarrow 5^x=1\Leftrightarrow x=0$.

☑ Điều kiện $x>0$. Phương trình $\log_2 x=3\Leftrightarrow x=2^3$ (nhận).

☑ Điều kiện $x-1>0$. Phương trình $\log(x-1)=1\Leftrightarrow x-1=10\Leftrightarrow x=11$ (nhận).

Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)=-2$ bằng

A. 5. **B**. 0. **C**. 1. **D**. $\log_6 5$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)=-2\Leftrightarrow 6^{x+1}-36^x=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6^x=1\\ 6^x=5 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\log_6 5. \end{array}\right.$

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng 0.

Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Phương trình $\log_2(x-3)+\log_2(x-1)=3$ có nghiệm là một số

A. chẵn. **B**. chia hết cho 3. **C**. chia hết cho 7. **D**. chia hết cho 5.

Lời giải.

Điều kiện: $x>3$.

Phương trình trở thành:

$$\log_2(x-3)(x-1)=3\Leftrightarrow x^2-4x+3=8\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \text{(loại)}\\ x=5 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 88. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4\cdot 2^{2\log x}-6^{\log x}-18\cdot 3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi đánh giá về a?

A. $(a-10)^2=1$.

B. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x}=\dfrac{9}{4}$.

C. $a^2+a+1=2$.

D. $a=10^2$.

Lời giải.

$$4\cdot 2^{2\log x}-6^{\log x}-18\cdot 3^{2\log x}=0\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}-18=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}\vee\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=-2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 89. Phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x-1}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{x-1}=2$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

$\left(\sqrt{2}+1\right)^{x-1}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{x-1}}=2.$

Đặt $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^{x-1}$, $(t>0)$. Phương trình trở thành

$t+\dfrac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1$ hay $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm thực.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Phương trình $9^x+3^{x+1}-4=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $9^x+3^{x+1}-4=0\Leftrightarrow 3^{2x}+3\cdot 3^x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow 3^x=3^0\Leftrightarrow x=1.$

Chọn đáp án B □

Câu 91. Tìm nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$.

A. $x=\dfrac{1}{4}$. **B.** $x=-1+\log_{7+4\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

C. $x=-\dfrac{3}{4}$. **D.** $x=\dfrac{25-15\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $\left[(2+\sqrt{3})^2\right]^{2x+1}=(2+\sqrt{3})^{-1}$.

$\Leftrightarrow 4x+2=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Tìm nghiệm của phương trình $3^x + 3^{x+1} = 2^{x+2}$.

A. $x = \log_2 3$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = \dfrac{2}{3}$. **D.** $x = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$3^x + 3^{x+1} = 2^{x+2} \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x = 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 93. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2(x-1) = 2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 1$.

$\log_2 x + \log_2(x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_2 [x(x-1)] = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ (không thỏa mãn).} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Nghiệm của phương trình $2^{x-1} = \dfrac{1}{2}$ là

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = \dfrac{1}{2}$. **D.** $x = 0$.

Lời giải.

Ta có $2^{x-1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Cơ số x bằng bao nhiêu để $\log_x \sqrt[10]{5} = -0{,}1$?

A. $x = -5$. **B.** $x = -\dfrac{1}{5}$. **C.** $x = \dfrac{1}{5}$. **D.** $x = 5$.

Lời giải.

Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có $\log_x \sqrt[10]{5} = -0{,}1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $3^x + 6 \cdot 3^{-x} - 5 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |x_1 - x_2|$.

A. $A = 1 + \log_3 2$. **B.** $A = 1$. **C.** $A = \log_3 \dfrac{2}{3}$. **D.** $A = \log_3 \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $3^x + 6 \cdot 3^{-x} - 5 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 2 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vì vậy, $A = |x_1 - x_2| = \log_3 \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Biết rằng phương trình $3\log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0$ có hai nghiệm là a, b. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b=\dfrac{1}{3}$. **B.** $ab=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $ab=\sqrt[3]{2}$. **D.** $a+b=\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Ta có $3\log_2^2 x-\log_2 x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}} \\ x=2^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}} \end{array}\right.$.

Vậy tích hai nghiệm là $\left(2^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}}\right)=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-\log_3 9\cdot\log_2 x=3$

A. 2. **B.** 8. **C.** -2. **D.** $\dfrac{17}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2^2 x-\log_3 9\cdot\log_2 x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=3 \\ \log_2 x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ hay tổng các nghiệm ủa phương trình đã cho $\dfrac{17}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Số nghiệm của phương trình $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Chia cả hai vế của phương trình cho 4^x. Phương trình đã cho tương đương với

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{3}{2} \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x+\log_2 x+m=0$ có nghiệm x thuộc $(0;1)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m\le\dfrac{1}{4}$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình đã cho trở thành $t^2+t+m=0$ (1).

Để phương trình có nghiệm $x\in(0;1) \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm âm. Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \Delta=1-4m\ge 0 \\ -1<0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}$$

.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. D	5. B	6. A	7. A	8. D	9. D	10. C
11. A	12. C	13. D	14. D	15. A	16. B	17. A	18. B	19. D	20. C
21. D	22. A	23. A	24. A	25. D	26. D	27. B	28. B	29. C	30. B
31. A	32. C	33. B	34. A	35. A	36. D	37. B	38. D	39. B	40. C
41. A	42. A	43. B	44. A	45. B	46. D	47. D	48. D	49. C	50. D
51. A	52. C	53. C	54. C	55. A	56. D	57. C	58. A	59. A	60. D
61. D	62. C	63. B	64. A	65. D	66. C	67. D	68. B	69. C	70. A
71. B	72. D	73. D	74. A	75. B	76. A	77. D	78. A	79. D	80. A
81. C	82. A	83. D	84. D	85. A	86. B	87. D	88. B	89. A	90. B
91. C	92. B	93. B	94. D	95. C	96. D	97. C	98. D	99. B	100. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Biết phương trình $8\log_2^2 \sqrt[3]{x} + 2(m-1)\log_{\frac{1}{4}} x - 2019 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 x_2 = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in (2;5)$. **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in (4;7)$.

Lời giải.

Ta có $8\log_2^2 \sqrt[3]{x} + 2(m-1)\log_{\frac{1}{4}} x - 2019 = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{9}\log_2^2 x - (m-1)\log_2 x - 2019 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$ ta được $\frac{8}{9}t^2 - (m-1)t - 2019 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 x_2 = 4$ khi và chỉ khi

$$\frac{8}{9}t^2 - (m-1)t - 2019 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$2^{t_1+t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{9(m-1)}{8} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{25}{9} \in (2;5).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+3)9^x + (2m-1)3^x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $-3 < m < -1$. **B.** $-3 < m < -\frac{3}{4}$. **C.** $-1 < m < -\frac{3}{4}$. **D.** $m \geq -3$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x > 0$ ta có phương trình $(m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu (giả sử $x_1 < 0 < x_2$) $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt thỏa $0 < t_1 = 3^{x_1} < 1 < 3^{x_2} = t_2$, nghĩa là $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (t_1-1)(t_2-1) < 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ -20m - 11 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\frac{11}{20} \\ \frac{m+1}{m+3} + \frac{2m-1}{m+3} + 1 < 0 \\ \frac{m+1}{m+3} > 0 \\ -\frac{2m-1}{m+3} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\frac{11}{20} \\ \frac{4m+3}{m+3} < 0 \\ \frac{m+1}{m+3} > 0 \\ -\frac{2m-1}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\frac{11}{20} \\ -3 < m < -\frac{3}{4} \\ m < -3 \vee m > -1 \\ -3 < m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x - m = 0$ có nghiệm $x \in (0;1)$.

A. $m \geq 0$. **B**. $m \geq -\dfrac{1}{4}$. **C**. $m \geq -1$. **D**. $m \leq -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$, vì $0 < x < 1$ nên $t < 0$ hay $t \in (-\infty; 0)$.

Phương trình trở thành $t^2 + t - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 + t$.

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$ trên $(-\infty; 0)$.

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ là parabol có hoành độ đỉnh $t = -\dfrac{1}{2} \in (-\infty; 0)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại ít nhất 1 điểm thuộc $(-\infty; 0) \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > 1$.

A. 6. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (*).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1 > t_2 > 0$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 7.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho các số thực $a, b > 1$ thỏa mãn $a^{\log_b a} + 16b^{\log_a\left(\frac{b^8}{a^3}\right)} = 12b^2$. Giá trị của biểu thức $P = a^3 + b^3$ là

A. $P = 20$. **B**. $P = 39$. **C**. $P = 125$. **D**. $P = 72$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^{\log_b a} + 16b^{\log_a\left(\frac{b^8}{a^3}\right)} = 12b^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^{\log_b a} + 16b^{\log_a b^8 - \log_a a^3} = 12b^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^{\log_b a} + 16b^{8\log_a b - 3} = 12b^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^{\log_b a} + 16b^{\frac{8}{\log_b a} - 3} = 12b^2 \end{aligned}$$

Đặt $t=\log_b a \Rightarrow t>0$. Khi đó: $b^{t^2}+16b^{\frac{8}{t}-3}=12b^2$

Ta có

$$\begin{aligned} b^{t^2}+16b^{\frac{8}{t}-3}=b^{t^2}+8b^{\frac{8}{t}-3}+8b^{\frac{8}{t}-3} &\geq 3\sqrt[3]{b^{t^2}.8b^{\frac{8}{t}-3}.8b^{\frac{8}{t}-3}} \\ =12\sqrt[3]{b^{t^2+\frac{8}{t}-3+\frac{8}{t}-3}} &\geq 12\sqrt[3]{b^{3\sqrt[3]{t^2\cdot\frac{8}{t}\cdot\frac{8}{t}}-6}}=12b^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có: $b^{t^2}+16b^{\frac{8}{t}-3}\geq 12b^2$. Yêu cầu bài toán tương đương với dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= 2 \\ b^4 &= 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b a &= 2 \\ b &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 4 \\ b &= 2 \end{cases}$$

Từ đó ta có: $P=a^3+b^3=72$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Chuyển vế, chia cả hai vế cho 4^x và giải phương trình thu được tìm nghiệm.

Cách giải:

$9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-2.4^x=0\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0$

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t>0$ thì $t^2-t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\,(\text{ loại}) \\ t=2\,(\text{ nhận}) \end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2>0.$

Vậy phương trình không có nghiệm nào âm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Anh Bình gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng VB với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng mức lãi suất là $0,65\%$/tháng. Tuy nhiên, sau khi gửi được tròn 8 tháng anh Bình có việc phải dùng đến 200 triệu trên. Anh đến ngân hàng đnh rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: "Nếu rút tiền trước hạn, toàn bộ số tiền anh gửi chỉ được hưởng mức lãi suất không kì hạn là $0,02\%$/tháng. Anh nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 200 triệu với lãi suất $0,7\%$/tháng. Khi sổ của anh đến hạn, anh có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng". Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng, anh Bình sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết rằng ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép)?

A. $10,85$ triệu đồng. **B**. $10,51$ triệu đồng. **C**. $10,03$ triệu đồng. **D**. $10,19$ triệu đồng.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức lãi kép $A=A_0(1+r)^n$ với A_0 là số tiền gốc ban đầu, r là lãi suất, A là tổng tiền cả gốc và lãi thu được sau n kì hạn.

Cách giải:

* Nếu anh Bình nghe theo nhân viên tư vấn ngân hàng

+ Tiền lãi sanh Bình nhận được sau khi gửi 200 triệu trong 12 tháng với mức lãi suất $0,65\%/$ tháng là $A = 200\,(1 + 0,65\%)^{12} - 200$ (triệu đồng).

+ Tiền lãi anh Bình phải trả khi vay nợ 200 triệu đồng với lãi suất $0,7\%/$ tháng là $B = 200\,(1 + 0,7\%)^4 - 200$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lãi anh Bình nhận được là $M = A - B$.

* Nếu anh Bình rút tiền ngay

Số tiền lãi anh Bình nhận được trong 8 tháng với mức lãi suất $0,02\%/$ tháng là $N = 200\,(1 + 0,02\%)^{12} - 200$.

Suy ra nếu làm theo nhân viên tư vấn ngân hàng thì anh Bình sẽ đỡ thiệt số tiền là $M - N \approx 10.19$ triệu đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. Vô số. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx - 8 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x} \end{cases} \quad (*)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x}$ trên khoảng $(0;1)$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do $x > 1$).

Cùng với $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 8$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $4 < m < 8$.

Do $m \in Z$ nên $m \in \{5;6;7\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. 6. **B**. 7. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x, t > 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn

$$0<t_1<1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \\ (t_1-1)(t_2-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+9>0 \\ m>-1 \\ m>\dfrac{8}{3} \\ m<9 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{3}<m<9.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5;6;7;8\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Một thầy giáo gửi 200 triệu đồng loại kì hạn 6 tháng vào một ngân hàng với lãi suất 6,9%/năm. Hỏi sau 6 năm 9 tháng. thầy giáo đó nhận số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng thầy giáo đó không rút lãi ở tất cả các kì hạn trước đó và nếu rút trước thì ngân hàng sẽ trả lãi suất theo loại không kì hạn 0,002%/ngày (Giả sử một tháng có 30 ngày).

A. 471688328 đồng. **B**. 321556228 đồng. **C**. 311392503 đồng. **D**. 302088933 đồng.

Lời giải.

Ta có lãi suất trên một kì hạn 6 tháng là $\dfrac{6{,}9\%}{2}=3{,}45\%$.

Tổng thời gian gửi là 6 năm 9 tháng bằng 13 kì hạn và 90 ngày.

Tổng số tiền sau 13 kì hạn là $T_1=200\cdot10^6\cdot(1+3{,}45\%)^{13}$.

Tổng số tiền sau 90 ngày (do rút trước kì hạn) là $T_2=T_1(1+0{,}002\%)^{90}=311392503$ đồng.

Vậy tổng số tiền mà thầy giáo đó nhận được cả gốc và lãi là $T=T_2=311392503$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Phương trình $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

Giải phương trình mũ: $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Cách giải:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}$$

$$x^2-2x-3=1-x\Leftrightarrow x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x-m\cdot2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$.

A. $m \in (1;3)$. **B**. $m \in \left(\dfrac{9}{2};5\right)$. **C**. $m \in (3;5)$. **D**. $m \in (-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m2^x + 2m = 0.$ (1)

Đặt $t = 2^x > 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0.$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$, khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 8$. Tức là $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tính tổng T của các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\mathrm{e}^x + (m^2 - m)\,\mathrm{e}^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}$.

A. $T = 28$. **B**. $T = 20$. **C**. $T = 21$. **D**. $T = 27$.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + m^2 - m = 0$ (1).

Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0 < t_1 < t_2 < 10$.

Nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(10) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 10 \\ P > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{21 - \sqrt{41}}{2}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{2;3;4;5;6;7\}$. Vậy $T = 27$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tính bình phương tổng các nghiệm của phương trình $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0.$

A. 5. **B**. 324. **C**. 9. **D**. 260.

Lời giải.

Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Khi đó

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sqrt{\log_2 x} - (2 + log_2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\log_2 x + 3\sqrt{\log_2 x} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 16. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta thấy $x=2, x=16$ thỏa điều kiện.

Vậy tổng bình phương các nghiệm bằng $2^2+16^2=260$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^x-4\cdot 3^x+m+2=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 2019. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 2018.

Lời giải.

Đặt $t=3^x, t>0$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2-4t+m+2=0 \quad (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-(m-2)>0 \\ 4>0 \\ m-2>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-m>0 \\ m>2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2<m<6.$$

Các giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $3,4,5$.

Vậy tổng $S=3+4+5=12$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của thực của tham số m để phương trình $9^{|\cos x|}-(m-1)\,3^{|\cos x|}-m-2=0$ có nghiệm thực.

A. $m\geq\dfrac{5}{2}$. **B.** $m\leq 0$. **C.** $0<m<\dfrac{5}{2}$. **D.** $0\leq m\leq\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=3^{|\cos x|}, (1\leq t\leq 3)$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-(m-1)\,t-m-2=0\Leftrightarrow m\,(1+t)=t^2+t-2\Leftrightarrow m=\frac{t^2+t-2}{t+1}=f\,(t)\,, t\in[1;3]\,. \qquad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương tình (1) có nghiệm thực thuộc $[1;3]$

$$\Leftrightarrow \min_{[1;3]} f\,(t)\leq m\leq \max_{[1;3]} f\,(t)\,.$$

Ta có $f'\,(t)=\dfrac{t^2+2t+3}{(t+1)^2}>0, \forall t\in[1;3]$. Và $f\,(1)=0; f\,(3)=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $0\leq m\leq\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

A. 2. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-4 \Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^x+\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^x}=4$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^{2x}-4(2-\sqrt{3})^x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2-\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^{-1}\\(2-\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right..$$

Do đó $x_1^2+2x_2^2=|x_1|^2+2|x_2|^2=1+2=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1}=4$

A. $S=\{4\}$. **B**. $S=\{1\}$. **C**. $S=\{3\}$. **D**. $S=\{2\}$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình mũ: $a^{f(x)}=a^m \Leftrightarrow f(x)=m$.

Cách giải: Ta có: $2^{x+1}=4 \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{1\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tính tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$.

A. 1. **B**. $\dfrac{5}{2}$. **C**. $-\dfrac{5}{2}$. **D**. -1.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Giải phương trình mũ: $a^{f(x)}=a^m \Leftrightarrow f(x)=m$.

+) Áp dụng hệ thức Vi-ét.

Cách giải:

Ta có: $2^{2x^2+5x+4}=4 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=-2\end{array}\right. \Rightarrow x_1x_2=1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt.

A. $0<m<\dfrac{1}{16}$. **B**. $0\le m<\dfrac{1}{16}$. **C**. $-\dfrac{1}{2}<m<0$. **D**. $-\dfrac{1}{2}<m\le\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Ta có: $\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)=49-45=4 \Rightarrow 7-3\sqrt{5}=\dfrac{4}{7+3\sqrt{5}}$

+) Đặt ẩn phụ và đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai ẩn t từ đó tìm m theo yêu cầu của đề bài.

Cách giải:

Ta có: $\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)=49-45=4 \Rightarrow 7+3\sqrt{5}=\dfrac{4}{7-3\sqrt{5}}$

Khi đó $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7+3\sqrt{5}}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=\frac{1}{2}.2^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2}-2^{x^2}.\left(7+3\sqrt{5}\right)^{2}+2m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{2x^2}-\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{x^2}+2m=0(*)$$

Đặt $\left(\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\right)^{2x^2}=t\Rightarrow x^2=\log_{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}}t.$

Ta có: $0<\frac{2}{7+3\sqrt{5}}<1\Rightarrow \log_{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}}t>0\Leftrightarrow 0<t<1\Rightarrow (*)\Leftrightarrow 2t^2-t+2m=0(1)$

Để phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (1) có hai nghiệm phân biệt $t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ af(0)>0\\ af(1)>0\\ 0<-\frac{b}{2a}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1-16m>0\\ 4m>0\\ 2(2m+1)>0\\ 0<\frac{1}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<\frac{1}{16}\\ m>0\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{16}\\ m>-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)^2-\log_2(x-3)^2=2\log_2(x-1)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $x>1$ và $x\neq 3$.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$$\begin{aligned}&\log_2(x-1)^4-\log_2(x-3)^2=\log_2(x-1)^2\\ \Leftrightarrow\ &\log_2(x-1)^4=\log_2[(x-1)^2\cdot(x-3)^2]\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^4=(x-3)^2\cdot(x-1)^2\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^2=(x-3)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=x-3\\ x-1=3-x\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2\quad\text{(nhận)}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\{2\}$. Khi đó, số phần tử của S là 1.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 4015. **B**. 4014. **C**. 2017. **D**. 2018.

Lời giải.

Ta có $\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ mx=(x+1)^2\end{cases}.$ (1)

Dễ thấy $x=0$ không phải là nghiệm của (1), do đó (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ m=\frac{(x+1)^2}{x}=x+\frac{1}{x}+2\end{cases}.$ (2)

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2$ trên $\in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	‖				

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2017; 2017] \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \ldots; -1\} \cup \{4\}$. Vậy, có 2018 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ có nghiệm $x \in (0; 1)$.

A. $m \le \dfrac{1}{4}$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m \ge \dfrac{1}{4}$. **D.** $m \ge 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in (0; 1) \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0)$.

Phương trình trở thành $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t \quad (*)$.

Ta cần tìm m để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Xét hàm $f(t) = -t^2 - t \text{với} t \in (-\infty; 0)$; $f'(t) = -2t - 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2 (x + 3) = \log_2 (x + 1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x + 3}.$$

A. $S = -1$. **B.** $S = 1 - \sqrt{2}$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+3>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 \sqrt{x+3}-2\sqrt{x+3}+x+3=\log_2(x+1)-2(x+1)+(x+1)^2. \quad (1)$$

Xét $f(t)=\log_2 t-2t+t^2$ với $t>0$.

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}-2+2t=\frac{(2\ln 2)t^2-(2\ln 2)t+1}{t\ln 2}=\frac{2\ln 2\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{2}\ln 2}{t\cdot\ln 2}>0,\ \forall t>0.$$

Ta có $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $\begin{cases} \left(\sqrt{x+3}\right)\in(0;+\infty) \\ (x+1)\in(0;+\infty). \end{cases}$

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+3}\right)=f(x+1)\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1$

$$\Leftrightarrow x+3=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta nhận $x=1$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $S=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0$ bằng

A. 9. **B**. 18. **C**. 3. **D**. 27.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3^{2x}-2.9.3^x+27=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3^{2x}-18.3^x+27=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3^{x_1}=9+3\sqrt{6} \\ 3^{x_2}=9-3\sqrt{6} \end{array}\right. \\ \Rightarrow\ & 3^{x_1}\cdot 3^{x_2}=\left(9+3\sqrt{6}\right)\left(9-3\sqrt{6}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 3^{x_1+x_2}=9^2-\left(3\sqrt{6}\right)^2=27 \\ \Leftrightarrow\ & x_1+x_2=3. \end{aligned}$$

.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho các số thực dương $x,y\neq 1$ và thỏa mãn $\log_x y=\log_y x, \log_x(x-y)=\log_y(x+y)$. Giá trị của x^2+xy-y^2 bằng

A. 0. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x>y>0, x,y\neq 1$

Ta có:

$$\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y=\pm 1\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=x(\text{không thỏa mãn})\\ y=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x(x-y)=\log_{x^{-1}}(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x(x-y)+\log_x(x+y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x\left(x^2-y^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1\\ x^2-y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+xy-y^2=1+1=2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-m\cdot 2^x+2m+1=0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R}\backslash S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B**. 4. **C**. 9. **D**. 7.

Lời giải.

Đặt $t=2^x>0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-mt+2m+1=0\Leftrightarrow t^2+1=m(t-2)$.

Nhận thấy $t=2$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả 2 vế của phương trình cho $t-2$ ta được $m=\dfrac{t^2+1}{t-2}=f(t)\ (t>0)(*)$.

Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=m$ song song với trục hoành.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{2t(t-2)-t^2-1}{(t-2)^2}=\dfrac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{5}\in(0;+\infty)\\ t=2-\sqrt{5}\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		2		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	↘	$4+2\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{2}\\ m\geq 4+2\sqrt{5}\end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\left(-\infty;\dfrac{-1}{2}\right)\cup[4+2\sqrt{5};+\infty)\Rightarrow\mathbb{R}\setminus S=\left[-\dfrac{1}{2};4+2\sqrt{5}\right)$ có 9 giá trị nguyên là $\{0;1;2;\ldots;8\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 26$. **B**. $T = 29$. **C**. $T = 20$. **D**. $T = 25$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y) = t$.

Suy ra $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x + y = 4^t. \end{cases}$

Khi đó ta có: $9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{Vì } \left(\dfrac{3}{2}\right)^t > 0\right)$.

Lại có $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 1,\ b = 5$ hay $T = 26$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Chọn khẳng định **đúng** khi nói về hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

A. Hàm số có một điểm cực tiểu.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Hàm số có một điểm cực đại.

Câu 30. Biết phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, tính $S = x_1 + x_2$.

A. $S = 7$. **B**. $S = 5$. **C**. $S = 3$. **D**. $S = -5$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow S = 5$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Gọi a là một nghiệm của phương trình $\left(26 + 15\sqrt{3}\right)^x + 2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x - 2\left(2 - \sqrt{3}\right)^x = 1$. Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + a = 2$. **B**. $\sin^2 a + \cos a = 1$. **C**. $2 + \cos a = 2$. **D**. $3^a + 2a = 5$.

Lời giải.

Ta thấy: $26 + 15\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^3; 7 + 4\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2; \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$.

Đặt $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = t \Rightarrow \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$ $(t > 0)$.

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành:

$$t^3 + 2t^2 - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t^3 - 1)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Với $t = 1$ ta có $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra $a = 0$.

Với $a = 0 \Rightarrow \sin^2 a + \cos a = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ là $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính ab.

A. $ab = 5$. **B.** $ab = 1$. **C.** $ab = 8$. **D.** $ab = 4$.

Lời giải.

Theo giả thiết, đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 9^t + 6^t = 4^t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Vậy $a = 1, b = 5 \Rightarrow ab = 5$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Gọi S là tập hợp mọi nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x - 4$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $2x - 4 = (x^2 - x - 2) - (x^2 - 3x + 2)$ nên $2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x - 4$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} + (x^2 - 3x + 2) = 2^{x^2-x-2} + (x^2 - x - 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, $(\forall t \in \mathbb{R})$. Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 > 0$, $(\forall t \in \mathbb{R})$. Suy ra, $f(t)$ là hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$. Do đó, từ (1) ta có $x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^x + (m+5)2^x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} 3^x + (m+5)2^x + m = 0 &\Leftrightarrow m\left(2^x + 1\right) + 3^x + 5 \cdot 2^x = 0 \\ &\Leftrightarrow -m = \frac{3^x + 5 \cdot 2^x}{2^x + 1} \end{aligned}$$

Xét $f(x) = \dfrac{3^x + 5 \cdot 2^x}{2^x + 1}$. Ta có,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(3^x \ln 3 + 5 \cdot 2^x \ln 2\right)\left(2^x + 1\right) - 2^x \ln 2 \left(3^x + 5 \cdot 2^x\right)}{\left(2^x + 1\right)^2} \\ &= \frac{6^x(\ln 3 - \ln 2) + 3^x \ln 3 + 5 \cdot 2^x \ln 2}{\left(2^x + 1\right)^2} > 0 \end{aligned}$$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	3	↗	$\dfrac{13}{3}$

.

Suy ra, $-\dfrac{13}{3} \le m \le -3$. Do m nguyên nên $m = -4$. Vậy có 1 giá trị của m.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $9^{\sqrt{9-x^2}} - 3^{1+\sqrt{9-x^2}} + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. Không tồn tại m. **B**. $2 \le m < \dfrac{9}{4}$. **C**. $-6 < m < 2$. **D**. $m = \dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^{\sqrt{9-x^2}}$ $(1 \le t \le 27)$, khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t = -m$. (1)

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;27)$. Bảng biến thiên của $f(t) = t^2 - 3t$ trên $[1;27)$

t	1		$\dfrac{3}{2}$		27
f'		$-$	0	$+$	
f	-2	↘	$-\dfrac{9}{4}$	↗	648

Từ đó yêu cầu đề bài tương đương $-\dfrac{9}{4} < -m \le -2$ hay $2 \le m < \dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Phát biểu nào sau đây không đúng?

A. Hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ có cùng tập giá trị.

B. Hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

C. Hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ có cùng tính đơn điệu.

D. Hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đều có đường tiệm cận.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tất cả các giá trị của m để phương trình $9^{|\cos x|} - (m-1)\,3^{|\cos x|} - m - 2 = 0$ có nghiệm thực là

A. $m \ge \dfrac{5}{2}$. **B**. $m \le 0$. **C**. $0 < m < \dfrac{5}{2}$. **D**. $0 \le m \le \dfrac{5}{2}$.

.

Lời giải.

Đặt $t = 3^{|\cos x|}, (1 \le t \le 3)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - (m-1)\,t - m - 2 \Leftrightarrow m\,(t+1) = t^2 + t - 2 \Leftrightarrow m = \frac{t^2+t-2}{t+1} = f\,(t)\,, t \in [1;3]\,(1).$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm thực thuộc $[1;3] \Leftrightarrow \max\limits_{[1;3]} f(t) \le m \le \min\limits_{[1;3]} f(t)$.

Ta có $f'\,(t) = \dfrac{t^2+2t+3}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1;3]$ và $f\,(1) = 0; f\,(3) = \dfrac{5}{2}$.

Vậy $0 \le m \le \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là

A. $m = 1$. **B**. $m = 2$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = 4$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$, phương trình đã cho với ẩn số t là $t^2 - 2mt + 2m = 0$.
Điều kiện $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow 2m = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 2^3 = 8 \Rightarrow m = 4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ trong đó $x_1 < x_2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_1 x_2 = 2$. **B.** $x_1 + 2x_2 = -1$. **C.** $2x_1 + x_2 = -1$. **D.** $x_1 + x_2 = -2$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x,\ t > 0$.
Phương trình trở thành $3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.
Với $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Với $t = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1$.
Do đó $x_1 = -1,\ x_2 = 0$. Vậy $x_1 + 2x_2 = -1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x,\ t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$ $(**)$.
Phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt dương
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$
Khi $m > 2$, phương trình $(**)$ có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ và $t_1 = 2^{x_1},\ t_2 = 2^{x_2}$.
Theo giả thiết $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1+x_2} = 2^3 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa điều kiện).
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$ (với a, b là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q = a \cdot b$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $2 < x \neq 4$.
Với điều kiện trên phương trình đã cho viết lại như sau

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0 \Leftrightarrow \log_3[(x-2)|x-4|] = 0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1.(\star)$$

Trường hợp 1: Xét $2 < x < 4$, phương trình $(\star)$ trở thành

$$(x-2)(x-4) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: Xét $x > 4$, phương trình $(\star)$ trở thành

$$(x-2)(x-4) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 + \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 3 - \sqrt{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy $S = 3 + (3 + \sqrt{2}) = 6 + \sqrt{2}$, do đó $a = 6, b = 1 \Rightarrow Q = ab = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 < 2$.

A. $0 < m < 2$. **B.** $m > 0$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $m < 9$.

Lời giải.

$x_1 + x_2 < 2 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} < 4 \Leftrightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} < 4$. Đặt $t = 2^x$, phương trình ban đầu tương đương với $t^2 - 6t + m = 0$ (1). Theo đề bài ta cần tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 < 4$, m cần tìm thỏa mãn

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ 0 < \dfrac{c}{a} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m > 0 \\ 6 > 0 \\ 0 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm tập nghiệm của phương trình $4^{x^2} = 2^{x+1}$.

A. $S = \{0; 1\}$. **B.** $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1\right\}$.

C. $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. **D.** $S = \left\{-1; \dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại như sau: $x^2 = \log_4 2^{x+1} \Leftrightarrow x^2 = (x+1) \cdot \log_4 2 \Leftrightarrow x = 1; x = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Phương trình $2^{2x^2+1} - 5 \cdot 2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0$ có tổng các nghiệm bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Chia hai vế phương trình cho 2^{6x+1} ta được:

$$\left(2^{x^2-3x}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot 2^{x^2-3x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-3x} = 2 \\ 2^{x^2-3x} = 2^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó ta có tổng các nghiệm của phương trình đã cho bằng 6.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Khi đó tổng $a + b$ có giá trị là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$3^{\frac{3x-3}{x}} \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^2 \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2} = 2^{x-3} \Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} \log_2 3 = 3 - x$$

Hay $(x-3)(x+\log_2 3)=0 \Leftrightarrow x=3$ (nhận) $\vee\, x=-\log_2 3$ (nhận).
Suy ra $a=2, b=3 \Rightarrow a+b=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0{,}25\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$ có tích các nghiệm bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq -1$.
Phương trình đã cho tương đương

$$2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}}=2^{-2}\cdot 2^{\frac{7x}{2}} \Leftrightarrow \frac{3(2x-1)}{x+1}=-2+\frac{7x}{2} \Leftrightarrow 6x-3=\left(\frac{7x}{2}-2\right)(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 12x-6=(7x-4)(x+1) \Leftrightarrow 7x^2-9x+2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad \text{(nhận)} \\ x=\frac{2}{7} \quad \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Từ đó ta có tích 2 nghiệm của phương trình là $\frac{2}{7}$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Biết phương trình $\log_2 x+3\log_x 2=7$ có hai nghiệm thực $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=(x_1)^{x_2}$.

A. $T=64$. **B.** $T=32$. **C.** $T=8$. **D.** $T=16$.

Lời giải.

Điều kiện: $0<x\neq 1$. Phương trình tương đương

$$2\log_2^2 x-7\log_2 x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=3 \\ \log_2 x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=8 \\ x_1=\sqrt{2}. \end{array}\right. \text{(do } x_1<x_2)$$

Suy ra $T=(x_1)^{x_2}=\sqrt{2}^{8}=16$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x-2m.2^x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-2<m<2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m>2$. **D.** $m<2$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$. Ứng với mỗi $t>0$ ta có được một và chỉ một giá trị x tương ứng.
Phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+m+2=0$. (1)
Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt dương.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ 2m>0 \\ m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2.$

Chọn đáp án C □

Câu 49. Phương trình $2^x+3^x+4^x+\cdots+2017^x+2018^x=2017-x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B**. 2016. **C**. 2017. **D**. 0.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\left(\sum\limits_{k=2}^{2018}k^x\right)+x-2017$. Ta có $f'(x)=\left(\sum\limits_{k=2}^{2018}k^x\ln k\right)+1>0$ với mọi x. Do đó f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(0)=0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. Vô nghiệm. **B**. 1 nghiệm. **C**. 2 nghiệm. **D**. 3 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $-4<x<4$ và $x\neq 1$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&\log_2|x+1|+\log_2 4=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)\\ \Leftrightarrow&4|x+1|=16-x^2\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}4x+4=\pm(16-x^2)\\16-x^2\geq 0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2-2\sqrt{6}\end{array}\right..\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Người ta thả 1 lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau 9 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ mặt hồ?

A. 3. **B**. $\dfrac{10^9}{3}$. **C**. $9-\log 3$. **D**. $\dfrac{9}{\log 3}$.

Lời giải.

Gọi x $(x\in\mathbb{N}^*)$ là lượng bèo ban đầu.

Số lượng bèo phủ kín mặt hồ sau 9 giờ là $x\cdot 10^9$.

Sau t (giờ) số bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ mặt hồ nên $x\cdot 10^t=\dfrac{1}{3}\cdot x\cdot 10^9\Rightarrow 10^t=\dfrac{10^9}{3}\Rightarrow t=9-\log 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)^2\cdot 2^x=2x(x^2-1)+4(2^{x-1}-x^2)$ là bao nhiêu?

A. 4. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $(x-1)^2 2^x=2x(x^2-1)+4\left(2^{x-1}-x^2\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 2^x=2x^3-4x^2-2x+2\cdot 2^x$

$\Leftrightarrow (x^2-2x-1)2^x=2x(x^2-2x-1)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-2x-1=0 & (1)\\2^x=2x. & (2)\end{array}\right.$$

☑ Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2}. \end{array}\right.$

☑ Giải phương trình (2)

Xét hàm số $f(x)=2^x-2x$ có $f'(x)=2^x\ln 2-2, f''(x)=2^x\cdot\ln^2 2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mặt khác ta lại có $f(1)=0, f(2)=0$ nên $x=1, x=2$ là hai nghiệm của phương trình (2).

Vậy tổng các nghiệm bằng 5.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4\cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017;2017]$.

A. 1284. **B**. 4034. **C**. 1285. **D**. 4035.

Lời giải.

$2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4\cdot 3^{\sin^2 x}\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=4\cdot 3^{\sin^2 x}\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+\frac{3}{9^{\sin^2 x}}=4.$

Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow t\geq 0$. Phương trình trở thành $\left(\frac{2}{3}\right)^t+3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^t=4$

Do vế trái phương trình là hàm số đồng biến, nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=0\Rightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$x\in[-2017;2017]\Leftrightarrow -2017\leq k\pi\leq 2017\Leftrightarrow -\frac{2017}{\pi}\leq k\leq\frac{2017}{\pi}\Rightarrow$ có 1285 giá trị k nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$\log_\alpha 2017+\frac{1}{2^2}\log_{\sqrt{\alpha}}2017+\frac{1}{2^4}\log_{\sqrt[4]{\alpha}}2017+\frac{1}{2^6}\log_{\sqrt[8]{\alpha}}2017+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\log_{\sqrt[2^n]{\alpha}}2017=\log_\alpha 2017^2-\frac{\log_\alpha 2017}{2^{2018}}$,

với $0<\alpha\neq 1$.

A. $n=2016$. **B**. $n=2018$. **C**. $n=2017$. **D**. $n=2019$.

Lời giải.

Nhận xét: $\frac{1}{2^{2k}}\log_{\sqrt[2^k]{\alpha}}2017=\frac{1}{2^k}\cdot\log_\alpha 2017$. Hệ thức tương đương với

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\cdot\log_\alpha 2017=\left(\frac{2^{2019}-1}{2^{2018}}\right)\cdot\log_\alpha 2017 \\ \Leftrightarrow\ & 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\cdot\log_\alpha 2017=\left(\frac{2^{2019}-1}{2^{2018}}\right)\cdot\log_\alpha 2017 \\ \Leftrightarrow\ & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2019} \\ \Leftrightarrow\ & n=2018. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 55. Gọi x, y là các số thực dương thỏa $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=6$. **B**. $S=11$. **C**. $S=8$. **D**. $S=4$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)=\alpha$ ta được $x=9^\alpha, y=6^\alpha, x+y=4^\alpha$.

Từ đó suy ra $9^\alpha+6^\alpha=4^\alpha\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Như vậy $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Vậy $S=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ là

A. $\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $\{0;2\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{2x-2x^2}=2^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & 2x-2x^2=-x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-3x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho phương trình $4^x-m\cdot 2^{x+1}+m+2=0$, m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho phương trình trên có hai nghiệm dương phân biệt. Biết S là một khoảng có dạng $(a;b)$, tính $b-a$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với $t^2-2m\cdot t+m+2=0$ (2)
Yêu cầu bài toán thỏa khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và lớn hơn 1 tương đương với phương trình $(a+1)^2-2m\cdot(a+1)+m+2=0$ (với $t=a+1$) có 2 nghiệm dương phân

biệt hay phương trình $a^2-2(m-1)\cdot a+3-m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt tương đương với

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\Delta^{'}>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}(m-1)^2-(3-m)>0\\ m-1>0\\ 3-m>0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}m^2-m-2>0\\ m>1\\ m<3\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}m<-1\vee m>2\\ m>1\\ m<3\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &2<m<3.
\end{aligned}$$

Khi đó $a=2, b=3$ hay $b-a=1$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 58. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-50;50]$ sao cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^2)-2\log_2(-14x^2+29x-2)=0$ có nghiệm duy nhất?

A. 16. **B**. 14. **C**. 13. **D**. 15.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^2)-2\log_2(-14x^2+29x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\log_2(mx-6x^2)=\log_2(-14x^2+29x-2)\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-14x^2+29x-2>0\\ -14x^2+29x-2=mx-6x^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\in\left(\frac{1}{14};2\right)\\ -8x^2+29x-2=mx\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\in\left(\frac{1}{14};2\right)\\ \frac{-8x^2+29x-2}{x}=m.\end{cases}
\end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-50;50]$ để phương trình $\dfrac{-8x^2+29x-2}{x}=m$ có nghiệm duy nhất trên $\left(\dfrac{1}{14};2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-8x^2+29x-2}{x}$, với $x\in\left(\dfrac{1}{14};2\right)$.

$$f'(x)=\frac{-8x^2+2}{x^2};\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\in\left(\dfrac{1}{14};2\right)\\ x=-\dfrac{1}{2}\notin\left(\dfrac{1}{14};2\right)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{7}$	↗	21	↘	12

Từ bảng biến thiên và giả thiết suy ra $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in[-50;50]\\ \left[\begin{array}{l}m=21\\ \dfrac{3}{7}<m\le 12\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{1,2,\ldots,12,21\}.$

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Một người gửi 75 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $5,4\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hằng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi tiền, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 5 năm. **B**. 7 năm. **C**. 4 năm. **D**. 6 năm.

Lời giải.

Sau n năm người gửi nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là $75(1+0{,}054)^n$.

Theo bài ra ta có $75(1+0{,}054)^n>100\Leftrightarrow n>\log_{1{,}054}\dfrac{4}{3}\approx 5,47$.

Vậy sau ít nhất 6 năm người gửi nhân đc số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x+\ln 3}+\mathrm{e}^{x+\ln 9}+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\ln 2;+\infty)$?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\mathrm{e}^{3x}-6\mathrm{e}^{2x}+9\mathrm{e}^x+m=0\Leftrightarrow t^3-6t^2+9t=-m$, với $t=\mathrm{e}^x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta cần tìm m sao cho đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=t^3-6t^2+9t$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-6t^2+9t$, với $t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$f'(t)=3(t-1)(t-3)$. Bảng biến thiên của $f(t)$ như sau.

x	$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\frac{25}{8}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, ta suy ra giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-m \in \left(\frac{25}{8}; 4\right) \Leftrightarrow m \in \left(-4; -\frac{25}{8}\right)$.

Vậy, không có số nguyên m nào thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x} = (m-1)\left(2^{2+x}+2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$?

A. 2. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{1+x}+2^{1-x}$. Coi t là hàm theo biến x, ta có $t' = \ln 2\left(2^{1+x}-2^{1-x}\right) > 0\,\forall x \in [2;3]$. Do đó, khi $x \in [2;3]$, $t \in \left[\frac{17}{2}; \frac{65}{4}\right]$.

Với cách đặt trên, $t^2 = 4^{x+1}+4^{1-x}+8$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 = 2(m-1)t+24-8m \Leftrightarrow 2m(t-4) = (t-4)(t-6) \Leftrightarrow 2m = t-6$ (do $t > 4$).

Do $t \in \left[\frac{17}{2}; \frac{65}{4}\right]$ nên ta cần phải có $2m \in \left[\frac{5}{2}; \frac{41}{4}\right] \Leftrightarrow 2m \in \{4,6,8,10\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Tập các giá trị của m để phương trình $4\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)^x+\left(\sqrt{5}-2\right)^x-m+3=0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là

A. $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$. **B**. $(7;8)$.

C. $(-\infty;3)$. **D**. $(7;9)$.

Lời giải.

Đặt $(\sqrt{5}+2)^x = t$, $t > 0$. Vì $\left(\sqrt{5}+2\right)^x\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)^x = 1$ nên ta được phương trình

$$4t+\frac{1}{t}-m+3=0 \Leftrightarrow f(t) = 4t+3+\frac{1}{t} = m. \qquad (1)$$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm âm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm $0 < t < 1$.

Ta có $f'(t) = 4-\frac{1}{t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	8

Do đó để (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < t < 1$ thì $m \in (7;8)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 4. **B**. 5. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành $f(t) = t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(t) = 0$ có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m^2 - 5) > 0 \\ m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5 > 0 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ m < \dfrac{-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Suy ra có một giá trị nguyên $m = 2$ để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x + 3^x + m = 0$ có nghiệm.

A. $m > 0$. **B**. $m < 0$. **C**. $m > 1$. **D**. $0 < m < 1$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = -m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t > 0$, ta có $f'(t) = 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên $f(t)$:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	0 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình ban đầu có nghiệm khi $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho phương trình $\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **B**. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **C**. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **D**. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$.

Lời giải.

$\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0$ (1).

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $\log_2 x = t$. Ta được phương trình $t^2 - (m^2 - 3m)t + 3 = 0$ (2).

Ta có: $x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow \log_2(x_1 x_2) = 4 \Leftrightarrow \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

Vậy suy ra $m^2 - 3m = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -1. \end{array}\right.$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right) + 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)} = 5$.

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$.

$\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right) + 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)} = 5 \Leftrightarrow \log_2\left(x+\dfrac{1}{2x}\right) + 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)} = 5.$

Hàm số $y = \log_2\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)$ và $y = 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}$ đều tăng nên phương trình có nghiệm duy nhất $x + \dfrac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Tìm tham số m để phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x - m + 1 = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 2$. **B**. $m = -1$. **C**. $m = -2$. **D**. $m = 1$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 4t - m + 1 = 0 \quad (1)$

Với nghiệm t_0 ta có nghiệm $x_0 = \log_3 t_0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 1$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ và $\log_3 t_1 + \log t_2 = 1$.

Ta có $\log_3 t_1 + \log t_2 = 1 \Leftrightarrow \log_3(t_1t_2) = 1 \Leftrightarrow t_1t_2 = 3 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 3. **B**. 4. **C**. 5. **D**. Vô số.

Lời giải.

Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x^2-2x+9}{x} = m. \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2-2x+9}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$.

x	1		3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 8	↘	4	↗	$+\infty$

Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $4 < m < 8$.
Dp m nguyên nên $m \in \{5, 6, 7\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Gọi x, y là số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính ab.

A. $a.b = 5$. **B.** $ab = 1$. **C.** $ab = 8$. **D.** $ab = 4$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0; y > 0$.
Đặt $u = \log_9 x$; $v = \log_6 y$ và $t = \log_4 (x+y)$. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u = v = t \\ 9^u + 6^v = 4^t, \end{cases}$ (1)
suy ra $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ Do đó, $a = 1$, $b = 5$. Vậy $ab = 5$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên chẵn $(x; y)$ thỏa mãn $2^x - 3^y = 55$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 1.

Lời giải.

Vì x, y chẵn nên $x = 2a$, $y = 2b$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra

$$55 = 2^x - 3^y = (2^a)^2 - \left(3^b\right)^2 = \left(2^a - 3^b\right)\left(2^a + 3^b\right).$$

Do đó

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^a - 3^b = 1 \\ 2^a + 3^b = 55 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^a - 3^b = 5 \\ 2^a + 3^b = 11 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy có duy nhất cặp $(6; 2)$ thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_5 (1+x^2) + \log_{\frac{1}{3}} (1-x^2) = 0$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện $-1 < x < 1$.
Xét hàm $f(x) = \log_5 (1+x^2) + \log_{\frac{1}{3}} (1-x^2) = \log_5 (1+x^2) - \log_3 (1-x^2)$ với $x \in (-1; 1)$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)\ln 5} + \dfrac{2x}{(1-x^2)\ln 3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\dfrac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x}$ có nghiệm duy nhất.

A. $a \in \mathbb{R}$. **B.** $-1 < a < 0$. **C.** $a > 0$. **D.** không tồn tại a.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x} \Leftrightarrow a = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x}) \Leftrightarrow a = 3^{2x} - 3^{-2x}(1)$.

Xét hàm số $f(x) = 3^{2x} - 3^{-2x}$.

Có $f'(x) = \ln 3\,(2.3^{2x} + 2.3^{-2x}) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra với mọi giá trị của a thì (1) luôn có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^8} + a + 1 = 0.$$

A. $a = 1$. **B.** $a < -1$. **C.** không tồn tại a. **D.** $a < 1$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^8} + a + 1(1)$ xác định là $x \neq 0$.

Ta thấy nếu x là nghiệm của phương trình (1) thì $-x$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Vậy để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì $x = 0$.

So với điều kiện thì ta loại nghiệm này.

Vậy không có a để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[1; 9]$ để phương trình

$$2^{mx^2 - 4x + 2m} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{-4}}$$

có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình tương đương $mx^2-4x+2m-2=0$. Phương trình có hai nghiệm thực khi $\begin{cases} m\neq 0 \\ -2m^2+2m+4>0 \end{cases}$

hay $\begin{cases} m\neq 0 \\ -1<m<2. \end{cases}$

Vậy chỉ có $m=1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x+8}-4.3^{x+5}+27=0$.

A. -5. **B.** 5. **C.** $\dfrac{4}{27}$. **D.** $-\dfrac{4}{27}$.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương $3^8\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^5\cdot 3^x+27=0$.

Đây là phương trình bậc hai với ẩn là 3^x.

Ta có $3^{x_1+x_2}=\dfrac{c}{a}=3^{-5}\Leftrightarrow x_1+x_2=-5$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{(x^2+3x-4)^{2017}(3^x+4^x-5^x)^{2018}}{\log_{x-1}10}=0$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x>1, x\neq 2$. Phương trình tương đương với $x^2+3x-4=0$ (1) hoặc $3^x+4^x-5^x=0$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm $x=1$, $x=-4$. Phương trình (2) tương đương với

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1. \ (3)$$

Vế trái phương trình (3) là một hàm số nghịch biến, vế phải là hàm hằng nên phương trình này có tối đa một nghiệm. Mặt khác, nhẩm được nghiệm $x=2$.

Mà $x=1, x=-4, x=2$ đều không thỏa mãn điều kiện ban đầu. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+3)16^x+(2m-1)4^x+m+1=0$ có 2 nghiệm trái dấu.

A. $m\geq -3$. **B.** $-3<m<-1$. **C.** $-1<m<-\dfrac{3}{4}$. **D.** $-1<m<0$.

Lời giải.

Đặt $t=4^x,\ t>0$. Phương trình đã cho trở thành $(m+3)t^2+(2m-1)t+m+1=0$ (1).

Phương trình ban đầu có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<1, t_2>1$. Từ đó ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ (t_1-1)(t_2-1)<0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20m-11>0 \\ \dfrac{4m+3}{m+3}<0 \\ \dfrac{1-2m}{m+3}>0 \\ \dfrac{m+1}{m+3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<-\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 78. Phương trình $2^{\sin^2 x}+2^{1+\cos^2 x}=m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $4\leqslant m\leqslant 3\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 5$. **C.** $0<m\leqslant 5$. **D.** $4\leqslant m\leqslant 5$.

Lời giải.

Ta có $2^{\sin^2 x}+2^{1+\cos^2 x}=m\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+2^{2-\sin^2 x}=m\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+\dfrac{4}{2^{\sin^2 x}}=m.$

Đặt $t=2^{\sin^2 x}, t\in[1;2]$, ta có phương trình $t+\dfrac{4}{t}=m\,(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{4}{t}$ với $t\in[1;2]$.

$f'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}=\dfrac{t^2-4}{t^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\notin(1;2)\\ t=-2\notin(1;2)\end{array}\right.$.

$f(1)=5;\ f(2)=4$.

Do đó $\min\limits_{[1;2]}f(t)=4$ và $\max\limits_{[1;2]}f(t)=5$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[1;2]}f(t)\leqslant m\leqslant \max\limits_{[1;2]}f(t)\Leftrightarrow 4\leqslant m\leqslant 5$.

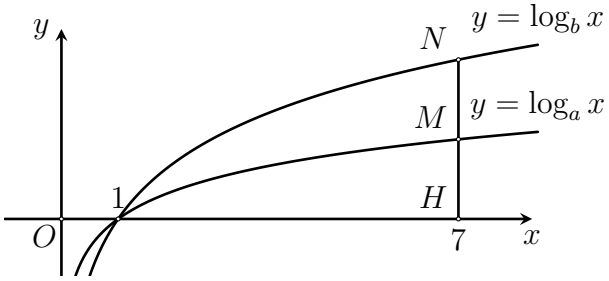
Vậy $4\leqslant m\leqslant 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 79.

Cho hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại H, M và N. Biết rằng $HM=MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a=7b$. **B.** $a=b^2$. **C.** $a=b^7$. **D.** $a=2b$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy, $HM=MN\Leftrightarrow NH=2MH$

$$\Leftrightarrow \log_b 7=2\log_a 7$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_7 b}=\frac{2}{\log_7 a}$$
$$\Leftrightarrow a=b^2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 80. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m\cdot 2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$?

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$ khi phương trình $t^2-2m\cdot t+2m=0$ có 2 nghiệm $t>0$ thoả mãn $t_1\cdot t_2=2^{x_1}\cdot 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=8$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P=8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ 2m>0\\ t_1\cdot t_2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m>0\\ m>0\\ 2m=8\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 81. Xác định điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m < 2$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+2}{2t-1}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+2}{2t-1}$ ta có $f'(t) = \dfrac{2t^2-2t-4}{(2t-1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \hoac{t = -1 \\ t = 2}$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-2	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $-2 < m < 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Phương trình $\log_3 x = \dfrac{x+1}{2x-2}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

pt $\Leftrightarrow \log_3 x - \dfrac{x+1}{2x-2} = 0$.

Xét $f(x) = \log_3 x - \dfrac{x+1}{2x-2}$, $\mathscr{D} = (0;+\infty) \setminus \{1\}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3} + \dfrac{4}{(2x-2)^2} > 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$. Tính tổng $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$.

A. $S = 45$. **B.** $S = 180$. **C.** $S = 9$. **D.** $S = 252$.

Lời giải.

pt $\Leftrightarrow \log_3(3 \cdot 3^x - 1) = \log_3 3^{2x} - \log_3 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x - 1 = \dfrac{3^{2x}}{2} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \hoac{3^{x_1} = 3 + \sqrt{7} \\ 3^{x_1} = 3 - \sqrt{7}.}$

Vậy $S = (3^{x_1})^3 + (3^{x_2})^3 = (3+\sqrt{7})^3 + (3-\sqrt{7})^3 = 180$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân, đồng thời mỗi số thực dương $a, (a \neq 0)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x}$.

A. $\dfrac{2019}{2}$. **B.** 60. **C.** 2019. **D.** 4038 .

Lời giải.

Ta có $x, y, z > 0$. Theo giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} xz & = y^2 \\ \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z & = 2\log_{\sqrt{a}} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz & = y^2 \\ xz^3 & = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz & = y^2 \\ z^2 & = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

Vậy $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x} = 1959 + 2019 + 60 = 4038$

Chọn đáp án D □

Câu 85. Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1) = \dfrac{1}{x-2}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

$\ln(x-1) = \dfrac{1}{x-2} \Leftrightarrow \ln(x-1) - \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x-1) - \dfrac{1}{x-2}$ với $x > 1$ và $x \neq 2$ ta có

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0, \ \forall x \in (1;2) \cup (2;+\infty).$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty; \ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty; \ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$

Ta có bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Cho hai số thực x, y thoả mãn $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, $0 \leq y \leq 1$ và $\log(11 - 2x - y) = 2y + 4x - 1$. Xét biểu thức $P = 16yx^2 - 2x(3y+2) - y + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P. Khi đó, giá trị $T = (4m + M)$ bằng bao nhiêu?

A. 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

Lời giải.

Ta thấy $f(t)=\log(11-t)$ nghịch biến trên $[0;2]$.
Ta thấy $g(t)=2t-1$ đồng biến trên $[0;2]$.
Ta thấy $f(1)=g(1)$, do vậy $f(t)=g(t)$ có nghiệm duy nhất $t=1$.
Khi đó $\log(11-2x-y)=2y+4x-1\Rightarrow 2x+y=1\Leftrightarrow 2x=1-y$.
Ta được $P=4y^3-5y^2+2y+3, y\in[0;1]$. Ta có được bảng biến thiên

y	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1
P'		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	3	↗	$\frac{88}{27}$	↘	$\frac{13}{4}$	↗	4

Ta được $\begin{cases} m=3 \\ M=4 \end{cases}\Rightarrow T=16$.
Chọn đáp án A □

Câu 87. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (ẩn x)

$$3^{\log_2 x^2}-2(m+3)3^{\log_2 x}+m^2+3=0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1\cdot x_2>2$.

A. $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.
Đặt $t=3^{\log_2 x}, t>0$.
Khi đó

$$\begin{aligned}&3^{\log_2 x^2}-2(m+3)3^{\log_2 x}+m^2+3=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1,x_2>0 \text{ thoả } x_1\cdot x_2>2.\\ &\Leftrightarrow t^2-2(m+3)t+m^2+3=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } t_1,t_2>0 \text{ thoả } t_1\cdot t_2>3.\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}(m+3)^2-(m^2+3)>0\\ m+3>0\\ m^2+3>3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ m\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 88. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $4^x-m2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $t=2^x>0$.
Do phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1<0<x_2\Rightarrow 2^{x_1}<2^0<2^{x_2}\Rightarrow 0<t_1<1<t_2$.
Suy ra phương trình trở thành $t^2-mt+2m-5=0$ có hai nghiệm $0<t_1<1<t_2$.

Suy ra $t_1-1<0<t_2-1 \Rightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0;P>0\\ P-S+1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-8m+20>0\\ m>0\\ 2m-5>0\\ 2m-5-m+1<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}<m<4$, do m nguyên dương, suy ra $m=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)}=x$ là:

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$

$$2^{\log_5(x+3)}=x \Leftrightarrow \log_5(x+3)=\log_2 x=t$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+3=5^t\\ x=2^t\end{cases} \Rightarrow 2^t+3=5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t+3\left(\frac{1}{5}\right)^t=1(*)$$

Do $0<\dfrac{2}{5}<1$ và $0<\dfrac{1}{5}<1$ nên $f(t)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{5}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, và $t=1$ thỏa phương trình nên đó là nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=2^t=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 90. Nếu phương trình $3^{2x}-4\cdot 3^x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và $x_1<x_2$ thì

A. $2x_1+x_2=1$. **B**. $x_1+x_2=0$. **C**. $x_1+2x_2=-1$. **D**. $x_1\cdot x_2=1$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x}-4\cdot 3^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=2-\sqrt{3}\\ 3^x=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$. Vậy phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $3^{x_1}.3^{x_2}=1 \Leftrightarrow x_1+x_2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Cho a là giá trị để phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+(1-a)\left(2-\sqrt{3}\right)^x-4=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3$. Khi đó a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-3)$. **B**. $(-3;+\infty)$. **C**. $(0;+\infty)$. **D**. $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$ $(t>0)$, suy ra phương trình đã cho trở thành

$t+\dfrac{1-a}{t}-4=0 \Leftrightarrow t^2-4t+1-a=0$ $(*)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4-(1-a)>0\\ 1-a>0\end{cases} \Leftrightarrow -3<a<1.$

Khi đó $(*)$ có hai nghiệm $t_1,t_2 \Rightarrow x_1=-\log_{2-\sqrt{3}}t_1$, $x_2=-\log_{2-\sqrt{3}}t_2$.

Theo bài ra $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3 \Leftrightarrow x_1-x_2=-\log_{2-\sqrt{3}}3$

$\Leftrightarrow -\log_{2-\sqrt{3}}t_1+\log_{2-\sqrt{3}}t_2=\log_{2-\sqrt{3}}\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{2-\sqrt{3}}\dfrac{t_2}{t_1}=\log_{2-\sqrt{3}}\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{t_2}{t_1}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow t_1 = 3t_2$ (1)

Mặt khác theo Vi-et ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1.t_2 = 1 - a \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $t_2 = 1, t_1 = 3, 1 - a = t_1 \cdot t_2 = 3 \Rightarrow a = -2 \in (-3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Số giá trị nguyên của m để phương trình $(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m + 5 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu là

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x, t > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0 \quad (1)$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện $0 < t_1 < 1 < t_2$, hay

$$\begin{cases} S = \dfrac{2(2m-3)}{m+1} > 0 \\ P = \dfrac{6m+5}{m+1} > 0 \\ (m+1)\left[(m+1) - 2(2m-3) + 6m + 5\right] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right) \\ m \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right) \cup (1; +\infty) \\ m \in (-4; -1) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-4; -\frac{5}{6}\right).$$

Từ đó suy ra $m \in \{-3; -2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{2}\log_9(x-1)^4 = 2\log_9(4x)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+3)+\frac{1}{2}\log_9(x-1)^4=2\log_9(4x)\\
\Leftrightarrow&\log_3(x+3)+\log_3|x-1|=\log_3(4x)\\
\Leftrightarrow&(x+3)|x-1|=4x\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\(x+3)(1-x)=4x\end{cases}\\\begin{cases}x>1\\(x+3)(x-1)=4x\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\x=-3+2\sqrt{3};\ x=-3-2\sqrt{3}\end{cases}\\\begin{cases}x>1\\x=3;\ x=-1\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=-3+2\sqrt{3}\\x=3\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 94. Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng. Theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 10 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó được hết nợ ngân hàng? biết rằng lãi suất trên được tính theo dư nợ.

A. 57. **B**. 56. **C**. 58. **D**. 69.

Lời giải.

Gọi N_n là số tiền người vay còn nợ ngân hàng sau n tháng, l là lãi suất hàng tháng, a là số tiền trả hàng tháng, A là số tiền vay ban đầu.

$N_1=A(1+l)-a$

$N_2=[A(1+l)-a](1+l)-a=A(1+l)^2-a[1+(1+l)]$

$N_3=\{A(1+l)^2-a[1+(1+l)]\}(1+l)-a=A(1+l)^3-a[1+(1+l)+(1+l)^2]$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$N_n=A(1+l)^n-a[1+(1+l)+(1+l)^2+\cdots+(1+l)^{n-1}]=A(1+l)^n-a\dfrac{(1+l)^n-1}{l}$.

Khi trả hết nợ:

$N_n=0\Leftrightarrow A(1+l)^n-a\dfrac{(1+l)^n-1}{l}=0\Leftrightarrow(1+l)^n(Al-a)+a=0\Leftrightarrow n=\log_{1+l}\dfrac{a}{a-Al}$.

Áp dụng công thức tổng quát trên vào bài toán này ta tính được $n\approx 57{,}68$. Vậy $n=58$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho phương trình $4^x-m\cdot 2^{x+1}+2m=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=4$. Khi đó giá trị m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(6;+\infty)$. **B.** $(2;4]$. **C.** $(4;6]$. **D.** $(0;2]$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$, $(t>0)$. Theo đề ta phải có $x_1+x_2=4$ suy ra $2^{x_1+x_2}=2^4=16$ hay $t_1\cdot t_2=16$.

Phương trình $t^2-2mt+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1\cdot t_2=16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-2m>0 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{2m}{1}=16 \\ -\dfrac{b}{a}=\dfrac{2m}{1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m=8 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=8.$$

Chọn đáp án A □

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-20;2018]$ của tham số m để phương trình $25^x-(m-1)10^x+(4-m)4^x=0$ có nghiệm dương?

A. 16. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 15.

Lời giải.

$$25^x-(m-1)10^x+(4-m)4^x=0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+(m-1)\left(\frac{5}{2}\right)^{x}+4-m=0 \quad (1).$$

Đặt $t=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x$, $t>0$ ta được phương trình $t^2+(m-1)t+4-m=0$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t>1$.

Ta có $(2)\Leftrightarrow \dfrac{t^2-t+4}{1-t}=m$, do $t>1$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2-t+4}{1-t}$ với $t>1$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{-t^2+2t+3}{(1-t)^2}$, $g'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Ta có bảng biến thiên

x	1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để (2) có nghiệm $t>1$ thì $m\le -5$.

Vậy có 16 giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-20;2018]$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là các số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. 14. **B.** 34. **C.** 21. **D.** 32.

Lời giải.

Đặt $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}=t$, khi đó ta có $\begin{cases} x=2\cdot 25^t \\ y=15^t \\ x+y=4\cdot 9^t. \end{cases}$

Từ đó ta có phương trình $2\cdot 25^t+15^t=4\cdot 9^t$.

Chia cả hai vế cho $9^t > 0$ ta được $2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{5}{3}\right)^t - 4 = 0$.

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{3}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{31}}{4} \\ \left(\frac{5}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{31}}{4}. \end{array}\right.$

Do $\left(\frac{5}{3}\right)^t > 0$ nên $\left(\frac{5}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{31}}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 31 \end{cases} \Rightarrow a + b = 32.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 6^x + (m-2) \cdot 4^x = 0$ có nghiệm dương?

A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có: $9^x - 2 \cdot 6^x + (m-2) \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + m - 2 = 0.$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Khi đó $x > 0 \Leftrightarrow t > 1$.

Phương trình đã cho có nghiệm dương $\Leftrightarrow$ phương trình $t^2 - 2t + m - 2 = 0$ có nghiệm $t > 1 \Leftrightarrow$ phương trình $(t-1)^2 = 3 - m$ có nghiệm $t > 1 \Leftrightarrow m < 3$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1, 2\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Cho phương trình $2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$. Biết $S = (a;b) \cup (c;d)$, $a < b < c < d$ là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$. Tính giá trị biểu thức $A = a + b + 5c + 2d$.

A. $A = 1$. **B**. $A = 2$. **C**. $A = 0$. **D**. $A = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0 \\ \Leftrightarrow &\log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2(x^2 + mx - 2m^2) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 \\ x^2 + mx - 2m^2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 - (m+1)x + 2m - 2m^2 = 0 \quad (1) \\ x^2 + mx - 2m^2 > 0 \qquad\qquad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (1) có các nghiệm $x_1 = 1 - m, x_2 = 2m$. Thay vào (2) và vào điều kiện $x_1^2 + x_2^2 > 1$ ta có

$$\begin{cases} 4m^2 + (m-1)^2 > 1 \\ (2m)^2 + m \cdot (2m) - 2m^2 > 0 \\ (1-m)^2 + m \cdot (1-m) - 2m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 2m > 0 \\ 4m^2 > 0 \\ -2m^2 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy $a = -1, b = 0, c = \frac{2}{5}, d = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 100. Biết phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$. Tính tích $x_1 \cdot x_2$.

A. $x_1 \cdot x_2 = \log_3 5$. **B**. $x_1 \cdot x_2 = -\log_3 5$. **C**. $x_1 \cdot x_2 = 1 + \log_3 5$. **D**. $x_1 \cdot x_2 = 1 - \log_3 5$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Ta có $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15 \Leftrightarrow 3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 3 \cdot 5 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(3^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x}}\right) = 0$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1 + \dfrac{1}{x} \log_3 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\log_3 5. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 và $x_1 \cdot x_2 = -\log_3 5$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. C	5. D	6. B	7. D	8. C	9. A	10. C
11. D	12. C	13. D	14. D	15. C	16. D	17. D	18. B	19. A	20. A
21. A	22. D	23. A	24. C	25. C	26. D	27. C	28. A	29. D	30. B
31. B	32. A	33. C	34. D	35. B	36. A	37. D	38. D	39. B	40. C
41. D	42. C	43. B	44. C	45. B	46. C	47. D	48. C	49. A	50. C
51. C	52. B	53. C	54. B	55. A	56. C	57. A	58. C	59. D	60. A
61. D	62. B	63. C	64. B	65. B	66. D	67. C	68. A	69. A	70. D
71. B	72. A	73. C	74. A	75. A	76. B	77. C	78. D	79. B	80. A
81. B	82. C	83. B	84. D	85. D	86. A	87. A	88. A	89. B	90. B
91. B	92. A	93. B	94. C	95. A	96. A	97. D	98. B	99. B	100. B

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=16$. **B.** $a+b=14$. **C.** $a+b=13$. **D.** $a+b=11$.

Lời giải.

Phương pháp:

Giải phương trình bằng phương pháp xét hàm số.

Cách giải:

ĐKXĐ: $x\neq\dfrac{1}{2}, x>0$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x.\\ \Leftrightarrow\ &\log_7\left(4x^2-4x+1\right)-\log_7(2x)+4x^2+1=6x.\\ \Leftrightarrow\ &\log_7\left(4x^2-4x+1\right)+4x^2-4x+1=\log_7(2x)+2x \quad (1)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t, t>0$ ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0, \forall t>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó, $(1)\Leftrightarrow f\left(4x^2-4x+1\right)=f(2x)\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\ (\text{tm})\\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\ (\text{tm}).\end{array}\right.$

TH1: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}; x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\Rightarrow x_1+2x_2=\dfrac{9-\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})$: Vô lí.

TH2: $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow x_1+2x_2=\dfrac{9+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1}{4}(a+\sqrt{b})\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=9\\ b=5\end{array}\right. \Rightarrow a+b=14.$

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$\dfrac{15}{13}$	↘	

Giá trị lớn nhất của m để phương trình $\mathrm{e}^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

A. e^4. **B.** e^3. **C.** $\mathrm{e}^{\frac{15}{13}}$. **D.** e^5.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{e}^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m \Leftrightarrow 2f^3(x)-\dfrac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\dfrac{3}{2}=\ln m$.

Xét hàm số $g(x)=2f^3(x)-\dfrac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\dfrac{3}{2}$ có

$g'(x)=6f^2(x)f'(x)-13f(x)f'(x)+7f'(x)=f'(x)\left[6f^2(x)-13f(x)+7\right]$

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 6f^2(x)-13f(x)+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=1 \\ f(x)=\dfrac{7}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; x=3 \\ x=1; x=x_1>3 \\ x=x_2<1. \end{array}\right.$

Xét $g(x)$ trên đoạn $[0;2]$.

+ Trong khoảng $(0;1)$ ta có $f'(x)<0$, $f(x)>1$, $f(x)<\dfrac{7}{6}$ nên $f'(x)(f(x)-1)\left(f(x)-\dfrac{7}{6}\right)>0$ hay $g'(x)>0$.

+ Trong khoảng $(1;2)$ ta có $f'(x)>0$, $f(x)>1$, $f(x)<\dfrac{7}{6}$ nên $f'(x)(f(x)-1)\left(f(x)-\dfrac{7}{6}\right)<0$ hay $g'(x)<0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	4	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=4$.

Vậy yêu cầu bài toán thỏa nếu và chỉ nếu $\ln m \le 4 \Leftrightarrow m \le \mathrm{e}^4$, hay giá trị lớn nhất của m là e^4.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho phương trình $m\ln^2(x+1)-(x+2-m)\ln(x+1)-x-2=0$ (1). Tập tất cả giá trị của tham số m để phương trình (1) có các nghiệm, trong đó có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó, a thuộc khoảng

A. $(3,8;3,9)$. **B.** $(3,7;3,8)$. **C.** $(3,6;3,7)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x>-1$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow m\ln^2(x+1)-(x+2-m)\ln(x+1)-x-2=0 \\
&\Leftrightarrow m\ln^2(x+1)-(x+2)\ln(x+1)+m\ln(x+1)-(x+2)=0 \\
&\Leftrightarrow m\ln(x+1)\left[\ln(x+1)+1\right]-(x+2)\left[\ln(x+1)+1\right]=0 \\
&\Leftrightarrow \left[\ln(x+1)+1\right]\left[m\ln(x+1)-x-2\right]=0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(x+1)+1=0 \\ m\ln(x+1)-x-2=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0 \text{ (loại)} \\ m\ln(x+1) - x - 2 = 0\ (*) \end{array}\right.$$

Với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $x = -2 < 0$ (loại) nên không thỏa bài toán.

Với $m \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+2} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ có $f'(x) = \dfrac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = x_0 \in (2;3)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ nên ta có bảng biến thiên trên $(-1;+\infty)$ như sau

x	-1		0		2		x_0		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{\ln 3}{4}$	↗	c	↘		↘	$\dfrac{\ln 5}{6}$	↘	6

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ thì $0 < \dfrac{1}{m} < \dfrac{\ln 5}{6} \Rightarrow \dfrac{6}{\ln 5} \approx 3{,}728$.

Suy ra $a \in (3{,}7; 3{,}8)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình $\log_2 \dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2 - 5x - m + 2$ có nghiệm?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Điều kiện $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

$$\begin{aligned} &\log_2 \frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2 - 5x - m + 2 \\ \Leftrightarrow &\log_2 \left(3x^2+3x+m+1\right) - \log_2 \left(2x^2-x+1\right) = x^2 - 5x - m + 2 \\ \Leftrightarrow &\log_2 \left(3x^2+3x+m+1\right) + \left(3x^2+3x+m+1\right) = \log_2 \left(4x^2-2x+2\right) + \left(4x^2-2x+2\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$.

Vậy hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow f\left(3x^2+3x+m+1\right) = f\left(4x^2-2x+2\right) \Leftrightarrow 3x^2+3x+m+1 = 4x^2-2x+2$ $\Leftrightarrow x^2 - 5x - m + 1 = 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 25 - 4.(-m+1) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{21}{4}$.

Do m nguyên âm nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a + b$ là

A. 2. **B**. 4. **C**. -6. **D**. -14.

Lời giải.

Phương pháp:

Đặt $t = e^x$. Đưa phương trình đã cho về phương trình ẩn t với $t \in (1;5)$.

Cô lập m và sử dụng phương pháp hàm số để phương trình ẩn t có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(1;5)$ khi đó phương trình đã cho cũng có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$.

Cách giải:

Đặt $t = e^x$. Khi đó với $x \in (0;\ln 5) \Rightarrow t \in \left(e^0; e^{\ln 5}\right)$ hay $t \in (1;5)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 8t - m = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 8t = m$ với $t \in (1;5)$.

Nhận thấy rằng để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;\ln 5)$ thì phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$.

Xét $f(t) = 2t^2 - 8t \Rightarrow f'(t) = 4t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in (1;5)$

BBT của $f(t)$ trên $(1;5)$.

t	1		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	-8	$\nearrow$	10

Từ bàng biến thiên ta thấy phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm phân biệt $t \in (1;5)$ khi và chỉ khi $-8 < m < -6$.

Vậy để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ thì $m \in (-8;-6) \Rightarrow a = -8; b = -6 \Rightarrow a + b = -14$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6 (2D2G5-3). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

A. 17. **B**. 16. **C**. 14. **D**. 15.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > -3$ và $x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \log_3(x+3) + 4m\log_{(x+3)} 3 - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3^2(x+3) - 16\log_3(x+3) + 4m = 0 \qquad (1). \end{aligned}$$

Đặt $\log_3(x+3) = t$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 16t + 4m = 0 \qquad (2)$.

Ta có $\log_3(x+3) = t \Leftrightarrow x = 3^t - 3$.

Theo điều kiện đề bài thì $x > -2$ nên $3^t - 3 > -2 \Leftrightarrow t > 0$.

Vậy phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$ thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 16 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 4m > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16.$$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn $\mathrm{e}^{3x+5y-10}-\mathrm{e}^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{3x+5y-10}-\mathrm{e}^{x+3y-9}=1-2x-2y &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y-10}-\mathrm{e}^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+5y-10}+(3x+5y-10)=\mathrm{e}^{x+3y-9}+(x+3y-9)\\ &\Leftrightarrow f(3x+5y-10)=f(x+3y-9) \quad (1)\end{aligned}$$

với $f(t)=\mathrm{e}^t+t$. Vì $f'(t)=\mathrm{e}^t+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó $(1)\Leftrightarrow 3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2y=1-2x$. Thay vào điều kiện còn lại, ta được phương trình

$$\log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0 \quad (2)$$

Bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm x, điều này xảy ra khi $\Delta=3m^2+12m\geq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 4\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\leq x,y\leq 1$, trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)\cdot(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)\cdot(y+1)-2=0 &\Leftrightarrow \log_3(x+y)-\log_3(1-xy)+xy+x+y-1=0\\ &\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+1-xy.\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t)+t,\ t\in(0;2)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0\ \forall t\in(0;2)$. Do đó phương trình trên tương đương với

$$x+y=1-xy\Leftrightarrow y=\frac{1-x}{1+x}.$$

Từ đó suy ra $P=2x+y=2x+\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$.
$P'=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$, $P'=0$ có nghiệm $x=0$ thuộc $[0;1]$.
Lần lượt thay $x=0$ và $x=1$ vào P, ta nhận được giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

A. $18<m<\dfrac{39}{2}$. **B.** $18<m<20$. **C.** $19<m<20$. **D.** $19<m<\dfrac{39}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\sqrt{2}}(mx-6x^3)+2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2+29x-2)=0 \Leftrightarrow \log_2(mx-6x^3)=\log_2(-14x^2+29x-2)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2+29x-2>0 \\ mx-6x^3=-14x^2+29x-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{14}<x<2 \\ \dfrac{6x^3-14x^2-2}{x}=m-29. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6x^3-14x^2-2}{x}$ với $x\in\left(\dfrac{1}{14};2\right)$, ta có $f'(x)=\dfrac{12x^3-14x^2+2}{x^2}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-\dfrac{1}{3} & \text{(loại)} \\ x=\dfrac{1}{2} & \text{(nhận)} \\ x=1 & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	||
$f(x)$	$-\frac{2839}{98}$	↗	$-\frac{19}{2}$	↘	-10	↗	-5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm thì $-10<m-29<-\dfrac{19}{2} \Leftrightarrow 19<m<\dfrac{39}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9\cdot 9^{x^2-2x}-(2m+1)\,15^{x^2-2x+1}+(4m-2)\,5^{2x^2-4x+2}=0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $\dfrac{1}{2}<m<1$.

B. $m>\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m<\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}$.

C. $m>1$ hoặc $m<\dfrac{1}{2}$.

D. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$9\cdot 9^{x^2-2x}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow 9^{x^2-2x+1}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}\right]^2-(2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}+4m-2=0,(1).$$

Đặt $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=t>0$.

Khi đó (1) trở thành

$$t^2-(2m+1)t+4m-2=0\Leftrightarrow (t-2)(t-2m+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=2m-1. \end{array}\right.$$

Chú ý rằng với $t=2\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=2\Leftrightarrow (x-1)^2=\log_{\frac{3}{5}}2$, mà $\log_{\frac{3}{5}}2<0$ và $(x-1)^2\geq 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=2m-1$. (2)

Xét hàm $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ có $f'(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}\cdot\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)\cdot 2(x-1)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f(x)$, ta thấy để phương trình (1) có 2 nghiệm thực x phân biệt thì phương trình (2) phải có duy nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$, nghiệm còn lại (nếu có) khác 1. Số nghiệm của (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ và đường thẳng $y=2m-1$ nên điều kiện của m thỏa mãn là $0<2m-1<1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<m<1$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho phương trình $4^x-(10m+1)\,2^x+32=0$ biết rằng phương trình này có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1x_2}=1$. Khi đó, khẳng định nào sau đây về m là đúng?

A. $0<m<1$. **B.** $2<m<3$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $1<m<2$.

Lời giải.

Đặt $2^x=t\,(t>0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-(10m+1)\,t+32=0$. (∗)

Phương trình ban đầu có hai nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ (∗) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (10m+1)^2-4.32>0\\ (10m+1)>0\\ 32>0. \end{cases}.$$

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1+t_2=10m+1\\ t_1t_2=32. \end{cases}$

Với $t_1\cdot t_2=32\Rightarrow 2^{x_1}+x_2=32\Leftrightarrow x_1+x_2=5$.

Lại có $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1x_2}=1\Leftrightarrow x_1+x_2+1=x_1x_2$ nên $x_1x_2=6$.

Khi đó ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \Rightarrow t_1=4 \\ X=3 \Rightarrow t_2=8 \end{array}\right.$.

Mặt khác $t_1+t_2=10m+1 \Leftrightarrow 12=10m+1 \Leftrightarrow m=\dfrac{11}{10}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $1<m<2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho m, n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $2018\left(\log_m x\right)\cdot\left(\log_n x\right)=2017\log_m x+2018\log_n x+2019$. P nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $m\cdot n=2^{2020}$. **B.** $m\cdot n=2^{2017}$. **C.** $m\cdot n=2^{2019}$. **D.** $m\cdot n=2^{2018}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $x>0$.

Với điều kiện đó, phương trình đã cho viết lại thành

$$2018\log_m x\cdot\left(\log_n m\cdot\log_m x\right)-2017\log_m x-2018\log_n m\cdot\log_m x-2019=0 \quad (1).$$

Đặt $t=\log_m x$, $t\in\mathbb{R}$. Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$2018\left(\log_n m\right)\cdot t^2-(2017+2018\log_n m)t-2019=0 \quad (2).$$

Vì $2018\cdot\log_n m\cdot(-2019)<0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu, suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2.

Xét $\log_m(x_1\cdot x_2)=\log_m x_1+\log_m x_2=\dfrac{2017+2018\log_n m}{2018\log_n m}=\dfrac{2017}{2018\log_n m}+1$.

Suy ra $x_1\cdot x_2=m^{\frac{2017}{2018\log_n m}+1}=m^{\frac{2017}{2018}\log_m n+1}=m\cdot n^{\frac{2017}{2018}}$.

Theo bài ra, do m là số nguyên dương khác 1 nên $m\geq 2$ hay $P=x_1\cdot x_2\geq 2\sqrt[2018]{n^{2017}}$.

Mặt khác n là số nguyên dương khác 1 nên $n\geq 2$ và $2017, 2018$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên để P nguyên và có giá trị nhỏ nhất thì $n=2^{2018}$. Lúc đó $m\cdot n=2\cdot 2^{2018}=2^{2019}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $4^{ab}\cdot 2^{a+b}=\dfrac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+2ab^2$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{17}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $ab<1$.

$$\begin{aligned} 4^{ab}\cdot 2^{a+b}=\frac{8(1-ab)}{a+b} &\Leftrightarrow 2^{2ab+a+b-3}=\frac{1-ab}{a+b} \\ &\Leftrightarrow 2ab+a+b-3=\log_2\frac{1-ab}{a+b} \\ &\Leftrightarrow \log_2(1-ab)-\log_2(a+b)=2ab+a+b-3 \\ &\Leftrightarrow \log_2(2-2ab)+(2-2ab)=\log_2(a+b)+(a+b). \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t$, $(t>0)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0$, $\forall t>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t>0$.

Từ (1) ta có $2-2ab=a+b \Leftrightarrow a=\dfrac{2-b}{1+2b} \Rightarrow P=ab(1+2b)=2b-b^2$.

Giá trị lớn nhất của $P=1$ tại $b=1$ và $a=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hai số thực $a>1$, $b>1$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $a^x \cdot b^{x^2-1}=1$. Trong trường hợp biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a<b$. **B.** $ab=4$. **C.** $ab=2$. **D.** $a>b$.

Lời giải.

Ta có: $a^x=b^{1-x^2} \Leftrightarrow x\cdot\log_b a=1-x^2 \Leftrightarrow x^2+(\log_b a)\,x-1=0$

Khi đó

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\log_b a \\ x_1x_2=-1. \end{cases}$$

Do đó $S=\left(\dfrac{-1}{-\log_b a}\right)^2-4\,(-\log_b a)=\dfrac{1}{(\log_b a)^2}+4\log_b a$.

Đặt $t=\log_b a>\log_b 1=0$. Khi đó $S=\dfrac{1}{t^2}+4t=\dfrac{1}{t^2}+2t+2t \overset{Cauchy}{\geqslant} 3\sqrt[3]{4}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \min S=3\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 2t=\frac{1}{t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad t^3=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_b a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &\Rightarrow \quad a=b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}<b^1 \Rightarrow a<b. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}$.

A. $\dfrac{13+\sqrt{87}}{2}$. **B.** $\dfrac{11+\sqrt{87}}{2}$. **C.** $\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$. **D.** $\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $a=2^x,\ b=3^y,\ c=4^z\ (a>0,b>0,c>0)$.

Theo giả thiết, ta có $a^2+b^2+c^2=a+b+c \Leftrightarrow \left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}\quad(*)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2a+3b+4c$.

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, lấy các điểm $M(a;b;c), a>0,b>0,c>0$ thỏa mãn với $(*)$.

$\Leftrightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Xét mặt phẳng $(\alpha)::2x+3y+4z-T=0$ đi qua $M(a;b;c)$.

$$\Rightarrow d\,(I_2(\alpha))\leq IM=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\left|2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}-T\right|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\leq\frac{\left|\frac{9}{2}-T\right|}{\sqrt{29}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \left|T-\frac{9}{2}\right|\leq\frac{\sqrt{87}}{2} \Leftrightarrow T-\frac{9}{2}\leq\frac{\sqrt{87}}{2} \Leftrightarrow T\leq\frac{9+\sqrt{87}}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với mặt cầu (I,R) tại M.

Bằng tính toán, ta giải được: $a=\dfrac{29+2\sqrt{87}}{58}$; $b=\dfrac{29+3\sqrt{87}}{58}$; $c=\dfrac{29+4\sqrt{87}}{58}$.

Vậy $\max T=\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ một tháng. Phương án trả nợ của anh Nam là: Sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay anh bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả của mỗi lần là như nhau và hoàn thành sau đúng 5 năm kể từ khi vay. Tuy nhiên, sau khi dự án có hiệu quả và đã trả nợ được 12 tháng theo phương án cũ, anh Nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

A. 32 tháng. **B**. 31 tháng. **C**. 29 tháng. **D**. 30 tháng.

Lời giải.

Gọi n là số tháng anh Nam trả nợ, B là số tiền mượn, $B=200$ triệu, $C=9$ triệu.

☑ Dự kiến trả 60 tháng hết nợ.

Gọi A_0 là số tiền trả mỗi tháng.

Ta có $A_0+A_0(1+r)+\cdots+A_0(1+r)^{59}+A_0(1+r)^{60}\Rightarrow A_0\dfrac{(1+r)^{60}-1}{1+r-1}=B_0(1+r)^{60}$.

Suy ra $A_0=4.035.211$ đồng.

☑ Thực tế: trả n tháng trong đó có 12 tháng trả A_0 và $n-12$ tháng trả 9 triệu.

Suy ra:

$A_0(1+r)^{n-1}+A_0(1+r)^{n-2}+\cdots+A_0(1+r)^{n-12}+C(1+r)^{n-13}+C(1+r)^{n-14}+\cdots C\geqslant B(1+r)^n$

Suy ra $A_0(1+r)^{n-12}\left[\dfrac{(1+r)^{12}-1}{1+r-1}\right]+C\left[\dfrac{(1+r)^{n-12}-1}{r}\right]\geqslant B(1+r)^n$

$\Rightarrow (1+r)^{n-12}\left[A_0(1+r)^{12}-A_0+C\right]-B(1+r)^n\geqslant C$

$\Rightarrow (1+r)^{n-12}\left[A_0(1+r)^{12}-A_0+C-B(1+r)^{12}\right]\geqslant C$

$\Rightarrow n\geqslant \log_{1+r}\left[A_0(1+r)^{12}-A_0+C-B(1+r)^{12}\right]+12.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình

$$9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right)\cdot 3^x+1=0.$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. Vô số. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&9\cdot 3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right)\cdot 3^x+1=0\\ \Leftrightarrow&3^{x+1}+\frac{1}{3^{x+1}}-\frac{m}{3}(4\sqrt{|x+1|}+3m+3)=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Đặt $t=x+1$, phương trình (1) trở thành

$$3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{m}{3}(4\sqrt{|t|}+3m+3)=0.\tag{2}$$

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng ba nghiệm thực phân biệt.
Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng ba nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t=0$.

Với $t=0$, thay vào phương trình (2) ta có $-m^2-m+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2. \end{cases}$

Thử lại

☑ Với $m=-2$ phương trình (2) thành $3^t+\dfrac{1}{3^t}+\dfrac{2}{3}(4\sqrt{|t|}-3)=0$.
Ta có $3^t+\dfrac{1}{3^t}\geq 2, \forall t\in\mathbb{R}$ và $\dfrac{2}{3}(4\sqrt{|t|}-3)\geq -2, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $3^t+\dfrac{1}{3^t}+\dfrac{2}{3}(4\sqrt{|t|}-3)\geq 0, \forall t\in\mathbb{R}$.
Dấu "=" xảy ra khi $t=0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t=0$ nên loại nghiệm $m=-2$.

☑ Với $m=1$ phương trình (2) thành $3^t+\dfrac{1}{3^t}-\dfrac{1}{3}(4\sqrt{|t|}+6)=0$ (3)

Dễ thấy phương trình (3) có ba nghiệm $t=-1$, $t=0$, $t=1$.
Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có ba nghiệm $t=-1$, $t=0$, $t=1$.
Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0;+\infty)$.
Trên tập $[0;+\infty)$, (3) $\Leftrightarrow 3^t+\dfrac{1}{3^t}-\dfrac{1}{3}(4\sqrt{t}+6)=0$.
Xét hàm $f(t)=3^t+\dfrac{1}{3^t}-\dfrac{1}{3}(4\sqrt{t}+6)$ trên $[0;+\infty)$.
Ta có $f'(t)=3^t\ln 3-3^{-t}\cdot\ln 3-\dfrac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t)=3^t\ln^2 3+3^{-t}\cdot\ln^2 3+\dfrac{1}{3\cdot(\sqrt{t})^3}>0, \forall t>0$. Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow f'(t)=0$ có tối đa một nghiệm $t>0\Rightarrow f(t)=0$ có tối đa hai nghiệm $t\in[0;+\infty)$. Suy ra trên $[0;+\infty)$, phương trình (3) có hai nghiệm $t=0$, $t=1$.
Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng ba nghiệm $t=-1$, $t=0$, $t=1$. Vậy chọn $m=1$.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm này, sau khi loại được $m=-2$, ta có thể kết luận đáp án C do đề không có phương án nào là không tồn tại m.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)\geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;5\}$. **B.** $S=\{-7;-5;-1;1;5;7\}$.
C. $S=\{-5;-1;1;5\}$. **D.** $S=\{-1;1\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\geq 1=\log_{x^2+y^2+2}\left(x^2+y^2+2\right)\\
\Leftrightarrow&4x+4y-6+m^2\geq x^2+y^2+2 \text{ (do } x^2+y^2+2>1)\\
\Leftrightarrow&x^2+y^2-4x-4y-m^2+8\leq 0\\
\Leftrightarrow&(x-2)^2+(y-2)^2\leq m^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

(1) là hình tròn (C_1) có tâm $I(2;2)$, bán kính $(R_1=|m|$ với $m\neq 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m=0$.
Ta có $x^2+y^2+2x-4y+1=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=4$ (2) là đường tròn (C_2) có tâm $J(-1;2)$ bán kính $R_2=2$.
Khi $m=0$ ta có $I(2;2)\notin(C_2)$ nên yêu cầu bài toán không thỏa mãn.

Khi $m \neq 0$ ta nhận thấy để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn 2 điều kiện (1) và (2) thì chỉ xảy ra 2 trường hợp sau:
Trường hợp 1: (C_1);(C_2) tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2} = m + 2 \Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1(tm).$$

Trường hợp 2: (C_1); (C_2) tiếp xúc trong và $R_1 < R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1I_2 = |R_1 - R_2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m-2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -1 \end{array}\right. \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \ (tm).$$

Vậy $S = \{-1;1\}$.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Ba anh em An, Bình, Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất $0,7\%$/ tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Giả sử mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Hỏi tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 6426800. **B**. 45672000. **C**. 46712000. **D**. 63271000.

Lời giải.

Gọi A, B, C lần lượt là số tiền mà An, Bình, Cường vay ngân hàng. Ta có

$$A + B + C = 10^9 \ (1).$$

Gọi X là số tiền mà mỗi người trả cho ngân hàng vào mỗi tháng với $r = \dfrac{0,7}{100}$.
Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, áp dụng công thức vay vốn trả góp ta có

$$A(1+r)^{10} - X\frac{(1+r)^{10}-1}{r} = 0 \Rightarrow A = X\frac{(1+r)^{10}-1}{r(1+r)^{10}} \ (2).$$

Bình cần 15 tháng nên

$$B(1+r)^{15} - X\frac{(1+r)^{15}-1}{r} = 0 \Rightarrow B = X\frac{(1+r)^{15}-1}{r(1+r)^{15}} \ (3).$$

Cường cần 25 tháng nên

$$C(1+r)^{25} - X\frac{(1+r)^{25}-1}{r} = 0 \Rightarrow C = X\frac{(1+r)^{25}-1}{r(1+r)^{25}} \ (4).$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là $3X = 64268000$.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $2018^x + x^2 = \sqrt{2016\sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$ là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 2018^x + x^2$. Suy ra $f''(x) = 2018^x.\ln^2 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ và $f(0) = 1 - \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}} < 0$

nên phương trình đã cho có đúng hai nghiệm

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Với tham số k thuộc tập S nào dưới đây thì phương trình $\log_2(x+3) + \log_2 x^2 = k$ có nghiệm duy nhất.

A. $S = (-\infty; 0)$. **B**. $S = [2; +\infty)$. **C**. $S = (4; +\infty)$. **D**. $S = (0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_2(x+3) + \log_2 x^2 = k \Leftrightarrow \log_2(x^3 + 3x^2) = k \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 2^k$

Đặt $f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình có nghiệm duy nhất khi $2^k > 4 \Leftrightarrow k > 2$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tìm m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. $m = 3$. **B**. $m = 2$. **C**. $m > 3$. **D**. $2 < m < 3$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^{x^2}$ $(t \geq 1)$, ta có phương trình $t^2 - 4.t + 6 - m = 0$. (1)

Nhận thấy rằng khi $t = 1$ thì $x = 0$, còn khi $t > 1$ thì $x = \pm\sqrt{\log_2 t}$ nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm x thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t_1 = 1$ và một nghiệm $t_2 > 1$.

Thay $t = 1$ vào phương trình (1) ta có $1 - 4 + 6 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Thử lại ta được $m = 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hai số thực $a > 1$, $b > 1$. Biết phương trình $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

A. $3\sqrt[3]{4}$. **B**. 4. **C**. $3\sqrt[3]{2}$. **D**. $\sqrt[3]{4}$.

Lời giải.

Ta có $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x + (x^2-1)\log_a b = 0 \Leftrightarrow (\log_a b)\cdot x^2 + x - \log_a b = 0$.
Do phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo định lý Viet ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{\log_a b} = -\log_b a \text{ và } x_1 x_2 = -1.$$

Khi đó $S = \dfrac{1}{\log_b^2 a} + 4\log_b a$, đặt $t = \log_b a$. Do $b > 1, a > 1$ nên $t > 0$. Vậy

$$S = \frac{1}{t^2} + 4t = \frac{1}{t^2} + 2t + 2t \geq 3\sqrt[3]{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{t^2} = 2t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\min\limits_{t>0} S = 3\sqrt[3]{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2-x)(2+4^x) = 6$. Khi đó số phần tử của tập S là bao nhiêu?

A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y = (2-x)(2+4^x) - 6$.
$y' = -(2+4^x) + (2-x)\cdot 4^x \ln 4$.
$y'' = -2\ln 4 \cdot 4^x + (2-x)\ln^2 4 \cdot 4^x$.
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \dfrac{1}{\ln 2}$.
$y'' = 0$ có một nghiệm nên $y' = 0$ có không quá hai nghiệm, do đó $y = 0$ có không quá ba nghiệm.
Mặt khác $x = 0$, $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.
Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 0$, $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $(4^x - 16)^3 + (16^x - 4)^3 = (16^x + 4^x - 20)^3$.

A. 3. **B**. $\dfrac{7}{2}$. **C**. 4. **D**. $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x > 0$, phương trình trở thành

$$(t-16)^3 + \left(t^2-4\right)^3 = \left(t^2+t-20\right)^3 \Leftrightarrow (t-16)^3 + \left(t^2-4\right)^3 = \left(t-16+t^2-4\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(t-16\right)\left(t^2-4\right)\left(t-16+t^2-4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 16 \\ t = 4 \end{array}\right.$$

Vậy ta có các nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}, x = 2, x = 1$. Suy ra tổng các nghiệm là $\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Ba anh em **Tháng**, **Mười**, **Hai** cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Giả sử mỗi tháng cả ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như

nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì **Tháng** cần 10 tháng, **Mười** cần 15 tháng và **Hai** cần 25 tháng. Hỏi tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 46712413 đồng. **B**. 63271317 đồng. **C**. 64268158 đồng. **D**. 45672181 đồng.

Câu 27. Biết x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2-3x+2}+2)+5^{x^2-3x+1}=2$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=13$. **B**. $a+b=14$. **C**. $a+b=11$. **D**. $a+b=16$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-3x+2\geq 0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+2},\ t\geq 0$.

Phương trình ban đầu trở thành $\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2=0$.

Xét $f(t)=\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2,\ t\geq 0$.

Ta thấy $f'(t)=\dfrac{1}{(t+2)\ln 3}+2t\cdot 5^{t^2-1}\ln 5>0\ \forall\ t\geq 0\Rightarrow f(t)=0$ có tối đa một nghiệm.

Ta thấy $f(1)=0$ đúng. Khi đó ta được $x^2-3x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Khi đó, ta có $x_1+2x_2=\dfrac{1}{2}(9+\sqrt{5})\Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=5\end{cases}\Rightarrow a+b=14$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2-4y^2=5 \\ \log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $3x+2y\leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất của m.

A. -5. **B**. $\log_3 5$. **C**. 5. **D**. $\log_5 3$.

Lời giải.

Điều kiện của hệ phương trình $3x+2y>0$ và $3x-2y>0$. Khi đó phương trình đầu tương đương với

$$(3x+2y)(3x-2y)=5\Leftrightarrow \log_3(3x+2y)+\log_3(3x-2y)=\log_3 5.$$

Cộng với phương trình thứ hai theo vế ta được

$$\log_m(3x+2y)+\log_3(3x+2y)=1+\log_3 5.$$

Nếu $m>1$ thì

$$1+\log_3 5=\log_m(3x+2y)+\log_3(3x+2y)\leq \log_m 5+\log_3 5.$$

Suy ra $m\leq 5$. Khi $m=5$ thì hệ có nghiệm $(1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp $0<m<1$ lập luận tương tự ta cũng có $m\leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là 5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $25^x-2\cdot 10^x+m^2\cdot 4^x=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m \in (-1;0) \cup (0;1)$. **B**. $m \leq 1$.

C. $m < -1$ hoặc $m > 1$. **D**. $m \geq -1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x\right]^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x + m^2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ và $f(t) = t^2 - 2t + m^2$. Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$, điều này tương đương

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(0) > 0 \\ 0 < -\dfrac{-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1;0) \cup (0;1).$$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Với giá trị nào của m phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$ có nghiệm?

A. $m \leq 1$. **B**. $m > 1$. **C**. $m < 1$. **D**. $m \geq 1$.

Lời giải.

$4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$. (*)

Đặt $t = 2^{x+1} > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2t + m = 0$. (1)

Nhận thấy $t_1 + t_2 = 2$. Nếu phương trình (1) có nghiệm thì sẽ có ít nhất 1 nghiệm dương.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm

hay $1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ (1). Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{2};4\right]$?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 6.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 2$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + (m-1) = 0$.

Đặt $t = \log_2(x-2)$. Với mọi $x \in \left[\frac{5}{2};4\right]$ suy ra $x - 2 \in \left[\frac{1}{2};2\right]$, do đó $t \in [-1;1]$.

Ta có phương trình $(m-1)t^2 + (m-5)t + (m-1) = 0 \Leftrightarrow m(t^2+t+1) = t^2 + 5t + 1$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ (2) (vì $t^2 + t + 1 > 0 \forall t$).

Phương trình (1) có nghiệm thực x trong đoạn $\left[\frac{5}{2};4\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm thực t trong đoạn $[-1;1]$.

Đặt $g(t) = \dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$; $t \in [-1;1]$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

BBT

t	-1		1
$g'(t)$	0	$+$	0
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (2) có nghiệm thực t trong đoạn $[-1;1]\Leftrightarrow -3\le m\le \dfrac{7}{3}$.

Vì m nguyên dương nên $m=1;2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5(5(a+b))+5(a+b)\\ \Leftrightarrow\ &f(4a+2b+5)=f(5a+5b)\end{aligned}$$

với hàm đặc trưng $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó

$$4a+2b+5=5a+5b\Leftrightarrow a=5-3b.$$

Do đó $T=10b^2-30b+25=10\left(b-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}\ge\dfrac{5}{2}$. Hàm số này đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $4\mathrm{e}^{2u_9}+2\mathrm{e}^{u_9}-4\mathrm{e}^{u_1+u_9}=\mathrm{e}^{u_1}-\mathrm{e}^{2u_1}+3$ và $u_{n+1}=u_n+3,\forall n\ge 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>3$ là

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1}=u_n+3,\forall n\ge 1$ là cấp số cộng với công sai $d=3$.

$$\begin{aligned}&4\mathrm{e}^{2u_9}+2e^{u_9}-4\mathrm{e}^{u_1+u_9}=\mathrm{e}^{u_1}-\mathrm{e}^{2u_1}+3\\ \Leftrightarrow\ &(2\mathrm{e}^{u_9})^2-4\mathrm{e}^{u_1+u_9}+(\mathrm{e}^{u_1})^2+2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1}-3=0\\ \Leftrightarrow\ &(2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1})^2+(2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1})-3=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1}=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\\ &2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Với $2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1}=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{u_1+8d}-\mathrm{e}^{u_1}=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_1}\left(2\mathrm{e}^{24}-1\right)=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ vô nghiệm.

Với $2\mathrm{e}^{u_9}-\mathrm{e}^{u_1}=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_1}\left(2\mathrm{e}^{24}-1\right)=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow u_1=\ln\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\left(2\mathrm{e}^{24}-1\right)}$.

Mặt khác $u_n>3\Leftrightarrow u_1+(n-1)3>3\Leftrightarrow n>2-\dfrac{1}{3}u_1\Leftrightarrow n>2-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\left(2\mathrm{e}^{24}-1\right)}\approx 10{,}14$.

Vậy $n=11$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó, giá trị của S là

A. $S=-2$. **B.** $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)\cap(0;+\infty)$. Phương trình tương đương với

$$\log_2\left(\sqrt{x+2}\right)+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2. \qquad (1)$$

☑ Với $x\in\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ ta thấy $f(x)=\log_2\left(\sqrt{x+2}\right)+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2$ là hàm số đồng biến và $g(x)=\log_2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$ là hàm số nghịch biến. Do đó (1) có nhiều nhất một nghiệm $x\in\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. Mà $f(-1)=g(-1)$ nên $x=-1$ là nghiệm duy nhất của (1) trong $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

☑ Với $x\in(0;+\infty)$ xét hàm số $h(t)=\log_2(t+1)+t^2$ với $t>0$ là một hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó

$$(1)\Leftrightarrow h(\sqrt{x+2}-1)=h\left(1+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-1=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}[3(x+y)]+3(x+y)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$ thì $f(t)$ luôn đồng biến.

Phương trình (1) có dạng $f(3x+3y)=f(x^2+y^2+xy+2)$

$\Leftrightarrow 3x+3y=x^2+y^2+xy+2$

$\Leftrightarrow 3(x+y)=(x+y)^2-xy+2$

$\Leftrightarrow xy=(x+y)^2-3(x+y)+2$.

Ta lại có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x+y)^2-2(x+y)^2+6(x+y)-4=5-(x+y-3)^2\le 5$.

Từ $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}\Leftrightarrow (P-3)x+(P-2)y=1-6P$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (1-6P)^2=\left[(P-3)x+(P-2)y\right]^2\le (x^2+y^2)\left[(P-3)^2+(P-2)^2\right]\\&\le 5(2P^2-10P+13).\\&\Rightarrow 26P^2+38P-64\le 0\Leftrightarrow 0<P\le 1\\&\Rightarrow \max P=1 \text{ khi } x=2;y=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 36 (Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018). [Vinh Vo, dự án (12EX6)][2D2G5-5] n là số tự nhiên thoả mãn phương trình $3^x-3^{-x}=2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x-9^{-x}=4+2\cos 2nx$.

A. 4036. **B**. 4035. **C**. 2019. **D**. 2018.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx &(*)\\&\Leftrightarrow 4\cos^2 nx=\left(3^x-3^{-x}\right)^2\\&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2\cos nx=3^x-3^{-x}\\&2\cos nx=-\left(3^x-3^{-x}\right).\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Ta thấy $\begin{cases}f(x)=2\cos nx \text{ là một hàm số chẵn và có đồ thị } (C_1) \text{ không đi qua gốc toạ độ } O.\\ g(x)=3^x-3^{-x} \text{ là một hàm số lẻ và đồ thị } (C_2) \text{ đi qua gốc toạ độ } O.\\ h(x)=-\left(3^x-3^{-x}\right) \text{ có đồ thị } (C_3) \text{ đối xứng với đồ thị } (C_2) \text{ hàm số } g(x) \text{ qua trục } Ox.\end{cases}$

Theo giả thiết, $2\cos nx=3^x-3^{-x}$ có 2018 nghiệm, tức đồ thị (C_1) và (C_2) có 2018 điểm chung.

Do tính đối xứng của đồ thị, ta thấy đồ thị (C_1) và (C_3) cũng có 2018 điểm chung.

Do vậy, ta suy ra $2\cos nx=-\left(3^x-3^{-x}\right)$ có 2018 nghiệm.

Vậy phương trình $(*)$ có 4036 nghiệm.

Cách khác:

Ta có

$$\begin{aligned}&9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx &(*)\\&\Leftrightarrow 4\cos^2 nx=\left(3^x-3^{-x}\right)^2\\&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2\cos nx=3^x-3^{-x} &(1)\\&2\cos nx=-\left(3^x-3^{-x}\right). &(2)\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của (1).

Đặt $x=-t$, từ (2) ta được

$$\begin{aligned}&2\cos n(-t)=-\left[3^{-t}-3^{-(-t)}\right]\\&\Leftrightarrow 2\cos nt=-\left(3^{-t}-3^t\right)\\&\Leftrightarrow 2\cos nt=\left(3^t-3^{-t}\right). &(3)\end{aligned}$$

Từ (1), ta thấy (3) có 2018 nghiệm $t \neq 0$.
Do vậy, phương trình (2) có 2018 nghiệm x khác với 2018 nghiệm x của phương trình (1).
Vậy phương trình $(*)$ có 4036 nghiệm.
Chọn đáp án A □

Câu 37 (Đề GHK2, Sở GDĐT, Vũng Tàu 2017-2018). [Nhật Thiện - 12EX6][2D2G5-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\mathrm{e}^{2x+y+1} - \mathrm{e}^{3x+2y} = x+y-1$, đồng thời $\log_2^2(2x+y-1) - (m+4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{e}^{2x+y+1} - \mathrm{e}^{3x+2y} = x+y-1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+y+1} + 2x + y + 1 = \mathrm{e}^{3x+2y} + 3x + 2y$. Xét $f(t) = \mathrm{e}^t + t$.
Ta có $f'(t) = \mathrm{e}^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Do đó

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{2x+y+1} + 2x + y + 1 = \mathrm{e}^{3x+2y} + 3x + 2y \\ &\Leftrightarrow f(2x+y+1) = f(3x+2y) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 2y \\ &\Leftrightarrow -x = y - 1. \end{aligned}$$

Thay $-x = y-1$ vào phương trình $\log_2^2(2x+y-1) - (m+4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$ ta được phương trình $\log_2^2 x - (m+4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0 \quad (1)$.
Yêu cầu bài toán thì phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &(m+4)^2 - 4(m^2+4) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &-3m^2 + 8m \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq m \leq \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 38 (Đề GHK2, Sở GDĐT, Vũng Tàu 2017-2018). [Nhật Thiện - 12EX6][2D2G5-3] Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình $9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$.

C. $\dfrac{1}{2} < m < 1$. **D.** $m > \dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \dfrac{3-\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} &9 \cdot 9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0. \\ \Leftrightarrow\ &9 \cdot 9^{x^2-2x} - 15(2m+1)15^{x^2-2x} + 25(4m-2)25^2x^2 - 2x = 0. \\ \Leftrightarrow\ &9 - 15(2m+1)\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-2x} + 25(4m-2)\left(\frac{5}{3}\right)^2 x^2 - 2x = 0. \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Đặt $t = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{x^2-2x}$, ta được phương trình $9 - 15(2m+1)t + 25(4m-2)t^2 = 0 \quad (2)$.
Xét $f(x) = x^2 - 2x$ ta có

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó để phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) có nghiệm t duy nhất thỏa $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x^2-2x} > \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow t > \dfrac{3}{5}$.

Từ phương trình (2) ta có $m = \dfrac{3}{10t} + \dfrac{1}{2}$, xét $f(t) = \dfrac{3}{10t} + \dfrac{1}{2}$, $f'(t) = -\dfrac{3}{10t^2} < 0, \forall t > \dfrac{3}{5}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = \dfrac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên như sau

t	$\dfrac{3}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có nghiệm t duy nhất thỏa $t > \dfrac{3}{5}$ khi $\dfrac{1}{2} < m < 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x \cdot 2^x = x\,(x - m + 1) + m\,(2^x - 1)$ có hai phần tử. Tìm số phần tử của A.

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x \cdot 2^x = x\,(x - m + 1) + m\,(2^x - 1) &\Leftrightarrow (x - m) \cdot 2^x = x^2 - (m-1)x - m \\ &\Leftrightarrow (x - m) \cdot 2^x = (x - m)(x + 1) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ 2^x = x + 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra tập nghiệm của phương trình đã cho có đúng hai phần tử khi và chỉ khi $m = 0$ hoặc $m = 1$, do đó tập A có đúng 2 phần tử.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$. Biết phương trình có một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x=\dfrac{1}{2}\left(a^{\log_b c}+a^{-\log_b c}\right)$ (với a, c là các số nguyên tố và $a>c$). Giá trị của $a^2-2b+3c$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2+1}\geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right| \\
\Leftrightarrow&\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\log_3\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right| \\
\Leftrightarrow&-\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \\
\Leftrightarrow&-\log_2 6\cdot\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \\
\Leftrightarrow&\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0\vee\log_2 6\cdot\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=1.
\end{aligned}$$

☑ $\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow x=1$.

☑ $\log_2 6\cdot\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=3^{\log_6\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\log\left(\frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}\right)+(x+1)^3=x^2+6x+7.$$

A. $-2+\sqrt{3}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-2-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^3-x^2-6x-7=(x^3+3x^2-3x-5)-(x^2+1)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$\log\left(x^3+3x^2-3x-5\right)+x^3+3x^2-3x-5=\log\left(x^2+1\right)+x^2+1\,(*).$$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t$ trên $(0;+\infty)\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f\left(x^3+3x^2-3x-5\right)=f\left(x^2+1\right)\Rightarrow x^3+3x^2-3x-5=x^2+1\Leftrightarrow x^3+2x^2-3x-6=0$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là -2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Biết phương trình $\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $a+b$.

A. 5. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có: $\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)$.

Điều kiện $x>1$.

Xét $f(x)=\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}$ trên $(1;+\infty)$.

Vì $f'(x)=\dfrac{\dfrac{-\sqrt{x}-1}{x^2}}{\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}\ln 5}<0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ trên $(1;+\infty)$.

Vì $g'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}{\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln 3}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ nên $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Do đó, phương trình đã cho có tối đa một nghiệm.

Mặt khác, từ hệ $\begin{cases}\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}=0\\ 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=0\end{cases}$ ta giải được nghiệm $x=3+2\sqrt{2}$.

Vậy $x=3+2\sqrt{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Do đó, $a=3$, $b=2$ và $a+b=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x-\dfrac{1}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m>-1, m\neq 0$. **B.** $m>-1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $-1<m<0$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>-1\\ \log_3(x+1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x\neq 0\end{cases}$.

Xét hàm số $y=x-\dfrac{1}{\log_3(x+1)}$.

Khi đó, $y'=1+\dfrac{(\log_3(x+1))'}{\log_3^2(x+1)}=1+\dfrac{1}{(x+1)\cdot\ln 3\cdot\log_3^2(x+1)}$.

Do đó, $y'>0$ khi x thuộc các khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	‖	$+$	
y	‖ -1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra, phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $m>-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Tìm số thực a để phương trình $9^x+9=a\cdot 3^x\cos(\pi x)$, chỉ có duy nhất một nghiệm thực.

A. $a=-6$. **B.** $a=6$. **C.** $a=-3$. **D.** $a=3$.

Lời giải.

Giả sử $x_\circ$ là nghiệm của phương trình, tức là $x_\circ$ thỏa mãn $9^{x_\circ}+9=a\cdot 3^{x_\circ}\cos(\pi x_\circ)$.

Khi đó $2-x_\circ$ cũng là nghiệm của phương trình.

Thật vậy,

ta có $9^{2-x_\circ}+9=a\cdot 3^{2-x_\circ}\cos\left[\pi(2-x_\circ)\right] \Leftrightarrow \dfrac{81}{9^{x_\circ}}+9=a\cdot\dfrac{9}{3^{x_\circ}}\cos(\pi x_\circ) \Leftrightarrow 9^{x_\circ}+9=a\cdot 3^{x_\circ}\cos(\pi x_\circ)$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_\circ=2-x_\circ \Leftrightarrow x_\circ=1$.

Với $x_\circ=1 \Rightarrow a=-6$.

Ngược lại, với $a=-6$, phương trình $9^x+9=-6\cdot 3^x\cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x+\dfrac{9}{3^x}=-6\cos(\pi x)$ $(*)$

Mà $3^x+\dfrac{9}{3^x}\geqslant 6;\ -6\cos(\pi x)\leqslant 6,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}3^x+\dfrac{9}{3^x}=6\\ \cos\pi x=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $9^{x_\circ}+9=a\cdot 3^{x_\circ}\cos(\pi x_\circ)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a=-6$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0$ vô nghiệm.

A. $m\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\sqrt{2};2\right)$.

C. $m\in\left(-\sqrt{2};2\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $|\cos x|>0\Leftrightarrow\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0\\ \Leftrightarrow\ &\log^2|\cos x|-2m\log|\cos x|-m^2+4=0.\quad(*)\end{aligned}$$

Đặt $t=\log_2|\cos x|,\ (t<0)$.

Phương trình (*) trở thành $t^2-2mt-m^2+4=0\quad(**)$

Phương trình (**) có $\Delta'=2m^2-4$.

☑ Khi $\Delta'<0\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, phương trình (**) vô nghiệm. Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

☑ Khi $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi (**) có nghiệm t_1, t_2 thỏa $0<t_1\leq t_2\Leftrightarrow\begin{cases}2m>0\\ -m^2+4>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2$.

Vậy Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left(-\sqrt{2};2\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;8]$.

A. $2\leq m\leq 3$. **B.** $2\leq m\leq 6$. **C.** $6\leq m\leq 9$. **D.** $3\leq m\leq 6$.

Lời giải.

Ta có $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m\Leftrightarrow\log_2^2 x-2\log_2 x+3=m$.

TXĐ: $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. Đặt $t=\log_2 x\ (t\in\mathbb{R})$, ta được phương trình $t^2-2t+3=m$.

Ta có $x\in[1;8]\Leftrightarrow t\in[0;3]$.

Phương trình ẩn x có nghiệm thuộc $[1;8]\Leftrightarrow$ Phương trình ẩn t có nghiệm thuộc $[0;3]\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=t^2-2t+3$ cắt đường thẳng $y=m$ trên $[0;3]$.

Bảng biến thiên hàm số $y=t^2-2t+3$ trên đoạn $[0;3]$:

x	0		1		3
y	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có $2 \le m \le 6$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2-2x+3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $m \in \left\{\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right\}$. **C.** $m \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$. **D.** $m \in \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2-2x+3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m|+2)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3} \cdot \log_2(x^2-2x+3) = 2^{2|x-m|+2} \cdot \log_2(2|x-m|+2) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t$, $t \ge 2$.

Có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2 t + \dfrac{2^t}{t \ln 2} > 0, \quad \forall t \ge 2$.

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[2; +\infty)$. Mà $x^2-2x+3 \ge 2; 2|x-m|+2 \ge 2$.

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow f(x^2-2x+3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-m|+2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1 = 2x-2m \\ x^2-2x+1 = 2m-2x \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2 = -2m+3 \quad (1) \\ x^2 = 2m-1 \quad (2). \end{array}\right.$$

Phương trình ban đầu có 3 nghiệm khi

• TH1: (1) có một nghiệm, (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (1).

Suy ra $-2m+3 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

• TH2: (2) có một nghiệm, (1) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (2).

Suy ra $2m-1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

• TH3: (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt và có đúng một nghiệm chung.

Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Ta có

$$\begin{cases} (x_0-2)^2 = -2m+3 \\ x_0^2 = 2m-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = m \\ x_0^2 = 2m-1 \end{cases} \Rightarrow m^2 = 2m-1 \Rightarrow m = 1 \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy $m \in \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Phương trình $\dfrac{x^2}{2} + x - \ln(x^2-2) = 2018$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x^2-2)$ với điều kiện $|x|>\sqrt{2}$.

Ta có $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}=\dfrac{x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$.

Xét hàm số $g(x)=x^3+x^2-4x-2$. Ta có $g(-3)\cdot g(-2)<0$, $g(-1)\cdot g(0)<0$, $g\left(\dfrac{3}{2}\right)\cdot g(2)<0$ nên phương trình $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1<-\sqrt{2}<x_2<\sqrt{2}<x_3$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		x_1		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác $f(-3)<0, f(-2)<4, f\left(\dfrac{3}{2}\right)<5, f(2)<4$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2018$ tại 4 điểm phân biệt hay phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+9\cdot 3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right)\cdot 7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$.

A. $P=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $P=9$.

C. $P=1+9\sqrt{2}$. **D.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 4+9\cdot 3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right)\cdot 7^{2y-x^2+2} \\ \Leftrightarrow\ & 7^{x^2-2y}\left(4+9\cdot 3^{x^2-2y}\right)=49\left(4+9^{x^2-2y}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 4\cdot 7^{x^2-2y}+9\cdot 21^{x^2-y}-49\cdot 9^{x^2-2y}-196=0. \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $t=x^2-2y$, ta được $(*)\Leftrightarrow 4\cdot 7^t+9\cdot 21^t-49\cdot 9^t-196=0\Leftrightarrow \dfrac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\dfrac{4+3^{2t}}{7^{2t}}$.

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{4+3^a}{7^a}=4\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^a+\left(\dfrac{3}{7}\right)^a$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow t+2=2t\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$.

Khi đó $P=\dfrac{x+x^2-2+18}{x}=x+\dfrac{6}{x}+1\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{16}{x}}+1=9$. Vậy $P_{\min}=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho các số thực x,y với $x\geq 0$ thỏa mãn $5^{x+3y}+5^{xy+1}+x(y+1)+1=5^{-xy-1}+\dfrac{1}{5^{x+3y}}-3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;2)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải.

Ta có

$$5^{x+3y}+5^{xy+1}+x(y+1)+1=5^{-xy-1}+\frac{1}{5^{x+3y}}-3y$$
$$\Leftrightarrow 5^{xy+1}-5^{-xy-1}+xy+1=5^{-x-3y}-5^{-x-3y}+(-x-3y)\,(*).$$

Xét hàm số $f(t)=5^t-5^{-t}+t$. Ta có $f'(t)=5^t\ln 5+5^{-t}\ln 5+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*)\Leftrightarrow f(xy+1)=f(-x-3y)\Leftrightarrow xy+1=-x-3y\Rightarrow y=\frac{-x-1}{x+3}, x\geq 0.$$

Khi đó $T=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}$. Bảng biến thiên của hàm số T trên $[0;+\infty)$ là

x	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	$\frac{1}{3}$ ↗	$+\infty$

Từ đó suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $x=0$ và $y=-\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-1)-\log_3(ax-8)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B**. 3. **C**. 5. **D**. 8.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\sqrt{3}}(x-1)-\log_3(ax-8)=0\Leftrightarrow 2\log_3(x-1)-\log_3(ax-8)=0$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x-1)=\frac{1}{2}\log_3(ax-8)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=\sqrt{ax-8}\\ x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ x^2-(a+2)x+9=0.\,(*)\end{cases}$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều lớn hơn 1, điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-36>0\\ (x_1-1)+(x_2-1)>0\\ (x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a<-8 \text{ hoặc } a>4\\ x_1+x_2-2>0\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a<-8 \text{ hoặc } a>4\\ a>0\\ 9-(a+2)+1>0\end{cases}\Leftrightarrow 4<a<8.$$

Như vậy có 3 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $5; 6; 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho phương trình $\left(\sqrt{5}+1\right)^x+2m\left(\sqrt{5}-1\right)^x=2^x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất.

A. $m\leqslant 0; m=\dfrac{1}{8}$. **B.** $m<0; m=\dfrac{1}{8}$. **C.** $0<m\leqslant\dfrac{1}{8}$. **D.** $m<0$.

Lời giải.

$\left(\sqrt{5}+1\right)^x+2m\left(\sqrt{5}-1\right)^x=2^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x+2m\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=1.$

Đặt $t=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x,(t>0).$

Ta được: $t^2-t+2m=0\Leftrightarrow-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t}{2}=m.$

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t}{2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có: $f'(t)=-t+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}.$

Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\dfrac{1}{8}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\leqslant 0, m=\dfrac{1}{8}$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Biết x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+5^{x^2-3x+1}=2$ và tổng x_1+2x_2 được viết dưới dạng $\dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=11$. **B.** $a+b=14$. **C.** $a+b=13$. **D.** $a+b=16$.

Lời giải.

Phương trình luôn xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+2}, t\geq 0$. Suy ra $t^2-1=x^2-3x+1$.

Phương trình đã cho trở thành: $\log_3(t+2)+5^{t^2-1}=2$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2$ với $t\geq 0$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+2)\ln 3}+2t\cdot 5^{t^2-1}\ln 5>0,\forall t\geq 0.$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến, lại có $f(1)=0$ nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Từ đó ta có $\sqrt{x^2-3x+2}=1\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$

- ☑ TH$_1$: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_1+2x_2=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$ (loại).
- ☑ TH$_2$: $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_1+2x_2=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$ (nhận).

Vậy $a=9, b=5\Rightarrow a+b=14$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $3^{xy-5}+2^{x-2y}+x(y+1)=\dfrac{32}{2^{xy}}+\dfrac{1}{3^{x-2y}}+2y+5$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$của biểu thức $P=3x+2y$.

A. $P_{\min}=\sqrt{2}+4$. **B.** $P_{\min}=6\sqrt{2}+4$. **C.** $P_{\min}=2\sqrt{6}+3$. **D.** $P_{\min}=4\sqrt{2}-4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 3^{xy-5}+2^{x-2y}+x(y+1)=\frac{32}{2^{xy}}+\frac{1}{3^{x-2y}}+2y+5 \\ \Leftrightarrow\ & 3^{xy-5}-\frac{1}{2^{xy-5}}+xy-5=3^{2y-x}-\frac{1}{2^{2y-x}}+2y-x \quad (*) \end{aligned}$$

Hàm số $g(t)=3^t-\dfrac{1}{2^t}+t$ có $g'(t)=3^t\cdot\ln 3-\dfrac{1}{2^t}\cdot\ln\dfrac{1}{2}+1>0,\ \forall t$ suy ra $g(t)$ luôn đồng biến.

Từ $(*)$ ta có $g(xy-5)=g(2y-x)\Leftrightarrow xy-5=2y-x\Leftrightarrow x=\dfrac{2y+5}{y+1}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} P &= \frac{6y+15}{y+1}+2y=\frac{2y^2+8y+15}{y+1}=\frac{2(y+1)^2+4(y+1)+9}{y+1} \\ &= 2(y+1)+4+\frac{9}{y+1}\geq 4+6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=4+6\sqrt{2}$ khi $2(y+1)=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1, x=2+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x-\cos x=1+\log_2(\sin x)$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}0<\sin x<1\\0<\cos x<1\end{cases}\Rightarrow 0<\sin 2x<1$.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & \sin 2x-\cos x=1+\log_2(\sin x) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(\cos x)-\cos x=\log_2 2+\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)-\sin 2x \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(\cos x)-\cos x=\log_2(\sin 2x)-\sin 2x. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Xét $f(t)=\log_2 t-t,\ t\in(0;1)$. Ta thấy $f'(t)=\dfrac{1}{t\cdot\ln 2}-1>0, \forall t\in(0;1)$.

Do vậy, từ (1) ta được $\cos x=\sin 2x\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho phương trình $\sqrt{m\left(2^x-2\right)+1}=1-2^x$. Biết tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thực là $S=(a;b]$. Tính giá trị biểu thức

$$P=\log_{a+b+1}\left(2^b+7^a+5\right).$$

A. $P=1$. **B.** $P=3$. **C.** $P=5$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

Xét phương trình $\sqrt{m\left(2^x-2\right)+1}=1-2^x \quad (1)$
Đặt $t=2^x>0$. Phương trình (1) trở thành $\sqrt{m\left(t-2\right)+1}=1-t \quad (2)$.
Để phương trình (1) có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t>0$
hay $\begin{cases}0<t\le 1\\ m\left(t-2\right)+1=\left(1-t\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 1\\ m=\dfrac{t^2-2t}{t-2}=t\end{cases}$ có nghiệm.
Ta được $m\in(0;1]$. Suy ra $a=0,\ b=1$.
Vậy $P=\log_{a+b+1}\left(2^b+7^a+5\right)=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Cho phương trình

$$2^m\cdot 2^{\sin^2 x}+3\cdot\frac{1}{9^{\cos x+2}}+m-\cos^2 x=8\cdot 4^{\cos x}+2\left(\cos x+1\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^m\cdot 3^{\cos^2 x-1} \quad (1)$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình (1) có nghiệm thực?

A. 5. **B**. 9. **C**. 3. **D**. 7.

Lời giải.

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2^{m+1-\cos^2 x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1-\cos^2 x}+m+1-\cos^2 x=2^{3+2\cos x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{3+2\cos x}+3+2\cos x$$

Xét hàm số $f(t)=2^t-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+t$ có $f'(t)=2^t\cdot\ln 2+3^{-t}\cdot\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.
Do vậy,

$$\begin{aligned}&f\left(m+1-\cos^2 x\right)=f\left(3+2\cos x\right)\\ \Rightarrow\ &m+1-\cos^2 x=3+2\cos x\\ \Rightarrow\ &m=\cos^2 x+2\cos x+2. \quad (2)\end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm thực khi và chỉ khi (2) có nghiệm thực hay phương trình $m=u^2+2u+2$ có nghiệm thực, với $u=\cos x,-1\le u\le 1$.
Xét $f(u)=u^2+2u+2$ trên $[-1;1]$ có bảng biến thiên như sau

u	-1		1
$f'(u)$		$+$	
$f(u)$	1	↗	5

Suy ra $1\le m\le 5$.
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.
Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $6^x + (3+m)2^x + m = 0$ có nghiệm thuộc $[0;1]$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 6^x + (3+m)2^x + m = 0 &\Leftrightarrow -m(2^x+1) = 6^x + 3\cdot 2^x \\ &\Leftrightarrow -m = \frac{6^x + 3\cdot 2^x}{2^x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{3^x+3}{1+2^{-x}} = -m. \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = \dfrac{3^x+3}{1+2^{-x}} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{3^x \ln 3 \cdot (1+2^{-x}) + 2^{-x}\ln 2 \cdot (3^x+3)}{(1+2^{-x})^2} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$.

Ta có $g(0) = 2;\ g(1) = 4$ suy ra $2 \le g(x) \le 4,\ \forall x \in [0;1]$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[0;1]$ khi $2 \le -m \le 4 \Leftrightarrow -4 \le m \le -2$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-4;-3;-2\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Số nghiệm thực của phương trình $(x^3-4x+3)\mathrm{e}^{4-x^2} + (4-x^2)\mathrm{e}^{x^3-4x+3} = x^3 - (x+2)^2 + 11$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} &(x^3-4x+3)\mathrm{e}^{4-x^2} + (4-x^2)\mathrm{e}^{x^3-4x+3} = x^3 - (x+2)^2 + 11 \\ \Leftrightarrow\ &(x^3-4x+3)\mathrm{e}^{4-x^2} + (4-x^2)\mathrm{e}^{x^3-4x+3} = (x^3-4x+3) + (4-x^2) \\ \Leftrightarrow\ &(x^3-4x+3)(\mathrm{e}^{4-x^2}-1) + (4-x^2)(\mathrm{e}^{x^3-4x+3}-1) = 0 \end{aligned}$$

Đặt $x^3-4x+3 = a$, $4-x^2 = b$. Ta có $a\cdot \mathrm{e}^b + b\cdot \mathrm{e}^a = a+b \Leftrightarrow a(\mathrm{e}^b-1) + b(\mathrm{e}^a-1) = 0\ (1)$.

- ☑ Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ thì (1) luôn đúng Khi đó từ các phương trình $x^3-4x+3=0$ hoặc $4-x^2=0$ ta có được 5 nghiệm thực phân biệt.
- ☑ Nếu $a>0$, $b>0$ thì (1) không thỏa mãn.
- ☑ Nếu $a<0$, $b<0$ thì (1) không thỏa mãn.
- ☑ Nếu a, b trái dấu, giả sử $a<0<b$ thì $a(\mathrm{e}^b-1)<0$ và $b(\mathrm{e}^a-1)<0$. Khi đó (1) không thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho m, n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình: $\log_m x^4 \log_n x^4 - 14\log_m x - 12\log_n x - 4036 = 0$. Khi P là một số nguyên, tìm tổng $m+n$ để P nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $m+n=20$. **B.** $m+n=48$. **C.** $m+n=24$. **D.** $m+n=12$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có phương trình tương đương với $16\log_n m \log_m^2 x - (14 + 12\log_n m)\log_m x - 4036 = 0 \quad (*)$.

Vì m, n là các số nguyên dương khác 1 nên $\log_n m > 0 \Rightarrow 16\log_n m(-4036) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu.

Theo Viet, ta có $\log_m x_1 + \log_m x_2 = \dfrac{7 + 6\log_n m}{8\log_n m}$ hay $\log_m(x_1x_2) = \dfrac{7 + 6\log_n m}{8\log_n m}$.

Suy ra: $P = x_1x_2 = m^{\frac{7}{8}\log_m n + \frac{3}{4}} = n^{\frac{7}{8}} \cdot m^{\frac{3}{4}}$.

Vì P nguyên, P nhỏ nhất nên xét $n = 2^a$ và $m = 2^b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $P = 2^{\frac{7a+6b}{8}}$.

Để P nguyên thì $(7a + 6b) \vdots 8 \Rightarrow a \vdots 2$. Vì P nhỏ nhất nên ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3$.

Vậy đáp án là $m + n = 8 + 4 = 12$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Tính tổng S của tất cả các nghiệm của phương trình

$$\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5.3^x - 30x - 10 = 0.$$

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = 3$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $6x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \quad (*)$.

Khi đó ta có

$\ln\left(\dfrac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5.3^x - 30x - 10 = 0 \Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2) \quad (1)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \ln t + 5t$ với $t > 0$ ta có $y' = \dfrac{1}{t} + 5 > 0 \forall t > 0$ nên hàm số luôn đồng biến khi $t > 0$, do đó

$(1) \Leftrightarrow f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \quad (2)$.

- ☑ Với $x \in [0; 1]$. Áp dụng bất đẳng thức Becnoulli ta có $5^x + 3^x \le 5x - x + 3x - x + 2 = 6x + 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1, x = 0$
- ☑ Với $x \le 0$ hoặc $x \ge 1$. Áp dụng bất đẳng thức Becnoulli ta có $5^x + 3^x \ge 5x - x + 3x - x + 2 = 6x + 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1, x = 0$

Vậy phương trình (2) có nghiệm $x = 0, x = 1$, từ đó suy ra tổng các nghiệm là $S = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $9^x + 3^{1+x} - m = 0$ có nghiệm.

A. $m > -\dfrac{81}{4}$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \ge -\dfrac{81}{4}$. **D.** $m \ge 0$.

Lời giải.

$9^x + 3^{1+x} - m = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3 \cdot 3^x - m = 0.$ (1)

Đặt $t = 3^x; (t > 0)$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t^2 + 3t - m = 0.$ (2)

Ta có $\Delta = 9 + 4m$.

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t > 0$. Ta xét các trường hợp sau:

- ☑ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{4}$. Phương trình (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = -\dfrac{1}{2} < 0$.

  Suy ra $m = -\dfrac{9}{4}$ không thỏa bài toán.
- ☑ $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{9}{4}$. Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2.

  Do $t_1 + t_2 = -3 < 0$ nên (2) không thể có hai nghiệm dương. Ta xét trường hợp t_1, t_2 trái dấu,

nghĩa là $t_1 \cdot t_2 < 0 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Kết hợp điều kiện $m > -\dfrac{9}{4}$ ta được $m > 0$ thỏa bài toán.

Kết luận $m > 0$ là giá trị cần tìm của m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

A. 2587. **B.** 2590. **C.** 2593. **D.** 2584.

Lời giải.

Điều kiện : $\begin{cases} u_5 > 0 \\ u_9 + 8 > 0 \end{cases}$.

$u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2 \Rightarrow u_n$ là một cấp số cộng với công sai $d = 6$.

Ta có : $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$

$\Leftrightarrow u_5 \cdot (u_9 + 8) = 2^{11} \Leftrightarrow (u_1 + 4d) \cdot (u_1 + 8d + 8) = 2^{11} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 8 \\ u_1 = -88 \end{array}\right.$.

☑ $u_1 = 8 \Rightarrow S_n = \dfrac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)\,d\right] = \dfrac{n}{2} \cdot (10 + 6n)$.

Mà $S_n \geqslant 20172018 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \leqslant -2593{,}9 \\ n \geqslant 2592{,}2 \end{array}\right.$.

Vì n là số tự nhiên bé nhất $\Rightarrow n = 2593$.

☑ $u_1 = -88 \Rightarrow u_5 = u_1 + 4d = -64 < 0$ (loại).

Vậy $n = 2593$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m + x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m \geq 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m < \mathrm{e}$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải.

Đặt $\ln(m + x) = t \Leftrightarrow m + x = \mathrm{e}^t$ (1).

Phương trình tương đương với $\ln(m + t) = x \Leftrightarrow m + t = \mathrm{e}^x$ (2).

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được $x - t = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + x = \mathrm{e}^t + t$ $(*)$.

Đặt $f(x) = \mathrm{e}^x + x \Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0\ \forall x$. Phương trình $(*)$ tương đương với $f(t) = f(x)$ mà $f(x)$ luôn đồng biến nên $x = t$.

Thay vào phương trình (1) ta được $m + x = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow e^x - x = m$.

Xét $h(x) = \mathrm{e}^x - x \Rightarrow h'(x) = \mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Phương trình có nhiều nghiệm nhất khi $m > 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt.

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(5;6)$.

Lời giải.

Đặt $t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x > 0$ thì $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = \dfrac{1}{t}$, phương trình đã cho trở thành: $4t + \dfrac{1}{t} = m \quad (1)$.

Khi $x < 0$ thì $\left(\sqrt{2}+1\right)^x < 1$, và ứng với mỗi $t \in (0;1)$ ta có một nghiệm $x < 0$. Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm âm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $t \in (0;1)$.

Xét hàm số $f(t) = 4t + \dfrac{1}{t}$ với $t \in (0;1)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{4t^2-1}{t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm $t \in (0;1)$ điều kiện là $m \in (4;5)$. Vậy, điều kiện cần tìm là $m \in (4;5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\dfrac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \dfrac{148}{75}$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 16.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8) = t \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra

$$3^t - 2 \cdot 2^t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 2.$$

Do đó $u_n = 8n - 4 \Rightarrow S_n = 8(1 + 2 + \cdots + n) - 4n = \dfrac{8(1+n)n}{2} - 4n = 4n^2$. Khi đó

$$\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \frac{(8n-4) \cdot 16n^2}{(16n-4) \cdot 4n^2} < \frac{148}{75} \Rightarrow n < 19.$$

Mà n là số nguyên dương lớn nhất nên $n = 18$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho phương trình $\mathrm{e}^{3m} + \mathrm{e}^{m} = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\ln 2\right)$. **B.** $m \in \left[\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$. **C.** $m \in \left(0; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\ln 2\right]$.

Lời giải.

Đặt $x + \sqrt{1-x^2} = t$, $t \in \left[-1; \sqrt{2}\right]$. Suy ra $x\sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-1}{2}$. Ta được

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{3m} + \mathrm{e}^{m} = 2t\left(1 + \frac{t^2-1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{3m} + \mathrm{e}^{m} = t^3 + t \\ \Leftrightarrow\ & f\left(\mathrm{e}^{m}\right) = f(t). \qquad (*) \end{aligned}$$

Với $f(u) = u^3 + u$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{m} = t \Rightarrow \mathrm{e}^{m} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow m \le \ln\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ có nghiệm là $(x; y)$, tính $T = x + 2y$.

A. $T = \frac{8}{5}$. **B.** $T = \frac{9}{5}$. **C.** $T = \frac{7}{5}$. **D.** $T = \frac{6}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2^{x^2+1} + 3\sqrt{x} = 2^{16y^2+1} + 6\sqrt{y}. \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t^4+1} + 3t, t \in [0; +\infty)$ ta thấy $f'(t) = 4t^3 \cdot 2^{t^4+1}\ln 2 + 3 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Khi đó, phương trình (1) tương đương với

$$f(\sqrt{x}) = f(2\sqrt{y}) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y. \tag{2}$$

Thế (2) vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2^{25y^2} + \frac{3}{2}\sqrt{5y} = \frac{7}{2}. \tag{3}$$

Lại có hàm số $g(y) = 2^{25y^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{5y}$ ta có $g'(t) = 50y \cdot 2^{25y^2}\ln 2 + \dfrac{15}{4\sqrt{5y}} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên đồng biến trên $[0; +\infty)$, suy ra phương trình (3) có nghiệm duy nhất $y = \dfrac{1}{5}$. Từ đó $x = \dfrac{4}{5}$ và $T = x + 2y = \dfrac{6}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho phương trình $\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{12}}\right)^{\frac{x}{2017}} + \dfrac{\sqrt[4]{12}\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{12}} \cdot \left(\dfrac{1}{1+\tan\frac{\pi}{12}}\right)^{\frac{x}{2017}} = 2017 \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{\frac{x}{4034}}$.

Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

A. 2017. **B**. 1. **C**. 0. **D**. -1.

Lời giải.

Đặt $a=\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{12}}\right)^{\frac{x}{4034}}$, $b=\left(\dfrac{1}{1+\tan\frac{\pi}{12}}\right)^{\frac{x}{4034}}$. Phương trình trở thành

$$a^2+\frac{\sqrt[4]{12}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\cdot b^2=2017ab$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2-2017\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{\sqrt[4]{12}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=0.$$

Đặt $u=\dfrac{a}{b}$, phương trình trở thành $u^2-2017u+\dfrac{\sqrt[4]{12}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=0.$ (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm u_1,u_2. Do đó phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Ta có

$$u_1u_2=\frac{\sqrt[4]{12}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{\tan\frac{\pi}{12}\cdot\left(1+\tan\frac{\pi}{12}\right)}{1-\tan\frac{\pi}{12}}\right]^{\frac{x_1+x_2}{4034}}=\frac{\sqrt[4]{12}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{4034}=\log_{\frac{\tan\frac{\pi}{12}\cdot\left(1+\tan\frac{\pi}{12}\right)}{1-\tan\frac{\pi}{12}}}\left[\frac{\sqrt[4]{12}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$
$$\Leftrightarrow x_1+x_2=2017.$$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Phương trình $e^x+2018+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{3-x}=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 5. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=e^x+2018+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{3-x}$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$.

Ta có: $y'=e^x+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-3)^2}>0,\forall x\in\mathscr{D}$.

Lại có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^+}y=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to2^-}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^+}y=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to3^-}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^+}y=-\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	0	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn cắt trục hoành tại 3 điểm.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+6)3^{1+\sqrt{1-x^2}} - m + 9 = 0$

A. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{243}{13}\right]$. **B.** $m \in [-16; 0]$. **C.** $m \in [0; +\infty)$. **D.** $m \in \left[0; \frac{18}{5}\right]$.

Lời giải.

Đặt: $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$, $5 \le t \le 25$.

Khi đó $t^2 - (m-6)t - m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2 - 6t + 9}{t+1}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\min\limits_{5\le t\le 25} \dfrac{t^2-6t+9}{t+1} \le m \le \max\limits_{5\le t\le 25} \dfrac{t^2-6t+9}{t+1} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le m \le \dfrac{242}{13}$

Chọn đáp án A □

Câu 72. Tìm m để phương trình $2^{|x|} = \sqrt{m^2 - x^2}$ có hai nghiệm phân biệt

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **C.** $-3 < m < -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình $2^{|x|} = \sqrt{m^2 - x^2} \Leftrightarrow 2^{2|x|} = m^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4^{|x|} = m^2$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4^{|x|} = \begin{cases} x^2 + 4^x & \text{nếu } x \ge 0 \\ x^2 + 4^{-x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 4^x \cdot \ln 4 & \text{nếu } x > 0 \\ 2x - 4^{-x} \cdot \ln 4 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Từ BBT ta thấy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $-1 \le m \le 3$. **B.** $0 \le m \le 3$. **C.** $0 \le m \le 2$. **D.** $-1 \le m \le 2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x > 0$.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$.

Với điều kiện nghiệm của phương trình thì $1 \le x \le 3^{\sqrt{3}}$, suy ra $0 \le \log_3^2 x \le 3$, do đó $1 \le \log_3^2 x + 1 \le 4$. Suy ra điều kiện của t là $1 \le t \le 2$.

Khi đó $t^2 = \log_3^2 x + 1$ nên $\log_3^2 x = t^2 - 1$. Do đó phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t - 2}{2}$$

Xét hàm số $y = \dfrac{t^2 + t - 2}{2}$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $y' = \dfrac{2t+1}{2}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	1		2
y'		$+$	
y	0	↗	2

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi $0 \le m \le 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tìm m để phương trình $\log_2 \sqrt{x^2-3x+2} + \log_{\frac{1}{2}}(x-m) = x - m - \sqrt{x^2-3x+2}$ có nghiệm?

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $m \in (1;2)$.

C. $m \in (-\infty;1) \cup \left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $m \in \left(1;\dfrac{3}{2}\right) \cup (2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2. \end{array}\right. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{x^2-3x+2} + \log_{\frac{1}{2}}(x-m) = x - m - \sqrt{x^2-3x+2} \\ \Leftrightarrow\ & \log_2 \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2} = \log_2(x-m) + x - m \quad (*) \end{aligned}$$

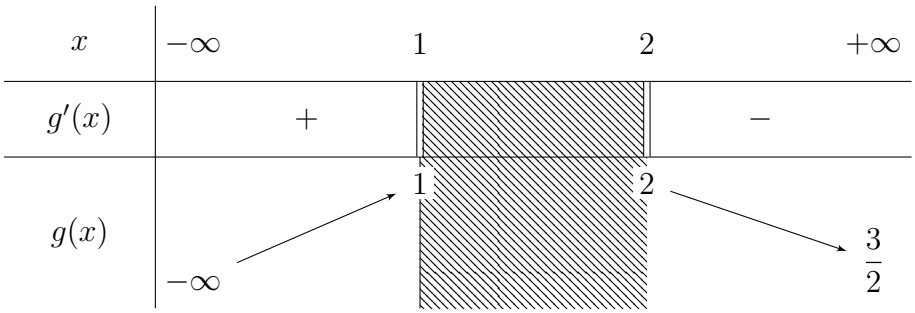
Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có

$f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến. Do đó

$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2-3x+2}\right) = f(x-m) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} = x - m \Leftrightarrow m = x - \sqrt{x^2-3x+2}$

Đặt $g(x) = x - \sqrt{x^2-3x+2}$. Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-3x+2} - 2x + 3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x+2} - 2x + 3 = 0$ (Vô nghiệm).



Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi $m \in (-\infty;1) \cup \left(\frac{3}{2};2\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ (với m là tham số). Gọi $S=[a;b]$ là tập các giá trị của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{5}{2};4\right]$. Tính $a+b$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1034}{273}$.

Lời giải.

$(m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + m - 1 = 0$ (1).

Đặt $t = \log_2(x-2) \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2};4\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$.

$(1) \Rightarrow (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftarrow m(t^2+t+1) = t^2 + 5t + 1$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1} = 1 + \dfrac{4t}{t^2+t+1}$ vì $t^2+t+1 > 0$.

Xét hàm số $y = 1 + \dfrac{4t}{t^2+t+1}$ trên $[-1;1] \Rightarrow y' = \dfrac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -4t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \in [-1;1]$.

Bảng biến thiên

t	-1		1
$y'(t)$		$+$	
$y(t)$	-3	↗	$\frac{7}{3}$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m \in \left[-3;\frac{7}{3}\right] \Rightarrow a+b = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Tìm tổng các nghiệm của phương trình sau $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2-2x-3) = 2\log_2(x^2-2x-4)$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 03.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-2x-3 > 0 \\ x^2-2x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x-4 > 0$.

Ta có: $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2-2x-3) = 2\log_2(x^2-2x-4) \Leftrightarrow 2\log_5(x^2-2x-3) = \log_2(x^2-2x-4)$ $(*)$

Đặt $t = \log_5(x^2-2x-3)$ với $t > 0$. Suy ra $x^2-2x-3 = 5^t$.

$(*) \Rightarrow 2t = \log_2(5^t-1) \Leftrightarrow 5^t - 4^t - 1 = 0$.

Xét hàm số $y(t) = 5^t - 4^t - 1$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $y' = 5^t \ln 5 - 4^t \ln 4$.

Xét hàm số $g(t) = 5^t \ln 5 - 4^t \ln 4$ trên $[0; +\infty)$.

$\Rightarrow g'(t) = 5^t \ln^2 5 - 4^t \ln^2 4$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 5^t \ln^2 5 - 4^t \ln^2 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{4}\right)^t = \log_5^2 4 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{5}{4}} \left(\log_5^2 4\right) \notin [0; +\infty)$ (loại).

Bảng biến thiên:

t	0		1
$y'(t)$		$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow f'(t) = g(t) > 0, \forall t \in [0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Với $t = 1 \Rightarrow \log_5(x^2 - 2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$.

Theo định lí Vi-ét suy ra tổng hai nghiệm của phương trình là $x_1 + x_2 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó. A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sao bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

A. $10 \log_5 20$ (giờ). **B.** $5 \ln 10$ (giờ). **C.** $10 \log_5 10$ (giờ). **D.** $5 \ln 20$ (giờ).

Lời giải.

Ta có $5.10^3 = 10^3 e^{10r} \Leftrightarrow 10r = \ln 5 \Rightarrow$ tỉ lệ tăng trưởng $r = \dfrac{\ln 5}{10}$.

ycbt $\Leftrightarrow 10^4 = 10^3 e^{\frac{\ln 5}{10} x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 5}{10} x = \ln 10 \Leftrightarrow x = 10 \log_5 10$ (giờ).

Chọn đáp án C □

Câu 78. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} + (x+1)^3 = x^2 + 6x + 7$.

A. $-2 - \sqrt{3}$. **B.** $-2 + \sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

Điều kiện: $x^3 + 3x^2 - 3x - 5 > 0$.

$$\begin{aligned} & \log \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} + (x+1)^3 = x^2 + 6x + 7 \\ \Leftrightarrow\ & \log(x^3 + 3x^2 - 3x - 5) + (x+1)^3 = \log(x^2 + 1) + x^2 + 6x + 7 \\ \Leftrightarrow\ & \log(x^3 + 3x^2 - 3x - 5) + (x^3 + 3x^2 - 3x - 5) = \log(x^2 + 1) + x^2 + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = t + \log t$, với $t > 0$.

$f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t \ln 10} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^3+3x^2-3x-5=x^2+1\\ &\Leftrightarrow x^3+2x^2-3x-6=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x^2-3)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2 \quad (\text{nhận})\\ x=\pm\sqrt{3} \quad (\text{nhận}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm là -2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Số nghiệm thực của phương trình $2018^x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2018}=2018$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2018. **D.** 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=2018^x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2018}-2018$.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(1;2018)\cup(2018;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=2018^x\cdot\ln 2018+\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(x-2018)^2}>0 \quad \forall x\in\mathscr{D}$.

☑ Với $x\in(-\infty;1)$, ta có $f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ (1).

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2018\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \exists(\alpha_1;\beta_1)\subset(-\infty;1)$ sao cho $f(\alpha_1)\cdot f(\beta_1)<0$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(-\infty;1)$

☑ Với $x\in(1;2018)$, ta có ta có $f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(1;2018)$ (3).

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2018^-}f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \exists(\alpha_2;\beta_2)\subset(1;2018)$ sao cho $f(\alpha_2)\cdot f(\beta_2)<0$ (4).

Từ (3) và (4), suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(1;2018)$.

☑ Với $x\in(2018;+\infty)$, ta có ta có $f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(2018;+\infty)$ (5).

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2018^+}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \exists(\alpha_3;\beta_3)\subset(2018;+\infty)$ sao cho $f(\alpha_3)\cdot f(\beta_3)<0$ (6).

Từ (5) và (6), suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(2018;+\infty)$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>0$.

Phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5\Leftrightarrow\log_2\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{2x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{2x}}=\sqrt{2}$, phương trình tương đương với

$$\log_2 t+2^t=5.(1)$$

Kiểm tra $t=2$ là nghiệm của phương trình.

Đặt $f(t)=\log_2 t+2^t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2^t\ln 2>0 \forall t\geq\sqrt{2} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến.

Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=2$.

Ta có $x+\dfrac{1}{2x}=2\Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và tích hai nghiệm $x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích của ba số ở ba lần tung (mỗi số là số chấm trên mặt xuất hiện ở mỗi lần tung). Tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

A. $\dfrac{41}{108}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $\dfrac{83}{216}$. **D.** $\dfrac{5}{18}$.

Lời giải.

Gọi số chấm xuất hiện ở ba lần tung theo thứ tự là a, b, c. Ta có $a,b,c\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=6^3=216$.

Gọi A là biến cố "P không chia hết cho 6".

TH1: a,b,c đều khác 6 và khác 3 $\Rightarrow a,b,c\in\{1;2;4;5\}\Rightarrow$ có 4^3 cách chọn.

TH2: a,b,c có ít nhất một số bằng 3 và hai số còn lại thuộc tập $\{1;5\}\Rightarrow$ có 3^3 cách chọn.

Nhưng a,b,c có thể bằng nhau nên trong hai trường hợp trên, các trường hợp $a,b,c\in\{1;5\}$ trùng nhau và có 2^3 kết qủa.

Vậy số phần tử của biến cố A là $n(A)=4^3+3^3-2^3=83$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{83}{216}$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Phương trình $2018^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong đoạn $[4\pi;2018\pi]$?

A. 0. **B.** 2023. **C.** 2015. **D.** 2014.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow -1\leq t\leq 1$. Ta có phương trình

$$2018^t=t+\sqrt{1+t^2}\Leftrightarrow 2018^t=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}-t}\ (\text{vì }\sqrt{t^2+1}>t)\Leftrightarrow 2018^t(\sqrt{t^2+1}-t)=1. \quad (1)$$

Xét $f(t)=2018^t(\sqrt{t^2+1}-t)-1$, có

$f'(t)=2018^t\ln 2018(\sqrt{t^2+1}-t)++2018^t\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-1\right)=2018^t(\sqrt{t^2+1}-t)\left(\ln 2018-\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)$.

Ta có $\begin{cases}\sqrt{t^2+1}-t>0\\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\leq 1\end{cases}\Rightarrow f'(t)>0$. Do vậy phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm.

Ta thấy $t=0$ thỏa mãn phương trình (1). Do đó, (1) có nghiệm duy nhất $t=0$.

Với $t=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\Rightarrow$ trong đoạn $[4\pi;2018\pi]$ nên có $\dfrac{2018-4}{1}+1=2015$ nghiệm thực.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)(2^{2+x}-2^{2-x})+16-8m$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)(2^{2+x}-2^{2-x})+16-8m \Leftrightarrow 2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}=(m+1)\cdot\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)+4-2m. \quad (*)$$

Đặt $t=2^x$. Vì $0\le x\le 1$ nên $1\le t\le 2$.
Xét $f(t)=t-\dfrac{1}{t}$, ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}>0$ với mọi $t\in[1;2]$. Do đó $0\le f(t)\le\dfrac{1}{2}$.
Đặt $a=t-\dfrac{1}{t}\Rightarrow 0\le a\le\dfrac{1}{2}$.
Phương trình $(*)$ có dạng $a^2+2=(m+1)a+4-2m\Leftrightarrow\dfrac{a^2-a-2}{a-2}=m$.
Xét $f(a)=\dfrac{a^2-a-2}{a-2}=a+1$, ta có $f'(a)=1>0$. Ta có bảng biến thiên

a	0		$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$+$	
$f(a)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm trong đoạn $[0;1]$ thì $1\le m\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Giá trị nào của m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $3\le m\le 8$. **B.** $4\le m\le 8$. **C.** $0\le m\le 2$. **D.** $1\le m\le 16$.

Lời giải.

- ☑ Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$ với $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$. Khi đó
- ☑ $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0\Leftrightarrow t^2-1+t-2m-1=0\Leftrightarrow t^2+t-2=2m$.
- ☑ Xét hàm số $f(t)=t^2+t-2, t\in[1;2]\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.
- ☑ Vậy YCBT $\Leftrightarrow f(1)\le 2m\le f(2)\Leftrightarrow 0\le 2m\le 4\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Cho dãy (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1=0\\ \log_{\sqrt[3]{2}} u_{n+1}=3+\log_2(5u_n+45)^3, n\in\mathbb{N}\end{cases}$. Tính u_{100}.

A. $u_{100}=10^{100}-10$. **B.** $u_{100}=10^{99}-10$. **C.** $u_{100}=10^{100}+10$. **D.** $u_{100}=10^{99}+10$.

Lời giải.

Theo giải thiết có
$\log_{\sqrt[3]{2}} u_{n+1}=3+\log_2(5u_n+45)^3\Leftrightarrow u_{n+1}=10u_n+90\Leftrightarrow u_{n+1}+10=10(u_n+10)$. (1)

Đặt $v_n = u_n + 10$ từ (1) ta có $v_{n+1} = v_n + 10, \quad n \in \mathbb{N}$ do đó v_n là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = u_1 + 10 = 10 \\ q = 10. \end{cases}$

Ta có $v_{100} = u_{100} + 10 = 10 \cdot 10^{99} = 10^{100} \Rightarrow u_{100} = 10^{100} - 10.$

Chọn đáp án A □

Câu 86. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị cảu m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 15. **B**. 14. **C**. 13. **D**. 16.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ x = 2 \vee x = 5. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2m - 5 \neq 1 \\ 5m - 5 \leq 0 \vee 5m - 5 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < 5m - 5 \neq 1 \\ 2m - 5 \leq 0 \vee 2m - 5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2} < m \neq 3 \\ m \leq 1 \vee m = \dfrac{6}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < m \neq \dfrac{6}{5} \\ m \leq \dfrac{5}{2} \vee m = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 < 10m \neq 12 \\ 10m \leq 25 \vee 10m = 30. \end{cases}$$

Do $10m \in \mathbb{Z}$ nên có 15 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right)$ và $u_n = 3u_{n-1}, \forall n \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của n để $u_n < 7^{100}$.

A. 191. **B**. 192. **C**. 176. **D**. 177.

Lời giải.

Do $u_n = 3u_{n-1}$, suy ra dãy số là cấp số nhân với công bội $q = 3$, suy ra $u_n = u_1 \cdot 3^{n-1}$.

Đặt $t = \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1} \geq 0$, ta có phương trình

$$t^2 - 1 = 2(1 + t) \Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Từ đó ta có $\log u_5 - 2\log u_2 = 8 \Leftrightarrow \dfrac{u_5}{u_2^2} = 10^8 \Leftrightarrow \dfrac{u_1 \cdot 3^4}{u_1^2 \cdot 3^2} = 10^8 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{9}{10^8}.$

Suy ra $u_n = \dfrac{9}{10^8} \cdot 3^{n-1} < 7^{100} \Leftrightarrow 3^{n-1} < \dfrac{10^8}{9} \cdot 7^{100} \Leftrightarrow n < 192,9.$

Vậy giá trị lớn nhất của n là 192.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Cho phương trình $\left(\sqrt{10} + 1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10} - 1\right)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$. Tìm số giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 14. **B**. 15. **C**. 13. **D**. 16.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6. \tag{1}$$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$ $(t\geq 1)$, suy ra $\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=\frac{1}{t}$, thay vào phương trình (1) ta có

$$t+\frac{m}{t}=6\Leftrightarrow t^2-6t+m=0. \tag{2}$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có đúng một nghiệm $t>1$, tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'=0\\ t=-\dfrac{b}{2a}>1\end{cases}\\ a\cdot f(1)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}9-m=0\\ 3>1\end{cases}\\ 1\cdot(m-5)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\ m<5.\end{array}\right.$$

Kết hợp với giả thiết, ta có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Gọi P là tập tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình $2^{(x-1)^2}\cdot\log_2(x^2-2x+3)=4^{|x-m|}\cdot\log_2(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của P.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $2^{(x-1)^2}\cdot\log_2(x^2-2x+3)=4^{|x-m|}\cdot\log_2(2|x-m|+2)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}\cdot\log_2(x^2-2x+3)=2^{2|x-m|+2}\cdot\log_2(2|x-m|+2)\quad(*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t\cdot\log_2 t$, $t\geq 2$.

Có $f'(t)=2^t\cdot\ln 2\cdot\log_2 t+\dfrac{2^t}{t\ln 2}>0,\quad\forall t\geq 2$.

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[2;+\infty)$. Mà $x^2-2x+3\geq 2; 2|x-m|+2\geq 2$.

Suy ra

$$(*)\Leftrightarrow f(x^2-2x+3)=f(2|x-m|+2)\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-m|+2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=2x-2m\\ x^2-2x+1=2m-2x\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)^2=-2m+3\quad(1)\\ x^2=2m-1\quad(2).\end{array}\right.$$

Phương trình ban đầu có 3 nghiệm khi

• TH1: (1) có một nghiệm, (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (1).

Suy ra $-2m+3=0\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

• TH2: (2) có một nghiệm, (1) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của (2).

Suy ra $2m-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

• TH3: (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt và có đúng một nghiệm chung.

Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Ta có

$$\begin{cases}(x_0-2)^2=-2m+3\\ x_0^2=2m-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=m\\ x_0^2=2m-1\end{cases}\Rightarrow m^2=2m-1\Rightarrow m=1\quad\text{(thỏa mãn).}$$

Vậy $m\in\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2018\pi)$?

A. 2018 nghiệm. **B**. 1008 nghiệm. **C**. 2017 nghiệm. **D**. 1009 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}$.

$2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)\Leftrightarrow\log_3(\cot x)^2=\log_2(\cos x)$

$\Leftrightarrow\log_3\cos^2 x-\log_3\sin^2 x=\log_2(\cos x)$

$\Leftrightarrow\log_3\cos^2 x-\log_3(1-\cos^2 x)=\log_2(\cos x)$.

Đặt $t=\log_2\cos x\Rightarrow\cos x=2^t$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow\log_3\dfrac{2^{2t}}{1-2^{2t}}=t\Leftrightarrow 4^t=3^t-12^t$ hay $\left(\dfrac{4}{3}\right)^t+4^t=1$.

Hàm số $f(t)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t+4^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(-1)=1$ nên $t=-1$ là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t=-1$.

$\log_2\cos x=-1\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

So với điều kiện $\sin x>0$ ta chỉ nhận $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Như vậy $x\in(0;2018\pi)\Leftrightarrow 0<\dfrac{\pi}{3}+k2\pi<2018\pi\Leftrightarrow-\dfrac{1}{6}<k<\dfrac{6053}{6}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy trong khoảng $(0;2018\pi)$ có 1009 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Cho phương trình

$$2^{-\left||m^3|-3m^2+1\right|}\cdot\log_{81}\left(\left||x^3|-3x^2+1\right|+2\right)+2^{-\left||x^3|-3x^2+1\right|-2}\cdot\log_3\left(\frac{1}{\left||m^3|-3m^2+1\right|+2}\right)=0.$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có số nghiệm thuộc đoạn $[6;8]$. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S.

A. 20. **B**. 28. **C**. 14. **D**. 10.

Lời giải.

Đặt $a=\left||m^3|-3m^2+1\right|$, $b=\left||x^3|-3x^2+1\right|$ với $a,b\geq 0$

$$\begin{aligned}PT\Leftrightarrow&2^{-a}\cdot\log_{3^4}(b+2)+2^{-b-2}\log_3\cdot\left(\frac{1}{a+2}\right)=0\\ \Leftrightarrow&2^{-a}\cdot\log_3(b+2)=2^{-b}\cdot\log_3(a+2)\\ \Leftrightarrow&2^a\log_3(a+2)=2^b\cdot\log_3(b+2)(1)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2^t\log_3(t+2)$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t)=2^t\ln 2\cdot\log_3(t+2)+\dfrac{1}{(t+2)\ln 3}2^t$

$\Rightarrow f'(t) > 0,\ \forall t \in (0+\infty)$

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $(0+\infty)$ (2)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow f(a) = f(b)\\ &\Leftrightarrow a = b(\text{ (do 2)}\\ &\Leftrightarrow \big||m^3| - 3m^2 + 1\big| = \big||x^3| - 3x^2 + 1\big|\end{aligned}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \big||x^3| - 3x^2 + 1\big|$, phương trình đã cho có số nghiệm thuộc $[6;8]$, tức là có $6,7,8$ nghiệm $\Leftrightarrow 0 < \big||m^3| - 3m^2 + 1\big| < 3 \Leftrightarrow m \in \{\pm 1;\pm 3\},\ \ (m \in \mathbb{Z})$

Vậy $S = \{\pm 1;\pm 3\}$

Do đó tổng bình phương của các phần tử thuộc S là 20.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Phương trình $7^x + 8^x = 6^x + 9^x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Định lý Lagrange: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$ thì tồn tại số $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Ta có

$$7^x + 8^x = 6^x + 9^x \Leftrightarrow 7^x - 6^x = 9^x - 8^x \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^x$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$. Theo định lý trên ta có

Tồn tại $t_1 \in (6;7)$ sao cho $f'(t_1) = \dfrac{f(7) - f(6)}{7-6} \Leftrightarrow x t_1^{x-1} = 7^x - 6^x$;

Tồn tại $t_2 \in (8;9)$ sao cho $f'(t_2) = \dfrac{f(9) - f(8)}{9-8} \Leftrightarrow x t_2^{x-1} = 9^x - 8^x$.

Từ (1) ta có $7^x - 6^x = 9^x - 8^x \Leftrightarrow x t_1^{x-1} = x t_2^{x-1} \Leftrightarrow x\left(t_1^{x-1} - t_2^{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\\ x = 1.\end{array}\right.$

Vậy phương trình chỉ có hai nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_3 \dfrac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3+\sqrt{3}$. **B**. 4. **C**. $3+2\sqrt{3}$. **D**. 6.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\log_3(2x+y+1) = \log_3(x+y) + (x+2y) \Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) + (2x+y+1) = \log_3[3(x+y)] + 3(x+y).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$, hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $2x+y+1 = 3(x+y) \Leftrightarrow x = 1-2y \Rightarrow y < \dfrac{1}{2}$.

Ta có $T = \dfrac{1}{1-2y} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ với $0 < y < \dfrac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{y} \Rightarrow T = \dfrac{1}{1-2t^2} + \dfrac{2}{t}$ với $0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$T' = \dfrac{2(-4t^4+2t^3+4t^2-1)}{t^2(1-2t^2)^2}$; $T' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
T'		$-$	0	$+$	
T		$\searrow$	6	$\nearrow$	

Vậy $T_{\min} = 6$ khi $t = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$ -1

Phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

A. 4. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Với $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$ thì $\sin x \in [0;1]$ trong đó

- ☑ Nếu $\sin x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\}$ thì tương ứng có 1 giá trị của $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.
- ☑ Nếu $\sin x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right)$ thì tương ứng có 2 giá trị của $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Đặt $2^{\sin x} = t$ thì $t \in [1;2]$ khi đó phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ trở thành $f(t) = 3$. $(*)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có bốn nghiệm $t_1 \in (-\infty;1)$ (loại), $t_2 \in (1;\sqrt{2})$ (thỏa mãn), $t_3 \in (\sqrt{2};2)$ (thỏa mãn), $t_4 \in (2;+\infty)$ (loại).

- ☑ Tương ứng với $t_2 \in (1;\sqrt{2})$ thì $\sin x \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ nên có 1 nghiệm x.
- ☑ Tương ứng với $t_3 \in (\sqrt{2};2)$ thì $\sin x \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$ nên có 2 nghiệm x.

Vậy phương trình $f\left(2^{\sin x}\right) = 3$ có 3 nghiệm trên $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Nghiệm của phương trình $25^x - 2(3-x)5^x + 2x - 7 = 0$ nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(5;10)$. **B**. $(0;2)$. **C**. $(1;3)$. **D**. $(0;1)$.

Lời giải.

Đặt $t=5^z$, $t>0$. Phương trình trở thành $t^2-2(3-x)t+2x-7=0$ (*). Xem đây là phương trình bậc 2 theo t và x là tham số. Ta có $\Delta'=(3-x)^2-2x+7=x^2-8x+16=(x-4)^2$, từ đây ta có $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \quad \text{(loại)} \\ t=7-2x \end{array}\right.$.

Với $t=7-2x$ ta có phương trình $5^x=7-2x$. Dễ thấy $y=5^x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ còn $y=7-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $5^x=7-2x$ có nhiều nhất một nghiệm. Mà $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Cho phương trình $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính $T=10a+20b$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** 0. **C.** $3\sqrt{10}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có:
$\mathrm{e}^{m\cos x-\sin x}-\mathrm{e}^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=\mathrm{e}^{2(1-\sin x)}+2-2\sin x \quad (1)$.
Xét hàm số $y=f(t)=\mathrm{e}^t+t$ có $y'=\mathrm{e}^t+1$ nên hàm số đồng biến trên R.
$(1)\Leftrightarrow f\left(m\cos x-\sin x\right)=f\left(2-2\sin x\right)\Leftrightarrow m\cos x-\sin x=2-2\sin x\Leftrightarrow m\cos x+\sin x=2$. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2+1^2\geq 2^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq\sqrt{3} \\ m\leq-\sqrt{3} \end{array}\right.$.
Suy ra $a=-\sqrt{3}$ và $b=\sqrt{3}$.
Vậy $T=10a+20b=10\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+\mathrm{e}^x}}=\mathrm{e}^x$ có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $m+\sqrt{m+\mathrm{e}^x}>0$ và $m+\mathrm{e}^x>0$.
Đặt $u=\mathrm{e}^x>0$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt{m+\sqrt{m+u}}=u$.
Đặt $v=\sqrt{m+u}>0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u=\sqrt{m+v} \\ v=\sqrt{m+u} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} u^2=m+v \\ v^2=m+u \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=v-u\Leftrightarrow (u-v)(u+v+1)=0\Leftrightarrow u=v \text{ (do u,v>0)}$$

Phương trình trở thành $\sqrt{m+u}=u\Leftrightarrow\sqrt{m+\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^x\Leftrightarrow m=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x=u^2-u\geq-\dfrac{1}{4}$.
Do m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Biết rằng điều kiện cần và đủ của m để phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} - 8m - 4 = 0$$

có nghiệm thuộc $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$ là $m \in [a; b]$. Tính $T = a + b$

A. $T = -\frac{10}{3}$. **B.** $T = \frac{10}{3}$. **C.** $T = 4$. **D.** $T = -4$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2(x-2)$ ta có $t \in [-1; 1]$ với mọi $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$. Khi đó ta có phương trình

$$t^2 + (m-5)t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t - 1}{t - 2} = -m.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t-2} = t - 3 - \frac{7}{t-2}$, $t \in [-1; 1]$. Ta có

$$f'(t) = 1 + \frac{7}{(t-2)^2} > 0 \ \forall t \in [-1; 1].$$

Suy ra vơi $\forall t \in [-1; 1]$ thì $-\frac{5}{3} = f(-1) \le f(t) \le f(1) = 5$, nên ta có $-5 \le m \le \frac{5}{3}$. Do đó $T = -\frac{10}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4 - \sqrt{7}\right)^x + \left(4 + \sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A. $m > \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m > \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m \ge \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m \ge -\frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình: $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4 - \sqrt{7}\right)^x + \left(4 + \sqrt{7}\right)^x > 0$

$\Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$ (1)

Đặt $t = \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)^x$, $(t > 0) \Rightarrow \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^x = \frac{1}{t}$ và $0 < t \le 1$ (do $x \le 0$).

Bất phương trình (1) trở thành: $t + \frac{3m+2}{t} + 3m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-t^2 - 2}{3t + 3}$. (2)

Ta có $g'(t) = \frac{-3t^2 - 6t + 6}{(3t+3)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 - 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	↘	

Như vậy (1) đúng với mọi $x \in (-\infty; 0] \Leftrightarrow m > g(t)$ đúng với mọi $t \in (0; 1] \Leftrightarrow m > \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2^{(x-1)^2}\cdot\log_2(x^2-2x+3)=4^{|x-m|}\cdot\log_2(2|x-m|+2)$$

có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. $S=\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{1}{2};1;-\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$2^{(x-1)^2}\cdot\log_2[(x-1)^2+2]=2^{2|x-m|}\cdot\log_2(2|x-m|+2). \qquad (1)$$

Xét hàm $f(t)=2^t\cdot\log_2(t+2)$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^t\cdot\ln 2\cdot\log_2(t+2)+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}>0\ \forall t\in[0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow(x-1)^2=2|x-m|\\&\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&(x-1)^2=-2(x-m)\\&(x-1)^2=2(x-m)\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x^2=2m-1\\&x^2-4x+2m+1=0\end{aligned}\right.\\&\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x^2=2m-1 \qquad (2)\\&(x-2)^2=3-2m \qquad (3)\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Có 3 trường hợp sau có thể xảy ra

☑ **Trường hợp 1:** (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có một nghiệm. Điều kiện cần là

$$\begin{cases}2m-1>0\\3-2m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\m=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}.$$

Khi đó (2) có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{2}$ và (3) có một nghiệm $x=2$. Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

☑ **Trường hợp 2:** (2) có một nghiệm và (3) có hai nghiệm phân biệt. Điều kiện cần là

$$\begin{cases}2m-1=0\\3-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\m<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Khi đó (2) có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và (2) có hai nghiệm $x=2\pm\sqrt{2}$. Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

☑ **Trường hợp 3:** (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm trùng. Điều kiện là

$$\begin{cases}2m-1>0\\3-2m>0\\\left[\begin{aligned}&\left(\sqrt{2m-1}-2\right)^2=3-2m\\&\left(-\sqrt{2m-1}-2\right)^2=3-2m\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{aligned}&(2m-1)+4-4\sqrt{2m-1}=3-2m\\&(2m-1)+4+4\sqrt{2m-1}=3-2m\end{aligned}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{2m-1} = m \\ \sqrt{2m-1} = -m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2} \\ 2m-1 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. D	5. D	6. D	7. C	8. B	9. D	10. A
11. D	12. C	13. B	14. A	15. D	16. A	17. C	18. D	19. A	20. B
21. C	22. A	23. A	24. B	25. B	26. C	27. B	28. C	29. A	30. A
31. B	32. A	33. D	34. D	35. B	36. A	37. A	38. C	39. D	40. B
41. B	42. A	43. B	44. A	45. C	46. B	47. D	48. C	49. B	50. A
51. B	52. A	53. B	54. B	55. D	56. B	57. A	58. C	59. D	60. D
61. A	62. B	63. C	64. B	65. C	66. A	67. D	68. D	69. A	70. D
71. A	72. A	73. C	74. C	75. B	76. C	77. C	78. D	79. D	80. D
81. C	82. C	83. A	84. C	85. A	86. A	87. B	88. B	89. D	90. D
91. A	92. C	93. D	94. D	95. B	96. A	97. B	98. A	99. A	100. A

5 Bài toán thực tế

Câu 1. Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất $0,6\%$ tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì số tiền người đó là bao nhiêu?

A. $55,664000$ triệu. **B**. $54,694000$ triệu. **C**. $55,022000$ triệu. **D**. $54,368000$ triệu.

Lời giải.

Gọi T là số tiền cả vốn lẫn lãi sau 15 tháng.

M là số tiền gửi ban đầu.

n là số kì hạn tính lãi.

r là suất định kỳ, tính theo %.

Hết kì hạn thì số tiền người đó là: $T = M(1+r)^n = 50000000.(1+0.6\%)^{15} = 54694003,63 \approx 54694000$ triệu.

Chọn đáp án B □

Câu 2 (2D2T5-6). Chị Minh vay ngân hàng 200 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả 6 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên?

A. 46 tháng. **B**. 37 tháng. **C**. 47 tháng. **D**. 36 tháng.

Lời giải.

Sau tháng thứ 1 chị Minh còn nợ ngân hàng $T_1 = 200(1+r) - 6$.

Sau tháng thứ 2 chị Minh còn nợ ngân hàng $T_2 = T_1(1+r) - 6 = 200(1+r)^2 - 6(1+r) - 6$.

Sau tháng thứ 3 chị Minh còn nợ ngân hàng $T_3 = T_2(1+r) - 6 = 200(1+r)^3 - 6(1+r)^2 - 6(1+r) - 6$.

. . . . . .

Sau tháng thứ n chị Minh còn nợ ngân hàng

$$T_n = T_{n-1}(1+r) - 6 = 200(1+r)^n - 6(1+r)^{n-1} - \cdots - 6(1+r)^2 - 6(1+r) - 6.$$

Nếu sau tháng thứ n chị Minh trả hết nợ thì $T_n = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 200(1+r)^n = 6(1+r)^{n-1} + \cdots + 6(1+r)^2 + 6(1+r) + 6\\
&\Leftrightarrow \quad 200(1+r)^n = 6\left[(1+r)^{n-1} + \cdots + (1+r)^2 + (1+r) + 1\right]\\
&\Leftrightarrow \quad 200(1+r)^n = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\\
&\Leftrightarrow \quad 100r(1+r)^n = 3(1+r)^n - 3 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{3}{3-100r}\\
&\Leftrightarrow \quad n = \log_{1+r}\left(\frac{3}{3-100r}\right) \approx 36{,}56.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất là $0,6\%$ một tháng theo thỏa thuận; sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng, tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A. 24. **B**. 23. **C**. 22. **D**. 25.

Lời giải.

Gọi số tiền nợ ban đầu là $\mathrm{A}_0 = 200$.

Tiền nợ tháng thứ nhất là $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0(1+r\%) - 9$.

Tiền nợ tháng thứ hai là $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1(1+r\%) - 9 = \mathrm{A}_0(1+r\%)^2 - 9(1+r\%) - 9$.

Tiền nợ tháng thứ ba là $\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_0\left(1+r^\circ/0\right)^3 - 9(1+r\%)^2 - 9(1+r\%) - 9$.

....

Tiền nợ tháng thứ n là $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}_n(1+r\%)^n - 9(1+r\%)^{n-1} - 9(1+r\%)^{n-2} - \cdots - 9$.

Để tháng thứ n hết nợ $\Rightarrow \mathrm{A}_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}_0(1+r\%)^n = 9\left[(1+r\%)^{n-1} + (1+r\%)^{n-2} + \cdots + 1\right]$.

$\Leftrightarrow 200(1+0,6\%)^n = 9\dfrac{\left[(1+0,6\%)^n - 1\right]}{0,6\%} \Leftrightarrow 1,006^n = \dfrac{15}{13} \Leftrightarrow n \approx 23,9216.$

Vậy $n = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất là $6,9\%$/năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào dưới đây?

A. 107667000 đồng. **B**. 105370000 đồng. **C**. 111680000 đồng. **D**. 116570000 đồng.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức lãi kép $A_n = \mathrm{A}\,(1+r)^n$ trong đó: A: tiền gốc.

r: lãi suất.

n: thời gian gửi tiết kiệm.

Cách giải:

Ta có $A_5 = 80.(1+6,9\%)^5 = 111,68$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Kết quả thống kê cho biết ở thời điểm năm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là $1,1\%$/năm. Nếu mức tăng dân số ở mức ổn định như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu người) vào năm nào?

A. 2050. **B**. 2077. **C**. 2093. **D**. 2070.

Lời giải.

Gọi n là số năm để dân số tăng gấp đôi, khi đó ta có

$$90.1,011^n = 180 \Leftrightarrow 1,011^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,011} 2 \approx 63,36.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Một bể nước có dung tích 1000 lít. Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong một giờ đầu, vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (lấy kết quả gần đúng nhất)?

A. 3,14 giờ. **B**. 4,64 giờ. **C**. 4,14 giờ. **D**. 3,64 giờ.

Lời giải.

Gọi x (giờ) là thời gian bơm đầy bể sau 1 giờ.

Ta có:

$60 \cdot 1 + 60 \cdot 2 + 60 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2^3 + \cdots + 60 \cdot 2^x = 60 + 60 \cdot 2 \cdot \dfrac{1-2^x}{1-2} = 60 - 120(1-2^x)$.

Khi đó:

$60 - 120(1-2^x) = 1000 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{53}{6} \Leftrightarrow x \approx 3,14$.

Do đó thời gian để bể nước được bơm đầy là gần $4,14$ giờ.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Một cô giáo dạy Văn gửi 200 triệu đồng loại kỳ hạn 6 tháng vào một ngân hàng với lãi suất 6,9%/năm. Hỏi sau 6 năm 9 tháng cô giáo nhận được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu biết cô giáo không rút lãi ở tất cả các kỳ hạn trước và nếu rút trước ngân hàng sẽ trả lãi suất theo loại lãi suất không kỳ hạn 0,002%/ngày?

A. 302088933. **B**. 471688328. **C**. 311392503. **D**. 321556228.

Lời giải.

Vì cô giáo gửi 6 năm 9 tháng nên tổng thời gian cô gửi là 13 kỳ hạn loại 6 tháng và 3 tháng rút trước kỳ hạn.

P, P_0 lần lượt là số tiền cô giáo nhận được sau 6 năm 9 tháng và số tiền ban đầu cô giáo gửi.

Lãi suất theo kỳ hạn 6 tháng là: $r = 6,9\% \times \dfrac{6}{12} = 3,45\%$.

Tổng số tiền cô giáo nhận được sau 13 kỳ hạn và 90 ngày rút trước kỳ hạn là: $P = P_0 \times 1,0345^{13} \times 1,00002^{90} = 311392503$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Một bác nông dân có số tiền 20.000.000 đồng. Bác dùng số tiền đó gởi tiết kiện loại kì hạn 6 tháng với lãi suất 8,5% một năm thì sau 5 năm 8 tháng bác nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi? Biết rằng bác không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kì trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kì hạn 0,01% một ngày (một tháng tính 30 ngày).

A. 31802780,09 đồng. **B**. 30802750,09 đồng. **C**. 32802750,09 đồng. **D**. 33802750,09 đồng.

Lời giải.

Một kì hạn 6 tháng có lãi suất là $\dfrac{8,5\%}{12} \cdot 6 = 4,25\%$.

Sau 5 năm 6 tháng (có nghĩa là 66 tháng tức là 11 kỳ hạn), số tiền cả vốn lẫn lãi Bác nông dân nhận được là: $A = 20000000 \cdot \left(1 + \dfrac{4,25}{100}\right)^{11}$ (đồng).

Vì 5 năm 8 tháng thì có 11 kỳ hạn và dư 2 tháng hay dư 60 ngày nên số tiền A được tính lãi suất không kỳ hạn trong 60 ngày là: $B = A \cdot \dfrac{0,01}{100} \cdot 60 = 120000\left(1 + \dfrac{4,25}{100}\right)^{11}$ (đồng).

Suy ra, sau 5 năm 8 tháng số tiền bác nông dân nhận được là

$C = A + B = 20000000 \cdot \left(1 + \dfrac{4,25}{100}\right)^{11} + 120000\left(1 + \dfrac{4,25}{100}\right)^{11} = 31802750,09$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 9. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 25$. **B**. $S_{\min} = 30$. **C**. $S_{\min} = 33$. **D**. $S_{\min} = 17$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$, điều kiện mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt là $b^2 > 20a$.
Đặt $t = \ln x, u = \log x$ khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0$ (1) và $5t^2 + bt + a = 0$ (2).
Ta có $x_1x_2 = \mathrm{e}^{t_1+t_2} = \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}}$, $x_3x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$.
Lại có $x_1x_2 > x_3x_4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow a > \dfrac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \geq 3$ (do a, b nguyên dương)
$\Rightarrow b^2 > 60 \Rightarrow b \geq 8$.
Vậy $S \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 \Rightarrow S_{\min} = 30$ đạt được tại $a = 3, b = 8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính khối lượng còn lại của 40 gam Poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

A. $4{,}34 \cdot 10^{-15}$ (gam). **B.** $4{,}44 \cdot 10^{-15}$ (gam). **C.** $4{,}06 \cdot 10^{-15}$ (gam). **D.** $4{,}6 \cdot 10^{-15}$ (gam).

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $1 = 2 \cdot e^{r \cdot 138} \Rightarrow r = -\dfrac{\ln 2}{138}$.
Khối lượng còn lại của 40 gam Poloni 210 sau 7314 ngày là $S = 40 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{138} \cdot 7314} \approx 4{,}44 \cdot 10^{-15}$ gam.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn theo công thức hàm số mũ $m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kỳ bán rã (*tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác*). Khi phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, các nhà khoa học thấy rằng khối lượng cacbon phóng xạ ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ trong mẫu gỗ đó đã mất 45% so với lượng ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ ban đầu của nó. Hỏi công trình kiến trúc đó có niên đại khoảng bao nhiêu năm? Cho biết chu kỳ bán rã của ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ là khoảng 5730 năm.

A. 5157 (năm). **B.** 3561 (năm). **C.** 6601 (năm). **D.** 4942 (năm).

Lời giải.

Từ công thức $m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ và $m(t) = 0{,}55m_0$ ta suy ra $0{,}55 = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$
$\Leftrightarrow 0{,}55 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow t = 5730 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0{,}55 \approx 4942$ (năm)
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Một người gửi tiết kiệm A đồng với lãi suất $7,56\%$ một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó sẽ có ít nhất số tiền gấp đôi số tiền ban đầu, giả sử lãi suất không thay đổi.

A. 10. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có bất phương trình: $2A \leq A\,(1 + 7,56\%)^n \Leftrightarrow n \geq \log_{1,0756} 2 \approx 9,5$.
Vậy sau 10 năm người đó sẽ có ít nhất số tiền gấp đôi số tiền ban đầu.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13 (2-HK1-49-THPT-NKKN-TPHCM, 12EX5). [Nhật Thiện, ID6][2D2T5-6] Dân số thế giới được tính theo công thức $S = Ae^{nr}$, trong đó A là dân số của số năm làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng dân số Việt Nam vào thời điểm giữa năm 2016

là $90,5$ triệu người và tỉ lệ tăng dân số là $1,06\%$ năm. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì sau bao nhiêu năm dân số Việt Nam có khoảng 100 triệu người?

A. $12,2$ năm. **B**. $8,5$ năm. **C**. $9,4$ năm. **D**. 15 năm.

Lời giải.

Ta có $100 \cdot 10^6 = 90,5 \cdot 10^6 \mathrm{e}^{1,06\%n} \Rightarrow \mathrm{e}^{1,06\%n} = \dfrac{200}{181} \Rightarrow 1,06\%n = \ln\left(\dfrac{200}{181}\right) \Rightarrow n \approx 9,4.$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Một người gửi 15 triệu đồng với lãi suất 8.4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền 28 triệu đồng (biết rằng lãi suất không thay đổi).

A. 10 năm. **B**. 8 năm. **C**. 9 năm. **D**. 7 năm.

Lời giải.

Số tiền có được sau n năm là $P_n = 15(1 + 0.084)^n = 15(1.084)^n$ (triệu đồng).

Để thu được tổng số tiền là 28 triệu đồng thì $15(1.084)^n = 28 \Leftrightarrow n = \log_{1.084}\left(\dfrac{28}{15}\right) \approx 7{,}7.$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Ông An gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần đầu gửi tiền ông An đến rút toàn bộ tiền cả gốc và lãi thì được số tiền gần nhất với số nào dưới đây?

A. 217.695.000 (đồng). **B**. 231.815.000 (đồng). **C**. 197.201.000 (đồng). **D**. 190.271.000 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_1 là số tiền gồm cả tiền gốc và tiền lãi khi gửi 60 triệu với thời hạn 10 năm.

Ta có $T_1 = 60 \cdot (1 + 8\%)^{10} = 129.535.000$ (đồng).

Gọi T_2 là số tiền gồm cả tiền gốc và tiền lãi khi gửi 60 triệu với thời hạn 5 năm.

Ta có $T_2 = 60 \cdot (1 + 8\%)^5 = 88.160.000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền ông An rút được sau 10 năm là $T = T_1 + T_2 = 217.695.000$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 16. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi)

A. 13 năm. **B**. 12 năm. **C**. 14 năm. **D**. 15 năm.

Lời giải.

Đặt $r = 0{,}07$. Số tiền người đó rút ra sau năm thứ n gửi là $A = A_0 \cdot (1 + r)^n$. Từ đó ta có

$$n = \log_{1+r} \frac{250}{100} \approx 13{,}54.$$

Vậy sau ít nhất 14 năm người đó lãnh được số tiền 250 triệu đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm

tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 năm, người đó lĩnh được số tiền (cả vốn và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong thời gian đó người này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 166.846.000 đồng. **B**. 164.246.000 đồng. **C**. 160.246.000 đồng. **D**. 162.246.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thu được sau n năm theo hình thức lãi kép là $A_n = A_0(1+r)^n$.

Sau 6 năm số tiền thu được là $A_6 = 100(1+8{,}4\%)^6 = 162{,}246$ triệu đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. 130650280 (đồng). **B**. 130650000 (đồng). **C**. 139795799 (đồng). **D**. 139795800 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n, với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có:

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_0 + rT_0 = T_0\,(1+r)\,.\\
T_2 &= (T_1+T_0)(1+r) = T_0(1+r)^2 + T_0(1+r).\\
T_3 &= (T_2+T_0)(1+r) = T_0(1+r)^3 + T_0(1+r)^2 + T_0(1+r).\\
&\cdots\\
T_n &= (T_{n-1}+T_0)(1+r) = T_0(1+r)^n + T_0(1+r)^{n-1} + \cdots + T_0(1+r)^2 + T_0(1+r)\\
&= \frac{T_0}{r}\cdot\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)\,.
\end{aligned}$$

Áp dụng vào bài toán, ta có: $10^9 = \dfrac{T_0}{0{,}07}\cdot\left[(1+0{,}07)^6 - 1\right](1+0{,}07) \Rightarrow T_0 \approx 130650280$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính khoảng 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng 1,5% mỗi năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người?

A. 2. **B**. 28. **C**. 23. **D**. 24.

Lời giải.

Sau n năm thì dân số sẽ là $S_n = 7(1+0{,}015)^n$. Suy ra $n = \log_{1{,}015}\left(\dfrac{10}{7}\right) \approx 23{,}956$.

Vậy sau ít nhất 24 năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Ông Hùng dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Số tiền X (triệu đồng, $X \in \mathbb{N}$) nhỏ nhất mà ông Hùng cần gửi vào ngân hàng để sau ba năm số tiền lãi đủ để mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng là

A. 308. **B**. 289. **C**. 300. **D**. 280.

Lời giải.

Số tiền ông Hùng cần gửi để sau ba năm có tiền lãi đủ mua một chiếc xe 60 triệu là

$$X + 60 = X(1 + 6{,}5\%)^3 \Leftrightarrow X = 288{,}531.$$

Do $X \in \mathbb{N}$ nên số tiền nhỏ nhất mà ông Hùng cần gửi vào ngân hàng để sau ba năm có số tiền lãi đủ mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng là 289 triệu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 0,7%/tháng và lãi hàng tháng được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu tháng người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu (lấy giá trị quy tròn)?

A. 96. **B**. 97. **C**. 98. **D**. 99.

Lời giải.

Gọi x là số tiền gửi ban đầu ($x > 0$).

Số tiền sau tháng thứ nhất là $1{,}007x$.

Số tiền sau tháng thứ hai là $(1{,}007)^2x$.

Số tiền sau tháng thứ n là $(1{,}007)^n x$.

Theo giả thiết ta có $(1{,}007)^n x = 2x \Leftrightarrow (1{,}007)^n = 2 \Leftrightarrow n \approx 99$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4 % / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng. **B**. 102.423.000 đồng. **C**. 102.160.000 đồng. **D**. 102.017.000 đồng.

Lời giải.

Ta có $A_n = A_0(1 + r)^n = 100.000.000\left(1 + \dfrac{0{,}4}{100}\right)^6 = 102.424.128$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

A. 30 tháng. **B**. 40 tháng. **C**. 35 tháng. **D**. 31 tháng.

Lời giải.

Tổng số tiền thu được sau n tháng gửi là $3 \cdot \dfrac{1{,}006^n - 1}{1{,}006 - 1}$.

Từ đó, để tổng số tiền cả lãi và gốc lớn hơn 100 triệu ta cần

$$3 \cdot \frac{1{,}006^n - 1}{1{,}006 - 1} > 100 \Leftrightarrow 1{,}006^n - 1 > \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1{,}006^n > \frac{6}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1{,}006}\frac{6}{5} \approx 30{,}48.$$

Vậy anh A cần gửi ít nhất 31 tháng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Một người vay ngân hàng số tiền 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng số tiền 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau n tháng người đó trả hết nợ. Khi đó n gần với số nào dưới đây?

A. 14. **B**. 13. **C**. 16. **D**. 15.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là T, số tiền trả hàng tháng là a và lãi suất hàng tháng là r.
Số tiền còn nợ sau tháng thứ nhất là $T_1 = T(1+r) - a$.
Số tiền còn nợ sau tháng thứ 2 là $T_2 = T_1(1+r) - a = T(1+r)^2 - a(1+r) - a$.
Số tiền còn nợ sau tháng thứ n là $T_n = T(1+r)^n - a\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1\right]$.
Vì đến tháng thứ n người đó trả hết nợ nên

$$T_n = 0 \Leftrightarrow T(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{a}{a - rT} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\dfrac{a}{a-rT}\right)}{\ln(1+r)} \approx 13{,}52.$$

Vậy để trả hết nợ thì người đó cần phải trả trong 14 tháng.
Chọn đáp án A □

Câu 25. Một sinh viên mới ra trường mong muốn rằng bảy năm nữa sẽ có 2 tỷ đồng để mua nhà. Hỏi sinh viên đó phải gửi vào ngân hàng một khoảng tiền tiết kiệm như nhau hằng năm ít nhất là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng là 6,8%/năm (không thay đổi) và lãi hằng năm được nhập vào vốn.

A. 263 triệu đồng. **B**. 183 triệu đồng. **C**. 215 triệu đồng. **D**. 218 triệu đồng.

Lời giải.

Giả sử sinh viên đó bắt đầu gửi số tiền A đồng vào ngân hàng với lãi suất $r = 6{,}8\%$/năm.
Khi đó $S_n = \dfrac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r) \Rightarrow A = \dfrac{S_n r}{(1+r)^{n+1} - (1+r)}$.
Để thu được số tiền 2 tỷ đồng sau 7 năm thì $S_n = 2000000000$ và $n = 7$.
Khi đó $A = \dfrac{S_n r}{(1+r)^{n+1} - (1+r)} = \dfrac{2000000000 \cdot 6{,}8\%}{(1+6{,}8\%)^8 - (1+6{,}8\%)} = 217718044{,}6$ đồng.
Vậy số tiền ít nhất bạn sinh viên cần gửi là 218 triệu đồng.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Do có nhiều cố gắng trong học kì I năm học lớp 12, Hoa được bố mẹ cho chọn một phần thưởng dưới 5 triệu đồng. Nhưng Hoa muốn mua một cái laptop 10 triệu đồng nên bố mẹ đã cho Hoa 5 triệu đồng gửi vào ngân hàng (vào ngày 1/1/2019) với lãi suất 1% trên tháng đồng thời ngày đầu tiên mỗi tháng (bắt đầu từ ngày 1/2/2019) bố mẹ sẽ cho Hoa 300000 đồng và cũng gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 1% trên tháng. Biết hàng tháng Hoa không rút lãi ra và tiền lãi được cộng vào tiền vốn cho tháng sau chỉ rút vốn vào cuối tháng mới được tính lãi của tháng ấy. Hỏi ngày nào trong các ngày dưới đây là ngày gần nhất với ngày 1/2/2019 mà bạn Hoa có đủ tiền để mua laptop?

A. 15/3/2020. **B**. 15/5/2020. **C**. 15/4/2020. **D**. 15/6/2020.

Lời giải.

Với $A = 5$ triệu; $a = 0{,}3$ triệu; $r = 0{,}01$. Gọi n là số tháng cần gửi tiết kiệm để Hoa thu về được đủ 10 triệu. Ta có

☑ Hết tháng 1 số tiền Hoa có được là $A(1+r) + a$.

☑ Hết tháng 2 số tiền Hoa có được là

$$[A(1+r)+a](1+r)+a = A(1+r)^2+a(1+r)+a.$$

☑ .....

☑ Hết tháng n số tiền Hoa có được là

$$A(1+r)^n + a\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r} = 10 \Leftrightarrow n \approx 13{,}41.$$

Như vậy sau 14 tháng (đến ngày 15/3/2020) Hoa mới thu về đủ 10 triệu.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B**. 12 năm. **C**. 9 năm. **D**. 10 năm.

Lời giải.

Giả sử người ấy gửi số tiền M_0 vào ngân hàng. Khi đó, sau n năm số tiền của người ấy được tính bằng công thức $M = M_0(1+7{,}2\%)^n = M_0\cdot 1{,}072^n$.

Theo đề bài, ta tìm n thỏa mãn $M \geq 2M_0 \Leftrightarrow M_0\cdot 1{,}072^n \geq 2M_0 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}072} 2 \approx 9{,}969602105$.

Vậy sau ít nhất 10 năm người ấy mới thu được số tiền nhiều gấp đôi số tiền vốn ban đầu.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị cacbon). Khi một bộ phận của cây đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100\cdot(0{,}5)^{\frac{t}{5750}}$ (%). Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21 (%). Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 năm. **B**. 3754 năm. **C**. 3457 năm. **D**. 3547 năm.

Lời giải.

Theo bài toán ta có $100\cdot(0{,}5)^{\frac{t}{5750}} = 65{,}21 \Rightarrow t = 5750\log_{0{,}5}\left(\frac{65{,}21}{100}\right) \approx 3547$ (năm).

Vậy niên đại của công trình kiến trúc đó là 3547 năm.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 8 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Hỏi số tiền phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 2921000. **B**. 7084000. **C**. 7140000. **D**. 2944000.

Lời giải.

Vào đầu tháng thứ nhất, số tiền người đó nợ ngân hàng là $M_0 = 350$ triệu đồng.
Đến cuối tháng thứ nhất, số tiền còn nợ đã phát sinh lãi, đồng thời người đó đã trả 8 triệu đồng, do đó số tiền còn nợ là

$$M_1 = M_0(1 + 0{,}79\%) - 8.$$

Đến cuối tháng thứ hai, số tiền người đó còn nợ là

$$M_2 = M_1(1 + 0{,}79\%) - 8 = M_0(1 + 0{,}79\%)^2 - 8\left[(1 + 0{,}79\%) + 1\right].$$

Tương tự, đến cuối tháng thứ ba, số tiền người đó còn nợ là

$$M_3 = M_2(1 + 0{,}79\%) - 8 = M_0(1 + 0{,}79\%)^3 - 8\left[(1 + 0{,}79\%)^2 + (1 + 0{,}79\%) + 1\right].$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, đến cuối tháng thứ n, số tiền người đó còn nợ là

$$\begin{aligned} M_n &= M_0(1 + 0{,}79\%)^n - 8\left[(1 + 0{,}79\%)^{n-1} + (1 + 0{,}79\%)^{n-2} + \cdots + (1 + 0{,}79\%) + 1\right] \\ &= M_0(1 + 0{,}79\%)^n - 8\frac{(1 + 0{,}79\%)^n - 1}{0{,}79\%}. \end{aligned}$$

Giả sử người đó trả hết nợ vào tháng thứ N. Khi đó

$$M_N = 0 \Leftrightarrow N = \log_{1+0{,}79\%} \frac{8}{8 - 350 \cdot 0{,}79\%} \approx 53{,}9.$$

Do đó, đến cuối tháng thứ 53, người đó còn nợ ngân hàng $M_{53} = 7{,}08$ triệu đồng.
Vậy số tiền người đó phải trả vào kỳ cuối cùng (tháng thứ 54) là $7{,}08 + 7{,}08 \cdot 0{,}79\% = 7{,}14$ triệu đồng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7% một năm. Hỏi sao bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 200 triệu đồng từ tiền gửi ban đầu (giả sử trong suốt quá trình gửi lãi suất không thay đổi và người gửi không rút tiền)?

A. 11 năm. **B**. 9 năm. **C**. 12 năm. **D**. 10 năm.

Lời giải.

Gọi n là số năm cần tìm. Từ giả thiết ta có n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa

$$100\,(1 + 0{,}07)^n > 200 \Leftrightarrow n > \log_{1+0{,}07} 2 \approx 10{,}24.$$

Vậy sau 11 năm người gửi có ít nhất 200 triệu đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Một loại virus có số lượng cá thể tăng trưởng mũ với tốc độ $x\%$/h, tức là cứ sau 1 giờ thì số lượng của chúng tăng lên $x\%$. Người ta thả vào ống nghiệm 20 cá thể, sau 53 giờ số lượng cá thể virus đếm được trong ống nghiệm là 1,2 triệu. Tìm x. (tính chính xác đến hàng phần trăm)

A. $x \approx 71{,}13\%$. **B**. $x \approx 13{,}17\%$. **C**. $x \approx 23{,}07\%$. **D**. $x \approx 7{,}32\%$.

Lời giải.

Sau t (h) thì số lượng virus là $20\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^t$ cá thể. Do đó, sau 53 (h) ta có

$$20\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{53} = 1200000 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = \sqrt[53]{60000} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt[53]{60000} - 1\right) \cdot 100 \approx 23{,}07.$$

Chọn đáp án (C) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. C	5. B	6. C	7. C	8. A	9. B	10. B
11. D	12. A	13. C	14. B	15. A	16. C	17. D	18. A	19. D	20. B
21. D	22. A	23. D	24. A	25. D	26. A	27. D	28. D	29. C	30. A
31. C									

BÀI 6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Bất phương trình mũ cơ bản

Định nghĩa 1. Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0,\ a \neq 1$.

① Xét bất phương trình dạng $a^x > b$. (dạng $a^x \geq b$ giải tương tự)

- ☑ Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
- ☑ Nếu $b > 0$, khi đó

  Với $a > 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

  Với $0 < a < 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

② Xét bất phương trình dạng $a^x \leq b$. (dạng $a^x < b$ giải tương tự)

- ☑ Nếu $b \leq 0$, bất phương trình vô nghiệm.
- ☑ Nếu $b > 0$, khi đó

  Với $a > 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.

  Với $0 < a < 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.

2 Bất phương trình logarit

① Bất phương trình logarit cơ bản

Định nghĩa 2. Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$. (1)

- ☑ Trường hợp $a > 1$: (1) $\Leftrightarrow x > a^b$.
- ☑ Trường hợp $0 < a < 1$: (1) $\Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

② Một số bất phương trình logarit đơn giản

Một số cách giải bất phương trình logarit đơn giản.

- ☑ Đưa về bất phương trình logarit cơ bản.
- ☑ Đặt ẩn phụ.
- ☑ Mũ hóa.
- ☑ Sử dụng tính đơn điệu của hàm số, đánh giá, bất đẳng thức.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Bất phương trình mũ cơ bản

Phương pháp giải.

① Xét bất phương trình dạng $a^x > b$. (dạng $a^x \geq b$ giải tương tự)

- ☑ Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

☑ Nếu $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

② Xét bất phương trình dạng $a^x \leq b$. (dạng $a^x < b$ giải tương tự)

☑ Nếu $b \leq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

☑ Nếu $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau

① $3^x \geq 9$.

② $3^x > -1$.

③ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leq 4$.

④ $2^x < -1$.

⑤ $2^x < 3$.

Lời giải.

① $3^x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \log_3 9 \Leftrightarrow x \geq 2$. Vậy tập nghiệm là $S = [2; +\infty)$.

② Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

③ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow x \geq -2$. Vậy tập nghiệm là $S = [-2; +\infty)$.

④ Bất phương trình vô nghiệm, tập nghiệm là $S = \varnothing$.

⑤ $2^x < 3 \Leftrightarrow x < \log_2 3$. Vậy tập nghiệm là $S = (-\infty; \log_2 3)$.

□

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau

① $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-5x+3} > 125$.

② $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$.

③ $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2x^2-3x} < \dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

① $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-5x+3} > 125 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 < -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Tập nghiệm $S = (2; 3)$.

② $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28 \Leftrightarrow 3^x \left(3^2 + 3^{-1}\right) \leq 28 \Leftrightarrow 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Tập nghiệm $S = (-\infty; 1]$.

③ $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2x^2-3x} < \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x > \log_{\frac{4}{7}} \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x > -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{2} \\ x > 1 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

□

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau

① $5^{|x^2-2x|} > 125$.

② $2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x+1}$.

③ $2^x.3^{x-1} < 4$.

Lời giải.

① $5^{|x^2-2x|} > 125 \Leftrightarrow |x^2-2x| > \log_5 125 \Leftrightarrow |x^2-2x| > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x > 3 \\ x^2-2x < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

② $2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x(2 + 2^2) < 3^x(1 + 3) \Leftrightarrow 6.2^x < 4.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > 1$.

Tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.

③ $2^x.3^{x-1} < 4 \Leftrightarrow 2^x.3^x < 4.3 \Leftrightarrow 6^x < 12 \Leftrightarrow x < \log_6 12 \Leftrightarrow x < 1 + \log_6 2$.

Tập nghiệm $S = (-\infty; 1 + \log_6 2)$.

□

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12$.

Lời giải.

Ta có $4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12 \Leftrightarrow \left(4 - 2^{x^2}\right)(x^2 - 2x - 3) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 4 - 2^{x^2} > 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 4 - 2^{x^2} < 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2} > x > -\sqrt{2} \\ x < -1 \vee x > 3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -1 < x < 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1 \\ \sqrt{2} < x < 3 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm $S = (-\sqrt{2}; -1) \cup (\sqrt{2}; 3)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau

① $2^x \geq 8$.

② $2^x > -3$.

③ $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$.

④ $5^x < -1$.

⑤ $4^x < 3$.

Lời giải.

① $2^x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \log_2 8 \Leftrightarrow x \geq 3$. Vậy tập nghiệm là $S = [3; +\infty)$.

② Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

③ $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27 \Leftrightarrow x \geq \log_{\frac{1}{3}} 27 \Leftrightarrow x \geq -3$. Vậy tập nghiệm là $S = [-3; +\infty)$.

④ Bất phương trình vô nghiệm, tập nghiệm là $S = \varnothing$.

⑤ $4^x < 3 \Leftrightarrow x < \log_4 3$. Vậy tập nghiệm là $S = (-\infty; \log_4 3)$.

□

Bài 2. Giải các bất phương trình sau

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{|2x-1|} > \frac{1}{4}$.

② $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Lời giải.

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{|2x-1|} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow |2x-1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Tập nghiệm $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

② $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \Leftrightarrow -20.2^x > -20.5^x \Leftrightarrow 2^x < 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Tập nghiệm $S = (0; +\infty)$.

□

DẠNG 2. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Phương pháp giải.

① Với $a > 1$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$.

② Với $0 < a < 1$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $5^{x^2+x} \le 25^{x+1}$.

Lời giải.

$5^{x^2+x} \le 25^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x^2+x} \le 5^{2x+2} \Leftrightarrow x^2 + x \le 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

Tập nghiệm $S = [-1; 2]$. □

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau

① $\mathrm{e}^{2x} > \mathrm{e}^{1-x}$.

② $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}$

Lời giải.

① $\mathrm{e}^{2x} > \mathrm{e}^{1-x} \Leftrightarrow 2x > 1 - x \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$.

Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

② $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-3} \Leftrightarrow 2x^2 + 4x \ge -x - 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{3}{2} \vee x \ge -1$.

Tập nghiệm $S = \left(-\infty; \dfrac{-3}{2}\right] \cup [-1; +\infty)$.

□

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau

① $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+3x-4} > \left(\dfrac{9}{4}\right)^{1-x}$.

② $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1} \geq \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$

Lời giải.

① Ta có $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+3x-4} > \left(\dfrac{9}{4}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+3x-4} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2(x-1)}$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4 < 2x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

Tập nghiệm $S = (-2; 1)$.

② Điều kiện $x \neq 1$. Ta có $\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$. Do đó

$\left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1} \geq \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{x}{x-1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1} \geq \left(\sqrt{2}+1\right)^{-\frac{x}{x-1}}$

$\Leftrightarrow x+1 \geq -\dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x > 1$.

Tập nghiệm $S = \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau

① $2^{x^2+3x-4} > 4^{x-1}$.

② $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2+1} \leq (0{,}125)^{3x+2}$.

Lời giải.

① $2^{x^2+3x-4} > 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-4} > 2^{2x-2} \Leftrightarrow x^2+3x-4 > 2x-2$

$\Leftrightarrow x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 1$.

Tập nghiệm $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

② $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2+1} \leq (0{,}125)^{3x+2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2+1} \leq \left(\dfrac{1}{8}\right)^{3x+2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{9x+6}$

$\Leftrightarrow 2x^2+1 \geq 9x+6 \Leftrightarrow 2x^2-9x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 5$.

Tập nghiệm $S = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [5; +\infty]$.

□

Bài 2. Giải các bất phương trình sau

① $\mathrm{e}^{3x+1} < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{5x+8}}$.

② $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Lời giải.

① $\mathrm{e}^{3x+1} < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{5x+8}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+1} < \mathrm{e}^{-5x-8} \Leftrightarrow 3x+1 < -5x-8 \Leftrightarrow x < -\dfrac{9}{8}$.
Tập nghiệm $S = \left(-\infty; -\dfrac{9}{8}\right)$.

② Điều kiện $x \neq -1$. Ta có $\left(\sqrt{5}-2\right) = \left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$. Do đó
$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}+2\right)^{-\frac{x-1}{x+1}}$
$\Leftrightarrow x-1 \geq -\dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$.
Tập nghiệm $S = [-2;-1] \cup [1;+\infty)$.

□

DẠNG 3. Giải bất phương trình logagit dạng cơ bản

Phương pháp giải.

☑ $\log_a u < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < a^b \text{ nếu } a > 1 \\ u > a^b \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$

☑ $\log_a u > b \Leftrightarrow \begin{cases} u > a^b \text{ nếu } a > 1 \\ 0 < u < a^b \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\log_{0,5}(2x-3) > -4$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,5}(2x-3) > -4 \Leftrightarrow 0 < 2x-3 < (0,5)^{-4} \Leftrightarrow 0 < 2x-3 < 16 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < x < \dfrac{19}{2}$.
Vậy tập hợp nghiệm $S = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{19}{2}\right)$. □

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x^2-3x+11) \leq 4$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{3}}(x^2-3x+11) \leq 4 \Leftrightarrow 0 < x^2-3x+11 \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+11 > 0 \text{ (đúng với } \forall x \in \mathbb{R}) \\ x^2-3x+11 \leq 9 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
Vậy tập hợp nghiệm $S = [1;2]$. □

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-11}{x+4} \leq 4$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-11}{x+4} \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{x-11}{x+4} \geq \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \dfrac{15x-180}{16(x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$ hoặc $x \geq 12$.
Vậy tập hợp nghiệm $S = (-\infty;-4] \cup [12;+\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3. Giải bất phương trình $\log_5(-2x^2+x+6)>1$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(-2x^2+x+6)>1 \Leftrightarrow -2x^2+x+6>5 \Leftrightarrow -2x^2+x+1>0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<1$.

Vậy tập hợp nghiệm $S=\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$. □

Bài 4. Giải bất phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 2x>\dfrac{13}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 2x>\dfrac{13}{6} \Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 2x>\dfrac{13}{6}$

$\Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\log_2 x\right)>\dfrac{13}{6} \Leftrightarrow \dfrac{11}{6}\log_2 x>\dfrac{11}{6} \Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập hợp nghiệm $S=(2;+\infty)$. □

Bài 5. Giải bất phương trình $\log_2(1-2\log_9 x)<1$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(1-2\log_9 x)<1 \Leftrightarrow 0<1-2\log_9 x<2 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_9 x>-\dfrac{1}{2}\\ \log_9 x<\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{3}\\ x<3\end{cases}$.

Vậy tập hợp nghiệm $S=\left(\dfrac{1}{3};3\right)$. □

Bài 6. Giải bất phương trình $\log_{\frac{x}{5}}(x^2-8x+16)\geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện : $x>0$, $x\neq 5$.

Ta có:$\log_{\frac{x}{5}}(x^2-8x+16)\geq 0$. (1)

☑ Với $x>5$.

(1)$\Leftrightarrow x^2-8x+16\geq 1 \Leftrightarrow x^2-8x+15\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$ hoặc $x\geq 5$.

☑ Với $x<5$.

(1)$\Leftrightarrow 0<x^2-8x+16\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-8x+16>0\\ x^2-8x+15\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 4\\ 3\leq x\leq 5\end{cases}$.

Vậy tập hợp nghiệm $S=[3;+\infty)\setminus\{4;5\}$. □

Bài 7. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: $\log_{0,5}(x^2-2x+m)>-3$

Lời giải.

Ta có $\log_{0,5}(x^2-2x+m)>-3 \Leftrightarrow 0<x^2-2x+m<8$.

Vậy bất phương trình đã cho chỉ vô nghiệm khi $x^2-2x+m\leq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ (1) hoặc $x^2-2x+m\geq 8$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ (2).

☑ (1) không thể xảy ra.

☑ (2) $\Leftrightarrow x^2-2x+m-8\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 9-m\leq 0 \Leftrightarrow m\geq 9$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi $m<9$. □

Bài 8. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $\log_3(-x^2+2(m+3)x-3m-4)>1$

Lời giải.

Ta có $\log_3(-x^2+2(m+3)x-3m-4)>1 \Leftrightarrow -x^2+2(m+3)x-3m-4>3$
$\Leftrightarrow -x^2+2(m+3)x-3m-7>0$.
Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $-x^2+2(m+3)x-3m-7\leq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (m+3)^2-3m-7\leq 0 \Leftrightarrow m^2+3m+2\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq -1$.
Vậy $-2\leq m\leq -1$. □

DẠNG 4. Giải bất phương trình logagit bằng cách đưa về cùng cơ số

Phương pháp giải. Dùng biến đổi logarit để đưa về cùng cơ số.

$$\log_a u<\log_a v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0<u<v \text{ nếu } a>1 \\ u>v>0 \text{ nếu } 0<a<1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $\log_3(x-3)>\log_3(2x+7)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x-3)>\log_3(2x+7) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>2x+7 \\ 2x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-10 \\ x>-\dfrac{7}{2} \end{cases}$.

Vậy tập hợp nghiệm $S=\varnothing$. □

Ví dụ 8. Giải bất phương trình $\log_5(1-2x)<1+\log_{\sqrt{5}}(x+1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 1-2x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ x>-1 \end{cases}$.

Ta có $\log_5(1-2x)<1+\log_{\sqrt{5}}(x+1) \Leftrightarrow \log_5(1-2x)<1+2\log_5(x+1)$
$\Leftrightarrow \log_5(1-2x)<\log_5 5(x+1)^2 \Leftrightarrow 1-2x<5(x+1)^2 \Leftrightarrow 5x^2+12x+4>0$
$\Leftrightarrow x<-2$ hoặc $x>-\dfrac{2}{5}$.

Vậy tập hợp nghiệm $S=\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+3)\leq\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+3) \le \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+3 \ge 2x-3 \\ 2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6 \ge 0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \text{ hoặc } x \ge 3 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy tập hợp nghiệm $S = \left(\dfrac{3}{2}; 2\right] \cup [3; +\infty)$. □

Bài 10. Giải bất phương trình $2\log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>3 \end{cases}$.

Ta có $2\log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \log_8 \dfrac{(x-2)^2}{x-3} > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x-3} > 4 \Leftrightarrow x^2-8x+16>0 \Leftrightarrow x \ne 4$.

Vậy tập hợp nghiệm $S = (3; +\infty) \setminus \{4\}$. □

Bài 11. Giải bất phương trình $\log_2(x+3) \ge 1 + \log_2(x-1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>1 \end{cases}$.

Ta có $\log_2(x+3) \ge 1 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+3) \ge \log_2 2(x-1) \Leftrightarrow x+3 \ge 2(x-1) \Leftrightarrow x \le -1$.

Vậy tập hợp nghiệm $S = \varnothing$. □

Bài 12. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $\log_{x-m}(x^2-1) > \log_{x-m}(x^2+x-2)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ne m+1; x > m$. Ta có $\log_{x-m}(x^2-1) > \log_{x-m}(x^2+x-2)$. (1)

☑ Với $x > m+1$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > x^2+x-2 \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<-2 \text{ hoặc } x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2$.

☑ Với $0 < x < m+1$.

(1) $\Leftrightarrow 0 < x^2-1 < x^2+x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Bất phương trình (1) vô nghiệm khi $\begin{cases} m+1 \ge -2 \\ m+1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 0$.

Vậy $-3 \le m \le 0$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Giải bất phương trình $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Lời giải.

Điều kiện : $x > 0$, $x \neq 1$.

Ta có:$\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$. (1)

☑ Với $x > 1$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

☑ Với $x < 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 0 < \frac{3x-1}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < 3x-1 < x^2+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x < 1 \text{ hoặc } x > 2 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp nghiệm $S = \left(\dfrac{1}{3}; 2\right) \setminus \{1\}$. □

Bài 14. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right) > \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x > 0 \\ \sqrt{x^2+1}-x > 0 \end{cases}$ (Đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$).

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}+x$, $t > 0$. Suy ra $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{1}{t}$.

Bất phương trình đã cho trở thành:

$$\log_{\frac{1}{3}} (\log_5 t) > \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{1}{\log_5 t}\right) > \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 t} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{t} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 t} > \log_5 t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 t)^2 < 1 \\ \log_5 t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 t < 1 \\ \log_5 t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 5 \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x < 5 \ (1) \\ \sqrt{x^2+1}+x > 1 \ (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x < \dfrac{12}{5}$.

Giải (2) ta được $x > 0$. Vậy tập hợp nghiệm $S = \left(0; \dfrac{12}{5}\right)$. □

Bài 15. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m).$$

Lời giải.

Ta có $1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \log_5 5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2-4x+5-m \geq 0 \ (1) \\ mx^2+4x+m > 0 \ (2) \end{cases}.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x khi cả (1) và (2) đúng với mọi x.

☑ Với $m = 0$ hoặc $m = 5$. Không thỏa mãn đề bài.

☑ Với $m \neq 0$ hoặc $m \neq 5$.

Để thỏa mãn đề thì $\begin{cases} 5-m>0 \\ 4-(5-m)^2 \leq 0 \\ m>0 \\ 4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ m \leq 3 \text{ hoặc } m \geq 7 \\ m>0 \\ m<-2 \text{ hoặc } m>2 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m \leq 3.$

Vậy $2<m \leq 3$.

□

DẠNG 5. Bất phương trình mũ và logarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải. Khi giải bất phương trình mũ và logarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ ta thường sử dụng một số phương pháp sau:

☑ Dùng ẩn phụ chuyển bất phương trình thành một bất phương trình với một ẩn phụ.
(Ở đây ta coi các bất phương trình có dạng $f(x) \geq 0$, các trường hợp khác tiến hành tương tự).

* Các phép đặt ẩn phụ với bất phương trình mũ thường gặp:

+) Bất phương trình có dạng: $A_n a^{nf(x)} + A_{n-1} a^{(n-1)f(x)} + ... + A_1 a^{f(x)} + A_0 \geq 0$.
Đặt $t = a^{f(x)} (t>0)$, ta thu được bất phương trình: $A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + ... + A_1 t + A_0 \geq 0$.

+) Bất phương trình có dạng: $Aa^{2f(x)} + B(ab)^{f(x)} + Cb^{2f(x)} \geq 0$.
Chia cả hai vế cho $b^{2f(x)}$ rồi đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ ta được: $A.t^2 + B.t + C \geq 0$.

+) Bất phương trình có dạng: $Aa^{f(x)} + Bb^{g(x)} + C \geq 0$ trong đó, $a^{f(x)} b^{g(x)} = k$.
Đặt $a^{f(x)} = t (t>0) \Rightarrow b^{g(x)} = k$.
Ta thu được bất phương trình mới: $At + \dfrac{Bk}{t} + C \geq 0$.

* Các phép đặt ẩn phụ thường gặp với bất phương trình logarit:

+) Đặt $t = \log_a x (x>0)$.

+) Khi bất phương trình xuất hiện $a^{\log_b x}$, ta đặt $t = \log_b x$.

☑ Dùng ẩn phụ chuyển bất phương trình thành một bất phương trình với một ẩn phụ và hệ số vẫn chứa x.
Trong trường hợp này, ta thường thu được một bất phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo x) có Δ là một số chính phương.

☑ Dùng ẩn phụ chuyển bất phương trình thành một hệ bất phương trình với hai ẩn phụ.
Bằng việc sử dụng hai ẩn phụ, ta đưa bất phương trình đã cho về một hệ gồm có:

+) Bất phương trình có được từ bất phương trình đầu bài.

+) Phương trình (hoặc bất phương trình) có được từ việc đánh giá mối quan hệ của hai ẩn phụ.

Ví dụ 9. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x - 12\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x \geq 1$.

b) $\frac{1}{4}.\log^2(x-1)^2+\log(x-1)^3<4.$

Lời giải.

a) Đặt $t=\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x\ (t>0)\Rightarrow\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=\frac{1}{t}.$

Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành:

$$t-\frac{12}{t}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow\quad t^2-t-12\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t\geq 4 \\ t\leq -3 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $t>0$ ta có: $t\geq 4$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x\geq 4\Leftrightarrow x\geq\log_{\sqrt{6+\sqrt{35}}}4.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[\log_{\sqrt{6+\sqrt{35}}}4;+\infty\right).$

b) ĐK: $x>1$.

Đặt $t=\log(x-1)\Rightarrow\log^2(x-1)^2=4t^2;\log(x-1)^3=3t.$

Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành: $t^2+3t<4\Leftrightarrow -4<t<1.$

$\Rightarrow -4<\log(x-1)<1\Leftrightarrow 10^{-4}<x-1<10\Leftrightarrow 1,0001<x<11.$

Kết hợp điều kiện $x>1$ ta có: $1,0001<x<11.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=(1,0001;11).$

□

Ví dụ 10. Giải bất phương trình sau: $\sqrt{\log_2 x^3-2}\geq\log_2 x.$

Lời giải.

ĐK: $x\geq\sqrt[3]{4}$.

Đặt $\left\{\begin{array}{l} u=\sqrt{\log_2 x^3-2}=\sqrt{3\log_2 x-2}\quad (u\geq 0) \\ v=\log_2 x \end{array}\right.$

Khi đó, ta có: $\left\{\begin{array}{l} u\geq v \\ u^2-3v=-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3u\geq u^2+2 \\ v=\frac{u^2+2}{3} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 1\leq u\leq 2 \\ v=\frac{u^2+2}{3} \end{array}\right.$

Mà $u \geq 0$ nên $\begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ v = \dfrac{u^2+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \sqrt{3\log_2 x - 2} \leq 2 \\ 1 \leq \log_2 x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq \log_2 x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4.$

Kết hợp điều kiện ta có: $2 \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [2;4]$. □

Ví dụ 11. Giải bất phương trình sau: $9^x - 2(x+5).3^x + 9(2x+1) \geq 0 \quad (1)$

Lời giải.

Xét phương trình $VT(1) = 0 \quad (2)$.

Đặt $t = 3^x (t > 0)$.

Khi đó, (2) trở thành: $t^2 - 2(x+5).t + 9(2x+1) = 0 \quad (*)$.

Giải phương trình: $VT(1) = 0 \quad (2)$.

Ta có: $\Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) = (x-4)^2$.

Do đó, $(*) \Leftrightarrow (t-9)(t-2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 2x+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = 2x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 3^x - 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = 3^x - 2x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3^x.\ln 3 - 2 \Rightarrow f"(x) = 3^x.\ln^2 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(0) = 0; f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = 1; x = 0$.

Vậy phương trình (2) có đúng ba nghiệm $x = 0; x = 1; x = 2$.

Bảng xét dấu $VT(1)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$VT(1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy, $(1) \Leftrightarrow x \in [0;1] \cup [2;+\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [0;1] \cup [2;+\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Giải bất phương trình sau: $8^x - 7.4^x + 7.2^{x+1} - 8 < 0$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$. Khi đó bất phương trình đã cho có dạng

$$t^3 - 7t^2 + 14t - 8 < 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-2)(t-1) < 0 \ (1)$$

Bảng xét dấu của $f(t) = (t-4)(t-2)(t-1)$ trên $(0; +\infty)$.

t	0		1		2		4		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $(0; 1) \cup (2; 4)$.
Do đó tập nghiệm của bất phương trình ban đầu là $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$. □

Bài 17. Giải bất phương trình sau: $3^{2x} + 3^{-2x} + 3^x + 3^{-x} \leq 0$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x + 3^{-x}$ $(t \geq 2)$. Ta có $3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2$.
Khi đó bất phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} t^2 + t - 2 \leq 0 &\Leftrightarrow (t+2)(t-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Vì $t \geq 2$ nên bất phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 18. Giải bất phương trình sau: $(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x - 3 \geq 0$.

Lời giải.

Đặt $(2 + \sqrt{3})^x = t$ $(t > 0)$.

Nhận xét rằng $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ và $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$ nên ta có $\begin{cases} (7 + 4\sqrt{3})^x = t^2 \\ (2 - \sqrt{3})^x = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Do đó phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{2}{t} - 3 \geq 0 &\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)^2(t-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t \geq 2 \end{aligned}$$

Vì vậy $(2 + \sqrt{3})^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_{2+\sqrt{3}} 2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\log_{2+\sqrt{3}} 2; +\infty\right)$. □

Bài 19. Giải bất phương trình $16^{x+1} + 9^{x+1} \geq 25.12^x$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 9^x ta có □

$$16\left(\frac{16}{9}\right)^x + 9 \geq 25\left(\frac{4}{3}\right)^x \quad (1)$$

Đặt $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$ $(t > 0)$ thì $\left(\frac{16}{9}\right)^x = t^2$. Khi đó phương trình (1) có dạng

$$\begin{aligned} 16t^2 + 9 \geq 25t &\Leftrightarrow 16t^2 - 25t + 9 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(16t-9) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \dfrac{9}{16} \\ \\ t \geq 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thay t bởi $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ ta được $x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

Bài 20. Giải bất phương trình sau $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 - 2\log_3 x - 3 \leq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $\log_3 x = t$. Ta có $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$. Khi đó bất phương trình có dạng

$$(-t)^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{3} \leq x \leq 27$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\frac{1}{3}; 27\right]$ □

Bài 21. Giải bất phương trình $\log_{3x} 27 + 2\log_{x^2} 9 \geq 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log_{27} 3x} + \frac{2}{\log_9 x^2} \geq 2 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 x} \geq 2 \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_3 x$. Bất phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} \frac{3}{1+t} + \frac{2}{t} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t - 2}{t(t+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(t-2)(2t+1)}{t(t+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

Bảng xét dấu của hàm số $f(t) = \dfrac{(t-2)(2t+1)}{t(t+1)}$.

t	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$
$f(t)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} -1 < t \le -\frac{1}{2} \\ 0 < t \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < \log_3 x \le -\frac{1}{2} \\ 0 < \log_3 x \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 < x \le 9 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup (1; 9]$. □

Bài 22. Giải bất phương trình $\sqrt{\log_x 7x} - \log_7 x > 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ \log_x 7x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ \log_x 7 > -1 \end{cases}$

Đặt $\log_x 7 = t$ $(t > -1)$. Khi đó bất phương trình đã cho có dạng

$$\sqrt{1+t} - \frac{1}{t} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+t} > 1 + \frac{1}{t} \ (1)$$

TH1: Nếu $1 + \frac{1}{t} >< \Leftrightarrow \frac{t+1}{t} < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 0$ thì bất phương trình (1) luôn đúng.

Khi đó $-1 < \log_x 7 < 0 \Leftrightarrow \log_7 x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$.

TH2: Nếu $1 + \frac{1}{t} > 0 \Leftrightarrow t > 0$ thì bất phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} 1 + t > 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} &\Leftrightarrow t^3 - 2t - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)(t^2 - t - 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)\left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

Vì $t > 0$ nên bất phương trình trên có nghiệm $t > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó ta có $\log_x 7 > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 0 < \log_7 x < \frac{2}{1+\sqrt{5}} \Leftrightarrow 1 < x < 7^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right) \cup \left(1; 7^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\right)$. □

Bài 23. Giải bất phương trình sau $e^{2x} + (1-2x)e^x + x^2 - x \ge 0$.

Lời giải.

Đặt $e^x = t$ $(t > 0)$. Khi đó bất phương trình đã cho có dạng $t^2 + (1-2x)t + x^2 - x \ge 0$.

Xét tam thức bậc hai $f(t, x) = t^2 + (1-2x)t + x^2 - x$ với tham số x.

Ta có $\Delta = (1-2x)^2 - 4(x^2-x) = 1$.
Do đó ta có thể phân tích $f(t,x) = (t-x)(t+1-x)$. Vì vậy bất phương trình $f(t,x) \geq 0$ tương đương với $t \geq 1-x$ hoặc $t \leq x$.
Thay $t = e^x$ ta đưa về giải bất phương trình $e^x \leq x$ hoặc $e^x > x-1$.
Mặt khác $e^x \geq x+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Tìm m sao cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2-2x+m} + 3\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)} \leq 4$ đúng với mọi $x \in [0;1]$.

Lời giải.

Để bất phương trình có nghĩa $\begin{cases} x^2-2x+m \geq 0 \\ \log_4(x^2-2x+m) \geq 0 \end{cases}$ với mọi $x \in [0;1]$.
Điều kiện trên tương đương với $x^2-2x+m \geq 1$ với mọi $x \in [0;1]$.
Đặt $\log_2 \sqrt{x^2-2x+m} = t$ $(t \geq 0)$. Bất phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} t + 3\sqrt{t} \leq 4 &\Leftrightarrow (\sqrt{t}+4)(\sqrt{t}-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{t}-1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Để bất phương trình ban đầu đúng với mọi $t \in [0;1]$ thì

$$\begin{aligned} &0 \leq \log_2 \sqrt{x^2-2x+m} \leq 1 \ \forall x \in [0;1] \\ \Leftrightarrow\ &1 \leq x^2-2x+m \leq 4 \ \forall x \in [0;1] \ (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2-2x+m$ trên $[0;1]$.
Ta có $f'(x) = 2x-2$, $f'(x) = 0$ khi $x = 0$.
Nhận xét $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0;1)$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $[0;1]$.
Vì vậy $\min\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = m-1, \max\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = m$.
Bất phương trình $(*)$ đúng khi $\begin{cases} m \leq 4 \\ m-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$. □

Bài 25. Xác định giá trị của $a > 0$ sao cho $a^{\cos 2x} \geq 2\cos^2 x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Đặt $\cos^2 x = t$ $(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó bất phương trình tương đương với

$$a^t \geq t+1 \ \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow a^t - t \geq 1 \ \forall t \in [-1;1] \ (1)$$

Xét hàm số $f(t) = a^t - t$ trên $[-1;1]$.
Ta có $f'(t) = a^t \ln a - 1$.

TH1: Nếu $0 < a < 1$ thì $f'(t) < 0$ với mọi $t \in [-1;1]$.

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1) = a - 1$.

Để bất phương trình (1) đúng thì $a - 1 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$ (trái với $a < 1$).

TH2: Nếu $a = 1$ thì $f(t) = 1 - t$ không thỏa mãn $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in [-1;1]$.

TH3: Nếu $a > 1$ thì $f'(t) = 0$ khi $t = \ln \dfrac{1}{\ln a} = -\ln(\ln a)$.

① Nếu $-1 \leq -\ln(\ln a) \leq 1 \Leftrightarrow e^e \geq a \geq e^{\frac{1}{e}}$ thì ta có bảng biến thiên

t	-1		$-\ln(\ln a)$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{1}{a} + 1$	↘	$\dfrac{1}{\ln a} + \ln(\ln a)$	↗	$a - 1$

Đặt $\ln a = u$, ta cần chứng minh rằng $g(u) = \dfrac{1}{u} + \ln u \geq 1$ với mọi $e \geq u \geq \dfrac{1}{e}$.

Ta có $g'(u) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{u-1}{u^2}$, $g'(u) = 0$ khi $u = 1$.

u	$\dfrac{1}{e}$		1		e
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$	$e - 1$	↘	1	↗	$\dfrac{1}{e} + 1$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(u) \geq 1$ với mọi $u \in \left[\dfrac{1}{e}; e\right]$.

② Nếu $-1 > -\ln(\ln a) \Leftrightarrow e^e < a$ thì ta có bảng biến thiên

t	-1		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\dfrac{1}{a} + 1$	↗	$a - 1$

Để bất phương trình (1) đúng thì $\dfrac{1}{a} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 0$. Do đó $a > e^e$.

③ Nếu $1 < -\ln(\ln a) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{e}} > a$ thì ta có bảng biến thiên

t	-1		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\dfrac{1}{a} + 1$	↘	$a - 1$

Để bất phương trình (1) đúng thì $a - 1 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$ (trái với $a < e^{\frac{1}{e}}$)

Vậy để bất phương trình ban đầu đúng với mọi x thì $a \geq e^{\frac{1}{e}}$. □

DẠNG 6. Phương pháp đặt ẩn phụ trong bất phương trình logarit

Phương pháp giải. Tìm một $\log_a f(x)$ chung, đặt làm ẩn phụ t để đưa bất phương trình về bất phương trình theo ẩn t, giải bất phương trình này tìm t sau đó tìm x.

Chú ý: Nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_{\frac{1}{a}} x = -t$, $\log_{a^2} x = \dfrac{1}{2}t$, $\log_a^2 x = (\log_a x)^2 = t^2$, $\log_x a = \dfrac{1}{t}$.

Ví dụ 12. Giải bất phương trình $\log_2^2 x + \log_2 4x - 4 \geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_2^2 x + \log_2 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Bất phương trình trở thành $t^2 + t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -2 \vee t \geq 1$.

Do đó ta có: $\log_2 x \leq -2 \vee \log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq \dfrac{1}{4} \vee x \geq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(0; \dfrac{1}{4}\right] \cup [2; +\infty)$. □

Ví dụ 13. Giải bất phương trình: $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_{0,2} x$. Bất phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 3$.

Do đó ta có $2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{125} < x < \dfrac{1}{25}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\dfrac{1}{125}; \dfrac{1}{25}\right)$. □

Ví dụ 14. Giải bất phương trình: $2\log_2^3 x + 5\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $t > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Bất phương trình trở thành: $2t^3 + 5t^2 + t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq -1 \vee t \geq \dfrac{1}{2}$.

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} -2 \leq \log_2 x \leq -1 \\ \log_2 x \geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$. □

Ví dụ 15. Giải bất phương trình: $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 3 \end{cases}$

Ta có: $\log_x 3-\log_{\frac{x}{3}} 3<0 \Leftrightarrow \log_x 3-\dfrac{1}{\log_3 \dfrac{x}{3}}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_3^x}-\dfrac{1}{\log_3 x-\log_3 x}<0.$

Đặt $t=\log_3 x$.

Bất phương trình trở thành: $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t-1}<0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{t(t-1)}<0 \Leftrightarrow t(t-1)>0 \Leftrightarrow t<0 \vee t>1$

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \log_3 x<0 \\ \log_3 x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;1)\cup(3;+\infty)$. □

Ví dụ 16. Giải bất phương trình: $\log_2^2(2+x-x^2)+3\log_{\frac{1}{2}}(2+x-x^2)+2\leq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $2+x-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<2$.

Đặt $t=\log_2(2+x-x^2)$. Bất phương trình trở thành: $t^2-3t+2\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq t\leq 2$.

Do đó ta có: $1\leq \log(2+x-x^2)\leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+x\geq 0 \\ -x^2+x-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[0;1]$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Giải bất phương trình $\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\geq 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$.

Ta có: $\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\geq 5 \Leftrightarrow \log_2^2(2-x)-8\cdot\log_{2^{-2}}(2-x)\geq 5$

$\Leftrightarrow \log_2^2(2-x)+4\log_2(2-x)-5\geq 0$.

Đặt $t=\log_2(2-x)$. Bất phương trình trở thành: $t^2+4t-5\geq 0 \Leftrightarrow t\leq -5 \vee t\geq 1$.

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \log_2(2-x)\leq -5 \\ \log_2(2-x)\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<2-x\leq 2^{-5} \\ 2-x\geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{63}{32}\leq x<2 \\ x\leq 0 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{63}{32};2\right)$. □

Bài 27. Giải bất phương trình: $\log_5^2(6-x)+2\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6-x)+\log_3 27\geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $6-x>0 \Leftrightarrow x<6$.

Ta có: $\log_5^2(6-x)+2\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6-x)+\log_3 27 \geq 0 \Leftrightarrow \log_5^2(6-x)+2\log_{5^{-\frac{1}{2}}}(6-x)+3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(6-x)-4\log_5(6-x)+3 \geq 0$.

Đặt $t=\log_5(6-x)$. Ta có: $t^2-4t+3 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0 \vee t \geq 3$.

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \log_5(6-x) \leq 1 \\ \log_5(6-x) \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<6-x \leq 5 \\ 6-x \geq 5^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq x<6 \\ x \leq -119 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(-\infty;-119) \cup [1;6)$. □

Bài 28. Giải bất phương trình: $\log_{2x} 64+\log_{x^2} 13 \geq 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có: $\log_{2x} 64+\log_{x^2} 16 \geq 3 \Leftrightarrow \log_{2x} 2^6+\log_{x^2} 2^4 \geq 3 \Leftrightarrow 6\log_{2x} 2+\dfrac{1}{2}\cdot 4\log_x x \geq 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{6}{\log_2 2x}+\dfrac{2}{\log_2 x} \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{6}{1+\log_2 x}+\dfrac{2}{\log_2 x} \geq 3$

Đặt $t=\log_2 x$, bất phương trình trở thành: $\dfrac{6}{1+t}+\dfrac{2}{t} \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{6t+2(1+t)}{(1+t)t}-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8t+2-3t(t+1)}{(1+t)t} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3t^2+5t+2}{(1+t)t} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t \leq -\dfrac{1}{3} \\ 0<t \leq 2 \end{array}\right.$

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} -1<\log_2 x \leq -\dfrac{1}{3} \\ 0<\log_2 x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ 1<x \leq 4 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup (1;4]$. □

Bài 29. Giải bất phương trình: $3\log_x 4+2\log_{4x} 4+3\log_{16x} 4 \leq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq \dfrac{1}{4} \\ x\neq \dfrac{1}{16} \end{cases}$

Ta có: $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\log_4 x}+\dfrac{2}{1+\log_4 x}+\dfrac{3}{2+\log_4 x}\leq 0$

Đặt $t=\log_4 x$, bất phương trình trở thành: $\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{3}{2+t}\leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1+t)(2+t)+2t(2+t)+3t(1+t)}{t(t+1)(2+t)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{8t^2+16t+6}{t(t+1)(t+2)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-2 \\ -\dfrac{3}{2}\leq t<-1 \\ -\dfrac{1}{2}\leq t<0 \end{array}\right.$$

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \log_4 x<-2 \\ -\dfrac{3}{2}\leq \log_4 x<-1 \\ -\dfrac{1}{2}\leq \log_4 x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{16} \\ \dfrac{1}{8}\leq x<\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}\leq x<1 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(0;\dfrac{1}{16}\right)\cup\left[\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{4}\right)\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right)$. □

Bài 30. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{x}{3}}(3x)+\log_3^2 x<11$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 3 \end{cases}$

Ta có: $\log_{\frac{x}{3}}(3x)+\log_3^2 x<11 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{3}}x+\log_3^2 x-11<0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_3\frac{x}{3}}+\frac{1}{\log_x\frac{x}{3}}+\log_3^2 x-11<0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x-1}+\frac{1}{1-\log_3 x}+\log_3^2 x-11<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x-1}+\frac{1}{1-\dfrac{1}{\log_3 x}}+\log_3^2 x-11<0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x-1}+\frac{\log_3 x}{\log_3 x-1}+\log_3^2 x-11<0$$

Đặt $t=\log_3 x$. Ta có: $\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{t}{t-1}+t^2-11<0 \Leftrightarrow \dfrac{1+t+(t^2-11)(t-1)}{t-1}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{t^3-t^2-10t+12}{t-1}<0 \Leftrightarrow \frac{(t-3)(t^2+2t-4)}{t-1}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{5}<t<1 \\ -1+\sqrt{5}<t<3 \end{array}\right.$$

Do đó ta có: $\left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{5}<\log_3 x<1 \\ -1+\sqrt{5}<\log_3 x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{-1-\sqrt{5}}<x<3 \\ 3^{-1+\sqrt{5}}<x<27 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(3^{-1-\sqrt{5}};3)\cup(3^{-1+\sqrt{5}};27)$. □

DẠNG 7. Phương pháp sử dụng hàm số và bất đẳng thức

Phương pháp giải.

- ☑ Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
- ☑ Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovski,... để đánh giá.

Ví dụ 17. Giải bất phương trình $x+\log_2 x>1$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $x>0$. Khi đó xét hàm số $f(x)=x+\log_2 x$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(x)=1+\dfrac{1}{x\ln 2}>0$ với mọi $x>0$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác $f(1)=1$ nên

$$x+\log_2 x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow x>1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(1:+\infty)$. □

Ví dụ 18. Giải bất phương trình $3^x+4^x>5^x$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x>1$. Đặt $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$, ta có

$$f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(2)=1$ nên

$$3^x+4^x>5^x \Leftrightarrow f(x)>f(2) \Leftrightarrow x<2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(0;2)$. □

Ví dụ 19. Giải bất phương trình $\log_2(x^2+1)+2\log_{x^2+1}(2x^2+1)+4\log_{2x^2+1}2\geq 6$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $x \neq 0$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số thực dương $\log_2(x^2+1)$, $2\log_{x^2+1}(2x^2+1)$, $4\log_{2x^2+1}2$ ta có

$$\begin{aligned} &\log_2(x^2+1)+2\log_{x^2+1}\left(2x^2+1\right)+4\log_{2x^2+1}2 \\ \geq\ & 3\sqrt[3]{8\log_2(x^2+1)\cdot\log_{x^2+1}(2x^2+1)\cdot\log_{2x^2+1}2} \\ =\ & 6. \end{aligned}$$

Do đó bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. □

Ví dụ 20. Giải bất phương trình $3^{x^2-1}+(x^2-1)\,3^{x+1}\geq 1$.

Lời giải.

Nếu $x^2-1<0$ hay $-1<x<1$, thì

$$\begin{cases} 3^{x^2-1}<1 \\ \left(x^2-1\right)3^{x+1}<0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x^2-1}+\left(x^2-1\right)\right)3^{x+1}<1.$$

Do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm. Suy ra $x^2-1\geq 0$ hay $|x|\geq 1$. Suy ra

$$\begin{cases} 3^{x^2-1}\geq 1 \\ \left(x^2-1\right)3^{x+1}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x^2-1}+\left(x^2-1\right)3^{x+1}\geq 1,\ \forall |x|\geq 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 31. Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{6}\right)^x+2\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\left(\frac{1}{6}\right)^x+2\left(\frac{1}{3}\right)^x+3\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ta có $f'(x)=\left(\frac{1}{6}\right)^x\ln\frac{1}{6}+2\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}+3\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(2)=1$ nên phương trình đã cho tương đương

$$f(x)<f(2)\Leftrightarrow x>2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(2;+\infty)$. □

Bài 32. Giải bất phương trình $\log_7 x<\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $x>0$. Đặt $t=\log_7 x$ suy ra $x=7^t$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$t<\log_3\left(\sqrt{7^t}+2\right)\Leftrightarrow\sqrt{7^t}+2>3^t\Leftrightarrow\left(\sqrt{7}\right)^t\left[\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^t-1\right]<2. \quad (1)$$

Ta xét các khả năng sau

☑ Nếu $t \le 0$ thì do $\dfrac{3}{\sqrt{7}} > 1$ nên $\left(\dfrac{3}{\sqrt{7}}\right) \le 1$, suy ra $\left(\sqrt{7}\right)^t \left[\left(\dfrac{3}{\sqrt{7}}\right)^t - 1\right] \le 0$. Do đó (1) luôn đúng khi $t \le 0$.

☑ Nếu $t > 0$ thì $f(t) = \left(\sqrt{7}\right)^t \left[\left(\dfrac{3}{\sqrt{7}}\right)^t - 1\right]$ có

$$f'(t) = \left(\sqrt{7}\right)^t \ln\sqrt{7} \left[\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^t - 1\right] + \left(\sqrt{7}\right)^t \left[\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^t - 1\right] \ln\frac{3}{\sqrt{7}} > 0, \ \forall t > 0.$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $f(2) = 2$ nên

$$\left(\sqrt{7}\right)^t \left[\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^t - 1\right] < 2 \Leftrightarrow f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < t < 2.$$

Kết hợp hai khả năng trên ta được $\log_7 x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 49$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0;49)$. □

Bài 33. Giải bất phương trình $\log_2\left(\sqrt{x^2-5x+5}+1\right) + \log_3\left(x^2-5x+7\right) \le 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2-5x+5} \ge 0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$f(t) = \log_2(t+1) + \log_3\left(t^2+2\right) \le 2.$$

Do $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)\ln 2} + \dfrac{2t}{(t^2+2)\ln 3} > 0, \ \forall t \ge 0$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. Mà $f(1) = 2$ nên

$$f(t) \le 2 \Leftrightarrow f(t) \le f(1) \Leftrightarrow t \le 1.$$

Do đó

$$\sqrt{x^2-5x+5} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+5 \ge 0 \\ x^2-5x+5 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x \le \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \le x \le 4 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[1;\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{5}}{2};4\right]$. □

Bài 34. Giải bất phương trình $2^{-|x-2|}\log_2\left(-x^2+4x-2\right) \ge 1$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $-x^2+4x-2 > 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$. Đặt $t = |x-2|$, $0 \le < 2$, bất phương trình đã cho trở thành

$$f(t) = \log_2(2-t) - 2^t \ge 0. \tag{1}$$

Do $f'(t) = -\dfrac{1}{(2-t)\ln 2} - 2^t \ln 2 < 0, \ \forall 0 \le t < 2$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $[0;2)$. Mà $f(0) = 0$ nên (1) $\Leftrightarrow t = 0$. Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Bài 35. Giải bất phương trình $3^{\sqrt{x+4}}+2^{\sqrt{2x+4}}>13$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $\begin{cases}x+4\geq 0\\2x+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq -2$. Xét hàm số $f(x)=3^{\sqrt{x+4}}+2^{\sqrt{2x+4}}$, với $x\geq -2$.

Ta có

$$f'(x)=\frac{3^{\sqrt{x+4}}\ln 3}{2\sqrt{x+4}}+\frac{2^{\sqrt{2x+4}}\ln 2}{\sqrt{2x+4}}>0,\ \forall x\geq -2.$$

Do đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(-2;+\infty)$. Mà $f(0)=13$, suy ra

$$3^{\sqrt{x+4}}+2^{\sqrt{2x+4}}>13\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(0;+\infty)$. □

Bài 36. Giải bất phương trình $\dfrac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}\geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình $x\neq\dfrac{1}{2}$. Đặt $f(x)=3^{2-x}+3-2x$ và $g(x)=4^x-2$. Ta có

$$f'(x)=-3^{2-x}\ln 3-2<0,\ \forall x\in\mathbb{R},\qquad g'(x)=4^2\ln 4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(2)=0$ và $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ nên ta có

$$\frac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geq 0\\g(x)>0\end{cases}\\\begin{cases}f(x)\leq 0\\g(x)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\x<\dfrac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}x\leq 2\\x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x\leq 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right]$. □

Bài 37. Cho bất phương trình

$$2^{\left(m^2-1\right)x}-2^{x-4m+3}<\left(2-m^2\right)x+3-4m.$$

① Giải bất phương trình với $m=2$.

② Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$2^{\left(m^2-1\right)x}+\left(m^2-1\right)x<2^{x-4m+3}+x-4m+3.$$

Đặt $f(t)=2^t+t$. Ta có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned}&2^{\left(m^2-1\right)x}+\left(m^2-1\right)x<2^{x-4m+3}+x-4m+3\\ \Leftrightarrow\ &f\left[\left(m^2-1\right)x\right]<f(x-4m+3)\\ \Leftrightarrow\ &\left(m^2-1\right)x<x-4m+3\\ \Leftrightarrow\ &\left(m^2-2\right)x<-4m+3.\end{aligned}\tag{1}$$

① Với $m=2$, bất phương trình trở thành $2x<-5\Leftrightarrow x<-\dfrac{5}{2}$.

② Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình (1) vô nghiệm hay

$$\begin{cases}m^2-2=0\\ -4m+3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}.$$

Vậy $m=\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 38. Giải và biện luận bất phương trình $x^2-(m+3)x+3m<(m-x)\log_2 x$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình $x>0$. Khi đó bất phương trình tương đương

$$(x-m)\left(x-3+\log_2 x\right)<0.$$

Đặt $f(x)=x-3+\log_2 x$, với $x>0$. Dễ thấy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f(2)=0$ nên

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x-m>0\\ f(x)<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>m\\ x<2\end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases}x-m<0\\ f(x)>0\end{cases}\right.\quad\left.\begin{cases}x<m\\ x>2\end{cases}\right.$$

□

Kết hợp với điều kiện ta có

- ☑ Nếu $m\le 0$ thì bất phương trình có tập nghiệm là $(0;2)$.
- ☑ Nếu $0<m<2$ thì bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(m;2)$.
- ☑ Nếu $m=2$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- ☑ Nếu $m>2$ bất phương trình có tập nghiệm là $(2;m)$.

Bài 39. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình

$$2^{(m+1)x+4}-2^{m^2-m-2}>\ln\left(m^2-m-2\right)-\ln\left[(m+1)x+4\right]$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$.

Lời giải.

Điề kiện của bất phương trình $\begin{cases} m^2-m-2>0 \\ (m+1)x+4>0 \end{cases}$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương

$$2^{(m+1)x+4}+\ln\left[(m+1)x+4\right] > 2^{m^2-m-2}+\ln\left(m^2-m-2\right). \tag{1}$$

Đặt $f(x)=2^t+\ln t$. Dễ thấy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow & (m+1)x+4>m^2-m-2 \\ \Leftrightarrow & g(x)=(m+1)x-m^2+m+6>0. \end{aligned} \tag{2}$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0,1]$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$ hay

$$\begin{cases} m^2-m-2>0 \\ g(x)>0,\ \forall x\in[0;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ \min\limits_{[0;1]} g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>2 \\ g(0)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ g(1)>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>2 \\ m^2-m-6<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ m^2-2m-7<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{8}<m<-1 \\ 2<m<3 \end{array}\right..$$

Vậy tập các giá trị cần tìm của m là $\left(1-\sqrt{8};-1\right)\cup(2;3)$. □

Bài 40. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình

$$2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x} \geq m\cdot 3^{\sin^2 x}$$

có nghiệm.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x-\sin^2 x} \geq m \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3^{1-2\sin^2 x} \geq m \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} \geq m. \end{aligned}$$

Đặt $t=\sin^2 x$, $0\leq t\leq 1$, khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3\left(\frac{1}{9}\right)^t \geq m.$$

Dễ thấy $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ nên $\max\limits_{[0;1]} f(t) = f(0) = 4$. Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{[0;1]} f(t) \Leftrightarrow m \le 4$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$m \cdot 9^x - 3^x + 1 \ge 0$$

nghiệm đúng với mọi x.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$mt^2 - t + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{t^2} \le m. \tag{1}$$

Phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi (1) nghiệm đúng với mọi $t > 0$.
Đặt $f(t) = \dfrac{t-1}{t^2}$, $t > 0$. Ta có $f'(t) = \dfrac{2-t}{t^3}$, suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{1}{4}$	↗	

Từ đây ta thấy bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t >$) khi và chỉ khi $m \ge \dfrac{1}{4}$.
Vậy $m \ge \dfrac{1}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4\left(-x^2-2x+3\right)} < m$$

nghiệm đúng với mọi $x \in (-2;0)$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình $-x^2 - 2x + 3 > 0$ hay $-3 < x < 1$.
Xét hàm số $f(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\log_4\left(-x^2-2x+3\right)}$, $-3 < x < 1$. Ta có

$$f'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4\left(-x^2-2x+3\right)} \cdot \frac{-2x-2}{(-x^2-2x+3)\ln 4} \cdot \ln\frac{3}{4}.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	-3		-2		-1		0		1
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 3}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 3}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-2, 0)$ khi và chỉ khi $m \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 3}$. □

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

A. $\left[-\frac{1}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải.

ĐK: $x>-\frac{1}{3}$

$$\log_2(3x+1)<2 \Leftrightarrow 3x+1<4 \Leftrightarrow x<1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{3}<x<1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3-x)<2$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$.

$$\log_2(3-x)<2 \Leftrightarrow 3-x<4 \Leftrightarrow x>-1.$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S=(-1;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-x+3}$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-x+3} \Leftrightarrow x-1<-x+3 \Leftrightarrow x<2.$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x-3)>1$.

A. $S=(1;+\infty)$. **B.** $S=\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(3;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $2x-3>3$ hay $x>3$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\log x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

B. $\log_5 x\leq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 1$.

C. $\log_{\frac{1}{5}} a>\log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow a>b>0$.

D. $\log_{\frac{1}{5}} a=\log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow a=b>0$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{5}} a>\log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow b>a>0$ (do $\frac{1}{5}<1$).

Chọn đáp án C □

Câu 6. Nghiệm của bất phương trình $3^{x-2}\leq 243$ là

A. $x<7$. **B.** $x\leq 7$. **C.** $x\geq 7$. **D.** $2\leq x\leq 7$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-2} \leq 243 \Leftrightarrow 3^{x-2} \leq 3^5 \Leftrightarrow x-2 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 7$

Chọn đáp án B □

Câu 7. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

A. $x > -\dfrac{2}{3}$. **B.** $x < \dfrac{2}{3}$. **C.** $x > \dfrac{2}{3}$. **D.** $x > \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1 < 3-x \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot 5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + x\log_2 5 > 0$. **B.** $f(x) > 1 \Leftrightarrow x - x^2\log_2 5 < 0$.

C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 - x\log_5 2 > 0$. **D.** $f(x) > 1 \Leftrightarrow -x\ln 2 + x^2 \ln 5 > 0$.

Lời giải.

Dễ thấy $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f(x) > 1$ nhưng không là nghiệm của bất phương trình $x^2 + x\log_2 5 > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 8$ là.

A. $S = (-\infty; -3)$. **B.** $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $S = (-3; +\infty)$. **D.** $S = \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 8 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x > -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 2x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

A. $(-3; 1)$. **B.** $\left(1; \dfrac{6}{5}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-5x > 0 \\ 3x-2 > 6-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{6}{5} \\ 8x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{6}{5} \\ x > 1. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > \log_2(8-x)$ là

A. $(8; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 4)$. **C.** $(4; 8)$. **D.** $(0; 4)$.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x < 8$.

Do $2 > 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$x > 8 - x \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$.

Kết hợp với điều kiện $0 < x < 8$ ta được tập nghiệm của bất phương trình là $(4; 8)$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

A. $x > -\dfrac{2}{3}$. **B.** $x > \dfrac{3}{2}$. **C.** $x > \dfrac{2}{3}$. **D.** $x < \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x + 1 > 3 - x \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tìm tập nghiệm $\mathcal{S}$ của bất phương trình $3^{2x} > 3^{x+4}$.

A. $\mathcal{S} = (0; 4)$. **B.** $\mathcal{S} = (-\infty; 4)$. **C.** $\mathcal{S} = (4; +\infty)$. **D.** $\mathcal{S} = (-4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x} > 3^{x+4} \Leftrightarrow 2x > x + 4 \Leftrightarrow x > 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Xét phương trình: $a^x > b\,(1)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $0 < a < 1, b > 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = (-\infty; \log_b a)$.

B. Nếu $a > 1, b \leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = \mathbb{R}$.

C. Nếu $0 < a < 1, b \leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = \mathbb{R}$.

D. Nếu $a > 1, b > 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = (\log_a b; +\infty)$.

Lời giải.

Nếu $0 < a < 1, b > 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = (-\infty; \log_a b)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < 0$ là

A. $(0; 1)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x < 1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $0 < x < 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tập nghiệm bất phương trình $(0,5)^3 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$ là

A. $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $(0,5)^3 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1$.

Vậy tập nghiệm là $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{10} - 3\right)^x > \sqrt{10} + 3$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $x < 1$. **B.** $x > 1$. **C.** $x < -1$. **D.** $x > -1$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{10}+3=\left(\sqrt{10}-3\right)^{-1}$, vậy bất phương trình trên trở thành

$$\left(\sqrt{10}-3\right)^{x}>\left(\sqrt{10}-3\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x<-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}} f(x)>\log_{\frac{1}{5}} g(x)$ tương đương với điều nào sau đây?

A. $f(x)<g(x)$. **B.** $g(x)>f(x)\geq 0$. **C.** $g(x)>f(x)>0$. **D.** $f(x)>g(x)$.

Lời giải.

Do cơ số là $\dfrac{1}{5}<1$ nên ta phải đổi chiều bất phương trình, đồng thời chú ý đến điều kiện xác định.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tập nghiệm của phương trình $2^{x+2}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-x}$ là

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;1)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&2^{x+2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}\\ \Leftrightarrow\ &2^{x+2}<2^{2x}\\ \Leftrightarrow\ &2x>x+2\Leftrightarrow x>2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{2}}(9-2x)$ là

A. $S=(3;4)$. **B.** $S=\left(3;\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $S=(3;4]$. **D.** $S=\left[4;\dfrac{9}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{2}}(9-2x)\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\leq 9-2x\\ x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow 3<x\leq 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{e}{\pi}}(x+1)<\log_{\frac{e}{\pi}}(3x-1)$.

A. $S=(-\infty;1)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **D.** $S=(-1;3)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>\dfrac{1}{3}$.

Vì cơ số $0<\dfrac{e}{\pi}<1$ nên $\log_{\frac{e}{\pi}}(x+1)<\log_{\frac{e}{\pi}}(3x-1)\Leftrightarrow x+1>3x-1\Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Bất phương trình $3^x<9$ có nghiệm là

A. $x<2$. **B.** $x<3$. **C.** $0<x<2$. **D.** $0<x<3$.

Lời giải.

Ta có $3^x<9\Leftrightarrow x<2$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x > 9$ là

A. $(2; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

A. $(2; +\infty)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 2x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} > 0$ là

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x > -1$. **C.** $x > 1$. **D.** $x > 0$.

Lời giải.

Ta có $2^{x+1} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x + 1) \leq 1$ là

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ là

A. $(0; 1)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$. **B.** $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$. **C.** $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right]$. **D.** $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \leq 2 - x \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2) \geqslant 2$.

A. $(-\infty;11)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $[11;+\infty)$. **D.** $(11;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Vì $3>1$ nên $\log_3(x-2) \geqslant 2 \Leftrightarrow x-2 \geqslant 3^2 \Leftrightarrow x \geqslant 11$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[11;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+6} \Leftrightarrow 3x<2x+6 \Leftrightarrow x<6$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

A. $x>-4$. **B.** $x \geq -4$. **C.** $x \leq -4$. **D.** $x<-4$.

Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{2}>1$ nên bất phương trình tương đương $x-1 \leq 2x+3 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^{x^2} < 2^{6-x}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} < 2^{6-x} \Leftrightarrow x^2 < 6-x \Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$. **B.** $\log a > \log b \Leftrightarrow a>b>0$.

C. $\log a < \log b \Leftrightarrow 0<a<b$. **D.** $\ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Lời giải.

Mệnh đề $\ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<1$ sai vì cơ số e là cơ số lớn hơn 1 nên $\ln x<1 \Leftrightarrow x<\mathrm{e}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \Leftrightarrow x<\log_{\frac{1}{3}} 9 \Leftrightarrow x<-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x+2) \leq 0$ là

A. $S=(-\infty;-1]$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(-2;-1]$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\log_2(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow 0<x+2 \leq 1 \Leftrightarrow -2<x \leq -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x} \leq 3^{x+2}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải.

$3^{3x} \leq 3^{x+2} \Leftrightarrow 3x \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

A. $x > 3$. **B.** $\dfrac{1}{3} < x < 3$. **C.** $x < 3$. **D.** $x > \dfrac{10}{3}$.

Câu 39. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x > 2^{x+8}$ là

A. $[8;+\infty)$. **B.** $(-\infty;8)$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(8;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $4^x > 2^{x+8} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x+8} \Leftrightarrow 2x > x+8 \Leftrightarrow x > 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(0;16)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-3) \geq -1$ là

A. $(-\infty;5)$. **B.** $[5;+\infty)$. **C.** $(3;5]$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$0 < x-3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 3 < x \leq 5.$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$ là

A. $S = (2;+\infty)$. **B.** $S = \left(\dfrac{5}{3};3\right)$. **C.** $S = (-\infty;3)$. **D.** $S = \left(\dfrac{3}{5};3\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $3x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$. Khi đó

$$\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1) \Leftrightarrow 3x-5 < x+1 \Leftrightarrow x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\dfrac{5}{3};3\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+1) < 0$ là

A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;9)$. **C.** $(-1;9)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\log(x+1)<0 \Leftrightarrow 0<x+1<1 \Leftrightarrow -1<x<0$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 44. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}>3^{x+2}$.
A. $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2}\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{9}{2}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{2}\right)$.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}$ là
A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-5;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải.

$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}\Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}}<5^{x+3}\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{3}<x+3\Leftrightarrow x>-5$.
Chọn đáp án B □

Câu 46. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geqslant 2$ là
A. $3\leqslant x\leqslant\dfrac{13}{4}$. **B.** $3<x\leqslant\dfrac{13}{4}$. **C.** $x\leqslant\dfrac{13}{4}$. **D.** $x\geqslant\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geqslant 2\Leftrightarrow 0<x-3\leq\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 3<x\leq\dfrac{13}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\geq 2$.
A. $(-\infty;-1]$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\geq 2\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\geq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow x\leq -1\Rightarrow$ tập nghiệm $S=(-\infty;-1]$.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x}\leq\left(\sqrt{2}\right)^3$ có tập nghiệm là
A. $(-2;1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $[-2;1]$. **D.** $[-1;3]$.

Lời giải.

• Ta có $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x}\leq\left(\sqrt{2}\right)^3\Leftrightarrow x^2-2x\leq 3\Leftrightarrow x^2-2x-3\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}}2x<\log_{\frac{e}{3}}(9-x)$.
A. $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;3)$. **C.** $S=(3;9)$. **D.** $S=(0;3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x) \\ \Leftrightarrow\ & 0 < 9-x < 2x \\ \Leftrightarrow\ & 3 < x < 9. \end{aligned}$$

Vậy $S = (3;9)$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1-\log_{\frac{1}{2}} x}{\sqrt{2-6x}} < 0$ là

A. $\left(0;\dfrac{1}{6}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < x < \dfrac{1}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $1-\log_{\frac{1}{2}} x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện, suy ra bất phương trình có nghiệm $0 < x < \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1}$.

A. $S = (-\infty;5)$. **B.** $S = (-1;2)$. **C.** $S = [5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $2x-4 < x+1 \Leftrightarrow x < 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$. **B.** $\log x < 0 \Leftrightarrow x < 10$.

C. $\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a > b > 0$. **D.** $\log_2 a = \log_2 b \Leftrightarrow a = b > 0$.

Lời giải.

☑ Ta có $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^0 = 1$ do đó khẳng định $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ là đúng.

☑ Ta có $\log x < 0 \Leftrightarrow x < 10^0 \Leftrightarrow x < 1$ do đó khẳng định $\log x < 0 \Leftrightarrow x < 10$ là sai.

☑ Ta có $\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > b > 0$ do đó khẳng định $\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a > b > 0$ là đúng.

☑ Ta có $\log_2 a = \log_2 b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b > 0$ do đó khẳng định $\log_2 a = \log_2 b \Leftrightarrow a = b > 0$ là đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 2x-1 > \log_3 27 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Tập hợp nào sau đây là tập hợp nghiệm của bất phương trình $4^x < 2^{x+1} + 3$?

A. $(\log_2 3; 5)$. **B.** $(-\infty; \log_2 3)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(2; 4)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 < 0$. Đặt $t = 2^x$, $t > 0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 3.$$

Từ đó ta được $2^x < 3 \Leftrightarrow x < \log_2 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Giải bất phương trình $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9}$.

A. $x > 0$. **B.** $x < 0$. **C.** $x < 4$. **D.** $x \geq -4$.

Lời giải.

Ta có $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \geq 3^{-2} \Leftrightarrow x + 2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Giải bất phương trình $\log_2(3x - 1) > 3$.

A. $x > 3$. **B.** $\dfrac{1}{3} < x < 3$. **C.** $x < 3$. **D.** $x > \dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$.

Ta có $\log_2(3x - 1) > 3 \Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$ (thỏa mãn).

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0; 6)$. **B.** $(-\infty; 6)$. **C.** $(0; 64)$. **D.** $(6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x - 1) \leq \log x$ là

A. $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$. **B.** $(-\infty; 1]$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$. **D.** $(0; 1]$.

Lời giải.

$\log(2x - 1) \leq \log x \Leftrightarrow 0 < 2x - 1 \leq x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \leq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Tập nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 2^{2x-1}$ là

A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^{2x-1} \Leftrightarrow -x > 2x - 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x > -2$.

A. $S = (4; +\infty)$. **B.** $S = [0; 4)$. **C.** $S = (-\infty; 4)$. **D.** $S = (0; 4)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} x > -2 \Leftrightarrow -\log_2 x > -2 \Leftrightarrow \log_2 x < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = (0; 4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(3x - 2) \geq 0$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; , 1\right]$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{0,3}(3x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 3x - 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \leq 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{2}{3}; 1\right]$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

A. $S = (-\infty; 7]$. **B.** $S = [7; +\infty)$. **C.** $S = (3; 7]$. **D.** $S = [3; 7]$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 3$.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 7.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $S = (3; 7]$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$.

A. $S = (2; +\infty)$. **B.** $S = (-1; 2)$. **C.** $S = (-\infty; 2)$. **D.** $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) \Leftrightarrow x + 1 > 2x - 1 \Leftrightarrow x < 2.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$.

A. $S = (-3; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 3)$. **C.** $S = (-\infty; -3)$. **D.** $S = (3; +\infty)$.

Lời giải.

Vì cơ số $\dfrac{1}{2}<1$ nên $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>8\Leftrightarrow x<\log_{\frac{1}{2}}8\Leftrightarrow x<-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}<\dfrac{1}{4}$.

A. $S=[1;2]$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=(1;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}<\frac{1}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ \Leftrightarrow\ &-x^2+3x>2\\ \Leftrightarrow\ &x^2-3x+2<0\\ \Leftrightarrow\ &1<x<2.\end{aligned}$$

Vậy $S=(1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\le 8^{x-2}$ là

A. $[8;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;8]$.

Lời giải.

Ta có $4^{x+1}\le 8^{x-2}\Leftrightarrow 2^{2x+2}\le 2^{3x-6}\Leftrightarrow 2x+2\le 3x-6\Leftrightarrow x\ge 8$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[8;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2<0$.

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=(-1;0)$. **C.** $S=(-1;1)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x^2<0\Leftrightarrow 0<x^2<1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ -1<x<1\end{cases}$. Vậy $S=(-1;1)\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1)>1$ là

A. $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\log_{0,5}(x-1)>1\Leftrightarrow 0<x-1<0{,}5\Leftrightarrow 1<x<\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 69. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x>1$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $0<\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}<1$ nên $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x>1\Leftrightarrow x<0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Tập nghiệm $\mathscr{S}$ của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

A. $(1;9)$. **B.** $(-\infty;9)$. **C.** $(-\infty;10)$. **D.** $(1;10)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x>1$.

Ta có $\log_2(x-1)<3 \Leftrightarrow x-1<2^3 \Leftrightarrow x<9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathscr{S}=(1;9)$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq \log_{\frac{1}{2}}4$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq \log_{\frac{1}{2}}4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-3\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\leq 7. \end{cases}$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;7]$.

Từ đó suy ra bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Tập nghiệm cuả bất phương trình $2^{x^2+2x}\leq 8$ là

A. $(-\infty;-3]$. **B.** $[-3;1]$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;1]$.

Lời giải.

Bất phương trình $2^{x^2+2x}\leq 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x}\leq 2^3 \Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-3;1]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-3;1]$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x<9$ là

A. $S=(-\infty;2]$. **B.** $S=(2;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=\{2\}$.

Lời giải.

Ta có $3^x<9 \Leftrightarrow x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x^2}>\dfrac{81}{256}$ là

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2}>\frac{81}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2}>\left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow -x^2<4 \Leftrightarrow x^2+4>0 \text{ (nghiệm đúng } \forall x\in\mathbb{R}).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 4^{x+6}$ là

A. $(6;+\infty)$. **B.** $(12;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-12)$. **D.** $(-\infty;-6)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 4^{x+6} \Leftrightarrow 2^x > 2^{2x+12} \Leftrightarrow x > 2x+12 \Leftrightarrow x < -12$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S = (-\infty;-12)$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;2)$.

Do đó $a = 1$, $b = 2 \Rightarrow b - a = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 8$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A. $[0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x} > 3^{x+4}$.

A. $S = (-\infty;4)$. **B.** $S = (0;4)$. **C.** $S = (-4;+\infty)$. **D.** $S = (4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x} > 3^{x+4} \Leftrightarrow 2x > x + 4 \Leftrightarrow x > 4$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (4;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

A. $S = \frac{31}{6}$. **B.** $S = \frac{28}{15}$. **C.** $S = \frac{8}{3}$. **D.** $S = \frac{11}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{2}{3} < x < \frac{6}{5}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3 - 2x > 6 - 5x \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(1;\frac{6}{5}\right)$, khi đó $S = a + b = \frac{11}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x^2-4x+5)>1$ là?

A. $(-1;5)$. **B.** $(-\infty;-1)$.

C. $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log(x^2-4x+5)>1 \Leftrightarrow x^2-4x+5>10 \Leftrightarrow x^2-4x-5>0 \Leftrightarrow x<-1 \cup x>5.$$

Chọn đáp án D □

Câu 82. Bất phương trình $\log_2 x<3$ có nghiệm là

A. $(8;+\infty)$. **B.** $(-\infty;8)$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;6)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x<3 \Leftrightarrow 0<x<2^3 \Leftrightarrow 0<x<8$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)>0$.

A. $x>\dfrac{1}{2}$. **B.** $x<\dfrac{2}{3}$. **C.** $x>\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)>0 \Leftrightarrow 0<3x-1<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 2$.

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $[-1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 2 \Leftrightarrow 2^{-x} \geq 2 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;-1]$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $16-2^{2x+1} \geq 0$.

A. $S=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $S=\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 16-2^{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x+1} \leq 16 \\ \Leftrightarrow\ & 2x+1 \leq \log_2 16 \Leftrightarrow 2x+1 \leq 4 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1}<25$.

A. $S=(-1;+\infty)$. **B.** $S=(3;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(-\infty;3)$.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}<25\Leftrightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\Leftrightarrow x-1>-2\Leftrightarrow x>-1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\mathrm{e}^{2x}<\mathrm{e}^{x+6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải.

$$\mathrm{e}^{2x}<\mathrm{e}^{x+6}\Leftrightarrow 2x<x+6\Leftrightarrow x<6.$$

Chọn đáp án B □

Câu 88. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}$ là

A. $S=(0;3)$. **B.** $S=(-\infty;3)$. **C.** $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(3;+\infty)$.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}\Leftrightarrow 2x<x+3\Leftrightarrow x<3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 89. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}>2^{2x+1}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}>2^{2x+1}\Leftrightarrow -x>2x+1\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Tập nghiệm của bất phương trình $\pi^{3x}\geq\pi^{x-4}$ là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[-2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\pi^{3x}\geq\pi^{x-4}\Leftrightarrow 3x\geq x-4\Leftrightarrow x\geq -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^{x^2}<2^{6-x}$ là

A. $(-3;2)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải.

$2^{x^2}<2^{6-x}\Leftrightarrow x^2<6-x\Leftrightarrow x^2+x-6<0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Giải bất phương trình $\log_3(2x-3)>2$.

A. $3<x<6$. **B.** $\frac{3}{2}<x<6$. **C.** $x>\frac{3}{2}$. **D.** $x>6$.

Lời giải.

$$\log_3(2x-3)>2\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3>0\\2x-3>3^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x>6\end{cases}\Leftrightarrow x>6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 93. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x-1) < \log_2(x+5)$ là

A. $\left(\frac{1}{2};6\right)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $\left(-5;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ta có $\log_2(2x-1) < \log_2(x+5) \Leftrightarrow 2x-1 < x+5 \Leftrightarrow x < 6$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{2};6\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 94.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = \log_2 m$ có ba nghiệm phân biệt

A. 28. **B.** 29. **C.** 31. **D.** 30.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán tương đương với $1 < \log_2 m < 5 \Leftrightarrow 2 < m < 32 \Rightarrow m \in \{3,4,\ldots,31\}$. Vậy có 29 giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4 - 2^{2x-1} \geq 0$.

A. $S = \left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $S = \left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $S = \left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. **D.** $S = \left(0;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$4 - 2^{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} \leq 4 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Tập nghiệm của bất phương trình $\log 2x < \log(x+6)$ là

A. $(6;+\infty)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $[0;6)$. **D.** $(-\infty;6)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0;6)$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(0;16)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Tập nghiệm của bất phương trình: $2^{2x} < 2^{x^2-3}$ là

A. $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

C. $(1;3)$. **D.** $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $x^2 - 3 > 2x$ (cơ số $2 > 1$).

Hay $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\frac{1}{x}} < \dfrac{1}{4}$ là

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq 0$

Với điều kiện đó, $2^{\frac{1}{x}} < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} < 2^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < -2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x < 0$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. D	5. C	6. B	7. C	8. A	9. C	10. D
11. B	12. C	13. C	14. C	15. A	16. A	17. B	18. C	19. C	20. C
21. C	22. C	23. A	24. A	25. A	26. A	27. C	28. A	29. D	30. C
31. B	32. B	33. C	34. D	35. D	36. C	37. C	38. A	39. D	40. B
41. C	42. B	43. A	44. B	45. B	46. B	47. A	48. D	49. C	50. C
51. A	52. B	53. D	54. B	55. D	56. A	57. B	58. C	59. C	60. D
61. C	62. C	63. D	64. C	65. C	66. A	67. C	68. B	69. B	70. A
71. D	72. B	73. C	74. C	75. C	76. C	77. C	78. A	79. D	80. D
81. D	82. C	83. D	84. A	85. C	86. A	87. B	88. B	89. D	90. D
91. A	92. D	93. A	94. B	95. C	96. B	97. A	98. B	99. B	100. A

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của phương trình $(0,6)^{\frac{1}{x}} \leq (0,6)^{\frac{1}{6}}$

A. $S=(-\infty;6]$. **B.** $S=(0;6]$. **C.** $[0;6]$. **D.** $(-\infty;0)\cup[6;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $(0,6)^{\frac{1}{x}} \leq (0,6)^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 6$.

Tập nghiệm bất phương trình là $S=(0;6]$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(3;+\infty)$.

C. $(-1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

$$3^{x^2-2x}<27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x}<3^3 \Leftrightarrow x^2-2x<3 \Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow -1<x<3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \dfrac{25}{4}$.

A. $S=[1;+\infty)$. **B.** $S=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $S=(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow 1-3x \leq \log_{\frac{2}{5}}\dfrac{25}{4} \Leftrightarrow 1-3x\leq -2 \Leftrightarrow -3x\leq -3 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$ là

A. $\dfrac{5}{2}<x\leq 4$. **B.** $1<x\leq 4$. **C.** $\dfrac{5}{2}\leq x\leq 4$. **D.** $x\geq 4$.

Lời giải.

$$\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5\leq x-1 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ x>\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trinh là $\dfrac{5}{2}<x\leq 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>-3$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<9 \end{cases}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là S $=(1;9)$, suy ra có 7 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

A. $(-\infty;4)$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $\left[4;\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $1 < x < \dfrac{11}{2}$.

Bất phương trình tương đương $-\log_3(x-1)+\log_3(11-2x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{11-2x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{11-2x}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{12-3x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 4.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là

A. $[8;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;8]$.

Lời giải.

Ta có: $4^{x+1} \leq 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2 \leq 3x-6 \Leftrightarrow 8 \leq x$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[8;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1>0$.

A. $\left[\dfrac{13}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{13}{2}\right)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $\left(4;\dfrac{13}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1>0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}}(x-4)>-1 \Leftrightarrow 0<x-4<\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow 4<x<\dfrac{13}{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(4;\dfrac{13}{2}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho $\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^a > \left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a>b$. **B.** $a<b$. **C.** $a=b$. **D.** $a \geq b$.

Lời giải.

Phương pháp

Với $0<a<1 \Rightarrow a^m > a^m \Leftrightarrow n<m$

Cách giải:

Ta có: $0<\sqrt{2019}-\sqrt{2018}<1 \Rightarrow \left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^a > \left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right)^b \Leftrightarrow a<b$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$ là $S=(a;b)\cup(c;d)$ với a,b,c,d là các số thực. Khi đó $a+b+c+d$ bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Phương pháp

☑ Tìm điều kiện xác định của bất phương trình.

☑ Giải bất phương trình.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 2-x>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<2 \\ -\log_3(x+1) > \log_3(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ \log_3(2-x)+\log_3(x+1)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$$

$$a+b+c+d = -1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = 2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tập hợp tất cả các số thực x thỏa mãn $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

A. $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$. **D.** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \\ &\Leftrightarrow -4x \leqslant 2 - x \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A. $[3; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1]$. **C.** $[-1; 3]$. **D.** $(-1; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} && \geq \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} && \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x && \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 3 && \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = [-1; 3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$ là

A. $S = [0; 3]$. **B.** $S = [0; 2) \cup (3; 7]$. **C.** $S = [0; 1] \cup (2; 3]$. **D.** $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp: $\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b. \end{cases}$

Cách giải: Ta có:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right) \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right. \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1) \cup (2;3].$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0;1] \cup (2;3]$.

Chú ý: Học sinh cần chú ý Điều kiện xác định của hàm logarit.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Biết tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x}$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a+b$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 < 3 \cdot 2^x - 2 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là khoảng $(0;1)$. Suy ra $a+b=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với a là tham số, $a \neq 0$) là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $0 < \dfrac{1}{1+a^2} < 1$ nên $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(3;+\infty)$.

C. $(-1;3)$. **D.** $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

$3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2-2x < 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$.

A. $(1;8)$. **B.** $(-\infty;1) \cup (8;+\infty)$. **C.** $(8;+\infty)$. **D.** $(0;2) \cup (8;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0 \Leftrightarrow \log_2 x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty) \Leftrightarrow x \in (0;2) \cup (8;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0.2}(4x+11) < \log_{0.2}(x^2+6x+8)$ là

A. $S=(-2;4)$. **B.** $S=(-3;1)$. **C.** $S=(-2;1)$. **D.** $S=(-4;-2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_{0.2}(4x+11) < \log_{0.2}(x^2+6x+8)\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x^2+6x+8>0\\ 4x+11>x^2+6x+8 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x^2+6x+8>0\\ x^2+2x-3<0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x<-4 \vee x>-2\\ -3<x<1 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &-2<x<1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Bất phương trình $6\cdot 4^x - 13\cdot 6^x + 6\cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 6 > 0$.

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t\,(t>0)$. Ta được $6t^2-13t+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<\frac{2}{3}\\ t>\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1\\ x<-1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geq -4$.

A. $(-4;2)$. **B.** $[-6;4)$. **C.** $[-6;-4]\cup[2;4]$. **D.** $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Lời giải.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0\\ x^2+2x-8\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2\\ x^2+2x-24\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4 \text{ hoặc } x>2\\ -6\leq x\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6\leq x<-4\\ 2<x\leq 4 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-6;-4)\cup(2;4]$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

B. $\log_{\frac{1}{\pi}} x < \log_{\frac{1}{\pi}} y \Leftrightarrow x > y > 0$.

C. $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

D. $\log_4 x^2 > \log_2 y \Leftrightarrow x > y > 0$.

Lời giải.

Chọn $x = -4$, $y = 1$, $\log_4(-4)^2 > \log_2 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2 - 3x + 1) \leq 0$.

A. $S = \left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$.

B. $S = \left(0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.

C. $S = \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

D. $S = \varnothing$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$0 < x^2 - 3x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x^2 - 3x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leq 3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2 - 3x) < \log_{\frac{\pi}{4}}(x + 4)$ là

A. $2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

B. $2 - 2\sqrt{2} < x < 0$.

C. $\begin{cases} -4 < x < 2 - 2\sqrt{2} \\ x > 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x < 2 - 2\sqrt{2} \\ x > 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -4 < x < 0. \end{array}\right.$

$\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2 - 3x) < \log_{\frac{\pi}{4}}(x + 4) \Rightarrow x^2 - 3x > x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 + 2\sqrt{2} \\ x < 2 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} -4 < x < 2 - 2\sqrt{2} \\ x > 2 + 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A. $T = [-2; 2]$.

B. $T = [2; +\infty)$.

C. $T = (-\infty; -2]$.

D. $T = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$. Vậy tập nghiệm là $T = [-2; 2]$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Khi đặt $t = \log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{5}} x - 5 \leqslant 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 6t - 4 \leqslant 0$. **B.** $t^2 - 6t - 5 \leqslant 0$. **C.** $t^2 - 4t - 4 \leqslant 0$. **D.** $t^2 - 3t - 5 \leqslant 0$.

Lời giải.

$\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{3}} x - 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow (\log_5 x + 1)^2 - 6\log_5 x - 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x - 4\log_5 x - 4 \leqslant 0$.
Đặt $t = \log_5 x$ bất phương trình trở thành $t^2 - 4t - 4 \leqslant 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 26. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{25}(x+1) > \dfrac{1}{2}$.

A. $S = (-4; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 4)$. **C.** $S = (-1; 4)$. **D.** $S = (4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{25}(x+1) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 > 25^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > 4$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x^2+2) \leqslant 3$ là

A. $S = (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. **B.** $S = \varnothing$.
C. $S = \mathbb{R}$. **D.** $S = [-5; 5]$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x^2+2) \leqslant 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 > 0 \\ x^2 + 2 \leqslant 27 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2 \leqslant 27 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 25 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Điều kiện xác định của của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_9 \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{1}{2}}}$ là

A. $x < -3$. **B.** $x > -1$. **C.** $-3 < x < -1$. **D.** $0 < x < 3$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} > 0 \\ \log_9 \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} > 0 \\ \dfrac{2x}{x+1} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1} > 3 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$.
Chọn đáp án C □

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-3) < \log_{0,5}(x^2 - 4x + 3)$ là

A. $(3; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $(2; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.
Bpt $\Leftrightarrow x - 3 > x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.
Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là $S = \varnothing$.
Chọn đáp án C □

Câu 30. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \dfrac{1}{4}$.

A. $S = (-\infty; 3]$. **B.** $S = [3; +\infty)$. **C.** $S = (-\infty; 1]$. **D.** $S = [1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \Leftrightarrow x-1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$.

A. $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $S=[3;+\infty)$. **D.** $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$.

Lời giải.

Điều kiện $x>\frac{3}{4}$. Bất phương trình tương đương với

$$(4x-3)^2 \leq 18x+27 \Leftrightarrow 16x^2-42x-18 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{8};3\right].$$

Đối chiếu điều kiện ta được tập nghiệm $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2018} x \leq \log_x 2018$ là

A. $\begin{bmatrix} x \leq \frac{1}{2018} \\ 1<x\leq 2018 \end{bmatrix}$. **B.** $0<x\leq 2018$. **C.** $\frac{1}{2018} \leq x \leq 2018$. **D.** $\begin{bmatrix} 0<x\leq \frac{1}{2018} \\ 1<x\leq 2018 \end{bmatrix}$.

Lời giải.

ĐK: $0<x\neq 1$.

BPT tương đương với

$$\log_{2018} x \leq \frac{1}{\log_{2018} x} \Leftrightarrow \frac{\log^2_{2018} x-1}{\log_{2018} x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \log_{2018} x \leq -1 \\ 0<\log_{2018} x \leq 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0<x\leq \frac{1}{2018} \\ 1<x\leq 2018. \end{bmatrix}$$

Kết hợp với ĐK, ta có tập nghiệm của BPT đã cho là $\begin{bmatrix} 0<x\leq \frac{1}{2018} \\ 1<x\leq 2018. \end{bmatrix}$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Giải phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1$ ta được tập nghiệm là T. Tìm T?

A. $T=[-2;2]$. **B.** $T=[2;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;-2]$.

Lời giải.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

A. $(-\infty;9)$. **B.** $(1;10)$. **C.** $(-\infty;10)$. **D.** $(1;9)$.

Lời giải.

BPT đã cho tương đương với $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1<8 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<9.$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $(1;9)$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1) \geq 0$ có tập nghiệm là

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,5}(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2};1\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm tập hợp tất cả các nghiệm thực của bất phương trình $\left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \geq \frac{9}{7}$.

A. $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

C. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [1;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \geq \frac{9}{7} \\ \Leftrightarrow\ & 3x-2x^2 \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-3x+1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Bất phương trình $\log_2 \frac{x^2-6x+8}{4x-1} \geq 0$ có tập nghiệm là $T = \left(\frac{1}{4};a\right] \cup [b;+\infty)$. Tính $M = a+b$.

A. $M=12$. **B.** $M=8$. **C.** $M=9$. **D.** $M=10$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\frac{x^2-6x+8}{4x-1} > 0 \quad (*)$. Ta có

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x^2-6x+8}{4x-1} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+8}{4x-1} \geq 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } (*)) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-10x+9}{4x-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{4};1\right] \cup [9;+\infty). \end{aligned}$$

Vậy $T = a+b = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

A. $T=(-\infty;1) \cup (4;+\infty)$. **B.** $T=(-\infty;1] \cup [4;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;0] \cup [1;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$.
$16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ trở thành

$$t^2 - 5.t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t \geq 4 \\ 0 < t \leq 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4^x \geq 4 \\ 0 < 4^x \leq 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq 1 \\ x \leq 0. \end{bmatrix}$$

Vậy $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\log_2(1+x) < 2$. Tính giá trị $P = x_1 + x_2$.

A. $P = 3$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 6$.

Lời giải.

Điều kiện $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Phương trình $\log_2(1+x) < 2 \Leftrightarrow 1 + x < 4 \Leftrightarrow x < 3$.
So điều kiện $\Rightarrow -1 < x < 3$.
Vậy nghiệm nguyên dương là $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Suy ra $P = 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x-2)] > 0$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

A. $b - a = 2$. **B.** $b - a = 4$. **C.** $b - a = 3$. **D.** $b - a = 5$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x > 2 \\ 0 < \log_3(x-2) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 1 < x - 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5.$$

Vậy $a = 3$, $b = 5$ và $b - a = 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}$; $g(x) = 5^x + 4x \cdot \ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là

A. $x < 0$. **B.** $x > 1$. **C.** $0 < x < 1$. **D.** $x > 0$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1} \cdot (2x+1)' \cdot \ln 5 = 5^{2x+1} \cdot \ln 5$.
Và $g'(x) = 5^x \cdot \ln 5 + 4 \ln 5 = (5^x + 4) \ln 5$.
Do đó: $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 5^{2x+1} \cdot \ln 5 > (5^x + 4) \ln 5 \Leftrightarrow 5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x < -\dfrac{4}{5} (VN) \\ 5^x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{4x+6}{x} \geq 0$ là

A. $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $\left[-2, -\dfrac{3}{2}\right]$. **C.** $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left[-2, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \dfrac{4x+6}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Bất phương trình tương đương: $\dfrac{4x+6}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{4x+6-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0.$

Kết hợp với điều kiện ta được: $-2 \leq x < -\dfrac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-2, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho $f(x) = xe^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

A. $(0, 1)$. **B.** $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = e^{-3x} + (-3)e^{-3x}x = e^{-3x}(1-3x)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-3x}(1-3x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$ là

A. $(1; 2)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $[2; +\infty]$. **D.** $(1; 2]$.

Lời giải.

BPT$\Leftrightarrow 3^{-\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \Leftrightarrow x > \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10$ là

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10 \Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 9 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_2(\log_4 x) \geq \log_4(\log_2 x)$ là

A. $x = 16$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = 10$. **D.** $x = 8$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\log_4 x>0\\ \log_2 x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\log_2(\log_4 x)\geq\log_2\sqrt{log_2 x}\Leftrightarrow\log_4 x\geq\sqrt{\log_2 x}\\ \Leftrightarrow\ &(\log_{2^2}x)^2\geq\log_2 x\Leftrightarrow\frac{1}{4}(\log_2 x)^2\geq\log_2 x\\ \Leftrightarrow\ &\log_2 x\geq 4\Leftrightarrow x\geq 16.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất là $x=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log|x|=|\log x|$.

A. $S=(1;+\infty)$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\{1;10\}$. **D.** $S=[1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Phương trình trở thành $\log x=|\log x|\Rightarrow\log x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Bất phương trình $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-1$. Ta có

$$\begin{aligned}&\log_4(x+7)>\log_2(x+1)\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x+7}>\log_2(x+1)\\ &\Leftrightarrow\sqrt{x+7}>x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ x+7>(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x^2+x-6<0\end{cases}\Leftrightarrow-1<x<2.\end{aligned}$$

Kết hợp với $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{0;1\}$ là hai giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x}\leqslant\left(\sqrt{2}\right)^3$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

$\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x}\leqslant\left(\sqrt{2}\right)^3\Leftrightarrow x^2-2x-3\leqslant 0\Leftrightarrow-1\leqslant x\leqslant 3$.

Do x nguyên, suy ra $x\in\{-1;0;1;2;3\}$. Vậy bất phương trình có 5 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của x để đồ thị hàm số $y=\log_{0,5}x$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y=2$.

A. $x\geq\frac{1}{4}$. **B.** $0<x\leq\frac{1}{4}$. **C.** $0<x<\frac{1}{4}$. **D.** $x\geq-\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,5}x>2\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$ có nghiệm là

A. $x>\dfrac{10}{3}$. **B.** $x>3$. **C.** $x<3$. **D.** $\dfrac{1}{3}<x<3$.

Lời giải.

$\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow x>3$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2\cdot 6^x+4^x>0$.

A. $S=(0;+\infty)$. **B.** $S=\mathbb{R}$. **C.** $S=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **D.** $S=[0;+\infty)$.

Lời giải.

Chia hai vế cho $4^x>0$, phương trình tương đương $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}+1>0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$, điều kiện $t>0$.

Khi đó pt tương đương $t^2-2\cdot t+1>0 \Leftrightarrow (t-1)^2>0 \Leftrightarrow t\neq 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$.

Vậy $S=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

A. $x<3$. **B.** $x>3$. **C.** $x>\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}<x<3$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow x>3$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Nghiệm của bất phương trình $9^{x-1}-36\cdot 3^{x-3}+3\leq 0$ là

A. $1\leq x\leq 3$. **B.** $1\leq x\leq 2$. **C.** $1\leq x$. **D.** $x\leq 3$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $9^{x-1}-\dfrac{36}{9}.3^{x-1}+3\leq 0$

$\Leftrightarrow 1\leq 3^{x-1}\leq 3 \Leftrightarrow 0\leq x-1\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,2}(x-1)<\log_{0,2}(3-x)$.

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(2;3)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(1;2)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3$. (*)

Bất phương trình đã cho trở thành $x-1>3-x \Leftrightarrow x>2$.

Kết hợp với điều kiện (*). Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(2x-3)>-1$ là

A. $x<4$. **B.** $x>\dfrac{3}{2}$. **C.** $4>x>\dfrac{3}{2}$. **D.** $x>4$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-3)>-1 \Leftrightarrow 0<2x-3<5 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}<x<4$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Bất phương trình $25^{x+1}+9^{x+1}\geq 34\cdot 15^x$ có tập nghiệm S là

A. $S=(-\infty;2]$. **B.** $S=[-2;0]$.

C. $S=(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$. **D.** $S=[0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}25^{x+1}+9^{x+1}\geq 34\cdot 15^x &\Leftrightarrow 25\cdot 25^x-34\cdot 15^x+9\cdot 9^x\geq 0\\ &\Leftrightarrow 25\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-34\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+9\geq 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq \frac{9}{25}\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq 1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq \left(\frac{5}{3}\right)^{0}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x\geq 0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $S=(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Tìm tập nghiệm S của hệ phương trình $\begin{cases}4^{x+1}\leq 8^{6-2x}\\ 3^{4x+5}\geq 27^{1+x}\end{cases}$.

A. $S=[2;+\infty)$. **B.** $S=[-2;2]$. **C.** $S=(-\infty;1]$. **D.** $S=[2;5]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}4^{x+1}\leq 8^{6-2x}\\ 3^{4x+5}\geq 27^{1+x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{2x+2}\leq 2^{18-6x}\\ 3^{4x+5}\geq 3^{3+3x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\leq 18-6x\\ 4x+5\geq 3+3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 59. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $5^{x^2-x}<25$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

C. $(-1;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5^{x^2-x}<5^2\Leftrightarrow x^2-x<2\Leftrightarrow x^2-x-2<0\Leftrightarrow x\in(-1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Cho bất phương trình: $1+\log_5(x^2+1)\geqslant\log_5(mx^2+4x+m)(1)$. Tìm tất cả các giá trị của m để (1) được nghiệm đúng với mọi số thực x.

A. $2<m\leqslant 3$. **B.** $-3\leqslant m\leqslant 7$. **C.** $2\leqslant m\leqslant 3$. **D.** $m\leqslant 3; m\geqslant 7$.

Lời giải.

$1+\log_5(x^2+1)\geq\log_5(mx^2+4x+m)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 5(x^2+1)\geq mx^2+4x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(5-m)x^2-4x-m+5\geq 0\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\forall x\in\mathbb{R}\ (I).$

• $m=0, m=5$ không thỏa mãn.

• $m\neq 0; m\neq 5$, $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} 5-m>0 \\ \Delta_1'=4-(5-m)^2\leqslant 0 \\ m>0 \\ \Delta_2'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leqslant 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 61. Tập tất cả các nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)\geq -1$ là

A. $[-1;2]$. **B.** $[-1;0)\cup(1;2]$.

C. $(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2-x>0\Leftrightarrow x>1\vee x<0$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)\geq -1\Leftrightarrow x^2-x\leq 2\Leftrightarrow -1\leq x\leq 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 62. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(x-2)>0$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x>2$.

Ta có $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(x-2)>0\Leftrightarrow x-2<1\Leftrightarrow x<3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(\dfrac{4x+1}{x-1}\right)\right]<-1$.

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta thấy $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(\dfrac{4x+1}{x-1}\right)\right]<-1\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{4x+1}{x-1}\right)>2\Leftrightarrow \dfrac{4x+1}{x-1}>4\Leftrightarrow x>1$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $0<a<1$ và $b>0, c>0$ thì $\log_a b<\log_a c\Leftrightarrow b>c$.

B. Nếu $a>1$ thì $a^m<a^n\Leftrightarrow m<n$.

C. Với mọi số a, b thoả mãn $ab>0$ thì $\log(ab)=\log a+\log b$.

D. Với m, n là các số tự nhiên, $m>2$ và $a>0$ thì $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$.

Lời giải.

Ta thấy $ab>0\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ $(1)\vee \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$ (2).

Từ (2), ta thấy $\log(ab)=\log a+\log b$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Một người gửi ngân hàng 200 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ hai trở đi, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền gốc và tiền lãi tháng trước đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó có 225 triệu đồng?

A. 30 tháng. **B.** 21 tháng. **C.** 24 tháng. **D.** 22 tháng.

Lời giải.

Ta có $225 \le 200\left(1+\dfrac{0{,}58}{100}\right)^n \Leftrightarrow n \ge \log_{1{,}0058}\left(\dfrac{9}{8}\right) \approx 20{,}37.$

Vậy sau ít nhất 21 tháng thì người đó có 225 triệu đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \ge 0$.

A. $S=(1;4]$. **B.** $S=(-\infty;4]$. **C.** $S=\left(3;\dfrac{11}{2}\right)$. **D.** $S=(1;4)$.

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x) \ge \log_3(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 11-2x \ge x-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\le 4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 67. Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\dfrac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=(1;+\infty)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải.

$5^{x+2} < \left(\dfrac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2<2x \Leftrightarrow x>2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}$.

A. $\left(\dfrac{1}{2};1\right]$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x-1>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 2x-1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x\le 1$

Tập xác định $\left(\dfrac{1}{2};1\right]$

Chọn đáp án A □

Câu 69. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(3x) > \log_{\frac{2}{3}}(2x+7)$ là

A. $(-\infty;7)$. **B.** $(0;7)$. **C.** $(7;+\infty)$. **D.** $\left(0;\dfrac{14}{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x < 2x + 7 \Leftrightarrow x < 7$.

So với điều kiện, ta có $x \in (0; 7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32}$ có tập nghiệm $S = (a; b)$. Khi đó giá trị của $b - a$ là

A. 4. **B**. 2. **C**. 6. **D**. 8.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow x^2 + 4x < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 1 \end{cases}$.

Do đó $b - a = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho bất phương trình $2\log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng bao nhiêu?

A. 5. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2 &\Leftrightarrow \log_3(4x - 3)^2 \leq \log_3 9(2x + 3) \\ &\Leftrightarrow (4x - 3)^2 \leq 9(2x + 3) \\ &\Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

So với điều kiện, ngiệm bất phương trình $\frac{3}{4} < x \leq 3$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Do đó, $1 + 2 + 3 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x} > 3^{x+2}$ là

A. $(-\infty; 2)$. **B**. $(2; +\infty)$. **C**. $(1; +\infty)$. **D**. $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

$3^{2x} > 3^{x+2} \Leftrightarrow 2x > x + 2 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàn số $y = \sqrt{\log_{2018}(x + 3)}$.

A. $\mathscr{D} = (-3; +\infty)$. **B**. $\mathscr{D} = [-2; +\infty)$. **C**. $\mathscr{D} = (-3; -2]$. **D**. $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ \log_{2018}(x + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_4(2x-3)-\log_2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>0$ là

A. $S=\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

C. $S=\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $S=(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $x>\dfrac{3}{2}$. Khi đó

$$\log_2(2x-3)-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)>0\Leftrightarrow\log_2\frac{\sqrt{2x-3}}{x-\dfrac{1}{2}}>0$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{2x-3}{x-\dfrac{1}{2}}>1\Leftrightarrow 2x-3>x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Giải bất phương trình $\sqrt{4-2^x}\cdot\log_2(x+1)\geq 0$.

A. $x\geq 0$. **B.** $-1<x\leq 2$. **C.** $0\leq x\leq 2$. **D.** $-1\leq x\leq 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}2^x\leq 4\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\leq 2$.

☑ Nếu $x=2$, bất phương trình đúng.

☑ Nếu $x\neq 2$, khi đó $\sqrt{4-x^2}>0$ thì bất phương trình tương đương với:

$$\log_2(x+1)\geq 0\Leftrightarrow x+1\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $0\leq x<2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $0\leq x\leq 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 76. Một người gửi 20 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người đó được lãnh số tiền nhiều hơn 50 triệu đồng bao gồm cả tiền gốc và lãi, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 115 tháng. **B.** 114 tháng. **C.** 143 tháng. **D.** 12 tháng.

Lời giải.

$$50<20\left(1+\frac{0{,}8}{100}\right)^N\Leftrightarrow 1{,}008^N>\frac{5}{2}\Leftrightarrow N>\log_{1{,}008}\frac{5}{2}\approx 114{,}99\text{ tháng.}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

A. 9. **B**. 15. **C**. 8. **D**. 10.

Lời giải.

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{5}{2} \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Bất phương trình

$$\begin{aligned} &\log_2(2x+5) > \log_2(x-1) \\ \Leftrightarrow\ &2x+5 > x-1 \\ \Leftrightarrow\ &x > -6 \end{aligned}$$

So sánh điều kiện suy ra: $S=(1;+\infty)$. Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.
Chọn đáp án C □

Câu 78. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(22-5x)^2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. Nhiều hơn 2 và ít hơn 10. **B**. Nhiều hơn 10 nghiệm.
C. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ 22-5x \neq 0 \\ 3x-2 < |22-5x| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3} < x < 3 \\ x > 10. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nhiều hơn 10 nghiệm nguyên.
Chọn đáp án B □

Câu 79. Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu? (Giả sử rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi)

A. 44 tháng. **B**. 47 tháng. **C**. 45 tháng. **D**. 46 tháng.

Lời giải.

Theo công thức lãi kép, ta có
$100\cdot(1+0{,}005)^x > 125 \Leftrightarrow x > \log_{1{,}005}\frac{125}{100} \Leftrightarrow x > 44{,}74.$
Chọn đáp án C □

Câu 80. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}(x^2+x) < \log_{0,8}(-2x+4)$ là:

A. $(-\infty;-4)\cup(1;2)$. **B**. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.
C. $(-4;1)$. **D**. $(-4;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in (-\infty;-1) \cup (0;2)$.

$$\begin{aligned} & \log_{0,8}\left(x^2+x\right) < \log_{0,8}\left(-2x+4\right) \\ \Leftrightarrow\ & x^2+x > -2x+4 \Leftrightarrow x^2+3x-4>0 \\ \Leftrightarrow\ & x \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty) \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $S = (-\infty;-4) \cup (1;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho bất phương trình $9^x + 9^{x+1} + 9^{x+2} < 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Bất phương trình có đúng một nghiệm âm. **B**. Bất phương trình chỉ có nghiệm âm.

C. Bất phương trình vô nghiệm. **D**. Bất phương trình có một nghiệm dương.

Lời giải.

$9^x + 9^{x+1} + 9^{x+2} < 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \Leftrightarrow 91 \cdot 9^x < 7 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{2}\right)^x < \dfrac{7}{91} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{9}{2}} \dfrac{7}{91} < 0.$

Vậy bất phương trình chỉ có nghiệm âm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(7-x)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 7. **B**. Vô số. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(7-x) \Leftrightarrow 0 < 2x+1 < 7-x \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} < x < 2.$

Suy ra nghiệm nguyên của bất phương trình là $0; 1$.

Vậy bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

A. $\log_{2018} x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. **B**. $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.

C. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$. **D**. $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{3} < 1$ nên $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow b > a > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \dfrac{1}{3}$.

A. $(-\infty;0]$. **B**. $(0;1]$. **C**. $[1;+\infty)$. **D**. $(-\infty;1]$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{3} < 1$ nên bất phương trình tương đương $2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+1) \geq \log_2(x-1)$.

A. $S = (1;+\infty)$. **B**. $S = [-2;+\infty)$. **C**. $S = \mathbb{R}$. **D**. $S = [2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2(2x+1) \geq \log_2(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1 \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(1;+\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Giải bất phương trình $\log_2(x+1) \leq 3$.

A. $x \leq 7$. **B.** $-1 < x \leq 7$. **C.** $-1 \leq x \leq 7$. **D.** $-1 < x < 7$.

Lời giải.

$$\log_2(x+1) \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1 \leq 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 7.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x} > 3^{x+6}$ là

A. $(0;64)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(0;6)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x} > 3^{x+6} \Leftrightarrow 2x > x+6 \Leftrightarrow x>6$.
Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(6;+\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 88. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$ là

A. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)$. **D.** $F(x)=\cos(2x+1)$.

Lời giải.

Ta xét hàm $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. Khi đó $F'(x)=\left(-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C\right)'=\sin(2x+1)$ theo định nghĩa của nguyên hàm suy ra $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2-1)) \leq -1$ là

A. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right) \leq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_2\left(x^2-1\right)>0 \\ \log_2\left(x^2-1\right) \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_2\left(x^2-1\right) \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1 \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2-1 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 \geq 5 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{5}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 90. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4^x < 2^{x+1}$.

A. $S = (1; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 1)$. **C.** $S = (0; 1)$. **D.** $S = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $2^{2x} < 2^{x+1} \Leftrightarrow 2x < x + 1 \Leftrightarrow x < 1$. Do đó, bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Bất phương trình $3^{2x+1} - 7.3^x + 2 > 0$ có nghiệm là

A. $\begin{bmatrix} x < -1 \\ x > \log_2 3 \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} x < -2 \\ x > \log_2 3 \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} x < -1 \\ x > \log_3 2 \end{bmatrix}$. **D.** $\begin{bmatrix} x < -2 \\ x > \log_3 2 \end{bmatrix}$.

Lời giải.

• Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$ ta có $3t^2 - 7t + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t > 2 \\ t < \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$.

• Ta có $\begin{bmatrix} 3^x > 2 \\ 3^x < \dfrac{1}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > \log_3 2 \\ x < -1 \end{bmatrix}$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{-x^2+x} < \dfrac{1}{4}$ là

A. $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $S = (-1; 2)$.

C. $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. **D.** $S = (-2; 1)$.

Lời giải.

Bất phương trình $2^{-x^2+x} < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x^2+x} < 2^{-2} \Leftrightarrow -x^2 + x < -2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ x > 2 \end{bmatrix}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,6%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lại cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không đổi?

A. 17 tháng. **B.** 18 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 15 tháng.

Lời giải.

Cuối tháng thứ nhất người đó có $100 + 100 \cdot 0{,}006 = 100 \cdot 1{,}006$ (triệu đồng).

Cuối tháng thứ 2 người đó có $100 \cdot 1{,}006 + 100 \cdot 1{,}006 \cdot 0{,}006 = 100 \cdot 1{,}006^2$ (triệu đồng).

Cuối tháng thứ 3 người đó có $100 \cdot 1{,}006^2 + 100 \cdot 1{,}006^2 \cdot 0{,}006 = 100 \cdot 1{,}006^3$ (triệu đồng).

Hoàn toàn tương tự, cuối tháng thứ n người đó sẽ có $100 \cdot 1{,}006^n$ triệu đồng.

Để người đó có ít nhất 110 triệu đồng thì ta có

$$100 \cdot 1{,}006^n \geq 110 \Leftrightarrow 1{,}006^n \geq 1{,}1 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}006} 1{,}1 \approx 15{,}93.$$

Vậy cần ít nhất 16 tháng để người đó có không ít hơn 110 triệu đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1-2x}{x} > 0$ là

A. $S = \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **B.** $S = \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $S = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1-2x}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2x}{x} > 0 \\ \dfrac{1-2x}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+5) < 3$ là

A. $S = (-5; 3)$. **B.** $S = (-\infty; 3)$. **C.** $S = (-5; 4)$. **D.** $S = -\infty; 4)$.

Lời giải.

$\log_2(x+5) < 3 \Leftrightarrow 0 < x+5 < 8 \Leftrightarrow x \in (-5; 3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_2(x-1) + \log_2(x+3) \geq 1$.

A. $(1; +\infty)$. **B.** $[-3; +\infty)$. **C.** $[1; +\infty)$. **D.** $(-3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_2(x-1) + \log_2(x+3) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x+3) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & x \geq -1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm là $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(5x-3) > -2$ ta có nghiệm là

A. $x > \dfrac{28}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{28}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5} \leq x \leq \dfrac{28}{5}$. **D.** $x < \dfrac{28}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{3}{5}$

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(5x-3) > -2 \Leftrightarrow 5x-3 < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow x < \dfrac{28}{5} \Rightarrow \dfrac{3}{5} < x < \dfrac{28}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Tìm nghiệm của phương trình $\log_x(4-3x) = 2$.

A. $x = 1$. **B.** $x = 4$. **C.** $x \in \varnothing$. **D.** $x \in \{1; -4\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ 0 < x < \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Phương trình $\log_x(4-3x) = 2 \Leftrightarrow 4-3x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 99. Nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 32$ là

A. $x \in (-\infty; -5)$. **B.** $x \in (-\infty; 5)$. **C.** $x \in (-5; +\infty)$. **D.** $x \in (5; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in (-\infty; -5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}} < 5^{1-2x}$.

A. $S = (-\infty; 1)$. **B.** $S = (-1; +\infty)$. **C.** $S = (-\infty; -1)$. **D.** $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}} < 5^{1-2x} \Leftrightarrow 5^{-4x+3} < 5^{1-2x} \Leftrightarrow -4x+3 < 1-2x \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Biết phương trình $\log_3(x^2+10) + \log_{\frac{1}{3}} x - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$.

A. $x_1 + x_2 = 9$. **B.** $x_1 + x_2 = 8$. **C.** $x_1 + x_2 = 10$. **D.** $x_1 + x_2 = 6$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3(x^2+10) + \log_{\frac{1}{3}} x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2+10) - \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x^2+10}{x} = 2$.

Hay: $\dfrac{x^2+10}{x} = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9+\sqrt{41}}{2} \\ x = \dfrac{9-\sqrt{41}}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra, tổng hai nghiệm là: $x_1 + x_2 = 9$.

Chú ý: Ta có thể sử dụng định lí Vi-et để tính nhanh $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 102. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-9) > 0$ là

A. $[9; +\infty)$. **B.** $(10; +\infty)$. **C.** $[10; +\infty)$. **D.** $(9; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-9) > 0 \Leftrightarrow x - 9 > 1 \Leftrightarrow x > 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Bất phương trình $\left(\sqrt{3}-1\right)^{x-2} \geq 1$ có tập nghiệm là

A. $(2; +\infty)$. **B.** $[2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 2)$. **D.** $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Do $0<\sqrt{3}-1<1$ nên

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^{x-2}\geq 1\Leftrightarrow x-2\leq 0\Leftrightarrow x\leq 2.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;2]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 104. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2(x-1)}\leq 1$ là

A. $S=[2;3]$. **B.** $S=(1;3]$. **C.** $S=(1;3)$. **D.** $S=(1:+\infty)$.

Lời giải.

$$\sqrt{\log_2(x-1)}\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\ \log_2(x-1)\geq 0\\ \log_2(x-1)\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 105. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1)>\log_{0,5}(2x-1)$

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải.

$$\log_{0,5}(x-1)>\log_{0,5}(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}0<x-1\\ x-1<2x-1\end{cases}\Leftrightarrow x>1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 106. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $2^{x+2}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\Leftrightarrow 2^{x+2}<2^{-2x}\Leftrightarrow x+2<-2x\Rightarrow x<\dfrac{-2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 107. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<1$.

A. $S=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)$. **D.** $S=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

BPT $\Leftrightarrow 2x-1>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$. Vậy $S=\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 108. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2+3x}<4$.

A. $S=(1;2)$. **B.** $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $S=(-1;2)$. **D.** $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$2^{-x^2+3x}<4\Leftrightarrow 2^{-x^2+3x}<2^2\Leftrightarrow -x^2+3x<2\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\ x>2.\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 109. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_2(3^x - 2) < 0$.

A. $x > 1$. **B.** $x < 1$. **C.** $0 < x < 1$. **D.** $\log_3 2 < x < 1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3^x - 2 < 1 \Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện $x > \log_3 2$ ta được $\log_3 2 < x < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 110. Tập nghiệm của bất phương trình $8.4^{x+1} - 18.2^x + 1 < 0$ là

A. $(2; 4)$. **B.** $(1; 4)$. **C.** $(-4; -1)$. **D.** $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho trở thành: $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} < 2^x < \frac{1}{2}$.

Giải bất phương trình kép ta nhận được: $-4 < x < -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 111. Tập nghiệm của bất phương trình $(x - 5)(\log x + 1) < 0$ là

A. $\left\{\frac{1}{20}; 5\right\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{5}; 5\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{10}; 5\right\}$. **D.** $\left\{\frac{1}{15}; 5\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$.

$$(x-5)(\log x+1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 5 > 0 \\ \log x + 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 5 < 0 \\ \log x + 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5 \\ x < \dfrac{1}{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ x > \dfrac{1}{10} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{10} < x < 5$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 112. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{x^2+1} \geq \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{3x-1}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{x^2+1} \geq \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 3x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Các nghiệm nguyên của phương trình là $x = 1$ và $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 113. Với mọi cặp số thực $a; b$ thỏa mãn $\left(\sqrt{2} - 1\right)^a \leq \left(\sqrt{2} - 1\right)^b$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = b$. **B.** $a \geq b$. **C.** $a \leq b$. **D.** $a > b$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2} - 1 < 1$ nên $\left(\sqrt{2} - 1\right)^a \leq \left(\sqrt{2} - 1\right)^b \Leftrightarrow a \geq b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 114. Hiện nay, huyện X có 100.000 người. Giả sử với tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,75%, hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì dân số huyện X vượt trên 140.000 người. Biết sự tăng dân số được tính theo công thức lãi kép liên tục là $S = Ae^{nr}$ với S là số dân sau n năm; A là số dân của năm lấy làm mốc tính; r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

A. 18 năm. **B**. 20 năm. **C**. 19 năm. **D**. 21 năm.

Lời giải.

Dân số của huyện X sau n năm là $S_n = 100.000\mathrm{e}^{0.0175n}$

Ta có $S_n > 140.000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0.0175n} > \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow n > 19{,}22$.

Hay sau ít nhất 20 năm thì dân số huyện X sẽ vượt trên 140.000 người.

Chọn đáp án B □

Câu 115. Cho bất phương trình $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x > 0$. Nếu đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ với $t > 0$ thì bất phương trình đã cho trở thành bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

A. $12t^2 - 35t + 18 > 0$. **B**. $18t^2 - 35t + 12 > 0$.

C. $12t^2 - 35t + 18 < 0$. **D**. $18t^2 - 35t + 12 < 0$.

Lời giải.

Ta có $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x > 0 \Leftrightarrow 12 - 35\left(\dfrac{6}{9}\right)^x + 18\left(\dfrac{4}{9}\right)^x > 0 \Leftrightarrow 12 - 35\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 18\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} > 0$.

Đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ với $t > 0$ thì bất phương trình đã cho trở thành $18t^2 - 35t + 12 > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 116. Tập nghiệm của bất phương trình $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$ có dạng $S = [a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $b - a$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B**. 1. **C**. $\dfrac{5}{2}$. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant 2^x \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 1] \Rightarrow a = -1;\ b = 1 \Rightarrow b - a = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 117. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2-2x} \geq \dfrac{1}{8}$.

A. $S = (1; +\infty)$. **B**. $S = [-3; +\infty)$. **C**. $S = (-\infty; -3]$. **D**. $S = [-3; 1]$.

Lời giải.

Ta có $2^{-x^2-2x} \geq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{-x^2-2x} \geq 2^{-3} \Leftrightarrow -x^2 - 2x \geq -3 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3; 1]$.

Vậy $S = [-3; 1]$.

Chọn đáp án D □

Câu 118. Giải bất phương trình $\log_2(1 - x) < 2$.

A. $x > -3$. **B**. $x < 1$. **C**. $-3 \leq x \leq 1$. **D**. $-3 < x < 1$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(1 - x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ 1 - x < 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 119. Bất phương trình $9^x \le \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 0. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3^{2x} \le 3^{6-x} \Leftrightarrow 2x \le 6-x \Leftrightarrow x \le 2$.

Vậy có 2 số nguyên dương x thỏa bất phương trình.

Chọn đáp án C □

Câu 120. Một người gửi ngân 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 9 năm. **B**. 11 năm. **C**. 12 năm. **D**. 10 năm.

Lời giải.

Gọi x (năm) là số năm ít nhất mà người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$).

Theo công thức tính lãi kép ta có

$$\begin{aligned} &300(1+0{,}07)^x > 600 \\ \Leftrightarrow &(1{,}07)^x > 2 \\ \Leftrightarrow &x\log(1{,}07) > \log 2 \Leftrightarrow \quad x > \frac{\log 2}{\log(1{,}07)} > 10 \Rightarrow x = 11 \text{ (năm)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 121. Nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7) > 0$ là

A. $2 < x < 3$. **B**. $x > 3$. **C**. $x < 2$ hoặc $x > 3$. **D**. $x < 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-5x+7 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7) > 0 \Leftrightarrow x^2-5x+7 < 1 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 122. Cho bất phương trình $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$, tập nghiệm của bất phương trình có tập nghiệm$S = (a;b)$. Giá trị biểu thức $A = b-a$ nhận giá trị nào đây?

A. -2. **B**. -1. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2-x+1 < 2x-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;2)$. Giá trị của biểu thức $A = 2-1 = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 123. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \le 2$ là

A. $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **B**. $\left[\frac{3}{4};3\right]$. **C**. $\left(\frac{3}{4};3\right]$. **D**. $\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4x-3>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}.$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2 \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2\le 2+\log_3(2x+3) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(4x-3)^2\le \log_3(9(2x+3)) \Leftrightarrow (4x-3)^2\le 9(2x+3) \\ \Leftrightarrow\ & 16x^2-24x+9\le 18x+27 \Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{3}{8}\le x\le 3. \end{aligned}$$

So điều kiện suy ra $\dfrac{3}{4}<x\le 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 124. Tìm số nguyên n lớn nhất thỏa mãn $n^{360}<3^{480}$.

A. $n=3$. **B.** $n=4$. **C.** $n=2$. **D.** $n=5$.

Lời giải.

Ta có $n^{360}<3^{480} \Leftrightarrow 360\ln n<480\ln 3 \Leftrightarrow \ln n<\dfrac{4}{3}\cdot\ln 3 \Leftrightarrow n<\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\ln 3}\approx 4,326$.

Vậy số nguyên n lớn nhất thỏa mãn là 4.

Chọn đáp án B □

Câu 125. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log(2x-2)\ge\log(x+1)$.

A. $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=(1;3]$. **C.** $S=[3;+\infty)$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải.

Ta có $\log(2x-2)\ge\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2\ge x+1 \\ 2x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3.$

Vậy, tập nghiệm S của bất phương trình là: $S=[3;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 126. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ là

A. $\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$.

C. $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 1$.

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x-1}>4 \Leftrightarrow \frac{-4x+5}{x-1}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\frac{5}{4}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Giải bất phương trình $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1$.

A. $1<x<3$. **B.** $1 \le x \le 3$. **C.** $-3 \le x \le 3$. **D.** $1<x \le 3$.

Lời giải.

Ta có $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<5 \\ (x-1)^2 \le 2(5-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<5 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x \le 3.$

Chọn đáp án D □

Câu 128. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$ có tập nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{2};2\right]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $[2;5)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{2}}(5-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1 \le 5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x \le 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};2\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 129. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^{x^2} < \frac{1}{\sqrt{18}-\sqrt{17}}$ là

A. $S=(-1;0)$. **B.** $S=[-1;1]$. **C.** $S=(0;1)$. **D.** $S=(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^{x^2} < \frac{1}{\sqrt{18}-\sqrt{17}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)^{x^2} < \left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right) \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 130. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2}$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} \Leftrightarrow 3^{2x+1} > 3^{3x^2} \Leftrightarrow 2x+1>3x^2 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 131. Bất phương trình $\log_2^2 x - \log_2(4x) < 0$ có số nghiệm nguyên là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$, khi đó

$$\begin{aligned} & \log_2^2 x - \log_2(4x) < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - \log_2 4 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 4. \end{aligned}$$

Giá trị nguyên của x là $\{1,2,3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 132. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $25^{x-5} - 5^x \le 0$.

A. $S = (0;10]$. **B.** $S = (\infty;10]$. **C.** $S = (-\infty;10)$. **D.** $S = (0;10)$.

Lời giải.

Ta có $25^{x-5} - 5^x \le 0 \Leftrightarrow 5^{2x-10} \le 5^x \Leftrightarrow 2x - 10 \le x \Leftrightarrow x \le 10$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;10]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 133. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_6 x + 8\log_{36} x \le 10$.

A. $S = (0;36]$. **B.** $S = (-\infty;36]$. **C.** $S = (-\infty;36)$. **D.** $S = [0;36]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$. Bất phương trình viết lại $\log_6 x + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_6 x \le 10 \Leftrightarrow \log_6 x \le 2 \Leftrightarrow x \le 36$.

Kết hợp với điều kiện xác định, bất phương trình có tập nghiệm là $S = (0;36]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 134. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \le 0$.

A. $S = (0;1)$. **B.** $S = [1;4]$. **C.** $S = (1;4)$. **D.** $S = [0;1]$.

Lời giải.

Ta có $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 5 \cdot 4^x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le 4^x \le 4 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0;1]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 135. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ là $(a;b)$. Khi đó, giá trị của ab bằng

A. 1. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\frac{2}{3} < x < \frac{6}{5}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x - 2 > 6 - 5x \Leftrightarrow 8x > 8 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\frac{6}{5}\right)$. Do đó $a = 1$ và $b = \frac{6}{5}$, nên $ab = \frac{6}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 136. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x\right) < 1$ có dạng $S = \left(\frac{1}{a};b\right)$ với a, b là những số nguyên. Mối liên hệ giữa a và b là

A. $a = b$. **B.** $a = 2b$. **C.** $a + b = 1$. **D.** $a = -b$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x\right)<1 &\Leftrightarrow 0<1-2\log_9 x<2\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}>\log_9 x>-\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 3>x>\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=b=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 137. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ ta được tập nghiệm $(a;b)$ (với $a<b$). Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=\dfrac{26}{5}$. **B.** $S=\dfrac{8}{5}$. **C.** $S=\dfrac{11}{5}$. **D.** $S=\dfrac{28}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}3x-2>0\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}$.

Ta có $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow 3x-2>6-5x\Leftrightarrow x>1$. Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)\Rightarrow S=\dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 138. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2)-\log_2(6-5x)>0$.

A. $S=\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(1;\dfrac{6}{5}\right]$. **D.** $S=\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}3x-2>0\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}$.

Bất phương trình

$$\begin{aligned}&\log_2(3x-2)-\log_2(6-5x)>0\\ \Leftrightarrow\ &\log_2\frac{3x-2}{6-5x}>0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{3x-2}{6-5x}>1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{8x-8}{6-5x}>0\\ \Leftrightarrow\ &1<x<\frac{6}{5}\quad\text{(thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 139. Giải phương trình $2\log_4 x+\log_2(x-3)=2$.

A. $x=4$. **B.** $x=1$. **C.** $x=16$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}x>0\\x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow x>3$.

Phương trình

$$\begin{aligned} & 2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2 x + \log_2(x-3) = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x^2-3x) = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 140. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x - 2 - (x^2-4)\log_3 7 > 0$.

B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\log 3 - (x^2-4)\log 7 > 0$.

C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\ln 3 - (x^2-4)\ln 7 > 0$.

D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3 - (x^2-4)\log_{0,3} 7 > 0$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $f(x) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}} > 1 \quad (*)$.

☑ Lấy logarit cơ số 3 hai vế ta được $(*) \Leftrightarrow x - 2 - (x^2-4)\log_3 7 > 0$.

☑ Lấy logarit thập phân hai vế ta được $(*) \Leftrightarrow (x-2)\log 3 - (x^2-4)\log 7 > 0$.

☑ Lấy logarit Nê-pe hai vế ta được $(*) \Leftrightarrow (x-2)\ln 3 - (x^2-4)\ln 7 > 0$.

☑ Lấy logarit cơ số 0,3 ta được $(*) \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3 - (x^2-4)\log_{0,3} 7 < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 141. Tập nghiệm của bất phương trình $\log^2_{0,2} x - \log_{0,2} x - 6 \le 0$ có dạng $S = [a;b]$. Giá trị của $A = a \cdot b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_{0,2} x$, bất phương trình trở thành $t^2 - t - 6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le 3$.

Suy ra $-2 \le \log_{0,2} x \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{125} \le x \le 25$ (thỏa điều kiện).

Khi đó $a = \dfrac{1}{125}$, $b = 25$. Vậy $A = a \cdot b = \dfrac{1}{125} \cdot 25 = \dfrac{1}{5} \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Bất phương trình $3^{x^2-6x-16} < 9^{x+2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$3^{x^2-6x-16} < 3^{2x+4} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 < 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 10.$$

Số nghiệm nguyên trên khoảng $(-2;10)$ là 11 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 143. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$.

A. $(-\infty;10)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(1;10)$. **D.** $(\infty;9)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-1)<3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1<2^3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<9.$

Chọn đáp án B □

Câu 144. Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

Lời giải.

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2>6-5x \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 145. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\dfrac{4x+6}{x}\le 0$ là

A. $S=\left[-2;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $S=[-2;0)$. **C.** $S=(-\infty;2]$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{3}{2};0\right]$.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{4x+6}{x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\frac{3}{2} \\ x>0. \end{array}\right.$

$$\log_3\frac{4x+6}{x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{4x+6}{x}\le 1 \Leftrightarrow \frac{3x+6}{x}\le 0 \Leftrightarrow -2\le x<0.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $S=\left[-2;-\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}x\left(1+\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}}3x\right)\le 6$ là $[a;b]$. Tính $T=81a^2+b^2$.

A. $T=\frac{82}{9}$. **B.** $T=\frac{84}{3}$. **C.** $T=\frac{80}{9}$. **D.** $T=\frac{80}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_3 x$, ta có bất phương trình $t^2+2t-3\le 0$, suy ra $-3\le t\le 1$ hay $\frac{1}{27}\le x\le 3$. Do đó $[a;b]=\left[\frac{1}{27};3\right]$, dẫn đến $T=81a^2+b^2=\frac{82}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 147. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{2x-1}>243$.

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(3;+\infty)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2)$.

Lời giải.

Ta có

$$3^{2x-1} > 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} > 3^5 \Leftrightarrow 2x-1 > 5 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 148. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-5x+6} < 1$.

A. $(-3; 2)$. **B.** $(1; 6)$. **C.** $(2; 3)$. **D.** $(-6; -1)$.

Lời giải.

$$2^{x^2-5x+6} < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 149. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

A. $x > 3$. **B.** $\frac{1}{3} < x < 3$. **C.** $x < 3$. **D.** $x > \frac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-1) > 3 \Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \leq 2^{-2x+10} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \leq -2x + 10$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Có 3 số nguyên dương trong $[-2; 6]$.

Chọn đáp án D □

Câu 151. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x) < 0$ là

A. $(0; 5)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$. **D.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ -\log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

$\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 x > 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 152. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-4) + 1 \geq 0$ là

A. $(-\infty; 6)$. **B.** $(4; 6]$. **C.** $(4; +\infty)$. **D.** $\left(4; \frac{9}{2}\right]$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$0 < x - 4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 4 < x \leq 6.$$

Chọn đáp án B □

Câu 153. Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2+x}$ ta được nghiệm là

A. $x \geq 1$. **B.** $x > 1$. **C.** $x < 1$. **D.** $x \leq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2x+1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2+x} \Leftrightarrow 1-2x \leq -2+x \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 154. Cho các số dương a, b, c với $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. **B.** $\log_a b > 1 \Leftrightarrow b > a$.

C. $\log_a b < 0 \Leftrightarrow b < 1$. **D.** $\log_a b > c \Leftrightarrow b < a^c$.

Lời giải.

Với $a > 1$, ta có $\log_a b > c \Leftrightarrow \log_a b > \log_a a^c \Leftrightarrow b > a^c$

Chọn đáp án D □

Câu 155. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32}$ có tập nghiệm $S = (a; b)$. Khi đó $b - a$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \Leftrightarrow x^2+4x < 5 \Leftrightarrow -1 < x < 5$.

Suy ra $a = -1, b = 5 \Rightarrow S = b - a = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 156. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x-1} > 27$.

A. $S = [4; +\infty)$. **B.** $S = (4; +\infty)$. **C.** $S = (0; 4)$. **D.** $S = (-\infty; 4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1} > 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 3^3 \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (4; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 157. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3\right)$. **C.** $(-\infty; \log_2 3]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}} 3; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 158. Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$.

A. $x = \frac{2}{3}$. **B.** $x > \frac{2}{3}$. **C.** $x \neq \frac{2}{3}$. **D.** $x \leq \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x} \Leftrightarrow 9x^2-17x+11 \leq 7-5x \Leftrightarrow 9x^2-12x+4 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 159. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1$ là

A. $(1;5)$. **B.** $(1;3]$. **C.** $[1;3]$. **D.** $[3;5]$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<5.$

Bất phương trình tương đương với $\log_2(x-1)^2 \le \log_2[2(5-x)] \Rightarrow (x-1)^2 \le 10-2x \Leftrightarrow x^2 \le 9 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;3]$.

Chọn đáp án B □

Câu 160. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x+3=5^m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $m>1$. **B.** $m<0$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m>5$.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ và đường thẳng $y=5^m$. Xét $f(x)=x^3-3x+3$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có ba nghiệm thực $\Leftrightarrow 1<5^m<5 \Leftrightarrow 0<m<1$.

Chọn đáp án C □

Câu 161. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>-1$ là

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x<\frac{3}{2}. \end{cases}$ Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 162. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2)$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 2.$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(\dfrac{1}{2};\ 2\right)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 163. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^b > b^a$.

B. Với mọi $a > b > 1$, ta có $\log_a b < \log_b a$.

C. Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^{a-b} > b^{b-a}$.

D. Với mọi $a > b > 1$, ta có $\log_a \dfrac{a+b}{2} < 1$.

Lời giải.

Với $a = 4, b = 2$, $4^2 = 2^4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 164. Tập nghiệm của bất phương trình $2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} \leq 351 \cdot \sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S = [a; b]$. Giá trị $b - 2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3; \sqrt{10})$.

B. $(-4; 2)$.

C. $(\sqrt{7}; 4\sqrt{10})$.

D. $\left(\dfrac{2}{9}; \dfrac{49}{5}\right)$.

Lời giải.

Phương trình

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} \leq 351 \cdot \sqrt{14^x} \\ \Leftrightarrow & 98 \cdot 7^x + 28 \cdot 2^x - 351 \cdot 7^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & 98 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x + 28 - 351 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & 98 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2 \cdot \frac{x}{2}} - 351 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + 28 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{49} \leq \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - 2a = 10 \in (\sqrt{7}; 4\sqrt{10}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 165. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

A. Vô số.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 28 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2} < x < 4.$

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 7.

Chọn đáp án C ☐

Câu 166. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$ có tập nghiệm là

A. $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

B. $(-\infty; 2]$.

C. $[2; +\infty)$.

D. $[2; 5)$.

Lời giải.

☑ Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 5.$

☑ Bất phương trình trở thành $2x-1 \le 5-x \Leftrightarrow 3x \le 6 \Leftrightarrow x \le 2$.

☑ Kết hợp điều kiện suy ra bất phương trình có tập nghiệm $\left(\frac{1}{2};2\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 167. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(10;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x-1) > 3 \Leftrightarrow (x-1) > 2^3 \Leftrightarrow x > 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 168. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-3) + \log_2 x \ge 2$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[4;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1] \cup [4;+\infty)$. **D.** $(3;4]$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 3$. Khi đó BPT $\Leftrightarrow (x-3)x \ge 4 \Leftrightarrow x^2-3x-4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 4 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = [4;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 169. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7) > 0$ là

A. $(2;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2-5x+7 > 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ x^2-5x+7 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 170. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \frac{1}{4}$.

A. $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$. **B.** $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \le 3\}$.

C. $S = \{x \in \mathbb{R} | x \le 3\}$. **D.** $S = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 3\}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow x-1 \le 2 \Leftrightarrow x \le 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 171. Có bao nhiêu số nguyên trên $[0;10]$ nghiệm đúng bất phương trình $\log_2(3x-4) > \log_2(x-1)$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có: $\log_2(3x-4) > \log_2(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 > 0 \\ 3x-4 > x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Vì x là số nguyên thuộc $[0;10]$ nên có 9 giá trị của x thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 172. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

A. 397 triệu đồng. **B.** 396 triệu đồng. **C.** 395 triệu đồng. **D.** 394 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x là số tiền anh Nam phải giải tiết kiệm, đơn vị triệu đồng. Khi đó sau 3 năm, theo hình thức lãi kép thì số tiền anh Nam nhận được là $x\left(1+\dfrac{8}{100}\right)^3$. Vậy ta cần tìm x là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện

$$x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 \geq 500 \Leftrightarrow x \geq \frac{500}{\left(1+\dfrac{8}{100}\right)^3} \approx 396,9.$$

Vậy $x = 397$ triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 173. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{-3x} > 3^{-x+2}$.

A. $S = (-\infty; 1)$. **B.** $S = (-\infty; -1)$. **C.** $S = (-1; 0)$. **D.** $S = (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{-3x} > 3^{-x+2} \Leftrightarrow -3x > -x+2 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 174. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 2$ là

A. $(1; 2)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(2 : +\infty)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 175. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < \log_2(3-x)$ là

A. $S = (-\infty; 1)$. **B.** $S = (1; +\infty)$. **C.** $S = (1; 3]$. **D.** $S = (-1; 1)$.

Lời giải.

$$\log_2(x+1) < \log_2(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 3-x \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 176. Phương trình $2^{2x-1} = 8$ có nghiệm là

A. $x = 4$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 2$.

Lời giải.

$2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 177. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2-1)) \leq -1$ là

A. $S = \left[1; \sqrt{5}\right]$. **B.** $S = \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D**. $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(x^2-1)\right)\le -1\Leftrightarrow \log_2(x^2-1)\ge 2\Leftrightarrow x^2-1\ge 4\Leftrightarrow x^2\ge 5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge\sqrt{5}\\ x\le -\sqrt{5}.\end{array}\right.$

Vậy $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Chọn đáp án B □

Câu 178. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{2}}(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{2}}(x+7)\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1>0\\3x+1<x+7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{3}\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<3.$$

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 179. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x}\le\left(\sqrt{2}\right)^3$ là

A. $[-2;1]$. **B**. $[-1;3]$. **C**. $(2;5)$. **D**. $(-1;3)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x}\le\left(\sqrt{2}\right)^3&\Leftrightarrow x^2-2x\le 3\\&\Leftrightarrow x^2-2x-3\le 0\\&\Leftrightarrow -1\le x\le 3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 180. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge\log_{\frac{1}{2}}4$.

A. $S=(3;7]$. **B**. $S=[3;7]$. **C**. $=(-\infty;7]$. **D**. $S=[7;+\infty)$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge\log_{\frac{1}{2}}4\Leftrightarrow\begin{cases}x-3>0\\x-3\le 4\end{cases}\Leftrightarrow 3<x\le 7.$

Chọn đáp án A □

Câu 181. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)$.

A. $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **B**. $S=[3;+\infty)$. **C**. $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D**. $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>\dfrac{3}{4}$, với điều kiện trên, bất phương trình

$\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2\le\log_3(18x+27)\Leftrightarrow 16x^2-24x+9\le 18x+27\Leftrightarrow 16x^2-42x-19\le 0$

$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{8};3\right]$. Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 182. Bất phương trình $3^{x+2}>9^{x-1008}$ có nghiệm là

A. $x\ge 2018$. **B**. $x>2018$. **C**. $x<2018$. **D**. $x>1010$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} 3^{x+2} > 9^{x-1008} &\Leftrightarrow 3^{x+2} > 3^{2x-2016} \\ &\Leftrightarrow x+2 > 2x-2016 \\ &\Leftrightarrow x < 2018. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 183. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2 2x > \log_2(9-x)$.

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(9;+\infty)$. **C.** $S=(3;+\infty)$. **D.** $S=(3;9)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x>0 \\ 9-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<9.$

Ta có

$$\log_2 2x > \log_2(9-x) \Leftrightarrow 2x > 9-x \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $3<x<9$.

Chọn đáp án D □

Câu 184. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \frac{25}{4}$.

A. $[1;+\infty)$. **B.** $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có bất phương trình

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow 1-3x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 185. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là khoảng $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

A. $S=\frac{8}{5}$. **B.** $S=\frac{26}{5}$. **C.** $S=\frac{28}{15}$. **D.** $S=\frac{11}{5}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}<x<\frac{6}{5}.$

Bất phương trình tương đương với $3x-2>6-5x \Leftrightarrow 8x>8 \Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp với điều kiện ta có $1<x<\frac{6}{5}$.

Vậy $S=a+b=\frac{11}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 186. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $[-4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \geq 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 187. Tìm tập nghiệm D của bất phương trình $9^x < 3^{x+4}$.

A. $D = (0;6)$. **B.** $D = (-\infty;4)$. **C.** $D = (0;4)$. **D.** $D = (4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $9^x < 3^{x+4} \Leftrightarrow 3^{2x} < 3^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $D = (-\infty;4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 188. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A. $[0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 189. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-5;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x > -5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-5;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 190. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2} < 2^{6-x}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} < 2^{6-x} \Leftrightarrow x^2 < 6-x \Leftrightarrow x^2+x-6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 191. Tập nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4} < 8$ là

A. $S = (-1;+\infty)$. **B.** $S = (-\infty;-1)$. **C.** $S = (-\infty;1)$. **D.** $S = (1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4} < 8 \Leftrightarrow 2^{x-4} > \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x-4 > \log_2 \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x-4 > -3 \Leftrightarrow x > 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 192. Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x-1} > 27$ là

A. $S = [4;+\infty)$. **B.** $S = (4;+\infty)$. **C.** $S = (0;4)$. **D.** $S = (-\infty;4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x-1} > 27 \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow S = (4;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 193. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^{x^2-4}-1\right)\cdot \ln x^2<0$ là

A. $(-2;-1)\cup(1;2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp sau:

☑ TH1: $\begin{cases}2^{x^2-4}-1>0\\ \ln x^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4>0\\ 0<x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>4\\ 0<x^2<1\end{cases}$ (loại).

☑ TH2: $\begin{cases}2^{x^2-4}-1<0\\ \ln x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4<0\\ x^2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\ \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\ 1<x<2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathscr{D}=(-2;-1)\cup(1;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 194. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}}<5^{1-2x}$.

A. $S=(-\infty;1)$. **B.** $S=(-1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}}<5^{1-2x}\Leftrightarrow 5^{-4x+3}<5^{1-2x}\Leftrightarrow -4x+3<1-2x\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 195. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-5}$.

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-5}\Leftrightarrow x-2<2x-5\Leftrightarrow x>3$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 196. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}>\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}$ là

A. $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Ta có $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=1\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$. Do đó

$$\begin{aligned}&\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}>\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}\\ \Leftrightarrow\ &\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}\\ \Leftrightarrow\ &\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}\\ \Leftrightarrow\ &\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-1}\\ \Leftrightarrow\ &-x>x-1\\ \Leftrightarrow\ &x<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 197. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5}$.

A. $S = (0;+\infty)$. **B.** $S = \left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)$.

C. $S = \left(-\infty;-\frac{2}{5}\right) \cup (0;+\infty)$. **D.** $S = \left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{3}{x}+5 \Leftrightarrow \frac{-2}{x}-5<0 \Leftrightarrow \frac{-2-5x}{x}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\frac{2}{5} \\ x>0. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $S = \left(-\infty;-\frac{2}{5}\right) \cup (0;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 198. Cho hàm số $f(x) = 3^{x^2}4^x$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \ln 3 + x \ln 4 > 2 \ln 3$. **B.** $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 2 > 2$.

C. $f(x) > 9 \Leftrightarrow 2x \log 3 + x \log 4 > \log 9$. **D.** $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \log_2 3 + 2x > 2 \log_2 3$.

Lời giải.

Ta có

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \ln\left(3^{x^2}4^x\right) > \ln 9 \Leftrightarrow \ln 3^{x^2} + \ln 4^x > \ln 9 \Leftrightarrow x^2 \ln 3 + x \ln 4 > 2 \ln 3$.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x^2}4^x\right) > \log_3 9 \Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} + \log_3 4^x > \log_3 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 2 > 2$.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \log_2\left(3^{x^2}4^x\right) > \log_2 9 \Leftrightarrow \log_2 3^{x^2} + \log_2 4^x > \log_2 9$

$\Leftrightarrow x^2 \log_2 3 + 2x > 2 \log_2 3$.

$f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}4^x > 9 \Leftrightarrow \log\left(3^{x^2}4^x\right) > \log 9 \Leftrightarrow \log 3^{x^2} + \log 4^x > \log 9 \Leftrightarrow x^2 \log 3 + x \log 4 > \log 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 199. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3(4x - x^2) \le 1$.

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định $4x - x^2 > 0$ hay $0 < x < 4$.

Ta có

$$4x - x^2 \le 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $0 < x \le 1$ hoặc $3 \le x < 4$.

Theo giả thiết x nguyên nên $x \in \{1;3\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 200. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A. $S = (-\infty;1]$. **B.** $S = [1;+\infty)$. **C.** $S = (-\infty;1)$. **D.** $S = (1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x-1 \le -x+1 \Leftrightarrow x \le 1$.

Vậy $S = (-\infty;1]$.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. A	5. B	6. B	7. A	8. D	9. B	10. D
11. A	12. C	13. C	14. D	15. A	16. C	17. D	18. C	19. B	20. D
21. D	22. A	23. C	24. A	25. C	26. D	27. D	28. C	29. C	30. A
31. A	32. D	33. A	34. D	35. D	36. A	37. D	38. D	39. A	40. A
41. D	42. D	43. C	44. B	45. D	46. A	47. D	48. B	49. C	50. C
51. B	52. C	53. B	54. B	55. B	56. C	57. C	58. B	59. C	60. A
61. B	62. D	63. B	64. C	65. B	66. A	67. D	68. A	69. B	70. C
71. C	72. B	73. B	74. A	75. C	76. A	77. C	78. B	79. C	80. A
81. B	82. C	83. C	84. D	85. A	86. B	87. C	88. A	89. B	90. B
91. C	92. A	93. C	94. C	95. A	96. A	97. B	98. C	99. A	100. D
101. A	102. B	103. D	104. A	105. B	106. D	107. A	108. B	109. D	110. C
111. C	112. B	113. B	114. B	115. B	116. D	117. D	118. D	119. C	120. B
121. A	122. D	123. C	124. B	125. C	126. A	127. D	128. A	129. D	130. D
131. A	132. B	133. A	134. D	135. B	136. A	137. B	138. A	139. A	140. D
141. A	142. A	143. B	144. D	145. A	146. A	147. B	148. C	149. A	150. D
151. D	152. B	153. A	154. D	155. C	156. B	157. B	158. A	159. B	160. C
161. A	162. A	163. A	164. C	165. C	166. A	167. A	168. B	169. A	170. C
171. C	172. A	173. B	174. D	175. D	176. D	177. B	178. C	179. B	180. A
181. A	182. C	183. D	184. A	185. D	186. D	187. B	188. A	189. C	190. C
191. D	192. B	193. A	194. D	195. B	196. A	197. C	198. C	199. D	200. A

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

A. $S=\left(3;\dfrac{11}{2}\right)$. **B.** $S=(-\infty;4]$. **C.** $S=(1;4]$. **D.** $S=(1;4)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\11-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\dfrac{11}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}&\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0\Leftrightarrow -\log_3(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &\log_3\frac{11-2x}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{11-2x}{x-1}\geq 1\Leftrightarrow\frac{11-2x}{x-1}-1\geq 0(\text{vì } x-1>0)\\ \Leftrightarrow\ &12-3x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $1<x\leq 4$.

Vậy $S=(1;4]$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(1)-\mathrm{e}$. **B.** $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $m>f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<\mathrm{e}^x+m\Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^x<m$.

Xét $h(x)=f(x)-\mathrm{e}^x,\ x\in(-1;1)$.

Khi đó $h'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<0,\ \forall x\in(-1;1)$ (Vì $f'(x)<0,\ \forall x\in(-1;1)$ và $\mathrm{e}^x>0,\ \forall x\in(-1;1)$).

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)\Rightarrow h(-1)>h(x)>h(1),\ \forall x\in(-1;1)$.

Để bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\geq h(-1)\Leftrightarrow m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

A. $S=\dfrac{8}{3}$. **B.** $S=\dfrac{28}{15}$. **C.** $S=\dfrac{11}{5}$. **D.** $S=\dfrac{31}{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}6-5x>0\\3x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{6}{5}\\x>\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}$.

$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow 3x-2>6-5x\Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $1<x<\dfrac{6}{5}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{6}{5}\end{cases}$.

Vậy $S=a+b=1+\dfrac{6}{5}=\dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để bất phương trình

$$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x + (2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x - (m+1)2^x \geq 0$$

nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. 10. **B**. 9. **C**. 12. **D**. 11.

Lời giải.

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho $2^x > 0$ ta được

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^x + (2-m)\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x - (m+1) \geq 0.$$

Nhận thấy $\left(3+\sqrt{7}\right)^x \cdot \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = 1$, do đó đặt $t = \left(3+\sqrt{7}\right)^x (t>0) \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t + (2-m)\frac{1}{t} - (m+1) \geq 0 &\Leftrightarrow t^2 - (m+1)t + 2 - m \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - t + 2 \geq m(t+1) \\ &\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2-t+2}{t+1}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-t+2}{t+1}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{(2t-1)(t+1) - t^2 + t - 2}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 1$.

Kết hợp điều kiện đề bài có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(1;20)$ để $\forall x \in \left(\frac{1}{3};1\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình $\log_m x > \log_x m$?

A. 18. **B**. 16. **C**. 17. **D**. 0.

Lời giải.

ĐK $0 < x \neq 1$. BPT $\Leftrightarrow \log_m x > \dfrac{1}{\log_m x} \Leftrightarrow \dfrac{(\log_m x)^2 - 1}{\log_m x} > 0.$ $(*)$

Do $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow \log_m x < 0$. Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 < \log_m x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} < x < m$

Để mọi $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của BPT thì $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{3} < 1 \leq m \Leftrightarrow m \geq 3 \Rightarrow m \in \{3; 4; \ldots; 19\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là?

A. $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 9^x ta được $6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 6 > 0$.

Đặt $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t$ $(t > 0)$. Ta được bất phương trình mới $6t^2 - 13t + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \dfrac{3}{2} \\ t > \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x < \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2 + 3) < \log(x^2 + mx + 1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải.

Phương pháp: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình. Giải bất phương trình logarit: $\log f(x) < \log g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Cách giải:

$\log\left(2x^2 + 3\right) < \log\left(x^2 + mx + 1\right), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 0 < 2x^2 + 3 < x^2 + mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 2 < 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 < 0 \\ \Delta = m^2 - 8 < 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(4x - x^2) = \log_2 m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $m \in (0;8)$. **B**. $m \in \left(\frac{1}{2};8\right)$. **C**. $m \in (-1;3)$. **D**. $m \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra

$$f'(4x-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-x^2=0 \\ 4x-x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=2. \quad \text{(bội hai)} \end{array}\right.$$

$$f'(4x-x^2)>0 \Leftrightarrow 0<4x-x^2<4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<4 \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Đặt $g(x)=f(4x-x^2)$, suy ra $g'(x)=(4-2x)\cdot f'(4x-x^2)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$4-2x$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(4x-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, suy ra phương trình $f(4x-x^2)=\log_2 m$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\max\{g(0);g(4)\}<\log_2 m<g(2)$.

Ta có $g(0)=f(0)=-1$, $g(4)=f(0)=-1$ và $g(2)=f(4)=3$.

Vậy $-1<\log_2 m<3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\log_4 x^2+\log_8 (x-6)^3=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{7}$:

A. 0. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

ĐK: $x>6$.

Ta có $\log_4 x^2+\log_8(x-6)^3=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{7} \Leftrightarrow \log_2 x+\log_2(x-6)=\log_2 7$.

$\Leftrightarrow \log_2 x(x-6)=\log_2 7 \Leftrightarrow x(x-6)=7 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & (l) \\ x=7 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Bất phương trình $(x^3-9x)\ln(x+5)\leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

A. 4 . **B**. 7. **C**. 6. **D**. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x>-5$ (*).

Xét $(x^3-9x)\ln(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-9x=0 \\ \ln(x+5)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện (*))}. \\ x=-4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của biểu thức $f(x)=(x^3-9x)\ln(x+5)$ trên khoảng $(-5;+\infty)$.

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Khi đó $f(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le x \le -3 \\ 0 \le x \le 3. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4;\ -3;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f\left(2m - 2^12\right) < 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0 \in [1; 505]$. **B.** $m_0 \in [505; 1009)$. **C.** $m_0 \in [1009; 1513)$. **D.** $m_0 \in [1513; 2009)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1$. Vì $f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$ nên $\int f(x)e^{2x}dx = \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_{\frac{1}{2}}|x-1| < \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ là

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x \ne 1$.

$$\begin{aligned} 2\log_{\frac{1}{2}}|x-1| < \log_{\frac{1}{2}} x - 1 &\Leftrightarrow -2\log_2|x-1| < -\log_2 x - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 > \log_2 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 > 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2+\sqrt{3} \\ x < 2-\sqrt{3} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} 0 < x < 2-\sqrt{3} \\ x > 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5; \cdots\}$.

Vậy bất phương trình có vô số nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4} + (x^2-4)\cdot 2019^{x-2} \ge 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

A. 5. **B.** 4. **C.** -5. **D.** -1.

Lời giải.

☑ Trường hợp 1. $x^2 - 4 < 0$ ta có $9^{x^2-4} + (x^2-4)\cdot 2019^{x-2} < 9^0 + 0 \cdot 2019^{x-2} = 1$.

☑ Trường hợp 2. $x^2 - 4 \ge 0$ ta có $9^{x^2-4} + (x^2-4)\cdot 2019^{x-2} \ge 9^0 + 0 \cdot 2019^{x-2} = 1$.

Vậy tập hợp các giá trị của x không thỏa mãn bất phương trình là $x \in (-2; 2) \Rightarrow a = -2,\ b = 2 \Rightarrow b - a = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < \mathrm{e}^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(1) - \mathrm{e}$. **B.** $m > f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m \geq f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $m > f(1) - \mathrm{e}$.

Lời giải.

$f(x) < \mathrm{e}^x + m \Leftrightarrow f(x) - \mathrm{e}^x < m$.

Xét $h(x) = f(x) - \mathrm{e}^x, \forall x \in (-1;1)$.

$h'(x) = f'(x) - \mathrm{e}^x < 0, \forall x \in (-1;1)$ (Vì $f'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$ và $\mathrm{e}^x > 0, \forall x \in (-1;1)$).

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1) \Rightarrow h(-1) > h(x) > h(1), \forall x \in (-1;1)$.

Bất phương trình $f(x) < \mathrm{e}^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq h(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1).18^x + (2-m).6^x + 2^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

A. $(-\infty;2)$. **B.** $\left(-2;-\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải.

$(3m+1).18^x + (2-m).6^x + 2^x < 0$

Chia 2 vế cho $2^x > 0$, ta được: $(3m+1).9^x + (2-m).3^x + 1 < 0$

Đặt $t = 3^x$, có $x > 0 \Rightarrow t > 1$

BPT $\Leftrightarrow (3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0 \Leftrightarrow m(3t^2 - t) + t^2 + 2t + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$

Xét $f(t) = -\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$ trên $[1;\infty)$

Có $f'(t) = \dfrac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2} > 0 \ \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên $[1;\infty)$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} f(t) = f(1) = -2$

Vậy $m \leq -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2018} x \leq \log_x 2018$.

A. $S = (0;2018]$. **B.** $S = \left[\dfrac{1}{2018};2018\right]$.

C. $S = \left(0;\dfrac{1}{2018}\right] \cup (1;2018]$. **D.** $S = \left(-\infty;\dfrac{1}{2018}\right] \cup (1;2018]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_{2018} x \leq \dfrac{1}{\log_{2018} x}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_{2018} x)^2 - 1}{\log_{2018} x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 < \log_{2018} x \le 1 \\ \log_{2018} x \le -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 < x \le 2018 \\ 0 < x \le \dfrac{1}{2018} \end{bmatrix}$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^x - m\left(\sqrt{10}-1\right)^x > 3^{x+1}$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

A. $m < -\dfrac{7}{4}$. **B.** $m < -\dfrac{9}{4}$. **C.** $m < -2$. **D.** $m < -\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^x - m\left(\sqrt{10}-1\right)^x > 3^{x+1}$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^x > 3$.

Nhận thấy $\dfrac{\sqrt{10}+1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{10}-1}{3} = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{10}-1}{3} = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-1}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-x} > 3$.

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x$, $t > 0$. Khi đó (1) trở thành: $t - \dfrac{m}{t} > 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t > m$. (2)

Ta có (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t > 0$.

Đặt $f(t) = t^2 - 3t \Rightarrow f'(t) = 2t - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	$-\dfrac{9}{4}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m < -\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{x+1}(-2x) > 2$.

A. $S = (-1, 0)$. **B.** $S = (-\infty, 0)$.

C. $S = \left(\sqrt{3}-2, 0\right)$. **D.** $S = \left(\sqrt{3}-2, +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \ne 1 \\ -2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Vì $-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x+1 < 1$

Khi đó $\log_{x+1}(-2x) > 2 \Leftrightarrow -2x < (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2-\sqrt{3} \\ x > -2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $S = \left(\sqrt{3}-2, 0\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Giải bất phương trình sau $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

A. $\frac{5}{3} < x < 3$. **B.** $-1 < x < 3$. **C.** $-1 < x < \frac{5}{3}$. **D.** $x > 3$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $0 < 3x-5 < x+1 \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x+1} - m(2^x+1) > 0$ có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$. **B.** $m \in (-\infty; 0)$.

C. $m \in (-\infty; 1)$. **D.** $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng $m < \dfrac{4 \cdot 4^x}{2^x+1}$.

Xét hàm số $y = f(t)$ với $t > 0$, ta có

Đạo hàm: $f'(t) = 4 \cdot \dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = -2$. Mặt khác, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$. Bảng biến thiên

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	
$f(t)$	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thu được $m \le 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Chị Hoa mua nhà trị giá 300.000.000 đồng bằng tiền vay ngân hàng theo phương thức trả góp với lãi suất $0,5\%$/tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Hoa trả 5.500.000 đồng/tháng. Hỏi sau thời gian bao nhiêu tháng chị Hoa trả hết số tiền trên?

A. 64 tháng. **B.** 63 tháng. **C.** 62 tháng. **D.** 65 tháng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền vay; a là số tiền góp hàng tháng;

n là số tháng phải góp; r là lãi suất ngân hàng (%).

Ta có $a = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Để trả hết nợ khi $\dfrac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n} \ge 300$ (triệu) $\Rightarrow n \ge \log_{1+r}\dfrac{a}{a-Ar} \approx 63.85$.

Vậy sau 64 tháng thì chị Hoa trả hết nợ.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Tìm m để bất phương trình $\log^2 x + 3\log x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

A. $m \geq \dfrac{9}{4}$. **B.** $m \leq \dfrac{9}{4}$. **C.** $m < \dfrac{9}{4}$. **D.** $m > -\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log x, t \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình trở thành $t^2 + 3t + m \geq 0$

$\Leftrightarrow m \geq -t^2 - 3t\,(2)$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Xét $f(t) = -t^2 - 3t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(t)' = -2t - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq \dfrac{9}{4}$.

t	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$+\infty$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x}$. Tìm số phần tử của S.

A. 11. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 1.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x^2-3x-10 \geq 0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \\ x<14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x < 14.$$

$\Rightarrow x \in \{5;6;7;8;9;10;11;12;13\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Một người sử dụng xe máy có giá trị ban đầu là 40 triệu đồng. Sau mỗi năm, giá trị xe giảm 10% so với năm trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì giá trị xe nhỏ hơn 12 triệu đồng?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải.

Giá trị xe sau năm thứ nhất là:

$40 - 40 \cdot \dfrac{1}{10}$ triệu đồng.

Giá trị xe sau năm thứ hai là:

$40-40\cdot\dfrac{1}{10}-\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\dfrac{1}{10}=\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\left(1-\dfrac{1}{10}\right)$ triệu đồng.

Giá trị xe sau năm thứ ba là:

$\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\left(1-\dfrac{1}{10}\right)-\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\dfrac{1}{10}=\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^2$

...

Suy ra giá xe sau năm thứ n là:

$\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

$\left(40-40\cdot\dfrac{1}{10}\right)\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}<12\Leftrightarrow 36\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}<12\Leftrightarrow\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow n-1>\log_{\frac{9}{10}}\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow n>1-\log_{\frac{9}{10}}3>11{,}4$.

Vậy sau ít nhất 12 năm thì giá xe nhỏ hơn 12 triệu đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+m)<\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(1;+\infty)$. Tìm tập S.

A. $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=[2;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;0)$. **D.** $S=(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+m)<\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x^2-3x+m>x-1.\end{cases}$$

Xét $x^2-3x+m>x-1\Leftrightarrow m>-x^2+4x-1\Leftrightarrow m>-(x-2)^2+3$. Đặt $f(x)=-(x-2)^2+3$. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	1		2		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	3	↘	$-\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m>\max\limits_{(1;+\infty)}f(x)\Leftrightarrow m>3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Bất phương trình $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x>-1$.

$$\log_4(x+7)>\log_2(x+1)\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x+7}>\log_2(x+1)\Leftrightarrow\sqrt{x+7}>x+1\Leftrightarrow-3<x<2.$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra $-1<x<2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Bất phương trình $\ln(2x^2+3) > \ln(x^2+ax+1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi

A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$. **B.** $0 < a < 2\sqrt{2}$. **C.** $0 < a < 2$. **D.** $-2 < a < 2$.

Lời giải.

$\ln(2x^2+3) > \ln(x^2+ax+1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1>0 \\ 2x^2+3>x^2+ax+1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1>0 \\ x^2-ax+2>0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4<0 \\ a^2-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<a<2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x+2) + 2\log_{5^x+2} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a+3b$.

A. $P = 16$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = 18$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_2(5^x+2) + 2\log_{5^x+2} 2 > 3 \\ \Leftrightarrow &\log_2(5^x+2) + 2\frac{1}{\log_2(5^x+2)} > 3 \\ \Leftrightarrow &\log_2^2(5^x+2) - 3\log_2(5^x+2) + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} \log_2(5^x+2) < 1 \\ \log_2(5^x+2) > 2 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} 5^x+2 < 2 \\ 5^x+2 > 4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow &5^x > 2 \\ \Leftrightarrow &x > \log_5 2. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 nên ta tìm được $a = 5$, $b = 2$.
Và do đó, $P = 16$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Bất phương trình $2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-x} - 33 < 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. Vô số. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{x+2} + 8.2^{-x} - 33 < 0 &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^x < 8 \Leftrightarrow -2 < x < 3. \end{aligned}$$

Suy ra bất phương trình có 4 nghiệm nguyên $S = \{-1, 0, 1, 2\}$.
Chọn đáp án D □

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $3\log_2(x+3)-3\le \log_2(x+7)^3-\log_2(2-x)^3$ là $S=(a;b)$. Tính $P=b-a$.

A. 5. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định $-3<x<2$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\log_2\left((x+3)(2-x)\right)\le \log_2\left(2(x+7)\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+8\ge 0 \text{ (luôn đúng với } x \text{ thuộc tập xác định).}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(-3;2)$. Do đó $P=b-a=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Bất phương trình $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$ có tập nghiệm là

A. $(-1;2)$. **B**. $(2;4)$. **C**. $(-3;2)$. **D**. $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-1$.

BPT tương đương với

$\log_4(x+7)>\log_4(x+1)^2\Leftrightarrow x+7>(x+1)^2\Leftrightarrow x^2+x-6<0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Kết hợp điều kiện có tập nghiệm $(-1;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2\log u_1+\sqrt{3\log u_9-2\log u_1+2}=3\log u_9$ và $u_{n+1}=3u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>100^{50}$ bằng

A. 230. **B**. 248. **C**. 247. **D**. 231.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}u_1>0\\ 3\log u_9-2\log u_1+2\ge 0\end{cases}$.

$2\log u_1+\sqrt{3\log u_9-2\log u_1+2}=3\log u_9\Leftrightarrow \sqrt{3\log u_9-2\log u_1+2}=3\log u_9-2\log u_1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3\log u_9-2\log u_1+2}=2\Leftrightarrow 3\log u_9-2\log u_1-2=0$.

(u_n) là cấp số nhân với công bội $q=3\Rightarrow u_9=3^8u_1$.

$3\log u_9-2\log u_1-2=0\Leftrightarrow 3\log(3^8u_1)-2\log u_1-2=0\Leftrightarrow \log u_1=2-\log 3^{24}\Leftrightarrow u_1=10^2\cdot 3^{-24}$.

Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n=100\cdot 3^{n-25}\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$.

$u_n>100^{50}\Leftrightarrow n-25>49\cdot\log_3 100\Rightarrow n>230,4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n=231$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5}=5^{-(y+4)}$ và $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8$.

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $5^{-(y+4)}=3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5}\ge 3^{-\log_3 5}\Rightarrow 5^{-(y+4)}\ge 5^{-1}\Rightarrow -(y+4)\ge -1\Rightarrow y\le -3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|x^2-2x-3|=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3.\end{array}\right.$

Khi đó $4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8 \Leftrightarrow -4y - (1-y) + y^2 + 6y + 9 \le 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \le 0 \Leftrightarrow -3 \le y \le 0$.
Kết hợp với điều kiện $y \le -3$ ta suy ra $y = -3$.
Với $y = -3$, ta có $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Vậy có đúng hai cặp số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên m sao cho bất phương trình $\ln 5 + \ln(x^2+1) \ge \ln(mx^2 + 4x + m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\ln 5 + \ln(x^2+1) \ge \ln(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \ge mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2 - 4x + 5 - m \ge 0 \quad (1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 \quad (2). \end{cases}$$

Bất phương trình có tập nghiệm $\mathbb{R} \Leftrightarrow (1), (2)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- ☑ Với $m = 5$, $(1) \Leftrightarrow -4x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0 \Rightarrow m = 5$ không thỏa mãn.
- ☑ Với $m = 0$, $(2) \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn.
- ☑ Với $m \ne 0, 5$, ta có (1), (2) có tập nghiệm $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m > 0 \\ \Delta_1' \le 0 \\ m > 0 \\ \Delta_2' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 5 \\ 4 - (5-m)^2 \le 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 5 \\ m \in (-\infty; 3] \cup [7; +\infty) \\ m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; 3].$$

Vậy có 1 số nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{\pi}{\sqrt{13}}}(2x-1)}$.

A. $\mathscr{D} = (1; +\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = [1; +\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **D.** $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải.

Điều kiện

$$\log_{\frac{\pi}{\sqrt{13}}}(2x-1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < 2x - 1 \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 1.$$

Vậy $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^3 u_1 - 2\log^2 u_1 + \log u_1 - 2 = 0$ và $u_{n+1} = 2u_n + 10$ (với mọi $n \in \mathbb{N}^*$). Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 10^{100} - 10$ bằng

A. 326. **B**. 327. **C**. 325. **D**. 324.

Lời giải.

Điều kiện $u_1 > 0$.

Vì $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 10 \end{cases} \Rightarrow u_n > 10$ với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \log u_1 > 1$.

Ta có $\log^3 u_1 - 2\log^2 u_1 + \log u_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log u_1 = 1 \text{ (loại)} \\ \log u_1 = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \\ \log u_1 = 1 + \sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right. \Rightarrow u_1 = 10 \cdot 10^{\sqrt{3}}$.

Ta có

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 \cdot 10 \cdot 10^{\sqrt{3}} + 10 = 10(2^1 \cdot 10^{\sqrt{3}} + 2^0) \\ u_3 &= 2 \cdot 10 \cdot (2^1 \cdot 10^{\sqrt{3}} + 2^0) + 10 = 10(2^2 \cdot 10^{\sqrt{3}} + 2^1) \\ &\dots \\ \Rightarrow u_n &= 10(2^{n-1} \cdot 10^{\sqrt{3}} + 2^{n-2}) \end{aligned}$$

Vì $u_n > 10^{100} - 10 \Rightarrow 10(2^{n-1} \cdot 10^{\sqrt{3}} + 2^{n-2}) > 10^{100} - 10 \Rightarrow 2^{n-2} > \dfrac{10^{99} - 1}{2 \cdot 10^{\sqrt{3}} + 1} \Rightarrow n > 324{,}2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x \geq 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x$.

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2 x + \log_3 x \geq 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x \\ \Leftrightarrow\ & (\log_2 x - 1)(\log_3 x - 1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_3 x \geq 1 \end{cases} \text{(1) hoặc } \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_3 x \leq 1 \end{cases} \text{(2).} \end{aligned}$$

Khi đó,

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$ (vô nghiệm).

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$.

Vậy bất phương trình có hai nghiệm nguyên là $x = 2$, $x = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho dãy số $u_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$. Số n lớn nhất để $\log \dfrac{u_n}{2018!}$ nhận giá trị âm là

A. 2016. **B**. 2017. **C**. 2019. **D**. 2018.

Lời giải.

Với mọi số nguyên dương k ta có

$$k \cdot k! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!.$$

Áp dụng kết quả trên ta có

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! \\ &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + [(n+1)! - n!] \\ &= (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\log \frac{u_n}{2018!} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{u_n}{2018!} < 1 \Leftrightarrow 0 < u_n < 2018! \Leftrightarrow 0 < (n+1)! - 1 < 2018! \\ \Leftrightarrow\ & 1 < (n+1)! < 2018! + 1 \Leftrightarrow n \in \{1; 2; \ldots; 2017\}. \end{aligned}$$

Vậy số n lớn nhất để $\log \frac{u_n}{2018!}$ nhận giá trị âm là 2017.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m(\log_4 x^2 - 7)$ chứa khoảng $(256; +\infty)$?

A. 7. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Xét trên $(256; +\infty)$, khi đó bất phương trình tương đương

$$\sqrt{\log_2^2 x - 6\log_2 x - 7} < m(\log_2 x - 7) \quad (1).$$

Đặt $t = \log_2 x$ với $x > 256 \Rightarrow t = \log_2 x > 8$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6t - 7} < m(t-7) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(t-7)} < m(t-7) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{t+1} < m\sqrt{t-7} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < m \ (*) (\text{do } t-7 > 1 > 0). \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm chứa $(256; +\infty)$ khi và chỉ khi (*) nghiệm đúng với mọi $t > 8$.
Ta có $\forall t > 8$ thì $\frac{t+1}{t-7} = 1 + \frac{8}{t-7} \Rightarrow 1 < \frac{t+1}{t-7} < 1 + \frac{8}{8-7} = 9 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < 3$.
Từ đó tìm được điều kiện của tham số m là $m \geq 3$. Vậy có 8 giá trị nguyên cần tìm là $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1}\right) \leq 0$ là

A. $(-1; 3]$. **B.** $(-1; +\infty)$.

C. $[3; +\infty)$. **D.** $(-1; +\infty) \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-1; +\infty) \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho $\log_b(a+1)>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(b-1)a>0$. **B.** $a+b<1$. **C.** $a+b>1$. **D.** $a(b+1)>0$.

Lời giải.

Ta có $\log_b(a+1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<b\neq 1 \\ a+1>0 \\ (a+1-1)(b-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ a>-1 \\ a(b-1)>0 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x\leqslant 0$ có nghiệm đúng với $\forall x>0$.

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m\leqslant -2$. **D.** $m\geqslant -2$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x\leqslant 0,\ \forall x>0 \\ \Leftrightarrow\ & (3m+1)4^x+(2-m)2^x+1\leqslant 0\,\forall x>0 \\ \Leftrightarrow\ & (3m+1)t^2+(2-m)t+1\leqslant 0,\ t=2^x>1 \\ \Leftrightarrow\ & m\leq \frac{-t^2-2t-1}{3t^2-t},\ t>1 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}$, với $t>1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{7t^2+6t-1}{t^2(3t-1)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$. Ta loại cả hai nghiệm này.

Mặt khác, $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=-2$.

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$	$\|$	$+$	
$f(t)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\leq -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(-\infty;0)$. **B.** $m\in\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x$, do $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow t>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó ta cần tìm tham số m để bất phương trình $\dfrac{t^2-1}{2t}<m$ có nghiệm $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)=\mathscr{D}$.

Suy ra $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(t) < m$. Với $f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2t} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2t^2} > 0$.

Suy ra $m > \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho bất phương trình $2^{x^2+x} + 2x \le 2^{3-x} - x^2 + 3$ có tập nghiệm là $[a;b]$, $a < b$. Giá trị của $T = 2a + b$ là

A. $T = 1$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = -2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $2^{x^2+x} + 2x \le 2^{3-x} - x^2 + 3 \Leftrightarrow 2^{x^2+x} + x^2 + x \le 2^{3-x} + 3 - x$. (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathscr{D}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + x \le 3 - x \Leftrightarrow -3 \le x \le 1 \Rightarrow a = -3, b = 1 \Rightarrow T = -5$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + \log_3(x-1) \ge 0$ là

A. $S = (5;6]$. **B.** $S = [1;6]$. **C.** $S = (5;+\infty)$. **D.** $S = (1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình là $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-6x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$.

Với $x > 5$, ta có:

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + \log_3(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow -\log_3(x^2 - 6x + 5) + \log_3(x-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow \log \dfrac{x-1}{x^2-6x-5} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{(x-1)(x-5)} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-5} \ge 1 \Leftrightarrow x - 5 \le 1 \Leftrightarrow x \le 6$

Kết hợp với điều kiện, suy ra nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x>5 \\ x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x \le 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (5;6]$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\dfrac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2 x$ là

A. $x = 7$. **B.** $x = 8$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 1$.

Lời giải.

Điều kiện : $x > 0$.

$$\begin{aligned}
&\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\tfrac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2 x\\
&\Leftrightarrow \log_2^4 x - \left(\log_2 x^3 - \log_2 8\right)^2 + 9\left(\log_2 32 - \log_2 x^2\right) < 4\log_2^2 x\\
&\Leftrightarrow \log_2^4 x - \left(3\log_2 x - 3\right)^2 + 9\left(5 - 2\log_2 x\right) - 4\log_2^2 x < 0\\
&\Leftrightarrow \log_2^4 x - 13\log_2^2 x + 36 < 0\\
&\Leftrightarrow (t^2-9)(t^2-4) < 0 (\text{ với } t = \log_2 x)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < t < -2\\ 2 < t < 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -2\\ 2 < \log_2 x < 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{4}\\ 4 < x < 8.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình đã cho là $x = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Bất phương trình $\log_x\left(\log_3\left(9^x - 72\right)\right) \le 1$ có tập nghiệm là

A. $S = (1;2]$. **B.** $S = \left(\log_3\sqrt{72};2\right]$. **C.** $S = \left(\log_3\sqrt{73};2\right]$. **D.** $S = (-\infty;2]$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình đã cho là $\begin{cases} 9^x - 72 > 0\\ \log_3\left(9^x - 72\right) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 72 > 0\\ 9^x - 72 > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x > 72\\ 9^x > 73\end{cases} \Leftrightarrow x > \log_3\sqrt{73}$ $(*)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\log_x\left(\log_3\left(9^x - 72\right)\right) \le 1 \Leftrightarrow \log_3\left(9^x - 72\right) \le x\\
&\Leftrightarrow 3^{2x} - 72 \le 3^x \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 72 \le 0\\
&\Leftrightarrow -8 \le 3^x \le 9 \Leftrightarrow x \le 2.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$, suy ra nghiệm của bất phương trình là $\log_3\sqrt{73} < x \le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\log_3\sqrt{73};2\right]$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_4(x^2 - x - m) \ge \log_2(x+2)$ có nghiệm.

A. $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $[-2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\log_4(x^2 - x - m) \ge \log_2(x+2) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_4(x^2 - x - m) \ge \log_2(x+2)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0\\ x^2 - x - m \ge (x+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2\\ m \le -5x - 4\end{cases}
\end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x) = -5x - 4$ với $x > -2$ sau đây

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	6	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m < 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{25-x^2}\left(\log_2(x^2-4x+5)-1\right) \leq 0$

A. 6. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in [-5;5]$.

Trường hợp 1: $25-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 5$ là nghiệm của bất phương trình.

Trường hợp 2: Với $x \in (-5;5)$ thì $\sqrt{25-x^2}>0$. Khi đó bất phương trình tương đương $\log_2(x^2-4x+5)-1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2-4x+5) \leq 1 \Leftrightarrow x^2-4x+5 \leq 2 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \leq 0$.

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1;2;3\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 5 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương của tham số m sao cho bất phương trình $4^x-m\cdot 2^x-m+15 \geq 0$ có nghiệm với mọi $x \in [1;2]$. Tính số phần tử của S.

A. 7. **B**. 4. **C**. 9. **D**. 6.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$ để $1 \leq x \leq 2$ suy ra $2 \leq t \leq 4$. Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình

$$t^2-mt-m+15 \geq 0 \quad (*) \quad \forall t \in [2;4]$$

Xét $t \in [2;4]$ ta có

$$t^2-mt-m+15 \geq 0 \Leftrightarrow t^2+15 \geq m(t+1) \Leftrightarrow \frac{t^2+15}{t+1} \geq m$$

Mà $\dfrac{t^2+15}{t+1}=\dfrac{(t+1)^2-2(t+1)+16}{t+1}=t+1+\dfrac{16}{t+1}-2$. Do $t+1>0$ nên theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$t+1+\frac{16}{t+1} \geq 2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{16}{(t+1)}} \Leftrightarrow (t+1)+\frac{16}{t+1} \geq 8 \Leftrightarrow t+1+\frac{16}{t+1}-2 \geq 6$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t+1=\dfrac{16}{t+1} \Leftrightarrow (t+1)^2=16 \Leftrightarrow t+1=4 \Leftrightarrow t=3$.

Suy ra $\min\limits_{t\in[2;4]}\left(\dfrac{t^2+15}{t+1}\right)=6$. Để $(*)$ đúng với mọi $t \in [2;4]$ khi $m \leq 6$.

Tập hợp $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $\sqrt{2^x+2}+\sqrt{6-2^x} \geq m$ có nghiệm là

A. $2\sqrt{2} \leq m \leq 4$. **B**. $0 \leq m \leq 2\sqrt{2}$. **C**. $m \geq 4$. **D**. $m \leq 4$.

Lời giải.

Đặt $2^x = t$. Vì $6-2^x \geq 0$ nên ta có điều kiện $0 < t \leq 6$. Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+2}+\sqrt{6-t}$ trên $(0;6]$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{6-t}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Xét bảng biến thiên

t	0		2		6
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{2}+\sqrt{6}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Ta thấy $f(t) \leq 4$ với mọi $t \in (0;6]$. Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $m \leq 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Do có nhiều cố gắng trong học kỳ 1 năm học lớp 12, Hoa được bố mẹ cho chọn một phần thưởng dưới 5 triệu đồng. Nhưng Hoa muốn mua một cái Laptop 10 triệu đồng nên bố mẹ đã cho Hoa 5 triệu đồng gửi vào ngân hàng (vào ngày 1 tháng 1 năm 2018) với lãi suất 1% trên tháng, đồng thời ngày đầu tiên mỗi tháng (bắt đầu từ ngày 1 tháng 2 năm 2018) bố mẹ sẽ cho Hoa 300000 đồng và cũng gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 1% trên tháng. Biết hàng tháng Hoa không rút lãi ra và tiền lãi được cộng vào vốn cho tháng sau, chỉ rút vốn vào cuối tháng mới được tính lãi của tháng ấy. Hỏi ngày nào trong các ngày dưới đây là ngày gần nhất với ngày 1 tháng 2 năm 2018 mà bạn Hoa có đủ tiền để mua Laptop?

A. Ngày 15.3.2019 . **B**. Ngày 15.5.2019 . **C**. Ngày 15.4.2019 . **D**. Ngày 15.6.2019 .

Lời giải.

Đặt $A = 5000000$, $r = 1\%$, $B = 300000$.

Số tiền Hoa nhận được vào cuối tháng thứ n là

$$A(1+r)^{n+1} + \frac{B}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r).$$

Với yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned}
& A(1+r)^{n+1} + \frac{B}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r) > 10^7 \\
\Leftrightarrow\ & 5\cdot 10^6 \cdot (1{,}01)^{n+1} + 303\cdot 10^5\left[1{,}01^n - 1\right] > 10^7 \\
\Leftrightarrow\ & 3535\cdot 10^4 \cdot 1{,}01^n > 403\cdot 10^5 \\
\Leftrightarrow\ & 1{,}01^n > \frac{806}{707} \\
\Leftrightarrow\ & n > 13{,}1.
\end{aligned}$$

Vậy sau 13 tháng hay 1 năm 1 tháng thì Hoa có đủ số tiền.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m\cdot 4^{x^2-2x-1}-(1-2m)\cdot 10^{x^2-2x-1}+m\cdot 25^{x^2-2x-1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A. $m<0$. **B.** $m\ge\dfrac{100}{841}$. **C.** $m\le\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le\dfrac{100}{841}$.

Lời giải.

$m\cdot 4^{x^2-2x-1}-(1-2m)\cdot 10^{x^2-2x-1}+m\cdot 25^{x^2-2x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow m-(1-2m)\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}+m\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2(x^2-2x-1)}\le 0 \quad (1).$

Đặt $t=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}, t>0.$

Xét $u(x)=x^2-2x-1, \forall x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right].$

$u'(x)=2x-2; u'(x)=0\Leftrightarrow x=1.$

$u\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{4}; u(1)=-2; u(2)=-1\Rightarrow \min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};2\right]}u(x)=-2; \max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};2\right]}u(x)=-1.$

$\Rightarrow \dfrac{4}{25}\le t\le\dfrac{2}{5}.$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow m-(1-2m)t+mt^2\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{t}{t^2+2t+1}.$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t^2+2t+1},\ t\in\left[\dfrac{4}{25};\dfrac{2}{5}\right].$

$f'(t)=\dfrac{-t^2+1}{(t^2+2t+1)^2}>0,\ \forall t\in\left[\dfrac{4}{25};\dfrac{2}{5}\right].$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]}f(t)=f\left(\dfrac{4}{25}\right)=\dfrac{100}{841}.$

Vậy $m\le\dfrac{100}{841}$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right].$

Chọn đáp án D □

Câu 54. Bất phương trình $5^{(\log_5 x)^2}+x^{\log_5 x}\le 10$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Đặt $t=\log_5 x\Rightarrow x=5^t$, ta có

$$\begin{aligned}
&5^{(\log_5 x)^2}+x^{\log_5 x}\le 10\\
\Leftrightarrow\ &5^{t^2}+\left(5^t\right)^t\le 10\\
\Leftrightarrow\ &5^{t^2}\le 5\\
\Leftrightarrow\ &t^2\le 1\\
\Rightarrow\ &-1\le\log_5 x\le 1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{5}\le x\le 5\\
\Rightarrow\ &x\in\{1;2;3;4;5\},\ (\text{ vì } x\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $9^x-(m+1)3^x+2m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1)\leq 3$?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} &9^x-(m+1)3^x+2m-2=0 \quad (1)\\ \Leftrightarrow &\begin{bmatrix} 3^x=2\\ 3^x=m-1. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m>1\\ m\neq 3. \end{cases}$ (2)

Ta thấy

$$\begin{aligned} &(x_1+1)\cdot(x_2+1)\leq 3\\ \Rightarrow\ &[\log_3(m-1)+1]\cdot(\log_3 2+1)\leq 3\\ \Leftrightarrow\ &\log_3 6\cdot\log_3[3\cdot(m-1)]\leq \log_3 27\\ \Leftrightarrow\ &\log_3[3\cdot(m-1)]\leq \log_6 27\\ \Rightarrow\ &\log_3[3\cdot(m-1)]<2\\ \Rightarrow\ &3\cdot(m-1)<9\\ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ &\begin{cases} 1<m<4\\ m\neq 3 \end{cases}\\ \Rightarrow\ &m=2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 56. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

A. 6. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 3.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2^{2x^2-15x+100}+2x^2-15x+100<2^{x^2+10x-50}+x^2+10x-50 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$, do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà bất phương trình $(*)$ tương đương với

$$\begin{aligned} &f(2x^2-15x+100)<f(x^2+10x-50)\\ \Leftrightarrow\ &x^2-25x+150<0\\ \Leftrightarrow\ &10<x<15. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\dfrac{\log_2 \dfrac{x}{2}}{\log_2 x} - \dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \le 1$.

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left(1;\sqrt{2}\right] \cup (2;+\infty)$.
B. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left(1;\sqrt{2}\right]$.
C. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right)$.
D. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right] \cup [1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0, x \ne 1, x \ne 2$.
Đặt $t = \log_2 x$, ta được

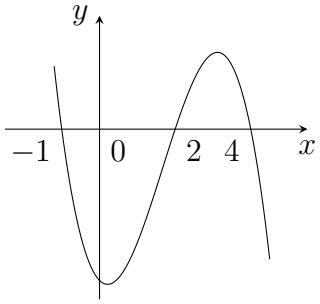
$$\frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(t+1)}{t(t-1)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ 0 < t \le \dfrac{1}{2} \\ t > 1. \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -1 \\ 0 < \log_2 x \le \dfrac{1}{2} \\ \log_2 x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 1 < x \le \sqrt{2} \\ x > 2 \end{array}\right.$.
Như vậy $S = \left(0;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right)$.
Chọn đáp án C □

Câu 58.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.
Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;4)$.
B. $(\log_2 6;4)$.
C. $(-\infty;2)$.
D. $(\log_2 11;+\infty)$.



Lời giải.

Ta có $y' = -2^x \ln 2 f'(10 - 2^x)$.
Xét $y' > 0 \Leftrightarrow -2^x \ln 2 f'(10 - 2^x) > 0 \Leftrightarrow f'(10 - 2^x) < 0$.
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(10 - 2^x) < 0$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} -1 < 10 - 2^x < 2 \\ 10 - 2^x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -11 < -2^x < -8 \\ -2^x > -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 11 > x > 3 \\ x < \log_2 6 \simeq 2{,}6. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 59. Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(\sqrt{3x+1}+6\right) - 1 \ge \log_2\left(7 - \sqrt{10-x}\right)$.

A. $1 \le x \le \dfrac{369}{49}$.
B. $x \ge \dfrac{369}{49}$.
C. $x \le 1$.
D. $x \le \dfrac{369}{49}$.

Lời giải.

Điều kiện $-\dfrac{1}{3} \le x \le 10$.

$$\begin{aligned}\log_2\left(\sqrt{3x+1}+6\right)-1 \ge \log_2\left(7-\sqrt{10-x}\right) &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}+6 \ge 14-2\sqrt{10-x}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} \ge 8-2\sqrt{10-x}\\ &\Leftrightarrow 3x+1 \ge 64-32\sqrt{10-x}+4(10-x) \left(\text{vì } -\frac{1}{3} \le x \le 10\right)\\ &\Leftrightarrow 32\sqrt{10-x} \ge 103-7x\\ &\Leftrightarrow 1024(10-x) \ge 10609-1442x+49x^2 \left(\text{vì } -\frac{1}{3} \le x \le 10\right)\\ &\Leftrightarrow 49x^2-418x+369 \le 0\\ &\Leftrightarrow 1 \le x \le \frac{369}{49}.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $-\dfrac{1}{3} \le x \le 10$ ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 \le x \le \dfrac{369}{49}$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau

$$4^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x} \le m \cdot 7^{\cos^2 x}$$

có nghiệm là $m \in \left[\dfrac{a}{b};+\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tổng $S=a+b$ bằng

A. $S=13$. **B.** $S=15$. **C.** $S=9$. **D.** $S=11$.

Lời giải.

Đưa BPT ban đầu về $4^{1-\cos^2 x}+5^{\cos^2 x} \le m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow \dfrac{4}{28^{\cos^2 x}}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \le m$.

Đặt $\cos^2 x=t, t \in [0;1]$, BPT trở thành $\dfrac{4}{28^t}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^t \le m$.

Xét $f(t)=\dfrac{4}{28^t}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^t, t \in [0;1]$

$f'(t)=-\dfrac{4\ln 28}{28^t}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^t \cdot \ln\dfrac{5}{7}<0, \forall t \in [0;1] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$, lại có $f(1)=\dfrac{6}{7}$.

Từ đó suy ra BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge f(1)=\dfrac{6}{7} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{7} \Rightarrow S=13$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Bất phương trình $(3^x-1)(x^2+3x-4)>0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 6?

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** Vô số.

Lời giải.

Với $x>0$, bất phương trình tương đương $\begin{cases}3^x-1>0\\ x^2+3x-4>0\end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Với $x<0$, bất phương trình tương đương $\begin{cases}3^x-1<0\\ x^2+3x-4<0\end{cases} \Leftrightarrow x<-4$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2\sqrt{x})^2+\log_2 x+m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(1;64)$.

A. $m\leq 0$. **B**. $m\geq 0$. **C**. $m<0$. **D**. $m>0$.

Lời giải.

Ta có $4(\log_2\sqrt{x})^2+\log_2 x+m\geq 0\Leftrightarrow(\log_2 x)^2+\log_2 x+m\geq 0$.

Đặt $\log_2 x=t$, khi $x\in(1;64)$ thì $t\in(0;6)$.

Khi đó, ta có $t^2+t+m\geq 0\Leftrightarrow m\geq -t^2-t$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2-t$ với $t\in(0;6)$.

Ta có $f'(t)=-2t-1<0,\forall t\in(0;6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		6
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-42

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in(1;64)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ đúng với mọi $t\in(0;6)\Leftrightarrow m\geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\right)\geq 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Giá trị biểu thức $P=3a-b$ là

A. 5. **B**. 4. **C**. 10. **D**. 7.

Lời giải.

ĐK: $0<\dfrac{3x-7}{x+3}\neq 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\ x>\dfrac{7}{3}.\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}&\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\geq 0\\ \Leftrightarrow&\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\geq 1\\ \Leftrightarrow&\frac{3x-7}{x+3}\leq\frac{1}{3}\\ \Leftrightarrow&\frac{8x-24}{3(x+3)}\leq 0\\ \Leftrightarrow&-3<x\leq 3.\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, tập nghiệm $S=\left(\dfrac{7}{3};3\right]$.

Suy ra $a=\dfrac{7}{3};b=3$. Vậy $P=3a-b=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2\leq 2$.

A. $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** vô nghiệm. **D.** $\left[-\frac{3}{8};3\right]$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$.
Với điều kiện trên bất phương trình

$$\begin{aligned} & 2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \leq 2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(4x-3)^2-\log_3(2x+3) \leq 2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_3\frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{16x^2-24x+9}{2x+3} \leq 9 \\ \Leftrightarrow\ & 16x^2-24x+9 \leq 18x+27 \\ \Leftrightarrow\ & 16x^2-42x-18 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghệm của bất phương trình là $\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\mathrm{e}^{u_{18}}+5\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}}-\mathrm{e}^{4u_1}}=\mathrm{e}^{4u_1}$ và $u_{n+1}=u_n+3$ với $n \geq 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng

A. 1420. **B.** 1419. **C.** 1417. **D.** 1418.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1}=u_n+3 \Rightarrow u_{n+1}-u_n=3 \Rightarrow$ dãy số (u_n) là cấp số cộng với $d=3$.
Xét $\mathrm{e}^{u_{18}}+5\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}}-\mathrm{e}^{4u_1}}=\mathrm{e}^{4u_1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_{18}}-\mathrm{e}^{4u_1}+5\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}}-\mathrm{e}^{4u_1}}=0$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}}-\mathrm{e}^{4u_1}}=0 \\ \sqrt{\mathrm{e}^{u_{18}}-\mathrm{e}^{4u_1}}=-5 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow u_{18}=4u_1 \Leftrightarrow u_1+17d=4u_1 \Rightarrow 3u_1=51 \Rightarrow u_1=17.$
$\log_3 u_n < \ln 2018 \Leftrightarrow \log_3\left(u_1+(n-1)\,d\right) < \ln 2018 \Leftrightarrow \log_3\left(17+3\,(n-1)\right) < \ln 2018.$
$\Leftrightarrow 3n+14 < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow n < \frac{3^{\ln 2018}-14}{3} \approx 1419,935.$
Vậy giá trị lớn nhất của n là $n=1419$.
Chọn đáp án B □

Câu 66. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}} \leq \sqrt{2}$ có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính giá trị $T=ab$.

A. $T=0$. **B.** $T=2$. **C.** $T=3$. **D.** $T=1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 1$ và $\frac{3-2x}{1-x} \geq 1$. BPT $\Leftrightarrow \log_2\frac{3-2x}{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{1-x} \leq 4$.
Ta có hệ $\begin{cases}\frac{3-2x}{1-x} \geq 1 \\ \frac{3-2x}{1-x} \leq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in (-\infty;1)\cup[2;+\infty) \\ \left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. Vậy $T=1$.
Chọn đáp án D □

Câu 67. Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $4^x-2018m2^{x-1}+3-1009m \leq 0$ có nghiệm là

A. $m=1$. **B**. $m=2$. **C**. $m=3$. **D**. $m=4$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & 4^x-2018m2^{x-1}+3-1009m\le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4^x+3-(2^x+1)\cdot 1009m\le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1009m\ge \frac{4^x+3}{2^x+1} \\ \Leftrightarrow\ & 1009m\ge 2^x+1+\frac{4}{2^x+1}-2 \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & 1009m\ge 2. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) ta thấy $2^x+1+\dfrac{4}{2^x+1}-2=2\Leftrightarrow x=0$.
Từ (2) ta suy ra $m=1$ thoả mãn đề bài.
Chọn đáp án A □

Câu 68. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x<\frac{2018\cdot \mathrm{e}^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}\bigg|_1^2=\frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}$.
Khi đó bất phương trình tương đương

$$\mathrm{e}^{2k}-2019\cdot e^k+2018<0\Leftrightarrow 1<\mathrm{e}^k<2018\Leftrightarrow 0<k<\ln 2018.$$

Vì k nguyên dương nên $k\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 69. Biết bất phương trình $\log_5(5^x-1)\cdot\log_{25}(5^{x+1}-5)\le 1$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $-2+\log_5 156$. **B**. $2+\log_5 156$. **C**. $-2+\log_5 26$. **D**. $-1+\log_5 156$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \log_5(5^x-1)\cdot\log_{25}(5^{x+1}-5)\le 1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5(5^x-1)\left[1+\log_{25}(5^x-1)\right]\le 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_5^2(5^x-1)+\log_5(5^x-1)-2\le 2\Leftrightarrow -2\le\log_5(5^x-1)\le 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{25}\le 5^x-1\le 5\Leftrightarrow \log_5\frac{26}{25}\le x\le\log_5 6. \end{aligned}$$

Suy ra $a+b=\log_5\dfrac{26}{25}+\log_5 6=\log_5 156-\log_5 25=\log_5 156-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2+x+2}+1)+3\log_5(x^2+x+3)<4$ là $(a;b)$. Khi đó tổng $2a+b$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

$\log_3(\sqrt{x^2+x+2}+1)+3\log_5(x^2+x+3)<4$. (1)

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2},(t>0)$. Bất phương trình (1) trở thành

$$\log_3(t+1)+3\log_5(t^2+1)<4\Leftrightarrow\log_3(t+1)+3\log_5(t^2+1)-4<0.$$

Đặt $f(t)=\log_3(t+1)+3\log_5(t^2+1)-4$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 3}+\dfrac{2t}{(t^2+1)\ln 5}>0,\forall t>0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Ta có $f(2)=0$. Do đó

$$\begin{aligned}f(t)<0&\Leftrightarrow t<2\\&\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+2}<2\Leftrightarrow x^2+x+2<4\Leftrightarrow x^2+x-2<0\Leftrightarrow -2<x<1.\end{aligned}$$

Suy ra (1) có tập nghiệm $S=(-2;1)$. Vậy $2a+b=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Bất phương trình $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0$ có tập nghiệm là

A. $S=[1;2018]$. **B.** $S=\left[10;10^{2018}\right)$. **C.** $S=\left(10;10^{2018}\right)$. **D.** $S=\left[10;10^{2018}\right]$.

Lời giải.

Ta có $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0\Leftrightarrow 1\le\log x\le 2018\Leftrightarrow 10\le x\le 10^{2018}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho 3 số thực a,b,c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b\cdot\log_a c<\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)$. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_a x+\log_b x>\log_c x$ là

A. $x<1$. **B.** $x>0$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x<0\\x>1\end{array}\right.$. **D.** $0<x<1$.

Lời giải.

Theo giả thiết $\log_a b\cdot\log_a c<\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)\Leftrightarrow\log_a b\cdot\log_a c+\log_a c-\log_a b<0$. Ta có

$$\begin{aligned}\log_a x+\log_b x>\log_c x&\Leftrightarrow\log_a x+\frac{\log_a x}{\log_a b}>\frac{\log_a x}{\log_a c}\\&\Leftrightarrow\log_a x\left(\log_a b\cdot\log_a c+\log_a c-\log_a b\right)>0\\&\Leftrightarrow\log_a x<0\\&\Leftrightarrow 0<x<1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 73. Gọi M và m là nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\dfrac{(|2x+1|-x-2)\left(1-\log_3(x+4)\right)}{5^{x^2}-5^{|x|}}\ge 0$. Khi đó tích giá trị $M\cdot m$ bằng

A. 6. **B.** -24. **C.** 3. **D.** -12.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 5^{x^2}-5^{|x|}\neq 0 \\ x+4>0 \end{cases}$ $(*)$.

Với điều kiện $(*)$, ta xét phương trình

$$\begin{aligned} |2x+1|-x-2=0 &\Leftrightarrow |2x+1|=x+2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x+1=x+2 \\ 2x+1=-x-2 \end{array}\right. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Tương tự xét phương trình

$$1-\log_3(x+4)=0 \Leftrightarrow \log_3(x+4)=1 \Leftrightarrow x+4=3 \Leftrightarrow x=-1.$$

và

$$\begin{aligned} 5^{x^2}-5^{|x|}=0 &\Leftrightarrow 5^{x^2}=5^{|x|} \Leftrightarrow x^2=|x| \\ &\Leftrightarrow x^4=x^2 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta có bảng xét dấu

x	-4		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert -x-2$		$+$	0	$-$		$-$		$+$	
$1-\log_3(x+4)$		$+$		$-$	0	$-$		$-$	
$5^{x^2}-5^{\lvert x\rvert}$		$+$		$-$		$-$		$+$	
VT		$+$		$-$		$-$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình là $-4<x<-1$. Do đó nghiệm nguyên lớn nhất là -2 và bé nhất là -3. Do đó $M\cdot m=(-2)\cdot(-3)=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Thu nhập bình quân đầu người của quốc gia X hiện tại là 2000 USD/1 người/1 năm. Biết mức tăng trưởng GDP (tổng thu nhập quốc dân) của quốc gia đó là 6% một năm và mức gia tăng dân số của quốc gia đó là 1% một năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì mức thu nhập bình quân đầu người của quốc gia X lớn hơn 10000 USD/1 người/1 năm?

A. 36 năm. **B**. 32 năm. **C**. 34 năm. **D**. 40 năm.

Lời giải.

• Mức tăng trưởng GDP bình quân của nước X là $\dfrac{1+0.06}{1+0.01}=\dfrac{106}{101}$.

• Thu nhập bình quân đầu người sau n năm là $2000\cdot\left(\dfrac{106}{101}\right)^n$ (USD/1 người/1 năm) .

• Ta có $2000\cdot\left(\dfrac{106}{101}\right)^n>10000\Leftrightarrow\left(\dfrac{106}{101}\right)^n>5\Leftrightarrow n>\log_{\frac{106}{101}}5\approx 33{,}31$. Do đó sau ít nhất 34 năm thì mức thu nhập bình quân đầu người của quốc gia X lớn hơn 10000 USD/1 người/1 năm.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1\neq 1$ và thỏa mãn $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$. Biết $u_{n+1}=7u_n$ với mọi $n\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>1\,111\,111$.

A. 11. **B**. 8. **C**. 9. **D**. 10.

Lời giải.

Điều kiện $u_1>0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7\\
\Leftrightarrow\ &\log_2^2 u_1+2\log_2 5\log_2 u_1+\log_2^2 u_1+2\log_2 7\log_2 u_1=0\\
\Leftrightarrow\ &\log_2 u_1\left(\log_2 u_1+\log_2 35\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&\log_2 u_1=0\\&\log_2 u_1+\log_2 35=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&u_1=1\ \text{(loại)}\\&u_1=\frac{1}{35}\ \text{(nhận)}.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Dãy số (u_n) là cấp số nhân có $u_1=\dfrac{1}{35}$ và $q=7$ nên $u_n=\dfrac{1}{35}\cdot 7^{n-1}$.

Theo đề bài

$$u_n>1\,111\,111\Leftrightarrow\frac{1}{35}\cdot 7^{n-1}>1\,111\,111\Leftrightarrow 7^{n-1}>38\,888\,885\Leftrightarrow n\gtrsim 9{,}98.$$

Vậy $n=10$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho bất phương trình $\log 5+\log\left(x^2+1\right)\geq\log\left(mx^2+4x+m\right)$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $\log 5+\log\left(x^2+1\right)\geq\log\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+5\geq mx^2+4x+m\\mx^2+4x+m>0\end{cases}$.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m, \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2+4x+m>0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} (5-m)x^2-4x+(5-m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2+4x+m>0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 5-m>0 \\ 4-(5-m)^2<0 \\ m>0 \\ 2-m^2<0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &0<m<\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra chỉ có một giá trị nguyên $m=1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+6) \geq 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $\sqrt{13}-3$ và $\sqrt{13}+3$.
B. $\sqrt{13}-3$.
C. $(\sqrt{13}-3)^2$.
D. $(\sqrt{13}-3)^2$ và $(\sqrt{13}+3)^2$.

Lời giải.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+6) \geq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 \leq 9$ (1)

Giả sử $M(x;y)$ thỏa mãn phương trình (1), khi đó tập hợp điểm M là hình tròn (C_1) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R_1=3$.

Ta có $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=m$. (2)

Với $m>0$ thì (2) là phương trình đường tròn tâm $J(-1;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

Để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau

$\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{13}=\sqrt{m}+3 \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{13}-3\right)^2$

hoặc $JI=|R_1-R_2| \Leftrightarrow \sqrt{13}=|\sqrt{m}-3| \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{13}+3\right)^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Giải bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x-\frac{15}{16}\right)\right) \leqslant 2$.

A. $x \geqslant 0$.
B. $\log_2\frac{15}{16}<x<\log_2\frac{31}{16}$.
C. $0 \leqslant x<\log_2\frac{31}{16}$.
D. $\log_2\frac{31}{16}<x \leqslant 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x-\frac{15}{16}\right)\right) \leqslant 2 &\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x-\frac{15}{16}\right) \leqslant 4 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{16} \leqslant 2^x-\frac{15}{16}<1 \\
&\Leftrightarrow 1 \leqslant 2^x<\frac{31}{16} \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant x<\log_2\frac{31}{16}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 79. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x+7) \geq -3$ là

A. -32. **B.** -14. **C.** -26. **D.** -24.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $\begin{cases} x^2+8x+7>0 \\ x^2+8x+7 \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-7)\cup(-1;+\infty) \\ x \in [-10;2] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-10;-7)\cup(-1;2]$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{-10;-9;-8;0;1;2\}$.

Tổng các nghiệm nguyên là -24.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1} \leq 2-\log_2(x-2)$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Tập xác định của bất phương trình là $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.

$$\begin{aligned} & 2\log_2\sqrt{x+1} \leq 2-\log_2(x-2) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x+1)+\log_2(x-2) \leq 2 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x+1)(x-2) \leq \log_2 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x-6 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(2;3]$, có 1 nghiệm nguyên là $x=3$. Vậy tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 3.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2+3) > \log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log(2x^2+3) > \log(x^2+mx+1) \ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2x^2+3 > x^2+mx+1 \\ x^2+mx+1>0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} x^2-mx+2>0 \qquad (1) \\ x^2+mx+1>0. \qquad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi (1) và (2) luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = m^2-8<0 \\ \Delta_2 = m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(4x-x^2)=\log_2 m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $m\in(0;8)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};8\right)$. **C.** $m\in(-1;3)$. **D.** $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra

$$f'(4x-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-x^2=0\\4x-x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\\x=2.\quad\text{(bội hai)}\end{array}\right.$$

$$f'(4x-x^2)>0\Leftrightarrow 0<4x-x^2<4\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<4\\x\neq 2.\end{cases}$$

Đặt $g(x)=f(4x-x^2)$, suy ra $g'(x)=(4-2x)\cdot f'(4x-x^2)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$4-2x$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(4x-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, suy ra phương trình $f(4x-x^2)=\log_2 m$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\max\{g(0);g(4)\}<\log_2 m<g(2)$.
Ta có $g(0)=f(0)=-1$, $g(4)=f(0)=-1$ và $g(2)=f(4)=3$. Vậy

$$-1<\log_2 m<3\Leftrightarrow\frac{1}{2}<m<8.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(2-x)$ là $S=(a;b)\cup(c;d)$ với a,b,c,d là các số thực. Khi đó tổng $a+b+c+d$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 2-x>0 \\ -\log_3(x+1)>\log_3(2-x) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ \log_3\left[(x+1)(2-x)\right]<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ -x^2+x+1<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow S=\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right).$$

Vậy $a+b+c+d=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x\right)<1$ có dạng $S=\left(\frac{1}{a};b\right)$ với a,b là những số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=-b$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a=b$. **D.** $a=2b$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

$\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x\right)<1\Leftrightarrow 0<1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x<2\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\log_9 x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{3};3\right)$. Suy ra $a=b$.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho $\log_a(b+1)>0$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b(a+1)>0$. **B.** $a+b<1$. **C.** $a+b>1$. **D.** $(a-1)b>0$.

Lời giải.

Điều kiện: $0<a\neq 1$, $b>-1$.

Ta có $\log_a(b+1)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ b+1>a^0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ 0<b+1<a^0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ b>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ -1<b<0 \end{cases} \end{array}\right.$. Suy ra $(a-1)b>0$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Tìm m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1)\geq\log_5(mx^2+4x+m)$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $-1<m\leq 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m\leq 3$. **D.** $2<m<3$.

Lời giải.

Ta có

$$1+\log_5(x^2+1)\geq\log_5(mx^2+4x+m)$$
$$\Leftrightarrow \log_5[5(x^2+1)]\geq\log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+1) \geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2-4x+5-m \geq 0 \quad (1) \\ mx^2+4x+m>0 \quad (2) \end{cases}$$

☑ (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 5-m>0 \\ \Delta_1'=4-(5-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3.$

☑ (2) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m>0 \\ \Delta_2'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2.$

Vậy,bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2<m \leq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên A có bốn chữ số. Gọi N là số thỏa mãn $3^N=A$. Xác suất để N là số tự nhiên bằng

A. $\dfrac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2500}$. **D.** $\dfrac{1}{3000}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Vì $A=3^N$ là số tự nhiên có 4 chữ số nên ta có

$$1000 \leq 3^N \leq 9999 \Leftrightarrow \log_3 1000 \leq N \leq \log_3 9999 \Rightarrow 6{,}28 \leq N \leq 8{,}38.$$

Để $N \in \mathbb{N}$ thì $N \in \{7;8\}$. Do đó xác suất để N là số tự nhiên là $\dfrac{2}{9000}=\dfrac{1}{4500}$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Tìm m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $-1<m \leq 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m \leq 3$. **D.** $2<m<3$.

Lời giải.

Điều kiện $mx^2+4x+m>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-4x}{x^2+1}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} 1+\log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m) &\Leftrightarrow \log_5 5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m) \\ &\Leftrightarrow 5x^2-4x+5 \geq m(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow \frac{5x^2-4x+5}{x^2+1} \geq m \\ &\Leftrightarrow m \leq 5+\frac{-4x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m>\dfrac{-4x}{x^2+1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ m \leq 5+\dfrac{-4x}{x^2+1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{-4x}{x^2+1} < m \leq \min_{x \in \mathbb{R}} \left(5+\frac{-4x}{x^2+1}\right).$$

Hàm số $f(x)=\dfrac{-4x}{x^2+1}$ có $f'(x)=\dfrac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	0

Vậy giá trị m cần tìm là $2 < m \leq 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Bất phương trình $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$ có tập nghiệm là

A. $S = (-\infty; 2]$. **B.** $S = \left(\log_3\sqrt{73}; 2\right]$. **C.** $S = \left(\log_3\sqrt{72}; 2\right]$. **D.** $S = \left[\log_3\sqrt{73}; 2\right]$.

Lời giải.

Điều kiện

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ 9^x - 72 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^x > 72 \\ 9^x > 73 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 73.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1 &\Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) \leq x \\ &\Leftrightarrow 9^x - 72 < 3^x \\ &\Leftrightarrow (3^x - 9)(3^x + 8) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $S = \left(\log_3\sqrt{73}; 2\right]$.

Chọn đáp án B □

Câu 90. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\left(6 + 2\sqrt{7}\right)^x + (2 - m)\left(3 - \sqrt{7}\right)^x - (m - 1)2^x \geq 0.$$

A. 10. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$(3 + \sqrt{7})^x + (2 - m)\left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)^x - (m - 1) \geq 0. \tag{2.12}$$

Đặt $t = (3 + \sqrt{7})^x \Rightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$, với $t > 0$.

Khi đó bất phương trình (1) trở thành

$$t + (2 - m) \cdot \frac{1}{t} - (m - 1) \geq 0 \tag{2.13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - (m - 1)t + (2 - m)}{t} \geq 0 \tag{2.14}$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + t + 2}{t + 1} \text{ (do } t > 0). \tag{2.15}$$

Để bất phương trình (4) đúng với mọi $t>0$, khi chỉ khi m không lớn hơn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+2}{t+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+2}{t+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(t)=t+1+\dfrac{2}{t+1}-1\geq 2\sqrt{2}-1$, dấu bằng xảy ra khi $t=-1+\sqrt{2}$.

Vậy $m\leq 2\sqrt{2}-1$, suy ra có 12 giá trị nguyên của m trong đoạn $[-10;10]$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$5\cdot 4^x+m\cdot 25^x-7\cdot 10^x\leq 0$$

có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 3. **B**. Vô số. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có

$$5\cdot 4^x+m\cdot 25^x-7\cdot 10^x\leq 0\Leftrightarrow 5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x}+m\leq 0.$$

Đặt $t=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x$, bất phương trình trở thành

$$5t^2-7t\leq -m,\ t\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t)=5t^2-7t,\ t\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=10t-7,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{10}$.

Bảng biến thiên của $f(t)$.

x	0		$\dfrac{7}{10}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\dfrac{49}{20}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ⇒ bất phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -\frac{49}{20}\leq -m\Leftrightarrow m\leq\frac{49}{20}.$$

Do $m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m=1,\ m=2$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x^3+x-m)$ có nghiệm.

A. $m<2$. **B**. $m\leq 2$. **C**. $m\in\mathbb{R}$. **D**. Không tồn tại m.

Lời giải.

Bất phương trình có nghiệm $\begin{cases}x-1>0\\ x-1<x^3+x-m\end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ m<x^3+1\end{cases}$ có nghiệm.

Xét $f(x)=x^3+1\Rightarrow f'(x)=3x^2>0\,,\forall x>1$, ta có bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m < f(x), \forall x > 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương, nhỏ hơn 10 để bất phương trình $7^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x} \leq m \cdot 4^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. 11. **B**. 9. **C**. 10. **D**. 2.

Lời giải.

Đặt $\cos^2 x = t,\ 0 \leq t \leq 1$, nhận thấy ứng với mỗi giá trị $t \in [0;1]$ thì tồn tại x để $\cos^2 x = t$.

Bất phương trình đã cho trở thành $7^{1-t} + 3^t \leq m \cdot 4^t \Leftrightarrow m \geq \dfrac{7}{28^t} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^t$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{7}{28^t} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^t$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{7}{28^t} \cdot \ln \dfrac{1}{28} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^t \ln \dfrac{3}{4} < 0,\ \forall t \in [0;1]$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$.

Từ đó dẫn đến $m \geq \min\limits_{[0;1]} f(t) = f(1) = 1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m < 10$ nên có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1} + 1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$ là

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $2^x = t$ điều kiện $t > 0$.

Ta được bất phương trình $\sqrt{30t + 1} \geq |t - 1| + 2t \quad (1)$.

+ Với $t \geq 1$ bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình

$$\sqrt{30t + 1} \geq t - 1 + 2t \Leftrightarrow \sqrt{30t + 1} \geq 3t - 130t + 1 \geq (3t - 1)^2 \Leftrightarrow t^2 - 4t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4.$$

Do $t \geq 1$ nên ta được $1 \leq t \leq 4$. $(*)$

+ Với $0 < t < 1$ bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình

$$\sqrt{30t + 1} \geq 1 - t + 2t \Leftrightarrow \sqrt{30t + 1} \geq t + 1 \Leftrightarrow 30t + 1 \geq (t + 1)^2 \Leftrightarrow t^2 - 28t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 28.$$

Do $0 < t < 1$nên ta được: $0 < t < 1$. $(**)$

+ Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $0 < t \leq 4 \Rightarrow 0 < 2^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Do nghiệm x là nguyên không âm nên $x \in \{0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Tập tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn bất phương trình $\dfrac{2 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x}{6^x - 4^x} \leq 2$ là $(-\infty; a] \cup (b; c]$. Tính $(a + b + c)!$.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có bất phương trình tương đương với $\dfrac{2\cdot 9^x-5\cdot 6^x+2\cdot 4^x}{6^x-4^x}\le 0$. Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ ta có

$$\frac{(t-2)(2t-1)}{t-1}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le\dfrac{1}{2}\\1<t\le 2\end{array}\right.. \text{ Suy ra } \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\le\dfrac{1}{2}\\1<\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-\log_{\frac{3}{2}}2\\0<x\le\log_{\frac{3}{2}}2.\end{array}\right.$$

Do đó, $a=-\log_{\frac{3}{2}}2$, $b=0$, $c=\log_{\frac{3}{2}}2$.

Vậy $(a+b+c)!=0!=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2}\ge 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 5. **B**. 4. **C**. -5. **D**. -1.

Lời giải.

☑ Với $x^2-4<0$ ta có $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2}<9^0+0\cdot 2019^{x-2}=1$.

☑ Với $x^2-4\ge 0$ ta có $9^{x^2-4}+(x^2-4)\cdot 2019^{x-2}\ge 9^0+0\cdot 2019^{x-2}=1$.

Vậy tập hợp các giá trị của x không thỏa mãn bất phương trình là $x\in(-2;2)\Rightarrow a=-2$, $b=2\Rightarrow b-a=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Bất phương trình $(x^3-9x)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B**. 7. **C**. 6. **D**. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x>-5$.

Xét $f(x)=(x^3-9x)\ln(x+5)$, ta có

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-9x=0\\\ln(x+5)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\\x=-4.\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $f(x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le x\le -3\\0\le x\le 3.\end{array}\right.$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4;-3;0;1;2;3\}$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f\left(2m - 2^{12}\right) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [1; 505)$. **B**. $m_0 \in [50; 1009)$. **C**. $m_0 \in [1009; 1513)$. **D**. $m_0 \in [1513; 2019)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.
Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -\left(2^x - 2^{-x}\right) = -f(x). \end{cases}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác $f'(x) = (2^x + 2^{-x}) \ln 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(m) + f\left(2m - 2^{12}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(2m - 2^{12}\right) < -f(m) \Leftrightarrow 2m - 2^{12} < -m \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}.$$

Vì m nguyên nên $m \leq 1365 \Rightarrow m_0 = 1365$. Vậy $m_0 \in [1009; 1513)$.
Chọn đáp án C □

Câu 99. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\log_2\left(x^2 + mx + m + 2\right) \geq \log_2\left(x^2 + 2\right)$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2\left(x^2 + mx + m + 2\right) \geq \log_2\left(x^2 + 2\right), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + mx + m + 2 \geq x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & mx + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & m(x+1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & m = 0. \end{aligned}$$

Vậy chỉ có một giá trị $m = 0$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Chọn đáp án D □

Câu 100. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

A. 6. **B**. 3. **C**. 8. **D**. 4.

Lời giải.

☑ Nếu $x \in (-3; 3)$ thì $x^2 - 9 < 0$.
Vì $5^{x+1} > 0$ nên $(x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 0$. Do đó $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 3^{x^2-9} < 1$.
Vậy $x \in (-3; 3)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

☑ Nếu $x \geq 3$ thì $x^2 - 9 \geq 0$.
Vì $5^{x+1} > 0$ nên $(x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} \geq 0$. Do đó $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} \geq 3^{x^2-9} \geq 1$.
Vậy $x \geq 3$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

☑ Nếu $x \le -3$ thì $x^2 - 9 \ge 0$.

Vì $5^{x+1} > 0$ nên $(x^2-9) \cdot 5^{x+1} \ge 0$. Do đó $3^{x^2-9} + (x^2-9) \cdot 5^{x+1} \ge 3^{x^2-9} \ge 1$.

Vậy $x \le -3$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy ta có $b - a = 3 - (-3) = 6$.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. C	4. C	5. C	6. B	7. D	8. B	9. B	10. C
11. D	12. B	13. B	14. C	15. D	16. C	17. B	18. C	19. A	20. A
21. A	22. A	23. C	24. D	25. A	26. D	27. D	28. A	29. D	30. A
31. A	32. D	33. B	34. C	35. D	36. C	37. B	38. B	39. C	40. D
41. A	42. C	43. C	44. B	45. A	46. A	47. C	48. B	49. B	50. D
51. D	52. A	53. D	54. A	55. B	56. B	57. C	58. C	59. A	60. A
61. D	62. B	63. B	64. B	65. B	66. D	67. A	68. B	69. A	70. A
71. D	72. D	73. A	74. C	75. D	76. D	77. D	78. C	79. D	80. D
81. A	82. B	83. D	84. C	85. D	86. C	87. A	88. C	89. B	90. C
91. C	92. C	93. B	94. D	95. B	96. B	97. C	98. C	99. D	100. A

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho bất phương trình $8^x - 3.2^{2x+1} + 9.2^x + m - 5 > 0$ (1) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$?

A. Vô số. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ vì $x \in [1;2] \Rightarrow t \in [2;4]$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^3 - 6t^2 + 9t - 5 > -m$ có nghiệm đúng với $t \in [2;4]$.

Đặt $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5 \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 12t + 9 > 0 \, \forall t \in [2;4]$.

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $-m < Min\, g(t) = g(2) = -5 \Leftrightarrow m > 5$.

Vậy có vô số giá trị của m.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \le 1$ là $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{b}\right]$. Khi đó ab bằng

A. $\frac{12}{5}$. **B**. $\frac{5}{12}$. **C**. $\frac{15}{16}$. **D**. $\frac{16}{15}$.

Lời giải.

Điều kiện:

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{x^2+2}+4-x^2>0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+4>0 \\
\Leftrightarrow\ & x\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}+4>0 \Leftrightarrow \frac{2x+4\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}>0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sqrt{x^2+2}+6x>0 \ (\text{vì } \sqrt{x^2+2}+x>0, \forall x) \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x^2+2}>-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x<0 \\ \begin{cases} -3x\ge 0 \\ 4(x^2+2)>(-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x>0 \\ \begin{cases} x\le 0 \\ 5x^2<8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -\frac{40}{5}<x\le 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(\frac{6x+4\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(6x+4\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left[2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\right]-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2 2+\log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})-\log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2}\le \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+x+\sqrt{x^2+2}(*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ với $t > 0$ ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t\ln 2} > 0$ với mọi $t > 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \quad f(3x+2\sqrt{x^2+2}) \le f(x+\sqrt{x^2+2})\\ &\Leftrightarrow \quad 3x+2\sqrt{x^2+2} \le x+\sqrt{x^2+2}\\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+2} \le -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \ge 0\\ x^2+2 \le 4x^2 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \le 0\\ 3x^2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0\\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{\sqrt{6}}{3}\\ x \le -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right. \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad x \le -\frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l} x>0\\ -\dfrac{\sqrt{40}}{5} < x \le 0 \end{array}\right.$ ta có $-\frac{\sqrt{40}}{5} < x \le -\frac{\sqrt{6}}{3}$ hay $-\sqrt{\frac{8}{5}} < x \le -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tập nghiệm bất phương trình $S=\left(-\sqrt{\frac{8}{5}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ nên $a=\frac{8}{5}$; $b=\frac{2}{3} \Rightarrow ab=\frac{16}{15}$.

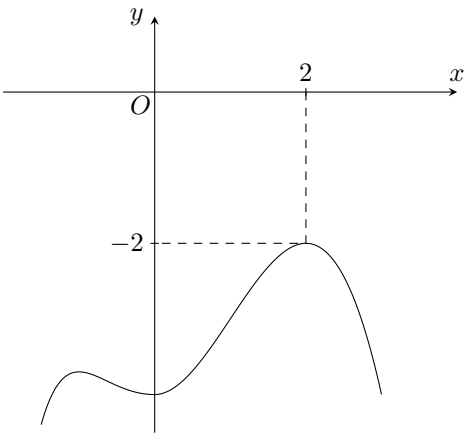
Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9\cdot 6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\cdot 9^{f(x)} \le (-m^2+5m)\cdot 4^{f(x)}$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.



A. 10. **B**. 4.

C. 5. **D**. 9.

Lời giải.

Ta có

$$9\cdot 6^{f(x)}+(4-f^2(x))\cdot 9^{f(x)} \le (-m^2+5m)\cdot 4^{f(x)} \Leftrightarrow -m^2+5m \ge 9\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+[4-f^2(x)]\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}. (1)$$

Từ đồ thị suy ra $f(x) \le -2\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 4, & \forall x \in \mathbb{R}\\ \left[4-f^2(x)\right]\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 0, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Do đó $g(x)=9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+[4-f^2(x)]\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 4,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4.$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2+5m \ge 4 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Vậy $m \in \{1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^x - m\left(\sqrt{10}-1\right)^x > 3^{x+1}.$$

A. $m < -\dfrac{7}{4}$. **B.** $m < -\dfrac{9}{4}$. **C.** m < -2. **D.** $m < -\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $(\sqrt{10}+1)^8 - m(\sqrt{10}-1)^8 > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^x > 3.$

Nhận xét $\dfrac{\sqrt{10}+1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{10}-1}{3} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-1}$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x - m\left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{-x} > 3.$

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^x, t > 0.$

Khi đó (1) trở thành $t - \dfrac{m}{t} > 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t > m$ (2).

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = t^2 - 3t$.

t	0		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m < -\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2(x^2+2y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + 2y$.

A. $P = 9$. **B.** $P = 2\sqrt{2}+3$. **C.** $P = 2+3\sqrt{2}$. **D.** $P = 3+\sqrt{3}$.

Lời giải.

$\log_2 x + \log_2 y + 1 \geq \log_2(x^2+2y) \Leftrightarrow 2xy \geq x^2+2y \Leftrightarrow 2y(1-x)+x^2 \leq 0$ (1)

Vì $P = x+2y \Rightarrow 2y = P - x$, thay vào (1) ta được:

$(P-x)(1-x)+x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x(P+1) + P \leq 0$

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (P+1)^2 - 8P \geq 0$

$\Leftrightarrow P^2 - 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \geq 3+2\sqrt{2} \\ P \leq 3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên dương a (a là tham số) để phương trình

$$(3a^2+12a+15)\log_{27}(2x-x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 2\log_9(2x-x^2) + \log_{11}\frac{2-x^2}{2}$$

có nghiệm duy nhất?

A. 2. **B**. 0. **C**. Vô số. **D**. 1.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$(a^2+4a+5)\log_3(2x-x^2)+(9a^2-6a+2)\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow (a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)=0$ $(*)$

Đặt $u=\log_3(2x-x^2)$ và $v=\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)$. Phương trình $(*)$ trở thành

$$(u+9v)a^2+2(2u-3v)a+4u+v=0 \ (**)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm thì phải tồn tại a, tức là phương trình $(**)$ phải có nghiệm a. Do đó $\Delta'=(2u-3v)^2-(u+9v)(4u+v)=-49uv\geq 0\Leftrightarrow uv\leq 0$ hay $\log_3(2x-x^2)\cdot\log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}\log_3(2x-x^2)\leq 0\\ \log_{11}\left(\dfrac{2-x^2}{2}\right)\geq 0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}0<2x-x^2\leq 1\\ \dfrac{2-x^2}{2}\geq 1\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}0<2x-x^2\leq 1\\ x=0\end{cases}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Với $x=1$, ta thay lại vào phương trình $(*)$ ta được $a=\dfrac{1}{3}$ (loại)

Vậy không có số nguyên dương a để phương trình đã cho cho nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ trong đó $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\geq 4$, (1).

Ta thấy $14-(y-2)\sqrt{y+1}=-(\sqrt{y+1})^3+3\sqrt{y+1}+14$.

Xét $f(t)=-t^3+3t+14$ với $t=\sqrt{y+1}\geq 0$. Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	16	↘	

Do vậy, ta được $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\leq 4$, (2).

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$.

Vậy $P=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$.

A. $[0;1] \cup [2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1] \cup [2;+\infty)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$(3^x - 9)(3^x - 2x - 1) \geq 0.$$

Dễ thấy $x = 1$ và $x = 2$ thỏa mãn bất phương trình.

Đặt $g(x) = (3^x - 9)(3^x - 2x - 1)$, $f(x) = 3^x - 2x - 1$. Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$. Suy ra

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_3\left(\frac{2}{\ln 3}\right).$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		x_0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$f(x_0)$	$-$	0	$+$		$+$	
$3^x - 9$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $g(x) = (3^x - 9) f(x) \geq 0$ nếu $x \in [0;1] \cup [2;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho $0 < x < y < 1$. Đặt $m = \dfrac{1}{y-x}\left(\ln\dfrac{y}{1-y} - \ln\dfrac{x}{1-x}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m > 4$. **B.** $m < 1$. **C.** $m = 4$. **D.** $m < 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(t) = \ln\dfrac{t}{1-t} - 4t$ trên $(0;1) \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-t} - 4 = \dfrac{(2t-1)^2}{t(1-t)} \geq 0$, $\forall t \in (0;1)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do vậy

$$\begin{aligned} f(y) > f(x) &\Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y} - 4y > \ln\frac{x}{1-x} - 4x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4. \end{aligned}$$

Vậy $m > 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018$.

A. $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$. **B.** $m \in [2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$.

C. $m \in \left(3\sqrt{3}; \dfrac{11}{3}\sqrt{3}\right) \cup \{2\sqrt{6}\}$. **D.** $m \in \left(2\sqrt{6}; \dfrac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -1$.

$$\begin{aligned} 2017^{2x+\sqrt{x+1}-2017^{2+\sqrt{x+1}}} + 2018x \leq 2018 &\Leftrightarrow 2017^{\sqrt{x+1}}(2017^{2x} - 2017^2) + 2018(x-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2017^{\sqrt{x+1}}(2017^x + 2017)(2017^x - 2017) + 2018(x-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 1. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$. $(*)$

Lại có

$$\begin{aligned} 5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2} &\Leftrightarrow 3(x+2)^2 + 2(x^2+2) = m(x+2)\sqrt{x^2+2} \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2+2}} + 2\sqrt{\frac{x^2+2}{(x+2)^2}} = m. \ (2) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2}} = t$, phương trình (2) trở thành $3t + \dfrac{2}{t} = m$. (3)

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+2}$, với $-1 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{-4x^2 - 4x + 8}{(x^2+2)^2}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1; x = -2$. Suy ra $g'(x) \geq 0, \ \forall x \in [-1;1]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq g(x) \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$.

Xét hàm số $f(t) = 3t + \dfrac{2}{t}$, với $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$. Ta có $f'(t) = \dfrac{3t^2 - 2}{t^2}$; $f'(t) = 0$ khi $t = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm t phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $2\sqrt{6} < m \leq 3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Tìm giá trị gần đúng của tổng các nghiệm của bất phương trình sau

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4}\right)(24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016) \leqslant 0.$$

A. 12,3. **B.** 12. **C.** 12,1. **D.** 1,2.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} 24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016 &= \left(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+24x^2\right)+1973x^2+2016 \\ &= x^4\left[24\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+27\right]+1973x^2+2016 \\ &= x^4\left[24\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+75\right]+1973x^2+2016. \end{aligned}$$

Suy ra $24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016>0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện của phương trình. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}+\sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x}+4}\leq\sqrt{13}.$$

Đặt $\log_x\dfrac{22}{3}=t$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4} &= \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}t\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{13}. \end{aligned}$$

(Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$; dấu bằng xảy ra khi hai véc tơ cùng hướng).

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{5}$.

Như vậy $\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4}\leq\sqrt{13}\Leftrightarrow\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4}=\sqrt{13}\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{5}$.

Với $t=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\log_x\dfrac{22}{3}=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\left(\dfrac{22}{3}\right)^5}\approx 12{,}1$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho bất phương trình $2^{-x^2+2x+1}+2^{x^2-2x}\geq m$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\leq 3$. **B.** $m\geq 3\sqrt{2}$. **C.** $m\leq 2\sqrt{2}$. **D.** $m\leq 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=2^{x^2-2x}$, vì $x^2-2x\geq -1\Rightarrow t\geq\dfrac{1}{2}$, khi đó bài toán trở thành: Tìm m để bất phương trình $m\leq\dfrac{2}{t}+t$ nghiệm đúng với mọi $t\geq\dfrac{1}{2}$.

Xét $f(t)=\dfrac{2}{t}+t$ với $t\geq\dfrac{1}{2}$. Ta có $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+1\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=-\sqrt{2}\ \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $m \le 2\sqrt{2}$ thì thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 13. Có tất cả bao nhiêu bộ ba các số thực $(x;y;z)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \\ \left(xy^2+z^4\right)^2 = 4 + \left(xy^2-z^4\right)^2. \end{cases}$$

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}} = 128 \\ \left(xy^2+z^4\right)^2 - \left(xy^2-z^4\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+4\sqrt[3]{z^2} = 7 \\ xy^2z^4 = 1. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 7 số không âm ta có

$$\begin{aligned} 7 &= \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+4\sqrt[3]{z^2} \\ &= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{z^2} \\ &\ge 7\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^2\left(\sqrt[3]{z^2}\right)^4} \\ &= 7\sqrt[21]{\left(xy^2z^4\right)^2} \\ &= 7. \end{aligned}$$

Do đó hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 \\ xy^2z^4 = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy $x > 0$ và từ phương trình thứ hai ta có $x^7 = 1$ hay $x = 1$. Suy $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.
Vậy các bộ số thực thỏa mãn đề bài là $(1;1;1)$, $(1;1;-1)$, $(1;-1;-1)$, $(1;-1;1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Trong tất cả các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5) \ge 1$, giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0$ thuộc tập nào sau đây?

A. $[8;10]$. **B.** $[5;7]$. **C.** $[1;4]$. **D.** $-3;0]$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $2x+2y+5 \geq x^2+y^2+3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4 \quad (1) \\ (x+2)^2+(y+3)^2 = m \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Xét các đường tròn có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2=4$, tọa độ tâm $I_1(1;1), R_1=2$.

Khi $m=0$ điểm $I(-2;-3)$ không thỏa mãn phương trình (1).

Khi $m>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I_2(-2;-3), R_2=\sqrt{m}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hai đường tròn trên tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow R_1+R_2=I_1I_2$ hay $2+\sqrt{m}=5 \Leftrightarrow m=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Gọi S là tổng các nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{4\sqrt{2\log_x^2\dfrac{22}{3}-2\log_x\dfrac{22}{3}+5}}{9^{4\log_{81}2}}-\sqrt{13}+\sqrt{\dfrac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}}x}-\dfrac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\right)(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+2017x^2+2018) \leqslant 0$. Giá trị gần đúng của S là

A. 12,3. **B.** 12,2. **C.** 12,1. **D.** 12.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2\log_x^2\dfrac{22}{3}-2\log_x\dfrac{22}{3}+5 \geqslant 0 \\ \dfrac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}}x}-\dfrac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4 \geqslant 0 \\ x>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+2017x^2+2018 = 23x^6+x^4(x-1)^2+25x^4+x^2(x-1)^2+2016x^2+2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{4\sqrt{2\log_x^2\dfrac{22}{3}-2\log_x\dfrac{22}{3}+5}}{9^{4\log_{81}2}}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}}x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-4\log_x\frac{22}{3}+4} \leqslant 0$$

Đặt $t=\log_x\dfrac{22}{3}$, ta được:

$$\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4} \leqslant \sqrt{13} \ (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}+\sqrt{\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\right)^2+2} \leqslant \sqrt{13}$$

Đặt $\vec{u}\left(\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ và $\vec{v}\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{u}| \geqslant |\vec{u}+\vec{v}|$, ta có:

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}+\sqrt{\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\right)^2+2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{25}{2}}=\sqrt{13}$$

Do đó (*) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow t=\frac{4}{5}$.

Suy ra $\log_x\frac{22}{3}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow x^{\frac{4}{5}}=\frac{22}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\left(\frac{22}{3}\right)^5}\simeq 12,1$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{(x+y)}(x^2+y^2)\leq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=48(x+y)^3-156(x+y)^2+133(x+y)+4$ là

A. 29. **B.** $\frac{1369}{36}$. **C.** 30. **D.** $\frac{505}{36}$.

Lời giải.

Xét giả thiết $\log_{(x+y)}(x^2+y^2)\leq 1$, ta có

☑ Nếu $x+y>1$ ta có $x^2+y^2\leq x+y$.
Mặt khác $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}\Rightarrow\frac{(x+y)^2}{2}\leq x+y\Leftrightarrow 1<x+y\leq 2$.

☑ Nếu $0<x+y<1$, ta có $x^2+y^2\geq x+y\Leftrightarrow(x+y)^2-(x+y)\geq 2xy>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y<0\\x+y>1\end{array}\right.$ (loại).

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\in(1;2]$, xét hàm số $f(t)=48t^3-156t^2+133t+4$.

Ta có $f'(t)=144t^2-312t+133$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{19}{12}\\t=\frac{7}{12}\end{array}\right.\Rightarrow t=\frac{19}{12}$.

Ta có BBT:

t	1		$\frac{19}{12}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	29	↘	$\frac{505}{36}$	↗	30

Vậy $\max A=\max\limits_{(1;2]}f(t)=30$ khi $x+y=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>(x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$ có tập nghiệm là $S=(a;b]$. Khi đó $b-a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\6+x-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq 3$.

Với điều kiện $0 < x \le 3$ ta có

$$\begin{aligned}
& 5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \cdot \log_2 x > (x^2 - x) \cdot \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{6 + x - x^2} - x + 1\right) \cdot (x \cdot \log_2 x - 5) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{6 + x - x^2} < x - 1 \ (\text{vì } \max_{(0;3]} (x \cdot \log_2 x - 5) < 0) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x - 1 > 0 \\ 6 + x - x^2 \ge 0 \\ 6 + x - x^2 < (x-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{5}{2} < x \le 3.
\end{aligned}$$

Ta chứng minh $\max\limits_{(0;3]} (x \cdot \log_2 x - 5) < 0$.

Xét $f(x) = x \cdot \log_2 x - 5$ với $x \in (0; 3]$.

Ta có $f'(x) = \log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{\ln 2}}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \log_2 x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log_2 x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x \ln 2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x}{\ln 2} = 0.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0		$2^{-\frac{1}{\ln 2}}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↘	$f(2^{-\frac{1}{\ln 2}})$	↗	$f(3) \approx -0{,}25$

Do vậy, $\max\limits_{(0;3]} f(x) = f(3) < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 10 của tham số m để bất phương trình $m9^x + (m-1)3^{x+2} + m - 1 > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

A. 3. **B**. 9. **C**. 8. **D**. 2.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$, bất phương trình tương đương $m(t^2 + 9t + 1) > 9t + 1 \Leftrightarrow m > \dfrac{9t+1}{t^2+9t+1}, \forall t > 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = \dfrac{9t+1}{t^2+9t+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

x	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra $1 \le m < 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log x + \log y \ge \log(x^2+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

A. $3+2\sqrt{6}$. **B.** $4+2\sqrt{3}$. **C.** 8. **D.** $5+3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$, $y > 0$. Ta có $\log x + \log y \ge \log(x^2+y) \Leftrightarrow xy \ge x^2 + y \quad (*)$.

Từ $(*) \Rightarrow y(x-1) \ge x^2 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow P - 2x < P - 2$. Mà $y = P - 2x > 0$. Suy ra $P > 2$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow x(P-2x) \ge x^2 + P - 2x \Leftrightarrow 3x^2 - (2+P)x + P \le 0 \quad (**)$. Bất phương trình $(**)$ là bất phương trình bậc hai ẩn x. Để $(**)$ có nghiệm x thì

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow P^2 - 8P + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \ge 4+2\sqrt{3} \\ P \le 4-2\sqrt{3} \quad \text{(loại vì} \quad P > 2). \end{array}\right.$$

Với $P = 4+2\sqrt{3}$ thì $(**) \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn $x > 0$). Khi đó $y = \dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn $y>0$). Vậy $\min P = 4+2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right) \cdot \log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right) \ge 0$. Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $m = 3a$ khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$\log_m 11 + \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2+mx+10}+4\right) \cdot \log_m \left(x^2+mx+12\right) \ge 0. \qquad (1)$$

Điều kiện của bất phương trình là $m > 0;\ m \ne 1;\ x^2+mx+10 \ge 0$.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1 - \log_7(\sqrt{x^2+mx+10}+4) \cdot \log_{11}(x^2+mx+12)}{\log_{11} m} \ge 0. \qquad (2)$$

Đặt $u = x^2+mx+10,\ u \ge 0$.

☑ Với $0 < m < 1$.Ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(u) = \log_7(\sqrt{u}+4) \cdot \log_{11}(u+2) \ge 1 = f(9). \qquad (3)$$

Vì $f(u)$ là hàm tăng trên $(0;+\infty)$ nên từ (3) ta có

$$f(u) \ge f(9) \Leftrightarrow u \ge 9 \Leftrightarrow x^2+mx+1 \ge 0. \qquad (4)$$

(4) vô số nghiệm vì $\Delta = m^2 - 4 < 0$ với $\forall m \in (0;1)$. Suy ra $0 < m < 1$ không thỏa bài toán.

☑ Với $m > 1$. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(u) \le f(9) \Leftrightarrow 0 \le u \le 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+10 \ge 0 & (5) \\ x^2+mx+1 \le 0. & (6) \end{cases}$$

Xét (6), ta có $\Delta = m^2 - 4$.

+ $m^2-4<0 \Leftrightarrow 1<m<2$ thì (6) vô nghiệm. Không thỏa bài toán.
+ $m^2-4>0 \Leftrightarrow m>2$ thì (6) có nghiệm là đoạn $[x_1;x_2]$, lúc này (5) nhận hơn 1 số của $[x_1;x_2]$ làm nghiệm. Không thỏa bài toán.
+ $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=2$ thì (6) có nghiệm duy nhất $x=-1$ và $x=-1$ thỏa (5). Do đó bất phương trình có nghiệm duy nhất là $x=-1$.

Vậy $m=2 \Leftrightarrow a=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^x \geqslant 5-2x$.

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải.

Ta có $3^x \geqslant 5-2x \Leftrightarrow 3^x+2x-5 \geqslant 0$.

Xét hàm số $f(x)=3^x+2x-5$, suy ra $f'(x)=3^x\ln 3+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)\geqslant 0=f(1) \Leftrightarrow x\geqslant 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho bất phương trình $m\cdot 3^{x+1}+(3m+2)\cdot\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

A. $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m\geq\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m\geq-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Do $3^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$m\cdot 3^{x+1}+(3m+2)\cdot\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$$

$$\Leftrightarrow 3m+(3m+2)\cdot\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0 \quad (1)$$

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$ để $x\in(-\infty;0]$ suy ra $0<t\leq 1$. Khi đó bất phương trình (1) trở thành

$$\Leftrightarrow 3m+(3m+2)\cdot\frac{1}{t}+t>0 \quad (2)$$

Để thỏa mãn bài toán khi (2) đúng với mọi $t\in(0;1]$. Khi đó với $t\in(0;1]$ ta có

$$(2)\Leftrightarrow m\cdot\left(3+\frac{3}{t}\right)+t+\frac{2}{t}>0 \Leftrightarrow m>-\frac{t^2+2}{3t+3}.$$

Xét hàm $f(t)=-\dfrac{t^2+2}{3t+3}$ trên khoảng $(0;1]$, ta có $f'(t)=\dfrac{6-6t-3t^2}{(3t+3)^2}$.

Khi $f'(t)=0$ suy ra $6-6t-3t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3}-1 \\ t=-\sqrt{3}-1. \end{array}\right.$

Xét dấu $f'(t)$

t	0		$\sqrt{3}-1$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra $\max\limits_{t\in(0;1]} f(t) = f\left(\sqrt{3}-1\right) = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Do đó để bất phương trình (2) đúng với mọi $t \in (0;1]$ khi $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \le m\log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm là

A. $m > 2\sqrt{3}$. **B.** $m > 12\log_3 5$. **C.** $m \ge 2\sqrt{3}$. **D.** $2 < m < 12\log_2 5$.

Lời giải.

• Điều kiện: $0 \le x \le 4$.

• $(*) \Leftrightarrow x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \le \dfrac{m}{\log_3(5-\sqrt{4-x})} \Leftrightarrow (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\log_3(5-\sqrt{4-x}) \le m.$

(do $\log_3(5-\sqrt{4-x}) > 0$).

• Ta có $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ và $\log_3(5-\sqrt{4-x})$ đồng biến trên $(0;4]$ nên

$f(x) = (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\log_3(5-\sqrt{4-x})$ đồng biến trên $[0;4]$.

• Bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[0,4]} f(x) = f(0) = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_2 \dfrac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + x^2 + 2y^2 + 1 \le 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Từ $\log_2 \dfrac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + x^2 + 2y^2 + 1 \le 3xy \Leftrightarrow \log_2 2(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) \le \log_2(3xy+x^2) + 3xy + x^2$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$.

Ta thấy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$, nên từ $f\left[2(x^2+y^2)\right] \le f(3xy+x^2)$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2) \le 3xy + x^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 \le 3xy$.

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$. Từ $x^2+2y^2 \le 3xy \Rightarrow 1 \le t \le 2$.

$$P = \frac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2} = \frac{2t^2-t+2}{2t-1} = t + \frac{2}{2t-1} = \frac{2t-1}{2} + \frac{2}{2t-1} + \frac{1}{2} \ge 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{5}{2}$ khi $x = \dfrac{3y}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Một người vay 500 triệu đồng từ ngân hàng để lấy vốn làm ăn theo thể thức lãi kép với lãi suất không đổi trong suốt quá trình trả nợ là 1%/tháng (tính lãi hàng tháng). Mỗi tháng người đó trả 10 triệu đồng cho đến tháng cuối thì số tiền phải trả còn ít hơn 10 triệu. Hỏi số tiền phải trả trong tháng cuối là bao nhiêu (làm tròn đến hàng ngàn)?

A. 6.552.000đ. **B.** 6.553.000đ. **C.** 6.554.000đ. **D.** 6.555.0000đ.

Lời giải.

Gọi A, a lần lượt là số tiền vay ban đầu và số tiền phải trả hàng tháng. Ta có

- Sau tháng 1, số tiền còn nợ là: $N_1 = A(1+r) - a$
- Sau tháng 2, số tiền còn nợ là: $N_2 = N_1(1+r) - a = A(1+r)^2 - a(1+r) - a$

- Sau tháng thứ 3, số tiền còn nợ là: $N_3 = N_2(1+r) - a = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a \cdots$
- Sau tháng thứ n số tiền còn nợ là

$$N_n = N_{n-1}(1+r) - a = A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-1} - \cdots - a = A(1+r)^n - a\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Áp dụng vào bài với $A = 500, a = 10, r = 0.01$. Ta có

$N_n < 10 \Leftrightarrow 500 \cdot 1.01^n - 10\dfrac{1.01^n - 1}{0.01} < 10 \Leftrightarrow 1.01^n > \dfrac{99}{10} \Leftrightarrow n > 68.65$

Vậy sau 69 tháng thì số tiền phải trả còn lại $N_{69} = 500 \cdot (1.01)^{69} - 10\dfrac{(1.01)^{69} - 1}{0.01} \approx 6.553.000$đ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\log_2\left(2x^2 - 5x + 1\right) - m > m \cdot \sqrt{\log_4\left(2x^2 - 5x + 1\right)}$$

có nghiệm với mọi $x \geq 3$.

A. $m < 1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m \leq 1$.

Lời giải.

Để bất phương trình xác định:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 > 0 \\ \log_4\left(2x^2 - 5x + 1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x \geq 0 \begin{bmatrix} x \leq 0 \\ x \geq \dfrac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (*)$$

Xét $x \geq 3$, ta đặt $t = \sqrt{\log_4\left(2x^2 - 5x + 1\right)}$. Vì $2x^2 - 3x + 1 \geq 4\ \forall x \geq 3$ suy ra $t \geq 1$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$2t^2 - m > mt \Leftrightarrow 2t^2 - mt - m > 0 \quad (1)$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình (1) đúng với mọi $t \geq 1$.

Xét $t \geq 1$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 > m\left(t + 1\right) \Leftrightarrow \frac{2t^2}{t+1} > m$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{2t^2}{t+1}$ trên $[1; +\infty)$. Ta có $f'\left(t\right) = \dfrac{2t^2 + 4t}{\left(t+1\right)^2}$, dễ thấy $f'\left(t\right) > 0\ \forall t \geq 1$ suy ra hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên $\min\limits_{t \in [1;+\infty)} f\left(t\right) = f\left(1\right) = 1$.

Do đó để (1) đúng với mọi $t \geq 1$ khi $m < \min\limits_{t \in [1;+\infty)} f\left(t\right) \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Giải bất phương trình $\log_3 \dfrac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2 - 11x + 3$ ta được tập nghiệm S. Biết rằng S có dạng $[a; b] \backslash \{1\}$. Hãy tính $T = (a + b) - ab$.

A. $\dfrac{23}{3}$. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{5} \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
&\log_3 \frac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2-11x+3\\
\Leftrightarrow\ &\log_3(5x+1)-\log_3(x-1) \geq 3(x-1)^2-(5x+1)+1\\
\Leftrightarrow\ &\log_3(5x+1)+(5x+1) \geq \log_3(x-1)^2+3(x-1)^2+\log_3 3\\
\Leftrightarrow\ &\log_3(5x+1)+(5x+1) \geq \log_3\left[3(x-1)^2\right]+3(x-1)^2\\
\Leftrightarrow\ &f(5x+1) \geq f\left[3(x-1)^2\right].
\end{aligned}$$

Xét hàm $f(t)=\log_3 t+t$, tới $t>0$.
$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$, với $\forall t>0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Nên

$$\begin{aligned}
&f(5x+1) \geq f\left[3(x-1)^2\right]\\
\Leftrightarrow\ &5x+1>3(x-1)^2\\
\Leftrightarrow\ &3x^2-11x+2\leq 0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{11-\sqrt{97}}{6}\leq x\leq \frac{11+\sqrt{97}}{6}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\dfrac{11-\sqrt{97}}{6};\dfrac{11+\sqrt{97}}{6}\right]\backslash\{1\}$.

Vậy $T=(a+b)-ab=3$.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{8}$. **D.** 9.

Lời giải.

TH1: $x^2+2y^2>1$. Đặt $z=y\sqrt{2}$, suy ra $x^2+z^2>1$ (1). Khi đó:

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1 \Leftrightarrow 2x+y\geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}}\geq x^2+z^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\geq \dfrac{9}{8}$ (2).

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(\mathscr{C}_1): x^2+z^2=1$ và miền trong của hình tròn $(\mathscr{C}_2): (x-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{9}{8}$.

Hệ $\begin{cases} T=2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\geq\dfrac{9}{8} \\ x^2+z^2>1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d: 2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ có điểm chung với miền (H).

Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng d phải tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C}_2)$, nghĩa là ta có $\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T-\dfrac{9}{4}\right|=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow T=\dfrac{9}{2}$ với $I\left(1;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn $(\mathscr{C}_2)$.

TH2: $0<x^2+2y^2<1$ ta có

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1 \Leftrightarrow 2x+y\leq x^2+2y^2 \Leftrightarrow T=2x+y<1$ (loại).

Vậy $\max T=\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ và $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

C. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$. **D.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $4x+4y-4>0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-4\geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leq 2$ $(\mathscr{C}_1)$.

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) $(\mathscr{C}_1)$ tâm $I_1(2;2;)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Mặt khác, $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=m$ $(*)$.

Với $m=0 \Rightarrow x=-1, y=1$ không thỏa mãn $(\mathscr{C}_1)$.

Với $m>0$ thì $(*)$ là đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ tâm $I_2(-1;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

Để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thì $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc nhau.

TH1: $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow R_1+R_2=I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m}+\sqrt{2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

TH2: $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc trong $\Leftrightarrow R_2-R_1=I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m}-\sqrt{2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $m=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_9(x+6)-\log_3\left(5-\sqrt[4]{19-x}\right)<0$ là

A. -9. **B.** -12. **C.** 0. **D.** -11.

Lời giải.

Ta có $\log_9(x+6)-\log_3\left(5-\sqrt[4]{19-x}\right)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3(x+6)<\log_3\left(5-\sqrt[4]{19-x}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6<x\leq 19 \\ \sqrt{x+6}<5-\sqrt[4]{19-x} \end{cases}$$

Xét bất phương trình $\sqrt{x+6}<5-\sqrt[4]{19-x}$ với $-6<x\leq 19$.

Ta có $\sqrt{x+6}<5-\sqrt[4]{19-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+6}-3+\sqrt[4]{19-x}-2<0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{3-x}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)}<0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}-\frac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)}\right]<0$$

$$\Leftrightarrow x<3$$

$\left(\text{Vì } \dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3}-\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)}\geq 0, \forall x\in(-6;19]\right)$.

Suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(-6;3)$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là

$$T=-5+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2=-12.$$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình: $1+\log_5(x^2+1)\geq\log_5(mx^2+4x+m)$ đúng với mọi x. Tổng giá trị các phần tử trong tập S bằng

A. 2. **B**. 3. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\log_5 5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m$$

$$\Leftrightarrow (m-5)x^2+4x+m-5 \leq 0. \, (*)$$

Để $(*)$ nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m>0 \\ \Delta_1^{'}=4-m^2<0 \\ (m-5)<0 \\ \Delta_2^{'}=4-(m-5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m \leq 3.$$

Vậy $S=\{3\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Biết a là số thực dương bất kì để bất phương trình $a^x \geqslant 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a \in \left(10^3;10^4\right]$. **B**. $a \in \left(10^2;10^3\right]$. **C**. $a \in \left(0;10^2\right]$. **D**. $\left(10^4;+\infty\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình $a^x \geqslant 9x+1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đúng với $x=1 \Rightarrow a \geqslant 10$.

Do $a>1$ nên hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=a^x$ có bề lõm quay lên trên.

Hai đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=9x+1$ luôn đi qua điểm $A\,(0;1)$ nên bất phương trình $a^x \geqslant 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi đường thẳng $y=9x+1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A.

Phương trình tiếp của đồ thị hàm số $y=a^x$ tại A là $y=x \cdot \ln a+1$.

Suy ra $\ln a=9 \Leftrightarrow a=\mathrm{e}^9 \Rightarrow a \in \left(10^3;10^4\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right) \geqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (2;3]$. **B**. $a \in (8;+\infty)$. **C**. $a \in (6;7]$. **D**. $a \in (-6;-5]$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ suy ra $t \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow t+a\ln t+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a\ln t \geqslant -t-1.$$

☑ Trường hợp 1: $t=1$ khi đó $a\ln 1 \geqslant -1-1$ luôn đúng với mọi a.

☑ Trường hợp 2: $\dfrac{3}{4} \leqslant t<1$.

Ta có $a\ln t \geqslant -t-1, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4};1\right) \Leftrightarrow a \leqslant \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4};1\right)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t)=-\dfrac{\ln t-1-\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t} \geqslant 0, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4};1\right)$.

Do đó $a \leqslant \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4};1\right) \Leftrightarrow a \leqslant \dfrac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}$.

☑ Trường hợp 3: $t>1$.

Ta có $a\ln t \geqslant -t-1, \forall t \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \geqslant \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t)=-\dfrac{\ln t-1-\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t}, \forall t \in (1;+\infty)$.

Xét hàm số $g(t)=\ln t-1-\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow g'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}>0$ nên hàm số đồng biến.

Suy ra phương trình $g(t)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1)=-2; \lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$ nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1;+\infty)$.

Do đó $f'(t)=0$ có duy nhất một nghiệm là t_0. Khi đó $\ln t_0=\dfrac{t_0+1}{t_0}$ suy ra $f(t_0)=-t_0$. Bảng biến thiên

t	1		t_0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	$-t_0$	↘	$-\infty$

Suy ra $a \geqslant \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \geqslant -t_0$.

Do đó $-t_0 \leqslant a \leqslant \dfrac{-7}{4\ln\frac{3}{4}} \approx 6{,}08$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a \in (6;7]$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho bất phương trình $\log_7(x^2+2x+2)+1>\log_7(x^2+6x+5+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 35. **B**. 36. **C**. 34. **D**. 33 .

Lời giải.

ĐKXĐ: $x^2+6x+5+m>0 \Leftrightarrow m>-x^2-6x-5$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \\ \Leftrightarrow\ & log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \\ \Leftrightarrow\ & 7x^2+14x+14>x^2+6x+5+m \\ \Leftrightarrow\ & m<6x^2+8x+9. \end{aligned}$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình đã cho là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} m>-x^2-6x-5 \\ m<6x^2+8x+9. \end{cases}$$

Bất phương trình có cho muốn có tập nghiệm chứa $(1;3)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m > -x^2 - 6x - 5 \\ m < 6x^2 + 8x + 9 \end{cases}, \forall m \in (1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max\limits_{[1;3]} \left(-x^2 - 6x - 5\right) \\ m \leq \min\limits_{[1;3]} \left(6x^2 + 8x + 9\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -12 \\ m \leq 23. \end{cases}$$

Vậy có tất cả 36 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(4 - \sqrt{7}\right)^x + \left(4 + \sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$

A. $m > \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m \geq \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m \geq -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot \left(\frac{9}{4+\sqrt{7}}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x\right]^2 + 3m \cdot \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m + 2 > 0.$$

Đặt $t = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, $t \in (0;1)$. Ta được

$$t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2+2}{t+1} > -3m, t \in (0;1). \tag{2}$$

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3} - 1$. Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{3}-1$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	↘	$-2+2\sqrt{3}$	↗	$\dfrac{3}{2}$

Để thỏa mãn đề bài thì (2) phải đúng với mọi $t \in (0;1)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-3m < -2 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230. **B.** 233. **C.** 234. **D.** 231.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1}=2u_n \Rightarrow \begin{cases} u_2=2u_1 \\ u_3=4u_1 \end{cases}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4=4u_1^2-4u_1+4=(2u_1-1)^2+3\geq 3 \\ &\Rightarrow \log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)\geq \log_3 3\geq 1 \\ &\Rightarrow \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}\leq 8. \end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác

$$2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=2^{2u_1+1}+2^{3-2u_1}\geq 2\sqrt{2^{2u_1+1}\cdot 2^{3-2u_1}}=8. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2u_1+1}=2^{3-2u_1} \\ (2u_1-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1=\frac{1}{2}.$$

Do đó $S_n=u_1\cdot\dfrac{2^n-1}{2-1}=\dfrac{2^n-1}{2}$.

$S_n>5^{100}\Leftrightarrow \dfrac{2^n-1}{2}>5^{100}\Leftrightarrow n>\log_2(2\cdot 5^{100}+1)\simeq 233{,}2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn bài toán là $n=234$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x$, do $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ nên $t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta được phương trình

$$(t+1)^2-2(m+1)t-2<0\Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{t}<2m.$$

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}>0,\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, nên

$$f(t)\in\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow 2m>-\frac{3}{2}\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right).$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x\leq 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < x < 1$. Khi đó

$$3\log x \le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^3} \le m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3}+\sqrt{(1-x)^3} \le m\sqrt{x-x^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{(1-x)^3}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \le m.$$

Đặt $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{(1-x)^3}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ với $0<x<1$. Bất phương trình có nghiệm thực $\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{(0;1)} f(x)$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{(1-x)^3}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(x-\sqrt{x}\sqrt{1-x}+1-x)}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\\ &\ge \frac{2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}(1-\sqrt{x}\sqrt{1-x}) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}-\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right)\\ &\ge 2\left(\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1-x}{2}}}-\sqrt{\frac{x+1-x}{2}}\right)=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{1-x}\\ x=1-x\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\sqrt{2}$. Suy ra $m \ge \sqrt{2}$. Vậy có 7 có giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho dãy số (a_n) thoả mãn $a_1=1$ và $a_n=10a_{n-1}-1, \forall n \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$.

A. 100. **B**. 101. **C**. 102. **D**. 103.

Lời giải.

Ta thấy $a_n = 10\cdot a_{n-1}-1 \Rightarrow a_n-\dfrac{1}{9}=10\cdot\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{9}\right)$.

Đặt $b_n=a_n-\dfrac{1}{9}$ ta được $\begin{cases}b_1=\dfrac{8}{9}\\ b_n=10\cdot b_{n-1}\end{cases} \Rightarrow b_n=\dfrac{8}{9}\cdot 10^{n-1} \Rightarrow a_n=\dfrac{8}{9}\cdot 10^{n-1}+\dfrac{1}{9}, \forall n \ge 1.$

Ta thấy $\dfrac{8\cdot 10^{n-1}+1}{9} > 10^{n-2} \Leftrightarrow 9\cdot 10^{n-2}\cdot\left(\dfrac{80}{9}-1\right)+1>0$ (đúng với $n \ge 1$). (1)

Ta thấy

$$\begin{aligned}&\log a_n > 100\\ \Leftrightarrow\ & a_n > 10^{100}\\ \Rightarrow\ & \frac{8\cdot 10^{n-1}+1}{9} > 10^{100}\\ \Rightarrow\ & 10^{n-2} \ge 10^{100} \text{ (do (1))}\\ \Leftrightarrow\ & n \ge 102.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số thực m để bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}x^2}-3} \ge m^2\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm duy nhất thuộc $[32;+\infty)$?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}x^2} -3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 3} \geq m^2 (\log_2 x - 3)$

hay $m^2 \leq \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 3}}{\log_2 x - 3}$ (do $x \geq 32$).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 - t - 3}}{t - 3}$ với mọi $t \geq 5$. $f'(t) = \dfrac{-2t + 6}{(t-3)\sqrt{t^2 - t - 3}} < 0$ với mọi $t \geq 5$.

Suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(5; +\infty)$ và $f(t) \leq f(5) = \sqrt{3}$.

Theo bài ra ta phải có $m^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{3}$ (do $m > 0$).

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02} (\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

A. $m > 9$. **B**. $m < 2$. **C**. $0 < m < 1$. **D**. $m \geq 1$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Điều kiện của tham số $m > 0$.

Ta có $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x + 1) < m$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(3^x + 1), \forall x \in (-\infty; 0)$ có $f' = \dfrac{3^x \ln 3}{(3^x + 1)\ln 2} > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \geq 1$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x \in (1; 100)$: $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$?

A. 2018. **B**. 4026. **C**. 2013. **D**. 4036.

Lời giải.

Xét với $x \in (1; 100)$, ta có

$$(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \log (10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq \log 10^{\frac{11}{10}\log x}$$
$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(1 + \log x) \geq \frac{11}{10}\log x \quad (1)$$

Đặt $t = \log x$, để $1 < x < 100 \Leftrightarrow 0 < \log x < 2$ suy ra điều kiện $0 < t < 2$. Khi đó (1) trở thành

$$\left(m + \frac{t}{10}\right)(1 + t) \geq \frac{11}{10}t \quad (2)$$

Để (1) đúng với mọi $x \in (1;100)$ khi (2) đúng với mọi $t \in (0,2)$.
Xét $t \in (0,2)$ suy ra $t+1>0$, khi đó

$$(2) \Leftrightarrow (10m+t)(1+t) \geq 11t \Leftrightarrow 10m+t \geq \frac{11t}{1+t} \Leftrightarrow m \geq \frac{10t-t^2}{10(t+1)}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{10t-t^2}{10(t+1)}$ trên khoảng $(0,2)$.
Ta có $f'(t)=\dfrac{10-2t-t^2}{10(t+1)^2}=\dfrac{11-(1+t)^2}{10(t+1)^2}$
Dễ thấy $f'(t)>0\ \forall t \in (0,2)$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0,2)$ mà $f(0)=0$; $f(2)=\dfrac{8}{15}$.
Để thỏa mãn bài toán khi $m \geq f(2) \Leftrightarrow m \geq \dfrac{8}{15}$. Do đó số giá trị nguyên của m trong đoạn $[-2018;2018]$ là 2018.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_1=\dfrac{2}{3}$ và $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}, (n \geq 1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thoả mãn $\log_{\frac{1}{2}} u_n > 12,3$.

A. $n=50$. **B.** $n=60$. **C.** $n=51$. **D.** $n=61$.

Lời giải.

Ta chứng minh số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=\dfrac{2}{4n^2-1}$.
Thật vậy $u_1=\dfrac{2}{3}$ và với mọi $n \geq 1$ ta có

$$\frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}=\frac{2}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{2}{4(n+1)^2-1}=u_{n+1}.$$

Do đó $\log_{\frac{1}{2}} u_n > 12,3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{4n^2-1} < \dfrac{1}{2^{12,3}} \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2^{13,3}+1}{4}} \approx 50,22$.
Vậy số n nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu là 51.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Tính $a+b$, biết $[a;b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2-2x+m}+4\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)} \leqslant 5$ thỏa mãn với mọi $x \in [0;2]$.

A. $a+b=4$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=6$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\log_4(x^2-2x+m)+4\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)} \leqslant 5$.
Đặt $t=\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)}$ thì $t \geqslant 0$ và bất phương trình trở thành $t^2+4t-5 \leqslant 0 \Leftrightarrow -5 \leqslant t \leqslant 1$.
Kết hợp điều kiện ta được $t \in [0;1]$.
Khi đó $\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \log_4(x^2-2x+m) \leqslant 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leqslant x^2-2x+m \leqslant 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant -x^2+2x+1 \\ m \leqslant -x^2+2x+4. \end{cases} (I)$$

Xét hàm số $f(x)=-x^2+2x+1=2-(x-1)^2 \leqslant 2, \forall x \in [0;2] \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=2$.

Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 4 = 4 + x(2-x) \geqslant 4,\ \forall x \in [0;2] \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} g(x) = g(0) = 4.$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0;2] \Leftrightarrow (I)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant \max\limits_{[0;2]} f(x) \\ m \leqslant \min\limits_{[0;2]} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leqslant m \leqslant 4.$$

Vậy $m \in [2;4]$, tức là $a = 2,\ b = 4 \Rightarrow a + b = 6.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $\log_a x \leq 3x - 3$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;5]$.

Lời giải.

Nhận thấy nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $\log_a x \leq 3x - 3$ không nghiệm đúng với $x = a$ do đó $a > 1$.

Thay $x = a$ vào bất phương trình $\log_a x \leq 3x - 3$ ta có $1 \leq 3a - 3 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{4}{3}$.

Thay $x = \dfrac{1}{a}$ vào bất phương trình $\log_a \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{3}{a} - 3$ suy ra $a \leq \dfrac{3}{2}$.

Vậy $\dfrac{4}{3} \leq a \leq \dfrac{3}{2}$ suy ra $a \in (1;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Có bao tất cả nhiêu giá trị nguyên khác 0 của tham số m sao cho $\log_2\left[(x^2+m)^2\right] \leq 4$ với mọi $x \in (0;|m|)$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Xét bất phương trình

$$\log_2\left[(x^2+m)^2\right] \leq 4. \tag{1}$$

Điều kiện xác định của bất phương trình (1) là $(x^2+m)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + m \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -m$.

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x^2+m)^2 \leq 16 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x^2 + m \leq 4 \\ &\Leftrightarrow -m-4 \leq x^2 \leq -m+4. \end{aligned} \tag{2}$$

- ☑ Nếu $m = 4$, $(2) \Leftrightarrow -8 \leq x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$, suy ra (1) có tập nghiệm $S = \{0\}$. Suy ra $m = 4$ không thỏa mãn đề bài.
- ☑ Nếu $m = -4$, $(2) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 8 \Leftrightarrow x \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$.
  Suy ra nghiệm tập của (1) là $\left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right] \setminus \{\pm 2\} \not\supset (0;4)$. Nên $m = -4$ không thỏa mãn đề bài.
- ☑ Nếu $-4 < m < 0$, $(2) \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{-m+4}; \sqrt{-m+4}\right]$.
  Suy ra tập nghiệm của (1) là $\left[-\sqrt{-m+4}; \sqrt{-m+4}\right] \setminus \{\pm\sqrt{-m}\}$.
  Để bài được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$|m| \leq \sqrt{-m} \Leftrightarrow m^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

  Suy ra $m = -1$.

☑ Nếu $0 < m < 4$, $(2) \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{-m+4}; \sqrt{-m+4}\right]$.
Suy ra nghiệm tập nghiệm của (1) là $\left[-\sqrt{-m+4}; \sqrt{-m+4}\right]$.
Đề bài được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$|m| \le \sqrt{-m+4} \Leftrightarrow m^2 + m - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

Suy ra $m = 1$.

☑ Nếu $m < -4$, $(2) \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{-m+4}; -\sqrt{-m-4}\right] \cup \left[\sqrt{-m-4}; \sqrt{-m+4}\right]$.
Suy ra nghiệm tập nghiệm của (1) là $\left[-\sqrt{-m+4}; -\sqrt{-m-4}\right] \cup \left[\sqrt{-m-4}; \sqrt{-m+4}\right] \not\supset (0; |m|)$.
Suy ra không có m thỏa mãn bài đề trong trường hợp này.

☑ Nếu $m > -4$, (2) vô nghiệm.

Vậy $m \in \{-1; 1\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \ge x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \ge x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x} \\
\Leftrightarrow\ & x \cdot \ln y + x \cdot \mathrm{e}^y \ge y \cdot \ln x + y \cdot \mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow\ & x \cdot (\ln y + \mathrm{e}^y) \ge y \cdot (\ln x + \mathrm{e}^x) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \ge \frac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x} \\
\Leftrightarrow\ & f(y) \ge f(x), \text{với hàm đặc trưng } f(t) = \frac{\ln t + e^t}{t}, t > 1.
\end{aligned}$$

Ta có $f'(t) = -\dfrac{-\mathrm{e}^t t + \ln t + \mathrm{e}^t - 1}{t^2}$.
Đặt $g(t) = -\mathrm{e}^t t + \ln t + e^t - 1$.
Ta có $g'(t) = -e^t \cdot t + \dfrac{1}{t} < 0, \forall t > 1$ nên $f'(t) > 0, \forall t > 1$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
Do đó $f(y) \ge f(x) \Leftrightarrow y \ge x \Leftrightarrow \log_x y \ge 1$.
Ta có $P = \log_x \sqrt{x \cdot y} + \log_y x = \dfrac{1}{2}(1 + \log_x y) + \dfrac{1}{\log_x y}$.
Đặt $u = \log_x y \Rightarrow u \ge 1$. Khi đó $P(u) = \dfrac{1}{2}(1+u) + \dfrac{1}{u}$, $P'(u) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{u^2} = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2}$.
Bảng biến thiên:

x	-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	↘	$\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$	↗	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Gọi K là tập nghiệm của bất phương trình $7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leqslant 2018$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(2m+3)x - 3m + 5$ đồng biến trên K là $[a - \sqrt{b}; +\infty)$, với a, b là các số thực. Tính $S = a + b$.

A. $S = 14$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 11$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geqslant -1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leqslant 2018 \\ \Leftrightarrow\ & 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1009(2x+\sqrt{x+1}) \leqslant 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1009(2+\sqrt{x+1}) \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 7^t + 1009t$, $f'(t) = 7^t \ln 7 + 1009 > 0$ cho nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $(1) \Leftrightarrow f(2x+\sqrt{x+1}) \leqslant f(2+\sqrt{x+1})$, suy ra

$$2x + \sqrt{x+1} \leqslant 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $K = [-1; 1]$.

Hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(2m+3)x - 3m + 5$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' \geqslant 0, \forall x \in K$

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 6(m+2)x + 6(2m+3) \geqslant 0, \forall x \in K \\ \Leftrightarrow\ & m \geqslant \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}, \forall x \in K. \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$; $g'(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 2 + \sqrt{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Suy ra $\max g(x) = \max\{g(-1); g(1); g(2-\sqrt{3})\} = 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow m \geqslant 2 - 2\sqrt{3}$.

Vậy $a = 2$ và $b = 12$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho bất phương trình $m \cdot 9^{2x^2-x} - (2m+1)6^{2x^2-x} + m \cdot 4^{2x^2-x} \leqslant 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

A. $m < \dfrac{3}{2}$. **B.** $m \leqslant \dfrac{3}{2}$. **C.** $m \leqslant 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 4^{2x^2-x} ta được

$$m\left(\frac{9}{4}\right)^{2x^2-x} - (2m+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x} + m \leqslant 0.$$

Với $x \geqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2-x} \geqslant 1$. Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình

$$mt^2 - (2m+1)t + m \leqslant 0, \forall t \geqslant 1 \quad (1).$$

Với $t=1$, $0 \leqslant 1$.
Với $t>1$, $(1) \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{t}{t^2-2t+1}, \forall t>1 \quad (2)$.
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t^2-2t+1}$; $f'(t)=\dfrac{-t^2+1}{(t^2-2t+1)^2}<0, \forall t>1$.
Khi đó $(2) \Leftrightarrow m \leqslant \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$. Vậy $m \leqslant 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0;2018]$ để bất phương trình $m+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geq \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 2017. **B**. 2018. **C**. 2019. **D**. 2016.

Lời giải.

Ta có $m+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geq \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1} \Leftrightarrow m \geq \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ (1).
Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
Có $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt[4]{(\mathrm{e}^{2x}+1)^3}}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt[4]{(\mathrm{e}^{2x}+1)^3}}{\sqrt[4]{(\mathrm{e}^{2x}+1)^3}}$.
Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt[4]{(\mathrm{e}^{2x}+1)^3}=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}=\sqrt[4]{(\mathrm{e}^{2x}+1)^3} \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{3x})^2=(\mathrm{e}^{2x}+1)^3$ (2).
Đặt $t=\mathrm{e}^{2x}$, $(t>0)$. Khi đó $(2) \Leftrightarrow 3t^2+3t+1=0$, phương trình này vô nghiệm nên phương trình (2) vô nghiệm hay $y'=0$ vô nghiệm.
Suy ra y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$, dễ thấy $y'(0)<0 \Rightarrow y'<0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số $y=f(x)=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x}+1}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)=1$.
Khi đó bất phương trình (1) có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 1$.
Suy ra có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2 \geq 4$ và $\log_{x^2+y^2}(4x-2y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3x+4y-5$ là $a+b\sqrt{5}$ với a, b là các số nguyên. Tính a^3+b^3.

A. $T=152$. **B**. $T=98$. **C**. $T=0$. **D**. $T=250$.

Lời giải.

Điều kiện $4x-2y>0$. Ta có

$$\log_{x^2+y^2}(4x-2y) \geq 1 \Leftrightarrow 4x-2y \geq x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \quad P+\frac{37}{4} \geq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2 \geq \frac{\left[3\left(x-\frac{1}{2}\right)+4(y+3)\right]^2}{3^2+4^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2 \geq \frac{\left(P+\frac{31}{2}\right)^2}{25}$$

$$\Rightarrow \quad P+\frac{37}{4} \geq \frac{\left(P+\frac{31}{2}\right)^2}{25} \Rightarrow P \geq -3+5\sqrt{5}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq 4 \\ 4x-2y \geq x^2+y^2 \\ 3x+4y-5=-3+5\sqrt{5} \\ \dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{3}=\dfrac{y+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10+3\sqrt{5}}{5} \\ y=\dfrac{-25+20\sqrt{5}}{25}. \end{cases}$

Vậy $\max P=-3+5\sqrt{5} \Rightarrow a^3+b^3=98$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Ta có

☑ Nếu $x^2+2y^2<1$ thì $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \leq x^2+2y^2<1$.

☑ Nếu $x^2+2y^2>1$ thì $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+2\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2 \leq \dfrac{9}{8}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} 2x+y &= 2(x-1)+\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4}=2\cdot(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4} \\ &\leq \sqrt{\left[2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\left[(x-1)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2\right]}+\frac{9}{4} \leq \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là $\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Cho các bất phương trình $\log_5(-x^2+4x+m)-\log_5(x^2+1)<1$ (1) và $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1} \geq 0$ (2). Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1) là

A. 13. **B.** 21. **C.** 28. **D.** 11.

Lời giải.

Dễ thấy bất phương trình $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1} \geq 0$ có tập nghiệm là $[1;4]$.

Ta có $\log_5(-x^2+4x+m)-\log_5(x^2+1)<1 \Leftrightarrow \log_5(-x^2+4x+m)<\log_5(5x^2+5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+m>0 \\ -x^2+4x+m<5x^2+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+m>0 \\ 6x^2-4x+5-m>0. \end{cases}$$

Với m nguyên dương, ta có $-x^2+4x+m>0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{4+m}<x<2+\sqrt{4+m}$. Mà $\begin{cases} 2-\sqrt{4+m}<0 \\ 2+\sqrt{4+m}>4 \end{cases}$ nên mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình $-x^2+4x+m>0$.

Xét bất phương trình $6x^2-4x+5-m>0 \quad (*)$, ta có $\Delta'=4-6(5-m)=6m-26$.

☑ Với $0<m<\dfrac{13}{3}$ thì $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1).

☑ Với $m \geq \dfrac{13}{3}$ thì $(*) \Leftrightarrow x < \dfrac{2-\sqrt{6m-26}}{6}$ hoặc $x > \dfrac{2+\sqrt{6m-26}}{6}$. Khi đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi

$$\begin{aligned} & \frac{2-\sqrt{6m-26}}{6} > 4 \text{ hoặc } \frac{2+\sqrt{6m-26}}{6} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{6m-26} < -22 \text{ hoặc } \sqrt{6m-26} < 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{13}{3} \leq m < 7 \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Cho các số thực x, y dương và thỏa mãn $\log_2 \dfrac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + 2^{\log_2(x^2+2y^2+1)} \leq \log_2 8^{xy}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + 2^{\log_2(x^2+2y^2+1)} \leq \log_2 8^{xy} \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x^2+y^2) - \log_2(3xy+x^2) + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy \\ \Leftrightarrow\ & \log_2 2(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) \leq \log_2(3xy+x^2) + 3xy + x^2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, với $t > 0$.

$f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$, với $t > 0$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$\begin{aligned} (*) \ \Leftrightarrow\ & f(2(x^2+y^2)) \leq f(3xy+x^2) \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \leq 3xy + x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3xy + 2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2y) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq \frac{x}{y} \leq 2 \text{ (vì } x, y > 0). \end{aligned}$$

$$P = \frac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2} = \frac{2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} + 2}{2\dfrac{x}{y} - 1}.$$

Đặt $u = \dfrac{x}{y}$, ta có $P = \dfrac{2u^2-u+2}{2u-1}$, với $u \in [1;2]$.

$P'_u = \dfrac{4u^2-4u-3}{(2u-1)^2}$; $P'_u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{3}{2} \in [1;2] \\ u = -\dfrac{1}{2} \notin [1;2]. \end{array}\right.$

$P(1) = 3$; $P\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$; $P(2) = \dfrac{8}{3}$.

Vậy $\min P = \dfrac{5}{2}$ khi $u = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55. Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% một tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

A. 67. **B**. 68. **C**. 66. **D**. 65.

Lời giải.

Đặt $N = 500$; $A = 10$; $r = 0{,}85\%$.

Sau một tháng anh An còn nợ: $N \cdot (1+r) - A$.

Sau hai tháng anh An còn nợ

$(N \cdot (1+r) - A) \cdot (1+r) - A = N \cdot (1+r)^2 - A \cdot [(1+r)+1] = N \cdot (1+r)^2 - \dfrac{A}{r}[(1+r)^2 - 1]$.

Tương tự sau n tháng anh An còn nợ $N \cdot (1+r)^n - \dfrac{A}{r}[(1+r)^n - 1]$.

Anh An trả hết nợ sau n tháng khi n là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình

$$\begin{aligned} N \cdot (1+r)^n - \frac{A}{r}[(1+r)^n - 1] \le 0 &\Leftrightarrow 500 \cdot (1+0{,}85\%)^n - \frac{10}{0{,}85\%}[(1+0{,}85\%)^n - 1] \le 0 \\ &\Leftrightarrow (1+0{,}85\%)^n \ge \frac{40}{23} \\ &\Leftrightarrow n \ge \log_{1+0{,}85\%} \frac{40}{23} \approx 65{,}38. \end{aligned}$$

$\Rightarrow n = 66$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Số 5×9^{2018} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

A. 1927. **B**. 1926. **C**. 1214. **D**. 4435.

Lời giải.

Số 5×9^{2018} viết trong hệ thập phân có n chữ số khi và chỉ khi

$$10^{n-1} \le x < 10^n \Leftrightarrow n - 1 \le 2018 \log 9 + \log 5 < n \Rightarrow n = 1927.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left|\dfrac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4}\right| \ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$?

A. 4. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 7.

Lời giải.

Ta thấy $\left|\dfrac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4}\right| \ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi $\left|\dfrac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4}\right| \ge 2$ nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Trước hết phương trình $t^2 - (m+1)t + 4 = 0$ phải vô nghiệm, tức là

$$\Delta = (m+1)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 3. \quad (1)$$

Với $-5 < m < 3$ thì $t^2 - (m+1)t + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta lại có $3t^2 + 2t + 12 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\left|\frac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4}\right| \ge 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t + 12 \ge 2\left[t^2 - (m+1)t + 4\right] \Leftrightarrow t^2 + 2(m+1)t + 4 \ge 0. \quad (2)$$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$ khi $\Delta' = (m+2)^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$. (3)
Kết hợp (1) và (3) ta được $-4 \le m \le 0$.
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \left(\mathrm{e}^x\right)^{\mathrm{e}^y} \ge x^y \left(\mathrm{e}^y\right)^{\mathrm{e}^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Với $x, y > 1$ ta có

$$\begin{aligned} y^x \left(\mathrm{e}^x\right)^{\mathrm{e}^y} \ge x^y \left(\mathrm{e}^y\right)^{\mathrm{e}^x} &\Leftrightarrow x\ln y + x\mathrm{e}^y \ge y\ln x + y\mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \ge \frac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x}. \end{aligned}$$

Đặt $f(t) = \dfrac{\ln t + \mathrm{e}^t}{t}$ với $t > 1$ ta có

$$f'(t) = \frac{\left(\frac{1}{t} + \mathrm{e}^t\right)\cdot t - \mathrm{e}^t - \ln t}{t^2} = \frac{(t-1)\mathrm{e}^t - \ln t + 1}{t^2} = \frac{g(t)}{t^2}.$$

Ta có $g'(t) = (t-1)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t - \dfrac{1}{t} > 0,\ \forall t > 1 \Rightarrow g(t) > g(1) = 1 > 0$, do đó $f'(t) > 0$ với mọi $t > 1$.
Vậy $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Rightarrow f(y) \ge f(x) \Leftrightarrow y \ge x$.
Ta có

$$P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2}\left(1 + \log_x y\right) + \frac{1}{\log_x y} = \frac{1}{2}(1+u) + \frac{1}{u} = \frac{1}{2} + \frac{u}{2} + \frac{1}{u}$$

với $u = \log_x y$.

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{u}{2}\cdot\frac{1}{u}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{u}{2} = \dfrac{1}{u} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x y = \sqrt{2} \\ \log_x y = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_x y = \sqrt{2}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \le 5$. Biết đoạn $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị của m để bất phương trình thỏa mãn với mọi $x \in [0;2]$. Tính tổng $a + b$?

A. $a + b = 4$. **B.** $a + b = 2$. **C.** $a + b = 0$. **D.** $a + b = 6$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x^2 - 2x + m \ge 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 1 \ge 0$.
Do $x \in [0;2]$ nên $m - 2 \ge 0$ hay $m \ge 2$.
Phương trình tương đương với

$$\log_4(x^2 - 2x + m) + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \le 5$$
$$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 \le 0 \ \left(t = f(x) = \sqrt{\log_4 x^2 - 2x + m}\right)$$

$\Leftrightarrow -5 \le t \le 1$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\log_4(x^2-2x+m)}} \cdot \dfrac{2x-2}{(x^2-2x+m)\ln 4}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Mà $x \in [0;2]$ nên $\min\{f(0); f(1); f(2)\} \le t = f(x) \le \max\{f(0); f(1); f(2)\}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_4(m-1)} \le t \le \sqrt{\log_4 m}$.

Để bất phương trình ban đầu đúng với mọi $x \in [0;2]$ thì ta phải có

$$\begin{cases} \sqrt{\log_4(m-1)} \ge -5 \\ \sqrt{\log_4 m} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 4.$$

Vậy $m \in [2;4]$ nên $a = 2$, $b = 4$ suy ra $a + b = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho bất phương trình $m3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A. $m \ge -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m \ge \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m > \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & m3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3m + (3m+2)\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Đặt $t = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, $(t > 0)$. Bất phương trình trở thành

$$3m + (3m+2)\frac{1}{t} + t > 0 \Leftrightarrow t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0 \quad (2).$$

Ta có $x \in (-\infty; 0] \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $t \in (0; 1] \Leftrightarrow m > -\dfrac{t^2+2}{3(t+1)}, \forall t \in (0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = -\dfrac{t^2+2}{3(t+1)}$ trên $(0; 1]$.

Ta có $f'(t) = -\dfrac{t^2+2t-2}{3(t+1)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1-\sqrt{3} \notin (0;1] \\ t = -1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

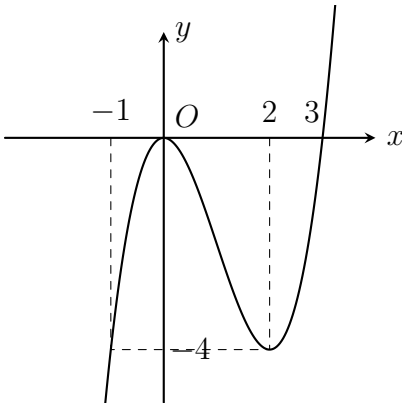
t	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	↘	$-\frac{1}{2}$

Vậy $m > -\dfrac{t^2+2}{3(t+1)}, \forall t \in (0; 1] \Leftrightarrow m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 61.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên biết $f(2) = -4$, $f(3) = 0$. Bất phương trình $f\left(\mathrm{e}^x\right) < m\left(3\mathrm{e}^x + 2019\right)$ có nghiệm $x \in (\ln 2; 1)$ khi và chỉ khi



A. $m > -\dfrac{4}{1011}$.

B. $m > -\dfrac{4}{2025}$.

C. $m \geq \dfrac{4}{3\mathrm{e} + 2019}$.

D. $m > \dfrac{f(\mathrm{e})}{3\mathrm{e} + 2019}$.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x, x \in (\ln 2; 1)$.

Ta có $f\left(\mathrm{e}^x\right) < m\left(3\mathrm{e}^x + 2019\right)$ có nghiệm $x \in (\ln 2; 1)$ khi và chỉ khi

$f(t) < m(3t + 2019)$ có nghiệm $t \in (2; \mathrm{e}) \Leftrightarrow m > \dfrac{f(t)}{3t + 2019}$ có nghiệm $t \in (2; \mathrm{e})$.

Đặt $g(t) = \dfrac{f(t)}{3t + 2019}, t \in (2; \mathrm{e})$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2} > 0,\ \forall t \in (2; \mathrm{e})$. Vì

- ☑ Hàm số đồng biến trên $(2; \mathrm{e})$ nên $f'(t) > 0,\ \forall t \in (2; \mathrm{e})$.
- ☑ $3t + 2019 > 0,\ \forall t \in (2; \mathrm{e})$.
- ☑ Đồ thị hàm số $f(t)$ trên $(2; \mathrm{e})$ nằm phía dưới trục hoành nên $f(t) < 0,\ \forall t \in (2; \mathrm{e})$.

Do đó $g(t) \in \left(\dfrac{-4}{2025}; \dfrac{f(\mathrm{e})}{3\mathrm{e} + 2019}\right)$.

Vậy $m > \dfrac{f(t)}{3t + 2019}$ có nghiệm $t \in (2; \mathrm{e})$ khi và chỉ khi $m > -\dfrac{4}{2025}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0.$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2}$. Tính $T = 10M - m$.

A. 60. **B.** 94. **C.** 104. **D.** 50.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(x^2 + 5y^2\right) + 1 - \log_2\left(x^2 + 10xy + y^2\right) + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(2x^2 + 10y^2\right) + \left(2x^2 + 10y^2\right) \leq \log_2\left(x^2 + 10xy + y^2\right) + \left(x^2 + 10xy + y^2\right).
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Ta thấy $f'(t) = \dfrac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0 \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến

trên $(0;+\infty)$. Do đó

$$\begin{aligned} f\left(2x^2+10y^2\right) \le f\left(x^2+10xy+y^2\right) &\Leftrightarrow 2x^2+10y^2 \le x^2+10xy+y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-10xy+9y^2 \le 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2-10\left(\frac{x}{y}\right)+9 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 9. \end{aligned}$$

Khi đó $P=\dfrac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}=\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}+9}{\dfrac{x}{y}+1}$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta được $P=\dfrac{t^2+t+9}{t+1}$ với $1 \le t \le 9$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2+t+9}{t+1}$ trên đoạn $[1;9]$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}$, $g'(t)=0 \Leftrightarrow \hoac{t=2 \in (1;9)\\ t=-4 \notin (1;9).}$

Mặt khác $g(1)=\dfrac{11}{2}$, $g(9)=\dfrac{99}{10}$, $g(2)=5$. Do đó $M=\max\limits_{[1;9]} g(t)=\dfrac{99}{10}$, $m=\min\limits_{[1;9]} g(t)=5$.

Vậy $T=10M-m=99-5=94$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y \ge \ln(x^2+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A. $P=6$. **B.** $P=2+3\sqrt{2}$. **C.** $P=3+2\sqrt{2}$. **D.** $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\ln x+\ln y \ge \ln(x^2+y) \Leftrightarrow xy \ge x^2+y \Leftrightarrow y(x-1) \ge x^2 > 0$.

Suy ra $x>1$ và $y>0$.

Khi đó $y \ge \dfrac{x^2}{x-1}$.

Suy ra $P=x+y \ge x+\dfrac{x^2}{x-1}=2(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+3 \ge 2\sqrt{2(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}}+3=2\sqrt{2}+3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3+2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\ln(x^2+2x+m)-2\ln(2x-1)>0$ chứa đúng 2 số nguyên?

A. 10. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải.

☑ Ta có

$$\begin{aligned}\ln(x^2+2x+m)-2\ln(2x-1)>0 &\Leftrightarrow \ln(x^2+2x+m)>2\ln(2x-1)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ \ln(x^2+2x+m)>\ln(2x-1)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x^2+2x+m>(2x-1)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ 3x^2-6x-m+1<0.\end{cases}\qquad(1)\end{aligned}$$

☑ Bất phương trình (1) có nghiệm khi tam thức $3x^2-6x-m+1$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow m>-2$.

☑ Với $m>-2$, tam thức $3x^2-6x-m+1$ có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{3+\sqrt{3m+6}}{3}>1$; $x_2=\dfrac{3-\sqrt{3m+6}}{3}$.

☑ Kết hợp điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$ để xác định tập nghiệm thỏa mãn đề bài, ta xét 2 trường hợp:

TH1: $x_2<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3m+6}>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m>-\dfrac{5}{4}$, khi đó tập nghiệm của (1) là $\left(\dfrac{1}{2};x_1\right)$.

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2<x_1\le 3\Leftrightarrow 3<\sqrt{3m+6}\le 6\Leftrightarrow 1<m\le 10$.

Kết hợp các điều kiện, ta có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

TH2: $x_2\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3m+6}\le\dfrac{3}{2}$. Khi đó tập nghiệm của (1) là $(x_2;x_1)$.

Mà $x_1-x_2=\dfrac{2\sqrt{3m+6}}{3}\le 1$ nên tập nghiệm không thể chứa hai giá trị nguyên.

☑ Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số a thỏa mãn mỗi nghiệm của bất phương trình $\log_x(5x^2-8x+3)>2$ đều là nghiệm của bất phương trình $x^2-2x-a^4+1\ge 0$. Khi đó:

A. $S=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

B. $S=\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{10}}{5};+\infty\right)$.

C. $S=\left[-\dfrac{\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right]$.

D. $S=\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5};+\infty\right)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\log_x(5x^2-8x+3)>2$. (1)

Ta có

$$\log_x(5x^2-8x+3)>2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 5x^2-8x+3>x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<5x^2-8x+3<x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 4x^2-8x+3>0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0<x<\dfrac{3}{5} \\ 4x^2-8x+3<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{3}{2} \\ x<\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0<x<\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2} \text{ hoặc } \frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}.$$

Do đó, tập nghiệm của (1) là $T_1=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{5}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Xét bất phương trình $x^2-2x-a^4+1\geq 0$. (2)

Mỗi nghiệm của bất phương trình (1) đều là nghiệm của bất phương trình (2) khi và chỉ khi

$$x^2-2x-a^4+1\geq 0, \forall x\in T_1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq a^4, \forall x\in T_1. \quad (*)$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^2-2x+1$.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{4}{25}$		$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $(*) \Leftrightarrow a^4\leq \dfrac{4}{25} \Leftrightarrow a^2\leq \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\leq a\leq \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $S=\left[-\dfrac{\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right]$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(a-1)+f(\ln a)\leq 0$ là

A. $[0;1]$. **B.** $(0;1]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{1+x^2}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{1+x^2}+x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy ta có tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}+(-x)\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=-f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.
Mặt khác

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} f(a-1)+f(\ln a)\le 0 &\Leftrightarrow f(a-1)\le -f(\ln a)\Leftrightarrow f(a-1)\le f(-\ln a) \\ &\Leftrightarrow a-1\le -\ln a\Leftrightarrow a+\ln a\le 1. \quad (*) \end{aligned}$$

Xét $g(a)=a+\ln a,\ \forall a>0,\ g'(a)=1+\dfrac{1}{a}>0,\ \forall a>0$.
Vậy hàm số $g(a)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $g(1)=1$.
Vậy $(*)\Leftrightarrow g(a)\le g(1)\Leftrightarrow a\le 1$. Suy ra tập nghiệm bất phương trình là $(0;1]$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) \ge \log_2(6-y)+6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$ bằng

A. $\dfrac{59}{3}$. **B.** 19. **C.** $\dfrac{53}{3}$. **D.** $8+6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_2 x + x(x+y) \ge \log_2(6-y)+6x \\ \Leftrightarrow\ &\log_2 x^2 + x^2 \ge \log_2\left[x(6-y)\right]+\left[x(6-y)\right]. \quad (1) \end{aligned}$$

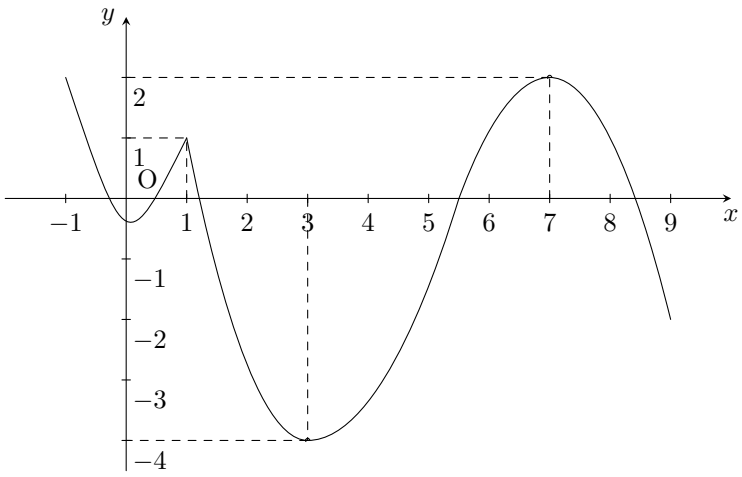
Xét hàm số $f(t)=\log_2 t + t,\ t>0$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\ \forall t>0$.
Vì $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ (1) ta có $x^2\ge x(6-y)\Rightarrow x+y\ge 6$. (2)
Ta thấy

$$\begin{aligned} P &= 3x+2y+\frac{6}{x}+\frac{8}{y} \\ &= \left(\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{8}{y}\right)+\frac{3}{2}(x+y) \\ &\ge 6+4+9 \\ &= 19. \quad (3) \end{aligned}$$

Dẳng thức (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{2}=\dfrac{6}{x} \\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{8}{y} \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16\cdot 3^{f(x)}-[f^2(x)+2f(x)-8]\cdot 4^{f(x)}\geq (m^2-3m)\cdot 6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị $\in[-1;9]$?

A. 32. **B**. 31. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

+) Từ đồ thị hàm số suy ra $-4\leq f(x)\leq 2, \forall x\in[-1;9]$, đặt $t=f(x)\Rightarrow t\in[-4;2]$.

+) Ta tìm m để $16\cdot 3^t-[t^2+2t-8]\cdot 4^t\geq (m^2-3m)\cdot 6^t$ đúng $\forall t\in[-4;2]$

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{2^t}-[t^2+2t-8]\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\geq m^2-3m,\ \forall t\in[-4;2]$.

Ta có $\dfrac{16}{2^t}\geq 4,\ \forall t\in[-4;2]$, dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

Mà $t^2+2t-8\leq 0,\ \forall t\in[-4;2]\Rightarrow [t^2+2t-8]\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\leq 0,\ \forall t\in[-4;2]$, dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

$\Rightarrow \dfrac{16}{2^t}-[t^2+2t-8]\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\geq 4,\ \forall t\in[-4;2]$.

Vậy $m^2-3m\leq 4\Leftrightarrow -1\leq m\leq 4$, mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2\log u_1+\sqrt{4+2\log u_1-\log u_5}=\log u_5+2$ và $u_{n+1}=3u_n$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>2^{2018}$ bằng

A. 1272. **B**. 1271. **C**. 1752. **D**. 1753.

Lời giải.

Điều kiện $u_1>0$, đặt $\sqrt{4+2\log u_1-\log u_5}=x$, ta có phương trình

$$x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=2\ (\text{vì } x\geq 0).$$

$x=2\Rightarrow 2\log u_1=\log u_5\Leftrightarrow u_1^2=u_5\Leftrightarrow u_1^2=81u_1\Leftrightarrow u_1=81\ (\text{vì } u_1>0)$.

Do đó $u_n=3^{n-1}u_1=81\cdot 3^{n-1}=3^{n+3}$.

$u_n>2^{2018}\Leftrightarrow 3^{n+3}\geq 2^{2018}\Leftrightarrow n+3>2018\log_3 2\Leftrightarrow n>2018\log_3 2-3\approx 1270,2162$.

Vậy n nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán là 1271.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Cho các số thực x, y dương và thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2+y^2}{3xy+x^2}+2^{\log_2(x^2+2y^2+1)}\leq \log_2 8^{xy}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + 2^{\log_2(x^2+2y^2+1)} \le \log_2 8^{xy} \\ \Leftrightarrow\ &\log_2(x^2+y^2) - \log_2(3xy+x^2) + x^2 + 2y^2 + 1 \le 3xy \\ \Leftrightarrow\ &\log_2 2(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) \le \log_2(3xy+x^2) + 3xy + x^2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, với $t > 0$.
$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 1 > 0$, với $t > 0$.
Hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$\begin{aligned} (*) \ &\Leftrightarrow\ f(2(x^2+y^2)) \le f(3xy+x^2) \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \le 3xy + x^2 \\ &\Leftrightarrow\ x^2 - 3xy + 2y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2y) \le 0 \\ &\Leftrightarrow\ 1 \le \frac{x}{y} \le 2 \text{ (vì } x, y > 0). \end{aligned}$$

$P = \dfrac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2} = \dfrac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 2}{2\frac{x}{y} - 1}$,
Đặt $u = \dfrac{x}{y}$, ta có $P = \dfrac{2u^2 - u + 2}{2u - 1}$, với $u \in [1;2]$.
$P'_u = \dfrac{4u^2 - 4u - 3}{(2u-1)^2}$; $P'_u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{3}{2} \in [1;2] \\ u = \frac{-1}{2} \notin [1;2]. \end{array}\right.$
$P(1) = 3$; $P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$; $P(2) = \frac{8}{3}$.
Vậy $\min P = \frac{5}{2}$ khi $u = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho a là số thực dương khác 1, thỏa mãn $\log_a x \le 3x - 3$, $\forall x \in (0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $a \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $a \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $a \in \left(\frac{3}{4};4\right)$.

Lời giải.

Xét 2 trường hợp
①

$$\begin{aligned} &a > 1 \Rightarrow x \le a^{3x-3} \Leftrightarrow a^{3(x-1)} - 1 \ge x - 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^{3(x-1)} - 1}{x-1} \ge 1, \forall x > 1 \\ \dfrac{a^{3(x-1)} - 1}{x-1} \le 1, \forall x, 0 < x < 1. \end{cases} \end{aligned} \qquad (1)$$

Áp dụng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^{3(x-1)}-1}{3(x-1)}\geq\dfrac{1}{3},\forall x>1\\ \dfrac{a^{3(x-1)}-1}{3(x-1)}\leq\dfrac{1}{3},\forall x\in(0;1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ln a\geq\dfrac{1}{3}\forall x>1\\ \ln a\leq\dfrac{1}{3},\forall x\in(0;1)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ \ln a=\frac{1}{3}\Rightarrow a=\mathrm{e}\frac{1}{3}.$$

② $0<a<1\Rightarrow x\leq a^{3(x-1)}$, không xảy ra do

$$\frac{1}{3}\cdot 3(x-1)\geq a^{3(x-1)}-1\ \Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^{3(x-1)}-1}{3(x-1)}\leq\dfrac{1}{3},\forall x>1\\ \dfrac{a^{3(x-1)}-1}{3(x-1)}\geq\dfrac{1}{3},\forall x\in(0;1)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\ln a\leq\dfrac{1}{3},\forall x>1\\ \ln a\geq\dfrac{1}{3},\forall x\in(0;1)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ a=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\notin(0;1).$$

Từ 2 trường hợp trên suy ra $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$, thay vào giả thiết ta được

$$\log_{\mathrm{e}}^{\frac{1}{3}}x\leq 3x-3\Leftrightarrow 3\ln x\leq 3(x-1)\Leftrightarrow\ln x\leq x-1.$$

Xét hàm số $f(t)=\ln t-t+1$, $t>0$ ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}-1$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$, có bảng biến thiên như sau

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy với mọi $t>0$ thì $f(t)\leq 0$, suy ra $\ln x\leq x-1$.
Vậy $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.
Chọn đáp án B □

Câu 72. Cho các phương trình $x^{2017}+x^{2016}+\cdots+x-1=0$ (1); $x^{2018}+x^{2017}+\cdots+x-1=0$ (2). Biết rằng phương trình (1) và (2) có nghiệm dương lần lượt là a và b. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\cdot\mathrm{e}^b>b\cdot\mathrm{e}^a$. **B.** $a\cdot\mathrm{e}^a<b\cdot\mathrm{e}^b$. **C.** $a\cdot\mathrm{e}^b=b\cdot\mathrm{e}^a$. **D.** $a\cdot\mathrm{e}^b<b\cdot\mathrm{e}^a$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} f(x)=x^{2017}+x^{2016}+\cdots+x-1=\dfrac{x^{2018}-2x+1}{x-1} \\ g(x)=x^{2018}+x^{2017}+\cdots+x-1=\dfrac{x^{2019}-2x+1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow g(x)=f(x)+x^{2018}.$

Ta có a,b lần lượt là nghiệm của $f(x),g(x)$. Ta chứng minh $0<b<a<1$.

Ta thấy $\begin{cases} a\neq b \\ a,b\in(0;1) \end{cases}$. Ta chứng minh $a>b$. Giả sử $a<b$.

Ta thấy $0=g(b)>g(a)=a^{2018}+f(a)=a^{2018}>0$ (vô lý).

Vậy $0<b<a<1$.

Xét $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ trên $(0;1)$.

Ta thấy $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}<0,\forall x\in(0;1)$.

Ta có $h(a)<h(b)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}<\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}\Rightarrow a\cdot\mathrm{e}^b>b\cdot\mathrm{e}^a$.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x-m\cdot2^{x+1}+3-2m\leq0$ có nghiệm thực.

A. $m\geq2$. **B.** $m\leq3$. **C.** $m\leq5$. **D.** $m\geq1$.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$ ta có tập giá trị của t là $(0;+\infty)$.

Thay vào bất phương trình ban đầu ta có $t^2-2mt+3-2m\leq0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{t^2+3}{2(t+1)}$ vì $t+1>0$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2+3}{2(t+1)}$, $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{2(t+1)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $(0;+\infty)$ như sau

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thực thì $m\geq1$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\ln(x^2+2x+m)-2\ln(2x-1)>0$ chứa đúng hai số nguyên?

A. 10. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có

$$\ln(x^2+2x+m)-2\ln(2x-1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x^2+2x+m>4x^2-4x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 3x^2-6x+1-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ \Delta'=6+3m>0 \\ \dfrac{3-\sqrt{6+3m}}{3}<x<\dfrac{3+\sqrt{6+3m}}{3}. \end{cases}$$

Ta có $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>-2$. Khi đó tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{1}{2};1+\dfrac{\sqrt{6+3m}}{3}\right)$.

Tập S chứa đúng hai số nguyên là 1 và 2 khi và chỉ khi

$$1\le\frac{\sqrt{6+3m}}{3}<2 \Leftrightarrow 3\le\sqrt{6+3m}<6 \Leftrightarrow 1\le m<10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0, b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2=f(a_1)$ và $f\left(\log_2 b_2\right)+2=f\left(\log_2 b_1\right)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n>2019a_{n+1}$.

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải.

Gọi $a_n=a_1+(n-1)d$ với $a_1\ge 0, d>0$ do $a_2>a_1\ge 0$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ với $b_1\ge 1, q>1$ do $b_2>b_1\ge 1 \Rightarrow \log_2 b_2=\log_2(b_1\cdot q)=\log_2 b_1+\log_2 q$.

Dễ thấy dãy số $v_n=\log_2 b_n$ là một cấp số cộng với công sai là $d'=\log_2 q$.

Theo đề $f(a_2)+2=f(a_1) \Leftrightarrow f(a_1+d)+2=f(a_1)$

$f\left(\log_2 b_2\right)+2=f\left(\log_2 b_1\right) \Leftrightarrow f(v_1+d')+2=f(v_1)$

Xét phương trình $f(x+m)+2=f(x)$ với $x\ge 0$

Do tồn tại $a_1, v_1\ge 0$ thỏa mãn nên phương trình $f(x+m)+2=f(x)$ có nghiệm $x\ge 0$ với $m>0$

Ta có: $f(x+m)+2=f(x) \Leftrightarrow (x+m)^3-3(x+m)+2=x^3-3x$

$\Leftrightarrow 3mx^2+3m^2x+m^3-3m+2=0$

Dễ thấy do $m>0$ nên $\begin{cases} x_1+x_2=-m<0 \\ x_1x_2=3m\cdot(m^3-3m+2)=3m(m-1)^2(m+2)\ge 0. \end{cases}$

Nếu $\begin{cases} x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt cùng âm nên không thỏa mãn.

Do đó phương trình có nghiệm $x\ge 0$ thì phải có nghiệm $x=0$ khi đó $m=1$.

Từ đó ta được: $f(a_1+d)+2=f(a_1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ d=1 \end{cases}$ và $f(v_1+d')+2=f(v_1) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=0 \\ d'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=1 \\ q=2. \end{cases}$

Suy ra $a_n=n-1$ và $b_n=2^{n-1}$

Theo đề $b_n>2019a_{n+1} \Leftrightarrow 2^{n-1}>2019n \Rightarrow n-1\ge 15 \Leftrightarrow n\ge 16, n\in\mathbb{Z}^+$.

Giá trị nguyên dương nhỏ nhất $n=16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Cho $a > 1$. Biết khi $a = a_0$ thì bất phương trình $x^a \leqslant a^x$ đúng với mọi $x \in (1;+\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $1 < a_0 < 2$. **B**. $e < a_0 < \mathrm{e}^2$. **C**. $2 < a_0 < 3$. **D**. $\mathrm{e}^2 < a_0 < \mathrm{e}^3$.

Lời giải.

Ta có $x^a \leqslant a^x, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \ln x^a \leqslant \ln a^x, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \ln x \leqslant x \ln a, \forall x \in (1;+\infty)$
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} \geqslant \dfrac{\ln x}{x}, \forall x \in (1;+\infty) \cdot (*)$
Xét hàm $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$
có $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$
Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;+\infty)$, ta có $\max\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(e)$.
Vậy $f(a) = \dfrac{\ln a}{a} \geqslant \max\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(e) \Leftrightarrow a = e.$
Chọn đáp án C □

Câu 77. Một trại hè gồm có 5000 sinh viên, tuy nhiên có một sinh viên bị nhiễm vi-rút cúm. Tốc độ lây lan của vi-rút tuân theo công thức $y = \dfrac{5000}{1 + 4999\mathrm{e}^{-0,8t}}$ (với $t \geq 0$), trong đó y là tổng số sinh viên bị lây nhiễm sau t ngày. Trại hè sẽ đóng cửa nếu có từ 40% trở lên số sinh viên bị nhiễm cúm. Nếu không có thuốc điều trị cúm thì sau bao nhiêu ngày thì trại hè phải đóng cửa?

A. 9. **B**. 11. **C**. 12. **D**. 10.

Lời giải.

40% số sinh viên của trại hè là $\dfrac{40}{100}.5000 = 2000$ người.
Xét $y \geq 2000 \Leftrightarrow \dfrac{5000}{1 + 4999\mathrm{e}^{-0,8t}} \geq 2000 \Leftrightarrow 4999\mathrm{e}^{-0,8t} \leq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0,8t} \geq \dfrac{4999.2}{3} \Leftrightarrow t \geq 10,14 \Rightarrow$ sau 11 ngày sẽ phải đóng cửa trại hè.
Chọn đáp án B □

Câu 78. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 5% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu.

A. 8 năm. **B**. 10 năm. **C**. 9 năm. **D**. 11 năm.

Lời giải.

Gọi $A > 0$ là số tiền ban đầu người đó gửi. Theo công thức tính lãi kép, số tiền người đó nhận được sau $n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ năm là $T_n = A \cdot 1,05^n$. Ta có

$$T_n > A \cdot 1,5 \Leftrightarrow 1,05^n > 1,5 \Leftrightarrow n > \log_{1,05} 1,5 \approx 8,31.$$

Vậy sau ít nhất 9 năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu.
Chọn đáp án C □

Câu 79. Thầy Tuấn gửi 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng. Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành 1,15%/tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn 0,9%/tháng. Thầy Tuấn tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 5787710,707 đồng. Hỏi thầy Tuấn đã gửi tổng thời gian bao nhiêu tháng?

A. 18 tháng. **B**. 17 tháng. **C**. 16 tháng. **D**. 15 tháng.

Lời giải.

Gọi m là số tháng thầy Tuấn gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng ($m \in \mathbb{N}, 1 \le m \le 11$).
Khi đó, số tháng thầy Tuấn gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 1,15%/tháng là $12 - m$.
Gọi n là số tháng thầy Tuấn gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 0,9%/tháng ($n \in \mathbb{N}, 1 \le n$).
Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi thầy Tuấn có được cho đến khi rút là

$$T = A \cdot (1{,}007)^m \cdot (1{,}0115)^{12-m} \cdot (1{,}009)^n, \text{ với } A = 5000000.$$

Theo đề bài thì $T = 5787710{,}707$.
Bước 1. Với $1 \le m \le 11$, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} & A \cdot (1{,}007)^{11} \cdot (1{,}0115) \cdot (1{,}009)^n \le T \le A \cdot (1{,}007) \cdot (1{,}0115)^{11} \cdot (1{,}009)^n \\ \Leftrightarrow\ & \log_{1{,}009}\left(\frac{T}{A \cdot (1{,}007) \cdot (1{,}0115)^{11}}\right) \le n \le \log_{1{,}009}\left(\frac{T}{A \cdot (1{,}007)^{11} \cdot (1{,}0115)}\right) \\ \Rightarrow\ & 2 \le n \le 6. \end{aligned}$$

Bước 2. Với $2 \le n \le 6$, ta đánh giá được

$$\begin{aligned} & A \cdot (1{,}007)^m \cdot (1{,}0115)^{12-m} \cdot (1{,}009)^2 \le T \le A \cdot (1{,}007)^m \cdot (1{,}0115)^{12-m} \cdot (1{,}009)^6 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{T}{A \cdot (1{,}0115)^{12} \cdot (1{,}009)^6} \le \left(\frac{1{,}007}{1{,}0115}\right)^m \le \frac{T}{A \cdot (1{,}0115)^{12} \cdot (1{,}009)^2} \\ \Rightarrow\ & 2 \le m \le 10. \end{aligned}$$

Lặp lại các bước 1, 2 với các giá trị m, n mới tìm được. Sau một số lần ta tìm được $m = 6$, $n = 4$.
Thử lại $m = 6$, $n = 4$ thỏa mãn bài toán.
Vậy thầy Tuấn gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.
Chọn đáp án C □

Câu 80. Bà A gửi tiết kiệm ngân hàng theo hình thức gửi góp hàng tháng, lãi suất tiết kiệm gửi góp cố định 0,55%/ tháng. Lần đầu tiên bà A gửi 2 triệu đồng. Cứ sau mỗi tháng bà A gửi thêm 2 triệu 2 trăm nghìn đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (kể từ lần gửi đầu tiên) để tổng số tiền bà A rút ra từ ngân hàng lớn hơn 40 triệu đồng?

A. 18 tháng . **B**. 16 tháng. **C**. 17 tháng. **D**. 15 tháng.

Lời giải.

Gọi tổng số tiền của bà A rút ra từ ngân hàng sau n tháng (kể từ lần gửi đầu tiên) là $M(n)$ (triệu đồng), $r = 0{,}0055$.
$M(1) = 2(1+r)$, $M(2) = 2(1+r)^2 + 2{,}2(1+r)$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$M(n) = 2(1+r)^n + 2{,}2[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r)] = 2(1+r)^n + 2{,}2 \cdot (1+r)\frac{(1+r)^{n-1} - 1}{r}.$$

Theo giả thiết $M(n) > 40 \Leftrightarrow \left(2 + \frac{2{,}2}{r}\right)(1+r)^n > 40 + \frac{2{,}2(1+r)}{r} \Leftrightarrow (1+r)^n > \dfrac{40 + \frac{2{,}2(1+r)}{r}}{2 + \frac{2{,}2}{r}}$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log\left(\dfrac{40 + \frac{2{,}2(1+0{,}0055)}{0{,}0055}}{2 + \frac{2{,}2}{0{,}0055}}\right)}{\log(1+0{,}0055)} \approx 17{,}376.$$

Vậy sau ít nhất 18 tháng thì tổng số tiền bà A rút ra từ ngân hàng lớn hơn 40 triệu đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng), ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ để mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 154 triệu đồng. **B**. 150 triệu đồng. **C**. 140 triệu đồng. **D**. 145 triệu đồng.

Lời giải.

Theo giả thiết bài toán ta có $x\left(1+\dfrac{6,5}{100}\right)^3 - x \geq 30 \Rightarrow x \geq \dfrac{30}{(1{,}065)^3-1} \approx 144{,}27.$
Do đó ta chọn $x = 145$ triệu là giá trị gần nhất thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Một người gửi 20 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,45 %/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau bao lâu người đó được ít nhất 25 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi.

A. 52 tháng. **B**. 51 tháng. **C**. 49 tháng. **D**. 50 tháng.

Lời giải.

Giả sử sau n tháng người gửi rút được ít nhất 25 triệu đồng, khi đó ta có

$$20\left(1+\frac{0{,}45}{100}\right)^n \geq 25 \Rightarrow n > 49{,}69.$$

Vậy, sau 50 tháng thì người gửi rút được ít nhất 25 triệu đồng.
Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. B	5. B	6. B	7. B	8. A	9. A	10. A
11. C	12. C	13. B	14. A	15. C	16. C	17. A	18. B	19. B	20. C
21. A	22. A	23. C	24. D	25. B	26. A	27. C	28. B	29. C	30. B
31. B	32. A	33. C	34. B	35. B	36. C	37. C	38. B	39. C	40. B
41. D	42. A	43. C	44. D	45. C	46. D	47. C	48. A	49. C	50. B
51. B	52. C	53. B	54. C	55. C	56. A	57. B	58. C	59. D	60. C
61. B	62. B	63. C	64. D	65. C	66. B	67. B	68. D	69. B	70. C
71. B	72. A	73. D	74. D	75. D	76. C	77. B	78. C	79. C	80. A
81. D	82. D								

CHƯƠNG 3

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1 NGUYÊN HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Nguyên hàm và tính chất

1.1 NGUYÊN HÀM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathscr{K}$.

Định lí 1. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.*

Định lí 2. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.*

Định lí 3. *Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathscr{K}$.*

1.2 TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

Tính chất 1. $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$

Tính chất 2. $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là một hằng số khác 0).

Tính chất 3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

2 Phương pháp tìm nguyên hàm

2.1 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Định lí 4. *Nếu $\displaystyle\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì*

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

2.2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Định lí 5. *Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathscr{K}$ thì*

$$u(x).v'x()\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ *Vì $u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ nên đẳng thức trên còn được viết ở dạng $\int u\,\mathrm{d}y = uv - \int v\,\mathrm{d}v$.*

Để tính nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x)\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}v$ (chú ý $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$). Sau đó tính $v = \int \mathrm{d}v$ và $\mathrm{d}u = u' \cdot \mathrm{d}x$.

Bước 2. Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v\mathrm{d}u$. Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v\,\mathrm{d}u$ dễ tính hơn $\int u\,\mathrm{d}v$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1. $I = \int P(x) \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\left\{\begin{array}{l} u = P(x) \\ \\ \mathrm{d}v = \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \mathrm{d}x \end{array}\right.$

Dạng 2. $I = \int P(x)\,e^{ax+b}\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = e^{ax+b}\mathrm{d}x \end{cases}$. **Dạng 3.** $I = \int P(x)\ln(mx+n)\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ \mathrm{d}v = P(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.

Dạng 4. $I = \int \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\left\{\begin{array}{l} u = \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \\ \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$

BẢNG NGUYÊN HÀM

Nguyên hàm của hàm sơ cấp	Nguyên hàm của hàm hợp $u = u(x)$
• $\int 0\,\mathrm{d}x = C$	• $\int 0\,\mathrm{d}u = C$
• $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$	• $\int 1\,\mathrm{d}u = u + C$

• $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	• $\int u^\alpha \,\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
• $\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	• $\int \dfrac{1}{u} \,\mathrm{d}u = \ln\lvert u\rvert + C$
• $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$	• $\int e^u \,\mathrm{d}u = e^u + C$
• $\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	• $\int a^u \,\mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
• $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$	• $\int \cos u \,\mathrm{d}u = \sin u + C$
• $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	• $\int \sin u \,\mathrm{d}u = -\cos u + C$
• $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + C$	• $\int \dfrac{1}{\cos^2 u} \,\mathrm{d}u = \tan u + C$
• $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	• $\int \dfrac{1}{\sin^2 u} \,\mathrm{d}u = -\cot u + C$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Nguyên hàm đổi biến số loại I

Phương pháp giải.

☑ Đôi khi gặp bài toán nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ta thực hiện các bước giải như sau:

+ Bước 1: Đặt $x = \varphi(t)$, với $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên K, được chọn hợp lý.
+ Bước 2: Lấy vi phân của x theo biến số t, cụ thể là $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
+ Bước 3: thay cả $x = \varphi(t)$ lẫn $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ vào $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ được bài mới theo t.
+ Bước 4: Giải nguyên hàm mới $\int f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, được kết quả $F(t)$ theo t, sau đó thay biểu thức $x = \varphi(t)$ vào $F(t)$ để tìm được nguyên hàm theo biến x.

☑ Một số dấu hiện nhận dạng nguyên hàm đổi biến số loại I

Dấu hiệu	Vi phân kèm theo	Cách đặt
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x^{2n}\,\mathrm{d}x$	$x = a\sin t$, với $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
$\sqrt{2ax - x^2}$	$x^{2n}\,\mathrm{d}x$	$x - a = a\sin t$, với $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

a^2+x^2	$x^{2n}\,\mathrm{d}x$	$x=a\tan t$, với $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x^{2n}\,\mathrm{d}x$	$x=\dfrac{a}{\sin t}$, với $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $t\neq 0$
$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$		$x=a\cos 2t$, với $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$		$x-a=(b-a)\sin^2 t$, với $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{3-x^2}$.

Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x$. (*)

Đặt $x=\sqrt{3}\sin t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\mathrm{d}x=\sqrt{3}\cos t\,\mathrm{d}t$ và $\cos t\geqslant 0$.

Thay vào (*) ta được:

$$I=\int\sqrt{3-3\sin^2 t}\cdot\sqrt{3}\cos t\,\mathrm{d}t=\int 3\cos^2 t\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow I=\int\frac{3(1+\cos 2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t+C.$$

Ta có $x=\sqrt{3}\sin t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\dfrac{3-x^2}{3}}$

$$\Rightarrow\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2x\sqrt{3-x^2}}{3}.$$

Vậy $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$ (C là hằng số thực). □

Ví dụ 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$.

Lời giải.

Xét nguyên hàm $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$ (*).

Đặt $x=2\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\mathrm{d}x=2\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Thay vào (*) ta được $I=\displaystyle\int\frac{1}{4+4\tan^2 t}\cdot 2(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C$.

Vậy $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$ (C là hằng số thực). □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \sin t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ và $\cos t \geqslant 0$.

Từ đó ta có $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C = \arcsin x + C$.

Vậy họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ là $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$. □

Bài 2. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\sin t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$ và $\cos t \geqslant 0$.

Từ đó ta có $I = \int \dfrac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \int 2(1-\cos 2t)\,\mathrm{d} = 2t - \sin 2t + C$.

Do $x = 2\sin t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$

$$\Rightarrow \sin 2t = 2\sin t\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}.$$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = 2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$. □

Bài 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \tan t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$ và $\cos t > 0$.

Thay vào họ nguyên hàm I ta được:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} \cdot (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{\tan t}{2(1+\tan^2 t)} + C. \end{aligned}$$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ là $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{x}{2(1+x^2)} + C$. □

Bài 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\cos 2t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\mathrm{d}x = -4\sin 2t\,\mathrm{d}t$ và $\sin t \geqslant 0$, $\cos t \geqslant 0$.

Ngoài ra, $\sin 2t = \sqrt{1-\cos^2 2t} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.

Như vậy $I=\int\sqrt{\dfrac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}}.(-4)\sin 2t\,\mathrm{d}t=-4\int\sqrt{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot\sin 2t\,\mathrm{d}t=-8\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow I=-4\int(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=-4t+2\sin 2t+C=-2\arccos\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C.$$

□

DẠNG 2. Nguyên hàm đổi biến số loại II

Phương pháp giải.

☑ Khi gặp bài toán nguyên hàm $\int f\left(t(x)\right)\cdot t'(x)\,\mathrm{d}x$ ta thực hiện các bước giải như sau:

+ Bước 1: Đặt $t=t(x)$. (*hoặc đặt* $t=a\cdot t(x)+b$ *tuỳ theo vào bài cụ thể*).
+ Bước 2: Lấy vi phân của t theo x, cụ thể $\mathrm{d}t=t'(x)\,\mathrm{d}x$.
+ Bước 3: thay cả $t=t(x)$ lẫn $\mathrm{d}t=t'(x)\,\mathrm{d}x$ vào $\int f\left(t(x)\right)\cdot t'(x)\,\mathrm{d}x$.
+ Bước 4: Giải nguyên hàm mới $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, được kết quả $F(t)$ theo t, sau đó thay biểu thức $t=t(x)$ vào kết quả $F(t)$ đó để tìm được nguyên hàm theo biến x.

☑ Một số dấu hiện nhận dạng nguyên hàm đổi biến số loại II

Dạng tích phân	**Nhận dạng biểu thức cần đặt t**
$\int\dfrac{\alpha\cdot t'(x)}{t(x)}\,\mathrm{d}x$	Biểu thức cần đặt t là **mẫu thức** $t(x)$
$\int f\left(\mathrm{e}^{t(x)}\right)\cdot t'(x)\,\mathrm{d}x$	Biểu thức cần đặt t là phần số **mũ** của e
$\int f\big(t(x)\big)\cdot t'(x)\,\mathrm{d}x$	Biểu thức cần đặt t là biểu thức chứa trong **dấu ngoặc**
$\int f\left(\sqrt[n]{t(x)}\right)\cdot t'(x)\,\mathrm{d}x$	Đặt **căn thức** có trong dấu tích phân
$\int f\left(\ln x\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$	Đặt biểu thức chứa **ln*x*** nếu có $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ kèm theo

Ví dụ 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1+3\cos x$ thì $\mathrm{d}t=-3\sin x\,\mathrm{d}t\Rightarrow-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x$.

Như vậy $I=-\dfrac{1}{3}\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=-\dfrac{1}{3}\ln|t|+C=-\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Dùng vi phân

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$ □

Ví dụ 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x = x - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Xét $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 1+e^x$ thì $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$.

Từ đó $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+e^x| + C = \ln(1+e^x) + C.$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ là $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \ln(1+e^x) + C.$

Dùng vi phân

Ta có $\displaystyle I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x$
$\displaystyle= x - \int \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$

□

Ví dụ 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \tan x$ ta có $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Từ đó $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{\tan x} + C.$

Dùng vi phân

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\tan x}\,\mathrm{d}(\tan x) = \mathrm{e}^{\tan x} + C.$ □

Ví dụ 6. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)^{2018}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I = \displaystyle\int x(x+1)^{2018}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = x+1$ thì $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Khi đó $I = \displaystyle\int (t-1)t^{2018}\,\mathrm{d}t = \int (t^{2019} - t^{2018})\,\mathrm{d}t = \frac{t^{2020}}{2020} - \frac{t^{2019}}{2019} + C.$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)^{2018}$ là $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{2020}}{2020} - \frac{(x+1)^{2019}}{2019} + C.$ □

Ví dụ 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x(x^3+1)}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I=\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x(x^3+1)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(x^3-1)x^2}{x^3(x^3+1)}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^3+1$ thì $\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t=x^2\,\mathrm{d}x$. Từ đó,

$$I=\frac{1}{3}\int \frac{t-2}{(t-1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(2\ln|t|-\ln|t-1|)+C.$$

Vậy họ nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x(x^3+1)}$ là $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\ln|x^3+1|-3\ln|x|+C.$ □

Ví dụ 8. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{2x-1}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}\Rightarrow t^3=2x-1\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x.$

Từ đó $I=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)+C.$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$ là

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{2}-\sqrt[3]{2x-1}+\ln(1+\sqrt[3]{2x-1})\right)+C.$$

□

Ví dụ 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$.

Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\ln x$ thì $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Từ đó ta được $I=\displaystyle\int(1+t^2)\,\mathrm{d}t=t+\frac{t^3}{3}+C=\ln x+\frac{\ln^3 x}{3}+C.$

Lời giải thu gọn

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\int(1+\ln^2 x)\,\mathrm{d}(\ln x)=\ln x+\frac{\ln^3 x}{3}+C.$ □

Ví dụ 10. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^3 x$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sin x$ thì $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó, $I=\displaystyle\int(1-t^2)\,\mathrm{d}t=t-\frac{t^3}{3}+C=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. Thu gọn lời giải

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=\int(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Với phép đặt $t=2-3x^2$ họ nguyên hàm $\int x^3\left(2-3x^2\right)^8\,\mathrm{d}x$ được đổi biến trở thành $\int f(t)\,\mathrm{d}t$. Tính $f(-1)$.

Lời giải.

Xét $I=\int x^3\left(2-3x^2\right)^8\,\mathrm{d}x=\int x^2\left(2-3x^2\right)^8\cdot x\,\mathrm{d}x$

Với phép đặt $t=2-3x^2$ ta có $\begin{cases}\mathrm{d}t=-6x\,\mathrm{d}x\\ x^2=\dfrac{2-t}{3}\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{1}{6}\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$. Từ đó

$I=-\dfrac{1}{6}\displaystyle\int\dfrac{2-t}{3}\cdot t^8\,\mathrm{d}t=\int\dfrac{(t-2)t^8}{18}\,\mathrm{d}t\Rightarrow f(t)=\dfrac{(t-2)t^8}{18}\Rightarrow f(-1)=-\dfrac{1}{6}$. □

Bài 6. Với phép đặt $t=\sqrt{2x+1}$, họ nguyên hàm $\displaystyle\int\dfrac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}\mathrm{d}x$ được đổi biến trở thành $\displaystyle\int\left(P(t)-\dfrac{10}{t+2}\right)\mathrm{d}t$, trong đó $P(t)$ là một đa thức theo biến t. Tính $P(1)$.

Lời giải.

Xét họ nguyên hàm $I=\displaystyle\int\dfrac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}\mathrm{d}x$.

Với phép đặt $t=\sqrt{2x+1}$ ta có $t^2=2x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$. Từ đó

$I=\displaystyle\int\dfrac{2(t^2-1)-1}{t+2}\cdot t\,\mathrm{d}t=\int\dfrac{2t^3-3t}{t+2}\cdot\,\mathrm{d}t=\int\left(2t^2-4t+5-\dfrac{10}{t+2}\right)\mathrm{d}t$.

Như vậy $P(t)=2t^2-4t+5\Rightarrow P(1)=3$.

□

Bài 7. Biết nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^5}{x^2+1}$ có dạng $F(x)=mx^4+nx^2+p\ln(x^2+1)+C$, trong đó C là hằng số thực; m,n,p là các hệ số hữu tỷ. Hãy tính $T=m+n+p$.

Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^4}{1+x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2$ thì $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$. Từ đó

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)+C\\&=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|1+t|+C=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C.\end{aligned}$$

Như vậy, $m=\dfrac{1}{4}$, $n=-\dfrac{1}{2}$, $p=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=m+n+p=\dfrac{1}{4}$. □

Bài 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3\cdot\dfrac{1}{x^2}$ có dạng $F(x)=\dfrac{m}{x^4}+\dfrac{n}{x^3}+\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{q}{x}+C$, trong đó C là hằng số thực; m,n,p,q là các hệ số hữu tỷ. Tính $S=m+n+p+q$.

Lời giải.

Xét $F(x)=\displaystyle\int\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ thì $\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\Rightarrow-\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. Từ đó ta có

$$F(x)=\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{d}x=-\int(1-t)^3\,\mathrm{d}t=\int(t^3-3t^2+3t-1)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{3}{2}t^2-t+C=\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{x}+C$$
Như vậy $m=\frac{1}{4},n=-1,p=\frac{3}{2},q=-1\Rightarrow S=m+n+p+q=-\frac{1}{4}$.

Cách khác

Ta có $F(x)=\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^3\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4+C.$

Vậy $m+n+p+q=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{1}\right)^4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ □

Bài 9. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$. Tìm họ nguyên hàm $\int f(3x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int f(3x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3x$, ta có $\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[2t\ln(3t-1)\right]+C=\frac{1}{3}\left[2\cdot3x\ln(3\cdot3x-1)\right]+C$

Như vậy $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$.

Rút gọn bài giải

Ta có $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int f(3x)\,\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\cdot2(3x)\ln\left[3(3x)-1\right]+C=2x\ln(9x-1)+C$ □

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=3\sqrt{2+\sin x}$. Tìm họ nguyên hàm $\int f'(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int f'(2x+1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x+1$, suy ra $\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int f'(2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(t)+C=\frac{3}{2}\sqrt{2+\sin t}+C=\frac{3}{2}\sqrt{2+\sin(2x+1)}+C.$

Nhận xét:

Với đề bài này nếu không nắm tốt để sử dụng được tính chất nguyên hàm $\int f'(t)\,\mathrm{d}t=f(t)+C$, mà lại tính $f'(2x+1)$ để thay vào tính $\int f'(2x+1)\,\mathrm{d}x$, việc thực hiện bài giải sẽ gặp nhiều khó khăn và rất dễ dẫn đến nhiều sai sót. □

Bài 11. Với phép đặt $t=\sqrt{4x+1}$ tích phân $\int\frac{2}{\sqrt{4x+1}+1}\,\mathrm{d}x$ được biến đổi thành $\int\left(a+\frac{b}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t$, trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $3a+2b$.

Lời giải.

Xét $\int\frac{2}{\sqrt{4x+1}+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1$, suy ra $2t\,\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}x\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\frac{2}{\sqrt{4x+1}+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t+1}=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t.$

Từ đây suy ra $a=1,b=-1\Rightarrow3a+2b=1$. □

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ sao cho $f(1) = \mathrm{e}$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ và $f'(x) = f(x) \cdot \sqrt{3x+1}$. Tính $f(0)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = f(x) \cdot \sqrt{3x+1} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $\ln|f(x)| = \dfrac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1} + C' \Rightarrow f(x) = C.\mathrm{e}^{\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}}$ với $C > 0$.

Do $f(1) = \mathrm{e}$ nên $C.\mathrm{e}^{\frac{16}{9}} = \mathrm{e} \Rightarrow C = \mathrm{e}^{-\frac{7}{9}} \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}-\frac{7}{9}}$.

Vậy $f(0) = \mathrm{e}^{\frac{2}{9}-\frac{7}{9}} = \mathrm{e}^{-\frac{5}{9}}$. □

Bài 13. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \dfrac{2\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \dfrac{2\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1+3\cos x$, suy ra $\mathrm{d}t = -3\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \sin x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int \dfrac{2\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int \dfrac{2}{t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{2}{3}\ln|t| + C = -\dfrac{2}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$

Dùng vi phân

$\displaystyle\int \dfrac{2\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{3}\int \dfrac{1}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}\left(1+3\cos x\right) = -\dfrac{2}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$ □

Bài 14. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \dfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \dfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1+x^2$, suy ra $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$ và $x^2 = t-1$.

Khi đó $\displaystyle\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int \left(1-\dfrac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(t - \ln|t|\right) + C.$

Như vậy $\displaystyle\int \dfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(1+x^2-\ln|1+x^2|\right) + C = \dfrac{1}{2}\left(1+x^2-\ln(1+x^2)\right) + C.$

Dùng vi phân

$\displaystyle\int \dfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}(1+x^2) = \dfrac{1}{2}\left(1+x^2-\ln(1+x^2)\right) + C.$ □

Bài 15. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \dfrac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \dfrac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\cdot(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2+2x+2$, suy ra $\mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = (x+1)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\cdot(x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{t+4}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int \left(1+\dfrac{4}{t}\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(t+4\ln|t|\right) + C.$

Như vậy $\displaystyle\int \dfrac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x^2+2x-3+4\ln|x^2+2x-3|\right) + C.$

Dùng vi phân

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\cdot(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{4}{x^2+2x-3}\right)\cdot \mathrm{d}(x^2+2x-3)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+2x-3+4\ln|x^2+2x-3|\right)+C.$$ □

Bài 16. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\tan x$, suy ra $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Khi đó $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{\tan x}+C$.

Dùng vi phân

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\tan x} d(\tan x) = \mathrm{e}^{\tan x}+C.$$ □

Bài 17. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2$, suy ra $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$.

Dùng vi phân

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C.$$ □

Bài 18. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin^2 x$, suy ra $\mathrm{d}t = 2\sin x\cos\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}t = \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{\sin^2 x}+C$.

Dùng vi phân

$$\int \mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sin^2 x}\,\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right) = \mathrm{e}^{\sin^2 x}+C.$$ □

Bài 19. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{2x}{(2x+1)^3}\cdot 2\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x+1$, suy ra $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\frac{1}{4}\int \frac{2x}{(2x+1)^3}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^2}-t^{-3}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C$.

Vậy $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8(2x+1)^2} - \frac{1}{4(2x+1)}+C$.

Dùng vi phân

$$\int \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{2x}{(2x+1)^3}\cdot \mathrm{d}(2x+1) = \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^3}\right]\cdot \mathrm{d}(2x+1)$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2(2x+1)^2}\right] + C = \frac{1}{8(2x+1)^2} - \frac{1}{4(2x+1)} + C.$$ □

Bài 20. Tìm họ nguyên hàm $\int x^5(1-x^3)^6\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int x^5(1-x^3)^6\,\mathrm{d}x = \int x^3(1-x^3)^6x^2\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1-x^3$, suy ra $\mathrm{d}t = -3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = x^2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int x^3(1-x^3)^6x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int (1-t)t^6\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8}\right) + C$.

Vậy $\int x^5(1-x^3)^6\,\mathrm{d}x = -\frac{(1-x^3)^7}{21} + \frac{(1-x^3)^8}{24} + C$.

Dùng vi phân

$$\int x^5(1-x^3)^6\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int x^3(1-x^3)^6\left(-3x^2\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{3}\int \left[(1-x^3)^6 - (1-x^3)^7\right]\,\mathrm{d}(1-x^3)$$
$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(1-x^3)^7}{7} - \frac{(1-x^3)^8}{8}\right] + C.$$

Nhận xét: dùng vi phân với các bài phức tạp như thế này chưa hẳn đã nhanh! □

Bài 21. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{x^3-1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int \frac{x^3-1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3-1}{x(x^3+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3-1}{x^3(x^3+1)}\cdot x^2\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^3+1$, suy ra $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = x^2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int \frac{x^3-1}{x^3(x^3+1)}\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{t-2}{(t-1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\frac{t^2}{|t-1|} + C$.

Vậy $\int \frac{x^3-1}{x^4+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\frac{(x^3+1)^2}{|x|^3} + C$. □

Bài 22. Tìm họ nguyên hàm $\int x\sqrt[4]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int x\sqrt[4]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow t^4 = 1-x^2$, suy ra $4t^3\,\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -2t^3\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int x\sqrt[4]{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -2\int t\times t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{2t^5}{5} + C = -\frac{2(1-x^2)\sqrt[4]{1-x^2}}{5} + C$. □

Bài 23. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Xét $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$. Suy ra $\begin{cases} 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ x = t^2-1 \end{cases}$. Khi đó

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{(t^2-1)t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$ □

Bài 24. Tìm họ nguyên hàm $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int x^2\sqrt{x^2+9}\cdot x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow t^2 = x^2+9$. Suy ra $\begin{cases} t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \\ x^2 = t^2-9. \end{cases}$

Khi đó $\int x^2\sqrt{x^2+9}\cdot x\,\mathrm{d}x = \int (t^2-9)t\cdot t\,\mathrm{d}t = \int (t^4-9t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} - 3t^3 + C$.

Như vậy $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^5}{5} - 3\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3 + C$. □

Bài 25. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \ln x$, suy ra $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x - 1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2-1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \left(t - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + C = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln|\ln x| + C$. □

Bài 26. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \ln(x^2+1)$, suy ra $\mathrm{d}t = \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2 + C = \frac{1}{4}\ln^2(x^2+1) + C$. □

Bài 27. Tìm họ nguyên hàm $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1+\sqrt{1+\ln x} \Rightarrow (t-1)^2 = 1+\ln x \Leftrightarrow \ln x = t^2-2t$. Suy ra $\frac{\mathrm{d}x}{x} = (2t-2)\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2-2t)^2}{t}\cdot(2t-2)\,\mathrm{d}t = 2\int (t^4-5t^3+8t^2-4t)\,\mathrm{d}t$
$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{16}{3}t^3 - 4t^2 + C.$$

Như vậy $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{16}{3}t^3 - 4t^2 + C$ với $t = 1+\sqrt{\ln x+1}$. □

DẠNG 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Phương pháp giải. Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathscr{K}$ thì

$$u(x).v'x()\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Để tính nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x)\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}v$ (chú ý $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$). Sau đó tính $v = \int \mathrm{d}v$ và $\mathrm{d}u = u' \cdot \mathrm{d}x$.

Bước 2. Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v\mathrm{d}u$. Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v\,\mathrm{d}u$ dễ tính hơn $\int u\,\mathrm{d}v$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1. $I = \int P(x) \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \mathrm{d}x \end{cases}$

Dạng 2. $I = \int P(x)\,e^{ax+b}\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = e^{ax+b}\mathrm{d}x \end{cases}$.

Dạng 3. $I = \int P(x)\ln(mx+n)\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ \mathrm{d}v = P(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.

Dạng 4. $I = \int \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \\ \cos x \end{array}\right. \\ \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases}$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 11. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\dfrac{f(x)}{x} = (F(x))' = \left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)' = \dfrac{1}{x^4}$. Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Để tính $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$, dùng tích phân từng phần với $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x$. □

Ví dụ 12. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{3x}$.

Lời giải.

Đặt: $\begin{cases} u = 2x-1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{3x} \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$

Do đó: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C$ □

Ví dụ 13. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$.

Lời giải.

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$.

Vậy $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$ □

Ví dụ 14. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (8x-9)\cdot 7^x$.

Lời giải.

Đặt: $\begin{cases} u = 8x-9 \\ \mathrm{d}v = 7^x\,\mathrm{d}x \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} \mathrm{d}u = 8\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{7^x}{\ln 7} \end{cases}$.

Ta có: $\displaystyle\int (8x-9)\cdot 7^x\,\mathrm{d}x = (8x-9)\cdot\frac{7^x}{\ln 7} - \int 8\cdot\frac{7^x}{\ln 7}\,\mathrm{d}x = \frac{7^x}{\ln 7}\cdot\left(8x-9-\frac{8}{\ln 7}\right) + C.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Lời giải.

$F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow 2x = f(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 2x - 2x^2 + C.$ □

Bài 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin x\cos x$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{2}x\cdot\sin 2x$

Ta tính $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int x\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot\cos 2x - \displaystyle\int\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos 2x dx\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}x\cdot\cos 2x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + C$
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{2}x\cdot\cos 2x\right) + C$ □

Bài 30. Cho $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int\dfrac{f(x)}{x}dx = \dfrac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Khi đó: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,dx = \int\dfrac{2}{x^3}\ln x\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{2}{x^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Khi đó: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \int\dfrac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\ln x}{x^2} + \int\dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\left(\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2}\right) + C.$ □

Bài 31. Tìm họ nguyên hàm $\displaystyle\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có $\displaystyle\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 2t\sin t\,\mathrm{d}t$

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t\,\mathrm{d}t \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ v = -\cos t\,\mathrm{d}t \end{cases}$. Do đó:

$\displaystyle\int 2t\sin t\,\mathrm{d}t = -2t\cos t + \int 2\cos t\,\mathrm{d}t = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$ □

Bài 32. Tìm họ nguyên hàm $I = \displaystyle\int x\ln(2x-1)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x-1) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{2x-1} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \dfrac{x^2}{2}\ln(2x-1) - \displaystyle\int\dfrac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln(2x-1) - \dfrac{1}{2}\int\left(x+1+\dfrac{1}{2x-1}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln(2x-1) -$
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\right) + C = \dfrac{4x^2-1}{8}\ln|2x-1| - \dfrac{x(x+1)}{4} + C.$ □

Bài 33. Tìm họ nguyên hàm $I = \displaystyle\int(x-1)\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos x \end{cases}$

Khi đó $I = \displaystyle\int(x-1)\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
□

DẠNG 4. Nguyên hàm hàm phân thức

Phương pháp giải. Xét nguyên hàm dạng $\int \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ với $f(x)$, $g(x)$ là hai đa thức.

Nếu bậc $f(x) \geq$ bậc $g(x)$ thì ta chia $f(x)$ cho $g(x)$ được thương $p(x)$ và dư $r(x)$. Khi đó

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int p(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Lúc này bậc $r(x) <$ bậc $g(x)$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp bậc $f(x) <$ bậc $g(x)$ qua các dạng thường gặp sau:

Dạng 1: $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + C.$

Dạng 2: $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C.$

Dạng 3: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$

- ☑ Nếu $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1\,x_2$ thì phân tích $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ và $Ax+B = M(x-x_1)+N(x-x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} M+N=A \\ -x_1M-x_2N=B \end{cases}$.

  Do đó $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{M}{x-x_2}+\dfrac{N}{x-x_1}\right)$. Khi đó

  $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(M\ln|x-x_2| + N\ln|x-x_1|\right) + C.$$

- ☑ Nếu $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép $x=x_0$ thì ta đổi biến $t=x-x_0$.

Dạng 4: $\displaystyle\int \frac{Ax^2+Bx+C}{ax^3+bx^2+cx+d}\,\mathrm{d}x.$

- ☑ Nếu $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có nghiệm bội 3 là x_0, tức là $ax^3+bx^2+cx+d = a(x-x_0)^3$ thì ta đổi biến $t=x-x_0$.
- ☑ Nếu $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có hai nghiệm x_1, x_2, tức là $ax^3+bx^2+cx+d = a(x-x_1)(x-x_2)^2$ và thì phân tích

  $$\frac{Ax^2+Bx+C}{ax^3+bx^2+cx+d} = \frac{1}{a}\left(\frac{M}{x-x_1}+\frac{N}{x-x_2}+\frac{P}{(x-x_2)^2}\right).$$

Dạng 5: $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$. Trong một số trường hợp ta có thể đổi biến $t=g(x)$.

Ví dụ 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln|3x+2|}{3} + C.$ □

Ví dụ 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2-5}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{x+1}=2x-2-\dfrac{3}{x+1}$. Do đó $\displaystyle\int\dfrac{2x^2-5}{x+1}\,\mathrm{d}x=x^2-2x-3\ln|x+1|+C$. □

Ví dụ 17. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{4x^3+1}{x^4+x+1}$ biết $F(0)=2$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{4x^3+1}{x^4+x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|x^4+x+1|+C$.
Vì $F(0)=2$ nên $F(x)=\ln|x^4+x+1|+2$. □

Ví dụ 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}$.

Lời giải.

Ta có $4x+11=A(x+3)+B(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=4\\3A+2B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=1\end{cases}$.
Do đó $\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}$.
Vậy $\displaystyle\int\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x=3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C$. □

Ví dụ 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$. Do đó

$$\int\frac{x^3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{3x+2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=x+1$. Suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $x=t-1$. Khi đó $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left(\dfrac{3}{t}-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.
Suy ra

$$\int\frac{3x+2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=3\ln|t|+\frac{1}{t}+C=3\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Vậy $\displaystyle\int\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}+C$. □

Ví dụ 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-1)^3}$.

Lời giải.

Đặt $t=x-1$. Suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $x=t+1$. Khi đó

$$\frac{x^4}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t.$$

Vậy

$$\int \frac{x^4}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}+4t+6\ln|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2t^2}+C = \frac{(x-1)^2}{2}+4(x-1)+6\ln|x-1|-\frac{4}{x-}$$

□

Ví dụ 21. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=1+\dfrac{2x}{x^2+1}$ Đặt $t=x^2+1$. Suy ra $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln|t|+C=\ln|x^2+1|+C$.

Vậy $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\ln|x^2+1|+C$. □

Ví dụ 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5x}{(x^2+4)^2}$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2+4$. Suy ra $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $\dfrac{5x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Vậy $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{5}{2t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{5}{2t}+C=-\frac{5}{2(x^2+4)}+C$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{6x^2-7x-4}{2x+1}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{6x^2-7x-4}{2x+1}=3x-5+\dfrac{1}{2x+1}$.

Do đó $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}-5x+\frac{\ln|2x+1|}{2}+C$. □

Bài 35. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-7x+12}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2}{x^2-7x+12}=1+\dfrac{7x-12}{x^2-7x+12}$

Ta phân tích $7x-12=A(x-4)+B(x-3)\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=7\\-4A-3B=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-9\\B=16\end{cases}$.

Vậy

$$\int \frac{x^2}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{9}{x-3}+\frac{16}{x-4}\right)\mathrm{d}x=x-9\ln|x-3|+16\ln|x-4|+C.$$

□

Bài 36. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x+2)^2}$$

Đặt $t=x+2$. Suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\int\frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x+2}+C.$$

□

Bài 37. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{(2x+1)^2}{4x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{(2x+1)^2}{4x^2+1}=1+\dfrac{4x}{4x^2+1}$ Đặt $t=4x^2+1$. Suy ra $\mathrm{d}t=8x\,\mathrm{d}x$.
Khi đó $\dfrac{4x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$. Suy ra

$$\int\frac{4x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln|t|}{2}+C=\frac{\ln|4x^2+1|}{2}+C.$$

Vậy $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\frac{\ln|4x^2+1|}{2}+C$. □

Bài 38. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^4+4x^3+x^2+2x+1}{x^4+x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^4+4x^3+x^2+2x+1}{x^4+x^2+1}=1+\dfrac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}$. Khi đó

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\int\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x=x+\ln|x^4+x^2+1|+C.$$

□

Bài 39. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{M}{x-1}+\dfrac{N}{x+1}+\dfrac{P}{(x+1)^2}$
$=\dfrac{M(x+1)^2+N(x-1)(x+1)+P(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{(M+N)x^2+(2M+P)x+M-N-P}{(x-1)(x+1)^2}$.

Đồng nhất hệ số của tử ta có $\begin{cases}M+N=0\\2M+P=0\\M-N-P=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M=\dfrac{1}{4}\\N=-\dfrac{1}{4}\\P=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Do đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+1)} + C.$ □

DẠNG 5. Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Phương pháp giải.

- **Bước 1:** Đặt $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \psi(t)$ (nếu có thể).
- **Bước 2:** Tính vi phân $\mathrm{dt} = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$.
- **Bước 3:** Biểu thị $f(x)\,\mathrm{d}x$ theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)\,\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{dt}$.
- **Bước 4:** Khi đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{dt}$.

* **Chú ý**

i) Nếu xuất hiện $\sqrt{a^2-x^2}$ đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$.

ii) Nếu xuất hiện $\sqrt{x^2-a^2}$ đặt $x = \dfrac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

iii) Nếu xuất hiện $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ thì đặt $x = a\cos 2t$.

iv) Nếu xuất hiện $\sqrt{(x-a)(b-x)}$, $(a<b)$ đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

vi) Nếu xuất hiện $\sqrt{x^2+a^2}$ đặt $x = a\tan t$ hoặc $x = a\cot t$.

CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 23. Tìm $\int x\sqrt[4]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow t^4 = 1-x^2$, suy ra $4t^3\,\mathrm{dt} = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -2t^3\,\mathrm{dt} = x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int x\sqrt[4]{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -2\int t.t^3\,\mathrm{dt} = -\dfrac{2t^5}{5} + C = -\dfrac{2\left(1-x^2\right)\sqrt[4]{1-x^2}}{5} + C.$ □

Ví dụ 24. Tìm $\int \dfrac{x}{\sqrt[10]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[10]{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^{10} \Rightarrow \mathrm{d}x = 10t^9\,\mathrm{dt}$. Từ đó ta được:

$\int \dfrac{t^{10}-1}{t}\cdot 10t^9\,\mathrm{dt} = 10\int\left(t^{10}-1\right)t^8\,\mathrm{dt} = 10\int\left(t^{18}-t^8\right)\,\mathrm{dt} = \dfrac{10}{19}t^{19} - \dfrac{10}{9}t^9 + C$

$= \dfrac{10}{19}\sqrt[10]{(x++1)^{19}} - \dfrac{10}{9}\sqrt[10]{(x+1)^9} + C.$ □

Ví dụ 25. Tìm $\int \sin^3 x\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{1+\cos x} \Leftrightarrow u^2=1+\cos x \Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
Ta có: $\displaystyle\int \sin^2 x \sin x\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \left(1-\cos^2 x\right)\sqrt{1+\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle=-\int \left[1-(u^2-1)^2\right]u.2u\,\mathrm{d}u=-\int \left(-u^4+2u^2\right)2u^2\,\mathrm{d}u=2\int \left(u^6-2u^4\right)\,\mathrm{d}u$
$\displaystyle=2\left(\frac{u^7}{7}-\frac{2u^5}{5}\right)+C=\frac{2\left(\sqrt{1+\cos x}\right)^7}{7}-\frac{4\left(\sqrt{1+\cos x}\right)^5}{5}+C.$ □

Ví dụ 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{(1+\mathrm{e}^x)^3}}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1} \Rightarrow \mathrm{e}^x=t^2-1 \Rightarrow \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.
Khi đó

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t=\int \left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=t+\frac{1}{t}+C=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}+C=\frac{\mathrm{e}^x+2}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}+C.$$

□

Ví dụ 27. Tìm $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t=1+\sqrt{1+\ln x} \Rightarrow (t-1)^2=1+\ln x \Leftrightarrow \ln x=t^2-2t$
suy ra $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=(2t-2)\ \mathrm{dt}$. Khi đó $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-2t\right)^2}{t}\cdot(2t-2)\ \mathrm{dt}$
$\displaystyle=2\int \left(t^4-5t^3+8t^2-4t\right)\ \mathrm{dt}=\frac{2}{5}t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{16}{3}t^3-4t^2+C.$
Như vậy $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{16}{3}t^3-4t^2+C$ với $t=1+\sqrt{\ln x+1}$. □

Ví dụ 28. Tìm $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ theo biến t bằng cách đặt $x=\sin t$ hoặc $x=\cos t$.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $x=\sin t$ với $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$, suy ra $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.
Khi đó:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.\end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $x=\cos t$ với $0\le t\le\pi$, suy ra $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$.
Khi đó:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\cos^2 t}\cdot \sin t\,\mathrm{d}t = -\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\int (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

□

Ví dụ 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, với $x > 1$ theo biến t bằng cách đặt $x = \dfrac{1}{\cos t}$.

Lời giải.

Với $x > 1$, đặt $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, suy ra $\mathrm{d}x = \dfrac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$. Khi đó, ta có

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\dfrac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos t}\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}-1}} = \int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t\tan t}$$
$$= \int \mathrm{d}t = t + C.$$

Ngoài ra, ta có thể đặt $x = \dfrac{1}{\sin t}$ hoặc đặt $u = \sqrt{x^2-1}$. □

Ví dụ 30. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ theo biến t bằng cách đặt $x = \cos 2t$.

Lời giải.

Đặt $x = \cos 2t$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $\mathrm{d}x = -2\sin 2t\,\mathrm{d}t$. Khi đó, ta có:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = -2\int \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}\cdot \sin 2t\,\mathrm{d}t = -2\int \tan t\cdot \sin 2t\,\mathrm{d}t$$
$$= -4\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -2\int (1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$= -2t + \sin 2t + C.$$

□

Ví dụ 31. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2+3x-2}$ theo biến t bằng cách đặt $x = 1 + \sin^2 t$.

Lời giải.

Trước hết, ta có $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+3x-2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x-1)(2-x)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 1+\sin^2 t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $\mathrm{d}x = \sin 2t\,\mathrm{d}t$. Khi đó

$$\int \sqrt{(x-1)(2-x)}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\sin^2 t\cdot(1-\sin^2 t)}\cdot \sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sin^2 2t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int 1-\cos 4t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C.$$

□

Ví dụ 32. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ theo biến t bằng cách đặt $x=\tan t$.

Lời giải.

Đặt $x=\tan t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, suy ra $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ và $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\dfrac{\cos^3 x\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C$. □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 40. Tìm $\displaystyle\int\dfrac{1}{\sqrt{5x+7}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t=5x+7\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$. Suy ra: $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+7}}=\int\dfrac{\mathrm{d}t}{5\sqrt{t}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{t}+C=\dfrac{2}{5}\sqrt{5x+7}+C$. □

Bài 41. Tìm $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x=\int\sqrt{t}\mathrm{d}=\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$. □

Bài 42. Tìm $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x=\int x^2\sqrt{x^2+9}.x\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow t^2=x^2+9$. Suy ra $\begin{cases}t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x\\ x^2=t^2-9\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+9}.x\,\mathrm{d}x=\int\left(t^2-9\right)t.t\,\mathrm{d}t=\int\left(t^4-9t^2\right)\mathrm{d}t=\dfrac{t^5}{5}-3t^3+C$.

Như vậy $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^5}{5}-3\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3+C$. □

Bài 43. Tìm $\displaystyle\int(x+1)\sqrt[3]{3-2x}\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{3-2x}\Rightarrow x=\dfrac{3-t^3}{2}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int(x+1)\sqrt[3]{3-2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{2}\int\left(\dfrac{3-t^3}{2}+1\right)t.t^2\mathrm{d}t$

$=\displaystyle-\dfrac{3}{4}\int(5t^3-t^6)\mathrm{d}t=-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{5t^4}{4}-\dfrac{t^7}{7}\right)+C=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\sqrt[3]{(3-2x)^7}}{7}-\dfrac{5\sqrt[3]{(3-2x)^4}}{4}\right)+C$. □

Bài 44. Tìm $\displaystyle\int\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+4}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2=2x-1 \Rightarrow u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}+4}=\int \frac{u}{u+4}\,\mathrm{d}u=\int\left(1-\frac{4}{u+4}\right)\mathrm{d}u=u-4\ln(u+4)+C$
$=\sqrt{2x-1}-4\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)+C.$ □

Bài 45. Tìm $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2=x+1$. Suy ra $\begin{cases}2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\\ x=t^2-1\end{cases}$
Khi đó $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2t}{(t^2-1)\,t}\,\mathrm{d}t=\int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$
$\displaystyle=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$ □

Bài 46. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+1}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$, thoả mãn $F(1)=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của $F^2(e)$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{\ln^2 x+1} \Rightarrow t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle\int \sqrt{\ln^2 x+1}.\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\left(\sqrt{\ln^2 x+1}\right)^3}{3}+C.$
Vì $F(1)=\dfrac{1}{3}$ nên $C=0$.
Vậy $F^2(e)=\dfrac{8}{9}$. □

Bài 47. Tìm $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$ theo biến t bằng cách đặt $x=\dfrac{1}{2}\sin t$.

Lời giải.

Đặt $x=\dfrac{1}{2}\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, suy ra $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$. Khi đó, ta có

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{1}{2}\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t}$$
$$=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C.$$

Ta cũng có thể giải tương tự bằng cách đặt $x=\dfrac{1}{2}\cos t$. □

Bài 48. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ theo biến t bằng cách đặt $x=\cos 2t$.

Lời giải.

Đặt $x=\cos 2t$, $0<t\le\dfrac{\pi}{2}$ suy ra $\mathrm{d}x=-2\sin 2t\,\mathrm{d}t$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x&=-2\int\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}\cdot\sin 2t\,\mathrm{d}t=-2\int\cot t\cdot\sin 2t\,\mathrm{d}t\\&=-4\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=-2\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=-2t-\sin 2t+C.\end{aligned}$$

□

DẠNG 6. Nguyên hàm có yếu tố mũ và lôgarit

Phương pháp giải. Ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1. Biến đổi để đưa về các hàm cơ bản.

Bước 2. Sử dụng bảng nguyên hàm để tìm nguyên hàm của các hàm cơ bản đó, nếu là tích của nhiều hàm thì ta kết hợp phương pháp đổi biến hoặc từng phần để tìm nguyên hàm.

Ví dụ 33. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}$.

Lời giải.

Cách 1: Biến đổi để đưa biểu thức đã cho về các hàm cơ bản.

$$\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đổi biến.

Đặt $u=\mathrm{e}^x\Rightarrow\mathrm{d}u=u\,\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. Khi đó: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{u^3+1}{(u+1)u}\,\mathrm{d}u$

$$=\int\frac{(u+1)(u^2-u+1)}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u=\int\left(u-1+\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}-u+\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+\ln\mathrm{e}^x+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C.$$

□

Ví dụ 34. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

Lời giải.

Đặt $t=\ln(x^2+1)$, suy ra $\mathrm{d}t=\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\displaystyle\int\frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\ln^2\left(x^2+1\right)+C.$

□

Ví dụ 35. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{3x}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\\v=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\end{cases}$. Khi đó:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x-1)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\mathrm{e}^{3x}-\int\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\frac{(2x-1)e^{3x}}{3}-\frac{2e^{3x}}{9}+C$$

□

Ví dụ 36. Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Lời giải.

$F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow 2x=f(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần, ta có:

$\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}f(x)=f(x)\mathrm{e}^{2x}-\int f(x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=f(x)\mathrm{e}^{2x}-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=2x-2x^2+C.$ □

Ví dụ 37. Cho $F(x)=\displaystyle\int (2x-1)\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x=(Ax+B)\,\mathrm{e}^{1-x}+C$. Tính giá trị của $T=A+B$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=(2x-1) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x \\ v=-\mathrm{e}^{1-x} \end{cases}$. Khi đó:

$\displaystyle\int (2x-1)\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x=(1-2x)\,\mathrm{e}^{1-x}+\int 2\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x=(1-2x)\,\mathrm{e}^{1-x}-2\mathrm{e}^{1-x}+C=(-2x-1)\,\mathrm{e}^{1-x}+C$. Vậy $T=A+B=-3$. □

Ví dụ 38. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln^2 x}$?

Lời giải.

Ta có

$\displaystyle I=\int\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Tính $\displaystyle\int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{1}{\ln x} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$

Suy ra: $\displaystyle\int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}+\int\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

Vậy $\displaystyle I=\int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}+\int\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}+C.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 49. Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int \sin x.\mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}x$?

Lời giải.

Đặt $t=\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int \sin x.\mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=e^t+C=\mathrm{e}^{\cos x}+C.$ □

Bài 50. Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$?

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right| + C. \qquad \square$$

Bài 51. Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$?

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+\ln x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow I = \displaystyle\int 2t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$ $\square$

Bài 52. Tìm nguyên hàm $I = \displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó: $I = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \displaystyle\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x =$

$\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C.$ $\square$

Bài 53. Tìm nguyên hàm $I = \displaystyle\int x\ln\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x$?

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2+1\right) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{x^2}{2}.\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

$\square$

Bài 54. Tìm nguyên hàm $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$?

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$

Khi đó $I = 2\int \ln t^2 \,\mathrm{d}t$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t^2 \\ \mathrm{d}v = 2dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{t}\,\mathrm{d}t \\ v = 2t \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$I = 2t\ln t^2 - \int 4\,\mathrm{d}t = 2t\ln t^2 - 4t + C = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C.$$

□

Bài 55. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^2 \ln x$?

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$. Khi đó:

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

□

Bài 56. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$ thoả mãn $F(1) = \dfrac{1}{3}$. Tính $F^2(\mathrm{e})$?

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \sqrt{\ln^2 x + 1}\cdot\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{\ln^2 x + 1}\right)^3}{3} + C.$$

Vì $F(1) = \dfrac{1}{3}$ nên $C = 0 \Rightarrow F(x) = \dfrac{\left(\sqrt{\ln^2 x + 1}\right)^3}{3}$.

Vậy $F^2(\mathrm{e}) = \dfrac{8}{9}$. □

Bài 57. Cho nguyên hàm $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}}\,\mathrm{d}x = a\left(t + \frac{1}{t}\right) + C$ với $t = \sqrt{\mathrm{e}^x + 1}$. Tìm giá trị của a?

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{\mathrm{e}^x + 1} \Rightarrow t^2 = \mathrm{e}^x + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 1)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$.

Khi đó ta có:

$I = 2\displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + C \Rightarrow a = 2.$ □

Bài 58. Tìm họ nguyên hàm của $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1 + \sqrt{\ln x + 1}\right)}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t=1+\sqrt{1+\ln x} \Rightarrow (t-1)^2=1+\ln x \Leftrightarrow \ln x=t^2-2t$

Suy ra $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=(2t-2)\ \mathrm{dt}$. Khi đó

$$\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-2t\right)^2}{t}\cdot(2t-2)\ \mathrm{dt}=2\int\left(t^4-5t^3+8t^2-4t\right)\ \mathrm{dt}$$

$$=\frac{2}{5}t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{16}{3}t^3-4t^2+C.$$

Như vậy $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{16}{3}t^3-4t^2+C$ với $t=1+\sqrt{\ln x+1}$. □

DẠNG 7. Sử dụng biến đổi lượng giác

Phương pháp giải. Các công thức thường sử dụng. ($k\in\mathbb{Z}$)

- ☑ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
- ☑ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.
- ☑ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq k\pi$.
- ☑ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1,\quad \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$.
- ☑ $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$.
- ☑ $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$.
- ☑ $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$.
- ☑ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.
- ☑ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
  $=2\cos^2\alpha-1$
  $=1-2\sin^2\alpha$.
- ☑ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\begin{cases}\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$.
- ☑ $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.
- ☑ $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.
- ☑ $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.
- ☑ $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$.
- ☑ $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$.
- ☑ $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$.
- ☑ $\cos a\sin b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$.

Ví dụ 39. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$\int \sin 3x\cos 5x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$ □

Ví dụ 40. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$\int \frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(2\cos^2 x-1\right)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos^2 2x}\mathrm{d}x=\frac{\tan 2x}{2}+C.$$ □

Ví dụ 41. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\cos x-2}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$\int \frac{\cos x - 2}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{3}{1+\cos x}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{3}{2\cos^2 \dfrac{x}{2}}\right)\,\mathrm{d}x = x - 3\tan\frac{x}{2} + C. \qquad \square$$

Ví dụ 42. Tính nguyên hàm $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có
$$\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\cot^2 x + 1 - 1\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(\cot^2 x + 1\right)\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = -\cot x - x + C. \qquad \square$$

Ví dụ 43. Tính nguyên hàm $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$ $\square$

Ví dụ 44. Tính nguyên hàm $\int \sin 2x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có
$$\int \sin 2x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C. \qquad \square$$

Ví dụ 45. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - 3\cos x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$. Tính $F(\pi)$.

Lời giải.

Ta có
$$F(x) = \int \left(2x - 3\cos x\right)\,\mathrm{d}x = x^2 - 3\sin x + C.$$
Theo giả thiết ta có : $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\pi^2}{4} - 3 + C = \dfrac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow C = 3.$
Vậy $F(x) = x^2 - 3\sin x + 3 \Rightarrow F(\pi) = \pi^2 + 3.$ $\square$

Ví dụ 46. Cho $f'(x) = 2 - 7\sin x$ và $f(0) = 14$. Tính $f(\pi)$.

Lời giải.

Ta có :
$$f(x) = \int \left(2 - 7\sin x\right)\,\mathrm{d}x = 2x + 7\cos x + C.$$
Theo giả thiết : $f(0) = 14 \Leftrightarrow 7 + C = 14 \Leftrightarrow C = 7.$
Vậy $f(x) = 2x + 7\cos x + 7 \Rightarrow f(\pi) = 2\pi.$ $\square$

Ví dụ 47. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x\cos 5x$ thỏa mãn

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

Ta có :
$F(x) = \int (\cos x \cos 5x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$
Theo giả thiết ta có : $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{16} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{16}$.
Vậy $F(x) = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{16} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$. □

Ví dụ 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm $f(x)$.

Lời giải.

Ta có :
$f(x) = \int (3 - 5\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x + 5\cos x + C.$
Theo giả thiết : $f(0) = 10 \Leftrightarrow 5 + C = 10 \Leftrightarrow C = 5$.
Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 59. Tính nguyên hàm $\int \sin 5x \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$\int \sin 5x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 7x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$ □

Bài 60. Tính nguyên hàm $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$ □

Bài 61. Tính nguyên hàm $\int 2\cos 2x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\int 2\cos 2x \sin x\,\mathrm{d}x = \int (\sin 3x - \sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x + C.$ □

Bài 62. Tính nguyên hàm $I = \int (2\tan x + \cot x)^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có:
$(2\tan x + \cot x)^2 = 4\tan^2 x + 4 + \cot^2 x = 4(\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) - 1.$
Khi đó $\int (2\tan x + \cot x)^2\,\mathrm{d}x = \int \left[4(\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) - 1\right]\,\mathrm{d}x = 4\tan x - \cot x - x + C.$ □

Bài 63. Tính nguyên hàm $I = \int \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x = -2\cot 2x + C$. □

Bài 64. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x$ và $F(\pi) = 1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Theo giả thiết : $F(\pi) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + 1 - \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3\pi}{8}$. □

Bài 65. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có :

$\dfrac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{2\sin 2x \cos 2x}{\sin x + \cos x} = 2\sin 2x\,(\cos x - \sin x)$

$= 2\sin 2x \cos x - 2\sin 2x \sin x = \sin 3x + \sin x + \cos 3x - \cos x$.

Vậy : $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x - \cos x + \frac{1}{3}\sin 3x - \sin x + C$. □

Bài 66. Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ và đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua điểm $M\left(\dfrac{\pi}{6}; 0\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

Theo giả thiết ta có : $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = \sqrt{3}$.

Vậy $F(x) = -\cot x + \sqrt{3}$. □

Bài 67. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{2} + C$. □

Bài 68. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = 1 - 4\sin 2x$ và $f(0) = 10$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có :

$f(x) = \int (1 - 4\sin 2x)\,\mathrm{d}x = x + 2\cos 2x + C.$
Theo giả thiết : $f(0) = 10 \Leftrightarrow C = 8.$
Vậy $f(x) = x + 2\cos 2x + 8 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 8.$ □

DẠNG 8. Phương pháp đổi biến

Phương pháp giải.

- ☑ Nguyên hàm dạng $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x.$
  Đặt : $u = \sin x.$
- ☑ Nguyên hàm dạng $\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$
  Đặt : $u = \cos x.$
- ☑ Nguyên hàm dạng $\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$
  Đặt : $u = \tan x.$
- ☑ Nguyên hàm dạng $\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$
  Đặt : $u = \cot x.$

Ví dụ 49. Tính nguyên hàm $\int \sin^4 x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\int \sin^4 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$ □

Ví dụ 50. Tính nguyên hàm $\int \sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\int \sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^4 x\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x = \int u^4\left(1 - u^2\right)\,\mathrm{d}u.$
$= \int \left(u^4 - u^6\right)\,\mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$ □

Ví dụ 51. Tính nguyên hàm $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{2\sin x + 3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{2u + 3}\,\mathrm{d}u.$
$= \int \left(1 - \frac{3}{2u + 3}\right)\,\mathrm{d}u = u - \frac{3}{2}\ln|2u + 3| + C = \sin x - \frac{3}{2}\ln|2\sin x + 3| + C.$ □

Ví dụ 52. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x(\cos x - 1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{u(u-1)}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u$

$= \ln|u| - \ln|u-1| + C = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right| + C.$ □

Ví dụ 53. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+u^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} + u\right)\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + \ln|u| + C = \ln|\tan x| + \frac{\tan^2 x}{2} + C.$ □

Ví dụ 54. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$

$= \displaystyle\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 69. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$ □

Bài 70. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C.$ □

Bài 71. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\tan^4 x - 1 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(\tan^2 x - 1\right)\left(\tan^2 x + 1\right)\,\mathrm{d}x + x$
$= \displaystyle\int \left(\tan^2 x - 1\right)\,\mathrm{d}\tan x + x = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.$ □

Bài 72. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \cot^4 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cot^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\cot^4 x - 1 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(\cot^2 x - 1\right)\left(\cot^2 x + 1\right)\,\mathrm{d}x + x$
$= \displaystyle\int \left(1 - \cot^2 x\right)\,\mathrm{d}\cot x + x = \cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + x + C.$ □

Bài 73. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = x\sin x + \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = x\cos x\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x\sin x + \cos x| + C.$ □

Bài 74. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \cot x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sin^2 x \dfrac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sin^2 x\left(\sqrt{3} + \cot x\right)}\,\mathrm{d}x$
$= -2\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3} + u}\,\mathrm{d}u = -2\ln\left|\sqrt{3} + u\right| + C = -2\ln\left|\sqrt{3} + \cot x\right| + C.$ □

Bài 75. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(2018 + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = 2018 + \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(2018 + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{2018 + \sin x} + C.$ □

Bài 76. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Vậy $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - u^2}{u^2 + u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1 + u - u - u^2}{u^2 + u}\,\mathrm{d}u$
$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{u} - 1\right)\,\mathrm{d}u = \ln|u| - u + C = \ln|\sin x| - \sin x + C.$ □

Bài 77. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F(x)$.

Lời giải.

Đặt $u=\sin^2 x+3 \Rightarrow \mathrm{d}u=\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $F(x)=\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln\left|\sin^2 x+3\right|+C.$

Theo giả thiết ta có : $F(0)=0 \Leftrightarrow \ln 3+C=0 \Leftrightarrow C=-\ln 3$

Vậy $F(x)=\ln\left|\sin^2 x+3\right|-\ln 3.$ □

Bài 78. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Tính $F(0)$.

Lời giải.

Đặt $u=1+\cos x \Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x.$

Vậy $F(x)=\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int\left(\frac{2}{u}-2\right)\mathrm{d}u$

$=-2u+2\ln|u|+C=-2(1+\cos x)+2\ln|1+\cos x|+C.$

Theo giả thiết ta có : $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -2+C=0 \Leftrightarrow C=2.$

Vậy $F(x)=-2(1+\cos x)+2\ln|1+\cos x|+2.$

Từ đó suy ra $F(0)=2\ln 2-2.$ □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5x+4}$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{\ln 5}\ln|5x+4|+C$. **B.** $F(x)=\ln|5x+4|+C$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{5}\ln|5x+4|+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{5}\ln(5x+4)+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{1}{5x+4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=2x+\mathrm{e}^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2019$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^x-2019$. **B.** $F(x)=x^2+\mathrm{e}^x-2018$.

C. $F(x)=x^2+\mathrm{e}^x+2017$. **D.** $F(x)=x^2+\mathrm{e}^x+2018$.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int(2x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=x^2+\mathrm{e}^x+C$.

Do $F(0)=2019$ nên $0^2+\mathrm{e}^0+C=2019\Leftrightarrow C=2018$.

Vậy $F(x)=x^2+\mathrm{e}^x+2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-1$ là

A. x^3+C. **B.** $\dfrac{x^3}{3}+x+C$. **C.** $6x+C$. **D.** x^3-x+C.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-1)\,\mathrm{d}x=x^3-x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Hàm số $f(x)=\cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

A. $-\sin(4x+7)+x$. **B.** $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)-3$. **C.** $\sin(4x+7)-1$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)+3$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)-3$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\displaystyle\int[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)dx-\int g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

C. $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Khẳng định A, B, D đúng theo tính chất của nguyên hàm.

Khẳng định C chỉ đúng khi $k\neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\cos x$ là

A. $2x-\sin x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+\sin x+C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3-\sin x+C$. **D.** $x^3+\sin x+C$.

Lời giải.

Ta có: $\int(x^2+\cos x)dx=\frac{1}{3}x^3+\sin x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$. **B.** x^4+x^3. **C.** $3x^2+2x$. **D.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^3$.

Lời giải.

$\int\left(x^3+x^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau?

A. $\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2\left(\mathrm{e}^x+C\right)$. **B.** $\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^4+C}{4}$.

C. $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$. **D.** $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ nên mệnh đề ở phương án C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=5^{2x}$?

A. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2.5^{2x}\ln 5+C$. **B.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2.\frac{5^{2x}}{\ln 5}+C$.

C. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{25^x}{2\ln 5}+C$. **D.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{25^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{5^{2x}}{\ln 5}+C=\frac{25^x}{2\ln 5}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Hàm số có đạo hàm bằng $2x+\frac{1}{x^2}$ là

A. $y=\frac{2x^3-2}{x^3}$. **B.** $y=\frac{x^3+1}{x}$. **C.** $y=\frac{3x^3+3x}{x}$. **D.** $y=\frac{x^3+5x-1}{x}$.

Lời giải.

Ta xét $\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C=\frac{x^3+Cx-1}{x}$.

Chọn $C=5$ ta được hàm số thoả yêu cầu bài toán là $y=\frac{x^3+5x-1}{x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Công thức nào sau đây là **sai**?

A. $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$. **B.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\cot x+C$.

C. $\int\sin xdx=-\cos x+C$. **D.** $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản.

Cách giải: Ta có $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ do đó đáp án B sai.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + x - 1$ là:

A. $x^4 + x^2 + x + C$. **B.** $12x^2 + 1 + C$. **C.** $x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + C$. **D.** $x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 - x + C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng nguyên hàm cơ bản $\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Cách giải: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - x + C = x^4 + \dfrac{1}{2} \cdot x^2 - x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A. $\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **B.** $\sin x + x^2 + C$. **C.** $-\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $-\sin x + x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int (\cos x + x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $f(x) = 3x^2 + \mathrm{e}^x$. **B.** $f(x) = \dfrac{x^4}{3} + \mathrm{e}^x$. **C.** $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$. **D.** $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x + C \Rightarrow f(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2019}$, $(x \in \mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x) = 2019x^{2018} + C$, $(C \in \mathbb{R})$. **B.** $F(x) = x^{2020} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

C. $F(x) = \dfrac{x^{2020}}{2020} + C$, $(C \in \mathbb{R})$. **D.** $F(x) = 2018x^{2019} + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$, ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^{2019}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{2020}}{2020} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. **B.** $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$. **C.** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. **D.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (F(x))' = \left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \dfrac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.

B. $\int f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x-\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x,(k\neq 0,k\in\mathbb{R})$.

D. $\int f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của nguyên hàm ta có mệnh đề sai là $\int\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\mathrm{d}x=\dfrac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x},(g(x)\neq 0,\forall x\in\mathrm{R})$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$.

A. $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$. **B.** $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$. **C.** $-3^{-x}+C$. **D.** $-3^{-x}\ln 3+C$.

Lời giải.

Ta có $\int 3^{-x}\mathrm{d}x=-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 5x$.

A. $\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$. **B.** $\cos 5x+C$. **C.** $-\cos 5x+C$. **D.** $-\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\sin 5x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\int\sin 5x\mathrm{d}(5x)=-\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+1$ là

A. $F(x)=2x^2+x$. **B.** $F(x)=2$. **C.** $F(x)=C$. **D.** $F(x)=x^2+x+C$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x+1)\,\mathrm{d}x=x^2+x+C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ là

A. e^x+x^2+C. **B.** $\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **C.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **D.** e^x+1+C.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x+x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C,\text{ với }C\text{ là hằng số.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 2^x\mathrm{d}x=2^x\ln 2+\mathrm{C}$. **B.** $\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\mathrm{C}$.

C. $\int\cos 2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\mathrm{C}$. **D.** $\int\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|+\mathrm{C}\quad(\forall x\neq -1)$.

Lời giải.

Ta có $\int 2^x \mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \mathrm{C}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 \,\mathrm{d}x$.

A. $F(x) = \pi^2 x + C$. **B.** $2\pi x + C$. **C.** $F(x) = \dfrac{\pi^3}{3} + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \pi^2 \,\mathrm{d}x = \pi^2 x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Tìm tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \dfrac{x}{2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{4} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{4} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + \dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{4} + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(3ax + 1)$ (với a là tham số khác 0).

A. $\cos(3ax + 1) + C$. **B.** $\dfrac{1}{3a}\cos(3ax + 1) + C$.

C. $-\dfrac{1}{3a}\cos(3ax + 1) + C$. **D.** $-\cos(3ax + 1) + C$.

Lời giải.

$\int \sin(3ax + 1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3a}\int \sin(3ax + 1)\,\mathrm{d}(3ax + 1) = -\dfrac{1}{3a}\cos(3ax + 1) + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ trên khoảng $(-\infty; -2)$ là

A. $\ln|x + 2| + C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|x + 2| + C$. **C.** $\ln(x + 2) + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln(x + 2) + C$.

Lời giải.

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ trên khoảng $(-\infty; -2)$ là $\ln|x + 2| + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = C - \cos x$. **B.** $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.

C. $\int x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4 + C}{4}$. **D.** $\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^x + C)$.

Lời giải.

Ta thấy $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$ sai khi $x < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Nguyên hàm $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $\cos 2x + C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $-\cos 2x + C$.

Lời giải.

Chú ý rằng $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^3$?

A. $F(x)=\dfrac{2x-3)^4}{8}+8$. **B.** $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{8}-3$.

C. $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{8}$. **D.** $F(x)=\dfrac{(2x-3)^4}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\int (2x-3)^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-3)^4}{4}+C=\dfrac{(2x-3)^4}{8}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **B.** $-3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **C.** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **D.** $3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có: $\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2x}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$.

A. $F(x)=2\sin\dfrac{x}{2}+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+C$.

C. $F(x)=-2\sin\dfrac{x}{2}+C$. **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\int \cos\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x=2\sin\dfrac{x}{2}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$.

A. $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=2x+C$. **C.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$. **D.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tính $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ được kết quả

A. $-\sin x+C$. **B.** $-\cos x+C$. **C.** $\cos x+C$. **D.** $\sin x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Tính $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2-3x}$ được kết quả

A. $3\ln|2-3x|+C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **C.** $-3\ln|2-3x|+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln|2-3x|+C$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C$, ta có $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2-3x} = -\dfrac{1}{3}\ln|2-3x|+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Tính $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ được kết quả

A. $-\cot x + C$. **B.** $\tan x + C$. **C.** $-\tan x + C$. **D.** $\cot x + C$.

Lời giải.

Ta có $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

A. $3\cos 3x + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$. **C.** $-\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$. **D.** $-3\cos 3x + C$.

Lời giải.

$\int \sin 3x \,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin 3x \,\mathrm{d}(3x)}{3} = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$. **B.** $\int x^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^5}{5} + C$.

C. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

$\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$ sai vì công thức đúng phải là $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$. **B.** $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

C. $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

$\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$ sai vì công thức đúng phải là $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$. **B.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x}\sin^2 x + C$.

C. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$. **D.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính nguyên hàm của hàm lượng giác ta được $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $F(x) = 2\sin 2x + C$. **B.** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $F(x) = -2\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có: $F(x) = \int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$. **B.** $\int f'(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot f(x) + C$.

C. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f''(x) + C$. **D.** $\int f'(x)\mathrm{d}x = a\cdot f(ax+b) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 12x^5$.

A. $y = 12x^6 + 5$. **B.** $y = 2x^6 + 3$. **C.** $y = 12x^4$. **D.** $y = 60x^4$.

Lời giải.

Ta có $\int 12x^5 \,\mathrm{d}x = 12\dfrac{x^6}{6} + C = 2x^6 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Tính nguyên hàm $I = \int (2^x + 3^x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$. **B.** $I = \dfrac{\ln 2}{2^x} + \dfrac{\ln 3}{3^x} + C$.

C. $I = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + C$. **D.** $I = -\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{\ln 3}{3} + C$.

Lời giải.

Ta có $I = \int (2^x + 3^x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

D. $\int [k\cdot f(x)]\,\mathrm{d}x = k\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của nguyên hàm, ta suy ra $\int [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án A ☐

Câu 46. Tìm $H = \int \sqrt[4]{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

A. $H = \frac{2}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C$. **B.** $H = (2x-1)^{\frac{5}{4}} + C$.

C. $H = \frac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C$. **D.** $H = \frac{8}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C$.

Lời giải.

Ta có: $H = \int \sqrt[4]{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{2}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 47. Một nguyên hàm của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $-\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $\frac{1}{2}\cos 2x$. **C.** $2\cos 2x$. **D.** $-2\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 48. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là **sai**?

A. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$ với $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ với $\alpha \neq -1$.

D. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

Lời giải.

Khẳng định $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ chỉ đúng với $k \neq 0$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 49. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$. **B.** $\int \mathrm{d}x = x + C$. **C.** $\int 0\,\mathrm{d}x = C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$ nên A sai.

Chọn đáp án A ☐

Câu 50. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x$.

A. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. **B.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} + C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm hàm số mũ.

Chọn đáp án A ☐

Câu 51. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \mathrm{d}x = x + 2C$, ($C$ là hằng số) .

B. $\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ($C$ là hằng số; $n \in \mathbb{Z}$) .

C. $\int 0 \,\mathrm{d}x = C$, (C là hằng số) .

D. $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - C$, ($C$ là hằng số) .

Lời giải.

Ta thấy $\int x^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ sai khi $n = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

A. $1 + \cos x + C$. **B.** $\dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2} + \cos x + C$. **D.** $x^2 - \cos x + C$.

Lời giải.

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$

Chọn đáp án B □

Câu 53. Hàm số $F(x) = 2\sin x - 3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = -2\cos x - 3\sin x$. **B.** $f(x) = -2\cos x + 3\sin x$.

C. $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$. **D.** $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = 2\cos x + 3\sin x$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$?

A. $F(x) = -\dfrac{1}{4}\ln|4 - 4x| + 3$. **B.** $F(x) = -\ln|1 - x| + 4$.

C. $F(x) = \ln|1 - x| + 2$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 1) + 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{1-x} = -\ln|1-x| + C.$$

Do đó $F(x) = -\ln|1 - x| + 4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$. **B.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$. **C.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$. **D.** $f(x) = 3\ln 3x$.

Lời giải.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x) = f(x)$. Vậy $f(x) = (\mathrm{e}^{3x})' = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 + 2\sin x$ và $f(0) = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x - 2\cos x + 5$. **B.** $f(x) = 3x + 2\cos x + 3$.

C. $f(x)=3x-2\cos x+3$. **D.** $f(x)=3x+2\cos x+5$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(3+2\sin x)\,\mathrm{d}x=3x-2\cos x+C$.

$f(0)=3\Leftrightarrow -2+C=3\Leftrightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x-2\cos x+5$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$.

A. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=3^x+C$. **B.** $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

C. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=3^x\ln 3+C$. **D.** $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. **B.** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2}+C$.

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho $y=f(x)$, $y=g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **B.** $\displaystyle\int[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int[f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]'=f(x)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int[f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$ là **sai**.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$. **B.** $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

C. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. **D.** $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\displaystyle\int(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Mệnh đề **sai** là $\int (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x}\left(3^x - \dfrac{\sqrt{x}}{4^x}\right)$.

A. $F(x) = \dfrac{12^x}{\ln 12} - \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

B. $F(x) = 12^x + x\sqrt{x} + C$.

C. $F(x) = \dfrac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4^x}\right) + C$.

D. $F(x) = \dfrac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{x\sqrt{x}\ln 4}{4^x}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = 12^x - \sqrt{x}$ nên $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{12^x}{\ln 12} - \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^5 - \dfrac{1}{x} + 2018$ là

A. $\dfrac{4}{6}x^6 + \ln|x| + 2018x + C$.

B. $\dfrac{2}{3}x^6 - \ln x + 2018x + C$.

C. $20x^4 + \dfrac{1}{x^2} + C$.

D. $\dfrac{2}{3}x^6 - \ln|x| + 2018x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(4x^5 - \dfrac{1}{x} + 2018\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^6 - \ln|x| + 2018x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$.

A. $\ln|3x+1| + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln|3x+1| + C$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln(3x+1) + C$. **D.** $\ln(3x+1) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\ln|3x+1| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x + 2$ là

A. $5\cos 5x + C$.

B. $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + 2x + C$.

C. $\dfrac{1}{5}\cos 5x + 2x + C$.

D. $\cos 5x + 2x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int f(x)dx = \int (\sin 5x + 2)dx = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + 2x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

A. $\cos x + C$. **B.** $\sin x + C$. **C.** $-\cos x + C$. **D.** $-\sin x + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 67. Khẳng định nào sau đây **sai** (C là hằng số)?

A. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$ **B.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

C. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C.$ **D.** $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 68. Với a là một số thực khác 0, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$ **B.** $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$

C. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$ **D.** $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm cơ bản.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $-3\sin 3x + C.$ **B.** $-\frac{1}{3}\sin 3x + C.$ **C.** $-\sin 3x + C.$ **D.** $\frac{1}{3}\sin 3x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 70. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 1$ là

A. $2^x \ln 2 + x + C.$ **B.** $\frac{2^x}{\ln 2} + x + C.$ **C.** $\frac{2^x}{\ln 2} + C.$ **D.** $2^x + x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (2^x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + x + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

A. $-\sin x + C.$ **B.** $\sin x + C.$ **C.** $\cos x + C.$ **D.** $-\cos x + C.$

Lời giải.

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là $F(x) = \sin x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$

B. $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k \neq 0$).

C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

D. $\int [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x) + C$, trong đó C là một hằng số.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 2x$ là

A. $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. **B.** $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **C.** $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = \cos x$?

A. $y = \tan x$. **B.** $y = \cot x$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = -\sin x$.

Lời giải.

Vì $(\sin x)' = \cos x$ nên $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $\cos x$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + 2\right)\mathrm{d}x$.

A. $F(x) = -\frac{1}{x} + 2x + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{x} + 2x + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{x} + 2 + C$. **D.** $F(x) = -\frac{1}{x^3} + 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + 2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$. **B.** $\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x} + C$.

C. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$. **D.** $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 77. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì hằng số k phải khác 0.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

B. $\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C$.

C. $\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln|x|}{2} + C$.

D. $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = 2\cos 2x + C$.

Lời giải.

Vì $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2}$.

A. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \mathrm{C}$.

B. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x = 2x + \frac{1}{x} + \ln|x| + \mathrm{C}$.

C. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x = x^2 + \ln|x| + \frac{1}{x} + \mathrm{C}$.

D. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{x} + \ln|x| + \mathrm{C}$.

Lời giải.

$$\int \frac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x = \int \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 2x + \ln|x| + \frac{1}{x} + \mathrm{C}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 80. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + \sin x$ là

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + \cos x + C$.

B. $F(x) = \mathrm{e}^x - \sin x + C$.

C. $y = \mathrm{e}^x + \sin x + C$.

D. $y = \mathrm{e}^x - \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\mathrm{e}^x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \cos x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + x + C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 6x + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 - x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.

Vậy $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên tập xác định. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $(k\neq 0)$.

B. $\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{5}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1}x^{\sqrt{5}-1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^{\sqrt{5}+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}+C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản suy ra $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1}+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 0\mathrm{d}x = C$.

B. $\int \mathrm{d}x = x+C$.

C. $\int x^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mathrm{e}+1}x^{\mathrm{e}+1}+C$.

D. $\int 5^x\mathrm{d}x = \dfrac{5^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải.

Từ công thức nguyên hàm cơ bản, có $\int 5^x\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5}+C$ nên phương án $\int 5^x\mathrm{d}x = \dfrac{5^{x+1}}{x+1}+C$ là sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Công thức nguyên hàm nào sau đây **không đúng**?

A. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$.

B. $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}+C \quad (0<a\neq 1)$.

C. $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$.

D. $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$.

Lời giải.

Công thức đúng là $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \ln x^2 + C$.

B. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

C. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \cot x + C$.

D. $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2\sin x$.

A. $\int (\mathrm{e}^x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \cos^2 x + C$.
B. $\int (\mathrm{e}^x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \sin^2 x + C$.
C. $\int (\mathrm{e}^x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 2\cos x + C$.
D. $\int (\mathrm{e}^x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2\cos x + C$.

Lời giải.

$\int (\mathrm{e}^x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 2\cos x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + x - 2$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2 + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + 1 + C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x^4 - 9x + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 - 9x + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x^4 + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x^3 + 9x + C$.

Lời giải.

$\int (2x^3 - 9)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x^4 - 9x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$.
B. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.
C. $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x}$.
D. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.

Lời giải.

$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3\ln x + 1}{x}\,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

A. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{3t+1}{e^t}\,\mathrm{d}t$.
B. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3t+1}{t}\,\mathrm{d}t$.
C. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (3t+1)\,\mathrm{d}t$.
D. $I = \displaystyle\int_0^1 (3t+1)\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x$, ta có $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Khi $x = 1$ thì $t = 0$. Khi $x = e$ thì $t = 1$. Vậy $I = \displaystyle\int_0^1 (3t+1)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ là

A. $-\mathrm{e}^{-x} + C$. **B.** $-\mathrm{e}^{x} + C$. **C.** $\mathrm{e}^{-x} + C$. **D.** $\mathrm{e}^{x} + C$.

Lời giải.

$$\int -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}(-x) = \mathrm{e}^{-x} + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Biết $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x = 2F(2x-1) + C$. **B.** $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x = 2F(x) - 1 + C$.

C. $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}F(2x-1) + C$. **D.** $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x = F(2x-1) + C$.

Lời giải.

Đặt $u = 2x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. Khi đó, ta có

$$\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}F(2x-1) + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 95. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5^x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 5^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$?

A. $F(x) = -\dfrac{1}{4}\ln|4-4x| + 3$. **B.** $F(x) = -\ln|1-x| + 4$.

C. $F(x) = \ln|1-x| + 2$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 1) + 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{1-x} = -\ln|1-x| + C.$$

Do đó $F(x) = -\ln|1-x| + 4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$. **B.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$. **C.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$. **D.** $f(x) = 3\ln 3x$.

Lời giải.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x) = f(x)$. Vậy $f(x) = (\mathrm{e}^{3x})' = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 + 2\sin x$ và $f(0) = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x - 2\cos x + 5$.
B. $f(x) = 3x + 2\cos x + 3$.
C. $f(x) = 3x - 2\cos x + 3$.
D. $f(x) = 3x + 2\cos x + 5$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (3 + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x - 2\cos x + C$.
$f(0) = 3 \Leftrightarrow -2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 5$.
Vậy $f(x) = 3x - 2\cos x + 5$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$.

A. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = 3^x + C$.
B. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.
C. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = 3^x \ln 3 + C$.
D. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.
Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. B	5. C	6. B	7. A	8. C	9. C	10. D
11. B	12. C	13. A	14. C	15. C	16. A	17. A	18. B	19. D	20. D
21. B	22. A	23. A	24. C	25. C	26. A	27. B	28. A	29. D	30. C
31. B	32. A	33. C	34. B	35. B	36. B	37. C	38. C	39. A	40. A
41. C	42. A	43. B	44. A	45. A	46. A	47. A	48. A	49. A	50. A
51. B	52. B	53. C	54. B	55. A	56. A	57. B	58. C	59. C	60. C
61. C	62. A	63. D	64. B	65. B	66. B	67. C	68. D	69. D	70. B
71. B	72. C	73. B	74. C	75. A	76. B	77. C	78. D	79. B	80. D
81. C	82. D	83. B	84. C	85. D	86. D	87. B	88. C	89. D	90. A
91. A	92. D	93. C	94. C	95. D	96. B	97. A	98. A	99. B	

❷ Mức độ thông hiểu

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ là

A. e^x+x^2+C. **B.** $\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **C.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **D.** e^x+1+C.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+x\right)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x+3x^2$. **B.** $2x^2\ln x+x^2$. **C.** $2x^2\ln x+3x^2+C$. **D.** $2x^2\ln x+x^2+C$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int 4x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x&=\int(1+\ln x)\,\mathrm{d}(2x^2)\\&=2x^2(1+\ln x)-\int 2x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\&=2x^2(1+\ln x)-x^2+C\\&=2x^2\ln x+x^2+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\sin x$ là

A. $x^2+\cos x+C$. **B.** $x^2-\cos x+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}-\cos x+C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\cos x+C$.

Lời giải.

Cách 1: Dựa vào bảng nguyên hàm các hàm số cơ bản ta có $\displaystyle\int(x+\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\cos x+C$.

Cách 2: Lấy đạo hàm các hàm số trên ta được kết quả.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ và $F(0)=\dfrac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}+200$. **B.** $2\mathrm{e}+200$. **C.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}+50$. **D.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}+100$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Theo đề bài ta có $F(0)=\dfrac{201}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0+C=\dfrac{201}{2}\Leftrightarrow C=100$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+100\Rightarrow F(2)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}+100$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)\cdot g(x)$ biết $F(1)=3$, biết $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=x+2018$ và $\displaystyle\int g(x)\mathrm{d}x=x^2+2019$.

A. $F(x)=x^3+1$. **B.** $F(x)=x^3+3$. **C.** $F(x)=x^2+2$. **D.** $F(x)=x^2+3$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018 \Rightarrow f(x) = (x+2018)' = 1$

và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019 \Rightarrow g(x) = (x^2+2019)' = 2x.$

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) = 2x \Rightarrow F(x) = \int f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = x^2 + C.$

Mặt khác $F(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + C = 3 \Rightarrow C = 2.$

Vậy $F(x) = x^2 + 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\left(1+3x^3\right)$ là

A. $x^2\left(1+\dfrac{3}{2}x^2\right)+C.$ **B.** $x^2\left(1+\dfrac{6x^3}{5}\right)+C.$ **C.** $2x\left(x+\dfrac{3}{4}x^4\right)+C.$ **D.** $x^2\left(x+\dfrac{3}{4}x^3\right)+C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\left(1+3x^3\right)\,\mathrm{d}x = \int\left(2x+6x^4\right)\,\mathrm{d}x = x^2 + \dfrac{6x^5}{5} + C = x^2\left(1+\dfrac{6x^3}{5}\right)+C.$

Chọn đáp án B □

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$ là

A. $(2x-1)\mathrm{e}^x + C.$ **B.** $(2x+3)\mathrm{e}^x + C.$ **C.** $2x\mathrm{e}^x + C.$ **D.** $(2x-2)\mathrm{e}^x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C = (2x-1)\mathrm{e}^x + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

A. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x} + C.$ **B.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x} + C.$

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1} + C.$ **D.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x$. Tìm khẳng định đúng.

A. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019.$ **B.** $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + 2019.$

C. $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019.$ **D.** $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 2019.$

Lời giải.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int (\mathrm{e}^{-x} + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + C$, với C là hằng số

Cho $C = 2019$ ta có $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019.$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Nếu $f(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thì $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 3. **B**. 0. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có: $g(x)=f'(x)=(2ax+b)\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}(ax^2+bx+c)=\dfrac{(2ax+b)(2x-1)+(ax^2+bx+c)}{\sqrt{2x-1}}$.

$=\dfrac{5ax^2+(3b-2a)x+c-b}{\sqrt{2x-1}}$.

Theo bài ra: $g(x)=\dfrac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}$ nên

$$\frac{5ax^2+(3b-2a)x+c-b}{\sqrt{2x-1}}=\frac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}\Rightarrow\begin{cases}5a=10\\3b-2a=-7\\c-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=1.\end{cases}$$

Vậy $a+b+c=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=2\ln(x-1)+2$. **B**. $F(x)=\ln(x-1)+3$.

C. $F(x)=4\ln(x-1)$. **D**. $F(x)=\ln(x-1)-3$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(x-1)+C$.

$F(\mathrm{e}+1)=4\Rightarrow\ln\mathrm{e}+C=4\Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=\ln(x-1)+3$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $y=3x(x+\cos x)$ là

A. $x^3+3(x\sin x+\cos x)+C$. **B**. $x^3-3(x\sin x+\cos x)+C$.

C. $x^3+3(x\sin x-\cos x)+C$. **D**. $x^3-3(x\sin x-\cos x)+C$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int 3x(x+\cos x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+3x\cos x\right)\mathrm{d}x=x^3+3\int x\cos x\mathrm{d}x$.

Tính $J=\displaystyle\int x\cos x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}x=u\\\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\\sin x=v\end{cases}$.

$\Rightarrow J=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

Vậy $I=x^3+3(x\sin x+\cos x)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$. **B**. $\dfrac{x^3}{3}-3^x+\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$. **D**. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2-3^x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{4x-3}$.

A. $\displaystyle\int\dfrac{2}{4x-3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\ln|4x-3|+C$.

B. $\displaystyle\int\dfrac{2}{4x-3}\mathrm{d}x=2\ln\left|2x-\dfrac{3}{2}\right|+C$.

C. $\displaystyle\int\dfrac{2}{4x-3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-\dfrac{3}{2}\right|+C$.

D. $\displaystyle\int\dfrac{2}{4x-3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{2}{4x-3}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-\dfrac{3}{2}\right|+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Hàm số $F(x)=x^2\ln(\sin x-\cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sin x-\cos x}$.

B. $f(x)=2x\ln(\sin x-\cos x)+\dfrac{x^2}{\sin x-\cos x}$.

C. $f(x)=2x\ln(\sin x-\cos x)+\dfrac{x^2(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}$.

D. $f(x)=\dfrac{x^2(\sin x+cosx)}{\sin x-\cos x}$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x)=F'(x)=2x\cdot\ln(\sin x-\cos x)+x^2\cdot\frac{(\sin x-\cos x)'}{\sin x-\cos x}=2x\cdot\ln(\sin x-\cos x)+x^2\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-xf(x)=0, f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Giá trị của$f(1)$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **B.** $\dfrac{1}{e}$. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\ln[f(x)]=\dfrac{1}{2}x^2+C$ (do $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Do đó $\ln[f(0)]=\dfrac{1}{2}\cdot0^2+C\Rightarrow C=0\Rightarrow\ln f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\Rightarrow f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\sin^2 2x\cdot\sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$.

A. $y=\dfrac{4}{3}\cos^3-\dfrac{4}{5}\sin^5 x+C$.

B. $y=-\dfrac{4}{3}\cos^3 x+\dfrac{4}{5}\cos^5 x+C$.

C. $y=\dfrac{4}{3}\sin^3 x-\dfrac{4}{5}\cos^5 x+C$.

D. $y=-\dfrac{4}{3}\sin^3 x+\dfrac{4}{5}\sin^5 x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 2x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 4\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= -4\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x) = -4\int \left(1-\cos^2 x\right)\cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x)$

$\displaystyle= -4\int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right)\cdot \mathrm{d}(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{4}{5}\cos^5 x + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x+2)^2}$?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln x+2} + C.$ **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{\ln x+2} + C.$

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\ln x+2} + C.$ **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln x + 2 + C.$

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{-1}{x} + C$ và công thức vi phân $\mathrm{d}[f(x)] = f'(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x+2)}{(\ln x+2)^2} = \frac{-1}{\ln x+2} + C.$

Chú ý: HS có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải bài toán này bằng cách đặt $t = \ln x + 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 3$ là

A. $\dfrac{x^3}{3} + 3x + C.$ **B.** $x^3 + 3x + C.$ **C.** $\dfrac{x^3}{2} + 3x + C.$ **D.** $x^2 + 3 + C.$

Lời giải.

Sử dụng công thức $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,(n \neq -1).$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f'(x) = 27 + \cos x$ và $f(0) = 2019$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 27x + \sin x + 1991.$ **B.** $f(x) = 27x - \sin x + 2019.$

C. $f(x) = 27x + \sin x + 2019.$ **D.** $f(x) = 27x - \sin x - 2019.$

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 27 + \cos x \Rightarrow \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (27+\cos x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + C.$

Lại có $f(0) = 2019 \Rightarrow 27\cdot 0 + \sin 0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2019 \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + 2019.$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A. $-x\cot x + \ln(\sin x) + C.$ **B.** $x\cot x - \ln|\sin x| + C.$

C. $x\cot x + \ln|\sin x| + C.$ **D.** $-x\cot x - \ln(\sin x) + C.$

Lời giải.

$\displaystyle F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$

Khi đó:

$$F(x)=\int\frac{x}{\sin^2 x}dx=-x.\cot x+\int\cot x dx=-x.\cot x+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=-x.\cot x+\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}$$
$$=-x.\cot x+\ln|\sin x|+C.$$

Với $x\in(0;\pi)\Rightarrow\sin x>0\Rightarrow\ln|\sin x|=\ln(\sin x)$.
Vậy $F(x)=-x\cot x+\ln(\sin x)+C$
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ thỏa mãn $F(2)=4$. Giá trị $F(-1)$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x+2}+C$.
Theo đề bài $F(2)=4$ nên $2\sqrt{2+2}+C=4\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(-1)=2\sqrt{-1+2}=2$.
Vậy $F(-1)=2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$. **C.** $-\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. **D.** $\ln|2x-1|+C$.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)=-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Biết rằng hàm số $F(x)=mx^3+(3m+n)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$. Tính mn.

A. $mn=1$. **B.** $mn=2$. **C.** $mn=0$. **D.** $mn=3$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.
Khi đó, $3mx^2+2(3m+n)x-4=3x^2+10x-4,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3m=3\\2(3m+n)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=2.\end{cases}$
Vậy $m.n=2$
Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\left(3x^2+\sin x\right)\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{x^3}{3}-\cos x+C=x^3-\cos x+C$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x+3x^2$. **B.** $2x^2\ln x+x^2$. **C.** $2x^2\ln x+3x^2+C$. **D.** $2x^2\ln x+x^2+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = 2x^2. \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2\,(1+\ln x) - \int 2x\,\mathrm{d}x = 2x^2\,(1+\ln x) - x^2 + C = 2x^2 \ln x + x^2 + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - x \cdot f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $\sqrt{\mathrm{e}}$. **D.** e.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \ln[f(x)] = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (do $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó $\ln[f(0)] = \dfrac{1}{2} \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

$\Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$?

A. $y = \dfrac{4}{3}\cos^3 x - \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$. **B.** $y = -\dfrac{4}{3}\cos^3 x + \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

C. $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x - \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$. **D.** $y = -\dfrac{4}{3}\sin^3 x + \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \sin^2 2x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 4\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -4\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) = -4\int (1-\cos^2 x)\cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) \\ &= -4\int (\cos^2 x - \cos^4 x)\,\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{4}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

A. $x + \dfrac{1}{x-1} + C$. **B.** $x + \dfrac{1}{(x-1)^2} + C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$. **D.** $x^2 + \ln|x-1| + C$.

Lời giải.

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$ và $F(0) = 1$.

A. $F(x) = \ln(x^4+1) + 1$. **B.** $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + \dfrac{3}{4}$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + 1$. **D.** $F(x) = 4\ln(x^4+1) + 1$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\dfrac{1}{x^4+1}\mathrm{d}(x^4+1)=\dfrac{1}{4}\ln(x^4+1)+\mathrm{C}$.

Do $F(0)=1$ nên $\dfrac{1}{4}\ln(0+1)+\mathrm{C}\Leftrightarrow \mathrm{C}=1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{4}\ln(x^4+1)+1$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^4+3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{2x}+\mathrm{C}$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+\mathrm{C}$.

C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{x}+\mathrm{C}$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=2x^3-\frac{3}{x}+\mathrm{C}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2x^4+3}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+\mathrm{C}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tìm tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x^2+1)\ln x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=(3x^2+1)\,\mathrm{d}x\end{cases}$ Suy ra $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=x^3+x.\end{cases}$

Từ đó ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=(x^3+x)\ln x-\int(x^2+1)\,\mathrm{d}x=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Hàm số $F(x)=\dfrac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2-24x+17)+C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=(x^2+2x-1)\,e^{3x+1}$. **B.** $f(x)=(x^2-2x-1)\,e^{3x+1}$.

C. $f(x)=(x^2-2x+1)\,e^{3x+1}$. **D.** $f(x)=(x^2-2x-1)\,e^{3x-1}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}F'(x)=&\frac{1}{27}\left[3e^{3x+1}\left(9x^2-24x+17\right)+e^{3x+1}(18x-24)\right]\\ =&\frac{1}{27}e^{3x+1}\left(27x^2-72x+51+18x-24\right)\\ =&\frac{1}{27}e^{3x+1}\left(27x^2-54x+27\right)=\left(x^2-2x+1\right)e^{3x+1}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{4}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int \sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+C=1\Rightarrow C=1$.

Do đó $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+1$.

Suy ra: $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\cos 2\cdot\frac{\pi}{6}+1=\frac{3}{4}$.

Cách khác:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{4}=1-F\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Một nguyên hàm của $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ là $F(x)=\left(ax^2+bx+c+\frac{d}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}F'(x)&=\left(2ax+b-\frac{d}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\left(ax^2+bx+c+\frac{d}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\\&=\left(2ax+(b-a)-\frac{b}{x}-\frac{c+d}{x^2}-\frac{d}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}\\&=f(x).\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}2a=2\\b-a=-1\\b=0\\c+d=0\\d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=0\\d=0\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Nếu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+\ln|5x|+C$ với $x\in(0;+\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{5x}$. **B.** $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{5x}$. **C.** $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$. **D.** $f(x)=\frac{1}{x^2}+\ln(5x)$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=\left(\frac{1}{x}+\ln|5x|+C\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tìm m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

$F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3 = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 10x - 4\right)\,\mathrm{d}x = x^3 + 5x^2 - 4x + C.$

Khi đó $\begin{cases} m = 1 \\ C = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tính $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x.$

A. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right| + C.$ **B.** $\ln\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right| + C.$

C. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right| + C.$ **D.** $\ln|2x^2+5x+2| + C.$

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \int \frac{1}{2x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(2x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x+1)$ là

A. $\cos(2x+1) + C.$ **B.** $-\cos(2x+1) + C.$

C. $\dfrac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$ **D.** $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$

Lời giải.

Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x.$

Khi đó, ta có $\displaystyle\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C.$ **B.** $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C.$

C. $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C.$ **D.** $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$

Lời giải.

$\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 41. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x.$

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

+ Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = -\cos x. \end{cases}$

+ Suy ra $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Khi tính nguyên hàm $\int \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào dưới đây?

A. $\int 2(u^2-4)u\,\mathrm{d}u$. **B.** $\int (u^2-4)\,\mathrm{d}u$. **C.** $\int 2(u^2-4)\,\mathrm{d}u$. **D.** $\int (u^2-3)\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow u^2=x+1\Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Thay vào ta được

$$\int \frac{u^2-1-3}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u=2(u^2-4)\,\mathrm{d}u.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{14}{3}$ thì

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{13}{3}$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin 3x+5$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+5$. **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{13}{3}$.

Lời giải.

$F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\cos 3x$ nên $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$.

Mà $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{14}{3}$ nên $\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+C=\dfrac{14}{3}\Leftrightarrow C=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan 2x$.

A. $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x=2\left(1+\tan^2 2x\right)+C$. **B.** $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos 2x|+C$.

C. $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2 2x\right)+C$. **D.** $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$.

Lời giải.

Ta có $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{-\mathrm{d}(\cos 2x)}{\cos 2x}=-\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2\cdot\dfrac{5^{2x}}{\ln 5}+C$. **B.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{25^x}{2\ln 5}+C$.

C. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2\cdot 5^{2x}+C$. **D.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2\cdot\dfrac{25^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int 5^{2x}\,\mathrm{d}(2x)=\dfrac{5^{2x}}{2\ln 5}+C=\dfrac{25^x}{2\ln 5}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm nguyên hàm của hàm số $F(x)=\int (4x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

A. $F(x)=(2x^2+x)\ln x+x^2+x+C$. **B.** $F(x)=(3x^2+2x)\ln x+C$.

C. $F(x)=(2x^2+x)\ln x-x^2-x+C$. **D.** $F(x)=x^2\ln x+C$.

Lời giải.

$F(x)=\int(4x+1)\ln x\,\mathrm{d}x=\int(2x^2+x)'\ln x\,\mathrm{d}x=(2x^2+x)\ln x-\int(2x^2+x)\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
$=(2x^2+x)\ln x-\int(2x+1)\,\mathrm{d}x=(2x^2+x)\ln x-x^2-x+C.$

Chọn đáp án C ☐

Câu 47. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos 2x$ là

A. $F(x)=-4\sin 2x$. **B.** $F(x)=4\sin 2x$. **C.** $F(x)=-\sin 2x$. **D.** $F(x)=\sin 2x$.

Lời giải.

$\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\sin 2x+C.$

Chọn đáp án D ☐

Câu 48. Nguyên hàm $\int e^x(e^x-1)^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}(e^x-1)^m+C$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tìm $H=a^2+b-m$.

A. $H=-4$. **B.** $H=-1$. **C.** $H=4$. **D.** $H=1$.

Lời giải.

$\int e^x(e^x-1)^3\,\mathrm{d}x=\int(e^x-1)^3\,\mathrm{d}\,(e^x-1)=\dfrac{1}{4}(e^x-1)^4+C.$

Suy ra $a=1$, $b=4$, $m=4$ nên $H=a^2+b-m=1$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 49. Nếu $\int f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C$ với $x\in(0;+\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$. **B.** $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2x}$.

C. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln(2x)$. **D.** $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C\right]'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 50. Tính $F(x)=\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả

A. $F(x)=x\sin x-\cos x+C$. **B.** $F(x)=-x\sin x-\cos x+C$.

C. $F(x)=x\sin x+\cos x+C$. **D.** $F(x)=-x\sin x+\cos x+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}\Rightarrow F(x)=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$

Chọn đáp án C ☐

Câu 51. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M\,(0;1)$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x+1=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+1=2.$

Chọn đáp án C ☐

Câu 52. Trong các khẳng định sau, hãy chọn khẳng định đúng.

A. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{3^{2x}}{\ln 3}+C$.
B. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{9^{x}}{\ln 3}+C$.
C. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{3^{2x}}{\ln 9}+C$.
D. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{3^{2x+1}}{2x+1}+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 3^{2x}\,\mathrm{d}(2x)=\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+8\sin x$ và thỏa mãn $F(0)=2010$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=6x-8\cos x+2018$.
B. $F(x)=6x+8\cos x$.
C. $F(x)=x^3-8\cos x+2018$.
D. $F(x)=x^3-8\cos x+2019$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2+8\sin x\right)\,\mathrm{d}x=x^3-8\cos x+C$.

Mặt khác $F(0)=2010\Leftrightarrow -8+C=2010\Leftrightarrow C=2018$.

Vậy $F(x)=x^3-8\cos x+2018$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$ là

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$.
B. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$.
C. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$.
D. $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Tính nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$, biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$.
B. $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-1$.
C. $F(x)=\mathrm{e}^{x}$.
D. $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x}+C$. Vì $F(0)=1$ nên $C=\dfrac{1}{2}$. Vậy $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x$ là

A. $F(x)=-x\cos x-\sin x+C$.
B. $F(x)=x\cos x-\sin x+C$.
C. $F(x)=-x\cos x+\sin x+C$.
D. $F(x)=x\cos x+\sin x+C$.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\cos x.\end{cases}$

Khi đó $F(x)=-x\cos x+\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Hàm số $F(x)=\cos 3x$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{3}$. **B.** $f(x)=-3\sin 3x$. **C.** $f(x)=3\sin 3x$. **D.** $f(x)=\sin 3x$.

Lời giải.

$F'(x)=f(x)=-3\sin 3x$

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Cho nguyên hàm $I=\int x\sqrt{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$, khi thực hiện đổi biến $u=\sqrt{1+2x^2}$ thì ta được nguyên hàm theo biến mới u là

A. $I=\dfrac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int u^2\,\mathrm{d}u$. **C.** $I=2\int u\,\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int u\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Ta có: $u=\sqrt{1+2x^2}$ suy ra $u^2=1+2x^2$.

Do đó $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$. Suy ra $I=\dfrac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Tìm m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

Nguyên hàm của $f(x)$ là x^3+5x^2-4x+C.

Do đó, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ khi và chỉ khi $m=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Tính $F(x)=\int x\sin 2x\mathrm{d}x$. Chọn kết quả đúng?

A. $F(x)=\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x+\sin 2x)+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x+\sin 2x)+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

Suy ra $\int x\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

Vậy: $F(x)=-\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$.

Theo đề $F(2)=1\Leftrightarrow\ln 1+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(3)=\ln 2+1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4m}{\pi}+\sin^2 x$. Tìm m để nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{8}$.

A. $m=-\dfrac{4}{3}$. **B.** $m=-\dfrac{3}{4}$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4m}{\pi}+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4m}{\pi}x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{8}-1\Leftrightarrow m+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{8}-1\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $y=12^{12x}$.

A. $\displaystyle\int 12^{12x}\mathrm{d}x=12^{12x-1}\cdot\ln 12+C$. **B.** $\displaystyle\int 12^{12x}\,\mathrm{d}x=12^{12x}\cdot\ln 12+C$.

C. $\displaystyle\int 12^{12x}\,\mathrm{d}x=\frac{12^{12x}}{\ln 12}+C$. **D.** $\displaystyle\int 12^{12x}\,\mathrm{d}x=\frac{12^{12x-1}}{\ln 12}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 12^{12x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\cdot\frac{12^{12x}}{\ln 12}+C=\frac{12^{12x-1}}{\ln 12}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^3-9$ là

A. $\dfrac{1}{2}x^4-9x+C$. **B.** $4x^4-9x+C$. **C.** $\dfrac{1}{4}x^4-9x+C$. **D.** $4x^3-9x+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int(2x^3-9)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-9x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin 2x$.

A. $\displaystyle\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=\sin^2 x+C$. **B.** $\displaystyle\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$.

C. $\displaystyle\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=\cos 2x+C$. **D.** $\displaystyle\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=-2\cos 2x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=2\cdot\frac{-\cos 2x}{2}+C=-\cos 2x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Họ nguyên hàm $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2+5}{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{5}{x}+C$. **B.** $-2x+\dfrac{5}{x}+C$. **C.** $x^2-2x-\dfrac{5}{x}+C$. **D.** $x^2-x-\dfrac{5}{x}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2+5}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x-2+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{5}{x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^2-1$ là

A. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x+C$.

C. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+C$. **D.** $F(x)=2x+C$.

Lời giải.

Có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^2-1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là hàm số $f'(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-f'(x)+C$. **B.** $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=-f(x)+C$.

C. $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=f'(x)+C$.

Lời giải.

Theo định nghĩa, hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x)=f(x)$.

Vậy ta có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(3)=1$. Tính giá trị của $F(2)$.

A. $F(2)=-1-\ln 2$. **B.** $F(2)=1-\ln 2$. **C.** $F(2)=-1+\ln 2$. **D.** $F(2)=1+\ln 2$.

Lời giải.

Có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$, mà $F(3)=1\Leftrightarrow C=1-\ln 2$.

Vậy $F(x)=\ln|x-1|+1-\ln 2\Rightarrow F(2)=1-\ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Tính $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ được kết quả

A. $-x\cos x+C$. **B.** $\sin x-x\cos x+C$. **C.** $\sin x+x\cos x+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x^2\sin x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int x\,\mathrm{d}\cos x=-\left(x\cos x-\int\cos x\,\mathrm{d}x\right)=\sin x-x\cos x+C$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Tính $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ được kết quả

A. $-2\ln|x|+C$. **B.** $\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $\ln x+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$

Chọn đáp án D □

Câu 72. Tính $I=\displaystyle\int\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$, khi thực hiện phép đổi biến $u=\sqrt{x+1}$, thì được

A. $I=\displaystyle\int\frac{2u^2-3}{u}\,\mathrm{d}u$. **B.** $I=\displaystyle\int\left(4u^2-6\right)\,\mathrm{d}u$.

C. $I=\displaystyle\int\frac{4u^2-6}{u}\,\mathrm{d}u$. **D.** $I=\displaystyle\int\left(2u^2-3\right)\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{x+1} \Rightarrow u^2=x+1 \Rightarrow \begin{cases} 2u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ x=u^2-1 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2\left(u^2-1\right)-1}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u=\int \left(4u^2-6\right)\,\mathrm{d}u.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C.$ **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C.$

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C.$ **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C.$

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{4\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}(2x+1)=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2018x}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=e^{2018x}+C.$ **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2018}\cdot \mathrm{e}^{2018x}+C.$

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2018\mathrm{e}^{2018x}+C.$ **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2018x}\cdot \ln 2018+C.$

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2018}\cdot \mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}(2018x)=\frac{1}{2018}\cdot \mathrm{e}^{2018x}+C$

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=6x+\sin 3x$, biết $F(0)=\dfrac{2}{3}$.

A. $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{2}{3}.$ **B.** $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}-1.$

C. $F(x)=3x^2+\dfrac{\cos 3x}{3}+1.$ **D.** $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+1.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (6x+\sin 3x)\,\mathrm{d}x=3x^2-\frac{\cos 3x}{3}+C$. Mà $F(0)=\dfrac{2}{3}$ nên $C=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3\cdot \mathrm{e}^{x^4+1}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^4+1}+C.$ **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4\mathrm{e}^{x^4+1}+C.$

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\mathrm{e}^{x^4+1}+C.$ **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4+1}+C.$

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{x^4+1}\,\mathrm{d}\left(x^4+1\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4+1}+C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int \frac{2}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\ln|2x+3|+C.$ **B.** $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C.$

C. $\displaystyle\int e^{2x}\,\mathrm{d}x=e^{2x}+C.$ **D.** $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C.$

Lời giải.

$$(e^{2x})' = 2e^{2x} \Rightarrow \int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 78. $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{-x} + 2018\mathrm{e}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (-2x^3 + 3x^2 + 7x - 2)\mathrm{e}^{-x}$. Khi đó

A. $a + b + c + d = 4$. **B.** $a + b + c + d = 6$. **C.** $a + b + c + d = 5$. **D.** $a + b + c + d = 7$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + c - d)$ và $F'(x) = f(x)$ suy ra $a = 2; b = 3; c = -1; d = 1$, do đó $a + b + c + d = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Tìm $F(x) = \displaystyle\int \frac{6x + 2}{3x - 1}\,\mathrm{d}x$.

A. $F(x) = 2x + \dfrac{4}{3}\ln|3x - 1| + C$. **B.** $F(x) = 2x + 4\ln|3x - 1| + C$.

C. $F(x) = \dfrac{4}{3}\ln|3x - 1| + C$. **D.** $F(x) = 2x + 4\ln(3x - 1) + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \frac{6x + 2}{3x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(2 + \frac{4}{3x - 1}\right)\mathrm{d}x = 2x + \frac{4}{4}\ln|3x - 1| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 3x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\dfrac{\cos 3x}{3} + \dfrac{5}{3}$. **B.** $F(x) = -\dfrac{\cos 3x}{3} + 2$.

C. $F(x) = -\dfrac{\cos 3x}{3} + 2$. **D.** $F(x) = -\cos 3x + 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cdot\cos 3x + C$.

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = -\dfrac{1}{3}\cdot\cos 3x + 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2018}$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x) = 2017 \cdot x^{2018} + C, (C \in \mathbb{R})$. **B.** $F(x) = \dfrac{1}{2019}x^{2019} + C, (C \in \mathbb{R})$.

C. $F(x) = x^{2019} + C, (C \in \mathbb{R})$. **D.** $F(x) = 2018 \cdot x^{2017} + C, (C \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x^{2018}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2019}x^{2019} + C, (C \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{5}{2}$. **B.** $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 - \dfrac{1}{2}$.

C. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{3}{2}$. **D.** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x^2+C$.

Theo bài ra $F(0)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C+1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Hàm số $F(x)=\dfrac{1}{4}\ln^4 x+C$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x}$. **B.** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^3 x}$. **C.** $f(x)=\dfrac{x}{\ln^3 x}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x\ln^3 x}{3}$.

Lời giải.

Ta có $F'(x)=\dfrac{1}{x}\ln^3 x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^2 x$. Giá trị của $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-F(0)$ bằng

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-F(0)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+x^2+\sqrt{x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+2x+\sqrt{x}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+x^2+\sqrt{x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+2-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\left(4x^3+2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=x^4+x^2+\sqrt{x}+C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+2x+3x^2$ thỏa mãn $F(1)=2$. Tính $F(0)+F(-1)$.

A. -3. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int(1+2x+3x^2)\,\mathrm{d}x=x+x^2+x^3+C$.

Do $F(1)=2$ nên $C=-1$. Suy ra $F(x)=x+x^2+x^3-1$, từ đó ta có $F(0)+F(-1)=-3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Tìm $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$. **B.** $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-4\ln|x|+C$.

C. $-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$. **D.** $\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

Lời giải.

$$\int \left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khi đó, với $a\neq 0$, a,b là hằng số ta có $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C$. **B.** $\frac{1}{a+b}\cdot F(ax+b)+C$.

C. $F(ax+b)+C$. **D.** $a\cdot F(ax+b)+C$.

Lời giải.

Đặt $t=ax+b$, ta được $\mathrm{d}t=a\cdot\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{a}=\mathrm{d}x$.

Ta được $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\int f(t)\frac{\mathrm{d}t}{a}=\frac{1}{a}\cdot F(t)+C=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2}$ là

A. $-\frac{1}{x}+C$. **B.** x^3+C. **C.** $-\frac{1}{3x^2}$. **D.** $\frac{1}{x}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int x^{-2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C$.

C. $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$. **D.** $\int\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=5x^4-3x^2$ trên tập số thực thỏa mãn $F(1)=3$ là

A. x^5-x^3+2x+1. **B.** x^5-x^3+3. **C.** x^5-x^3+5. **D.** x^5-x^3.

Lời giải.

Ta có $F(x)=x^5-x^3+C$, do $F(1)=C=3$ nên $F(x)=x^5-x^3+3$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+1$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=(2x+1)^2+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2x+1)^2+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(2x+1)^2+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2(2x+1)^2+C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^2}{2}+C=\frac{1}{4}(2x+1)^2+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 93. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=2\sin x\cos 3x$ và $F(0)=0$, khi đó

A. $F(x)=\cos 4x-\cos 2x$. **B.** $F(x)=\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 4x}{8}-\frac{1}{8}$.

C. $F(x)=\dfrac{\cos 2x}{2}-\dfrac{\cos 4x}{4}-\dfrac{1}{4}$. **D.** $F(x)=\dfrac{\cos 4x}{4}-\dfrac{\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int 2\sin x\cos 3x\,\mathrm{d}x=\int[-\sin 2x+\sin 4x]\,\mathrm{d}x=\dfrac{\cos 2x}{2}-\dfrac{\sin 4x}{2}+C$.

Vì $F(0)=0$, suy ra $C=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{\cos 2x}{2}-\dfrac{\cos 4x}{4}-\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3^x-2x$ là

A. $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln 3}-x^2-1$. **B.** $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln 3}-2$.

C. $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{x^2}{2}$. **D.** $F(x)=3^x\ln 3-x^2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int(3^x-2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}-x^2+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x^2}$.

A. $F(x)=-\dfrac{1}{x}(\ln 2x-1)+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{x}(\ln 2x+1)+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{x}(1-\ln 2x)+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{x}(\ln 2x+1)+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln(2x)}{x}+\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln(2x)}{x}-\frac{1}{x}+C\\&=-\frac{1}{x}(\ln(2x)+1)+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=2$. Tính $F(1)$ kết quả là

A. $\ln 8+1$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 4$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x=2\ln|x+2|+C$.

$F(-1)=2\Leftrightarrow 2\ln|-1+2|+C=2\Leftrightarrow C=2$.

Suy ra $F(x)=2\ln|x+2|+2$.

Vậy $F(1)=2\ln|1+2|+2=2\ln 3+2$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+1)^{2019}$ là

A. $\dfrac{(3x+1)^{2018}}{6054}+C$. **B.** $\dfrac{(3x+1)^{2018}}{2018}+C$. **C.** $\dfrac{(3x+1)^{2020}}{6060}+C$. **D.** $\dfrac{(3x+1)^{2020}}{2020}+C$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int(3x+1)^{2019}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{2019}\mathrm{d}(3x+1)=\frac{(3x+1)^{2020}}{6060}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **C.** $\ln|2x+3|+C$. **D.** $2\ln|2x+3|+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\tan^2 x$.

A. $x\tan x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $x\tan x-\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $x\tan x+\ln|\cos x|+\dfrac{x^2}{2}+C$. **D.** $-x\tan x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\tan^2 x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=-x+\tan x.\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x=x\left(-x+\tan x\right)-\int\left(-x+\tan x\right)\mathrm{d}x=-x^2+x\tan x+\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$

Hay $\displaystyle\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$.

Biết rằng $\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^{2x}$.

A. $F(x)=2^{2x}\cdot\ln 2$. **B.** $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$. **D.** $F(x)=4^x\cdot\ln 4+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 2^{2x}\,\mathrm{d}x=\int 4^x\,\mathrm{d}x=\frac{4^x}{\ln 4}+C$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. D	5. C	6. B	7. A	8. D	9. C	10. C
11. B	12. A	13. D	14. C	15. C	16. C	17. B	18. B	19. A	20. C
21. A	22. D	23. C	24. B	25. C	26. D	27. C	28. B	29. C	30. C
31. B	32. C	33. C	34. C	35. A	36. C	37. B	38. C	39. D	40. D
41. B	42. C	43. C	44. D	45. B	46. C	47. D	48. D	49. A	50. C
51. C	52. C	53. C	54. A	55. D	56. C	57. B	58. A	59. C	60. C
61. B	62. B	63. D	64. A	65. B	66. A	67. C	68. C	69. B	70. B
71. D	72. B	73. D	74. B	75. D	76. D	77. C	78. C	79. A	80. B
81. B	82. D	83. A	84. C	85. C	86. A	87. A	88. A	89. A	90. D
91. B	92. C	93. C	94. A	95. B	96. C	97. C	98. B	99. A	100. C

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ và $F(\mathrm{e})=\ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2+2$. **B.** $\ln 2+2$. **C.** $\ln 2+1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C,\ x>0,\ x\neq 1$.

Nên $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+C_1 \text{ khi } x>1\\ \ln(-\ln x)+C_2 \text{ khi } 0<x<1.\end{cases}$

Mà $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ nên $\ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+C_2=2\Leftrightarrow C_2=2$; $F(\mathrm{e})=\ln 2$ nên $\ln(\ln\mathrm{e})+C_1=\ln 2\Leftrightarrow C_1=\ln 2$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+\ln 2 \text{ khi } x>1\\ \ln(-\ln x)+2 \text{ khi } 0<x<1.\end{cases}$

Vậy $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F\left(\mathrm{e}^2\right)=\ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+2+\ln(\ln\mathrm{e}^2)+\ln 2=3\ln 2+2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+1$ thỏa mãn $F(0)=5$. Khi đó phương trình $F(x)=5$ có số nghiệm thực là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức nguyên hàm cơ bản để tìm $F(x)$ sau đó giải phương trình.

Cách giải:

Ta có: $F(x)=\int(x^3-2x^2+1)dx=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x+C$.

Lại có: $F(0)=5\Leftrightarrow C=5\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x+5$.

$F(x)=5\Leftrightarrow\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x=0\Leftrightarrow x\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\approx -1,04\end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=4x+3$ và $f(1)=-1$. Biết rằng phương trình $f(x)=10$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính tổng $\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$.

A. 8. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức: $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x$ để tìm hàm số $f(x)$ sau đó giải phương trình và tính tổng đề bài yêu cầu.

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int(4x+3)\,\mathrm{d}x=2x^3+3x+C$.

Lại có: $f(1)=-1\Rightarrow 2\cdot 1+3\cdot 1+C=-1\Leftrightarrow C=-6\Rightarrow f(x)=2x^2+3x-6$.

$\Rightarrow f(x)=10\Leftrightarrow 2x^2+3x-6=10\Leftrightarrow 2x^2+3x-16=0\quad(*)$.

Ta có: $ac=2\cdot(-16)=-32<0\Rightarrow(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{3}{2} \\ x_1x_2=-8. \end{cases}$

Ta có: $\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|x_1x_2|=\log_2|-8|=\log_2 2^3=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Biết rằng trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}, (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 6. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp: $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow (F(x))'=f(x)$.

Cách giải:

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-3} \\ \Rightarrow (F(x))' &= (2ax+b)\sqrt{2x-3}+\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(2ax+b)(2x-3)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

$f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow (F(x))'=f(x)$, khi đó $\begin{cases} 5a=20 \\ 3b-6a=-30 \\ -3b+c=7 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$.

$\Rightarrow S=a+b+c=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}, f(0)=2018$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B**. $f(1)=2019\mathrm{e}^{-2018}$. **C**. $f(1)=2017\mathrm{e}^{2018}$. **D**. $f(1)=2018\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=2018x^{2017}$.

$\Rightarrow (\mathrm{e}^{-2018x}f(x))'=2018x^{2017}\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)$ là 1 nguyên hàm của$2018x^{2017}$.

Ta có: $\int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x=x^{2018}+C\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+C_0$.

Mà $f(0)=2018\Rightarrow 2018=C_0\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+2018\Rightarrow f(x)=x^{2018}\mathrm{e}^{2018x}+2018\mathrm{e}^{2018x}$

$\Rightarrow f(1)=\mathrm{e}^{2018}+2018\mathrm{e}^{2018}=2019\mathrm{e}^{2018}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A. $x\cot x-\ln|\sin x|+C$. **B**. $.-x\cot x+\ln(\sin x)+C$.

C. $-x\cot x-\ln(\sin x)+C$. **D**. $x\cot x+\ln|\sin x|+C$.

Lời giải.

$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\cot x \end{cases}$.

Khi đó: $F(x)=\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-x.\cot x+\int \cot x\mathrm{d}x=-x.\cot x+\int \dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-x.\cot x+\int \dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}$
$=-x.\cot x+\ln|\sin x|+C.$
Với $x\in(0;\pi)$ suy ra $\sin x>0$ suy ra $\ln|\sin x|=\ln(\sin x)$.
Vậy $F(x)=-x\cot x+\ln(\sin x)+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)+\cdots+F(10\pi)$.

A. 55. **B**. 44. **C**. 45. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C.$

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\tan x+C_0,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_1,\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_2,\ x\in\left(\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)\\ \cdots\\ \tan x+C_9,\ x\in\left(\dfrac{17\pi}{2};\dfrac{19\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_{10},\ x\in\left(\dfrac{19\pi}{2};\dfrac{21\pi}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F\left(\dfrac{\pi}{4}+0\pi\right)=1+C_0=0\Rightarrow C_0=-1\\ F\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi\right)=1+C_1=1\Rightarrow C_1=0\\ F\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi\right)=1+C_2=2\Rightarrow C_2=1\\ \cdots\\ F\left(\dfrac{\pi}{4}+9\pi\right)=1+C_9=9\Rightarrow C_9=8\\ F\left(\dfrac{\pi}{4}+10\pi\right)=1+C_{10}=10\Rightarrow C_{10}=9.\end{cases}$

Vậy $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)+\cdots+F(10\pi)=\tan 0-1+\tan\pi+\tan 2\pi+1+\cdots+\tan 10\pi+9=44.$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

A. $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$. **B**. $2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$.

C. $2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$. **D**. $-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.

Lời giải.

Ta có:
$I=\displaystyle\int f(x)dx=\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$
$=\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{x^2}\left(x^3-4x\right)\,\mathrm{d}x &&= \int e^{x^2}\left(x^2-4\right)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\int (x^2-4)\,\mathrm{d}(e^{x^2}) &&= \frac{1}{2}\left[(x^2-4)\cdot e^{x^2}-2\cdot\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot(x^2-5)e^{x^2}+C. \end{aligned}$$

Đặt $g(x)=F(x^2+x)$.

Suy ra $g(x)=F(x^2+x)=\dfrac{1}{2}\cdot[(x^2+x)^2-5]\cdot e^{(x^2+x)^2}+C$.

$\Rightarrow g'(x)=(x^2+x)\,(2x+1)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left[(x^2+x)^2-4\right]$.

$g'(x)=x(x+1)(2x+1)\,(x^2+x-2)\,(x^2+x+2)\,e^{\left(x^2+x\right)^2}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm1\\ x=\dfrac{-1}{2}\\ x=-2 \end{array}\right.\cdot$$

Vậy hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B**. Vô số điểm. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow F'(x)=f(x)$.

$\Rightarrow F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-\cos x}{x^2}=0\ (x\neq0)\Leftrightarrow g(x)=x-\cos x=0$.

Xét hàm số $g(x)=x-\cos x$ ta có $g'(x)=1+\sin x\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f(x)=0$, $f(x)=0, f'(x)>0, f(2)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f(1)+f(2)+\ldots+f(2019)$.

A. $P=\dfrac{2020}{2019}$. **B**. $P=\dfrac{2019}{2020}$. **C**. $P=\dfrac{2018}{2019}$. **D**. $P=\dfrac{2021}{2020}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)+(2x+1)f(x)=0\Rightarrow\dfrac{-f'(x)}{f(x)}=2x+1\Rightarrow\displaystyle\int\frac{-f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+c\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+c}$. Mà $f(2)=\dfrac{1}{6}\Rightarrow c=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$P=f(1)+f(2)+\ldots+f(2019)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\ldots+\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 2^{\sin x}2^{\cos x}(\cos x - \sin x)$.

A. $y = 2^{\sin x+\cos x} + C$. **B.** $y = \dfrac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}$.

C. $y = \ln\left(2 \cdot 2^{\sin x+\cos x}\right) + C$. **D.** $y = -\dfrac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2} + C$.

Lời giải.

Ta có: $y = 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}(\cos x - \sin x) = 2^{\sin x+\cos x} \cdot (\cos x - \sin x)$

Xét $\displaystyle\int 2^{\sin x+\cos x} \cdot (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

Đặt: $\sin x + \cos x = t \Rightarrow (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Vậy $\displaystyle\int 2^{\sin x+\cos x} \cdot (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = \int 2^t\,\mathrm{d}t = \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2} + C$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \dfrac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C$. **B.** $F(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C$.

C. $F(x) = \dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int \sqrt[3]{x+1}\,\mathrm{d}x$

Đặt: $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int t \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = \int 3t^3\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$

Vậy $F(x) = \dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Trong các mệnh đề sau

(I). $\displaystyle\int f^2(x)\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)^2$. (II). $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{C}$.

(III). $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{C}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$. (IV). $\displaystyle\left(\int f'(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

Số mệnh đề đúng là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

* Mệnh đề (I) ta cho $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $VT(I) = \displaystyle\int 1\mathrm{d}x = x + \mathrm{C}, VP(I) = \left(\int 1\mathrm{d}x\right)^2 = (x+\mathrm{C})^2 = x^2 + 2x\mathrm{C} + C^2$.

Vậy $VT(I) \neq VP(I)$ nên mệnh đề (I) sai.

* Mệnh đề (II) đúng theo tính chất nguyên hàm.

* Mệnh đề (III) sai khi $k = 0$.

* Mệnh đề (IV) ta gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Ta có $VT(IV) = (F(x) + \mathrm{C})' = F'(X) + \mathrm{C}' = f(x) = VP(IV)$. Vậy (IV) là mệnh đề đúng. Kết luận: Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(3x-1)+C$ với $x \in \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$.
B. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(3x-1)+C$.
C. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(9x-1)+C$.
D. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 3x\ln(9x-1)+C$.

Lời giải.

Đặt $x = 3t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t$. Ta có:
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 3t\ln(3\cdot 3t-1)+C \Rightarrow \int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2t\ln(9t-1)+C \Rightarrow \int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$. Khi đó $F(0)$ là

A. $-\frac{2}{3}\ln 2+2$. **B.** $-\frac{1}{3}\ln 2-2$. **C.** $-\frac{1}{3}\ln 2+2$. **D.** $-\frac{2}{3}\ln 2-2$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int \dfrac{\mathrm{d}(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.
$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+2$.
Suy ra $F(0) = -\dfrac{1}{3}\ln 4+2 = -\dfrac{2}{3}\ln 2+2$.
Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x\ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1$.
B. $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1$.
C. $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1$.
D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

Lời giải.

Vì $\int (2018^x\ln 2018 - \cos x)\,\mathrm{d}x = 2018^x - \sin x + C$. Do $f(0) = 2$ nên $C = 1$.
Vậy $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \dfrac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m = \dfrac{2^{2017}+1}{2^{2018}}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}\,dx = \frac{2017}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^{2018}} = -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}+C.$$

Do đó ta có thể viết $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)^{2017}}+C$. Vì $F(1) = 0$ nên $C = \dfrac{1}{2^{2018}}$. Suy ra

$$F(x) = \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} \geq \frac{1}{2^{2017}} - \frac{1}{2} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$. Vậy $m=\dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(3x-1)+C$ với $x\in\left(\dfrac{1}{9};+\infty\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$. **B.** $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=6x\ln(3x-1)+C$.

C. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=6x\ln(9x-1)+C$. **D.** $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=3x\ln(9x-1)+C$.

Lời giải.

Đặt $x=3t\Rightarrow \mathrm{d}x=3\,\mathrm{d}t\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x=3\int f(3t)\,\mathrm{d}t=6t\cdot\ln(9t-1)+C$

$\Rightarrow \int f(3t)\,\mathrm{d}t=2t\cdot\ln(9t-1)+C$.

Mà nguyên hàm không phụ thuộc vào biến số nên $\int f(3x)\,\mathrm{d}x=2x\ln(9x-1)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}$?

A. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có biến đổi: $\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Suy ra, $\int\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{x+1}+C=\dfrac{x^2+(C+1)x+C+1}{x+1}$.

- ☑ Với $C=-2$, ta được $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$;
- ☑ Với $C=0$, ta được $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$;
- ☑ Với $C=-1$, ta được $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Vậy hàm số không phải là nguyên hàm của hàm số đã cho là $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=x\ln x$. Tính $F"(x)$.

A. $F"(x)=1-\ln x$. **B.** $F"(x)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $F"(x)=1+\ln x$. **D.** $F"(x)=x+\ln x$.

Lời giải.

$F'(x)=f(x)$, $F"(x)=f'(x)=1+\ln x$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $F(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Biết $F(0)=\dfrac{4}{3}$, tính $F(2\sqrt{2})$.

A. 3. **B.** $\dfrac{85}{4}$. **C.** 19. **D.** 10.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$.

Do đó $F(x)=\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3}+C$.

Mà $F(0)=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \dfrac{1}{3}+C=\dfrac{4}{3}\Rightarrow C=1$.
Vậy $F(2\sqrt{2})=10$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho các hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ với $x>\dfrac{3}{2}$. Gọi $(a;b;c)$ là bộ số thỏa mãn $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x)&=10x\sqrt{2x-3}+\frac{7}{\sqrt{2x-3}}=5(2x-3)\sqrt{2x-3}+15\sqrt{2x-3}+\frac{7}{\sqrt{2x-3}}\\ &=5(2x-3)^{\frac{3}{2}}+15(2x-3)^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=(2x-3)^{\frac{5}{2}}+5(2x-3)^{\frac{3}{2}}+7\sqrt{2x-3}+C=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C$.
Suy ra $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$ hay $a=4,b=-2,c=1\Rightarrow a+b+c=3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Tìm $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$. **B.** $x\sin 2x+\cos 2x+C$.
C. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.
Khi đó $I=\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tìm các họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x-2\tan x-\frac{1}{\tan^2 x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x+2\tan x-\frac{1}{\tan x}+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan^2 x-\frac{1}{\tan x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\frac{1}{\tan x}+C$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^4 x}=\dfrac{1}{\cos^4 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}(\tan^2 x+1)+\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Nên

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+\tan x-\cot x+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\frac{1}{\tan x}+C.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Nguyên hàm của $f(x)=\sin 2x\cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x\cdot e^{\sin^2 x-1}+C$. **B.** $\dfrac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1}+C$. **C.** $e^{\sin^2 x}+C$. **D.** $\dfrac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1}+C$.

Lời giải.

$$\left(e^{\sin^2 x}\right)' = 2\sin x\cos x \cdot e^{\sin^2 x} = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x\ln x}$ là

A. $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C$.
B. $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2\ln x| + C$.
C. $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\ln x| + C$.
D. $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|x\ln x| + C$.

Lời giải.

$$(\ln|x\ln x|)' = \frac{x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x}{x\ln x} = \frac{1+\ln x}{x\ln x}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho $\displaystyle\int \frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 9\sqrt{x^2+1} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + 5e^x + C$. Tính giá trị biểu thức $M = a+b+c$.

A. 6. **B.** 20. **C.** 16. **D.** 10.

Lời giải.

Ta thấy $I = \displaystyle\int \frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{ax}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{x^2+1}} + ce^x\right)\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int \frac{ax}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{x^2+1} + C_1$.

Xét $I_2 = \displaystyle\int \frac{b}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = b\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C_2$.

Xét $I_2 = \displaystyle\int ce^x\,\mathrm{d}x = ce^x + C_3$.

Ta được $\begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow M = 16$.
$c = 5$

Cách khác:

Ta thấy $\left[9\sqrt{x^2+1} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + 5e^x + C\right]' = \dfrac{9\cdot x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}} + 5e^x \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \\ c = 5. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, biết $F(0) = 1, F(\pi) = 0$. Tính $P = F\left(\dfrac{-\pi}{12}\right) - F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P = 2-\sqrt{3}$. **B.** $P = 0$. **C.** Không tồn tại P. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x) = \int \frac{1}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + c.$$

Với $x \in \left(\dfrac{-\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ ta có $F(0) = 1 \Rightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Với $x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$ ta có $F(\pi) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $P = F\left(\dfrac{-\pi}{12}\right) - F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

Lời giải.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

Do hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $\ln f(x) = \ln\sqrt{x^2+1} + C$.

Theo bài ra $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Vậy $f(2\sqrt{2}) - 2f(1) = 3 - 2\sqrt{2} \in (0;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Tìm nguyên hàm $J = \displaystyle\int (x+1)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

A. $J = \dfrac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x} + C$. **B.** $J = \dfrac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$.

C. $J = (x+1)\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$. **D.** $J = \dfrac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x} + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$.

Suy ra $J = \dfrac{x+1}{3}\mathrm{e}^{3x} - \displaystyle\int \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x+1}{3}\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + C$. **B.** $F(x) = \sqrt{x^2+1} + C$.

C. $F(x) = \ln\sqrt{x^2+1} + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Ta có: $I = \displaystyle\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{t}{t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C = \sqrt{x^2+1} + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \cot x, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ và $f\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = 1$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$ bằng

A. $1 + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3 + \ln\dfrac{1}{2} - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\ln\dfrac{1}{2} - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C = f(x)$.
Xét trên khoảng $(-2\pi;-\pi)$ ta có:
$f\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \ln\left|\sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)\right| + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(x) = \ln|\sin x| + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$F\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = \ln\left|\sin\left(-\dfrac{-7\pi}{4}\right)\right| + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Xét trên khoảng $(0;\pi)$ ta có:
$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f(x) = \ln|\sin x| + 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right| + 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \ln\dfrac{1}{2} + 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = 1 + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Tính $f(0)$, biết rằng $f(3) = 1$.

A. e^6 . **B.** e^3 . **C.** 1. **D.** e^4 .

Lời giải.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -2$, lấy nguyên hàm hai vế ta được $\ln|f(x)| = -2x + C$, suy ra $f(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$ với $A > 0$.
Do $f(3) = A\mathrm{e}^{-6} = 1$ nên $A = \mathrm{e}^6$. Vậy $f(0) = \mathrm{e}^6 \cdot \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^6$.
Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2018}+\sqrt{x+2017}} = m(x+2018)\sqrt{x+2018} + n(x+2017)\sqrt{x+2017} + C$. Khi đó $4m-n$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2018}+\sqrt{x+2017}} = \int \left(\sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2017}\right)\mathrm{d}x$
$= \dfrac{2}{3}(x+2018)\sqrt{x+2018} - \dfrac{2}{3}(x+2017)\sqrt{x+2017} + C$.
Vậy $4m - n = \dfrac{10}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$. **B.** $3 + \ln 15$. **C.** $2 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1| + C.$$

Vì $f(0) = 1$ nên $\ln|2\cdot 0 - 1| + C = 1$ hay $C = 1$. Do vậy $f(x) = \ln|2x-1| + 1$. Suy ra

$$f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 + 1 = 2 + \ln 15.$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của hàm số $f(x)=|2x-4|$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, ở đó C, C' là các hằng số tùy ý?

A. $F(x)=|x^2-4x|+C$.

B. $F(x)=\begin{cases} x^2-4x+2C & \text{khi } x\geq 2 \\ -x^2+4x+2C-8 & \text{khi } x<2 \end{cases}$.

C. $F(x)=|x^2-4x+C|$.

D. $F(x)=\begin{cases} x^2-4x+C & \text{khi } x\geq 2 \\ -x^2+4x+C' & \text{khi } x<2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=|2x-4|=\begin{cases} 2x-4 & \text{khi } x\geq 2 \\ -2x+4 & \text{khi } x<2 \end{cases}$.

Xét hàm số $F(x)=\begin{cases} x^2-4x+C & \text{khi } x\geq 2 \\ -x^2+4x+C' & \text{khi } x<2 \end{cases}$.

☑ Với $x>2$, ta có $F'(x)=2x-4=f(x)$.

☑ Với $x<2$, ta có $F'(x)=-2x+4=f(x)$.

☑ Xét tại $x=2$, ta có $f(2)=0$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4x+C-(C-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$,

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+4x+C'-(C-4)}{x-2}$.

Do $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ nên điều kiện cần để $F'(2)=f(2)=0$ là $\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+4x+C'-C+4)=0$ $\Leftrightarrow C'-C+8=0\Leftrightarrow C'=C-8$.

Ngược lại, với $C'=C-8$ ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+4x-4}{x-2}=0$.

Vậy nếu chọn hằng số là $2C$ thì $F(x)=\begin{cases} x^2-4x+2C & \text{khi } x\geq 2 \\ -x^2+4x+2C-8 & \text{khi } x<2 \end{cases}$ là nguyên hàm của $f(x)=|2x-4|$ trên $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f^2(x)\cdot f'(x)=3x^2+2x-2$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Vì hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[-1;2]$ nên ta có

$$\int f^2(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x=\int f^2(x)\mathrm{d}(f(x))=\int(3x^2+2x-2)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{3}f^3(x)=x^3+x^2-2x+C.$$

Vì $f(0)=1$ suy ra $C=\dfrac{1}{3}$.

Ta có $f(x)=1\Leftrightarrow f^3(x)=1\Leftrightarrow 3(x^3+x^2-2x)+1=1\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ hoặc $x=-2$ (loại vì $x=-2\notin[-1;2]$).

Chọn đáp án D □

Câu 39. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+2^x\ln 2$. Biết $F(1)=10$, tính $F(0)$.

A. $F(0)=8$. **B.** $F(0)=7$. **C.** $F(0)=6$. **D.** $F(0)=9$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = x + 2^x + C$.
Vì $F(1) = 10$ nên $1 + 2 + C = 10 \Rightarrow C = 7$.
Vậy $F(x) = x + 2^x + 7$, do đó $F(0) = 8$.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2x^2 - 2x + C$.
B. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = -x^2 + 2x + C$.
C. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = -2x^2 + 2x + C$.
D. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = -x^2 + x + C$.

Lời giải.

Vì $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ nên ta có $f(x)\mathrm{e}^{2x} = F'(x) = 2x$.
Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó, ta có

$$\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}\cdot f(x) - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2x - 2x^2 + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Xét hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$, $f(-3) + f(3) = f(-1) + f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(0) + f(4)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x = 4\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\mathrm{d}x = 4\int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$
$= \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + c$
Khi đó ta có $f(-3) + f(3) = \ln 5 + c + \ln\dfrac{1}{5} + c = 2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$.
Suy ra $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + 1$.
Do đó $f(-4) + f(0) + f(4) = \ln 3 + 1 + \ln 1 + 1 + \ln\dfrac{1}{3} + 1 = 3$. Vậy $f(-4) + f(0) + f(4) = 3$
Chọn đáp án D □

Câu 42. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + m$ thoả mãn $F(0) = 0$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. Giá trị của m bằng

A. $\dfrac{4}{\pi}$. **B.** $-\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} + m\,\mathrm{d}x = \tan x + mx + C.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 0 + C = 0 \\ \tan\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}m + C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ 1 + \dfrac{\pi}{4}m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ m = \dfrac{4}{\pi}. \end{cases}$$

Vậy $m=\dfrac{4}{\pi}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tính tổng $S=5a+4b+3c$.

A. $S=14$. **B.** $S=12$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Lời giải.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x)=f(x),\forall x\in(0;+\infty)$.
Ta có

$$\begin{aligned}F'(x)&=(2ax+b)\sqrt{x}+\frac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{5ax^2+3bx+c}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Vì $F'(x)=f(x),\forall x\in(0;+\infty)$, nên $\dfrac{5ax^2+3bx+c}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{x}},\forall x\in(0;+\infty)$. Hay

$$5ax^2+3bx+c=4x^2-6x+4,\forall x\in(0;+\infty).$$

Đồng nhất các hệ số, được $\begin{cases}a=\dfrac{4}{5}\\b=-2\\c=4\end{cases}$. Vậy $S=5\cdot\dfrac{4}{5}+4\cdot(-2)+3\cdot4=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Biết $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-x^2+2x+C$. Tính $\displaystyle\int f(-x)\,\mathrm{d}x$.

A. x^2+2x+C'. **B.** $-x^2+2x+C'$. **C.** $-x^2-2x+C'$. **D.** x^2-2x+C'.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-x^2+2x+C\Rightarrow f(x)=-2x+2\Rightarrow f(-x)=2x+2$
$\Rightarrow\displaystyle\int f(-x)\,\mathrm{d}x=x^2+2x+C'$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2x\cdot\cos^3x$ có dạng là $F(x)=-\dfrac{a}{b}\sin^5x+\dfrac{c}{d}\sin^3x$, với $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ là phân số tối giản và a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $T=a+b+c+d$.

A. Đáp án khác. **B.** $T=11$. **C.** $T=10$. **D.** $T=9$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \,\mathrm{d}x \\ &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \,\mathrm{d}\left(\sin x\right) \\ &= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) \,\mathrm{d}\left(\sin x\right) \\ &= -\frac{1}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C. \end{aligned}$$

Vậy $a = 1$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 3 \Rightarrow T = a + b + c + d = 10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 5x \cos x$ là

A. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$. **B.** $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)$.

C. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right)$. **D.** $\frac{1}{5}\sin 5x \sin x$.

Lời giải.

Ta có $\cos 5x \cos x = \frac{1}{2}\left[\cos(6x) + \cos(4x)\right]$.

$\Rightarrow \int \cos 5x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left[\cos(6x) + \cos(4x)\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 6x \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Xét hàm số $f(x) = x^2 + ax + \ln|bx + 1| + c$ với $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Biết $f'(x) = \frac{4x^2 + 4x + 3}{2x + 1}$ và $f(0) = 1$. Tính giá trị $S = c(2a - b)^2$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải.

$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x^2 + 4x + 3}{2x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(2x + 1 + \frac{2}{2x + 1}\right)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + \ln|2x + 1| + C$.

Suy ra $a = 1$, $b = 2$.

Lại có: $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ hay $c = 1$. Vậy $S = c(2a - b)^2 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \mathrm{e}^x - 1$, biết $F(0) = 2$.

A. $F(x) = 6x + \mathrm{e}^x - x - 1$. **B.** $F(x) = x^3 + \frac{1}{\mathrm{e}^x} - x + 1$.

C. $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^x - x + 1$. **D.** $F(x) = x^3 + \mathrm{e}^x - x - 1$.

Lời giải.

Ta có $\int (3x^2 + \mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + \mathrm{e}^x - x + C$.

Mặt khác $F(0) = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = x^3 + \mathrm{e}^x - x + 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C.$ **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C.$

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$ **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$

Lời giải.

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Hàm số $f(x) = x\sqrt{x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $F(0) = 2$ thì $F(3)$ bằng

A. $\dfrac{116}{15}$. **B.** $\dfrac{146}{15}$. **C.** $\dfrac{886}{105}$. **D.** 3.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$. Suy ra $x = t^2-1$ và $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

$$F(x) = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int (2t^4-2t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + C.$$

Từ

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{34}{15}.$$

Vậy $F(x) = \dfrac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \dfrac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \dfrac{34}{15}$ nên $F(3) = \dfrac{2\cdot 4^2\cdot 2}{5} - \dfrac{2\cdot 4\cdot 2}{3} + \dfrac{34}{15} = \dfrac{146}{15}$.

Cách 2. Ta có $F(3) - F(0) = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ nên $F(3) = F(0) + \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$. Suy ra $x = t^2-1$ và $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = 3 \Rightarrow t = 2.$$

Từ đó

$$I = \int_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (2t^4-2t^2)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{116}{15}.$$

Vậy $F(3) = 2 + \dfrac{116}{15} = \dfrac{146}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x-1$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm chung?

A. Không có. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (4x-1)\,\mathrm{d}x = 2x^2 - x + C.$$

Vì $F(0)=-1$ nên

$$2\cdot 0^2-0+C=-1\Leftrightarrow C=-1.$$

Vậy $F(x)=2x^2-x-1$. Số điểm chung của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=F(x)$ bằng số nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} & 2x^2-x-1=4x-1\\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-5x=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=F(x)$ có 2 điểm chung.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Đặt $A=\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $B=\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Xác định $A-B$.

A. $A-B=-\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x+C$. **B.** $A-B=-\cos 2x+C$.

C. $A-B=-2\cos 2x+C$. **D.** $A-B=\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x+C$.

Lời giải.

Ta có $A-B=\displaystyle\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Biết hàm số $F(x)=(ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a, b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $F'(x)=a\sqrt{4x+1}+(ax+b)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}$.

Để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\dfrac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6a=12\\ a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$. Do đó $a+b=1$.

Cách 2:

Ta tìm nguyên hàm $f(x)=\dfrac{12x}{\sqrt{4x+1}}\Rightarrow\displaystyle\int\frac{12x}{\sqrt{4x+1}}\mathrm{d}x=I$.

Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$ và $x=\dfrac{t^2-1}{4}$.

$\Rightarrow I=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\frac{t^3-t}{t}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int(t^2-1)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)=\frac{(4x+1)\sqrt{4x+1}}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{4x+1}$

$=(2x-1)\sqrt{4x+1}\Rightarrow a=2$ và $b=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ và $F(0)=2018$. Tính $F(-2)$.

A. $F(-2)$ không xác định. **B.** $F(-2)=2$.

C. $F(-2)=2018$. **D**. $F(-2)=2020$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C.$

Ta có $F(0)=2018$ nên $C=2018$.

Suy ra $F(-2)=2020$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2+5x+5)\mathrm{e}^x$. Giá trị của $2a+3b+c$ là

A. 10. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 13.

Lời giải.

Ta có $F'(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x+(2ax+b)\mathrm{e}^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)\mathrm{e}^x$.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases}a=1\\2a+b=5\\b+c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=2.\end{cases}$$

Vậy $2a+3b+c=13$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho $F(x)=\dfrac{a}{x}(\ln x+b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó a, b là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=-2$. **B**. $S=1$. **C**. $S=2$. **D**. $S=0$.

Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=1+\ln x\\\mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$. Khi đó

$I=-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)+\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}+C=-\frac{1}{x}(\ln x+2)+C\Rightarrow a=-1;b=2.$

Vậy $S=a+b=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=8\sin 3x\cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x)=a\cos 4x+b\cos 2x+C$. Khi đó, $a-b$ bằng

A. 3. **B**. -1. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int 8\sin 3x\cos x\,\mathrm{d}x=4\int(\sin 4x+\sin 2x)\,\mathrm{d}x=-\cos 4x-2\cos 2x+C.$

Suy ra $a=-1$, $b=-2$. Vậy $a-b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}f(x)$. Khi đó hiệu $T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)$ thuộc khoảng nào?

A. $(2;3)$. **B**. $(7;9)$. **C**. $(0;1)$. **D**. $(9;12)$.

Lời giải.

Ta có:
$f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}f(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
$\Rightarrow\ln|f(x)|=\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1|+C\Rightarrow\ln f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}+C$ (vì $f(x)$ luôn dương trên $\mathbb{R}$).
Mà $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)=3-2\sqrt{2}\in(0;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho $\displaystyle\int\limits_2^3\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 6$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $3a+2b+c$ bằng

A. 3. **B**. -14. **C**. -2. **D**. -11.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}=\dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$.
Khi đó: $\begin{cases}A+B=5\\3A+2B=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=3.\end{cases}$
Nên

$$\begin{aligned}\int\limits_2^3\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x&=\int\limits_2^3\dfrac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\dfrac{3}{x+3}\,\mathrm{d}x\\&=2\ln|x+2|\Big|_2^3+3\ln|x+3|\Big|_2^3\\&=3\ln 6-\ln 5-2\ln 4\\&=-4\ln 2-\ln 5+3\ln 6.\end{aligned}$$

Vậy $a=-4$, $b=-1$, $c=3\Rightarrow 3a+2b+c=-11$.
Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $5\ln 2+3$. **B**. $5\ln 2-2$. **C**. $5\ln 2+4$. **D**. $5\ln 2+2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln|3x-1|+C$ từ đây suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1, & \text{nếu} x>\dfrac{1}{3}\\ \ln|3x-1|+C_2, & \text{nếu} x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$.
$f(0)=1\Rightarrow C_2=1$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\Rightarrow C_1=2$.
Vậy $f(-1)+f(3)=\ln 4+2+\ln 8+1=5\ln 2+3$.
Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(x^3 - 4x)$.

Khi đó, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x \cdot f'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\tan\alpha = 3$. Tính $F(\alpha) - 10\alpha^2 + 3\alpha$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B**. $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C**. $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D**. $\ln 10$.

Lời giải.

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$\int x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cũng theo công thức tích phân từng phần lại có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x \cdot (\tan x)'\,\mathrm{d}x = x \cdot \tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x = x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + C.$$

Do đó

$$F(x) = \int x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot f(x) - x \cdot \tan x - \ln|\cos x| + C.$$

Mà $F(0) = 0$ nên $F(x) = x \cdot f(x) - x \cdot \tan x - \ln|\cos x|$. Lại có $\tan\alpha = 3$ nên $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 10$. Từ đó $F(\alpha) - 10\alpha^2 + 3\alpha = -\ln\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{2}\ln 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Biết $\displaystyle\int_1^2 \ln(9 - x^2)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 0$. **B**. $S = -2$. **C**. $S = -3$. **D**. $S = -1$.

Lời giải.

Ta có
$$\int_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(9-x^2)\big|_1^2 - \int_1^2 x\,\mathrm{d}\left(\ln(9-x^2)\right) = \ln 5 - \ln 8 + 2\int_1^2 \frac{x^2}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln 5 - 2\ln 2 + \int_1^2 \left(-2 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \ln 5 - 2\ln 2 + \left(-2x + 3\ln|x+3| - 3\ln|x-3|\right)\Big|_1^2$$
$$= 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2.$$
Vậy $S = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{3}{x^2-x-2}$, $f(-2) = 2\ln 2 + 2$ và $f(-2) - 2f(0) = 4$. Giá trị của biểu thức $f(-3) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A. $2 + \ln 5$. **B.** $2 + \ln\dfrac{5}{2}$. **C.** $2 - \ln 2$. **D.** $1 + \ln\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln\dfrac{x-2}{x+1} + C_1, & x \in (-\infty;-1) \\ \ln\dfrac{2-x}{x+1} + C_2, & x \in (-1;2) \\ \ln\dfrac{x-2}{x+1} + C_3, & x \in (2;+\infty) \end{cases}$$

Xét điều kiện $\begin{cases} f(-2) = 2\ln 2 + 2 \\ f(-2) - 2f(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$.

Suy ra $f(-3) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{5}{2} + 2 + \ln 1 - 1 = 1 + \ln\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80 + 1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5} + \ln 2 + 1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5} + 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C_1, \forall x \in (-\infty;-2) \\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C_2, \forall x \in (-2;1) \\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C_3, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases}$.

☑ Trên khoảng $(-\infty;-2)$, ta có $f(-3) = \dfrac{1}{3}\ln 4 + C_1$.

☑ Trên khoảng $(-2;1)$, ta có $f(0) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2} + C_2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{3}(1 + \ln 2)$.

Do đó $f(-1)=\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

☑ Trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f(3)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_3$.

Theo giả thiết $f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} f(-4)+f(-1)-f(4) &= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{2}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-C_3\\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}\\ &= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{x+1}$; $f(0)=1$ và $f(1)+f(-2)=2$. Giá trị $f(-3)$ bằng

A. $1+2\ln 2$. **B.** $1-\ln 2$. **C.** 1. **D.** $2+\ln 2$.

Lời giải.

Trên khoảng $(-\infty;-1)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1|+C_1$.

Trên khoảng $(-1;+\infty)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1|+C_2$.

$f(0)=1$ nên $3\ln 1+C_2=1\Rightarrow C_2=1$.

$f(1)+f(-2)=2$ nên $3\ln 2+1+3\ln 1+C_1=2\Rightarrow C_1=1-3\ln 2$.

$f(-3)=3\ln 2+1-3\ln 2=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2x+3)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$$

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Có bao nhiêu số thực $x\in(0;2018\pi)$ để $F(x)=1$.

A. 2018. **B.** 1009. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\sin x$, suy ra $F(x)=-\cot x+\cos x+C$.

Do $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C=1$, khi đó $F(x)=-\cot x+\cos x+1$.

Vậy $F(x)=1\Leftrightarrow \cot x-\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in(0;2018\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2018\pi\Rightarrow 0<\dfrac{1}{2}+k$, từ đó suy ra có 2018 số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Biết $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=ax\sin 2x+b\cos 2x+C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab.

A. $ab=\dfrac{1}{8}$. **B.** $ab=\dfrac{1}{4}$. **C.** $ab=-\dfrac{1}{8}$. **D.** $ab=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.\end{aligned}$$

Suy ra $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{4}\Rightarrow ab=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải.

Với $x\in[1;2]$ ta có

$$\begin{aligned}f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2 &\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=2x+3\\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C.\end{aligned}$$

Do $f(1)=4$ nên $C=0\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=2^3+3\cdot 2^2=20$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$.

Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}=2\,\mathrm{d}t.$

Khi đó $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int 2f(t)\,\mathrm{d}t.$

Mà $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$ nên $\displaystyle\int 2f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2(t+3)}{t^2+4}+C.$

Khi đó

$$\begin{aligned}&\int f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{t+3}{t^2+4}+C\\ \Leftrightarrow\ &\int f(2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+3}{4t^2+4}+C\\ \Leftrightarrow\ &\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 72. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2)+F(1)=0$. Giá trị của $F(-1)+F(2)$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{3}{6}\ln 5$. **C.** $\dfrac{10}{3}\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5$. **D.** 0.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ (x>-3).$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+3)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}.$

$$\begin{aligned}F(x)&=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\int\frac{1}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C.\end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x}{x+3}+C_1 \text{ khi } x>0\\ -\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{-x}{x+3}+C_2 \text{ khi } -3<x<0.\end{cases}$$

Khi đó

$F(-2)=\dfrac{1}{3}\ln 2+C_2.$

$F(1)=-\ln 4+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{4}+C_1.$

$F(-2)+F(1)=0\Rightarrow C_1+C_2=\dfrac{7}{3}\ln 2.$

$F(-1)=\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2.$

$F(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 5+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_1.$

$\Rightarrow F(-1)+F(2)=\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 5+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_1+C_2=\dfrac{10}{3}\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = x + \dfrac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - \sin 4x)\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{4}\cos 4x + C$.

Mà $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = x + \dfrac{a}{b}\cos 4x + C$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Tính $I = \displaystyle\int_0^{2018} \frac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$. **B.** $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln 4$.

C. $I = \ln(1+2^{2018}) - \ln 2$. **D.** $I = \ln^2(1+2^{-2018}) - \ln^2 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln(1+2^x)$, ta có $\mathrm{d}t = \dfrac{2^x \ln 2}{1+2^x} = \dfrac{\ln 2}{1+2^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \ln 2$; $x = 2018 \Rightarrow t = \ln(1+2^{2018})$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln\left(1+2^{2018}\right)} \frac{t}{\ln 2.\log_4 e}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{\log_4 2}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln\left(1+2^{2018}\right)} = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $F(x) = \dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$. **B.** $F(x) = \sin^3 x \cos x + C$.

C. $F(x) = -\sin x \cos^3 x + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Lời giải.

Ta có $4\cos^4 x - 3\cos^2 x = \dfrac{\cos 4x}{2} + 2\cos 2x + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3(\cos 2x + 1)}{2} = \dfrac{\cos 4x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$.

$F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6 - \dfrac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4 - \dfrac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\dfrac{15}{\mathrm{e}} - 4$. **D.** $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ suy ra $t^3 = x$ nên $3t^2\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ khi đó $I = \displaystyle\int 3t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Theo công thức tích phân từng phần

$$I = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\int 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - \int 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t\right) + C$$

Suy ra $I=\int f(x)\,\mathrm{d}x=3\sqrt[3]{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$

hay $F(x)=3\sqrt[3]{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$.

Do $F(0)=2$ suy ra $6+C=2\Leftrightarrow C=-4$. Khi đó $F(-1)=\dfrac{3}{\mathrm{e}}-3\left(-\dfrac{2}{\mathrm{e}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)-4=\dfrac{15}{\mathrm{e}}-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-5)+f(0)+f(2)$.

A. $T=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B.** $T=6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C.** $T=5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D.** $T=6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ nên

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & \text{khi } x\in(1;+\infty),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & \text{khi } x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & \text{khi } x\in(-1;1).\end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$f(-3)=\dfrac{1}{2}\ln 2+C_2,$$
$$f(3)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+C_1.$$

Mà

$$f(3)+f(-3)=4\Leftrightarrow C_1+C_2=4. \qquad (1)$$

Tương tự

$$f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2\Leftrightarrow 2C_3=2\Leftrightarrow C_3=1.$$

Ta có $\begin{cases}f(-5)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+C_2\\ f(0)=1\\ f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_1\end{cases}\Rightarrow f(-5)+f(0)+f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+1+C_1+C_2.$

Từ (1) suy ra $f(-5)+f(0)+f(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1+C_1+C_2=-\dfrac{1}{2}\ln 2+5$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Biết $\displaystyle\int\dfrac{2x+2}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{mx+n}+p\ln|2x+1|+C$ với m,n,p là các số hữu tỉ. Tổng $m+n+p$ bằng

A. $-\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{13}{2}$. **D.** $-\dfrac{13}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4x+2} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$

Vậy suy ra $m=-4, m=-2, p=\dfrac{1}{2}$ nên $m+n+p=-\dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-3x+2$ thỏa mãn $F(-1)=-\dfrac{3}{2}$. Khi đó phương trình $F(x)=2x+1$ có số nghiệm thực là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(4x^3-3x+2\right)\mathrm{d}x = x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+C.$

Do $F(-1)=-\dfrac{3}{2}$ nên suy ra $(-1)^4-\dfrac{3}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+C=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=1.$

Từ đó $F(x)=x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x+1$. Bởi vậy

$$\begin{aligned} F(x)=2x+1 &\Leftrightarrow x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+1=2x+1\\ &\Leftrightarrow x^4-\frac{3}{2}x^2=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do đó phương trình $F(x)=2x+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Hàm số f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2018$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B.** $f(1)=2019\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2017\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=2018x^{2017}\\ &\Leftrightarrow f'(x)\cdot\mathrm{e}^{-2018x}+f(x)\cdot\left(\mathrm{e}^{-2018x}\right)'=2018x^{2017}\\ &\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{-2018x}f(x)\right]'=2018x^{2017}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế của $(*)$ ta được

$$\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+C\Rightarrow f(x)=\left(x^{2018}+C\right)\mathrm{e}^{2018x}.$$

Mà $f(0)=2018$ nên $C=2018$, suy ra $f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)\mathrm{e}^{2018x}$.

Vậy $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+3}$ thỏa mãn $F(0)=10$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x+10-\ln\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\right)$.

B. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{3}{2}\right)\right)+10+\ln 5-\ln 2$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\right)+10+\dfrac{\ln 5}{3}$.

D. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{3}{2}\right)\right)+10-\dfrac{\ln 5-\ln 2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2\mathrm{e}^x+3}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=2\mathrm{e}^x+3\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{2\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{u-3}$.

Khi đó $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{u(u-3)}\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{3}\left(\ln|u-3|-\ln|u|\right)+C=\dfrac{1}{3}\left(\ln(2\mathrm{e}^x)-\ln\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\right)+C$.

Ta có $F(0)=10\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(\ln 2-\ln 5\right)+C=10\Leftrightarrow C=10-\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 5$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\ln(2\mathrm{e}^x)-\ln\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\right)+10-\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 5=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\right)+10+\dfrac{\ln 5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Tính nguyên hàm $I=\displaystyle\int\dfrac{1}{2x+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{2}{\sqrt{x}+x}+C$.

B. $I=-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}+C$.

C. $I=-\dfrac{2}{\sqrt{x}+x+1}+C$.

D. $I=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}+x}+C$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\dfrac{1}{2x+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+x+1\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2\,\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

Khi đó $I=2\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}t}{2t+t^2+1}=2\int\dfrac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=-\dfrac{2}{t+1}+C=-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0,\ \forall x\in(0;+\infty)$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\dfrac{11}{30}$.

B. $\dfrac{7}{15}$.

C. $\dfrac{11}{15}$.

D. $\dfrac{7}{30}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$.

Mà $f(2)=\dfrac{1}{15}\Rightarrow 15=4+8+C\Rightarrow C=3$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

Vậy $f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{30}$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Tính giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. $\ln 2$. **B**. $10+\ln 2$. **C**. $3-20\ln 2$. **D**. 12.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C\\
\Leftrightarrow\quad &\int \frac{3x-1}{x+2}\,\mathrm{d}x = f(x)+C\\
\Leftrightarrow\quad &\int \left(3-\frac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x = f(x)+C\\
\Leftrightarrow\quad &f(x) = 3x-7\ln|x+2|+C\\
\Leftrightarrow\quad &f(x) = \begin{cases} 3x-7\ln(x+2)+C_1 & \text{khi } x>-2\\ 3x-7\ln(-x-2)+\mathrm{C}_2 & \text{khi } x<-2\end{cases}
\end{aligned}$$

Theo giả thiết: $\begin{cases} f(0)=1\\ f(-4)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1+7\ln 2\\ \mathrm{C}_2 = 14+7\ln 2\end{cases} \Leftrightarrow C_1+\mathrm{C}_2 = 15+14\ln 2.$

Khi đó: $f(2)+f(-3) = [6-7\ln 4+C_1]+[-9-7\ln 1+C_2] = -3-14\ln 2+C_1+C_2 = 12.$

Cách 2:

Ta có:

$$\begin{aligned}
T &= f(2)+f(-3)\\
&= [f(2)-f(0)]+[f(-3)-f(-4)]+f(0)+f(-4)\\
&= \int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-4}^{-3} f'(x)\,\mathrm{d}x + 3 = 12.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là

A. $\dfrac{1}{3\sqrt{x^3+1}}+C$. **B**. $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. **C**. $\dfrac{2}{3\sqrt{x^3+1}}+C$. **D**. $\dfrac{1}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{x^3+1} \Rightarrow t^2 = x^3+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x \Rightarrow x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}t\mathrm{d}t.$ (1)

Theo cách đặt ta có $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int t^{-1}\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int \mathrm{d}t = \frac{2}{3}t+C.$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C.$

Vậy $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Kết quả của phép tính $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-2\cdot e^{-x}+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+2}\right|+C$. **B**. $\ln\left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+2}\right|+C$.

C. $\ln\left(\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1\right) + C$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 2} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2} \\ &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{\mathrm{e}^x + 2}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 2}\right| + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}(\sin x) - \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Do đó $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$.

Ta có $F'(x) = f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \in (0;\pi)$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		↗	$F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	↘	

Hàm $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra $-\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{3}} + \cot\dfrac{\pi}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó $F(x) = -\dfrac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$ nên $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^3+3x^2)\mathrm{e}^x$ và $F(0)=1$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=\mathrm{e}+1$. **B.** $F(1)=\mathrm{e}-1$. **C.** $F(1)=4\mathrm{e}$. **D.** $F(1)=\mathrm{e}$.

Lời giải.

Cách tự luận

Ta có $F(x)=\displaystyle\int \left(x^3+3x^2\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^3+3x^2\Rightarrow u'=3x^2+6x\\ v'=\mathrm{e}^x\Rightarrow v=\mathrm{e}^x.\end{cases}\Rightarrow F(x)=uv-\displaystyle\int u'v\,\mathrm{d}x=\left(x^3+3x^2\right)\mathrm{e}^x-\int\left(3x^2+6x\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=3x^2+6x\Rightarrow u'=6x+6\\ v'=\mathrm{e}^x\Rightarrow v=\mathrm{e}^x.\end{cases}\Rightarrow F(x)=\left(x^3+3x^2\right)\mathrm{e}^x-\left(\left(3x^2+6x\right)\mathrm{e}^x-\displaystyle\int(6x+6)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right).$

Đặt $\begin{cases}u=6x+6\Rightarrow u=6\\ v'=\mathrm{e}^x\Rightarrow v=\mathrm{e}^x.\end{cases}\Rightarrow F(x)=\left(x^3+3x^2\right)\mathrm{e}^x-\left(3x^2+6x\right)\mathrm{e}^x+(6x+6)\,\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^x+C.$

Vậy $F(x)=x^3\mathrm{e}^x+C$. Ta có $F(0)=0+C=1\Rightarrow C=1\Rightarrow F(1)=\mathrm{e}+1$.

Cách bấm máy

Ta có

$$\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)\Rightarrow F(1)=\int_0^1 f(x)dx+F(0).$$

Bấm máy ta được $F(1)=\mathrm{e}+1$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Biết $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$. **B.** $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=9x\cos(6x-5)+C$.

C. $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=9x\cos(2x-5)+C$. **D.** $\displaystyle\int f(3x)\,\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$.

Lời giải.

Đặt $t=3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$. Suy ra

$$\int f(3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\cdot 3t\cos(2t-5)+C=3x\cos(6x-5)+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Biết $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ và $f(\mathrm{e})=f(-1)=2$. Tính $S=f(2)+f(-2)$.

A. $S=2\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2+3$. **C.** $S=2\ln 2+4$. **D.** $S=2\ln 2+2$.

Lời giải.

Giả thiết có $f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=\ln|x|+C=\begin{cases}\ln x+C_1 & ,x>0\\ \ln(-x)+C_2 & ,x<0\end{cases}$. Mặt khác, ta lại có

- ☑ $f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}+C_1=2\Leftrightarrow C_1=1$.
- ☑ $f(-1)=\ln 1+C_2=2\Leftrightarrow C_2=2$.

Suy ra $S=f(2)+f(-2)=\ln 2+C_1+\ln 2+C_2=2\ln 2+3$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Mà $F'(x^2 + x) = f(x^2 + x)(2x + 1) \Rightarrow F'(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ x^2 + x = 0 \\ x^2 + x = -2 \\ x^2 + x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Các nghiệm này đều là nghiệm đơn nên $F'(x^2 + x)$ đều đổi dấu qua các nghiệm đơn đó. Do vậy hàm $F(x^2 + x)$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** vô số điểm. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$ hay $F'(x) = \dfrac{x - \cos x}{x^2}$.

Cho $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \cos x = 0 \\ x \in (0; 1). \end{cases}$ (1)

Xét hàm số $g(x) = x - \cos x$ trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, $\forall x \in [0; 1]$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$.

Lại có $g(0) = -1 < 0$, $g(1) = 1 - \cos 1 > 0$ nên $g(0) \cdot g(1) < 0$.

Suy ra phương trình $g(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x_0 \in (0; 1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $F'(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x_0 \neq 0$, đồng thời là nghiệm đơn nên $F'(x)$ đổi dấu qua $x = x_0$.

Vậy hàm số $y = F(x)$ có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho $F(x) = \sqrt{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $\sqrt{x^3} \cdot f(x)$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)x^2 \ln x$.

A. $\dfrac{1}{2}\ln x + C$. **B.** $-\dfrac{1}{2}\ln x + C$. **C.** $-\dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $\sqrt{x^3} \cdot f(x) = (\sqrt{x})' \Leftrightarrow \sqrt{x^3} \cdot f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$.

Suy ra $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2x^2}\right)' = -\dfrac{1}{x^3}$.

Vậy $\displaystyle\int f'(x)x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \int -\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int -\ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = -\frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\dfrac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\dfrac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\dfrac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\dfrac{323}{15}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f'(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int (x^4+x^2)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}(f(x))=\int (x^4+x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \quad f^2(x)=\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C.$$

Do $f(0)=2\Rightarrow C=4$.
Vậy $f^2(2)=\dfrac{2}{5}\cdot 2^5+\dfrac{2}{3}\cdot 2^3+4=\dfrac{332}{15}$.
Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$ và thỏa mãn $F(0)=\mathrm{e}-1$. Số nghiệm phân biệt của phương trình $F(x)=0$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (x\mathrm{e}^x-e)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}x+\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x+C$.
Do $F(0)=\mathrm{e}-1=-1+C$, suy ra $C=\mathrm{e}$. Phương trình $F(x)=0$ tương đương với

$$x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x+e=0\Leftrightarrow(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})(x-1)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$. Biết rằng $f(-2)+f(4)=0$ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2018$. Tính $T=f(-1)+f(1)+f(5)$.

A. $T=\dfrac{1}{2}\ln 5+1009$. **B.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}+1009$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}+2018$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C_1 \text{ khi } x<0\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C_2 \text{ khi } 0<x<2\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C_3 \text{ khi } x>2.\end{cases}$

Do $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2018\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\ln 3+\ln\dfrac{1}{3}\right)+2C_2=2018\Leftrightarrow C_2=1009$.

Lại có $f(-2)+f(4)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\dfrac{1}{2}\right)+C_1+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$.

Do đó $T=f(-1)+f(1)+f(5)=\dfrac{1}{2}\left(\ln 3+\ln 1+\ln\dfrac{3}{5}\right)+C_1+C_2+C_3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}+1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 5x \cos x$ là

A. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$.

B. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)$.

C. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right)$.

D. $\frac{1}{5}\sin 5x \sin x$.

Lời giải.

Ta có $\cos 5x \cos x = \frac{1}{2}\left[\cos(6x) + \cos(4x)\right]$.

$$\Rightarrow \int \cos 5x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left[\cos(6x) + \cos(4x)\right] \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 6x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2 + 2$. **B.** $\ln 2 + 2$. **C.** $\ln 2 + 1$. **D.** $2\ln 2 + 1$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x) = \ln|\ln x| + C = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Theo đầu bài $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2 \Rightarrow \ln\left(-\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$.

Và $F(e) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln x) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$.

Từ đó ta có $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Từ đó suy ra $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2) = \ln\left(-\ln\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 2 + \ln(\ln \mathrm{e}^2) + \ln 2 = 3\ln 2 + 2$.

Vậy $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2) = 3\ln 2 + 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C$.

B. $\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

C. $x\sin x + \cos x + C$.

D. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x), \quad \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2ax^2 + a^2}{x^2}, \quad \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2}, \quad \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a = 1$$

Suy ra $g(x) = x\cos x$

Suy ra $\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow \int g(x)\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019\cdot 2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+x)^2}\mathrm{d}(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x} + C.$

Mà $F(1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x} + 1 = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + 1.$

Ta có

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(2019) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} + 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} + 1\right) \\ &= 2019 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019}\right) = 2019 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2020} = 2018\frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. D	5. A	6. B	7. B	8. C	9. B	10. A
11. B	12. B	13. C	14. A	15. A	16. A	17. D	18. B	19. A	20. A
21. C	22. D	23. C	24. D	25. D	26. C	27. D	28. C	29. D	30. C
31. A	32. B	33. A	34. A	35. D	36. C	37. B	38. D	39. A	40. C
41. D	42. A	43. D	44. A	45. C	46. A	47. D	48. C	49. D	50. B
51. C	52. D	53. C	54. D	55. D	56. B	57. C	58. C	59. D	60. A
61. C	62. C	63. C	64. D	65. A	66. C	67. D	68. A	69. A	70. B
71. C	72. C	73. A	74. A	75. D	76. C	77. A	78. A	79. D	80. A
81. C	82. B	83. D	84. D	85. B	86. A	87. A	88. A	89. A	90. B
91. D	92. A	93. C	94. B	95. D	96. B	97. A	98. A	99. C	100. C

4 Mức độ vận cao

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$. Biết rằng $f(-2)+f(4)=0$ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2018$. Tính $T=f(-1)+f(1)+f(5)$.

A. $T=\dfrac{1}{2}\ln 5+1009$. **B.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}+1009$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}+2018$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C_1 \text{ khi } x<0\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C_2 \text{ khi } 0<x<2\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C_3 \text{ khi } x>2.\end{cases}$

Do $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2018\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\ln 3+\ln\dfrac{1}{3}\right)+2C_2=2018\Leftrightarrow C_2=1009$.

Lại có $f(-2)+f(4)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\dfrac{1}{2}\right)+C_1+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$.

Do đó $T=f(-1)+f(1)+f(5)=\dfrac{1}{2}\left(\ln 3+\ln 1+\ln\dfrac{3}{5}\right)+C_1+C_2+C_3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}+1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-1)e^x+C$. **B.** $(x-2)e^x+e^x+C$.

C. $(x+1)e^x+C$. **D.** $(x+2)e^{2x}+e^x+C$.

Lời giải.

Chọn C.

Sử dụng phương pháp tọa độ hóa. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Chuẩn hóa $a=1$ (đơn vị dài). Khi đó $SA=\sqrt{11}$ Đặt $OC=OD=b>0;OS=c>0$ ta có:

$SA^2=SC^2=SO^2+OC^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2+c^2=11(1)$. Tọa độ các điểm $B(0;-b;0),C(b;0;0),D(0;b;0),S(0;0;c)$.

Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\frac{x}{b}+\frac{y}{-b}+\frac{z}{c}=1\Rightarrow$ vtpt của (SBC) là: $\left(\dfrac{1}{b};-\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$. Theo giả thiết ta có: $|cos(n_1;n_2)|=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\dfrac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{1}{c^2}}{\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\dfrac{9}{c^2}=\dfrac{2}{b^2}\Leftrightarrow 9b^2-2c^2=0$. Kết hợp (1) và (2) ta được: $b^2=2$ và $c^2=9\Rightarrow b=\sqrt{2}$ và $c=3$ (do $b,c>0$). Vậy $CD=OC\sqrt{2}=2;SO=3\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}.2^2.3=4$ (đơn vị thể tích). Vậy $V_{S.ABCD}=4a^3$.

□

Câu 3. Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R},f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $4<f(3)<6$. **B.** $f(3)<2$. **C.** $2<f(3)<4$. **D.** $f(3)>6$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

+) Sử dụng phương pháp nguyên hàm 2 vế.

Cách giải:

Theo bài ra ta có: $f(x) = \sqrt{x+1}f'(x)$ (*)

Do $f(x) > 0 \forall x \in R$ nên từ (*) ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)|\,dx = 2\sqrt{x+1} + C \Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Ta có $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^{2+C} \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

Do đó $f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 \approx 7,4 > 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3) < 2$. **B.** $2 < f(3) < 4$. **C.** $4 < f(3) < 6$. **D.** $f(3) < f(6)$.

Lời giải.

Do giả thiết $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ suy ra $\sqrt{x+1} > 0$.

Khi đó $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \quad (*)$.

Mà $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C_1$. Vì $f(x) > 0$ nên $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C_1$.

Mặt khác $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + C_2$.

Từ (*) suy ra $\ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Do $f(0) = 1$ nên $\mathrm{e}^{2+C} = 1 \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$ suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}-2}$.

Khi đó $f(3) = \mathrm{e}^{2\sqrt{3+1}-2} = \mathrm{e}^2$ và $f(6) = \mathrm{e}^{2\sqrt{7}-2}$ suy ra $f(3) < f(6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A. 24. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải.

Với $x > 0$, ta có

$$2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}f'(x) + (\sqrt{x})'f(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[\sqrt{x}f(x)\right]' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \sqrt{x}f(x) = \frac{x^3}{2} + C.$$

Mà $f(1) = \dfrac{1}{2}$ nên $C = 0$, suy ra $\sqrt{x}f(x) = \dfrac{x^3}{2} \Rightarrow f(4) = 16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m > e$. **B.** $0 < m \leqslant 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2-2x)\,\mathrm{d}x. \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = A.e^{2x-x^2}$.

Mà $f(0) = 1$ suy ra $f(x) = e^{2x-x^2}$.

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 1 - (x-1)^2 \leqslant 1$.

Suy ra $0 < e^{2x-x^2} \leqslant e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. **B.** $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

C. $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$. **D.** $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^3} - F(x) + C = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$. Tính $T = f(-2) + f(0) + f(4)$.

A. $T = \ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 5$. **B.** $T = \ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 5 + 2$.

C. $T = \ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 5 + 1$. **D.** $T = \ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 5 + 2$.

Lời giải.

+ Xét trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathrm{C}_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + \mathrm{C}_1$.

Ta có $f(3) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} + \mathrm{C}_1 = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{C}_1$.

+ Xét trên khoảng $(-\infty;-1)$.

$f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + \mathrm{C}_2$.

Ta có $f(-3)=\dfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{C}_2$.

+ Xét trên khoảng $(-1;1)$.

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\mathrm{C}_3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+\mathrm{C}_3.$

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ln 3+\mathrm{C}_3$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln 3+\mathrm{C}_3$

+ Theo giả thiết suy ra $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow \mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2=0$ và

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow 2\mathrm{C}_3=2\Leftrightarrow \mathrm{C}_3=1.$

Mặt khác $f(4)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+\mathrm{C}_1$,$f(-2)=\dfrac{1}{2}\ln 3+\mathrm{C}_2$, $f(0)=\mathrm{C}_3$.

Suy ra $T=f(-2)+f(0)+f(4)=\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3$

$\Rightarrow T=\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+1=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 5+1.$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $T=F(0)+F(2)+F(-3)$.

A. 8. **B**. 12. **C**. 14. **D**. 10.

Lời giải.

Ta viết lại hàm số $f(x)$ đã cho

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{nếu } x>1\\ 2x & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ -2 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Xét trên các khoảng $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$ hàm số $f(x)$ có nguyên hàm là

$$F(x)=\begin{cases}2x+C_1 & \text{nếu } x>1\\ x^2+C_2 & \text{nếu } -1<x<1\\ -2x+C_3 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó $F(x)$ liên tục tại các điểm $x=-1$ và $x=1$. Để có điều này trước hết phải có

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}F(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}F(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=C_3\\ C_2=C_1+1\end{cases}.$$

Lại có $F(1)=3$ nên $C_1=1$ khi đó ta có

$$F(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{nếu } x>1\\ x^2+2 & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ -2x+1 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Vậy $T=F(0)+F(2)+F(-3)=14$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2 < f(5) < 3$. **B.** $4 < f(5) < 5$. **C.** $1 < f(5) < 2$. **D.** $3 < f(5) < 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C} \Rightarrow C = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow f(5) \approx 3{,}793$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1\\
\Leftrightarrow\ &[f(x)\cdot f'(x)]' = 2x^2 - x + 1\\
\Leftrightarrow\ &f(x)\cdot f'(x) = \int (2x^2 - x + 1)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &f(x)\cdot f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C.
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f(0)\cdot f'(0) = C \Leftrightarrow C = 9$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&f(x)\cdot f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 9\\
\Leftrightarrow\ &\int f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 9\right)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int f(x)\mathrm{d}[f(x)] = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 9x + C_1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}f^2(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 9x + C_1\\
\Leftrightarrow\ &f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 18x + 2C_1.
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f^2(0) = 2C_1 \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{9}{2}$.

Vậy $f^2(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 18x + 9$, nên $f^2(1) = 28$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x^4}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng

A. $a + b$. **B.** $b - a$. **C.** $a - b$. **D.** $-a - b$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$

Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên liên tục trên từng khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $\begin{cases}-\dfrac{1}{x}-\arctan x+C_1, & \text{nếu } x<0\\ -\dfrac{1}{x}-\arctan x+C_2, & \text{nếu } x>0.\end{cases}$

Thay $x=1$, ta được $a=-\dfrac{1}{1}-\arctan 1+C_2\Rightarrow C_2=a+1+\dfrac{\pi}{4}$.

Thay $x=-2$, ta được $b=-\dfrac{1}{-2}-\arctan(-2)+C_1\Rightarrow C_1=b-\dfrac{1}{2}-\arctan 2$.

Do đó

$$\begin{aligned}f(-1)-f(2)&=\left[-\frac{1}{-1}-\arctan(-1)+b-\frac{1}{2}-\arctan 2\right]-\left[-\frac{1}{2}-\arctan 2+a+1+\frac{\pi}{4}\right]\\&=b-a.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$.

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int 2f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\sqrt{x+1}^2+4}+C,$

suy ra $\displaystyle\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}^2+4}+C$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C=\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$.

A. $T=1+\ln\dfrac{9}{5}$. **B.** $T=1+\ln\dfrac{6}{5}$. **C.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle f(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

☑ Với $x\in(-\infty;-1)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1$.

☑ Với $x\in(1;+\infty)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3$.

Mà $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-3-1}{-3+1}\right|+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3-1}{3+1}\right|+C_3=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0.$$

Do đó $f(-2)=\dfrac{1}{2}\ln 3+C_1$; $f(4)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+C_3$.

☑ Với $x\in(-1;1)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right|+C_2+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|+C_2=2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=1.$$

Do đó với $x\in(-1;1)$: $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1 \Rightarrow f(0)=1$.

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1,b=4$. **B.** $a=1,b=-1$. **C.** $a=1,b\in\mathbb{R}\backslash\{4\}$. **D.** $a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=F'(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$; $f'(x)=\dfrac{-2(4a-b)}{(x+4)^3}$.

Thay vào biểu thức, ta có

$$2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x) \Leftrightarrow 4a-b=-(a-1)x-b+4$$
$$\Leftrightarrow (a-1)x+4(a-1)=0 \quad (1)$$

(1) đúng với mọi $x\neq -4$ khi $a=1$, $4a-b\neq 0 \Rightarrow b\neq 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Giả sử $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số). Tính tổng của các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)+1=\left(x^2+3x\right)^2+2\left(x^2+3x\right)+1=\left(x^2+3x+1\right)^2.$$

Do đó

$$\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=\int\frac{\left(x^2+3x+1\right)'\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+3x+1\right)^2}=-\frac{1}{x^2+3x+1}+C.$$

Vậy $\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x^2+3x+1}$.

Suy ra $g(x)=x^2+3x+1$. Do đó $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0$.

Vậy theo định lí Viet, tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$ là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2-2x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x - x^2 + C.$ (1)

Thay $x=0$ vào (1) ta được $C=0$, từ đó suy ra $\ln|f(x)| = 2x-x^2 \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$.

Phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình $m = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $-x^2+2x-\ln m = 0$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $\Delta' = 1-\ln m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \mathrm{e}$, từ đó suy ra $m=1$ hoặc $m=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & [f'(x)\cdot f(x)]' = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & f'(x)\cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1. \end{aligned}$$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2. \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1$ nên ta có $C_2 = 1$. Vậy $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$ suy ra $f^2(1) = 8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)\setminus\{\mathrm{e}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6$ và $f(\mathrm{e}^2) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f(\mathrm{e}^3)$ bằng

A. $3(\ln 2 + 1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2 + 1$. **D.** $\ln 2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln|\ln x - 1| + C$

$$= \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + C_1 & \text{khi} \quad x > \mathrm{e} \\ \ln(1 - \ln x) + C_2 & \text{khi} \quad 0 < x < \mathrm{e} \end{cases}.$$

Vì $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + C_2 = \ln 6 \Rightarrow \ln 3 + C_2 = \ln 6 \Rightarrow C_2 = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$.

Vì $f(\mathrm{e}^2) = 3 \Rightarrow \ln(\ln \mathrm{e}^2 - 1) + C_1 = 3 \Rightarrow C_2 = 3$.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f(\mathrm{e}^3) = \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 + \ln(\ln \mathrm{e}^3 - 1) + 3 = 2\ln 2 + \ln 2 + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = \dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = 1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017)$

A. $\dfrac{6059}{4038}$. **B.** $\dfrac{6055}{4038}$. **C.** $\dfrac{6053}{4038}$. **D.** $\dfrac{6047}{4038}$.

Lời giải.

$f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x-3$. Lấy nguyên hàm hai vế ta có $-\dfrac{1}{f(x)}=-x^2-3x+C$.

Do $f(1)=\dfrac{1}{6}$ nên $C=-2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $P=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{6055}{4038}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+F(2)+\cdots+F(2017)$.

A. $T=1009\cdot\dfrac{2^{2017}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2017.2018}$.

C. $T=\dfrac{2^{2017}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$. Mà $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$ nên $C=0$. Khi đó

$$T=\sum_{x=0}^{2017}\frac{2^x}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+\cdots+2^{2017}\right)=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1)=1$.

A. 3. **B.** e^{-2}. **C.** e^4. **D.** e^3.

Lời giải.

$f'(x)+2f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2 \Rightarrow (f(x))'=-2$

$\Rightarrow \ln(f(x))=-2x+C \Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{-2x+C}, C\in\mathbb{R}$.

Có $f(1)=1 \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{-2x+2}$.

Từ đó $f(-1)=\mathrm{e}^4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ và $f(1)=-2\ln 2$ biết $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\dfrac{x}{x+1}f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có

$$\frac{x}{x+1}\cdot f(x)=\int\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C.$$

Mà $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1 \Rightarrow f(x) \cdot \dfrac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| - 1$.

Cho $x = 2 \Rightarrow f(2) \cdot \dfrac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$.

Vậy $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $\cot x \cdot f'(x) + f(x) = 2cos^3 x$ với mọi $x \neq k\pi$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \in (1;4)$. **B.** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \in (6;10)$. **C.** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \in (3;5)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \in (4;8)$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x) = 2\cos^3 x \cdot \sin x \\
\Rightarrow\ &\frac{\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x)}{\cos^2 x} = 2\sin x \cdot \cos x \\
\Rightarrow\ &\left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)' = \sin 2x \\
\Rightarrow\ &\frac{f(x)}{\cos x} = \int \sin 2x\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ &f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot \cos x + C \cdot \cos x.
\end{aligned}$$

Do $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ nên ta có $C = \dfrac{9}{2}$ và $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \cdot \cos x + \dfrac{9}{2} \cdot \cos x$.

Từ đó ta có $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{19}{8} = 2,375 \in (1;4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị (C). Biết rằng $f'(x+2) = 2x + \sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1} - 1$ và tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(a;1)$ thuộc (C) song song với đường thẳng $y = x + 1$. Có bao nhiêu hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

☑ Từ giả thiết, ta có $f'(u) = 2u - 5 + \sqrt{u+1} - \sqrt{3u-5}$. Suy ra

$$f(u) = \int (2u - 5 + \sqrt{u+1} - \sqrt{3u-5})\mathrm{d}u = u^2 - 5u + \frac{2}{3}\sqrt{(u+1)^3} - \frac{2}{9}\sqrt{(3u-5)^3} + C$$

với C là hằng số.

☑ Tiếp tuyến tại điểm $M(a;1)$ thuộc đồ thị song song với đường thẳng $y = x + 1$ nên $f'(a) = 1$. Với $u < 2$ thì $f'(a) < -1 + \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3} - 1 < 1$ nên phương trình $f'(u) = 1$ không có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{3};2\right)$. Với $u > 2$ thì $f''(u) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{u+1}} - \dfrac{3}{2\sqrt{3u-5}} > 0$ nên phương trình $f'(u) = 1$ có không quá 1 nghiệm. Do đó phương trình $f'(u) = 1$ có 1 nghiệm duy nhất $u = 3$.

☑ Như vậy có duy nhất điểm $M(3;1)$ thỏa mãn điều kiện. Do $M \in (C)$ nên $f(3) = 1$ nên tồn tại duy nhất 1 giá trị C thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có đúng 1 hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$.

A. $\dfrac{43}{30}$. **B.** $\dfrac{16}{15}$. **C.** $\dfrac{43}{15}$. **D.** $\dfrac{26}{15}$.

Lời giải.

Ta có $[f(x)\cdot f'(x)]' = (f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) \Rightarrow [f(x)\cdot f'(x)]' = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)\cdot f'(x) = \displaystyle\int \left(x^3 - 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$.

Do đó $f(0)\cdot f'(0) = C \Rightarrow C = 1$. Bởi vậy $f(x)\cdot f'(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1\right)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int f(x)\mathrm{d}f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + C_1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}f^2(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + C_1\\
\Leftrightarrow\ &f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2C_1.
\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{2}$. Như vậy $f^2(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x + 1 \Rightarrow f^2(2) = \dfrac{43}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x^2}$ thỏa mãn $F(-2) + F(1) = 0$ và $F(-1) + F(2) = a\ln 2 + b\ln 5$, với a, b là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + 6b$ bằng

A. -3. **B.** 0. **C.** -4. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có: $F(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{\ln(x+3)}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+3)} = -\frac{\ln(x+3)}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{(x+3)-x}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\ln(x+3)}{x} + \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\ln(x+3)}{x} + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+3| + C\\
&= -\frac{\ln(x+3)}{x} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C
\end{aligned}$$

Ta lại có: $F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\ln 2 - \dfrac{8}{3}\ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = \dfrac{7}{3}\ln 2$.

Xét: $F(-1) + F(2) = \ln 2 - \dfrac{5}{6}\ln 5 + C = \ln 2 - \dfrac{5}{6}\ln 5 + \dfrac{7}{3}\ln 2 = \dfrac{10}{3}\ln 2 - \dfrac{5}{6}\ln 5$.

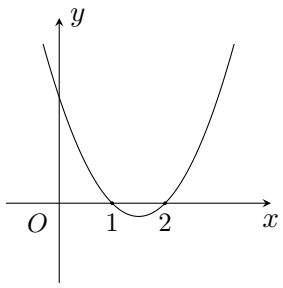
Mà: $F(-1) + F(2) = a\ln 2 + b\ln 5$

$\Rightarrow a = \dfrac{10}{3}, b = -\dfrac{5}{6} \Rightarrow 3a + 6b = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 28.

Cho hàm số $f(x)=nx^3+px^2+qx+r$ $(n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Biết $n+2p+4q+8r=6$. Giá trị $8n+4p+2q+r$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $n+2p+4q+8r=6\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra $f'(x)=k(x-1)(x-2)=k(x-2)^2+k(x-2)$, suy ra

$$f(x)=\frac{k(x-2)^3}{3}+\frac{k(x-2)^2}{2}+m=\frac{k(x-2)^2(2x-1)}{6}+m.$$

Do đó $f(2)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Vậy $8n+4p+2q+r=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho $F(x)=\displaystyle\int\frac{(1+\cos^2x)(\sin x+\cot x)}{\sin^4x}\mathrm{d}\,x$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0;4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(12\pi;18\pi)$. **B.** $(2\pi;4\pi)$. **C.** $(4\pi;6\pi)$. **D.** $(0;2\pi)$.

Lời giải.

Đặt $t=1+\dfrac{\cot x}{\sin x}$, ta được $t'=-\dfrac{(1+\cos^2x)\sin x}{\sin^4x}$. Khi đó, ta thấy

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\frac{(1+\cos^2x)(\sin x+\cot x)}{\sin^4x}\mathrm{d}\,x\\&=\int\frac{(1+\cos^2x)\sin x}{\sin^4x}\cdot\left(1+\frac{\cot x}{\sin x}\right)\mathrm{d}\,x\\&=-\int t\mathrm{d}\,t\\&=-\frac{t^2}{2}+C\\&=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\cot x}{\sin x}\right)^2+C.\end{aligned}$$

Ta thấy $F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\left(1+\dfrac{\cot x}{\sin x}\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\2\cos^2-\cos x-2=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\cos x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}.\end{array}\right.$

☑ Với $\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.\end{array}\right.$

Vì $x\in(0;4\pi)$ nên $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}+2\pi;-\dfrac{\pi}{2}+2\pi;-\dfrac{\pi}{2}+4\pi\right\}\Rightarrow S_1=8\pi$.

☑ Với $\cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.$, với $\alpha\approx2{,}467$.

Vì $x\in(0;4\pi)$ nên $x\in\{\alpha;\alpha+2\pi;-\alpha+2\pi;-\alpha+4\pi\}\Rightarrow S_2=8\pi$.

Vậy $S = S_1 + S_2 = 16\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x-1)\,\mathrm{e}^x + C$. **B.** $(x-2)\,\mathrm{e}^{2x} + e^x + C$.

C. $(x+1)\mathrm{e}^x + C$. **D.** $(x+2)\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x + f'(x)\mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)\mathrm{e}^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x = x + C_1.$$

Vì $f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{2x} = (x+2)\mathrm{e}^x$.

Khi đó

$$I = \int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int (x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int (x+2)\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right).$$

Suy ra

$$I = (x+2)\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(x+2) = (x+2)\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x+2)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x+1)\mathrm{e}^x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$, $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = -\dfrac{1}{2}$, $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$, $\forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1) + f(2) + \cdots + f(2019) = \dfrac{a}{b} - 1$ với $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a - b = 2019$. **B.** $a \cdot b > 2019$. **C.** $2a + b = 2022$. **D.** $b \leqslant 2020$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có: $f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x + 1$.

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta được $-\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + x + C$.

Mà $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ nên ta có $2 = 1^2 + 1 + C \Leftrightarrow C = 0$.

Do đó

$$-\frac{1}{f(x)} = x^2 + x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} - 1, \\ f(2) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}, \\ &\cdots \\ f(2019) &= \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2019) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} = \frac{1}{2020} - 1.$$

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2019$ nên mệnh đề **sai** là "$a - b = 2019$".

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hàm số f liên tục trên tập $\mathbb{Q}$ thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$ và $f(x)>-1$, $f(x)=0$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x)\sqrt{x^2+1} &=& \ 2x\sqrt{f(x)+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} &=& \ 2x\sqrt{f(x)+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}f(x) &=& \ \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \\ \Rightarrow & \int\frac{1}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}f(x) &=& \int\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \\ \Rightarrow & \sqrt{f(x)+1} &=& \ \sqrt{x^2+1}+C. \end{aligned}$$

Cho $x=0$ và để ý rằng $f(0)=0$, ta tìm được $C=0$.
Vậy $\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=x^2$ nên $f(\sqrt{3})=3$.
Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x)\cdot f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta có $f(x)\cdot f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\frac{2f(x)\cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x\quad(*)$.
Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.
Ta có $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.
Dẫn đến $f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}$.
Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0$ và $f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{\mathrm{e}^x\cdot x\sqrt{x-x^2}}$, $\forall x\in(0;1)$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right)\geq\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{6}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{4}$. **D.** $f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{\mathrm{e}^x\cdot x\sqrt{x-x^2}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x f(x)-\mathrm{e}^x f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-\frac{2}{x\sqrt{x-x^2}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{e}^x}{f(x)}\right)'=-\frac{2}{x\sqrt{x-x^2}}.$$

Suy ra $\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}=\displaystyle\int\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\displaystyle\int\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{-2\sqrt{x-x^2}}{x\left(x-x^2\right)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{x-x^2}}{x}\Rightarrow t^2=\dfrac{x-x^2}{x^2}\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó,

$$\int\frac{-2\sqrt{x-x^2}}{x\left(x-x^2\right)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2\sqrt{x-x^2}}{x}\cdot\frac{x^2}{x-x^2}\cdot\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int 2t\cdot\frac{1}{t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$
$$=\int 4\,\mathrm{d}t=4t+C=\frac{4\sqrt{x-x^2}}{x}+C.$$

Kết hợp với giả thiết $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ ta có $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=4+C\Leftrightarrow C=2\sqrt{\mathrm{e}}-4$.

Như thế, với mọi $x\in(0;1)$ thì $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\dfrac{4\sqrt{x-x^2}}{x}+2\sqrt{\mathrm{e}}-4}$.

Vậy $\dfrac{1}{6}\le f\left(\dfrac{1}{5}\right)<\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x\cdot f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\dfrac{14}{9}$. **B.** $-\dfrac{4}{9}$. **C.** $-\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có

$$f(x)+\tan x\cdot f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$$
$$\Rightarrow \cos x\cdot f(x)+\sin x\cdot f'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow (\sin x\cdot f(x))'=\frac{x}{\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow \sin x\cdot f(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x+\ln(\cos x)+C$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{\cos x}+\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}+\frac{C}{\sin x}.$$

Suy ra

$$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\ln 2+2C\right)-\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}-2\ln 2+\ln 3+2C\right)$$
$$=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3.$$

Vậy $\begin{cases} a = \dfrac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = -\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $\left[2f(x) + 1 - x^2\right] f'(x) = 2x\left[1 + f(x)\right]$, $\forall x \in [0;1]$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

☑ Ta có

$$\left[2f(x) + 1 - x^2\right] f'(x) = 2x\left[1 + f(x)\right] \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = (x^2 - 1)f'(x) + 2xf(x) + 2x$$
$$\Leftrightarrow \left((f(x))^2\right)' = \left((x^2 - 1)f(x) + x^2\right)'.$$

☑ Nguyên hàm hai vế ta có $(f(x))^2 = (x^2 - 1)f(x) + x^2 + C$.
Thay $x = 1$ vào ta có $1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

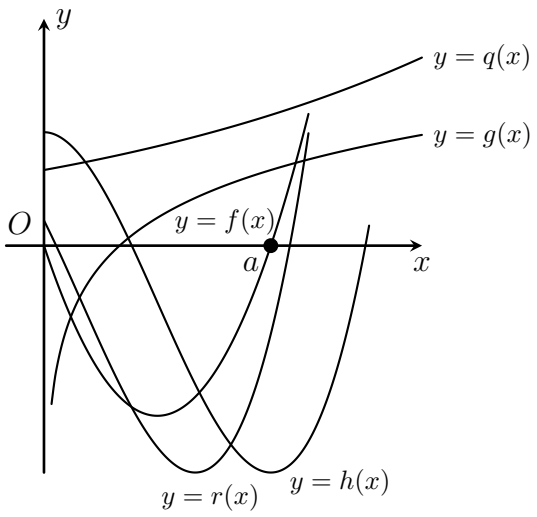
☑ Vậy $(f(x))^2 = (x^2 - 1)f(x) + x^2 \Leftrightarrow (f(x))^2 - (x^2 - 1)f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(x) = -1. \end{array}\right.$

Vì $f(1) = 1$ nên $f(x) = x^2$.

☑ Từ đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Đồ thị các hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$; $y = h(x)$; $y = q(x)$; $y = r(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết trong đó có một đồ thị của một hàm số là nguyên hàm của $y = f(x)$ trên đoạn $[0;a]$, đó là đồ thị hàm số nào?



A. $y = g(x)$. **B.** $y = h(x)$. **C.** $y = q(x)$. **D.** $y = r(x)$.

Lời giải.

Nếu hàm số $y = F(x)$ là nguyên hàm của $y = f(x)$ trên đoạn $[0;a]$ thì $F'(x) = f(x) \le 0$, $\forall x \in [0;a]$ nên $F(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;a]$. Từ đồ thị ta thấy $F(x)$ chỉ có thể là $h(x)$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{1}{3}$ và $f'(x) = x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{9}$. **D.** $-\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = x$.

Do đó,

$$\begin{aligned} & \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & -\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}. \end{aligned}$$

Theo giả thuyết, $f(2) = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$.

Suy ra $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(x+3)f(x) + (x+2)\left(f'(x) - e^x\right) = 0$ và $f(0) = \dfrac{3}{8}$. Tính $f(2)$.

A. $\dfrac{17}{3}e^2$. **B.** $\dfrac{11}{16}e^2$. **C.** $\dfrac{14}{3}e^2$. **D.** $\dfrac{7}{16}e^2$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = g(x)e^x$ ta được

$$\begin{aligned} & (x+3)g(x)e^x + (x+2)\left(g(x)e^x + g'(x)e^x - e^x\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+5)g(x) + (x+2)g'(x) = x+2 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x+2)g(x) + (x+2)g'(x) + g(x) = x+2 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x+2)g(x) + \left((x+2)g(x)\right)' = x+2 \end{aligned}$$

Đặt $h(x)=(x+2)g(x)$, ta được

$$\begin{aligned}
& 2h(x)+h'(x)=x+2\\
\Leftrightarrow\ & 2h(x)e^{2x}+h'(x)e^{2x}=(x+2)e^{2x}\\
\Leftrightarrow\ & \left(h(x)e^{2x}\right)'=(x+2)e^{2x}\\
\Leftrightarrow\ & h(x)e^{2x}=\int\limits_0^x(t+2)e^{2t}\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\ & h(x)e^{2x}=\frac{1}{2}e^{2x}(x+2)-\frac{1}{4}e^{2x}+C\\
\Leftrightarrow\ & h(x)=\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{4}+\frac{C}{e^{2x}}\\
\Rightarrow\ & g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4(x+2)}+\frac{C}{e^{2x}(x+2)}\\
\Rightarrow\ & f(x)=e^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4(x+2)}+\frac{C}{e^{2x}(x+2)}\right)
\end{aligned}$$

Vì $f(0)=\dfrac{3}{8}$ nên $C=0$.

Do đó $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{e^x}{4(x+2)}$.

Vậy $f(x)=\dfrac{7}{16}e^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=6x^3\sqrt{x}$. Biết $f(1)=a$, hãy tìm $f(4)$ theo a.

A. $2a+126$. **B.** $4a+252$. **C.** $2a+63$. **D.** $a+63$.

Lời giải.

Ta có $2xf'(x)-f(x)=6x^3\sqrt{x}\Leftrightarrow\dfrac{2xf'(x)-f(x)}{2x\sqrt{x}}=3x^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)'=3x^2$

$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=x^3+a-1$ (do $f(1)=a$).

$\Rightarrow f(4)=2a+126$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}(x^3+3x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^2+3)\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Khi đó $F(t)=\displaystyle\int(t+2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t+2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=\mathrm{e}^t\end{cases}$ ta có $F(t)=(t+2)\mathrm{e}^t-\displaystyle\int\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=(t+2)\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+C=(t+1)\mathrm{e}^t+C$.

Vậy $F(x)=(x^2+2)\mathrm{e}^{x^2+1}+C$, từ đó ta có $F'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2+1}(x^2+3)=0\Leftrightarrow x=0$.

Hàm số $F'(x)$ đổi dấu khi qua $x=0$, suy ra hàm số $F(x)$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và $f(x) > 0$ trên đoạn $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$ và $f(x) \cdot f''(x) + \left[\dfrac{f(x)}{x+2}\right]^2 = [f'(x)]^2$. Tính $f^2(1) + f^2(2)$?

A. 20. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 25.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f(x) \cdot f''(x) + \left[\frac{f(x)}{x+2}\right]^2 = [f'(x)]^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế $\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x+2} + C$.

Cho $x = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{2} + C \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0$.

Khi đó $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x+2} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|f(x)| = \ln|x+2| + C$.

Cho $x = 0 \Rightarrow \ln|f(0)| = \ln 2 + C \Leftrightarrow C = 0$.

Do đó $\ln|f(x)| = \ln|x+2| \Leftrightarrow |f(x)| = |x+2|$.

Vì $f(x) > 0$ trên đoạn $[0;2]$ nên $f(x) = x + 2, \forall x \in [0;2]$.

Ta có $f(1) = 3$, $f(2) = 4 \Rightarrow f^2(1) + f^2(2) = 3^3 + 4^2 = 25$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f'(x) - 2018f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2019x}$. Biết $f(0) = -1$, tính $f(1)$.

A. e^{2018}. **B.** e^{2019}. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.

Từ $f'(x) - 2018f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2019x}$. Nhân hai vế cho e^{-2018x} ta được

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f'(x) - 2018\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x)\right)' = xe^{x} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) = \int xe^{x}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) = xe^{x} - e^{x} + C. \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $1 \cdot f(0) = 0 \cdot \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 + C \Rightarrow C = 0$. Do đó $\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}$.

Thay $x = 1$ ta có $\mathrm{e}^{-2018} \cdot f(1) = 1\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 \Rightarrow f(1) = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot \mathrm{e}^{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 5x + 5)\,\mathrm{e}^{x}$. Giá trị của $2a + 3b + c$ là

A. 6. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x + (2ax + b)\,\mathrm{e}^x = (ax^2 + (2a + b)\,x + b + c)\,\mathrm{e}^x$.
Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 5 \\ b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2. \end{cases}$$

Vậy $2a + 3b + c = 13$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho $I_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \cdots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng

A. $\sum\limits_{r=1}^{9} \dfrac{(\tan x)^r}{r} + C$. **B.** $\sum\limits_{r=1}^{9} \dfrac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$. **C.** $\sum\limits_{r=1}^{10} \dfrac{(\tan x)^r}{r} + C$. **D.** $\sum\limits_{r=1}^{10} \dfrac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$.

Lời giải.

Có $I_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x$

$= \int \tan^{n-2} x\,\mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2} = \dfrac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} + C.$

Suy ra $I_{n-2} + I_n = \dfrac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} + C$ (*)
Từ đẳng thức (*), cho n nhận lần lượt các giá trị $2, 3, \ldots, 10$ rồi cộng vế với vế các đẳng thức thu được, ta có kết quả $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \cdots + I_8) + I_9 + I_{10} = \sum\limits_{r=1}^{9} \dfrac{(\tan x)^r}{r} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x) \cdot f^2(x) + 2[f'(x)]^2 \cdot f(x) = 2x - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị $P = f^3(2)$.

A. $P = -\dfrac{11}{3}$. **B.** $P = -6$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = -\dfrac{23}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f''(x) \cdot f^2(x) + 2[f'(x)]^2 \cdot f(x) = 2x - 3$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [f'(x) \cdot f^2(x)]' = 2x - 3$ (1).
Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$(1) \Rightarrow \int \left[f'(x) \cdot f^2(x)\right]' \mathrm{d}x = \int (2x - 3)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f'(x) \cdot f^2(x) = x^2 - 3x + C.$

Với $x = 0 \Rightarrow f'(0) \cdot f^2(0) = C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f'(x) \cdot f^2(x) = x^2 - 3x + 1.$
Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$f'(x) \cdot f^2(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \int f'(x) \cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - 3x + 1)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} f^3(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + x + C.$

Với $x = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} f^3(0) = C \Rightarrow C = \dfrac{1}{3} \Rightarrow f^3(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f^3(2) = -3.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 5x \cos x$ là

A. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}\sin 6x + \dfrac{1}{4}\sin 4x\right)$. **B.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}\cos 6x + \dfrac{1}{4}\cos 4x\right)$.

C. $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 6x}{6} + \dfrac{\sin 4x}{4}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{5}\sin 5x \sin x$.

Lời giải.

Ta có $\cos 5x \cos x = \dfrac{1}{2}\left[\cos(6x) + \cos(4x)\right]$.

$$\Rightarrow \int \cos 5x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left[\cos(6x) + \cos(4x)\right] \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 6x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2 + 2$. **B.** $\ln 2 + 2$. **C.** $\ln 2 + 1$. **D.** $2\ln 2 + 1$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x) = \ln|\ln x| + C = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Theo đầu bài $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2 \Rightarrow \ln\left(-\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$.

Và $F(e) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln x) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$.

Từ đó ta có $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Từ đó suy ra $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2) = \ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 2 + \ln(\ln \mathrm{e}^2) + \ln 2 = 3\ln 2 + 2$.

Vậy $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2) = 3\ln 2 + 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho biết $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - \dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C$. **B.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

C. $x\sin x + \cos x + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - \dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{(x^2+a)^2}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x), \quad \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2ax^2 + a^2}{x^2}, \quad \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2}, \quad \forall x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a = 1$$

Suy ra $g(x) = x\cos x$

Suy ra $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019\cdot 2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x^2+x)^2}\mathrm{d}(x^2+x)=-\frac{1}{x^2+x}+C.$

Mà $F(1)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}+1=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+1.$

Ta có

$$\begin{aligned} S &= F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(2019)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}+1\right)\\ &= 2019+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right)=2019-\frac{1}{1}+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. B	3. D	4. D	5. D	6. C	7. B	8. C	9. C	10. D	11. A
12. B	13. D	14. C	15. C	16. D	17. B	18. D	19. A	20. B	21. D
22. C	23. B	24. A	25. D	26. C	27. D	28. B	29. A	30. C	31. A
32. C	33. C	34. B	35. B	36. C	37. B	38. B	39. D	40. A	41. A
42. D	43. C	44. B	45. A	46. C	47. A	48. A	49. C	50. C	

BÀI 2 TÍCH PHÂN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là *tích phân* từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$, ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ta còn dùng ký hiệu $F(x)\big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$.

Ta gọi $\displaystyle\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)\,\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

⚠ ☑ *Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$, ta quy ước* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0;\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

☑ *Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể ký hiệu bởi* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *hay* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. *Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t.*

Tính chất 1. ① $\displaystyle\int_a^b k.f(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

③ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Tính tích phân cơ bản

Phương pháp giải. Để tính các tích phân ở dạng này ta kết hợp bảng nguyên hàm và các tính chất cơ bản để tìm nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân, sau đó dùng định nghĩa tích phân để tính ra kết quả.

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^1 (x^3+2x^2+1)\,\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

a. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

b. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^3+2x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{23}{12}.$

c. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2.\ln|x+1|\Big|_0^1 = 2\ln 2.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(2x^3-5x+7\right)\mathrm{d}x$

b. $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x$

c. $I = \displaystyle\int_0^2 \left(x^4-4x^2+2\right)\mathrm{d}x$

d. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \left(\frac{x^5}{3}-\frac{3}{2}x^3-3x^2+1\right)\mathrm{d}x$

e. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2(x-1)(x-2)\,\mathrm{d}x$

f. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

g. $I = \displaystyle\int_1^2 \left(x^{\frac{3}{4}}+2x^{-\frac{1}{2}}-3\right)\mathrm{d}x$

h. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x$

i. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x$

j. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

k. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

l. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\tan^2 x+2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

m. $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$

n. $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{3}{\mathrm{e}^{4x}}\,\mathrm{d}x$

o. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(4^x-3.7^x\right).2^x\,\mathrm{d}x$

p. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}-2.\mathrm{e}^{-3x}\right)^2\mathrm{d}x$

q. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

r. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{4x-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

s. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2x^2+3x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

t. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-4x^2+2}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

a. $I=\left(\dfrac{x^4}{2}-5\dfrac{x^2}{2}+7x\right)\Big|_0^1=5.$

b. $I=\left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3}x\right)\Big|_1^2=-\dfrac{13}{6}.$

c. $I=\left(\dfrac{x^5}{5}-4\dfrac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_0^2=-\dfrac{4}{15}.$

d. $I=\left(\dfrac{x^6}{18}-\dfrac{3x^4}{8}-x^3+x\right)\Big|_{-1}^0=\dfrac{23}{72}.$

e. $I=\displaystyle\int_{-1}^1\left(x^4-3x^3+2x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^5}{5}-3\dfrac{x^4}{4}+2\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1=\dfrac{26}{15}.$

f. $I=\displaystyle\int_1^2\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=\left(2x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^2=\sqrt{2}.$

g. $I=\left(\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{\frac{1}{2}}-3x\right)\Big|_1^2=-\dfrac{53}{7}+\dfrac{8}{7}2^{\frac{3}{4}}+4\sqrt{2}.$

h. $I=\displaystyle\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}-8\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-8x\right)\Big|_0^1=\dfrac{2}{5}\left(4\sqrt{2}-21\right).$

i. $I=\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

j. $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi}{12}.$

k. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x-1\right)\mathrm{d}x=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}.$

l. $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{3}{\cos^2 x}+\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\left(3\tan x-2\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}-1.$

m. $I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x-x\right)\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=1-\ln\left(\dfrac{3}{2}\right).$

n. $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2}3\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-4x}\right)\Big|_0^{\ln 2}=\dfrac{45}{64}.$

o. $I=\displaystyle\int_0^1\left(8^x-3.14^x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{8^x}{\ln 8}-\dfrac{3.14^x}{\ln 14}\right)\Big|_0^1=\dfrac{7}{\ln 8}-\dfrac{39}{\ln 14}.$

p. $I=\displaystyle\int_0^1\left(\mathrm{e}^{6x}+4.\mathrm{e}^{-6x}-4\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{6x}}{6}-\dfrac{4.\mathrm{e}^{-6x}}{6}-4x\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{6}\left(-21-\dfrac{4}{\mathrm{e}^6}+\mathrm{e}^6\right).$

q. $I=\ln|x+1|\Big|_1^2=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right).$

r. $I=\displaystyle\int\limits_1^2\left(2-\frac{3}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_1^2=2-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$

s. $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^0\left(2x+5+\frac{6}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left(x^2+5x+6\ln|x-1|\right)\Big|_{-1}^0=6\ln 2-4.$

t. $I=\displaystyle\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{15}{8}x+\frac{15}{16}+\frac{17}{32(2x+1)}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{12}-\frac{15x^2}{16}+\frac{15}{16}x+\frac{17}{64}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1$

$=\dfrac{1}{24}+\dfrac{17}{64}\ln 3.$

□

DẠNG 2. Phương pháp đổi biến dạng 1

Phương pháp giải. Để tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, ta thực hiện các bước:

Bước 1 Chọn:

- Phân tích $g(x)\,\mathrm{d}x=f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x=f[u(x)]\,\mathrm{d}[u(x)]$.
- Đặt $t=u(x)$.

Bước 2 Đổi cận:

- Với $x=a$ thì $t=u(a)$.
- Với $x=b$ thì $t=u(b)$

Bước 3 Khi đó: $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{u(a)}^{u(b)}f(t)\,\mathrm{d}t.$

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3(1+x^4)^3\,\mathrm{d}x;$ ② $\displaystyle\int\limits_0^1 x^5(1-x^3)^6\,\mathrm{d}x;$

Lời giải.

① Đặt $t=1+x^4\Rightarrow \mathrm{d}t=4x^3\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}t}{4}=x^3\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận:

- ☑ Với $x=0$ thì $t=1$;
- ☑ Với $x=1$ thì $t=2$.

Khi đó, ta có

$$\int\limits_0^1 x^3(1+x^4)^3\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 t^3\frac{\mathrm{d}t}{4}=\frac{1}{4}\int\limits_1^2 t^3\,\mathrm{d}t=\frac{1}{16}t^4|_1^2=\frac{15}{16}.$$

② Đặt $t=1-x^3$, suy ra $\mathrm{t}=-3x^2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

☑ Với $x=0$ thì $t=1$.

☑ Với $x=1$ thì $t=0$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^1 x^5(1-x^3)^6\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\limits_1^0(1-t)t^6\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^1(1-t)t^6\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^1(t^6-t^7)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^8}{8}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{68}.$$

□

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

② $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

① Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

☑ Với $x=0$ thì $t=1$.

☑ Với $x=\sqrt{3}$ thì $t=2$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 t\cdot t\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_1^2=\frac{7}{3}.$$

② Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=-x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

☑ Với $x=-1$ thì $t=0$.

☑ Với $x=0$ thì $t=1$.

Khi đó:

$$\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 -t\cdot t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 -t^2\,\mathrm{d}t=-\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=-\frac{1}{3}.$$

□

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$;

② $\displaystyle\int\limits_{-1}^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

① Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=x^2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

☑ Với $x=0$ thì $t=1$.

☑ Với $x=2$ thì $t=3$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\limits_1^3 \mathrm{d}t=\frac{2}{3}t\Big|_1^3=\frac{4}{3}.$$

② Đặt $t=\sqrt{x^3+1} \Rightarrow t^2=x^3+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=x^2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=-1$ thì $t=0$.
- ☑ Với $x=2$ thì $t=3$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 t\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{9}t^3\Big|_0^3=6.$$

□

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^1 3x\cdot e^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$. ② $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

① Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{2}=x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=0$ thì $t=2$.
- ☑ Với $x=1$ thì $t=3$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^1 3x\cdot e^{x^2+2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 \frac{3}{2}e^t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}e^t\Big|_2^3=\frac{3}{2}(e^3-e^2).$$

② Đặt $t=e^x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=1$ thì $t=e-1$.
- ☑ Với $x=2$ thì $t=e^2-1$.

Khi đó:

$$\int\limits_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{e-1}^{e^2-1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\Big|_{e-1}^{e^2-1}=\ln\left|\frac{e^2-1}{e-1}\right|=\ln|e+1|.$$

□

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$. ② $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

① Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}t$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{4}$ thì $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $t=1$.

Khi đó:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} e^{t}\,\mathrm{d}t = e^{1} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

② Ta có:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{5}} x^3\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^3\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

③ $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

④ $\displaystyle\int\limits_1^{5} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x.$

⑤ $\displaystyle\int\limits_{-3}^{1} x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$

⑥ $\displaystyle\int\limits_{-1}^{3} x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

① Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$ và $x^2 = t^2-4$. Đổi cận:

- ☑ Với $x = 0$ thì $t = 2$.
- ☑ Với $x = \sqrt{5}$ thì $t = 3$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{\sqrt{5}} x^3\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^{3} (t^2-4)t\cdot t\,\mathrm{d}t = \int\limits_2^{3} (t^4-4t^2)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_2^3 = \frac{253}{15}.$$

② Đặt $t = \sqrt[3]{1-x^2} \Rightarrow t^3 = 1-x^2 \Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Khi $x = 0$ thì $t = 1$.
- ☑ Khi $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{1} x^3\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^{0} (1-t^3)\cdot t\cdot\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{1} (1-t^3)\cdot t\cdot\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int\limits_0^{1} t^3 - t^6\,\mathrm{d}t = \frac{9}{56}.$$

③ Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x$ và $x = \dfrac{t-1}{2}$. Đổi cận:

- ☑ Với $x = 0$ thì $t = 1$.

☑ Với $x=1$ thì $t=3$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \frac{t-1}{2}\cdot\frac{1}{t^3}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{4}\int\limits_1^3 \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{18}.$$

④ Đặt $t=\sqrt{2x-1} \Rightarrow t^2=2x-1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$ và $x=\dfrac{t^2+1}{2}$. Đổi cận:

☑ Với $x=1$ thì $t=1$.

☑ Với $x=5$ thì $t=3$.

Khi đó:

$$\int\limits_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{t^2+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 (t^2+1)\,\mathrm{d}t = \frac{16}{3}.$$

⑤ Đặt $t=\sqrt{1-x} \Rightarrow t^2=1-x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x \Rightarrow -2t\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

☑ Với $x=-3$ thì $t=2$.

☑ Với $x=1$ thì $t=0$

Khi đó:

$$\int\limits_{-3}^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^0 (1-t)^2\cdot t\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^2 (t^2-t^4)\,\mathrm{d}t = -\frac{112}{15}.$$

⑥ Đặt $t=\sqrt{2x+3} \Rightarrow t^2=2x+3 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}x$ và $x=\dfrac{t^2-3}{2}$. Đổi cận:

☑ Với $x=-1$ thì $t=1$.

☑ Với $x=3$ thì $t=3$.

Khi đó:

$$\int\limits_{-1}^3 x\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{t^2-3}{2}\right)\cdot t\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 (t^4-3t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{56}{5}.$$

□

Bài 2. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

③ $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cdot\cos^3 x}\,\mathrm{d}x.$

④ $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x.$

⑤ $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2 x)^3\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

⑥ $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x+nx)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

① Biến đổi tích phân đã cho về dạng:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{1+\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin 2x\cdot\cos 2x}{3+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\cos 2x \Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=0$ thì $t=1$.
- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{4}$ thì $t=0$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin 2x\cdot\cos 2x}{3+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^0 \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{3+t} = -2\int\limits_1^0 \frac{t\,\mathrm{d}t}{3+t} = -2\int\limits_1^0 \left(1-\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t = 2+6\ln\frac{3}{4}.$$

② Biến đổi tích phân đã cho về dạng:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x-\sin^4 x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=0$ thì $t=0$.
- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $t=1$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x-\sin^4 x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(t^2-t^4\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{15}.$$

③ Biến đổi tích phân đã cho về dạng:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cdot\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x\cdot\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$$

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{4}$ thì $t=1$.
- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{3}$ thì $t=\sqrt{3}$.

Khi đó:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+t^2}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\sqrt{3}+1.$$

④ Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(1+t^2\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Đổi cận:

- ☑ Với $x=0$ thì $t=0$.
- ☑ Với $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $t=1$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3} = \frac{1}{6}.$$

⑤ Đặt $t = 1+\sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \sin 2x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận:

- ☑ Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- ☑ Với $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $t = 2$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2 x)^3 \cdot \sin 2x\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{15}{4}.$$

⑥ Đặt $t = 2\pi - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Đổi cận:

- ☑ Với $x = 0$ thì $t = 2\pi$.
- ☑ Với $x = 2\pi$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{2\pi}^0 \sin\left[\sin(2\pi - t) + n(2\pi - t)\right]\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \sin(-\sin t - nt)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin t + nt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)\,\mathrm{d}x = -I. \end{aligned}$$

Vậy $I = 0$. □

Bài 3. Tính các tích phân sau:

① $\displaystyle\int\limits_0^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{4-x^2}\cdot \ln\frac{2+x}{2-x}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

① Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Đổi cận:

- ☑ Với $x = 1$ thì $t = 0$.
- ☑ Với $x = e$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}.$$

② Đặt $t = \ln\dfrac{2+x}{2-x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{4-x^2}$. Đổi cận:

☑ Với $x=0$ thì $t=0$.

☑ Với $x=1$ thì $t=\ln 3$.

Khi đó:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{4-x^2}\cdot \ln\frac{2+x}{2-x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\ln 3} t\,\mathrm{d}t=\frac{\ln^2 3}{2}.$$

□

DẠNG 3. Phương pháp đổi biến dạng 2

Phương pháp giải.

☑ $R\left(a^2-x^2\right)$ thì đặt $\begin{bmatrix} x=a\sin t; t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x=a\cos t; t\in[0;\pi] \end{bmatrix}$

☑ $R\left(a^2+x^2\right)$ thì đặt $x=a\tan t; t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

☑ $R\left(x^2-a^2\right)$ thì đặt $x=\dfrac{a}{\cos t}; t\in[0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Lời giải.

Đặt $x=\tan t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

□

Ví dụ 2. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+1}.$$

Đặt $x-2=\tan t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

x	1	2
t	$-\frac{\pi}{4}$	0

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}t=t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{\pi}{4}$$ □

Ví dụ 3. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lời giải.

Đặt $x=\sin t; t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

x	0	$\frac{1}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{6}$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}.$$ □

Ví dụ 4. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Lời giải.

Đặt $x=2\sin t; t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{6}$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{8\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}4\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}2(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(2t-\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ □

Ví dụ 5. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}; t \in [0;\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2}\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$.

x	$\sqrt{2}$	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\dfrac{2}{\cos^2 t} - 2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\tan t \cdot \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\tan t - t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Lời giải.

Đặt $x = \tan t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = (1 + \tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

x	1	$\sqrt{3}$
t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t}{\tan t\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t}{\tan t} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

Đặt $u = \cos t \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$

t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
u	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$I = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$$ □

Bài 2. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_2^4 \frac{2x-1}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_2^4\frac{2x-1}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^4\frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4\frac{3}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x=A+B$$

Có $A=\displaystyle\int\limits_2^4\frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^4\frac{\mathrm{d}(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}=\ln|x^2-4x+8|\Big|_2^4=\ln 8-\ln 4=\ln 2$

$$B=\int\limits_2^4\frac{3}{(x-2)^2+4}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $x-2=2\tan t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=2(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

x	2	4
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$B=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{6(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t}{4(1+\tan^2 t)}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{8}.$$

Vậy $I=A+B=\ln 2+\dfrac{3\pi}{8}$. □

Bài 3. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $x=\sin t;t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{8}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$ □

Bài 4. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $x=3\sin t;t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=3\cos t\,\mathrm{d}t$.

x	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3
t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)\,\mathrm{d}t=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}$$ □

Bài 5. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $x=2\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

x	-1	$\sqrt{3}$
t	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin^2 t+6\sin t-1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(4\sin^2 t+6\sin t-1)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2(1-\cos 2t)+6\sin t-1)\,\mathrm{d}t$$
$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(-2\cos 2t+6\sin t+1)\,\mathrm{d}t=(-\sin 2t-6\cos t+t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}-3+2\sqrt{3}$$ □

Bài 6. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{2}^{4}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{2}^{4}\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x^2-x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{4}(x+\sqrt{x^2-4})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_2^4+\int\limits_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x\right)$$

Đặt $x=\dfrac{2}{\cos t};\ t\in[0;\pi]\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

x	2	4
t	0	$\frac{\pi}{3}$

$$\int\limits_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\tan t\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin^2 t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$

t	0	$\frac{\pi}{3}$
u	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t \cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{u}{1-u^2}\right)^2 \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)^2 \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{2}{(1-u)(1+u)}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln|1-u| - \ln|1+u|\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{4}\ln(7-4\sqrt{3})$$

Vậy $I = \frac{1}{4}\left(6 + 4\sqrt{3} + \ln(7-4\sqrt{3})\right)$. □

DẠNG 4. Tích phân từng phần

Phương pháp giải.

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x = u(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x \text{ hay } \int_a^b u\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

☑ Tích phân dạng $\int_a^b \mathrm{P}(x)\cdot\ln(ax+b)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{a}{ax+b}\mathrm{d}x \\ v = \displaystyle\int \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x \end{cases}$

Ta có $\int_a^b u\cdot\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\cdot\mathrm{d}u.$

☑ Tích phân dạng $\int_a^b \mathrm{P}(x)\cdot\sin(ax+b)\mathrm{d}x$; $\int_a^b \mathrm{P}(x)\cdot\cos(ax+b)\mathrm{d}x$; $\int_a^b \mathrm{P}(x)\cdot\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{P}(x) \\ \mathrm{d}v = \begin{bmatrix} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b)\cdot \mathrm{d}x \\ \mathrm{e}^{ax+b} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{P}'(x)\mathrm{d}x \\ v = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) \\ \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) \\ \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} \end{bmatrix} \end{cases}$

Ta có $\displaystyle\int_a^b u\cdot \mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\cdot \mathrm{d}u.$

Ví dụ 1. Biết $I = \displaystyle\int_1^2 2x\ln x\mathrm{d}x = a\ln 2 - \frac{3}{b}$. Tính $a-b$?

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = 2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow I = x^2\ln x\big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 x\mathrm{d}x = \left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow a = 4, b = 2$

Vậy $a-b=2$. □

Ví dụ 2. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho $m\ln m - \displaystyle\int_1^m \ln x\mathrm{d}x$ không quá 2018?

Lời giải.

Xét $I = \displaystyle\int_1^m \ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I = x\ln x\Big|_1^m - \displaystyle\int_1^m \mathrm{d}x = m\ln m - m + 1.$

$\Rightarrow m\ln m - \displaystyle\int_1^m \ln x\mathrm{d}x = m-1.$

Để $m\ln m - \displaystyle\int_1^m \ln x\mathrm{d}x$ không quá 2018 khi và chỉ khi $m-1 \le 2018 \Rightarrow m \le 2019$.

Vậy có tất cả 2019 số nguyên dương thỏa đề bài. □

Ví dụ 3. Biết $I=\int\limits_1^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x=a\ln 3+b$. Tính $a+b$?

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=x^2-1\end{cases}$

$\Rightarrow I=(x^2-1)\ln(x+1)\Big|_1^2-\int\limits_1^2(x-1)\mathrm{d}x=3\ln 3+\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_2^1=3\ln 3-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=3,b=-1\Rightarrow a+b=2$. □

Ví dụ 4. Biết $I=\int\limits_1^2(x^2-1)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{a\ln 4+b}{9}$. (với a,b là số nguyên). Tính $a+b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=(x^2-1)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^3}{3}-x\end{cases}$

$\Rightarrow I=\left[\dfrac{x^3}{3}-x\right]\ln x\Big|_1^2-\int\limits_1^2\left[\dfrac{x^2}{3}-1\right]\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2-\left[\dfrac{1}{9}x^3-x\right]\Big|_1^2=\dfrac{6\ln 2+2}{9}=\dfrac{3\ln 4+2}{9}$.

Vậy $a=3,b=2\Rightarrow a+b=5$. □

Ví dụ 5. Biết tích phân: $I=\int\limits_0^1(2x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$. Tính a^2+b.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=2x+3\\ dv=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}$

$\Rightarrow I=(2x+3)\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=3\mathrm{e}-1$. Suy ra $a=3,b=-1$.

Vậy $a^2-b=10$. □

Ví dụ 6. Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{a}+b$. Tính $S=a^2-3b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x+2\\ dv=\cos x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x.\end{cases}$

$\Rightarrow I = (x+2)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [(x+2)\sin x + \cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} + 3.$

Vậy $S = a^2 - 3b = -5$. □

Ví dụ 7. Biết $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{a} + \dfrac{b}{c}$, với a, b, c nguyên dương ; $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $a - b^2 - 2c^2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = (1+\sin 2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = x - \dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left[x\left(x - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[x - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right]\mathrm{d}x$

$= \left[x\left(x - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right) - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}x\cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{\pi^2}{32} + \dfrac{1}{4}.$

Suy ra $a = 32, b = 1, c = 4$.

Vậy $a - b^2 - 2c^2 = -1$. □

Ví dụ 8. Biết $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm $I = \int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = x\mathrm{e}^x = f(x)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$

Do đó, $I = \int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$

$\Rightarrow I = (1-x)\mathrm{e}^x\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_1^2 = -\mathrm{e}.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết $I = \int\limits_1^e (x-1)\left[\ln x - 1\right]\mathrm{d}x = \dfrac{a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c}{4}$. Tính $a + b + c$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x) - 1 \\ \mathrm{d}v = x - 1\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} - x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)[\ln x - 1]\Big|_1^e - \displaystyle\int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)[\ln x - 1]\Big|_1^e - \left(\frac{x^2}{4} - x\right)\Big|_1^e = \frac{-e^2 + 4e - 5}{4}.$

Suy ra $a = -1, b = 4, c = -5$.

Vậy $a + b + c = -2$. □

Bài 2. Biết $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = 2\ln a - \frac{1}{b}$ Tính $a - b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = (2x+1)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = x^2 + x \end{cases}$

$\Rightarrow I = (x^2 + x)\ln(x+1)\big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$

Vậy $a - b = 0$. □

Bài 3. Biết $I = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln 3 + \frac{1}{b}$ Tính $a + b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+2}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left(\dfrac{x^2}{2} - 2\right)\ln(x+2)\big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x-2}{2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{1}{4}$. Suy ra $a = 3, b = 4$.

Vậy $a + b = 7$. □

Bài 4. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\ln x\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$.

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_1^2 \frac{-3}{x^4}\ln x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x^3}\ln x\right]\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x^3}\ln x\right]\Big|_1^2 + \frac{1}{3x^3}\Big|_1^2 = \frac{1}{8}\ln 2 - \frac{7}{24}.$ □

Bài 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$, biết $F(1) = 1, F(3) = 3$ và $\displaystyle\int_1^3 \frac{F(x)}{3x-1}\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \displaystyle\int_1^3 \ln(3x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3x-1) \\ \mathrm{d}v = f(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{3}{3x-1}\mathrm{d}x \\ v = F(x) \end{cases}$. Khi đó

$$I = F(x)\ln(3x-1)\Big|_1^3 - 3\int\limits_1^3 \frac{F(x)}{3x-1}\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 12.$$

□

Bài 6. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$ và $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin 2x$.

Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin 2x$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $F'(x) = 2x = f(x)\sin 2x$

$I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin 2x$ Đặt $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\cos 2x\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = f(x)\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \pi - \frac{3}{2}.$ □

Bài 7. Biết $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin x + \cos x\right)\mathrm{d}x = \frac{(a-\sqrt{3})\pi}{6} + \frac{b-\sqrt{c}}{2}$. Tính $A = a + b^2 - c$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x + \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left[x\left(\sin x - \cos x\right)\right]\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \cos x\right)\mathrm{d}x$

$= \left(x\sin x - x\cos x + \sin x + \cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{(4-\sqrt{3})\pi}{6} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. Từ đó suy ra $a = 4, b = 1, c = 3$.

Vậy $A = 14$. □

Bài 8. Biết $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}-\dfrac{b}{c}$, với $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=\sin x\end{cases}$

$\Rightarrow I=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $a=\pi, b=1, c=2$.

Vậy $P=\pi^2+5$. □

Bài 9. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{a}+\ln b$. Tính a^2-b.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=\tan x\mathrm{d}x\end{cases}$

$\Rightarrow\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2$.

Suy ra $a=\sqrt{3}, b=2$.

Vậy $a^2-b=1$. □

Bài 10. Biết $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{a}-\dfrac{\pi}{b\sqrt{3}}+\ln\sqrt{\dfrac{c}{2}}$. Tính $a-b+c$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=-\cot x\end{cases}$

$I=-x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x\mathrm{d}x=-x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}+\ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Suy ra $a=4, b=3, c=3$.

Vậy $a-b+c=4$. □

Bài 11. Cho $f(x)$ thỏa $\displaystyle\int\limits_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$, $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 2f(1) - f(0) - 10 = -8.$ □

Bài 12. Cho $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{e}^2 + b$ với a, b là số hữu tỉ. Tính tổng $P = a+b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$I = \frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}.$$

Vậy $a = b = \dfrac{1}{4} \Rightarrow P = \dfrac{1}{2}$. □

Bài 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^2 (x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $f(0) = 1$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó

$$\int_0^2 (x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x = (x-2)f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -7.$$

□

Bài 14. Biết $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cdot\cos x\mathrm{d}x = \frac{a\mathrm{e}^b - 1}{c}$. Tính $a+b-c$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ dv = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = (\mathrm{e}^x\sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ dv = \sin x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \mathrm{e}^x \cos x \Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \cos x \mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2I = -\mathrm{e}^{\pi} - 1 \Rightarrow I = \dfrac{-\mathrm{e}^{\pi} - 1}{2}.$

Suy ra $a = -1, b = \pi, c = -1.$

Vậy $a + b - c = \pi.$ □

DẠNG 5. Tích phân của hàm phân thức hữu tỉ

Phương pháp giải. Chú ý công thức:

① $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$ $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C.$

② $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C.$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Ta có $I = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2.$ □

Ví dụ 2. Biết rằng $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x = a - \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tích $P = a.b.$

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = (x - \ln x)\Big|_1^2 \Leftrightarrow I = 1 - \ln 2.$

Suy ra $a = 1; b = 2$ do đó $P = 2$ □

Ví dụ 3. Cho tích phân $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3 - x^2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$, với a, b, $c \in \mathbb{Q}$. Tính $a + b + c.$

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{1}{x^3 - x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$. Ta tìm được $A = -1; B = -1; C = 1$ do đó

$I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3 - x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left(-\ln x + \frac{1}{x} + \ln(x-1)\right)\Big|_2^3 = -\ln 3 + 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$

Do đó $a = -1; b = 2; c = -\dfrac{1}{6}$, suy ra $a + b + c = \dfrac{5}{6}.$

□

Ví dụ 4. Biết rằng $\displaystyle\int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - b$.

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{5x+7}{x^2+3x+2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2}$. Ta tìm được $A = 2; B = 3$ do đó

$$I = \int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(2\ln(x+1) + 3\ln(x+2)\right)\Big|_0^2 = 2\ln 3 + 3\ln 2.$$

Do đó $a = 3; b = 2$ suy ra $S = 1$. □

Ví dụ 5. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có biểu thức $\dfrac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9} = 1 + \dfrac{x+1}{x^2+2x+9} = 1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+2}{x^2+2x+9}$. Do đó

$$I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+9}\right)\mathrm{d}x = \left(x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+9)\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

□

Ví dụ 6. Tính $I = \displaystyle\int_0^b \frac{a-x^2}{(a+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt{a}\tan t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$. Khi $x = 0$ thi $t = 0$, khi $x = b$ thì $t = \alpha$ với $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = b$. Khi đó

$$I = \int_0^b \frac{a - a\tan^2 t}{(a + a\tan^2 t)^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int_0^b \frac{\cos 2t}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin 2t}{2\sqrt{a}}\Big|_0^\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{a}(1+\tan^2\alpha)} = \frac{b}{a+b^2}.$$

□

Ví dụ 7. Biết $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

Lời giải.

Biểu thức: $\dfrac{2}{x^3+x^2} = \dfrac{2}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{(x+1)}$. Tìm được $A = -2, B = 2, C = 2$.

Do đó: $I = 2\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x+1|\right)\Big|_1^2 = 2\ln 3 - 4\ln 2 + 1.$

Suy ra: $S = a + b + c = -1$. □

Ví dụ 8. Cho $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \ln a - \frac{1}{6}$, với a là số hữu tỉ. Tính giá trị của $4a$.

Lời giải.

Biểu thức: $\dfrac{x^2+1}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{x+1}$. Tìm được $A=0; B=-1; C=1; D=-1$.

Do đó: $I = \displaystyle\int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{x} + \ln(x-1) - \ln(x+1)\right)\Big|_2^3 = -\frac{1}{6} + \ln\frac{3}{2}$.

Suy ra $a = \dfrac{3}{2}$ vậy $4a = 6$. □

Ví dụ 9. Biết rằng $\displaystyle\int_4^5 \frac{8}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 7 + c\ln 3$ với a, b, c là những số nguyên. Hãy tính $S = a - b + c$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_4^5 \frac{8}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 2\int_4^5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = 2\left(\ln(x-1) - \ln(x+3)\right)\Big|_4^5$

$\Rightarrow I = -2\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 7$ suy ra $a=-2; b=2; c=-2$. Vậy $S=-6$. □

Ví dụ 10. Biết $\displaystyle\int_4^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = 2a + b - 5c$.

Lời giải.

$$\int_4^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int_4^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int_4^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_4^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = -\ln 2 + 2\ln 5 - \ln 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow S = 2a + b - 5c = 5.$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5 + d\ln 7$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $P = ab + cd$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \int_4^5 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln(x+1) - \ln(x+2)\right)\Big|_4^5$

$\Rightarrow I = 2\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 7 - \ln 5$.

Do đó $a = b = 2; c = d = -1$ suy ra $P = 5$. □

Bài 2. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = a\ln 2 + b\ln 3$, với a, b là các số nguyên. Tính $a+b$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x-3)} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$.

Do đó $a=2; b=-1$ suy ra $a+b=1$. □

Bài 3. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2, (a,b\in\mathbb{Z})$.Tính $a+b$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x}{x+3}\right|\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 2$.

Do đó, $a=1; b=-1$ suy ra $a+b=0$. □

Bài 4. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = a\ln\frac{5}{3} - b$, trong đó a và b là các số hữu tỷ. Tính giá trị $a-b$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x+1} = x-2+\dfrac{3}{2x+1}$. Do đó

$$I = \int\limits_1^2 \left(x-2+\frac{3}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln\frac{5}{3}.$$

Vậy $a+b=2$. □

Bài 5. Cho số thực $m>0$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^m \frac{1}{(2x+1)^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{16}$. Tìm m.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^m \frac{1}{(2x+1)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4(2x+1)^2}\Big|_0^m = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right) = \frac{3}{16}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{3}{2} \text{ loại} \end{array}\right.$$

□

Bài 6. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x^3}{2x+3}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^3}{2x+3} = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{8} - \dfrac{27}{8(2x+3)}$.

Do đó $I = \left(\dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{9}{8}x - \dfrac{27}{16}\ln|2x+3|\right)\Big|_1^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{27}{16}\ln\dfrac{7}{5}$. □

Bài 7. Cho $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $a + 2b$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-2 - \dfrac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = (-2x - 7\ln|x-2|)\Big|_0^1 = -2 + 7\ln 2$.

Suy ra $a = 7; b = -2$, vậy $a + 2b = 3$. □

Bài 8. Biết $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x}{6x^2+5x+1}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{m}{n}$ trong đó m, n là số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - n$.

Lời giải.

Ta có biểu thức $\dfrac{x}{6x^2+5x+1} = \dfrac{x}{(2x+1)(3x+1)} = \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{3x+1}$. Ta tìm được $A = 1; B = -1$, suy ra

$I = \left(\dfrac{1}{2}\ln|2x+1| - \dfrac{1}{3}\ln|3x+1|\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 3 - \dfrac{1}{3}\ln 4 = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{27}{16}$.

Vậy $m - n = 27 - 16 = 11$. □

Bài 9. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$. Tính $S = a^2 + b^2$.

Lời giải.

Ta có biểu thức $\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6} = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{x+3}$ suy ra

$I = (3\ln|x+2| + \ln|x+3|)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$.

Do đó, $a = -1; b = 2$ nên $S = 5$. □

Bài 10. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 \dfrac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}\mathrm{d}x = a + \dfrac{\pi}{b}$. Tính $H = b - a$.

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4} = x + 2 + \dfrac{1}{x^2+4}$. Do đó, $I = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_0^2 + \displaystyle\int_0^2 \dfrac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x = 6 + J$.

Tính $J = \displaystyle\int_0^2 \dfrac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$. Đặt $x = 2\tan t$, ta có $J = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\dfrac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{8}$.

Do đó $I = 6 + \dfrac{\pi}{8}$ suy ra $a = 6; b = 8$ vậy $H = 2$. □

Bài 11. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$. Khi đó, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t-1}{t^3}\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}$. □

Bài 12. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 2$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = ab$.

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$. Tìm được $A = B = \dfrac{1}{4}; C = -\dfrac{1}{2}$, suy ra

$I = \left[\dfrac{1}{4}\ln(x-1)(x+1) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right]\Big|_2^3 = \dfrac{3}{4}\ln 2$.

Vậy $P = ab = 12$. □

Bài 13. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4x}{4x^2-4x+1} = \dfrac{4x}{(2x-1)^2}$. Đặt $t = 2x - 1$ suy ra $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{2(t+1)}{t^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}t =$

$\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -2$. □

DẠNG 6. Lớp các tích phân đặc biệt

Phương pháp giải.

☑ Tính chất 1:

Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $[-a; a]$, $a > 0$ thì $I = \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

☑ Tính chất 2:

Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên đoạn $[-a; a]$ thì $I = \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

☑ Tính chất 3:

Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $I = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a^x + 1} = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ với $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+$ và $a > 0$.

☑ Tính chất 4:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$

☑ Tính chất 5:

Nếu $f(x)$ liên tục và $f\left(a+b-x\right)=f(x)$ thì $I=\displaystyle\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

☑ Tính chất 6:

Nếu $f(x)$ liên tục và $f\left(a+b-x\right)=-f(x)$ thì $I=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

☑ Tính chất 7:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0;2a]$ với $a>0$ thì $I=\displaystyle\int\limits_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{a}\left[f(x)+f\left(2a-x\right)\right]\,\mathrm{d}x.$

☑ Tính chất 8:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì $I=\displaystyle\int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ví dụ 1. Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $\left[-a;a\right]$, $a>0$ thì $I=\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

Lời giải.

Biến đổi I về dạng:

Ta có: $I=\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=-a\Rightarrow t=a; x=0\Rightarrow t=0.$

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-t)=-f(t).$

Khi đó: $I_1=-\displaystyle\int\limits_{-a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t=-\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Từ đó tìm được $I=0.$ □

Ví dụ 2. Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên đoạn $[-a;a]$ thì $I=\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Biến đổi I về dạng:

Ta có: $I=\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=-a\Rightarrow t=a;\ x=0\Rightarrow t=0.$

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(-t)=f(t).$

Khi đó: $I_1=-\displaystyle\int\limits_{-a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Từ đó ta có $I=2\displaystyle\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$ □

Ví dụ 3. Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $I=\displaystyle\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a^x+1}=\int\limits_{0}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ với $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^+$ và $a>0.$

Lời giải.

Biến đổi I về dạng:

Ta có: $I=\displaystyle\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a^x+1}=\int\limits_{-\alpha}^{0}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a^x+1}+\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a^x+1}.$

Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int\limits_{-\alpha}^{0}\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a^x+1}.$

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=-\alpha\Rightarrow t=\alpha;\ x=0\Rightarrow t=0.$

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(-t)=f(t).$

Khi đó: $I_1=-\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{0}\frac{f(-t)\,\mathrm{d}t}{a^{-t}+1}=\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{f(t)a^t\,\mathrm{d}t}{a^t+1}.$

Từ đó ta được $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{f(x)(a^x+1)\,\mathrm{d}x}{a^x+1}=\int\limits_{0}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$ □

Ví dụ 4. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow \mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$ □

Ví dụ 5. Nếu $f(x)$ liên tục và $f\left(a+b-x\right)=f(x)$ thì $I=\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $x=a+b-t\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x=a\Rightarrow t=b;\ x=b\Rightarrow t=a.$

Khi đó: $I=\int\limits_b^a (a+b-t)f\left(a+b-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_a^b (a+b-t)f\left(t\right)\,\mathrm{d}t.$

$=(a+b)\int\limits_a^b f\left(t\right)\,\mathrm{d}t-\int\limits_a^b xf\left(x\right)\,\mathrm{d}x=(a+b)\int\limits_a^b f\left(t\right)\,\mathrm{d}t-I.$

Từ đó $\Rightarrow I=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f\left(x\right)\,\mathrm{d}x.$ □

Ví dụ 6. Nếu $f(x)$ liên tục và $f\left(a+b-x\right)=-f(x)$ thì $I=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

Lời giải.

Đặt $x=a+b-t\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x=a\Rightarrow t=b;\ x=b\Rightarrow t=a.$

Khi đó: $I=\int\limits_b^a (a+b-t)f\left(a+b-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_a^b f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0.$ □

Ví dụ 7. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0;2a]$ với $a>0$ thì $I=\int\limits_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^a \left[f(x)+f\left(2a-x\right)\right]\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Ta có: $I=\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Xét $I_2=\int\limits_a^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x=2a-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=a\Rightarrow t=a;\ x=2a\Rightarrow t=0.$

Khi đó $I_2=-\int\limits_a^0 f(2a-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^a f(2a-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^a f(2a-x)\,\mathrm{d}x.$

Thay vào I ta được: $I = \int\limits_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{a} \left[f(x) + f\left(2a - x\right)\right]\,\mathrm{d}x.$ □

Ví dụ 8. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì $I = \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a+T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$ (1).

Xét $I_3 = \int\limits_{a+T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = x - T \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$

Đổi cận $x = a + T \Rightarrow t = a;\ x = T \Rightarrow t = 0.$

Khi đó $I_3 = \int\limits_{a+T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Thay vào (1) ta được: $I = \int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$ □

Ví dụ 9. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^3 + x\right)^5\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Dễ dàng nhận thấy $f(x) = (x^3 + x)^5$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-1; 1]$.

Ta có: $I = \int\limits_{-1}^{0} \left(x^3 + x\right)^5\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{1} \left(x^3 + x\right)^5\,\mathrm{d}x.$

Xét tích phân $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \left(x^3 + x\right)^5\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó: $I_1 = -\int\limits_0^{1} \left(t^3 + t\right)^5\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^{1} \left(x^3 + x\right)^5\,\mathrm{d}x \Rightarrow I = 0.$ □

Ví dụ 10. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^4}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Hàm số $y = x^4$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Biến đổi I về dạng: $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^4}{2^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{2^x+1}\,\mathrm{d}x.$

Xét tích phân $I_1 = \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^4}{2^x+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 1;\ x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó: $I_1 = -\displaystyle\int\limits_{1}^{0} \frac{(-t)^4}{2^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^4.2^x}{2^x+1}\,\mathrm{d}x.$

Từ đó ta có: $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4.2^x}{2^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{2^x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}.$ □

Ví dụ 11. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2};\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\,\mathrm{d}t)}{\cos^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 t}{\cos^6 t+\sin^6 t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x+\sin^6 x}\,\mathrm{d}x.$

Do đó: $2I = \displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$ □

Ví dụ 12. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x = \pi \Rightarrow t = 0;\ x = 0 \Rightarrow t = \pi.$

Khi đó: $I = -\displaystyle\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{4-\cos^2(\pi-t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\pi\sin t}{4-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - \int\limits_{0}^{\pi} \frac{t\sin t}{4-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\pi\sin t}{4-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - I.$

$\Rightarrow 2I = \pi\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\cos^2 t - 4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-2}{\cos t+2}\right|\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi\ln 9}{8}.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ là hàm số chẵn trên $[-1;1]$.

Áp dụng tính chất 3 ta có: $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$. □

Bài 2. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \dfrac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x + I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \dfrac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x \Rightarrow I_1 = \displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{-x+\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I = 2\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln 3$. □

Bài 3. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 4 ta có $I = \dfrac{\pi}{4}$. □

Bài 4. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \cos x \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ là hàm số lẻ trên $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Áp dụng tính chất 1 ta có $I = 0$. □

Bài 5. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 6 với hàm số $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$ ta được $I = 0$. □

Bài 6. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{4} - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$; $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$.
Khi đó: $I = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left[1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)\right]\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\dfrac{2}{1+\tan t}\,\mathrm{d}t = \ln 2.t|_0^{\frac{\pi}{4}} - I$.
$\Rightarrow 2I = \dfrac{\pi\ln 2}{4} \Leftrightarrow I = \dfrac{\pi\ln 2}{8}$. □

Bài 7. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{10\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Viết lại I dưới dạng: $I = \sqrt{2}\int\limits_0^{10\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$
$= \sqrt{2}\left(\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + .. + \int\limits_{8\pi}^{10\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x\right)$.
Đặt $t = x - 2\pi$. Ta chứng minh được:
$\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{2\pi}^{4\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = ... = \int\limits_{8\pi}^{10\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.
Từ đó ta được: $I = 5\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 5\sqrt{2}\left(-\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{2\pi}\right) = 20\sqrt{2}$. □

DẠNG 7. Bài tập tổng hợp

Phương pháp giải. Để tính các bài tích phân ở đây ta kết hợp tất cả các dạng tích phân đã học.

Bài 1. Tính $I = \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + x\left(\dfrac{x}{\cos^2 x} + 2\tan x\right)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \dfrac{x^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} 2x\tan x\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3$.

$$I_1=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=-e^{\frac{1}{\pi}}+e^{\frac{4}{3\pi}}.$$

$$I_2=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{x^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}(\tan x)=\left(x^2\tan x\right)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}2x\tan x\,\mathrm{d}x=\frac{9\pi^2}{16}-I_3.$$

Khi đó $I=I_1+I_2+I_3=-e^{\frac{1}{\pi}}+e^{\frac{4}{3\pi}}+\dfrac{9\pi^2}{16}$.

□

Bài 2. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x+1-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

$$I_1=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}x\,\mathrm{d}(e^{x+\frac{1}{x}})=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-I_2.$$

Khi đó $I=I_1+I_2=\dfrac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. □

Bài 3. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

HD.

- Tính $I_1=\displaystyle\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow 2\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$. Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1; x=e\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Suy ra $I_1=2\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}(t^2-1)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{2t^3}{3}-2t\right)\Big|_{1}^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

- Tính $I_2=\displaystyle\int\limits_{1}^{e}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$. Bằng việc tích phân từng phần 2 lần ta tính được $I_2=e-2$.

Khi đó $I = I_1 + I_2 = e - \dfrac{2}{3} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

□

Bài 4. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$. Suy ra:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x.$$

Mặt khác $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = I + I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

□

Bài 5. Tính $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}; x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$. Suy ra:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\cot t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan t}}{\sqrt{\tan t} + 1}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Mặt khác $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}x = x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}.$

$\Rightarrow I = \dfrac{\pi}{12}.$ □

Bài 6. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \pi; x = \pi \Rightarrow t = 0$. Suy ra:

$$I = -\int\limits_{\pi}^{0} (\pi - t)\sin(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} \pi\sin(\pi - t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\pi} t\sin(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} \pi\sin t\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \pi\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \pi\sin x\,\mathrm{d}x - I.$$

$$\Rightarrow 2I = \int\limits_0^{\pi} \pi\sin x\,\mathrm{d}x = -\pi\cos x\Big|_0^{\pi} = 2\pi \Rightarrow I = \pi.$$

□

Bài 7. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $t = 1 + x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$. Khi đó:

$$I = \int\limits_1^2 \frac{t^2 - 2t + 2}{t^2}e^{t-1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t}\right)e^{t-1}\,\mathrm{d}t = e - 1 + \int\limits_1^2 \frac{2}{t^2}e^{t-1}\,\mathrm{d}t - \int\limits_1^2 \frac{2}{t}e^{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

Lại có $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{2}{t^2}e^{t-1}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_1^2 2e^{t-1}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right) = -2\frac{e^{t-1}}{t}\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{2}{t}e^{t-1}\,\mathrm{d}t = -e + 2 + \int\limits_1^2 \frac{2}{t}e^{t-1}\,\mathrm{d}t.$

Suy ra $I = 1$.

□

Bài 8. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t \Rightarrow I = \displaystyle\int\limits_1^2 \left(t^2 - 1\right)e^t\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 t^2e^t\,\mathrm{d}t - e^t\Big|_1^2 = J - (e^2 - e).$

Có: $J=\int\limits_1^2 t^2e^t\,\mathrm{d}x=t^2e^t\Big|_1^2-\int\limits_1^2 2te^t\,\mathrm{d}x=4e^2-e-2\left(te^t\Big|_1^2-\int\limits_1^2 e^t\,\mathrm{d}x\right)=4e^2-e-2(te^t-e^t)\Big|_1^2$

Khi đó suy ra $I=e^2$. □

Bài 9. Tính $I=\int\limits_1^2 x\left(e^x-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hướng dẫn. $I=\int\limits_1^2 xe^x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Có: $I_1=\int\limits_1^2 xe^x\,\mathrm{d}x=e^2$.

Lại có: $I_2=\int\limits_1^2\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra $I=I_1+I_2=e^2+\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

□

Bài 10. Tính $I=\int\limits_0^4\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)-3x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^4\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x-3\int\limits_0^4\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x=I_1-3I_2$.

- Tính $I_1=\int\limits_0^4\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=u\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_1=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 9}u\,\mathrm{d}u=\dfrac{u^2}{2}\Big|_{ln3}^{\ln 9}=\dfrac{\ln^2 9-\ln^2 3}{2}$.

- Tính $I_2=\int\limits_0^4\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{x^2+9}=v\Rightarrow \mathrm{d}v=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_2=\int\limits_3^5(v^2-9)\,\mathrm{d}v=\dfrac{44}{3}$.

Khi đó $I=I_1-3I_2=\dfrac{\ln^2 9-\ln^2 3}{2}-44$. □

Bài 11. Tính $I = \displaystyle\int_1^e \frac{(x^3+1)\ln x + 2x^2 + 1}{2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int_1^e x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{1+\ln x}{2+x\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{\mathrm{d}(2+x\ln x)}{2+x\ln x} = \frac{e^3-1}{3} + \ln|2 + x\ln x|\Big|_1^e$$
$$= \frac{e^3-1}{3} + \ln\frac{2+e}{2}.$$

□

Bài 12. Tính $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(5-x) + x^3\cdot\sqrt{5-x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

HD.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(5-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 x\sqrt{5-x}\,\mathrm{d}x = K + H$.

Đặt $u = \ln(5-x); \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} \Rightarrow K == \dfrac{3}{5}\ln 4$.

Đặt $t = \sqrt{5-x} \Rightarrow \mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$. Suy ra

$$H = -2\int_2^1 (5-t^2)t^2\,\mathrm{d}t = \left(\frac{-10t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right)\Big|_2^1 = \frac{164}{15}.$$

Khi đó $I = \dfrac{3}{5}\ln 4 + \dfrac{164}{15}$. □

Bài 13. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 |\sqrt{x(2-x)} + \ln(4+x^2)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

HD. Ta có $I = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \ln(4+x^2)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

$I_1 = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (sử dụng đổi biến: $x = 1+\sin t$).

$I_2 = \displaystyle\int_0^2 \ln(4+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(4+x^2)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 \frac{x^2}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = 6\ln 2 + \pi - 4$ (Sử dụng tích phân từng phần và đổi biến $x = 2\tan t$).

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{3\pi}{2} - 4 + 6\ln 2$. □

Bài 14. Tính $I = \displaystyle\int\limits_1^e \frac{x^2 + x\ln x + 1}{x} e^x \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int\limits_1^e xe^x \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^e e^x \ln x \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \frac{e^x}{x} \,\mathrm{d}x = H + K + J.$

$H = \displaystyle\int\limits_1^e xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_1^e - \int\limits_1^e e^x \,\mathrm{d}x = e^e(e-1).$

$K = \displaystyle\int\limits_1^e e^x \ln x \,\mathrm{d}x = e^x \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{e^x}{x} \,\mathrm{d}x = e^e - J.$

Vậy $I = H + K + J = e^{e+1}$. □

Bài 15. Tính $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x + (x + \sin x)\sin x}{(1 + \sin x)\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x(1 + \sin x) + \sin^2 x}{(1 + \sin x)\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin x} \,\mathrm{d}x = H + K.$

$H = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x; \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \Rightarrow H = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

$K = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \,\mathrm{d}x = 4 - 2\sqrt{3}.$

Vậy $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 4 - 2\sqrt{3}$. □

Bài 16. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x} \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=H+K.$

$H=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 2.$

$K=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\frac{1}{2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$

Vậy $I=H+K=\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)}{6}+\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-\ln 2).$ □

Bài 17. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $t=\dfrac{\pi}{4}-x\Rightarrow I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}\,\mathrm{d}t=$

$\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,\mathrm{d}t-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t=t\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I$

$\Rightarrow 2I=\dfrac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$ □

Bài 18. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^{e}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

HD.

$I_1=\displaystyle\int\limits_1^{e}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\right)\,\mathrm{d}x.$ Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}$ ta tính được $I_1=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

$I_2=\displaystyle\int\limits_1^{e}\left(\ln^2 x\right)\,\mathrm{d}x.$ Lấy tích phân từng phần ta được $I_2=e-2.$

Vậy $I=I_1+I_2=e-\dfrac{2}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$ □

Bài 19. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^{e}\frac{\ln\left(1+\ln^2 x\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Đặt $\ln x = t$, ta có $I = \int\limits_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

Đặt $u = ln(1+t^2), \mathrm{d}v = \mathrm{d}t$, ta có $I = t\ln(1+t^2)\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \dfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\left(\int\limits_0^1 \mathrm{d}t - \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$.

Đặt $t = \tan u$ ta tính được $I = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$ □

Bài 20. Tính $I = \int\limits_1^e \left(\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} + 3x^2\ln x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

HD.

$I_1 = \int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \sqrt{1+\ln x}$, ta tính được $I_1 = \dfrac{2(2-\sqrt{2})}{3}$.

$I_2 = \int\limits_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = \ln x; \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x$ và sử dụng phương pháp tích phân từng phần ta tính được $I_2 = \dfrac{2e^3+1}{9}$.

Khi đó $I = I_1 + 3I_2 = \dfrac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$. □

Bài 21. Tính $I = \int\limits_1^e \dfrac{(x-2)\ln x + x}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

HD.

Ta có $I = \int\limits_1^e \dfrac{x(1+\ln x) - 2\ln x}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \mathrm{d}x - 2\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x = e - 1 - 2\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$.

$J = \int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 1+\ln x$ ta tính được $J = 1 - \ln 2$.

Khi đó $I = e - 1 - 2J = e - 3 + 2\ln 2$. □

Bài 22. Tính $I = \int\limits_{e^2}^{e^3} \dfrac{2x\ln x(\ln x - 1) + 3}{x(1-\ln x)}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$I = 3\int\limits_{e^2}^{e^3} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_{e^2}^{e^3} \ln x\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_{e^2}^{e^3} \dfrac{1}{1-\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x) - 2\left(x\ln x\Big|_{e^2}^{e^3} - \int\limits_{e^2}^{e^3}\mathrm{d}x\right)$

$= -3\ln 2 - 4e^3 + 2e^2$. □

Bài 23. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 \cdot 3^{x^2+1} + \ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có:

$I = \displaystyle\int_1^2 x \cdot 3^{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 3^{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \left.\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}\right|_1^2 = \frac{117}{\ln 3}$.

$K = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left.-\frac{\ln(x+1)}{x}\right|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 3}{2} + \ln 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{2\ln 2 - \ln 3}{2} + \ln\dfrac{2}{3} - \ln\dfrac{1}{2} = 3\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln 3.$

Vậy $I = \dfrac{117}{\ln 3} + 3\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln 3$. □

Bài 24. Tính $I = \displaystyle\int_1^e \frac{x^2 + \ln x + x\ln^2 x + x + 1}{x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \left. x(\ln x - 1)\right|_1^e + \int_1^e \frac{\mathrm{d}(x+\ln x)}{x+\ln x}$

$= \left.[x(\ln x - 1) + \ln(x+\ln x)]\right|_1^e = \ln[e(e+1)]$. □

Bài 25. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+x+1)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left.\frac{x^2}{2}\ln(x^2+x+1)\right|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{3}{4}J$ với

$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$. Đặt $x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t; t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow J = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}t = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Khi đó $I = \dfrac{3}{4}\ln 3 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}$. □

Bài 26. Biết $\displaystyle\int_a^b \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$. Tính $I = \displaystyle\int_{\frac{a}{8}}^{\frac{b}{8}} \sin 16x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $16x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{8}$ và $I = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_a^b \sin 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{8}\int_a^b \sin 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{48}$. □

Bài 27. Cho hai số thực $a,\ b$ thỏa $3a + 2b = 1$ và $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+b)\sin x\,\mathrm{d}x = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = a - b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = ax + b \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Vậy $4 = I = -(ax+b)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow a + b = 4$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 11 \end{cases}$.

Vậy $P = -18$. □

Bài 28. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x + 2$ ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_3^{2+\sqrt{2}} \frac{t-2}{t^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\Big|_3^{2+\sqrt{2}} = \frac{13 - 9\sqrt{2}}{18} \end{aligned}$$

□

Bài 29. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x}\right]\mathrm{d}(\sin x) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

□

Bài 30. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 x.\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos x}$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\,\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= 4\left(\cos x - \frac{\cos^2 x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

□

Bài 31. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+1}}$

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x+1}$ ta được

$$\sqrt{4x+1} = t - 2\sqrt{x+1} \Rightarrow 4x+1 = t^2 + 4x + 4 - 4t\sqrt{x+1}$$

nên $\sqrt{x+1} = \dfrac{t^2+3}{4t} \Rightarrow x = \dfrac{1}{16}\left(t^2 - 10 + \dfrac{9}{t^2}\right)$ Do đó

$$I = \int_3^{3+2\sqrt{2}} \frac{t^4-9}{6(t^4-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_3^{3+2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{9}{t^2} - \frac{8}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \left(t - \frac{9}{t} + 4\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Big|_3^{3+2\sqrt{2}} = 12 - 4\sqrt{3} - 4\ln\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

□

Bài 32. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[6]{2x+1}$ ta được $2x+1 = t^6$ Do đó

$$I = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{3t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 3\int_1^{\sqrt[3]{3}} \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 3\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 4\ln|t+1|\right)\Big|_1^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 1) + 3\ln\left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}\right)$$

□

Bài 33. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+3x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Tacó
$$\frac{x^2+3x+5}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$
Đồng nhất hai vế ta được $A=\dfrac{3}{2}, B=-\dfrac{3}{2}, C=1$. Do đó
$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \left[\frac{3}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{3\ln|x-1|}{2} - \frac{3\ln|x+1|}{2} + \ln|x+2|\right)\Big|_2^3 = \frac{-7\ln 2+3\ln 3+2\ln 5}{2} \end{aligned}$$
Vậy $I = \dfrac{-7\ln 2+3\ln 3+2\ln 5}{2}$.

□

Bài 34. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^{\frac{x}{2}}}{(2^x-9)\sqrt{3-2^{1-x}}}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^{\frac{x}{2}}}{(2^x-9)\sqrt{3-2^{1-x}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2^x}{(2^x-9)\sqrt{3.2^x-2}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{3.2^x-2} \Rightarrow t^2 = 3.2^x-2$, suy ra $2t\,\mathrm{d}t = 3.2^x\ln 2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \dfrac{2}{\ln 2}\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-25} = \frac{1}{5\ln 2}\ln\left|\frac{t-5}{t+5}\right|\Big|_1^2 = \frac{1}{5\ln 2}\ln\frac{9}{14}.$

□

Bài 35. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}\,\mathrm{d}x$

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$, suy ra $\begin{cases} 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ x = t^2-1 \end{cases}$. Khi đó
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{(t^2-4)}{t^2+3t+2}.2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2t^3-8t}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (2t-6)\,\mathrm{d}t + 6\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(t^2-6t+6\ln|t+1|\right)\Big|_1^2 = -3+6\ln\frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

Bài 36. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 (x+1)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \end{cases}$. Vậy $I = (x+1)\cdot \mathrm{e}^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$. □

Bài 37. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x+\cos x)\sin x \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

☑ Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x+\cos x)\sin x \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x \,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

☑ $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x \,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra $I_1 = -x\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

☑ $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}(\sin x) = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$

☑ Vậy $I_1 + I_2 = -\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8} + 1$.

□

Bài 38. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin 2x)^2 \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

☑ Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + \sin^2 2x + 2x\sin 2x\right) \mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3$.

☑ $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{24}$.

☑ $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 4x}{2} \,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 4x}{8}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

☑ $I_3 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin 2x \,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

Suy ra $I_3 = -x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

☑ $I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{19\pi}{24}$.

□

Bài 39. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x^2\mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = x(x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+2} \end{cases}$. Khi đó $I = -\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}\Big|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 x.\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}}{3} + I_1$

Trong đó $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x.\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right) = x.\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x-1)\Big|_0^1 = 1$

Vậy $I = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{3}$

□

Bài 40. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Đặt $u = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow u = 2+\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy $I = \displaystyle\int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_1^{2+\sqrt{3}} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

□

Bài 41. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Lời giải.

Ta có : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$.

Đặt $x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$. □

Bài 42. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}=\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}$

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{3}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t}{3(1+\tan^2 t)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$. □

Bài 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$ và $\displaystyle\int\limits_{1}^{2}\mathrm{e}^x f'\left(\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x=5; f(\mathrm{e})=1$.

Tính $m=f\left(\mathrm{e}^2\right)$.

Lời giải.

Đặt $u=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow u=\mathrm{e}\\ x=2\Rightarrow u=\mathrm{e}^2\end{cases}$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_{1}^{2}\mathrm{e}^x f'\left(\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x=5\Leftrightarrow\int\limits_{2}^{\mathrm{e}^2}f'(u)\,\mathrm{d}u=5\Leftrightarrow f(u)\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=5\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^2\right)-f(\mathrm{e})=5\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^2\right)=6$. □

Bài 44. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;3]$ và $f(x)f(3-x)=1$ với mọi $x\in[0;3]$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Lời giải.

Đặt $u=3-x\Rightarrow\begin{cases}-\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ x=3-u\end{cases}\Rightarrow I=-\displaystyle\int\limits_{3}^{0}\dfrac{\mathrm{d}u}{1+f(3-u)}=\int\limits_{0}^{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(3-x)}$;

Vậy $2I=\displaystyle\int\limits_{0}^{3}\left[\dfrac{1}{1+f(x)}+\dfrac{1}{1+f(3-x)}\right]\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow I=\dfrac{3}{2}$. □

Bài 45. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \\ x=2\sqrt{2} \Rightarrow t=3 \end{cases}$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\limits_2^3 \left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. □

Bài 46. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t=1+\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=\mathrm{e}^3 \Rightarrow t=4 \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}=\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}=t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$

Do đó $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}^3} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 \left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2\sqrt{t}\right)\Big|_1^4=\frac{8}{3}$ □

Bài 47. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Xét biểu thức $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}=1-\dfrac{3}{x^2-6x+8}=1-\dfrac{3}{(x-2)(x-4)}$

Do đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \left(1-\frac{3}{(x-2)(x-4)}\right)\mathrm{d}x=1-3.I_1$

Trong đó $I_1=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Vậy $I=1-3I_1=1-\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. □

Bài 48. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_1^2 x\left[x^2+\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải.

☑ Ta có $\displaystyle\int\limits_1^2 x\left[x^2+\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^3\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

☑ $I_1=\displaystyle\int\limits_1^2 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{15}{4}$.

☑ $I_2=\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$I_2 = \dfrac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x^2}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 2 - I_3$

Với $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x^2}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{x^2-1+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right]$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 2.$

Do đó $I_2 = \dfrac{5}{2}\ln 3 - \ln 2 - \dfrac{1}{4}.$

☑ $I_1 + I_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{5}{2}\ln 3 - \ln 2.$

□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x$

A. $I = 5$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Nếu $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5, \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-1) = 4.$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$.

A. $I = -\ln 9$. **B.** $I = \ln 9$. **C.** $I = -\ln 3$. **D.** $I = \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|\,\Big|_1^5 = -\ln 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0) = 1$, $f'(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính $f(3)$.

A. $f(3) = 9$. **B.** $f(3) = 10$. **C.** $f(3) = 8$. **D.** $f(3) = 7$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow f(x)|_0^3 = 9 \Leftrightarrow f(3) - f(0) = 9 \Leftrightarrow f(3) = 9 + f(0) = 9 + 1 = 10.$

Vậy $f(3) = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Giá trị của $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1 - \mathrm{e}$. **B.** $\mathrm{e} - 1$. **C.** $-\mathrm{e}$. **D.** e.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^{0} = \mathrm{e}^{1} - \mathrm{e}^{0} = \mathrm{e} - 1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\displaystyle\int_{a}^{a} kf(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

B. $\displaystyle\int_{a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\displaystyle\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\displaystyle\int_{3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$, $\displaystyle\int_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 9.$

Giá trị của $I = \displaystyle\int_{0}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 5.$ **B.** $I = 6.$ **C.** $I = 7.$ **D.** $I = 8.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{6}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 8 - 9 = -1$

Khi đó $I = \displaystyle\int_{0}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 1 = 6.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{c}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{b}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a,b,c,$b+c \in (\alpha;\beta)$ ta có:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy mệnh đề sai là $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

B. $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Theo tính chất tích phân ta có:

☑ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

☑ $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, với $c \in \mathbb{R}$.

☑ $\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_1^2 \dfrac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$

A. $I = 1 - \ln 2.$ **B.** $I = \dfrac{7}{4}.$ **C.** $I = 1 + \ln 2.$ **D.** $I = 2\ln 2.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= (x - \ln|x|)\Big|_1^2 \\ &= (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) \\ &= 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $F(x)=x^3+\sin x+C$. **B**. $F(x)=x^3-\cos x+C$.
C. $F(x)=3x^3-\sin x+C$. **D**. $F(x)=x^3+\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\sin x\right)\,\mathrm{d}x=x^3-\cos x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2-1$. **B**. $-\ln 2$. **C**. $\ln 2$. **D**. $1-\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ bằng

A. $\cot\dfrac{\pi}{3}-\cot\dfrac{\pi}{4}$. **B**. $\cot\dfrac{\pi}{3}+\cot\dfrac{\pi}{4}$. **C**. $-\cot\dfrac{\pi}{3}+\cot\dfrac{\pi}{4}$. **D**. $-\cot\dfrac{\pi}{3}-\cot\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Khi đó, tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

$$\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Đặt $I=\displaystyle\int\limits_1^2(2mx+1)\,\mathrm{d}x$ (m là tham số thực). Tìm m để $I=4$.

A. $m=-1$. **B**. $m=-2$. **C**. $m=1$. **D**. $m=2$.

Lời giải.

Ta có $I=(mx^2+x)\Big|_1^2=3m+1=4\Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tích phân $\displaystyle\int\limits_1^8\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{45}{4}$. **B.** $\dfrac{47}{4}$. **C.** $\dfrac{25}{4}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 = \frac{45}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân ta có $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$. **D.** $-\dfrac{4}{35}$.

Lời giải.

$$\int_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}\,(2x+5) = \frac{1}{2}\ln(2x+5)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1 - \ln 2$. **B.** $I = 2\ln 2$. **C.** $I = 1 + \ln 2$. **D.** $I = \dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = (x + \ln|x|)\Big|_1^2 = 1 + \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

Lời giải.

Công thức tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\cos 2x$ là

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x + C$. **B.** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x$.

C. $F(x) = -\sin 2x + C$. **D.** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\sin 2x + C$.

Họ nguyên hàm của $f(x) = -\cos 2x$ là $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. e^4. **B.** $3\mathrm{e}^4$. **C.** $4\mathrm{e}^4$. **D.** $\mathrm{e}^4 - 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2 = \mathrm{e}^4 - 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3^x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 3^x\cdot\ln 3 + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (x + 3^x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Hàm số nào là nguyên hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{-2x}$?

A. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + C$. **B.** $y = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$. **C.** $y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$. **D.** $y = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & ,\text{ với } x \geq 0 \\ x\sin x & ,\text{ với } x \leq 0 \end{cases}$. Tính $\displaystyle\int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{7}{6} + \pi$. **B.** $I = \dfrac{2}{3} + \pi$. **C.** $I = 3\pi - \dfrac{1}{3}$. **D.** $I = \dfrac{2}{5} + 2\pi$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\pi}^{0} (x\sin x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left(2x^2+x\right)\mathrm{d}x\\ &= -\int\limits_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}(\cos x) + \left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1\\ &= (-x\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} + \int\limits_{-\pi}^{0}\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{7}{6}\\ &= \pi + \frac{7}{6} + (\sin x)\Big|_{-\pi}^{0} = \pi+\frac{7}{6}\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua mạch điện dao động LC lí tưởng có phương trình $i = I_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$. Ngoài ra $i = q'(t)$ với q là điện tích tức thời trong tụ. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chạy qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2\omega}$ là

A. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$. **B.** 0. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. **D.** $\frac{I_0}{\omega}$.

Lời giải.

Điện lượng cần tìm là

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} I_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} I_0\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{I_0}{\omega}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tính tích phân $\int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $\mathrm{e}+C$, với $C\in\mathbb{R}$. **B.** 2,718. **C.** e. **D.** $2\mathrm{e}-3$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x+x)\Big|_0^1 = (\mathrm{e}+1)-(1+0) = \mathrm{e}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$.

A. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. **B.** $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$. **D.** $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ nên khẳng định $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $f(b)=5$, $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{5}$. Tính $f(a)$.

A. $f(a)=\sqrt{3}(\sqrt{5}-3)$. **B.** $f(a)=3\sqrt{5}$.

C. $f(a)=\sqrt{5}(\sqrt{5}-3)$. **D.** $f(a)=\sqrt{5}(3-\sqrt{5})$.

Lời giải.

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{5} \Rightarrow f(b)-f(a)=3\sqrt{5} \Rightarrow f(a)=f(b)-3\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{5}-3).$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, không có tính chất $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Giá trị của $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{d}x = x\Big|_0^3 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tính $I = \int\limits_1^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^{-2}$. **B.** $I = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$. **C.** $I = \mathrm{e} - \mathrm{e}^3$. **D.** $I = \mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_1^3 = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tính tích phân $I = \int_0^1 3^x \,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2}{\ln 3}$. **B.** $I = \dfrac{3}{\ln 3}$. **C.** $I = \dfrac{9}{5}$. **D.** $I = 2\ln 3$.

Lời giải.

Áp dụng công thức có $I = \int_0^1 3^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{\ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho các hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ biết $F(0) = 2$, $F(1) = 5$.

A. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$. **B.** $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$. **C.** $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. **D.** $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

Lời giải.

Ta có $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = 2x+1$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = (2x+1)\mathrm{e}^x\big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. **B.** $I = (2x+1)\mathrm{e}^x\big|_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$.

C. $I = (2x+1)\mathrm{e}^x\big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$. **D.** $I = (2x+1)\mathrm{e}^x\big|_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $u = 2x+1, \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x, v = \mathrm{e}^x$.

$I = (2x+1)\mathrm{e}^x\big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{x^6}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{31}{125}$. **B.** $I = \frac{31}{125}$. **C.** $I = \frac{31}{160}$. **D.** $I = \frac{24}{125}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^6}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^{-6}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-5}}{-5}\right|_1^2 = \frac{31}{125}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5;3]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $F(-5) = 3, F(3) = \frac{15}{7}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-5}^3 [7f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 11$. **C.** $I = 19$. **D.** $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-5}^3 [7f(x) - x]\,\mathrm{d}x = 7F(x)\Big|_{-5}^3 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-5}^3 = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 6t^2 + 2t$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s). Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được 2 giây?

A. 29 m/s. **B.** 22 m/s. **C.** 18 m/s. **D.** 20 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(2) - v(0) = \int\limits_0^2 a(t)\mathrm{d}x \Rightarrow v(2) = v(0) + \int\limits_0^2 (6t^2 + 2t)\mathrm{d}x = 2 + \left.(2t^3 + t^2)\right|_0^2 = 22$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[2;4]$ và $f'(2) = 1$, $f'(4) = 5$. Tính $I = \int\limits_2^4 f''(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 1$.

Lời giải.

$I = \int\limits_2^4 f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)\big|_2^4 = f'(4) - f'(2) = 5 - 1 = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(3) = 9$. Tính $I = \int\limits_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 11$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 18$.

Lời giải.

$$I = \int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_1^3 = f(3) - f(1) = 9 - 2 = 7.$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = 17$ và $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = -11$ với $a < b < c$. Tính $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -6$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 28$. **D.** $I = -28$.

Lời giải.

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = 17 - (-11) = 28.$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Giả sử $\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\int_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Khi đó, $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 122. **B.** 26. **C.** 143. **D.** 58.

Lời giải.

Ta có $\int_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16 \Rightarrow \int_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = -16$.

Vậy $I = 2\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 37 + 3 \cdot (-16) = 26$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 + \dfrac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I = \dfrac{10}{3} + \ln 2 - \ln 3$. **B.** $I = \dfrac{10}{3} + \ln 2 + \ln 3$.

C. $I = \dfrac{10}{3} - \ln 2 + \ln 3$. **D.** $I = \dfrac{10}{3} - \ln 2 - \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_1^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^2 - \ln|x+1|\Big|_1^2 = \dfrac{10}{3} - \ln 3 + \ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^2 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ tính chất của tích phân $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \forall k \in \mathbb{R}$, ta có khẳng định đúng là

$$\int\limits_{-2}^{2} 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Giá trị nào của a để $\int\limits_0^a (3x^2+2)\,\mathrm{d}x = a^3+2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^a (3x^2+2)\,\mathrm{d}x = (x^3+2x)\Big|_0^a = a^3+2a.$$

Suy ra

$$\int\limits_0^a (3x^2+2)\,\mathrm{d}x = a^3+2 \Leftrightarrow a^3+2a = a^3+2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{4}{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2\ln 2$. **B.** $I = 2\ln 3$. **C.** $I = 4\ln 2$. **D.** $I = 4\ln 3$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{4}{2x+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|2x+1|\Big|_0^1 = 2\ln 3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3, \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Theo tính chất tích phân

$$\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3+(-1) = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$. **B.** $I = 2\mathrm{e}$. **C.** $I = 2\mathrm{e}+2$. **D.** $I = 2\mathrm{e}-2$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^x)\Big|_0^1 = 2\mathrm{e} - 2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}x.$

A. $I = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $I = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $I = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $I = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$ **B.** $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = a^2.$ **C.** $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2a.$ **D.** $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Ta có: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Biết $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + F(a).$ **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)\cdot F(a).$

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b).$ **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Lời giải.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \displaystyle\int [2f(x)+1]\mathrm{d}x.$

A. $I = 2F(x) + 1 + C.$ **B.** $I = 2xF(x) + 1 + C.$

C. $I = 2xF(x) + x + C.$ **D.** $I = 2F(x) + x + C.$

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int [2f(x)+1]\mathrm{d}x = 2\int f(x)\mathrm{d}x + x + C' = 2F(x) + x + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Nếu $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_5^7 f(x)\mathrm{d}x = 9$ thì $\int\limits_2^7 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 6. **C.** 12. **D.** -6.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^7 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_5^7 f(x)\mathrm{d}x = 3 + 9 = 12.$

Chọn đáp án C □

Câu 56. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 2^{2018x}\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2^{4036}-1}{\ln 2}$. **B.** $I = \dfrac{2^{4036}-1}{2018}$. **C.** $I = \dfrac{2^{4036}}{2018\ln 2}$. **D.** $I = \dfrac{2^{4036}-1}{2018\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^2 2^{2018x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2018}\int\limits_0^2 2^{2018x}\mathrm{d}(2018x) = \dfrac{2^{2018x}}{2018\ln 2}\Big|_0^2 = \dfrac{2^{4036}-1}{2018\ln 2}.$

Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[a;b]$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$ trên $[a;b]$, $a < c < b$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Lời giải.

Theo công thức tích phân thì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$. **B.** $\int\limits_a^b v\,\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$.

C. $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u\,\mathrm{d}u$. **D.** $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}x = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức về tích phân từng phần $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Tính $I = \int\limits_1^4 \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. 5,3. **B.** 35. **C.** 3,5. **D.** 53.

Lời giải.

$$I=\int\limits_1^4 \left(x^2+3\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4=35.$$

Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-2;1]$ và $f(-2)=3$, $f(1)=7$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=\dfrac{7}{3}$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân ta có $I=\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\big|_{-2}^{1}=f(1)-f(-2)=7-3=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý khác 0. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có mệnh đề "$\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$" là mệnh đề **sai** vì chỉ có thể đưa **hằng số khác** 0 ra ngoài tích phân.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ thì $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 12. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3+4=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Để tính tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$, ta đặt

A. $t=2+x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$. **B.** $x=2\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=2(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

C. $t=\sqrt{2}\tan x\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}t$. **D.** $x=\sqrt{2}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Đặt $x=\sqrt{2}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Tích phân $\int_0^1 \dfrac{2}{3-2x}\mathrm{d}x = \ln a$. Giá trị của a bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\int_0^1 \dfrac{2}{3-2x}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \dfrac{d(3-2x)}{3-2x}\mathrm{d}x = -\ln(3-2x)\big|_0^1 = -\ln(1)+\ln(3) = \ln(3)$. Vậy $a=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos x)\,\mathrm{d}x = (x-\sin x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin(2x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $c\in[a;b]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Sử dụng tính chất cơ bản, ta có $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Tích phân $\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = (x^2+x)\Big|_0^3 = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Khẳng định $\displaystyle\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Khi đó $\displaystyle\int_5^2 [2-4f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 32. **B.** 34. **C.** 42. **D.** 46.

Lời giải.

Ta có

$$\int_5^2 [2-4f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_5^2 2\,\mathrm{d}x - 4\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2(2-5) - 4\cdot(-10) = 34.$$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=3$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2)-f(1) = 2-1 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Nếu $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \ln c$ với $c\in\mathbb{Q}$ thì giá trị của c bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 81.

Lời giải.

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^5 = \ln 3.$$

Vậy $c=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây.

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $c \in [a;b]$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a), \forall k \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, do đó $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tính $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} 6x^2\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 18$. **B.** $I = 22$. **C.** $I = 26$. **D.** $I = 14$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} 6x^2\,\mathrm{d}x = \left(2x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = 2\left[2^3 - (-1)^3\right] = 18$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$. **B.** $I = \mathrm{e} - 1$. **C.** $I = 1 - \mathrm{e}$. **D.** $I = \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $c \in [a;b]$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân suy ra $\displaystyle\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_a^b [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -13$. **B.** $I = 13$. **C.** $I = -5$. **D.** $I = 5$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_a^b [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot(-2) - 3\cdot 3 = -13.$$

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $c \in [a;b]$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^c f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho $I = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $J = \int\limits_0^2 [4f(x) - 3]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $J = \int\limits_0^2 [4f(x) - 3]\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^2 \mathrm{d}x = 4\cdot 3 - 3\cdot x\Big|_0^2 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Tích phân $I = \int\limits_0^{2019} 2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2^{2019}. **B.** $\dfrac{2^{2019}}{\ln 2}$. **C.** $2^{2019} - 1$. **D.** $\dfrac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{2019} 2^x \,\mathrm{d}x = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^{2019} = \frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\displaystyle\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = -5$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -4-1 = -5$.

Vậy $\displaystyle\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2019} 2^x \,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2019}-1$. **B.** $\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **C.** $\dfrac{2^{2019}}{\ln 2}$. **D.** 2^{2019}.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^{2019} 2^x \,\mathrm{d}x = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^{2019} = \frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x = \left(x^2-x\right)\Big|_0^1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}(-t)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}-1$. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Giả sử $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\displaystyle\int_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Khi đó, $I = \displaystyle\int_0^9 [2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 122$. **B.** $I = 26$. **C.** $I = 143$. **D.** $I = 58$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^9 [2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 26$.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{8}$. **D.** $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Biết $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_a^b [3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -5$. **C.** $I = 15$. **D.** $I = 10$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_a^b [3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 5\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 3\cdot 10 - 5\cdot 5 = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$. **B.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. **C.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Theo tính chất cơ bản của tích phân thì $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x = x\big|_0^1 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho $a < b < c$, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó giá trị của $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12 - 4 = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả là

A. $I = 1$. **B.** $I = \dfrac{1}{3}$. **C.** $I = \dfrac{1}{4}$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Giá trị tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\dfrac{5}{3}$. **B.** $1+\ln\dfrac{4}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $1-\ln\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^1 \dfrac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = (x+\ln|x+3|)\Big|_0^1 = 1+\ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Tính tích phân $\int\limits_0^\pi \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = 3$. **D.** $P = 4$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 4 = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Giá trị của $\displaystyle\int_0^1 \left(2019x^{2018} - 1\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017} + 1$. **C.** $2^{2017} - 1$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^1 \left(2019x^{2018} - 1\right)\,\mathrm{d}x = \left(x^{2019} - x\right)\Big|_0^1 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Kết quả của tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 1$. **B.** $I = -2$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -1$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Cho $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 3\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 1 = 4.$$

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. B	5. B	6. B	7. B	8. B	9. C	10. A
11. B	12. C	13. C	14. A	15. C	16. A	17. B	18. C	19. C	20. D
21. D	22. D	23. A	24. D	25. A	26. D	27. C	28. D	29. C	30. C
31. B	32. A	33. C	34. B	35. A	36. D	37. A	38. C	39. A	40. B
41. B	42. B	43. C	44. B	45. A	46. C	47. A	48. B	49. C	50. D
51. A	52. A	53. D	54. D	55. C	56. D	57. C	58. A	59. B	60. D
61. D	62. A	63. D	64. A	65. A	66. D	67. D	68. C	69. A	70. B
71. A	72. B	73. C	74. A	75. B	76. D	77. A	78. A	79. D	80. B
81. D	82. D	83. B	84. D	85. A	86. C	87. B	88. D	89. A	90. D
91. C	92. C	93. D	94. B	95. B	96. D	97. A	98. A	99. A	100. B

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tính nguyên hàm $I = \int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right) \mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln x + C$.
B. $I = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| + C$.
C. $I = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln x + C$.
D. $I = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln|x| + C$.

Lời giải.

$I = \int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^3+1}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3+1} + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}(x^3+1) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + C$.
B. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + C$.
C. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + C$.
D. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải.

$\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^2 x\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} + 4 - 3 = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số thực. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

A. 3. **B**. 6. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_2^3 = \ln\frac{4}{5} - \ln\frac{3}{4} = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$

Suy ra $a=4, b=-1, c=-1$. Vậy $a+b^2-c^3 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = \frac{a}{4} - 4\ln\frac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. 25. **B**. 41. **C**. 20. **D**. 34.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$. Đặt $t = x+3 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=3 \\ x=1 \Rightarrow t=4. \end{cases}$

$$I = \int_3^4 \frac{t^2-4t+3}{t^2}\mathrm{d}t = \int_3^4 \left(1 - \frac{4}{t} + \frac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(t - 4\ln|t| - \frac{3}{t}\right)\Big|_3^4 = \frac{5}{4} - 4\ln\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2 = 34.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_0^2 [f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int_0^2 [2f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B**. $I=2$. **C**. $I=3$. **D**. $I=0$.

Lời giải.

Đặt $a = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a-3b=4 \\ 2a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0. \end{cases}$

Ta có $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4-3 = 1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. -1.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Big|_0^1 = 2\ln 2-\ln 3.$

Vậy $a=2, b=-1 \Rightarrow a+b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=ab$.

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=8$. **D.** $P=-4$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v=2\sqrt{x} \end{cases}$, ta có

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^1 - 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^1 - 4\sqrt{x}\Big|_{\mathrm{e}}^1 = -2\sqrt{\mathrm{e}}+4.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$. Vậy $P=ab=-8$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$; $\displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=6$. **B.** $I=7$. **C.** $I=8$. **D.** $I=9$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2. \end{cases}$

Vậy $I=\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4+2=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^2 [f(x)-5g(x)+x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [f(x)-5g(x)+x]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 5\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 x\mathrm{d}x = 3-5\cdot(-1)+\frac{1}{2}(2^2-0) = 10.$

Chọn đáp án D ☐

Câu 13. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Hãy tính $\int\limits_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{2}$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x = 1 \Leftrightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$, ta có

$$I = 2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2 = 4.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 14. Cho $\int\limits_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_5^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 13$. **B.** $I = 27$. **C.** $I = -11$. **D.** $I = 3$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân ta có

$$I = \int\limits_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x - 4\int\limits_{-2}^5 g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^5 \mathrm{d}x = 8 \cdot 4 \cdot (-3) - x\Big|_{-2}^5 = 13.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 15. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $u = x^2 + 3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 3$; $x = 2 \Rightarrow u = 7$, ta có

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_3^7 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^7 = \frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 16. Cho tích phân $I = \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $J = 64$. **B.** $J = 8$. **C.** $J = 16$. **D.** $J = 32$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} \cdot 32 = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\displaystyle\int_1^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\,(x-5)\,(x-4)}$ tồn tại.

A. $-1 < a < 3$. **B.** $a < -1$. **C.** $a \neq 4, a \neq 5$. **D.** $a < 3$.

Lời giải.

Tích phân $\displaystyle\int_1^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\,(x-5)\,(x-4)}$ tồn tại khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{1}{x\,(x-5)\,(x-4)}$ liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; a]$.

Mà hàm số $y = \dfrac{1}{x\,(x-5)\,(x-4)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; 4)$; $(4; 5)$; $(5; +\infty)$.

Nên hàm số liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; 1] \Leftrightarrow 0 < 1+a < 4 \Leftrightarrow -1 < a < 3$.

Vậy $-1 < a < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thoả: $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\displaystyle\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $I_1 = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \displaystyle\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + 3I_2 = 10 \\ 2I_1 - I_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = 4 \\ I_2 = 2. \end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Tính $\displaystyle\int (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. **B.** $x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Lời giải.

$$\int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực m thỏa mãn $\int\limits_0^m (2x+1)\,\mathrm{d}x < 2$.

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<1$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m>2$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^m (2x+1)dx < 2 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\Big|_0^m < 2 \Leftrightarrow m^2+m-2<0 \Leftrightarrow -2<m<1$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Giá trị tích phân $I=\int\limits_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải.

Đặt $t=2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x,\ x=1\Rightarrow t=3;\ x=2\Rightarrow t=5$.

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$. **C.** $-\dfrac{4}{35}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{5}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c\in(\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c\in(\alpha;\beta)$ ta luôn có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề sai là $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x\\ &=\int\limits_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &=x\Big|_0^1-\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1\\ &=1-\ln 2\\ \Rightarrow&\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho $\displaystyle\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A. $\dfrac{23}{252}$. **B.** $\dfrac{241}{252}$. **C.** $\dfrac{52}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x\\
=\ &\frac{2}{3}\int 3x(3x-2)^6\mathrm{d}x\\
=\ &\frac{2}{3}\int \left[(3x-2)^7+2(3x-2)^6\right]\mathrm{d}x\\
=\ &\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3\cdot 8}\cdot(3x-2)^8+\frac{2}{3\cdot 7}\cdot(3x-2)^7\right]+C\\
=\ &\frac{1}{36}\cdot(3x-2)^8+\frac{4}{63}\cdot(3x-2)^7+C.
\end{aligned}$$

Suy ra $A=\dfrac{1}{36}, B=\dfrac{4}{63}$ nên $12A+7B=\dfrac{7}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P=-4$. **B.** $P=10$. **C.** $P=7$. **D.** $P=4$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=7-3=4.$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\,\mathrm{d}x=10$. Tính $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -18. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\,\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=10-\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x=10-x^2\Big|_0^2=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(4x^2-1)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$.

Giá trị của $I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 9 + 8 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_a^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

A. $-1 < a < 3$. **B.** $a < -1$. **C.** $a \neq 4, a \neq 5$. **D.** $a < 3$.

Lời giải.

Để tích phân của đề bài xác định thì $1, 1+a$ phải thuộc vào cùng một khoảng xác định của hàm số $\dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$. Khoảng xác định chứa 1 là khoảng $(0;4)$. Nên $1 + a \in (0;4)$ hay $a \in (-1;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tích phân $\int\limits_0^{\pi^2} \left(\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = A + B\pi$ với $A, B \in \mathbb{Z}$. Tính $A + B$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi. \end{cases}$

Suy ra $I = 2\int\limits_0^{\pi} (\sin t - \cos t)\, t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = (\sin t - \cos t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = -\cos t - \sin t. \end{cases}$

$I = 2\left[t\,(-\cos t - \sin t)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} (\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\right] = 2\left[\pi + (\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi}\right] = 4 + 2\pi$.

Vậy $A = 4; B = 2 \Rightarrow A + B = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tìm giá trị của a để $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \ln a$.

A. 12. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^4 = \ln\frac{4}{3}$.

Suy ra $a = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = m(\mathrm{e}^p - \mathrm{e}^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$.

Suy ra $m = \frac{1}{3}, p = 5$ và $q = 2$.

Vậy $m+p+q = \frac{22}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|^3\mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^1 x^3\mathrm{d}x\right|$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^{2018} \left|x^4 - x^2 + 1\right|^3\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2018} \left(x^4 - x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-2}^3 \left|\mathrm{e}^x(x+1)\right|\mathrm{d}x = \int_{-2}^3 \mathrm{e}^x(x+1)^3\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $\displaystyle\int_{-1}^{2018} \left|x^4 - x^2 + 1\right|^3\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2018} \left(x^4 - x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 [4f(x) - 2x]\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 [4f(x)-2x]\mathrm{d}x = 1\\
\Leftrightarrow\ & 4\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_1^2 x\mathrm{d}x = 1\\
\Leftrightarrow\ & 4\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 1\\
\Leftrightarrow\ & 4\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 4\\
\Leftrightarrow\ & \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tích phân $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + \frac{c}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2=1$. **B.** $a^2+b^2+c^2=11$. **C.** $a^2+b^2+c^2=9$. **D.** $a^2+b^2+c^2=3$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x$, đặt $t = \ln x + 2 \Rightarrow dt = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận tích phân: Khi $x=1 \Rightarrow t=2$; $x=\mathrm{e} \Rightarrow t=3$.

Vậy $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t = \int_2^3 (\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2})\mathrm{d}t = (\ln t + \frac{2}{t})\Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}$.

Suy ra $a=1, b=-1, c=-1$. Vậy $a^2+b^2+c^2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2-2x-3)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A. $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

Do $\sqrt{2-\sqrt{3}} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1. \end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I=\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\displaystyle\int\limits_0^3 \left(\mathrm{e}^{1+\ln f(x)}+4\right)\mathrm{d}x$ là

A. $4+12\mathrm{e}$. **B.** $12+4\mathrm{e}$. **C.** $3\mathrm{e}+14$. **D.** $14\mathrm{e}+3$.

Lời giải.

$$K=\int\limits_0^3 \left(\mathrm{e}^{1+\ln f(x)}+4\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{\ln f(x)}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 4\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 4\,\mathrm{d}x=4\mathrm{e}+12.$$

Chọn đáp án B □

Câu 40. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}+\frac{\pi}{b}$ (với a,b là các số hữu tỉ), giá trị của $a\cdot b$ là

A. 4. **B.** 12. **C.** 32. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

Vậy $a\cdot b=8\cdot 4=32$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Biết $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$ (với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), khi đó giá trị của $b-a$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C.$$

Vậy $b-a=3-1=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x=(x\sin x)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=0+\cos x\Big|_0^{\pi}=\cos\pi-\cos 0=-2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Giả sử rằng $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x = a\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó giá trị của $a+2b$ là

A. 60. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 30.

Lời giải.

Ta có:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(3x+11)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0}\frac{21}{x-2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(3\frac{x^2}{2}+11x\right)\Big|_{-1}^{0} + 21\ln|x-2|\Big|_{-1}^{0} = \frac{19}{2}+21\ln\frac{2}{3}.$$

Suy ra $a=21, b=\dfrac{19}{2} \Rightarrow a+2b=40$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P=7$. **B.** $P=10$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-4$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow P = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7-3=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left[\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right]$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=\mathrm{e}^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$. **B.** $a\in\left(0;\dfrac{1}{2018}\right]$. **C.** $a\in[1;2018)$. **D.** $a\in[2018;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\mathrm{e}^x\left[\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right]=(\mathrm{e}^x)'\ln(ax)+\mathrm{e}^x[\ln(ax)]'=[\mathrm{e}^x\ln(ax)]'$. Suy ra

$$\int_{\frac{1}{a}}^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2018)-F\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\ln(ax)\Big|_{\frac{1}{a}}^{2018} = \mathrm{e}^{2018} \Leftrightarrow \ln(2018a)=1 \Leftrightarrow a=\frac{\mathrm{e}}{2018}.$$

Vậy $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\displaystyle\int_0^1 \sin(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_0^1 \cos(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Đặt $t = 1-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=0$.

Ta có: $\displaystyle\int_0^1 \sin(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho biết $\displaystyle\int_1^2 \ln\left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = |a| + |b| + |c|$.

A. $S = 34$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 18$. **D.** $S = 26$.

Lời giải.

Xét trên $[1;2]$.

Ta có $\ln(9-x^2) = \ln(3-x) + \ln(3+x)$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \ln(3-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3-x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = x\ln(3-x)\big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x-3}\,\mathrm{d}x = x\ln(3-x)\big|_1^2 - \left(x + 3\ln(3-x)\right)\big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$

Xét $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \ln(3+x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3+x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = x\ln(3+x)\big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x = x\ln(3+x)\big|_1^2 - \left(x - 3\ln(3+x)\right)\big|_1^2 = 5\ln 5 - 8\ln 2 - 1.$

Vậy $\displaystyle\int_1^2 \ln\left(9-x^2\right)\,\mathrm{d}x = 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2$. Khi đó $S = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề:

I. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

II. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

III. $\displaystyle\int\limits_0^a x^3 f\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} x f(x)\,\mathrm{d}x.$

Các mệnh đề đúng là

A. Chỉ I. **B**. Cả I, II và III. **C**. Chỉ III. **D**. Chỉ II.

Lời giải.

Xét mệnh đề I. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$ Từ đó

$\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$ Vậy I đúng.

Xét mệnh đề II. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}.$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1;\ x = 1 \Rightarrow t = \mathrm{e}.$ Từ đó

$\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f\left(t\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$ Vậy II đúng.

Xét mệnh đề III. $\displaystyle\int\limits_0^a x^3 f\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{t\,\mathrm{d}t}{2}.$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = a \Rightarrow t = a^2.$ Từ đó:

$\displaystyle\int\limits_0^a x^3 f\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} tf\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)\,\mathrm{d}x.$ Vậy III đúng.

Do đó cả I, II, III đều đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x.$

A. 4. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

$\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2x+1}\Big|_0^4 = 2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\displaystyle\int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

Tính $\displaystyle\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải.

$$\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 3 = 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \ln x$. Tính $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x$, với $g(x)$ là đạo hàm của $f(x)$.

A. $I = 1$. **B.** $I = \mathrm{e} - 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $I = \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^{\mathrm{e}} = \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 52. Nếu $\displaystyle\int_1^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_2^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\displaystyle\int_1^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 3 = 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ và $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. 4. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{7}{3} = \displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) \Rightarrow F(1) = \dfrac{13}{3}.$

Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{(\cos 2x + 1)^2}\,\mathrm{d}x$ và đặt $t = \cos x$. Khẳng định nào **sai**?

A. $I = -\dfrac{1}{12}t^{-3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$. **B.** $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^4}$. **C.** $I = \dfrac{7}{12}$. **D.** $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{(\cos 2x+1)^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\cos x\Leftrightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Khi đó, $I=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^4}=-\frac{1}{12}t^{-3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{7}{16}.$

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+2\sin x]\,\mathrm{d}x.$$

A. $I=5+\pi$. **B.** $I=5+\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $I=7$. **D.** $I=3$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+2\sin x]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,\mathrm{d}x=5-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=7.$

Chọn đáp án C □

Câu 56. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$ là

A. $I=1-\dfrac{1}{\ln 2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\ln 2}=\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-\ln 2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 57. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{3}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $T=2a+6b$.

A. $T=3$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=2$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=1;b=-\frac{1}{2}\Rightarrow T=2a+6b=-1.$

Chọn đáp án B □

Câu 58. Tính $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^3 - 1$. **B.** $I = \mathrm{e} - 1$. **C.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$. **D.** $I = \mathrm{e}^3 + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Tích phân $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{8-2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{4-\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \int\limits_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \dfrac{8-2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$ được kết quả là

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}^2}$. **B.** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$. **D.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = -2\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = \sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = -2$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\Big|_{-2}^0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{4+\pi}{4\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{2-\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{4-\pi}{4\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{2+\pi}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4-\pi}{4\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tích phân $\int\limits_0^1 \left(2f(x) - 3x^2\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 \left(2f(x) - 3x^2\right)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 2\cdot 1 - 1 = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 63. Kết quả của tích phân $K = \int\limits_1^2 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $K = 2\ln 2$. **B.** $K = \dfrac{1}{2}$. **C.** $K = 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$. **D.** $K = 2\ln 2 + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét $K = \int\limits_1^2 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d} = (2x-1)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = (x^2 - x). \end{cases}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} K &= \int\limits_1^2 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2-x)\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2-x)\ln x\Big|_1^2 - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{-5}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính $\int\limits_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x$.

A. 27. **B.** 15. **C.** 75. **D.** 21.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 9\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-5}^1 \frac{f(x)}{3}\,\mathrm{d}x + 18 = 3 + 18 = 21.$

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$; $\int\limits_1^5 2f(x)\,\mathrm{d}x = 200$. Khi đó $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 104. **B.** 204. **C.** 196. **D.** 96.

Lời giải.

$$\left.\begin{aligned}&\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \Leftrightarrow F(2)-F(1)=4\\ &\int_1^5 2f(x)\,\mathrm{d}x = 200 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 100 \Leftrightarrow F(5)-F(1)=100\end{aligned}\right\} \Rightarrow F(5)-F(2)=96.$$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5)-F(2)=96.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** -2.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3\cos x+1} \Rightarrow t^2 = 3\cos x+1 \Rightarrow 2t\cdot \mathrm{d}t = -3\sin x\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \sin x\cdot \mathrm{d}x = -\dfrac{2t}{3}\cdot \mathrm{d}t.$

Với $x=0 \Rightarrow t=2$, với $x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$.

Khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^1 \frac{f(t)}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Biết $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Lời giải.

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_3^5 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = 8+\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases}a=8\\ b=3\end{cases} \Rightarrow S=a-2b=2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_{-5}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x$.

A. 21. **B.** 75. **C.** 15. **D.** 27.

Lời giải.

$$\int_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 9\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x + 18.$$

Đặt $1-3x=t \Rightarrow \displaystyle\int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_1^{-5} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-5}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-5}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3.$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^2 [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = 21.$

Chọn đáp án A □

Câu 69. Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x = a\ln b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. 33. **B.** 25. **C.** 42. **D.** 39.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^2 \ln(x+1)\mathrm{d}(x^2-1)\\ &= (x^2-1)\cdot\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 (x-1)\mathrm{d}x\\ &= 3\ln 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2\\ &= 3\ln 3\end{aligned}$$

Vậy $a=b=3 \Rightarrow 6a+3b=39$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Biết rằng $\int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = m\ln 3 + n\ln 2 + p$, trong đó m, n, $p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A. $\frac{9}{2}$. **B.** 18. **C.** 9. **D.** $\frac{27}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \int\limits_2^3 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{x^3}{6}\Big|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{19}{6} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{9}{2} \\ n = -2 \\ p = -\dfrac{19}{6} \end{cases}.$$

Vậy $m = \frac{9}{2}$.

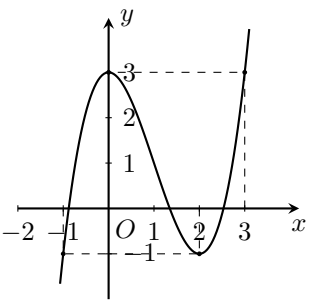
Chọn đáp án A □

Câu 71.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên.

Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 f'(2x-1)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2$.



Lời giải.

Ta có: $I=\int\limits_1^2 f'(2x-1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 f'(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)=\dfrac{1}{2}f(2x-1)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}[f(3)-f(1)]=1.$

Chọn đáp án C □

Câu 72. Tính $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^3 x\cdot\sin x\mathrm{d}x.$

A. $-\dfrac{\pi^4}{4}.$ **B.** $-\pi^4.$ **C.** $0.$ **D.** $\dfrac{1}{4}.$

Lời giải.

Đặt $x=\pi-t$. Ta có $I=-\int\limits_{\pi}^{0}\cos^3(\pi-t)\cdot\sin(\pi-t)\,\mathrm{d}t=-\int\limits_0^{\pi}\cos^3 t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t$, suy ra $2I=0\Rightarrow I=0.$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{5}{2}.$ **B.** $I=\dfrac{3}{2}.$ **C.** $I=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{9}{20}.$ **D.** $I=\dfrac{9}{4}.$

Lời giải.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}.$

Khi đó: $I=\int\limits_1^{\frac{1}{2}}\dfrac{-1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\dfrac{-1}{2t^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}\ .$

Chọn đáp án B □

Câu 74. Tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=a\ln b+c$, trong đó $a;b;c$ là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

A. $3.$ **B.** $0.$ **C.** $1.$ **D.** $2.$

Lời giải.

$I=\int\limits_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x=\left(x-\ln\left|x^2+1\right|\right)\Big|_0^1=1-\ln 2.$

Khi đó $a=-1,b=2,c=1\Rightarrow a+b+c=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tính $I=\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x.$

A. $1+\ln\sqrt{3}.$ **B.** $2+\ln 3.$ **C.** $2+\ln\sqrt{3}.$ **D.** $4+\ln 3.$

Lời giải.

$I=\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{2x+1}+3x^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+2x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1=2+\ln\sqrt{3}.$

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}f(x) = \left.\frac{f^3(x)}{3}\right|_0^1 = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(0) - F(1)$ bằng

A. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_0^1 -F(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0)$ suy ra $\displaystyle F(0) - F(1) = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2) = 2$, $f(3) = 5$. Tính $\displaystyle\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 3.

Lời giải.

$\displaystyle\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left.f(x)\right|_2^3 = f(3) - f(2) = 3.$

Chọn đáp án D □

Câu 79. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\displaystyle\int_1^4 f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 24. **D.** 0.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 3$, khi đó $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \to t = 0, x = 4 \to t = 9$.

Từ đó ta có $\displaystyle\int_1^4 f(3x-3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^9 f(t)\mathrm{d}t = 3.$

Chọn đáp án B □

Câu 80. Có bao nhiêu số thực b thuộc $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\displaystyle\int_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x = 1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{\pi}^{b} 4\cos 2x\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_{\pi}^{b} = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Do $b \in (\pi; 3\pi)$ nên có đúng 4 giá trị của b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 0$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải.

$$\int_{0}^{3} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{3} \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}(\sqrt{x+1}) = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\Big|_{0}^{3} = 2\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}.$$

Vậy $a = 2$, $b = -2$,$c = 0$; do đó $S = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{1}^{2^{2018}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

A. $I = 2018\ln 2$. **B.** $I = 2^{2018}$. **C.** $I = 2018\ln 2 - 1$. **D.** $I = 2018$.

Lời giải.

$$I = \int_{1}^{2^{2018}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_{1}^{2^{2008}} = 2008\ln 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho biết $I = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - 7n$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 91.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt[3]{1+x^2}$.

Khi đó, $x^2 = u^3 - 1$; $2x\,\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$. Đổi cận:

x	0	$\sqrt{7}$
u	1	2

$$I = \int_{1}^{2} \frac{(u^3-1)}{u}\cdot\frac{3}{2}u^2\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_{1}^{2}(u^4 - u)\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{141}{20}.$$

Vậy $m = 141$, $n = 20$; và do đó $m - 7n = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tích phân $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ bằng

A. $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan\frac{\pi}{6} - \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 85. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $-\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{52}{9}$. **D.** $-\frac{52}{9}$.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow u^2 = x^3+1 \Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \frac{2}{3}\int\limits_1^3 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\cdot u^3\Big|_1^3 = \frac{52}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho tích phân $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}} = a + b\cdot\ln\frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=3$. **B.** $a-b=5$. **C.** $a+b=5$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải.

Ta thấy
$$\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}} = \int\limits_0^4 \left(1-\frac{3}{3+\sqrt{2x+1}}\right)\mathrm{d}(\sqrt{2x+1}) = \left[\sqrt{2x+1} - 3\ln(\sqrt{2x+1}+3)\right]\Big|_0^4 = 2+3\cdot\ln\frac{2}{3}$$

Vậy $a+b=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{x+4}{x+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1+\ln 7$. **B.** $\ln\frac{4}{3}$. **C.** $1+\ln\frac{4}{3}$. **D.** $1+\ln 12$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{x+4}{x+3}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = (x+\ln|x+3|)\Big|_0^1 = 1+\ln\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Tìm $a+b$ biết $\int \frac{7x+11}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = a\ln|x+2| + b\ln|x+1| + C$.

A. $a+b=7$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=11$. **D.** $a+b=-5$.

Lời giải.

$$\int \frac{7x+11}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x+2| + 4\ln|x+1| + C \Rightarrow a+b=7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 89. Tính $I = \int\limits_0^2 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 3\mathrm{e}^4 - 1$. **B.** $I = 4\mathrm{e}^4$. **C.** $I = \mathrm{e}^4 - 1$. **D.** $I = \mathrm{e}^4$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_0^2 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_0^2 = \mathrm{e}^4 - 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 90. Biết tính phân $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{M}{N}$ là phân số tối giản. Tính $M + N$

A. 36. **B.** 38. **C.** 37. **D.** 35.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow t^3 = 1 - x \Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.

Ta có $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Vậy $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^1 \left(1-t^3\right)t^3\,\mathrm{d}t = 3\left(\dfrac{t^4}{4} - \dfrac{t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{9}{28}$.

Do đó $M = 9$, $N = 28$. Suy ra $M + N = 37$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Tích phân $I = \int\limits_1^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+5}$

A. $\log\dfrac{4}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{25}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$I = \int\limits_1^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+5} = \ln|x+5|\,\Big|_1^3 = \ln 8 - \ln 6 = \ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Tích phân $\int\limits_0^2 2x(x^2+1)^{2018}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5^{2019}-1}{2019}$. **B.** $\dfrac{5^{2019}-1}{4038}$. **C.** $\dfrac{5^{2018}-1}{4036}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 2x(x^2+1)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x^2+1)^{2018}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \dfrac{(x^2+1)^{2019}}{2019}\Big|_0^2 = \dfrac{5^{2019}-1}{2019}$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Tích phân $I = \int\limits_1^2 (x^2+3x-5)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{17}{6}$. **B.** $-\dfrac{43}{6}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{71}{6}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_1^2(x^2+3x-5)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-5x\right)\Big|_1^2=\frac{11}{6}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=1$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_0^1(2x+1)\,\mathrm{d}x=\left(x^2+x\right)\Big|_0^1=2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_1^2[kx-f(x)]\,\mathrm{d}x=-1$ ($k\in\mathbb{Z}$) thì giá trị k bằng

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $-1=\int\limits_1^2[kx-f(x)]\,\mathrm{d}x=\frac{kx^2}{2}\Big|_1^2-4\Rightarrow\frac{3k}{2}=3\Rightarrow k=2.$

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{b}{c}+a\ln 2$ (với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của biểu thức $T=2a+3b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=-6$. **C.** $T=5$. **D.** $T=6$.

Lời giải.

$$\int\limits_1^2\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_1^2\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=2\Rightarrow T=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{-2+\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{-2-\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{2+\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}$. Tính giá trị của biểu thức $f(2)-f(1)$.

A. 2. **B**. 3. **C**. -3. **D**. -2.

Lời giải.

Ta có $f(2)-f(1)=\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\Big|_1^2=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}^2-1$. **B**. $I=\mathrm{e}-1$. **C**. $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **D**. $I=\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho $\displaystyle\int_1^2 f(x^2+1)x\,\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B**. $I=1$. **C**. $I=-1$. **D**. $I=4$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Khi đó $x=2\Rightarrow t=5$ và $x=1\Rightarrow t=2$.

Vậy $\displaystyle\int_1^2 f(x^2+1)x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow I=4$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. C	5. A	6. B	7. D	8. A	9. C	10. B
11. A	12. D	13. A	14. A	15. D	16. C	17. A	18. B	19. C	20. B
21. B	22. A	23. B	24. D	25. D	26. D	27. D	28. C	29. C	30. B
31. A	32. B	33. B	34. C	35. B	36. A	37. D	38. B	39. B	40. C
41. D	42. D	43. B	44. C	45. A	46. A	47. B	48. B	49. C	50. C
51. A	52. B	53. B	54. C	55. C	56. B	57. B	58. C	59. A	60. C
61. C	62. A	63. C	64. D	65. D	66. C	67. A	68. A	69. D	70. A
71. C	72. C	73. B	74. D	75. C	76. C	77. D	78. D	79. B	80. C
81. A	82. A	83. B	84. C	85. C	86. C	87. C	88. A	89. C	90. C
91. B	92. A	93. C	94. B	95. A	96. A	97. A	98. A	99. C	100. D

3 Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\displaystyle\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^1 f(|3x-2|)\mathrm{d}x$

A. $I=3$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=9$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^1 f(|3x-2|)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(3x-2)\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$\displaystyle I_1=\int_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}(-3x+2)$.

Đặt $t=-3x+2$ suy ra $x=-1\Rightarrow t=5$; $x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=0$. Do đó $\displaystyle I_1=\frac{1}{3}\int_0^5 f(t)\mathrm{d}t=2$.

$\displaystyle I_2=\int_{\frac{2}{3}}^1 f(3x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{\frac{2}{3}}^1 1f(3x-2)\mathrm{d}(3x-2)$.

Đặt $t=3x-2$ suy ra $x=1\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=0$. Do đó $\displaystyle I_2=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$.

Vậy $I=I_1+I_2=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}&=\int_0^1 \frac{x+2-2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 \frac{x+2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\ln|x+2|\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Big|_0^1\\&=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$, suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\dfrac{14}{9}$. **B.** $-\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{7}{9}$. **D.** $-\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)+\tan x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow \cos x\cdot f(x)+\sin x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow [\sin x\cdot f(x)]'=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\displaystyle\int [\sin x\cdot f(x)]'\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\cdot f(x)=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Tính $\displaystyle I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x.\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle I=x\cdot\tan x-\int\tan x\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x-\int\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x\cdot\tan x+\ln|\cos x|}{\sin x}=\dfrac{x}{\cos x}+\dfrac{\ln|\cos x|}{\sin x}$.

Do $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}\ln 3$.

Khi đó $\begin{cases}a=\dfrac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Giá trị của $\displaystyle\int_0^1(2019x^{2018}-1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017}+1$. **C.** $2^{2017}-1$. **D.** 1.

Lời giải.

$$\int_0^1(2019x^{2018}-1)\mathrm{d}x=2019\int_0^1 x^{2018}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x=(x^{2019}-x+C)\Big|_0^1=0$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\displaystyle\int_0^3[2x\ln(x+1)+xf'(x)]\,\mathrm{d}x=0$ và $f(3)=1$. Biết $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a+b\ln 2}{2}$ với a,b là các số thực dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 35. **B.** 29. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải.

Tính $\displaystyle I=\int_0^3 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ v=x^2\end{cases}$. Khi đó

$I = x^2\ln(x+1)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \dfrac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = 9\ln 4 - \left(\dfrac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right)\Big|_0^3 = 16\ln 2 - \dfrac{3}{2}.$

Tính $J = \int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u_J = x \\ dv_J = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_J = \mathrm{d}x \\ v_J = f(x) \end{cases}.$

$J = \int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x = xf\ (x)|_0^3 - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Mà $\int\limits_0^3 \left[2x\ln(x+1) + xf'(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow I + J = 0 \Rightarrow 16\ln 2 - \dfrac{3}{2} + 3 - \int\limits_0^3 f(x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 16\ln 2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3+32\ln 2}{2}.$

Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 32 \end{cases}$. Vậy $a + b = 35$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{9^x + 3m}{9^x + 3}dx = m^2 - 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m

A. $P = 12$. **B.** $P = \dfrac{1}{2}$. **C.** $P = 16$. **D.** $P = 24$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 \frac{9^x + 3m}{9^x + 3}dx = m^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x + 3}dx + m\int\limits_0^1 \frac{3}{9^x + 3}dx = m^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ &m^2 - m\int\limits_0^1 \frac{3}{9^x + 3}dx - \int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x + 3}dx - 1 = 0 \end{aligned}$$

Phương trình trên là phương trình bậc hai đối với biến m, với các hệ số

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\int\limits_0^1 \frac{3}{9^x + 3}dx \\ c &= -\int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x + 3}dx - 1 \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Viet, tổng các giá trị của m là:

$$m_1+m_2=-\frac{b}{a}=\int\limits_0^1\frac{3}{9^x+3}dx=\frac{1}{2}$$

(dùng máy tính bỏ túi tính tích phân xác định)

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x.\ln\left(\dfrac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $12\ln 13-13$. **B.** $13\ln 13-12$. **C.** $12\ln 13+13$. **D.** $13\ln 13+12$.

Lời giải.

Từ giả thiết và

$$\begin{aligned}&f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}.\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\Leftrightarrow\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\frac{f(x)}{x}\right]'.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.\qquad(1)\end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$, nên $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2+1}{2}\Rightarrow f(x)=x\ln\dfrac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\displaystyle\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x.\ln\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{d}x\qquad(2)$.

Đặt $u=\ln\dfrac{x^2+1}{2}\Rightarrow du=\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; $dv=x\,\mathrm{d}x$, chọn $v=\dfrac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 x\,\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Big|_1^5=13\ln 13-12.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $2[f(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)+[f'(x)]^2=0$ với $\forall x\in[0;2]$. Biết $f(0)=1;\ f(2)=e^6$.

Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^0(2x+1)f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1+e$. **B.** $1-e^2$. **C.** $1-e$. **D.** $1-e^{-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&2[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f''(x) - [f'(x)]^2 = 2[f(x)]^2\\
\Leftrightarrow\ & \frac{f(x)\cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 2\\
\Leftrightarrow\ & \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = \int 2dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + \mathrm{C}_1\\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 2x + C_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = x^2 + C_1x + C_2
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \Rightarrow \ln 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0\\
f(2) &= e^6 \Rightarrow 6 = 4 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 1\\
\Rightarrow\ \ln|f(x)| &= x^2 + x \Rightarrow f(x) = e^{x^2+x}\\
\Rightarrow\ I &= \int_{-2}^{0} (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x}\Big|_{-2}^{0} = 1 - e^2
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho $\displaystyle\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị 2^{a-3b+c} bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 64.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1|\Big|_3^4 + 2\ln|x-2|\Big|_3^4$

$= 3\ln 3 - 3\ln 2 + 2\ln 2 = -\ln 2 + 3\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3\\ b = -1 \Rightarrow a - 3b + c = 6\\ c = 0 \end{cases}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{17}{8}$.

Lời giải.

Đặt $u = \ln(\sin x + 2\cos x) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x.$

$\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$, chọn $v = \tan x + 2 = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= (\tan x + 2)\cdot \ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= 3\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\ln 2 - (x + 2\ln(\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Vậy $abc = \dfrac{15}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho hai hàm số $f(x)$ và $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{\pi}{20}$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{10}$. **C.** $I = -\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I = -\dfrac{\pi}{10}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = -2$, ta có

$$I = -\int\limits_{2}^{-2} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} &\Leftrightarrow 2\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow 3I + 2I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow I = \frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $x = 2\tan u$ ta có $\mathrm{d}x = 2\dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = 2(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow u = -\dfrac{\pi}{4}$; $x = 2 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4}$, ta có

$$I = \frac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1+u^2)}{4+4\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}u = \frac{1}{10}u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2) = 16; \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 20$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 13$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$, ta có

$$I = \int\limits_0^2 \frac{t}{2} f'(t) \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$, ta có

$$I = \frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{4}\left[2f(2) - 4\right] = \frac{1}{4}(2 \cdot 16 - 4) = 7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x) - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C. \end{aligned}$$

Suy ra $F'(x) = f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	$-\infty$	↗	$\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$ nên ta có

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}.$$

Vậy $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x=k$.

☑ $\displaystyle k=\int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f'(x)=\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1-k.$

Suy ra $\displaystyle 2k=\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1$.

☑ $\displaystyle k=\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f(x)=\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-k.$

Suy ra $\displaystyle 2k=\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1$.

Vậy $\dfrac{\mathrm{e}f'(1)-f'(0)}{\mathrm{e}f(1)-f(0)}=\dfrac{\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1}{\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2018$, $f(2)=2019$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$

Khi đó $f(-1)=\ln 2+C_1$; $f(0)=C_2=2018$; $f(2)=C_3=2019$; $f(3)=\ln 2+C_4$

- $\displaystyle\int_2^3 f'(x)dx=\int_2^3\frac{1}{x-1}dx\Leftrightarrow f(3)-f(2)=\ln 2\Leftrightarrow \ln 2+C_4-C_3=\ln 2\Rightarrow C_3=C_4$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 f'(x)dx=\int_{-1}^0\frac{1}{x-1}dx\Leftrightarrow f(0)-f(-1)=-\ln 2\Leftrightarrow C_2-C_1-\ln 2=-\ln 2\Rightarrow C_1=C_2$

Vậy $S=f(3)-f(-1)=C_4-C_1=2019-2018=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=A+B\pi$. Tính $A+B$.

A. 7. **B**. 6. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $y=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\pi^2\Rightarrow t=\pi$ Suy ra $I=2\displaystyle\int\limits_0^{\pi}(\sin t-\cos t)t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $u=t;\ \mathrm{d}v=(\sin t-\cos t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}t; v=-\cos t-\sin t$.

$$I=2\left[t(-\cos t-\sin t)\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}(\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t\right]=2\left[\pi+(\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}\right]=4+2\pi.$$

Nên $A=4$; $B=2\Rightarrow A+B=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Giả sử $I=\displaystyle\int\limits_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a,b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là:

A. -17. **B**. 5. **C**. -5. **D**. 17.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[6]{x}=t\Leftrightarrow x=t^6;\ t\geq 0$. Khi đó ta có $dx=6t^5\cdot\mathrm{d}t$.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\limits_1^{2}\frac{6t^5\cdot\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=\int\limits_1^{2}\frac{6t^3.\mathrm{d}t}{t+1}\\&=\int\limits_1^{2}\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\Big|_1^{2}=6\ln\frac{2}{3}+11.\end{aligned}$$

Do đó $a=6;\ b=11$. Vậy $a-b=-5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\displaystyle\int\limits_0^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\displaystyle\int\limits_0^{5}f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Tính $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}(|4x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A. 3. **B**. 6. **C**. $\frac{9}{4}$. **D**. $\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp tích phân đổi biến.

Ta có: $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}f\left(|4x-1|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}}f\left(-4x+1\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}f\left(4x-1\right)\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1=\displaystyle\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}}f\left(-4x+1\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $-4x+1=t \Rightarrow \mathrm{d}t=-4\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=5 \\ x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t=0. \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=-\frac{1}{4}\int\limits_5^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot 4=1.$$

Xét $I_2=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f\left(4x-1\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $4x-1=t \Rightarrow \mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t=0. \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{4}\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot 8=2$$

$I=I_1+I_2=1+2=3$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^8 \frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. 4. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 10.

Lời giải.

☑ Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=6$.

Đặt $t=\cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{1}{4}$. Ta có

$$I_1=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t=6 \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x=6.$$

☑ Xét tích phân $I_2=\displaystyle\int\limits_1^8 \frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=1 \Rightarrow t=1$, $x=8 \Rightarrow t=2$. Ta có

$$I_2=\int\limits_1^2 \frac{3t^2 f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t=6 \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x=1.$$

☑ Xét tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$. Khi $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$, khi $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=2$. Ta có

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2xf(x^2)}{2x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x=6+1=7.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16,\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$

A. 13. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 7.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức từng phần: $\displaystyle\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\big|_a^b-\int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$.

Cách giải:

$$\begin{aligned}
I=\int\limits_0^2 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}\left(f(2x)\right)\\
&= \frac{1}{2}x\cdot f(2x)\big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}(2x)\\
&\overset{\text{đặt } t=2x}{=} \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 16-\frac{1}{4}\cdot 4=8-1=7.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x)+2f(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4\mathrm{e}^2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4\mathrm{e}^2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương pháp: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

Cách giải: Ta có

$$f'(x)+2f(x)=1\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{2x}f'(x)+\mathrm{e}^{2x}\cdot 2f(x)=\mathrm{e}^{2x}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{2x}\cdot f\left(x\right)\right)' = \mathrm{e}^{2x}\\
&\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{2x}\cdot f\left(x\right) = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x}\cdot f\left(x\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.
\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned}
f\left(0\right) &= 1\\
\Rightarrow 1 &= \frac{1}{2} + C\\
\Rightarrow C &= \frac{1}{2}\\
\Rightarrow \mathrm{e}^{2x}\cdot f\left(x\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow f\left(x\right) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{2x}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 f\left(x\right)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\Big|_0^1\\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4\mathrm{e}^2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = x_0 > 1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x) = f(x) - x$ có một điểm cực trị .
Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \log_2(f(2x))$, ta có $g'(x) = \dfrac{2f'(x)}{f(2x)\ln 2}$.
Theo giả thiết ta có $f(2x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq 2x \leq 1 \\ 2x \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

và có dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm, suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z-1| = |z-i|$ và $|z+2m| = m+1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có $|z+2m| = m+1 \geq 0$.
TH1: $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow z = 2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình $|z-1| = |z-i|$
TH2: $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (1).
Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z+2m| = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x-1)+yi| = |x+(y-1)i| \\ |(x+2m)+yi| = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ (x+2m)^2 + y^2 = (m+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (x+2m)^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 4mx + 3m^2 - 2m - 1 = 0 (*) \end{cases}.$$

Để tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 2(3m^2 - 2m - 1) = 2(-m^2 + 2m + 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$ (2)

Từ (1), (2) và $m \in \mathbb{Z}$ ta nhận được $S = \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $0 + 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án (D) □

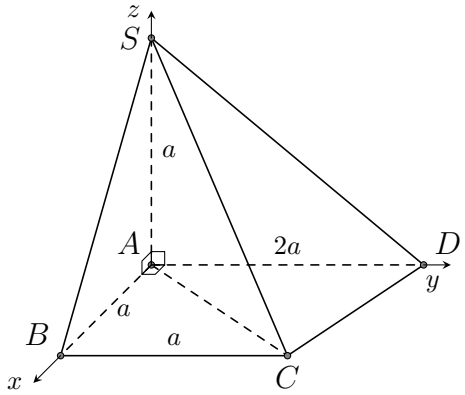
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$ và $S(0;0;a)$.



Khi đó ta có

$\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{SD} = (0;2a;-a)$, $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a)$, $[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}] = (-a;a;2a)$ và

$[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}] \cdot \overrightarrow{SA} = -a \cdot 0 + a \cdot 0 + 2a \cdot (-a) = -2a^2$.

Vậy ta có

$$\mathrm{d}(AC, SD) = \frac{|[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}] \cdot \overrightarrow{SA}|}{|[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}]|} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + a^2 + 4a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Biết $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả là $I = a\ln 3 + b\ln 5$. Giá trị của $2a^2 + ab + b^2$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2t}{3} \cdot \mathrm{d}t$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$, với $x = 5 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_2^4 \frac{2t}{3\left(\dfrac{t^2-1}{3}\right)t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^4 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^4 = \ln\left(\frac{3}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 = 2\ln 3 - \ln 5. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2, b = -1$.

Khi đó $2a^2 + ab + b^2 = 2(2)^2 + 2(-1) + (-1)^2 = 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. So sánh $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ ta được

A. $f(2) < f(0) < f(-2)$. **B**. $f(0) < f(-2) < f(2)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(0)$. **D**. $f(-2) < f(0) < f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1) = x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3$.

☑ $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\dfrac{464}{105} < 0.$
$\Rightarrow f(0) - f(-2) < 0 \Rightarrow f(0) < f(-2).$

☑ $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{2} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\dfrac{44}{105} < 0.$
$\Rightarrow f(2) - f(0) < 0 \Rightarrow f(2) < f(0).$

Vậy $f(2) < f(0) < f(-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$

A. -1. **B**. $1 - \ln(\cos 1)$. **C**. 0. **D**. $1 - \cot 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x.$

Mà

☑ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - 1.$

☑ $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x = \int_0^1 \tan x\mathrm{d}(f(x)) = f(x)\cdot\tan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Vậy $I = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Biết rằng tồn tại duy nhất bộ các số nguyên a, b, c sao cho $\displaystyle\int_2^3 (4x+2)\ln x\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 19. **B**. -19. **C**. 5. **D**. -5.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int_2^3 (4x+2)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = (4x+2)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = 2x^2 + 2x = 2x(x+1) \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I = & \left[2x(x+1)\ln x\right]|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x \\ I = & \ 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\int_2^3 (x+1)dx \\ I = & \ 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\left(\frac{x^2}{2}+x\right)|_2^3 \\ I = & \ 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\left(\frac{15}{2}-4\right) \\ I = & \ 24\ln 3 - 12\ln 2 - 7 = a + b\ln 2 + c\ln 3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -12 \Rightarrow a+b+c = -7-12+24 = 5. \\ c = 24 \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = 3$. **B.** $I = 5$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 6$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - 1 = J - 1, \left(\text{với } J = \int_0^2 f(x)dx\right)$.

Mặt khác ta có $1 = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3f(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 f(2x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx = 3$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 f(x)dx = 3 \Rightarrow J = 3.$

Vậy $I = \int_1^2 f(x)dx = 3 - 1 = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Tìm tất cả giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\begin{bmatrix} k = -1 \\ k = 2 \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} k = 1 \\ k = -2 \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} k = 1 \\ k = 2 \end{bmatrix}$. **D.** $\begin{bmatrix} k = -1 \\ k = -2 \end{bmatrix}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\Big|_1^k = k^2-k$

$4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{x+1}+1} = 2$. Ta có $k^2-k=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$. Suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $\displaystyle\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Khi $x=1 \Rightarrow t=1$; khi $x=4 \Rightarrow t=2$.

Do đó $I = \displaystyle\int_1^2 f(t)\cdot 2\,\mathrm{d}t = 2\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Biết $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$. Tính $\displaystyle\int_1^2 f(4x-3)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{15}{4}$. **B.** $I=15$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=25$.

Lời giải.

Ta có $I_1 = \displaystyle\int_1^2 f(4x-3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^2 f(4x-3)\,\mathrm{d}(4x-3) = \frac{1}{4}\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Hay là $I_1 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{25}{4}$.

Lại có $I_2 = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = \frac{1}{2}\int_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Vậy $I = I_1 - I_2 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải.

Nhân tử và mẫu của $\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}$ cho $x\sqrt{x}$ ta được $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^3$ thì $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{1}{\sqrt{t(t+1)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}}\,\mathrm{d}t$.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int\frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+b}}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)+b}\right| + C$, ta có

$$I = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{1}{8}}^{1} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$$

Vậy $a+b+c+d = 10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\ln\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x = a\cdot\ln 2 - \frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b và c là các số nguyên dương, $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Hãy tính giá trị của $a\cdot b\cdot c$.

A. 6. **B.** 3. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int_0^1 x\cdot\ln\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow t^2 = 3x^2+1 \Rightarrow \dfrac{t}{3}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$I = \int_1^2 \frac{t}{3}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ \mathrm{d}v = \dfrac{t}{3}\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ v = \dfrac{t^2}{6}. \end{cases}$

$$I = \frac{t^2}{6}\ln t\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{6}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{t^2}{12}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Vậy $a \cdot b \cdot c = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 4 = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2) = 3$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_0^2 x.f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ Ta được $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \text{chọn } v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^2 x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3 - 3 = 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Giả sử $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\left(a\sqrt{a} - \frac{b}{b+c}\sqrt{c}\right)$ với $(a, b, c \in \mathbb{N}; 1 \le a, b, c \le 9)$. Tính giá trị biểu thức $S = \mathrm{C}_{2a+c}^{b-a}$.

A. 165. **B.** 715. **C.** 5456. **D.** 35.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{1}{x}$, ta được $dt = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Đổi cận

x	1	2
t	1	$\frac{1}{2}$

Ta được $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$

Đặt $u = \sqrt{t^2+1}$, ta được $u\,\mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận

t	$\frac{1}{2}$	1
u	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{2}$

Ta được $I = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} u^2\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{5}}{8}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \mathrm{C}_7^3 = 35.$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho biết tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 (x+2)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 2+\dfrac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $a=b$. **B.** $a<b$. **C.** $a>b$. **D.** $a=b+3$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ \mathrm{d}v=(x+2)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2}+2x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+4x}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+3x-3\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 \\ &= 4\ln 2+\frac{-7}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a=4$, $b=4$. Vậy $a=b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó giá trị tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{\mathrm{e}^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln(x^2+1)\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $t=\ln(x^2+1) \Rightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = \dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$ và $x=\sqrt{\mathrm{e}^{2018}-1} \Rightarrow t=2018$.

Khi đó: $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{\mathrm{e}^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln(x^2+1)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2018} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho các số thực $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^3}+bx\mathrm{e}^x$ với mọi $x\neq -1$. Biết $f'(0)=-22$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $a+b$.

A. $a+b=19$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=10$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{3a}{(x+1)^4}+b\mathrm{e}^x+bx\mathrm{e}^x \Rightarrow f'(0)=-22 \Rightarrow -3a+b=-22$.

Ta có: $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+b(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{8}a+b \Rightarrow \frac{3}{8}a+b=5.$

Ta có hệ: $\begin{cases}\dfrac{3}{8}a+b=5\\ -3a+b=-22\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=8\\ b=2\end{cases} \Rightarrow a+b=10.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Biến đổi $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ thành $\displaystyle\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ với $t=\sqrt{1+x}$. Khi đó $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(t)=2t^2-2t$. **B.** $f(t)=t^2+t$. **C.** $f(t)=2t^2+2t$. **D.** $f(t)=t^2-t$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{1+x} \Rightarrow t^2=1+x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi đó $\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{t^2-1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2t(t-1)\,\mathrm{d}t$.

Vậy $f(t)=2t\,(t-1)=2t^2-2t$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$ và $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Lời giải.

Đặt $2x=t$, ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Theo công thức tích phân từng phần $I=\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Tập nghiệm S của bất phương trình $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t>0$ (ẩn x) là

A. $S=(-\infty;0)$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $S=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}(t^2+1) = \sqrt{t^2+1}\Big|_0^x = \sqrt{x^2+1}-1.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>1 \Leftrightarrow x^2+1>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0.$$

Vậy $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $\displaystyle\int_0^3 f(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó

$$\int_0^3 f(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)2t\,\mathrm{d}t = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 tf(t)\,\mathrm{d}t = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Tìm các số a, b để hàm số $f(x) = a\sin(\pi x) + b$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

A. $a = \dfrac{\pi}{2}, b = 2$. **B.** $a = -\dfrac{\pi}{2}, b = 2$. **C.** $a = -\pi, b = 2$. **D.** $a = \pi, b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2 = f(1) = a\sin\pi + b = b$, do đó

$$4 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (a\sin(\pi x) + 2)\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + 2 \Rightarrow a = \pi.$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Biết $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}} = a\ln 3 + b\ln 5$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính giá trị của $T = a^2 + ab + b^2$.

A. $T = 4$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 5$.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow u^2 = 3x+1 \Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\cdot u\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 2$ và $x = 5 \Rightarrow u = 4$.

$$I = \frac{2}{3}\int_2^4 \frac{u}{\frac{u^2-1}{3}\cdot u}\,\mathrm{d}u = \int_2^4 \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int_2^4 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\,\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_2^4 = \ln\frac{9}{5} = 2\ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $a = 2; b = -1$. Từ đó $a^2 + ab + b^2 = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Giả sử $k > 0$ và $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln(2+\sqrt{5})$. Giá trị của k là

A. $k = \sqrt{3}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 2\sqrt{3}$. **D.** $k = 1$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}}=\int\limits_0^2 \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\,\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+k})$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+k})\Big|_0^2=\ln(2+\sqrt{4+k})-\ln\sqrt{k}=\ln\frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}$$

Theo đề $\ln\dfrac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=\ln(2+\sqrt{5})\Leftrightarrow\dfrac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=2+\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 2+\sqrt{4+k}=2\sqrt{k}+\sqrt{5k}\Leftrightarrow\dfrac{2(k-1)}{1+\sqrt{k}}+\dfrac{4(k-1)}{\sqrt{5k}+\sqrt{4+k}}=0\Leftrightarrow k=1.$

Nhận xét: So sánh giữa bài giải và việc thử đáp án bằng máy tính cầm tay thì có sự chênh nhau quá lớn về độ khó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ và $\displaystyle\int\limits_{-2018}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=12$. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $I=2018$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-2018$.

Lời giải.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, với $x=0\Rightarrow t=0$, $x=2018\Rightarrow t=-2018$.

$I=\displaystyle\int\limits_0^{-2018} -f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-2018}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t.$

Do $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-t)=-f(t)$, $\forall t$ thuộc tập xác định.

nên $I=\displaystyle\int\limits_{-2018}^{0} -f(t)\,\mathrm{d}t=-\int\limits_{-2018}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=-\int\limits_{-2018}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=-12.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=9$. **B.** $I=-9$. **C.** $I=\dfrac{9}{2}$. **D.** $I=18$.

Lời giải.

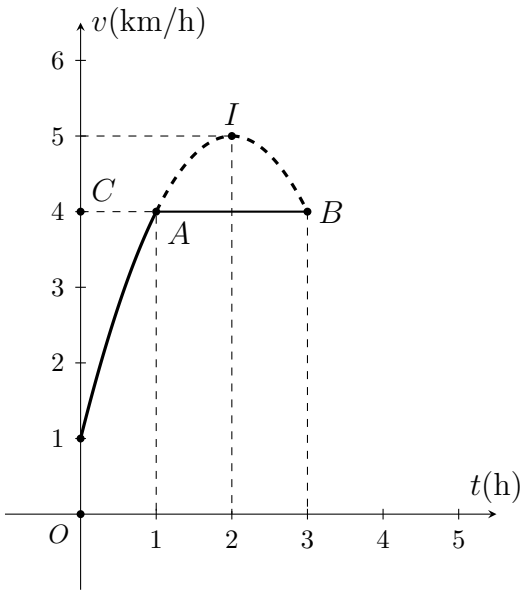
Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\cos x\sin x\,\mathrm{d}x=-\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Với $x=0\Rightarrow t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0$.

$I=\displaystyle\int\limits_1^0 f(t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=9.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t(h) có đồ thị vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. 15 (km). **B**. $\dfrac{32}{3}$ (km). **C**. 12 (km). **D**. $\dfrac{35}{3}$ (km).

Lời giải.

Từ đồ thị, ta xác định được phương trình của parabol là: $y = -x^2 + 4x + 1$.
Theo giả thiết và đồ thị, quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó là

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 4\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\,(\text{km}).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -10$. **B**. $I = -5$. **C**. $I = 0$. **D**. $I = -18$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.
Suy ra $I = 2\displaystyle\int_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x = 2\left(xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 2.(-4-1) = -10.$
Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$ thì được

A. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x^3} - \frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^2$.
B. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^2$.
C. $I = \dfrac{3 - \ln 2}{4}$.
D. $I = \dfrac{3 + \ln 2}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$.

$$I = \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\ln x}{2x^2}\right|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\ln x}{2x^2}\right|_1^2 - \left.\frac{1}{4x^2}\right|_1^2 = \frac{3-2\ln 2}{16}$$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0$ và $f(x) - f'(x) = -\dfrac{2[f(x)]^2}{\mathrm{e}^x \cdot x\sqrt{x-x^2}}$, $\forall x \in (0;1)$. Biết $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\dfrac{1}{5}\right) \geqslant \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{5} \leqslant f\left(\dfrac{1}{5}\right) < \dfrac{1}{4}$. **C.** $f\left(\dfrac{1}{5}\right) < \dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6} \leqslant f\left(\dfrac{1}{5}\right) < \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{\mathrm{e}^x \cdot x\sqrt{x-x^2}},\ \forall x \in (0;1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^x f(x) - \mathrm{e}^x \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{2}{x\sqrt{x-x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\frac{\mathrm{e}^x}{f(x)}\right]' = \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}} \\
\Rightarrow\ & \int \left[\frac{\mathrm{e}^x}{f(x)}\right]' \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = \int \frac{-2}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}\,\mathrm{d}x. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Xét $I = \displaystyle\int \frac{-2}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{1}{x}-1} \Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{x} - 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \displaystyle\int \frac{4t}{t}\,\mathrm{d}t = 4t + C = 4\sqrt{\frac{1}{x}-1} + C$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = 4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + C}$.

Do $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{4+C} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 4}$.

Vậy $f\left(\dfrac{1}{5}\right) \approx 0{,}167$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(x^2+x)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e} + b\ln(\mathrm{e}+c)$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P = a + 2b - c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=0$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(x^2+x)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{(x+1)x\mathrm{e}^{2x}}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x\cdot(x+1)\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x\mathrm{e}^x+1$ ta có $\mathrm{d}t=(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t=(t-\ln|t|)\Big|_1^{\mathrm{e}+1}=\mathrm{e}-\ln(\mathrm{e}+1)$.

Vậy $a=1;\ b=-1;\ c=1$ nên $P=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(5)=10$, $\displaystyle\int\limits_0^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x=30$. Tính giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-20$. **B.** $I=70$. **C.** $I=20$. **D.** $I=-30$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x & \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x & \Rightarrow v=f(x)\end{cases}$.

$$\int\limits_0^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^5-\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow 30=5f(5)-\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 30=50-\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=20.$$

Chọn đáp án C □

Câu 57. Biết $\displaystyle\int\limits_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x=a+\ln\frac{b}{2}$ với a,b là các số nguyên. Tính $S=b^2-a$.

A. $S=-1$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}\Rightarrow a=8,b=3$ nên $S=b^2-a=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 6x^2f(x^3)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x.$

Mà $\displaystyle\int_0^1 6x^2 f(x^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2f(x^3)\,\mathrm{d}x^3 = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = 4.$

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\,\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{c} + b$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tổng $S = a+b+c$ bằng giá trị nào sau đây?

A. $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln|x-3|\Big|_0^1 - \ln|x-2|\Big|_0^1 \\ &= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} \\ &= \ln\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Do đó, $a = 1, b = 0, c = 3$.

Vậy $S = 1 + 0 + 3 = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4.$

Do tích phân không phụ thuộc ký hiệu biến nên ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4.$

Từ giả thiết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2$ suy ra $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 6.$

Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \left[f(x) + f'(x)\right]\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e} + b$. Tính $Q = a^{2017} + b^{2017}$.

A. $Q = 2^{2017} + 1$. **B.** $Q = 2$. **C.** $Q = 0$. **D.** $Q = 2^{2017} - 1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \left[f(x) + f'(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = I + J.$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}.$

Suy ra $I = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}f(1) - f(0) - J \Rightarrow I + J = \mathrm{e}f(1) - f(0) = \mathrm{e} - 1$ (do $f(0) = f(1) = 1$).

Suy ra $a = 1, b = -1$.

Vậy $Q = a^{2017} + b^{2017} = 1^{2017} + (-1)^{2017} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{4}$. **B.** $I = \dfrac{1+\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. **D.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$

Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho $G(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Khi đó $G'(x)$ bằng

A. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **C.** $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$. **D.** $\sqrt{1+x^2}$.

Lời giải.

Đặt $\displaystyle\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F(t) + C.$

Khi đó $G(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_1^x = F(x) - F(1).$

Suy ra $G'(x) = F'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Biết $\int\limits_0^4 x\ln(x^2+9)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$.

A. $T = 10$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 11$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^4 x\ln(x^2+9)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^4 \ln(x^2+9)\mathrm{d}\left(\frac{x^2+9}{2}\right)\\ &= \frac{x^2+9}{2}\cdot\ln(x^2+9)\Big|_0^4 - \int\limits_0^4 \frac{x^2+9}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x\\ &= \frac{25}{2}\ln 25 - \frac{9}{2}\ln 9 - \int\limits_0^4 x dx\\ &= 25\ln 5 - 9\ln 3 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^4\\ &= 25\ln 5 - 9\ln 3 - 8.\end{aligned}$$

Vậy $a = 25, b = -9, c = -8$ nên $a+b+c = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{(x+1)\ln x + 2}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e} + b\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỷ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{(x+1)\ln x + 2}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \left[1 + \frac{\ln x + 1}{1+x\ln x}\right]\mathrm{d}x = x\Big|_1^{\mathrm{e}} + \ln|1+x\ln x|\Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$.

Vậy $a = b = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) = 1$.

Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = 0$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Vậy $I = \cos x\cdot f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\cos\frac{\pi}{2}\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0\cdot f(0)\right] + 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} f\left(|2x+1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_{-1}^{1} f\left(|2x+1|\right)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} f\left(|2x+1|\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} f\left(|2x+1|\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} f\left(-(2x+1)\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x+1\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} f\left(-(2x+1)\right)\,\mathrm{d}(-(2x+1)) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x+1\right)\,\mathrm{d}(2x+1) \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f(v)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 68. Tính tích phân $I = \int\limits_0^3 \max\{x^2, 4\}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 9$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = \dfrac{43}{3}$. **D.** $I = 21$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^2 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 \max\{x^2,4\}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 4\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = 8 + \frac{19}{3} = \frac{43}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 69. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính $P = a+b+c+d$.

A. 48. **B.** 46. **C.** 54. **D.** 52.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_1^2\frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\int\limits_1^2\frac{4}{\sqrt{x(x+4)}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+4)}}\mathrm{d}x$$

Khi đó,

$$I=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+4}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2+2\sqrt{5}=\sqrt{8}+\sqrt{20}-\sqrt{24}-2.$$

Suy ra, $a=8$, $b=20$, $c=24$, $d=2$. Do đó, $P=54$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=80$, $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=-2$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -5. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** 5.

Lời giải.

Xét tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\displaystyle\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=4\Rightarrow\int\limits_0^1 40x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=160.$

Ta có: $\displaystyle\int\limits_0^1 400x^4\,\mathrm{d}x=80$, $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=80\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)-20x^2\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=20x^2$.

Nên $f(x)=\dfrac{20x^3}{3}+C$ và $f(1)=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{20x^3}{3}-\dfrac{20}{3}$.

Do đó: $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{5}{3}x^4-\frac{20}{3}x\right)\Big|_0^1=-5$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Giả sử $\displaystyle\int\limits_1^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{c}\left(a\sqrt{a}-\frac{b}{b+c}\sqrt{b}\right)$, $(a;b;c\in\mathbb{N},1\le a,b,c\le 9)$. Tính giá trị biểu thức $S=\mathrm{C}_{2a+c}^{b-a}$.

A. $S=165$. **B.** $S=715$. **C.** $S=5456$. **D.** $S=35$.

Lời giải.

Đặt $x=\tan t$ với $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ và giả sử $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ sao cho $\begin{cases}\tan\alpha=1\\ \tan\beta=2\end{cases}$. Khi đó ta có

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan^4 t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{\cos t}{\sin^4 t}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t}\Big|_\alpha^\beta$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin^3\alpha} - \frac{1}{\sin^3\beta}\right).$$

Từ điều kiện $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ và $\begin{cases}\tan\alpha = 1\\ \tan\beta = 2\end{cases}$, ta tính được $\begin{cases}\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$.

Từ đó suy ra $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{5+3}\sqrt{5}\right)$.

Vậy $a=2; b=5$ và $c=3$, suy ra $S = \mathrm{C}_{2a+c}^{b-a} = \mathrm{C}_7^3 = 35$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$, với $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \Rightarrow \ln[f(5)] = \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3{,}79$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Biết $\displaystyle\int 3x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = ax\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{2x} + C$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** -1.

Lời giải.

Đặt $u=3x; \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x; v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

$$\int 3x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x} + C \Rightarrow a+b = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Tìm $a+b+c$ biết $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln \mathrm{e}x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c$.

A. $a+b+c=3$. **B.** $a+b+c=-1$. **C.** $a+b+c=1$. **D.** $a+b+c=0$.

Lời giải.

Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln \mathrm{e}x} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3$

suy ra $a+b+c=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $2x = t \Rightarrow 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$.

Khi $x = 1$ thì $t = 2$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln c$, với $a \in \mathbb{Q}; b, c \in \mathbb{Z}$. Ta có $2a + b + c$ bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}dx = \int\limits_0^1 \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 2\ln 2\ .$$

Suy ra

$$2a + b + c = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 + 2 = 3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Kết quả của $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

☑ **Cách tự luận**

Ta có $B = \int\limits_{-1}^1 \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x$.(1)

Đặt $x = -t$ thì

$I = \int\limits_{-1}^0 \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{2018^t f(-t)}{1+2018^t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \dfrac{2018^x f(-x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{2018^x f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $B = \int\limits_0^1 \dfrac{2018^x f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

☑ **Cách trắc nghiệm**

Trước tiên tìm hàm $f(x)$, ta có $\int\limits_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $\int\limits_{-1}^{1} 9x^2\,\mathrm{d}x = 6$.

Do đó $f(x) = 9x^2$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{9x^2}{1+2018^x}\,\mathrm{d}x = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;3]$ và $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x$ là

A. 6. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

$$\int\limits_{-1}^{1} f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f[(1-2x)]\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f[(2x-1)]\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

☑ Tính $I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f[(1-2x)]\,\mathrm{d}x$:

Đặt $u = 1-2x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}x$. Với $x = -1 \Rightarrow u = 3$, với $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = 0$.

Khi đó $I_1 = -\dfrac{1}{2}\int\limits_{3}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

☑ Tính $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f[(2x-1)]\,\mathrm{d}x$:

Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. Với $x = 1 \Rightarrow u = 1$, với $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = 0$.

Khi đó $I_2 = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_{0}^{1} xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 12. **B**. 13. **C**. 20. **D**. 7.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f(t).\end{cases}$

Suy ra $I=\dfrac{1}{4}\left(tf(t)\Big|_0^2-\displaystyle\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\dfrac{1}{4}\left[2f(2)-0f(0)-4\right]=7.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2,$ tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

A. 6. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=(1+\tan x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1.$

Ta có $4=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=4.$

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\dfrac{x^2f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=4+2=6$

hay $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=6.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho $f,\ g$ là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn

$$\int\limits_1^3\left(f(x)+3g(x)\right)\,\mathrm{d}x=10\text{ và }\int\limits_1^3\left(2f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x=6.$$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^3\left(f(x)+g(x)\right)\,\mathrm{d}x.$

A. $I=6.$ **B**. $I=8.$ **C**. $I=7.$ **D**. $I=9.$

Lời giải.

Ta có

☑ $\displaystyle\int\limits_1^3\left(f(x)+3g(x)\right)\,\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=10.\qquad(1)$

☑ $\displaystyle\int\limits_1^3\left(2f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=6.\qquad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Vậy $I = \int\limits_1^3 (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = 4+2 = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_0^1 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 6. **B**. 4. **C**. 12. **D**. 7.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}x\cdot f(2x)\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}f(2) - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 8 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Tính $I_1 = \int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I_1 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 4$. Do đó $I = 8-2 = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{x^3+6x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b} + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a-b+c$.

A. 10. **B**. 6. **C**. 0. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_1^2 \dfrac{x^3+6x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(x+1+\dfrac{6x-3}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_1^2 (x+1)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_1^2 \dfrac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = \left(\dfrac{x^2}{2}+x+\ln|x^2-x+1|\right)\Big|_1^2 = \dfrac{5}{2}+3\ln 3$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow P = a-b+c = 6.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Hàm số $f(x) = \dfrac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{8}$. Tính giá trị của $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $\dfrac{3\pi - 11\ln 2}{4}$. **B**. $\dfrac{3\pi}{4}$. **C**. $\dfrac{3\pi}{8}$. **D**. $\dfrac{3\pi-\ln 2}{4}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ khi đó $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{2}(\cos x+\sin x)+\frac{11}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{11}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{11}{2}\ln|\cos x+\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{11\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{11\ln 2}{4} = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{11\ln 2}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. **B.** $I=\dfrac{1}{6}$. **C.** $I=\dfrac{2}{15}$. **D.** $I=\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Thay x bởi $1-x$ vào đẳng thức đề bài ta có

$$\begin{aligned}&2f(1-x)+3f(1-1+x)=\sqrt{1-1+x}\\ \Leftrightarrow\ &2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Ta xét hệ phương trình $\begin{cases}2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}\\ 3f(1-x)+2f(x)=\sqrt{1-x}.\end{cases} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{5}\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int\limits_0^1 \left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho $I=\displaystyle\int\limits_0^2 \left(2x^2-x-m\right)\,\mathrm{d}x$ và $J=\displaystyle\int\limits_0^1 \left(x^2-2mx\right)\,\mathrm{d}x$. Tìm điều kiện của m để $I\le J$.

A. $m\ge 3$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải.

Ta có:

$I=\displaystyle\int\limits_0^2 \left(2x^2-x-m\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-mx\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}-2m.$

$$J=\int\limits_0^1 \left(x^2-2mx\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-mx^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-m.$$

Khi đó: $I\le J\Leftrightarrow \dfrac{10}{3}-2m\le\dfrac{1}{3}-m\Leftrightarrow m\ge 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(0)=0,\ f'(x)\le 10, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất mà $f(3)$ có thể đạt được.

A. 30. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 20.

Lời giải.

Ta có: $f(3)=f(0)+\displaystyle\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x\le\int\limits_0^3 10\,\mathrm{d}x=10x\Big|_0^3=30.$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $f(x)=10x$.

Vậy giá trị lớn nhất mà $f(3)$ có thể đạt được là 30.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{(x^2+5x+6)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}-b-\ln\frac{a.\mathrm{e}+c}{3}$ với a,b,c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S=2a+b+c$.

A. $S=10$. **B.** $S=0$. **C.** $S=0$. **D.** $S=9$.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_0^1\frac{(x^2+5x+6)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{(x+2)\mathrm{e}^x(x+3)\mathrm{e}^x}{(x+2)\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $\mathrm{e}^x(x+2)=t\Rightarrow \mathrm{e}^x(x+3)\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$. Đổi cận:

x	0	1
t	2	3e

Từ đó ta có

$$I=\int\limits_2^{3\mathrm{e}}\frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t=\int\limits_2^{3\mathrm{e}}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t=t-\ln|t+1|\Big|_1^{3\mathrm{e}}=3\mathrm{e}-2-\ln\frac{3\mathrm{e}+1}{3}.$$

Vậy $a=3;b=2;c=1\Rightarrow S=2\cdot 3+2+1=9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3,\ \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x=1$ và $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x\tan x f(x)\right)\,\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x f'(x)\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \tan x f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = -1. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = (f(x)\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 90. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$, tính $P = a + 2b + c - 7$.

A. $-\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\dfrac{67}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(3x^2 - x\sqrt{9x^2-1}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(x^3 - \frac{1}{27}\left(9x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2 \\ &= 7 + \frac{16\sqrt{2}}{27} - \frac{35\sqrt{35}}{27}. \end{aligned}$$

Suy ra $P = 7 + 2\cdot\dfrac{16}{27} - \dfrac{35}{27} - 7 = -\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Biết $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3\sqrt{2x-1}+1}\,\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3+d\ln 5$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $S=a+b+c+d$.

A. $S=-1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=3$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{2x-1}$, suy ra $t^2=2x-1\Leftrightarrow 2x=t^2+1$. Khi đó $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Với $x=1$ thì $t=1$, với $x=5$ thì $t=3$.

Như vậy tích phân đã cho bằng với tích phân sau

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{t^2}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t &= \int_1^3 \left(1+\frac{1}{t+1}-\frac{4}{t+2}\right)\mathrm{d}x = \left(t+\ln|t+1|-4\ln|t+2|\right)\Big|_1^3\\ &= (3+\ln 4-4\ln 5)-(1+\ln 2-4\ln 3) = 2+\ln 2+4\ln 3-4\ln 5.\end{aligned}$$

Khi đó $a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=-4$. Vậy $S=2+1+4-4=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(x^3-3x^2+2\right)^{2017}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** $2{,}1\cdot 10^{-15}$. **C.** $690952{,}8$. **D.** $\dfrac{272}{35}$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_{-1}^3 \left(x^3-3x^2+2\right)^{2017}\mathrm{d}x = \int_{-1}^3 (x-1)^{2017}(x^2-2x-2)^{2017}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=x^2-2x-2\Rightarrow \mathrm{d}u=2(x-1)\,\mathrm{d}x$.

$(x-1)^{2017}\,\mathrm{d}x=(x-1)(x-1)^{2016}\,\mathrm{d}x=(x-1)(x^2-2x-2+3)^{1008}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(u+3)^{1008}\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow u=1; x=3\Rightarrow u=1$.

Suy ra $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^1 (u+3)^{1008}u^{2017}\,\mathrm{d}u=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=3$ và $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

Xét $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=3$: đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ suy ra $K=\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=3$.

Xét $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=1\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-3=1$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Biết $\int\limits_{-1}^{11} f(x)\,\mathrm{d}x=18$. Tính $I=\int\limits_0^2 x\left(2+f(3x^2-1)\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=7$. **C.** $I=8$. **D.** $I=10$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^2 (2x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int\limits_0^2 f\left(3x^2-1\right)\,\mathrm{d}\left(3x^2-1\right)=4+\frac{1}{6}\int\limits_0^2 f\left(3x^2-1\right)\,\mathrm{d}\left(3x^2-1\right)$.

Đặt $u=3x^2-1$. Với $x=0\Rightarrow u=-1, x=2\Rightarrow u=11$.

Nên $I=4+\frac{1}{6}\int\limits_{-1}^{11} f(u)\,\mathrm{d}u=4+\frac{1}{6}18=7$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x\\ &=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x\\ &=\int\limits_1^2 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &=\ln(x+2)\big|_1^2-\ln(x+3)\big|_1^2\\ &=\ln 4-\ln 3-(\ln 5-\ln 4)\\ &=2\ln 4-\ln 3-\ln 5=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.\end{aligned}$$

Suy ra $a=4$, $b=-1$, $c=-1$. Nên $a+b+c=4+(-1)+(-1)=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hàm số f liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1} - 2 = 4 - 2 \\
\Leftrightarrow\ & f\left(\sqrt{3}\right) = 3.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 97. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

A. 1 . **B.** 9. **C.** 3 . **D.** 7.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 7.$$

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2 \le T < -1$. **B.** $-1 \le T < 0$. **C.** $0 \le T < 1$. **D.** $1 \le T < 2$.

Lời giải.

Ta có $T = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$

Lại có $[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \Leftrightarrow -1 = \left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]' \Leftrightarrow -x + c = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Mà $f'(0) = -1$ nên $c = -1$.

Vậy $T = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{1}{-x-1}\,\mathrm{d}x = -\ln|-x-1|\Big|_0^1 = -\ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Biết rằng $\int_2^3 \dfrac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a - 4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T = a + b + c$.

A. 31. **B.** 29. **C.** 33. **D.** 27.

Lời giải.

$$\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{\left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(x-\sqrt{x-1}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right)\Big|_2^3 = \frac{19-4\sqrt{8}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 8 \\ c = 6. \end{cases}$$

Vậy $T = a+b+c = 33$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Biết $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{b}\ln 5$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $a+b$.

A. 10. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 7.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|x-3| + \frac{1}{3}\ln|x+3|\Big|_{-2}^{2}$

$= \dfrac{2}{3}(\ln 1 - \ln 5) + \dfrac{1}{3}(\ln 5 - \ln 1) = -\dfrac{1}{3}\ln 5$ hay $a = 1, b = 3$. Khi đó $a+b = 4$

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. A	6. B	7. B	8. B	9. D	10. A
11. A	12. A	13. C	14. B	15. D	16. B	17. C	18. A	19. C	20. D
21. B	22. D	23. A	24. D	25. C	26. A	27. A	28. C	29. C	30. C
31. A	32. B	33. C	34. A	35. B	36. C	37. C	38. D	39. A	40. B
41. D	42. A	43. D	44. C	45. D	46. D	47. C	48. D	49. B	50. A
51. B	52. A	53. A	54. D	55. C	56. C	57. B	58. B	59. B	60. B
61. C	62. B	63. D	64. C	65. B	66. D	67. D	68. C	69. C	70. A
71. D	72. D	73. C	74. C	75. C	76. D	77. B	78. D	79. D	80. A
81. A	82. A	83. B	84. A	85. A	86. A	87. A	88. D	89. B	90. A
91. D	92. A	93. D	94. B	95. C	96. B	97. D	98. B	99. C	100. B

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = f'(x) \cdot \cos x - f(x).\sin x$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = \sqrt{2} - 1$. **C.** $I = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = f'(x) \cdot \cos x - f(x) \cdot \sin x \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = [f(x) \cdot \cos x]'$.
Lấy nguyên hàm hai vế: $\int [f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x]\,\mathrm{d}x = \int [f(x) \cdot \cos x]'\,\mathrm{d}x$
$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x = \cos x \cdot f(x) + C$.
Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f^2(x) + \cos 2x = 2\cos x \cdot f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2\cos x \cdot f(x) + \cos^2 x = \sin^2 x$.
$\Leftrightarrow (f(x) - \cos x)^2 = \sin^2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - \cos x = \sin x \\ f(x) - \cos x = -\sin x \end{array}\right.$.
Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ nên nhận $f(x) = \cos x - \sin x$.
Vậy $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = (\cos x - \sin x)\,|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}, f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x).f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{26}$.

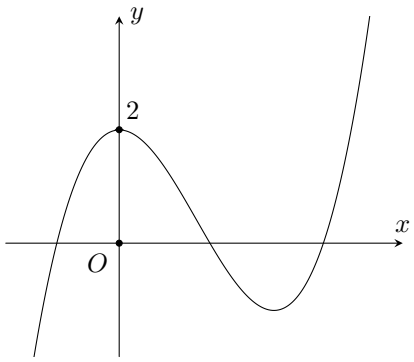
Lời giải.

Từ giả thiết ta có $2x+1 = \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$.
Bây giờ ta tính $I = \displaystyle\int \frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $\sqrt{1+f^2(x)} = t \Rightarrow 1 + f^2(x) = t^2 \Rightarrow 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \Rightarrow f(x)f'(x)\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$.
Do đó $I = \displaystyle\int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t = t + C = \sqrt{1+f^2(x)} + C$.
Ta nhận được $\sqrt{1+f^2(x)} + C = x^2 + x$. $f(0) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = -3$.
Từ đó $\sqrt{1+f^2(x)} - 3 = x^2 + x$. Khi $x = 1$ ta có
$\sqrt{1+f^2(1)} - 3 = 1 + 1 \Rightarrow 1 + f^2(1) = 25 \Rightarrow f(1) = \sqrt{24}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $\displaystyle\int_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x=-3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=3$ là



A. $y=x-4$. **B**. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$.

C. $y=2x-7$. **D**. $y=3x-10$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(0)=2$ và $f'(0)=0$.

Xét tích phân $\displaystyle\int_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$.

Do đó $\displaystyle\int_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u=f(u)\Big|_0^3=f(3)-f(0)\Rightarrow f(3)-f(0)=-3\Leftrightarrow f(3)=-1$.

Xét tích phân $\displaystyle\int_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=x-1\Rightarrow x=u+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0$; $x=4\Rightarrow u=3$.

$$\Rightarrow \int_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 (u+1)f''(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^3 (u+1)\,\mathrm{d}f'(u)=(u+1)f'(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u$$
$$=4f'(3)-f'(0)-f(u)\Big|_0^3=4f'(3)-f'(0)-f(3)+f(0).$$

Do đó $4f'(3)-f'(0)-f(3)+f(0)=7\Leftrightarrow 4f'(3)=7+f(3)-f(0)=4\Leftrightarrow f'(3)=1$.

Như vậy, $f(3)=-1, f'(3)=1$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=3$ là $y=x-4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Kết quả $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=8$. **B**. $I=4$. **C**. $I=2$. **D**. $I=\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=-1$; $x=-1\Rightarrow t=1$, ta có

$$I=e\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=-\int_{1}^{-1}\frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{f(-x)}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x f(-x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x)=f(-x),\forall x\in[-1;1]\Rightarrow I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra

$$I+I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{x}f(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(\mathrm{e}^{x}+1)\,f(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=4.$$

Vậy $I=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f'(x)=f(x)\cdot(3x^2+2mx+m)$ với m là tham số. Giá trị của tham số m để $f(3)=e^{-4}$ là

A. $m=-2$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=3x^2+2mx+m\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(3x^2+2mx+m)\,\mathrm{d}x.$

Nên $\ln[f(x)]=x^3+mx^2+mx+C\Rightarrow f(x)=e^{x^3+mx^2+mx+C}$.

Do $f(1)=1\Rightarrow e^{1+2m+C}=1\Rightarrow C=-2m-1$.

Vậy $f(x)=e^{x^3+mx^2+mx-2m-1}\Rightarrow f(3)=e^{-4}\Leftrightarrow e^{26+10m}=e^{-4}\Leftrightarrow m=-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f(x)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{8}{9}$. **B.** $\dfrac{16}{9}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^3-x$.

Đặt $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t; x=3\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}; x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=3$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}}\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}}\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{tf\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{x^3-x}{x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{9}.$$

$\Rightarrow I=\dfrac{8}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(1-x)+x^2f''(x)=2x \Rightarrow f(1)=0$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f''(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f'(x).\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=x^2f'(x)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1-2I$.

Mà $\displaystyle\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-xf(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1+I$.

Suy ra $1-2I=1+I\Rightarrow I=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng.

$\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{6}{\pi}$. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{4}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

Lời giải.

Phương pháp

☑ Sử dụng phương pháp từng phần đối với tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$.

☑ Xét $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f(x)+k\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x=0$, tìm k, từ đó suy ra $f(x)=-k\sin\frac{\pi x}{2}$.

☑ $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 -k\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$.

Cách giải

Đặt $\begin{cases}u=\cos\dfrac{\pi x}{2}\\ dv=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x &= \cos\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= f(1)\cdot\cos\frac{\pi}{2}-f(0)\cdot\cos 0+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Xét tích phân

$$\int_0^1 \left[f(x)+k\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f^2(x)+2kf(x)\sin\frac{\pi x}{2}+k^2\sin^2\frac{\pi x}{2}\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+2k\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}+k^2\int_0^1 \sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}+2k\frac{3}{2}+\frac{1}{2}k^2=0$$

$$\Leftrightarrow k=-3.$$

Khi đó ta có

$$\int_0^1 \left[f(x)-3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)-3\sin\frac{\pi x}{2}=0 \Leftrightarrow f(x)=3\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=3\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}dx=-3\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{-6}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Big|_0^1=-\dfrac{6}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\dfrac{6}{\pi}.$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(3)=21$, $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x\cdot f'(3x)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=12$. **C.** $I=9$. **D.** $I=15$.

Lời giải.

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=3.\end{cases}$

$$I=\int_0^3 \frac{t}{3}f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{1}{9}\int_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x.$$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Suy ra $I=\dfrac{1}{9}\left(xf(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\right)=6.$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx=2$. Tính $I=\int_{-1}^1 \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

$$I=\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

Xét $I_1=\int_{-1}^0 \dfrac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=-1\Rightarrow t=1$

$$I_1 = \int\limits_1^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}}(-\mathrm{d}t) = \int\limits_0^1 \frac{e^t.f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t.$$

Ta có: $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{e^x \cdot f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

Suy ra: $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 \frac{(1+e^t)\cdot f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 1, f(e) = 1.$

Tính $I = \displaystyle\int\limits_1^e f'(x).\ln x\,\mathrm{d}x.$

A. $I = 4.$ **B.** $I = 3.$ **C.** $I = 1.$ **D.** $I = 0.$

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int\limits_1^e f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int\limits_1^e f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 1-1 = 0$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_1^2 (x+1)^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = m\mathrm{e}^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

A. $T = 11.$ **B.** $T = 10.$ **C.** $T = 7.$ **D.** $T = 8.$

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int\limits_1^2 (x+1)^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = K + H$, trong đó

$$K = \int\limits_1^2 2x\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x, H = \int\limits_1^2 (x^2+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$$

Xét $K = \displaystyle\int\limits_1^2 2x\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$

Đặt $u = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$ và $\mathrm{d}v = 2x\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ và $v = x^2$.

Từ đó ta có $K = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$, suy ra $K + \displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2$ nên

$$I = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 = 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Từ đó suy ra $m = 4, n = 1, p = 3, q = 2$ và $T = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x)\cdot f(1-x) = 1$ với mọi x thuộc $[0;1]$. Tính giá trị $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $x = 1-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Ta có: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \int_1^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^1 \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Suy ra: $2I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1}{2}$. **B.** $I = \frac{5}{2}$. **C.** $I = \frac{3}{2}$. **D.** $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \quad (1)$ và $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3\cdot\frac{1}{x} \quad (2)$.

Giải hệ $(1), (2)$ suy ra $f(x) = \frac{2}{x} - x$. Do đó $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Cách 2: Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Ta có $I = \displaystyle\int_2^{\frac{1}{2}} t\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $3I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x}\left[f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 3\,\mathrm{d}x = 3x\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{9}{2}.$$

Vậy $I = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ sao cho $f(1) = -\dfrac{1}{2}$; $f(x) \neq 0$ và $f'(x) = (2x+1)\cdot f^2(x)$ với mọi $x > 0$. Biết rằng $f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) = \dfrac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b} < -1$. **B.** $a \in (-2017; 2017)$. **C.** $b - a = 4035$. **D.** $a + b = -1$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int (2x+1)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + C$, theo giả thiết $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ suy ra $C = 0$, cho nên $f(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

$f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2018} - \dfrac{1}{2017} = -\dfrac{2017}{2018} \Rightarrow a = -2017, b = 2018$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\displaystyle\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln 2$. Biết rằng $f(x) > 0, \forall x \in [1;2]$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = -10$. **B.** $f(2) = 10$. **C.** $f(2) = -20$. **D.** $f(2) = 20$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10$ (1).

Ta có

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln 2 \Leftrightarrow \ln|f(x)|\Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln|f(2)| - \ln|f(1)| = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln f(2) - \ln f(1) = \ln 2 \quad \text{vì} \quad f(2) > 0, f(1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có $f(2) - \dfrac{f(2)}{2} = 10 \Leftrightarrow f(2) = 20$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và luôn nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f'(x) = -\mathrm{e}^x \cdot f^2(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Tính $f(\ln 2)$.

A. $\ln 2 + \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\ln^2 + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + C_1$. Mà $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{f(x)} + C_2$ nên ta có $\dfrac{1}{f(x)} = \mathrm{e}^x + C$.

Mặt khác $f(0) = \dfrac{1}{2}$ nên $C = 1$, suy ra $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Do đó $f(\ln 2) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $2017f(-x)+2018f(x)=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $I=\dfrac{1}{2018}$. **B.** $I=\dfrac{1}{1009}$. **C.** $I=\dfrac{2}{2017}$. **D.** $I=\dfrac{2}{4035}$.

Lời giải.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, với $x=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

$$2017f(-x)+2018f(x)=\cos x\Rightarrow 2017\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x+2018\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2017I+2018I=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow 4035I=1-(-1)\Leftrightarrow I=\frac{2}{4035}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $5\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{2}\right.$

$2\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{25}{33}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{53}{50}$.

Lời giải.

$$5\int\limits_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{25}\right]\mathrm{d}x\leqslant 2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow 5\int\limits_0^1 f'(x)[f(x)]^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\leqslant 2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz:

$$\Rightarrow\left(\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int\limits_0^1\mathrm{d}x.\int\limits_0^1 f'(x)[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 5\left(\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx\right)^2+\frac{1}{5}\leqslant 2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx-\frac{1}{5}\right)^2\leqslant 0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx=\frac{1}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi

$$\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx=\frac{1}{5}\\ \sqrt{f'(x)}f(x)=k\end{cases}\Rightarrow k=\frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow\int f'(x)f^2(x)dx=\int\frac{1}{25}dx=\frac{1}{25}x+C$$

$\Rightarrow \dfrac{[f(x)]^3}{3} = \dfrac{1}{25}x + C \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}x + 3C}$

$f(0) = 1 \Rightarrow 3C = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}x + 1} \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{25}x + 1\right) dx = \frac{53}{50}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3 < f(5) < 4$. **B.** $1 < f(5) < 2$. **C.** $4 < f(5) < 5$. **D.** $2 < f(5) < 3$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}, \forall x > 0.$

Suy ra $\displaystyle\int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \ln(f(5)) - \ln(f(1)) = \dfrac{4}{3}.$

$\Rightarrow f(5) = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$, $\forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \dfrac{3}{2}$, tính $I = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1186}{45}$. **B.** $I = \dfrac{1174}{45}$. **C.** $I = \dfrac{1222}{45}$. **D.** $I = \dfrac{1201}{45}$.

Lời giải.

Ta có $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x}.\sqrt{1 + 2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x}, \forall x \in [1; 4].$

Suy ra $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + C \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + C$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. Mà $f(1) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow C = \dfrac{4}{3}$. Vậy $f(x) = \dfrac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2}$.

Vậy $I = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1186}{45}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = -12$. **D.** $I = -8$.

Lời giải.

Cách 1:

Đặt $u = x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;$

$\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x).$

Thay vào $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow (x+1)\,f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 10.$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -8.$

Cách 2:

Gọi $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = a$.

Theo giả thiết ta có

+) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow a\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{a} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{20}{3}.$

+) $2f(1) - f(0) = 2 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{20}{3} + b\right) - b = 2 \Leftrightarrow b = -\frac{34}{3}.$

Do đó, $f(x) = \frac{20}{3}x - \frac{34}{3}.$

Vậy $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{20}{3}x - \frac{34}{3}\right)\mathrm{d}x = -8.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0)\cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x)\cdot f'(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -4$. **B**. $I = \mathrm{e} - 2$. **C**. $I = 4$. **D**. $I = 2 - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Đặt $h(x) = g(x)\cdot f'(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x$.

Ta có $h(0) = g(0)\cdot f'(0) = 0$ mà $f'(0) \neq 0$ nên $g(0) = 0$.

Tương tự $h(2) = g(2)\cdot f'(2) = 0$ mà $f'(2) \neq 0$ nên $g(2) = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}(g(x)) = f(x)\cdot g(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}(f(x)) \\ &= f(2)g(2) - f(0)g(0) - \int_0^2 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^2 x(x-2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $u = x(x-2)$ và $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = 2x-2$ và chọn $v = \mathrm{e}^x$. Lúc đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 x(x-2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x(x-2)\mathrm{e}^x\big|_0^2 - \int\limits_0^2 (2x-2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^2 (2x-2)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= -(2x-2)\mathrm{e}^x\big|_0^2 + \int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(2x-2) = -2\mathrm{e}^2 - 2 + 2\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= -2\mathrm{e}^2 - 2 + 2\mathrm{e}^x\big|_0^2 = -4.\end{aligned}$$

Vậy $I = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = x\sin x$. Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. $\dfrac{1}{1009}$. **B.** $\dfrac{2}{2019}$. **C.** $\dfrac{1}{2019}$. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$2018I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2018f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x\sin x - f(-x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2018I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x - I.$

Do đó

$$2019I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow I = \frac{2}{2019}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}$. Khi đó:

A. $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}} - \dfrac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^2+1}} - \dfrac{1}{4}$.

C. $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \dfrac{(\mathrm{e}^2+1)\sqrt{\mathrm{e}^2+1} - \sqrt{8}}{3}$. **D.** $\mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = (\mathrm{e}^2+1)\sqrt{\mathrm{e}^2+1} - \sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}$

$\Leftrightarrow 3\cdot \mathrm{e}^{3x}\cdot f(x) + \mathrm{e}^{3x}\cdot f'(x) = \mathrm{e}^{2x}\cdot\sqrt{1+e^{2x}}$

$\Leftrightarrow [\mathrm{e}^{3x}\cdot f(x)]' = \mathrm{e}^{2x}\cdot\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1, ta được

$$\int\limits_0^1 [\mathrm{e}^{3x}\cdot f(x)]'\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\cdot\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^3 f(1) - f(0) = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\cdot\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = I$$

Đặt $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$. Suy ra $t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
Với $x=1$ thì $t=\sqrt{2}$.
Với $x=1$ thì $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^2}$.
Khi đó

$$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} t^2\,\mathrm{d}t=\frac{(\mathrm{e}^2+1)\sqrt{\mathrm{e}^2+1}-\sqrt{8}}{3}.$$

Suy ra, $\mathrm{e}^3 f(1)-f(0)=\dfrac{(\mathrm{e}^2+1)\sqrt{\mathrm{e}^2+1}-\sqrt{8}}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\cdot\frac{\pi^2}{2}+c\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{d}{e}$ ($a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{d}{e}$ là các phân số tối giản, $e>0$). Tính $P=a+b+c+d+e$.

A. 13. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\,(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x.$

☑ Đặt $I_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}$.

☑ Đặt $I_2=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(x+1)\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}$.

Do đó $I=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$.
Suy ra $a=1,b=8,c=1,d=-1,e=4$.
Vậy $P=13$.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ dương có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$, biết rằng $f'(x)-\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)=0$ và $f\left(\sqrt{3}\right)=\mathrm{e}^3$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}}\ln\left[f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}-\dfrac{7}{3}$. **C.** $3\sqrt{3}+\dfrac{7}{3}$. **D.** $3\sqrt{3}-2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x)-\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\sqrt{x^2+1}\\ &\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &\Rightarrow \ln f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.\end{aligned}$$

Ta có $f\left(\sqrt{3}\right) = \mathrm{e}^3 \Rightarrow C = 3 - \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$.
Do đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \ln f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \left(3-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $y = f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(1) = 4$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[x^2 f(x) + \frac{x^3}{3}f'(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Đặt $u = f(x)$, $\mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}u = f'(x)$, $v = \dfrac{x^3}{3}$.

$$\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[x^2 f(x) + \frac{x^3}{3}f'(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{3} = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 3$, $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{11}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{11}$. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{35}{11}$. **B.** $\dfrac{65}{21}$. **C.** $\dfrac{23}{7}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

☑ Xét $\displaystyle\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{11}$. Đặt $\begin{cases} u = x^4 f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = [4x^3 f(x) + x^4 f'(x)]\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$.

Suy ra

$$\int\limits_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = x^5 f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 4x^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{11}$.

☑ Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x) + 2x^5]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 4\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\,\mathrm{d}x + 4\int\limits_0^1 x^{10}\,\mathrm{d}x = 0.$

Suy ra $f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{x^6}{3} + C$. Mà $f(1) = 3$ nên $C = \dfrac{10}{3}$.

☑ Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{x^6}{3}+\frac{10}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{23}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\dfrac{\pi}{20}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{20}$.

Lời giải.

Vì $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$ nên

$$\int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\ 2\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận

☑ $x=2\Rightarrow t=-2$;

☑ $x=-2\Rightarrow t=2$.

Ta có

$$\int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{2}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $\max\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{1}{2}$ và biểu thức $S=\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_1^3\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2 \Rightarrow f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{5}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^3\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\le 5.$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^3\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le 5 \Rightarrow \int_1^3\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le 5-\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow S=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_1^3\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le 5\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\left[\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\le\frac{25}{4}-\left[\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{5}{2}\right]^2\le\frac{25}{4}.$$

Dấu " $=$" xảy ra $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Lời giải.

Đặt $t=\dfrac{x}{2}\Rightarrow 2\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=4\Rightarrow t=2$. Khi đó ta có $I=4\displaystyle\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=dt\\ v=f(t)\end{cases}$, ta được

$$\frac{I}{4}=tf(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2\cdot 16-\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=32-4=28\Rightarrow I=112.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3f'(x^2)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=x-1\Rightarrow 3=\displaystyle\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Xét $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3f'(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2f'(x^2)\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[tf(t)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}(4-3)=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn hệ thức:

$$\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-xf'(x); f(x)=-xg'(x).\end{cases}$$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^4[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)=-x\left(f'(x)+g'(x)\right) &\Leftrightarrow \left[x\left(f(x)+g(x)\right)\right]'=0\\ &\Leftrightarrow x\left(f(x)+g(x)\right)=C\\ &\Leftrightarrow f(x)+g(x)=\frac{C}{x}\end{aligned}$$

Mà $f(1)+g(1)=4\Rightarrow C=4$.

Khi đó ta có: $I=\displaystyle\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\frac{4}{x}\mathrm{d}x=4\ln x\Big|_1^4=8\ln 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=9$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{2}=\int\limits_0^1 x^3f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^4f(x)}{4}\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-1$, do đó ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1\left[f'(x)+9x^4\right]^2\mathrm{d}x&=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+18\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x+81\int\limits_0^1 x^8\mathrm{d}x\\&=9-18+9=0.\end{aligned}$$

Do đó $f'(x)=-9x^4$, kết hợp với $f(1)=1$, suy ra $f(x)=-\frac{9x^5}{5}+\frac{14}{5}$. Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

Lời giải.

① Cách 1: Chọn hàm

Chọn $f(x)=1,\forall x$ ta được $I=\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ nên $I\in[1;+\infty)$.

② Cách 2: Tự luận

$$I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=A+B$$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=x-1.\end{cases}$

Suy ra

$$A=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=1+\int\limits_0^1(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\geq 1-\int\limits_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$B=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_1^2(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x\geq 1-\int\limits_1^2(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Vậy $I\geq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Biết rằng với mỗi số thực $t\geq 0$ thì phương trình $x^3+tx-8=0$ có nghiệm dương duy nhất $x=x(t)$, với $x(t)$ là hàm liên tục (theo biến t) trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^7 (x(t))^2\,\mathrm{d}t$.

A. $\dfrac{343}{3}$. **B.** 7. **C.** $\dfrac{31}{2}$. **D.** Đáp số khác.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $t=\dfrac{8}{x}-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\left(2x+\dfrac{8}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $t=0\Rightarrow x=2; t=7\Rightarrow x=1$. Suy ra

$$\int\limits_0^7 (x(t))^2\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2 x^2\left(2x+\frac{8}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(2x^3+8\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{2}+8x\right)\Big|_1^2=\frac{31}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ và $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Xét: $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}$.

Do đó: $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x f(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

Ta có $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

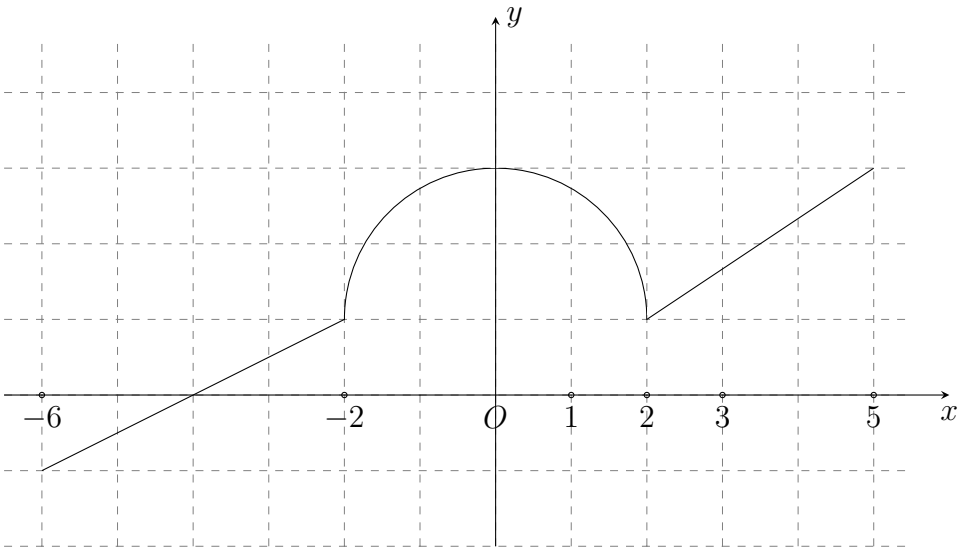
Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(f'(x)+\sin x\right)^2\,\mathrm{d}x = 0\\
\Rightarrow\ &f'(x)+\sin x = 0\\
\Rightarrow\ &f(x) = \cos x + C.
\end{aligned}$$

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1.$

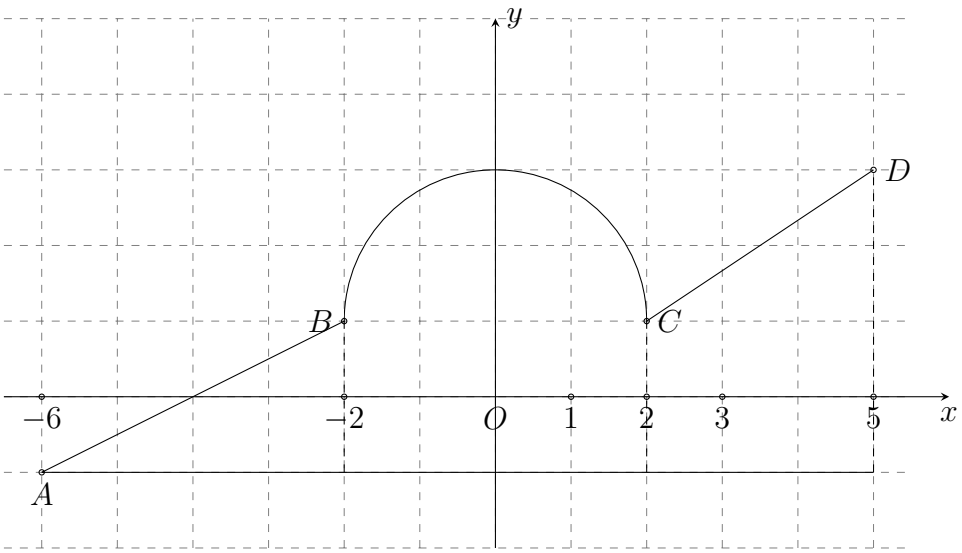
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \displaystyle\int\limits_{-6}^{5} [f(x)+2]\,\mathrm{d}x$.



A. $I = 2\pi + 35$. **B.** $I = 2\pi + 34$. **C.** $I = 2\pi + 33$. **D.** $I = 2\pi + 32$.

Lời giải.



Dựa vào đồ thị ta có $A(-6;-1)$, $B(-2;1)$ suy ra phương trình đường thẳng AB là: $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

$\Rightarrow I_1=\displaystyle\int\limits_{-6}^{-2}\left(\frac{1}{2}x+2+2\right)\mathrm{d}x=8.$

Phương trình đường tròn $(C):x^2+(y-1)^2=4\Rightarrow y=1+\sqrt{4-x^2}$.

$\Rightarrow I_2=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}+2\right)\mathrm{d}x=12+2\pi.$

Điểm $C(2;1)$, $D(5;3)$ nên phương trình đường thẳng CD là: $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow I_3=\displaystyle\int\limits_{2}^{5}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}+2\right)\mathrm{d}x=12.$

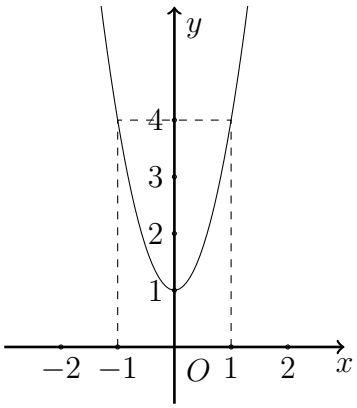
Nên: $I=I_1+I_2+I_3=8+(12+2\pi)+12=32+2\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R},\,a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$.

A. $H=45$. **B**. $H=64$. **C**. $H=51$. **D**. $H=58$.



Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Khi đó $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta suy ra các điểm

$A(-1;4)$, $B(1;4)$ và $C(0;1)$ thuộc đồ thị nên

$$\begin{cases} 3a-2b+c=4 \\ 3a+2b+c=4 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1. \end{cases}$$

Khi đó $f'(x)=3x^2+1$ suy ra $f(4)-f(2)=\displaystyle\int_2^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^4 \left(3x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=\left(x^3+x\right)\Big|_2^4=58.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x)\cdot f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2a}{3}$. **B.** $I=\dfrac{a}{2}$. **C.** $I=\dfrac{a}{3}$. **D.** $I=a$.

Lời giải.

Đặt $t=a-x$ suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi $x=a$ thì $t=0$ và $x=0$ thì $t=a$ nên

$$I=\int_a^0 -\frac{\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}.$$

Do giá trị tích phân không phụ thuộc biến lấy tích phân nên

$$I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}.$$

Mà $f(x)\cdot f(a-x)=1\Leftrightarrow f(a-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ suy ra

$$I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{f(x)}}=\int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}.$$

Khi đó

$$2I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}\int_0^a \mathrm{d}x=x\Big|_0^a=a.$$

Suy ra $I=\dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{5}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{3}{4}$. **D.** $I=\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=1$.

Suy ra

$$\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int\limits_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}.$$

Do đó $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$.

Mặt khác

$$\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10} \Rightarrow \int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}.$$

Ta tính được $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(3x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3x^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \left(3x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left(f'(x)-3x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=0.$$

Suy ra

$$f'(x)-3x^2=0 \Leftrightarrow f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^3+C.$$

Vì $f(1)=1$ nên $f(x)=x^3$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$, $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

Lời giải.

Xét tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

Đặt $\begin{cases}u=u(x)=\sin 2x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=2\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x\\ v=v(x)=f(x)\end{cases}$. Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x\cdot f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{8}\right)^2.$$

$\Rightarrow f(x) = k\cos 2x$. Lại có $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} k\cos^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \Rightarrow k = 1$.

Suy ra $f(x) = \cos 2x \Rightarrow I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 4x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x) = \dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2\ln^2 2$. **B.** $I = 2\ln 2$. **C.** $I = 3 + 2\ln^2 2$. **D.** $I = \ln^2 2$.

Lời giải.

Theo giả thiết: $f(x) = \dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \displaystyle\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$ (1)

Đặt $2\sqrt{x}-1 = t$. Ta có $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Thay vào (1) ta được: $\displaystyle\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Do hàm $f(x)$ liên tục trên $[1;4]$, suy ra $\displaystyle\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \left(x+\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}.$$

Dẫn tới

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Hay ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = x\left(\sin x + f'(x)\right) + \cos x \text{ và } \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -4.$$

Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(11;12)$. **B**. $(5;6)$. **C**. $(6;7)$. **D**. $(12;13)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&f(x) = x\sin x + x\cdot f'(x) + \cos x\\
\Rightarrow\ &\frac{x'\cdot f(x) - x\cdot f'(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\cdot\sin x + \frac{1}{x^2}\cdot\cos x\\
\Rightarrow\ &\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{x}\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\cos x}{x} + C\\
\Rightarrow\ &f(x) = \cos x + Cx.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -4 \Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x\cos x\,\mathrm{d}x + C\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x = -4.$$

$$\Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \cos x + 2x \Rightarrow f(\pi) = 2\pi - 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^3\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a,b,c nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $\dfrac{a}{b}\in(0;1)$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=109$. **B.** $S=73$. **C.** $S=121$. **D.** $S=57$.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_1^3\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x^3}\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}}\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I=\int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{26}{9}}}3t^3\,\mathrm{d}x=\frac{3t^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt[3]{\frac{26}{9}}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{26}{9}\sqrt[3]{\frac{26}{9}}=\frac{13}{18}\sqrt[3]{78}.$$

Vậy $S=13+18+78=109$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)+[f'(x)]^2=0$. Biết $f(0)=1, f(2)=\mathrm{e}^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. e^2. **B.** $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **C.** e^3. **D.** $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải.

Hàm f đồng biến trên $[0;2]\Rightarrow f(x)\geqslant f(0)=1,\forall x\in[0;2]$. Giả thiết

$$\begin{aligned}
&[f(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)+[f'(x)]^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=\frac{[f(x)]^2}{[f(x)]^2}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f'(x)}{f(x)}=x+C_1\\
\Leftrightarrow\ &\ln f(x)=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\\
\Leftrightarrow\ &f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2}.
\end{aligned}$$

Mặt khác $f(0)=1, f(2)=\mathrm{e}^6$, suy ra $\begin{cases}\mathrm{e}^{C_2}=1\\ \mathrm{e}^{2+2C_1+C_2}=\mathrm{e}^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=0\\ C_1=2\end{cases}$. Do đó $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+2x}$.

Vậy $f(1)=\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[-1;1]$. Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{f(x)\cdot f(-x)}$, với mọi $x\in[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
C. $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $\displaystyle\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Ta có $g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{f(-x)\cdot f(x)} = g(x)$ với mọi $x \in [-1;1]$.

Tính $\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 0 \Rightarrow t = 0$

Khi đó

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{1}^{0} g(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ta lại có

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 5$, $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Tính $J = \displaystyle\int_{0}^{1} xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $J = -17$. **B.** $J = 17$. **C.** $J = 7$. **D.** $J = -7$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $J = x\cdot f(x)\Big|_0^1 - \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - 12 = 5 - 12 = -7$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, với mọi $x \in [0;1]$. Tính $I = \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2018\cdot 2021}$. **B.** $I = \dfrac{1}{2019\cdot 2020}$. **C.** $I = \dfrac{1}{2019\cdot 2021}$. **D.** $I = \dfrac{1}{2018\cdot 2019}$.

Lời giải.

Từ $3f(x) + xf'(x) = x^{2018} \Rightarrow f(0) = 0$. Ta có $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$

$\Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2020}$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int 3x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x^{2020}\,\mathrm{d}x \quad (*)$.

Đặt $K = \int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\begin{cases} u = x^3 \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}, \begin{cases} \mathrm{d}u = 3x^3\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow K = x^3 \cdot f(x) - \int 3x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Từ $(*)$, ta được $x^3 f(x) = \int x^{2020}\,\mathrm{d}x \Rightarrow x^3 f(x) = \dfrac{1}{2021}x^{2021} + C$. Mà $f(0) = 0$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2021}x^{2018}$.

Từ đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 2x - 2) = 3x - 1$. Tính $I = \displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{135}{4}$. **B.** $\dfrac{125}{4}$. **C.** $\dfrac{105}{4}$. **D.** $\dfrac{75}{4}$.

Lời giải.

Đặt $u = x^3 + 2x - 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = (3x^2 + 2)\,\mathrm{d}x$. Ta có $x = 1 \Rightarrow u = 1, x = 2 \Rightarrow u = 10$.

$$I = \int_1^2 f(x^3 + 2x - 2)(3x^2 + 2)\,\mathrm{d}x = \int_1^{10} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^2 (3x - 1)(3x^2 + 2)\,\mathrm{d}x = \frac{135}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $(x + 2)f(x) + (x + 1)f'(x) = \mathrm{e}^x$ và $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = \dfrac{\mathrm{e}}{3}$. **B.** $f(2) = \dfrac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $f(2) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{3}$. **D.** $f(2) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Lời giải.

Từ

$$\begin{aligned}
& (x + 2)f(x) + (x + 1)f'(x) = \mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x(x + 2)f(x) + \mathrm{e}^x(x + 1)f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{e}^x(x + 1)\right)' f(x) + \mathrm{e}^x(x + 1)f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \\
\Leftrightarrow\ & \int_0^2 \left[\left(\mathrm{e}^x(x + 1)\right)' f(x) + \mathrm{e}^x(x + 1)f'(x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & (x + 1)\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - 1\right) \\
\Leftrightarrow\ & 3\mathrm{e}^2 f(2) - f(0) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - 1\right) \\
\Rightarrow\ & f(2) = \frac{\mathrm{e}^2}{6}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3xf(x^2)-f(x)=9x^3-1$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3xf(x^2)-f(x)=9x^3-1 \\ \Rightarrow & \int_0^1 \left(3xf(x^2)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(9x^3-1\right)\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow & \int_0^1 3xf(x^2)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\cdot \quad (*) \end{aligned}$$

Xét $I=\displaystyle\int_0^1 3xf(x^2)\,\mathrm{d}x$

- ☑ Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$.
- ☑ Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$.

Suy ra $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{2}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Thay vào $(*)$ ta được $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2018$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **B.** $f(1)=2019\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1)=2017\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2018\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=2018x^{2017}$

$\Rightarrow (\mathrm{e}^{-2018x}f(x))'=2018x^{2017}\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)$ là một nguyên hàm của $2018x^{2017}$

Ta có $\displaystyle\int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x=x^{2018}+C\Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+C_0$.

Mà

$$\begin{aligned} & f(0)=2018\Rightarrow 2018=C_0 \\ \Rightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x}f(x)=x^{2018}+2018 \\ \Leftrightarrow\ & f(x)=x^{2018}\mathrm{e}^{2018}+2018\mathrm{e}^{2018} \\ \Rightarrow\ & f(1)=\mathrm{e}^{2018}+2018\mathrm{e}^{2018}=2019\mathrm{e}^{2018}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Tính tổng $T = \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{0}}{3} - \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{1}}{4} + \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2}}{5} - \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{3}}{6} + \cdots - \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2017}}{2020} + \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\dfrac{1}{4121202989}$. **B.** $\dfrac{1}{4121202990}$. **C.** $\dfrac{1}{4121202992}$. **D.** $\dfrac{1}{4121202991}$.

Lời giải.

Ta có $x^2(1-x)^{2018} = x^2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} x^k (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} x^{k+2} (-1)^k$.

Do đó $\int\limits_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} x^{k+2}(-1)^k\,\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} x^{k+2}(-1)^k\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} \dfrac{x^{k+3}}{k+3}(-1)^k \Big|_0^1 = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^{k} \cdot \dfrac{(-1)^k}{k+3} = T$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^0 t^{2018}(1-t)^2(-\mathrm{d}t) \\
&= \int\limits_0^1 t^{2018}(t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^{2021}}{2021} - 2\cdot\frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2019}}{2019}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2021} - \frac{2}{2020} + \frac{1}{2019} \\
&= \frac{1}{1010\cdot 2019\cdot 2021} = \frac{1}{4121202990}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục và $a > 0$. Giả sử rằng với mọi $x \in [0;a]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x)\cdot f(a-x) = 1$. Tính $\int\limits_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$ được kết quả bằng

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\ln(a+1)$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

$f(x)\cdot f(a-x) = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{f(a-x)}$.

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} &= \int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{f(a-x)}} = \int\limits_0^a \frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_0^a \frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}\,\mathrm{d}(a-x) = -\int\limits_a^0 \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$2I = \displaystyle\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} + \int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^a \mathrm{d}x = a$. Vậy $I = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2019 \times 2021}$. **B.** $\dfrac{1}{2018 \times 2021}$. **C.** $\dfrac{1}{2018 \times 2019}$. **D.** $\dfrac{1}{2021 \times 2022}$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vì $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$ nên

$$\begin{aligned}
& 3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018} \\
\Leftrightarrow\ & 3(x^2-1)f(x) + x(x^2-1)f'(x) \leq (x^2-1)x^{2018} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) - [3f(x) + xf'(x)] \leq x^{2020} - x^{2018} \\
\Rightarrow\ & 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}f(x) - \left[3I + \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}f(x)\right] \leq \int\limits_0^1 x^{2020}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x^{2018}\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + x^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[3I + xf(x)\Big|_0^1 - I\right] \leq \frac{1}{2021} - \frac{1}{2019} \\
\Rightarrow\ & f(1) - [2I + f(1)] \leq \frac{-2}{2019 \cdot 2021} \\
\Rightarrow\ & I \geq \frac{1}{2019 \cdot 2021}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ với $f\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, thỏa mãn hai điều kiện $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 f(x)}{(x\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4-\pi}{4+\pi}$ và $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf'(x)}{\cos x(x\sin x + \cos x)}\,\mathrm{d}x = 0$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{4-\pi}$. **C.** $I = \dfrac{4}{4+\pi}$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{4+\pi}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{4-\pi}{4+\pi} &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 f(x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf(x)}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{x\sin x+\cos x}\right)\\ &= -\frac{xf(x)}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xf'(x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-2\pi}{4+\pi} + I\\ &\Rightarrow\ I = \frac{4-\pi}{4+\pi} + \frac{2\pi}{4+\pi} = 1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{30}$, $\int\limits_0^1 (2x-1)f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{30}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{11}{30}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{1}{30} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2-x) = (x^2-x)f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{30}$.

Ta tìm m thỏa mãn

$0 = \int_0^1 \left(f'(x)+m(x^2-x)\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x + 2m\int_0^1 f'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x + m^2\int_0^1 (x^2-x)^2\mathrm{d}x \Rightarrow m = -1$.

Do vậy, $f'(x)-(x^2-x)=0 \Rightarrow f'(x) = x^2-x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$.

Mà $f(0)=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{11}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+2f(1-x) = 3x^2-6x$, $\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{4}{15}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-\frac{2}{15}$. **D.** $I=\frac{2}{15}$.

Lời giải.

Đặt $t=1-x$, thì $x\in[0;1] \Leftrightarrow t\in[0;1]$.

Ta có

$$\begin{aligned}&f(x)+2f(1-x) = 3x^2-6x \Leftrightarrow f(x)+2f(1-x) = 3(x-1)^2-3\\ \Leftrightarrow\ &f(1-t)+2f(t) = 3t^2-3 \Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x) = 3x^2-3.\end{aligned}$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 4f(x)+2f(1-x)=6x^2-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 3f(x)=3x^2+6x-6 \Leftrightarrow f(x)=(x+1)^2-3, \forall x\in[0;1].$$

Khi đó $f(1-x^2)=(2-x^2)^2-3=x^4-4x^2+1$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^4-4x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $f(a)=0$. Đặt $M=\max\limits_{[a;b]}|f(x)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\displaystyle\int\limits_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

A. $M(b-a)$. **B.** $M^2(b-a)$. **C.** $\dfrac{M^2}{b-a}$. **D.** $\dfrac{M}{b-a}$.

Lời giải.

Gọi $x_0\in[a;b]$, sao cho $|f(x_0)|=M$. Ta có

$$\left(\int\limits_a^{x_0} f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_a^{x_0}\mathrm{d}x \Leftrightarrow [f(x_0)-f(a)]^2\le(x_0-a)\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad f^2(x_0)\le(x_0-a)\cdot\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow M^2\le(x_0-a)\cdot\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Mà $(x_0-a)\cdot\displaystyle\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\le(b-a)\cdot\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $M^2\le(b-a)\cdot\displaystyle\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_a^{x_0}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\ge\dfrac{M^2}{b-a}$.

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x)=1$ tức là khi chẳng hạn $f(x)=x$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)>0$, $\forall x\in[1;2]$ và $\displaystyle\int\limits_1^2\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{375}$. Biết $f(1)=1$, $f(2)=\dfrac{22}{15}$, tính $I=\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P=\dfrac{71}{60}$. **B.** $P=\dfrac{6}{5}$. **C.** $P=\dfrac{73}{60}$. **D.** $P=\dfrac{37}{30}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4}+\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{x^2}{125}\ge3\sqrt[3]{\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4}\cdot\dfrac{x^2}{25}\cdot\dfrac{x^2}{25}}=\dfrac{3f'(x)}{25}$.

Lấy tích phân hai vế BĐT trên, ta có:

$$\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2\frac{x^2}{125}\,\mathrm{d}x\ge\int\limits_1^2\frac{3f'(x)}{25}\Leftrightarrow\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x+2\cdot\frac{7}{375}\ge\frac{3}{25}[f(2)-f(1)]\Leftrightarrow\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x\ge\frac{7}{375}$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" của BDT trên xảy ra khi
$\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4} = \dfrac{x^2}{125} \Leftrightarrow [f'(x)]^3 = \dfrac{x^6}{125} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2}{5} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{15} + C.$
Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{15} + C \Rightarrow C = \dfrac{14}{15} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3+14}{15}.$
Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x^3+14}{15}\,\mathrm{d}x = \dfrac{71}{60}.$
Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính giới hạn của dãy số

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + \sqrt{\frac{n}{3+n}}\cdot f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n}{6+n}}\cdot f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right) + \cdots + \sqrt{\frac{n}{4n-3}}\cdot f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right].$$

A. $\lim u_n = 2$. **B.** $\lim u_n = \dfrac{2}{3}$. **C.** $\lim u_n = 1$. **D.** $\lim u_n = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có:

$$u_n = \frac{f(1)}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} f\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\cdot 3}{n}}} f\left(\sqrt{1+\frac{2\cdot 3}{n}}\right) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}} f\left(\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}\right)\right.$$

$$\Rightarrow \lim u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} f\left(\sqrt{1+3x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}.$

Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}\cos x = \cos x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

Mặt khác $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

Như vậy ta có $0=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)-\cos x]^2\,\mathrm{d}x\geq 0.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=\cos x\Rightarrow f(x)=\sin x+C$. Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\displaystyle\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)+2]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{17}{5}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{15}{4}$. **D.** 6.

Lời giải.

☑ Ta có

$$\int\limits_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow f(x)\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow-\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=-1.$$
$$\Rightarrow\int\limits_0^1 14x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=-14.$$

☑ Ta lại có $\displaystyle\int\limits_0^1 49x^6\,\mathrm{d}x=7.$

☑ Suy ra

$$\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 14x^3f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 49x^6\,\mathrm{d}x=7-14+7=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\,\mathrm{d}x=0.$$
$$\Rightarrow f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=\frac{-7}{4}x^4+\mathrm{C}\Rightarrow f(1)=-\frac{7}{4}+\mathrm{C}=0\Rightarrow\mathrm{C}=\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{-7}{4}x^4+\frac{7}{4}.$$

☑ Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)+2]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}+2\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{5}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$ và $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)]^2\,\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B**. 8. **C**. 10. **D**. 80.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int_0^1 [f(x)+(ax+b)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 [f(x)\cdot(ax+b)]\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (ax+b)^2\,\mathrm{d}x$

$= 4 + 2a\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + 2b\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3a}(ax+b)\Big|_0^1 = 4 + 2(a+b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$

Cần xác định a, b sao cho $\dfrac{a^2}{3} + (2+b)a + b^2 + 2b + 4 = 0.$ (1)

Có $\Delta_{(a)} = b^3 + 4b + 4 - \dfrac{4}{3}(b^2+2b+4) = -\dfrac{(b-2)^2}{3} \le 0$ nên (1) $\Leftrightarrow b = 2$ và $a = -6$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - 6x + 2]\,\mathrm{d}x = 0$ nên $f(x) = 6x - 2$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (6x-2)^3\,\mathrm{d}x = 10.$

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$, $f'(1) = \dfrac{9}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{39}{4}$, $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{14}{3}$. **B**. $I = 14$. **C**. $I = \dfrac{7}{3}$. **D**. $I = 7$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{5}{2} = \displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}f'(x) = (x^2+x)f'(x)|_0^1 - \int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$ (1).

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[4[f'(x)]^2 - 12(2x+1)f'(x) + 9(2x+1)^2\right]\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 [2f'(x) - 3(2x+1)]^2\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 2f'(x) - 3(2x+1) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2} + C$

Từ $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2}$. Vậy $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{3(x^2+x)}{2}\,\mathrm{d}x = 7.$

Chọn đáp án D □

Câu 69. Cho $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos 2x + 3\sin 2x)\ln(\cos x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = c\ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{b}$ là phân

số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = -11$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 9$.

Lời giải.

Gọi I là tích phân đã cho. Ta có

$$\begin{aligned}[\ln(\cos x + 2\sin x)]' &= \frac{-\sin x + 2\cos x}{\cos x + 2\sin x} = \frac{(-\sin x + 2\cos x)(\cos x + 2\sin x)}{(\cos x + 2\sin x)^2} \\ &= \frac{2\cos 2x + 3\sin x\cos x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x} \\ &= \frac{4\cos 2x + 3\sin 2x}{4\sin 2x - 3\cos 2x + 5}.\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\cos x + 2\sin x) \\ \mathrm{d}v = (4\cos 2x + 3\sin 2x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{4\cos 2x + 3\sin 2x}{4\sin 2x - 3\cos 2x + 5}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\cdot(4\sin 2x - 3\cos 2x + 5) \end{cases}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(4\sin 2x - 3\cos 2x + 5)\cdot\ln(\cos x + 2\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x + 3\sin 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 4\ln 2 - \frac{1}{2}\left(2\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 4\ln 2 - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $c = 4$, $a = 3$, $b = 2$. Suy ra $T = a + b + c = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Biết rằng $\displaystyle\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$, ở đó a, $b \in \mathbb{Z}^+$ và $4 < a + \sqrt{b} < 5$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 5$. **B.** $S = 7$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 6$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\pi}{6} = \displaystyle\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x = \int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x.$ (∗)

Đặt $x - 3 = 2\sin t$, suy ra $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 4 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$ và $x = a + \sqrt{b} \Rightarrow t = \arcsin\left(\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)$.

Thay vào (∗) ta có $\dfrac{\pi}{6} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right) - \frac{\pi}{6}$.

Từ đó suy ra $\arcsin\left(\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 3,\ b = 3$.

Vậy $S = a + b = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Có bao nhiêu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$\int\limits_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x.$$

A. 3 . **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\int\limits_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 (f(x))^{2018}\,(f(x)-1)^2\,\mathrm{d}x=0.$$

Do đó hoặc $f(x)=0$ hoặc $f(x)=1$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x)=0,\forall\, x\in[0;1]$ hoặc $f(x)=1,\forall\, x\in[0;1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=f(2)=0$, $\max\limits_{[0;2]}|f''(x)|=1$ và $\left|\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\dfrac{2}{3}$. Tính $\left|\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{24}$. **C.** $\dfrac{37}{12}$. **D.** $\dfrac{37}{24}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x&\geq\left|\int\limits_0^2 f''(x)(2x-x^2)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|f'(x)(2x-x^2)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f'(x)(2-2x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int\limits_0^2 f'(x)(2-2x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|f(x)(2-2x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)(-2)\,\mathrm{d}x\right|\\&=2\left|\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Mà $\int\limits_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$. Từ đó suy ra

$$\int\limits_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^2 f''(x)(2x-x^2)\,\mathrm{d}x\right|\Leftrightarrow|f''(x)|=1\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}f''(x)&=-1\\f''(x)&=1\end{aligned}\right..$$

Mặt khác $f''(x)$ liên tục trên $[0;2]$ nên $\left[\begin{array}{l} f''(x)=-1, \forall x\in[0;2] \\ f''(x)=1,\ \forall x\in[0;2] \end{array}\right.$.

① $f''(x)=-1$ khi đó $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}+C_1x+C_2$. Vì $f(0)=f(2)=0$ nên $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}+x$.

Khi đó $\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\dfrac{11}{24}$.

② $f''(x)=1$ khi đó $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+C_1x+C_2$. Vì $f(0)=f(2)=0$ nên $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x$.

Khi đó $\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\dfrac{11}{24}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^4(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

Tính $J=\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$

Đặt $u=x^3\Rightarrow \mathrm{d}u=3x^2\,\mathrm{d}x$,

$\mathrm{d}v=x(1-x^2)^n\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}$.

$J=uv\Big|_0^1+\displaystyle\int_0^1\frac{3}{2n+2}x^2(1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2n+2}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2n+2}I_{n+1}$

$\Rightarrow\dfrac{2n+5}{2n+2}I_{n+1}=I_n\Rightarrow\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{2n+2}{2n+5}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+2}{2n+5}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{15}$, $\displaystyle\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{49}{45}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{4}{63}$. **D.** 1.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = xf(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = [f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x &= x^2 f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x[f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= f(1) - \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\cdot\frac{4}{15} = \frac{7}{15}$. Khi đó dự đoán dạng $f'(x) = mx^2$, với $m \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 [mx^2 - f'(x)]^2\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 m^2x^4\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 2mx^2 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m^2}{5} - \frac{14m}{15} + \frac{49}{45} = \frac{(3m-7)^2}{45}. \end{aligned}$$

Ta cần $\displaystyle\int\limits_0^1 [mx^2 - f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \frac{(3m-7)^2}{45} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}$. Như vậy ta có

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{7}{3}x^2 - f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra $f'(x) = \dfrac{7}{3}x^2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7x^3}{9} + C$. Từ $f(1) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{2}{9}$. Khi đó $f(x) = \dfrac{7x^3}{9} + \dfrac{2}{9}$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}$. Vậy

$$\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{7x^3}{9} + \frac{2}{9}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\left[x\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.$$

Ta lại có $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\,\mathrm{d}x=0.$$

Vì $\left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\geq 0,\ \forall x\in[0;1]$ và $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\,\mathrm{d}x\geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$f'(x)+x\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x\Leftrightarrow f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+C.$$

Lại có $f(1)=0$ nên $C=0$.

Vậy $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$, $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{e}{2}$. **B.** $2-\mathrm{e}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. **D.** $\mathrm{e}-2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=x\mathrm{e}^x\end{cases}$. Ta có

$$\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\quad(1).$$

Lại có $\displaystyle\int_0^1 (x\mathrm{e})^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ (2).

Kết hợp (1), (2) với giả thiết $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$, ta có

$$\int_0^1 [f'(x)+x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow f(x) = -x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + C.$$

Vì $f(1)=0$ nên $C=0$. Do đó $f(x) = -x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x)+2018f(x) = \mathrm{e}^x, \forall x \in [-1;1]$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2018\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Đặt $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $J = \displaystyle\int_{-1}^1 f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x$, khi đó $J = \displaystyle\int_1^{-1} f(t)\mathrm{d}(-t) = \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t = I$.

Mà $f(-x)+2018f(x) = \mathrm{e}^x, \forall x\in[-1;1] \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^1 (f(-x)+2018f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(-x)\,\mathrm{d}x + 2018\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_{-1}^1 \Rightarrow 2019I = \mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}} \Rightarrow I = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 (x+3)f'(x)\,\mathrm{d}x = 15$ và $f(1)=2$, $f(0)=1$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=-10$. **C.** $I=12$. **D.** $I=10$.

Lời giải.

Đặt $u=x+3$ và $dv = f'(x)\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và $v=f(x)$. Do đó

$$\int_0^1 (x+3)f'(x)\,\mathrm{d}x = (x+3)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 4f(1) - 3f(0) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 15$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \dfrac{2}{3}$. **D.** $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}\left(1-2x\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}\left(2x-1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_3^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\limits_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ là

A. $2019e^{2018}$. **B.** $2018\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $2018\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $2017\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}
&f'(x) - 2018 \cdot f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot \mathrm{e}^{2018x}\\
\Leftrightarrow &\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f'(x) - 2018 \cdot \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) = 2018 \cdot x^{2017}\\
\Leftrightarrow &\left[\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f'(x)\right] = 2018 \cdot x^{2017}\\
\Leftrightarrow &\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) + C = \int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow &\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) + C = x^{2018}
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f(0) + C = 0 \Leftrightarrow 2018 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2018$

Từ đó ta được $\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) - 2018 = x^{2018}$

Thay $x = 1$ ta được

$$\mathrm{e}^{-2018} \cdot f(1) - 2018 = 1 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{\mathrm{e}^{2018}} = 2019 \Leftrightarrow f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$. **C.** $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$. **D.** $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3$

$$\Leftrightarrow (f(x))^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1 + (f(x))^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(f(x))^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + (f(x))^3}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(1 + (f(x))^3\right)}{2\sqrt{1 + (f(x))^3}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1 + (f(x))^3}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1 + (f(1))^3} - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow f(1) \approx 2{,}605.$$

Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và là hàm số chẵn, biết $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\displaystyle I = \int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Với $x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$$I = -\int_{1}^{0} \frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^t f(t)}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{(\mathrm{e}^x+1) f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Vậy $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn $[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot (x^2+1) = 1 + [f(x)]^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;1]$ biết $f(0) = 2$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$. **C.** $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$. **D.** $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot \left(x^2+1\right) = 1 + [f(x)]^3 &\Rightarrow [f(x)]^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+[f(x)]^3} \\
&\Rightarrow \frac{3 \cdot [f(x)]^2 \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}} = \frac{3}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&\Rightarrow \left[\sqrt{1+[f(x)]^3}\right]' = \frac{3}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&\Rightarrow \int_0^1 \left[\sqrt{1+[f(x)]^3}\right]' \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mà $f(0) = 2$ nên ta được $\sqrt{1+[f(1)]^3} - 3 = \dfrac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow f(1) \approx 2{,}6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1) = 0$. Biết $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\dfrac{1}{\pi}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\pi\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \cos(\pi x)\,f(x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(f(1)+f(0)\right) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

☑ *Cách 1:* Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^1 [f(x) - k\sin(\pi x)]^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1.
\end{aligned}$$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - \sin(\pi x)]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

☑ *Cách 2:* Sử dụng BĐT Holder

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kg(x), \forall x \in [a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có

$\dfrac{1}{4} = \left[\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$, suy ra $f(x) = k\sin(\pi x)$.

Mặt khác: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x)\cdot f(a-x) = 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I = \dfrac{2a}{3}$. **B.** $I = \dfrac{a}{2}$. **C.** $I = \dfrac{a}{3}$. **D.** $I = a$.

Lời giải.

Đặt $t = a - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

Ta có $f(x)\cdot f(a-x) = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{f(a-x)}$.

Vậy $I = \displaystyle\int_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{f(t)}} = -\int_a^0 \frac{f(t)}{1+f(t)}\mathrm{d}t = -\int_a^0 \frac{1+f(t)-1}{1+f(t)}\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_0^a \frac{1+f(t)-1}{1+f(t)}\mathrm{d}t = \int_0^a \left(1-\frac{1}{1+f(t)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^a \left(1-\frac{1}{1+f(x)}\right)\mathrm{d}x = x|_0^a - I = a - I$.

Do đó ta có $I = a - I \Leftrightarrow I = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Biết $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a+b$.

A. $P = 8$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 12$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$.

Đặt $t = \pi - x$.

$$\int_0^\pi xf(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\pi^0 (\pi-t)f(\pi-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi} \pi f(x)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} x f(x)\,\mathrm{d}t.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Xét $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

$$I_1 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t \quad = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.$$

Xét $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}\,\mathrm{d}t \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.$$

Khi đó $I_1 = 2I_2 = I_2 + I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Suy ra $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} I_1 = \frac{\pi^2}{4}$.

Suy ra $a = 2; b = 4$. Do đó $2a + b = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$, $n \in \mathbb{N}$. Đặt $u_n = 1\,(I_1 + I_2) + 2\,(I_2 + I_3) + \cdots + n\,(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L \in (-1; 0)$. **B.** $L \in (-2; -1)$. **C.** $L \in (0; 1)$. **D.** $L \in (1; 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx} + \mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n-1)x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{n-1}\left(\mathrm{e}^{-(n-1)} - 1\right).$$

Do đó $(n-1)\left(I_{n-1}+I_n\right)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}$. Suy ra

$$u_n=-\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}}\right].$$

Nên $-u_n=\dfrac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}-1}-1$ và $\lim u_n=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}}$. Vậy $L\in(-1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=0$, $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)e^xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{e-1}{2}$. **B.** $\dfrac{e^2}{4}$. **C.** $\dfrac{e}{2}$. **D.** $e-2$.

Lời giải.

Đặt $I=\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)e^xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$.

Xét

$$\int_0^1 e^xf(x)\,\mathrm{d}x=xe^xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 x\,\mathrm{d}\left(e^xf(x)\right)=-\int_0^1\left(xe^xf(x)+xe^xf'(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$\int_0^1 xe^xf'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 xe^xf(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 e^xf(x)\,\mathrm{d}x=-I=\frac{1-e^2}{4}.$$

Khi đó

$$\int_0^1 f'(x)\left(f'(x)+xe^x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\left[f'(x)\right]^2+xe^xf'(x)\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x+\int_0^1 xe^xf'(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Do $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, xe^x liên tục trên $[0;1]\subset\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x\neq 0$, suy ra $f'(x)\neq 0$ với mọi $x\in[0;1]$ nên

$$f'(x)=-xe^x\Rightarrow f(x)=-\int xe^x=-\int x\,\mathrm{d}e^x=-xe^x+\int e^x\,\mathrm{d}x=-xe^x+e^x+C.$$

Từ $f(1)=0$ suy ra $C=0$. Vậy $f(x)=-xe^x+e^x$. Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(-xe^x+e^x\right)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\,\mathrm{d}e^x+\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\\&=-xe^x\Big|_0^1+2\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=-e+2e^x\Big|_0^1\\&=-e+2(e-1)=e-2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức sau với mọi $x \in [1;4]$

$$\begin{cases} f(1) = 2g(1) = 2 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{g(x)} \\ g'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{f(x)}. \end{cases}$$

Tính $I = \displaystyle\int_1^4 [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4\ln 2$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 2\ln 2$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = -\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$f(1)g(1) = 2 = \frac{2}{\sqrt{1}} + C \Rightarrow C = 0.$$

Từ đó suy ra

$$I = \int_1^4 [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$, $f'(1) = \dfrac{9}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{39}{4}$, $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{14}{3}$. **B.** $I = 14$. **C.** $I = \dfrac{7}{3}$. **D.** $I = 7$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{5}{2} = \displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}f'(x) = (x^2+x)f'(x)|_0^1 - \int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2} \quad (1).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[4[f'(x)]^2 - 12(2x+1)f'(x) + 9(2x+1)^2\right]\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[2f'(x) - 3(2x+1)\right]^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$\Rightarrow 2f'(x) - 3(2x+1) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2} + C$

Từ $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3(x^2+x)}{2}$. Vậy $I = \displaystyle\int_0^2 \dfrac{3(x^2+x)}{2}\,\mathrm{d}x = 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$.

Tính $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. 2018. **B.** 4036. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = -\pi \Rightarrow t = \pi$; $x = \pi \Rightarrow t = -\pi$. Khi đó

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}(-\mathrm{d}t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^t\cdot f(t)}{2018^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^x\cdot f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2018^x\cdot f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 4036 \Rightarrow I = 2018.$$

Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}-2$. **B.** $I = 2-\mathrm{e}$. **C.** $I = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **D.** $I = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Tính $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x\mathrm{e}^x \end{cases}$.

$$\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}f(1) - \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Mà $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \Rightarrow \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_0^1 (x\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}\right)^2 \le \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \le \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = axe^x$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 xe^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^2}{4} \Rightarrow \int_0^1 a(xe^x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow a \cdot \frac{e^2-1}{4} = \frac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow a = -1.$

Suy ra $f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -e^x(x-1) + C$, mà $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -e^x(x-1)\,\mathrm{d}x = e - 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = \dfrac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(4) = \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $f(4) = \dfrac{1}{2}$. **D.** $f(4) = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)\Big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x\sin(\pi x).$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được $2xF'(x^2) = \sin\pi x + \pi x\cos\pi x$.

Thay $x = 2$ vào ta được $4F'(4) = 2\pi \Leftrightarrow F'(4) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(4) = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x) = 1 + 2018\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $g(x) = f^2(x)$. Tính $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$. **B.** $\dfrac{1009}{2}$. **C.** $\dfrac{2019}{2}$. **D.** 505.

Lời giải.

Vì $f(x) > 0$ và $g(x) = f^2(x)$ nên $g(x) > 0$.

$g(x) = 1 + 2018\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ nên $g(0) = 1 + 2018\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& g(x) = 1 + 2018\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow\ & g'(x) = 2018f(x) = 2018\sqrt{g(x)} \\
\Rightarrow\ & \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \\
\Rightarrow\ & \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x = 2018\int_0^t \mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & 2\left(\sqrt{g(t)} - 1\right) = 2018t \\
\Rightarrow\ & \sqrt{g(t)} = 1009t + 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (1009t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{1011}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 95. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-x\tan x}{x^2\cos x + x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\pi-a}{\pi-b}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=2$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-x\tan x}{x^2\cos x + x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x + x\cos x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = x\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{3}$; $x=\pi \Rightarrow t=-\pi$.

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t} = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi} = \ln\frac{\pi-3}{\pi-1} \Rightarrow P = a+b = 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x\cdot f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{16}$.

Lời giải.

Từ $4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, ta có

$$\int\limits_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

Xét tích phân $L=\displaystyle\int\limits_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ và $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$. Suy ra

$$L = \int\limits_0^1 2f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2I.$$

Xét tích phân $K=\displaystyle\int\limits_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$. Suy ra

$$K = \int\limits_1^0 3f(t)(-\mathrm{d}t) = 3\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3I.$$

Từ (1) suy ra

$$2I + 3I = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1, f'(x) = (2 - 2x) \cdot f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (0; \mathrm{e}^2)$. **B.** $m \in (0; \mathrm{e})$. **C.** $m \in (1; \mathrm{e})$. **D.** $m \in (0; 1)$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f'(x) = (2 - 2x) \cdot f(x)$ ta suy ra $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2 - 2x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\ln|f(x)| = 2x - x^2 + C \Rightarrow |f(x)| = \mathrm{e}^{2x - x^2 + C} \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2x - x^2 + C}$ (vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2x - x^2}$.

Ta có $f'(x) = (2 - 2x) \cdot \mathrm{e}^{2x - x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e	↘	0

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; \mathrm{e})$.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(2x)}{1 + 2^x}\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải.

• Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x = -1 \Rightarrow t = -2$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$. Suy ra

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(2x)}{1 + 2^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{f(t)}{1 + \sqrt{2}^t}\,\mathrm{d}t = 8 \Rightarrow \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1 + \sqrt{2}^x}\,\mathrm{d}x = 16.$$

• Xét $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1 + (\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$. Với $x = -2 \Rightarrow u = 2$, $x = 2 \Rightarrow u = -2$.

Suy ra

$$\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1 + (\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{f(u)}{1 + \sqrt{2}^u}\,\mathrm{d}u = 16.$$

• Ta có $y = f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-2; 2]$.

Suy ra $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} \frac{f(x)\cdot\sqrt{2}^{x}}{1+\sqrt{2}^{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^{x}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Suy ra $16 = 2\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - 16 \Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 16.$

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x), f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\displaystyle\int_{0}^{1}[f'(x)\cdot[f(x)]^2+1]\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $\displaystyle\int_{0}^{1}[f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{0}^{1}[f'(x)\cdot[f(x)]^2+1]\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{0}^{1}\left(\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)-1\right)^2\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)}\cdot f(x) = 1 \Rightarrow f'(x)\cdot[f(x)]^2 = 1$. Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\dfrac{[f(x)]^3}{3} = x + C$.

Mà $f(0)=2 \Rightarrow C = \dfrac{8}{3} \Rightarrow [f(x)]^3 = 3\left(x+\dfrac{8}{3}\right)$. Suy ra $\displaystyle\int_{0}^{1}[f(x)]^3\,\mathrm{d}x = \frac{19}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$ với $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. Tính $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{9}{2}$. **D.** $I=-\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x$ và $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x) = 3\cdot\dfrac{1}{x}$. Suy ra $f(x) = \dfrac{2}{x} - x$.

$I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 101. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 m/s rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc là $v(t) = -2t+20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ôtô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

A. 100 m. **B.** 75 m. **C.** 200 m. **D.** 125 m.

Lời giải.

$v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$. Trong 15 giây cuối cùng cho đến khi dừng hẳn, trong 5 giây đầu ô tô chuyển với vận tốc 20 m/s suy ra ô tô đi được $5 \cdot 20 = 100$ m. Trong 10 giây cuối ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) = -2t + 20$ m/s cho nên ô tô đi được $\displaystyle\int_0^{10} (-2t + 20)\,\mathrm{d}t = 100$ m. Vậy trong 15 giây cuối cùng ô tô đi được 200 m.

Chọn đáp án C □

Câu 102. Một ô tô đang chạy với tốc độ 10 (m/s) thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 8m. **B**. 10m. **C**. 5m. **D**. 20m.

Lời giải.

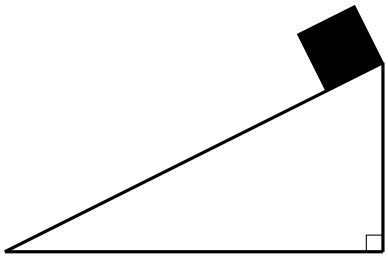
Thời điểm ô tô dừng hẳn là $v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$(s).

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được là

$$S = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t\right)\Big|_0^2 = 10(\mathrm{m}).$$

Chọn đáp án B □

Câu 103. Một vật trượt không vận tốc đầu xuất phát từ đỉnh của mặt ván phẳng nằm nghiêng (như hình vẽ). Biết gia tốc của chuyển động là 5 m/s^2 và sau $1,2$ giây thì vật đến chân của mặt ván. Độ dài của mặt ván là



A. $3,6$ m. **B**. $3,2$ m. **C**. 3 m. **D**. $2,8$ m.

Lời giải.

Ta có phương trình vận tốc của vật theo thời gian t là $v(t) = 5t$. Độ dài của mặt ván chính là quãng đường vật đi được trong 1,2 giây nên ta có

$$s = \int_0^{1,2} 5t\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}t^2\Big|_0^{1,2} = 3,6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 104. Một xe mô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe nhìn thấy một chướng ngại vật nên đạp phanh. Từ thời điểm đó, mô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 20 - 5t$ m/s,

trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà mô tô đi được từ khi người lái xe đạp phanh đến lúc mô tô dừng lại là

A. 20 m. **B**. 80 m. **C**. 60 m. **D**. 40 m.

Lời giải.

Gọi s là quãng đường mà mô tô đi được từ khi người lái xe đạp phanh đến lúc mô tô dừng lại, và t_0 là thời điểm mô tô dừng lại. Ta có

$$20 - 5t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 4.$$

Vậy $s = \displaystyle\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 (20 - 5t)t = 40$ m.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. C	5. C	6. A	7. C	8. A	9. A	10. A
11. D	12. B	13. B	14. C	15. C	16. D	17. C	18. D	19. D	20. A
21. A	22. D	23. C	24. B	25. C	26. A	27. B	28. D	29. C	30. D
31. B	32. B	33. A	34. A	35. B	36. C	37. C	38. D	39. D	40. D
41. B	42. B	43. B	44. A	45. B	46. B	47. A	48. D	49. C	50. D
51. C	52. A	53. D	54. A	55. A	56. B	57. D	58. A	59. A	60. C
61. C	62. C	63. A	64. B	65. B	66. A	67. C	68. D	69. D	70. D
71. B	72. B	73. A	74. A	75. C	76. D	77. B	78. B	79. B	80. A
81. B	82. D	83. B	84. C	85. B	86. A	87. A	88. D	89. B	90. D
91. A	92. A	93. B	94. A	95. C	96. C	97. B	98. D	99. D	100. A
101. C	102. B	103. A	104. D						

BÀI 3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

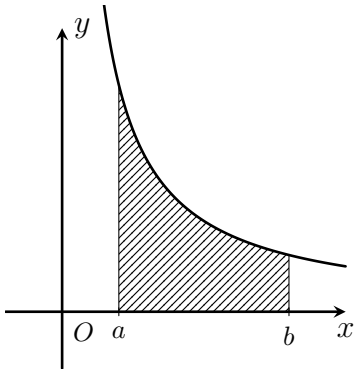
1 Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoành

Định lí 1.

Cho $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Diện tích hình phẳng $(\mathcal{H})$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

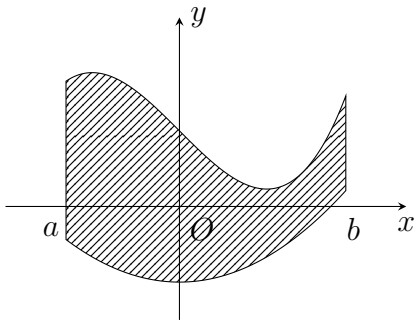


2 Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Định lí 2.

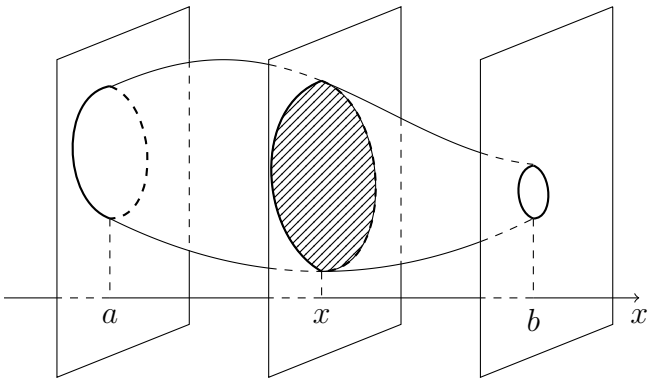
Cho $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Diện tích của $(\mathcal{H})$ bằng $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$



3 Thể tích vật thể

Định lí 3. *Cắt vật thể $\mathcal{V}$ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a, x=b(a<b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại điểm $x, (a\le x\le b)$ cắt $\mathcal{V}$ theo thiết diện có diện tích $S(x)$. Với $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.*



Thể tích của vật thể $\mathcal{V}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) tính bởi công thức

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

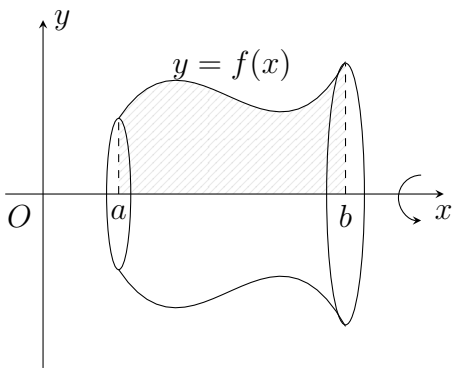
4 Thể tích khối tròn xoay

Định lí 4.

Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$ quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay.

Thể tích của khối tròn xoay đó được tính bởi công thức:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Diện tích hình giới hạn bởi: đồ thị hàm số - trục hoành và hai cận

Phương pháp giải. Tính diện tích hình giới hạn bởi: $(C): y=f(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$ với $a<b$.

Bước 1. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trong khoảng $(a;b)$.

Bước 2. Áp dụng công thức tính diện tích và tách ra thành nhiều đoạn thành phần để xét dấu phá trị tuyệt đối như sau

$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{x_n}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x=$$

$$= \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \cdots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Ở đó $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ là các nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm nằm trong khoảng $(a;b)$.

Bước 3. Kết luận.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^3$, trục hoành, $x = 0$ và $x = 2$.

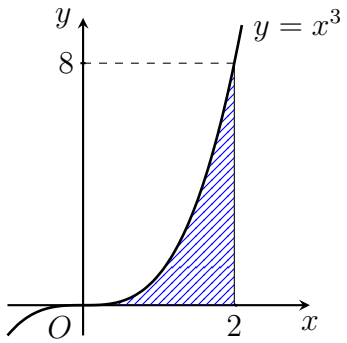
Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Diện tích hình giới hạn là

$$S = \int_0^2 |x^3|\,\mathrm{d}x = \left|\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right| = 4.$$



□

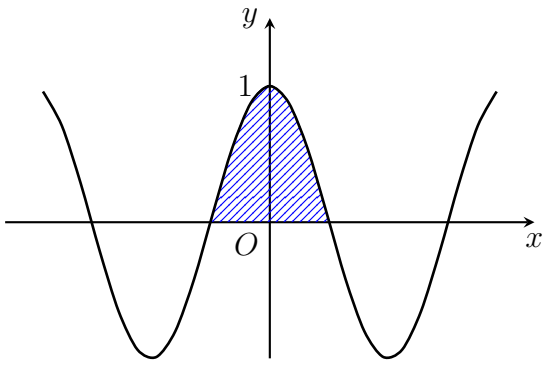
Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \cos x$, Ox, $x = -\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta thấy phương trình hoành độ không có nghiệm nào thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Diện tích hình giới hạn là

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right| = 2.$$



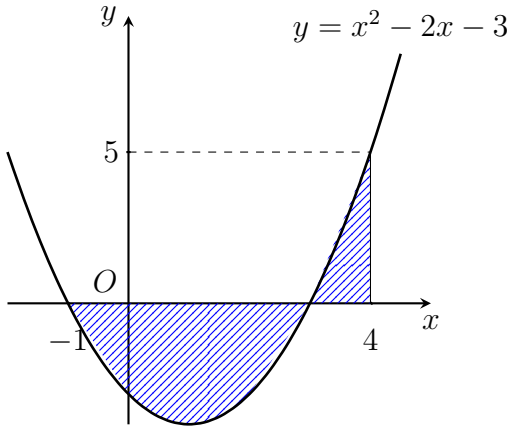
□

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 4$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3. \end{array}\right.$$



Diện tích hình giới hạn là

$$S=\int\limits_{-1}^{4}\left|x^2-2x-3\right|\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{-1}^{3}\left|x^2-2x-3\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{4}\left|x^2-2x-3\right|\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\int\limits_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{3}^{4}(x^2-2x-3)\,\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-1}^{3}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{3}^{4}\right|=13.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x=-1$, $x=2$, $y=0$ và $y=x^2-2x$.

Lời giải.

Ta có $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình giới hạn là

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\left|x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{0}(x^2-2x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\,\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right|=\frac{8}{3}.$$

□

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^2-x-2$, $y=0$, $x=-2$, $x=0$.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình giới hạn là

$$S=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^2-x-2\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{-1}\left|x^2-x-2\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2-x-2\right|\,\mathrm{d}x=$$

$$= \left|\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{-1}\right| + \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-1}^{0}\right| = 3.$$

□

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x=1$, $x=\mathrm{e}$, $y=0$, $y=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải.

Phương trình $\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}=0$ vô nghiệm trong khoảng $(1;\mathrm{e})$.

Diện tích hình phẳng là

$$\int_1^{\mathrm{e}}\left|\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x = \left|\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| = \left|(\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x})\Big|_1^{\mathrm{e}}\right| = 2-\sqrt{\mathrm{e}}.$$

□

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\tan^3 x$, $y=0$, $x=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Nghiệm của phương trình $\tan^3 x=0$ trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ là $x=0$.

Diện tích hình phẳng là

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left|\tan^3 x\right|\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left|\tan^3 x\right|\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left|\tan^3 x\right|\mathrm{d}x = \left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^3 x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(\tan x(1+\tan^2 x)-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x(1+\tan^2 x)-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x\right| =$$

$$\left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan x\,\mathrm{d}(\tan x)+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}(\tan x)+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\right| + \left|\left(\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right| = 1+2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

□

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos x=0$ vô nghiệm trong khoảng $(0;\dfrac{\pi}{2})$.

Diện tích hình phẳng là

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos x\right|\mathrm{d}x = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\left(\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\right| =$$

$$\left| \left(-\frac{\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{3} + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}.$$

□

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, $y = 0$ và $y = \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$.

Lời giải.

Phương trình $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x} = 0$ vô nghiệm trong khoảng $(1;\mathrm{e})$.

Diện tích hình giới hạn là

$$\int_1^{\mathrm{e}} \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \right| \mathrm{d}x = \left| \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \mathrm{d}x \right| = \left| \int_1^{\mathrm{e}} (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}(1+\ln x) \right| =$$

$$\left| \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} \Big|_1^{\mathrm{e}} \right| = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

□

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin^2 x \cos^3 x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $\sin^2 x \cos^3 x =$ vô nghiệm trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Diện tích hình giới hạn là

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^2 x \cos^3 x\right| \mathrm{d}x = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) \, \mathrm{d}(\sin x) \right| =$$

$$\left| \left(\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{2}{15}.$$

□

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x\mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 2$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Diện tích hình giới hạn là

$$S=\int\limits_{-1}^{2}|x\mathrm{e}^{x}|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}|x\mathrm{e}^{x}|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}|x\mathrm{e}^{x}|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{0}x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{2}x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\right|=$$

$$\left|(x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x})|_{-1}^{0}\right|+\left|(x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x})|_{0}^{2}\right|=\mathrm{e}^{2}+2-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

□

DẠNG 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

Phương pháp giải. Muốn tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ ta thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1: Xét phương trình $f(x)-g(x)=0\quad(1)$.

Phương trình (1) có nghiệm $x_1<x_2<\ldots<x_k$.

Bước 2: Gọi S là diện tích cần tính, ta có:

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{x_1}^{x_k}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.\\&=\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\ldots+\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.\\&=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|+\ldots+\left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y=x^2+2$ và $y=3x$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$x^2+2-3x=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_{1}^{2}|x^2+2-3x|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{1}^{2}(x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{1}^{2}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right|=\frac{1}{6}\text{ (đvdt)}.$$

□

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2 + 2x$ và $y = |x|$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$x^2 + 2x = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 + 2x = x \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ x^2 + 2x = -x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right. .$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-3}^{0} \left|x^2 + 2x - |x|\right| \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \left|x^2 + 3x\right| \mathrm{d}x = \left|\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right| = \left|0 - \frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

□

Nhận xét: Nếu bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong mà việc biểu diễn y theo x gặp khó khăn thì ta có thể chuyển về tính tích phân theo $\mathrm{d}y$.

Ví dụ 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y^2 - 3y + x = 0$ và $x - y = 0$.

Lời giải.

Xét phương trình tung độ giao điểm ta có:

$$y^2 - 3y + y = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{0}^{2} \left|y^2 - 3y + y\right| \mathrm{d}y = \left|\int_{0}^{2} (y^2 - 2y)\,\mathrm{d}y\right| = \left|\left(\frac{1}{3}y^3 - y^2\right)\Big|_{0}^{2}\right| = \left|\frac{-4}{3} - 0\right| = \frac{4}{3} \text{ (đvdt)}.$$

□

Ví dụ 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y^2-2y+x=0$ và đường thẳng $d: x+y=0$.

Lời giải.

Viết lại: $(P): x=-y^2+2y$; $d: x=-y$.

Tọa độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x=-y^2+2y \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+2y=-y \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-3y=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0; x=0 \\ y=3; x=-3 \end{array}\right.$$

Diện tích cần tính là:

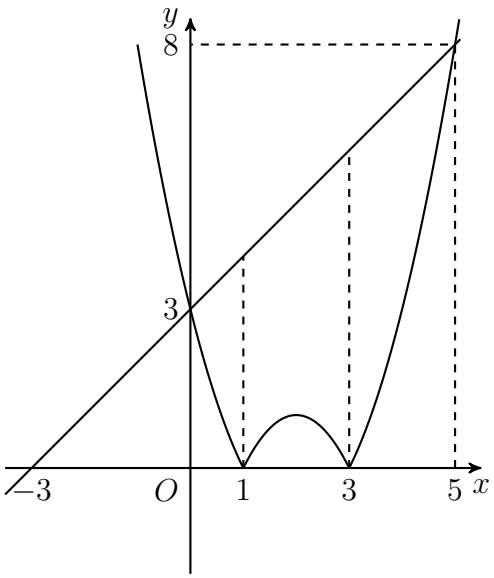
$$S=\int\limits_0^3 \left[(-y^2+2y)-(-y)\right]\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^3 (-y^2+3y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{-y^3}{3}+\frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=-\frac{1}{3}.27+\frac{3}{2}.9=\frac{9}{2}\text{ (đvdt).}$$

□

Ví dụ 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=|x^2-4x+3|$ và đường thẳng $d: y=x+3$.

Lời giải.



Ta có: $(P): y=\begin{cases} x^2-4x+3 \text{ nếu } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 3 \\ -x^2+4x-3 \text{ nếu } 1<x<3 \end{cases}$

Hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$\left[\begin{array}{l} x+3=x^2-4x+3 \\ x+3=-x^2+4x-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x=0 \\ x^2-3x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Diện tích cần tính là:

$$S=\int\limits_0^1\left[(x+3)-(x^2-4x+3)\right]\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3\left[(x+3)-(-x^2+4x-3)\right]\,\mathrm{d}x+\int\limits_3^5\left[(x+3)-(x^2-4x+3)\right]\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\limits_0^1(-x^2+5x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3(x^2-3x+6)\,\mathrm{d}x+\int\limits_3^5(-x^2+5x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_1^3+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5$$
$$=\frac{109}{6}\text{ (đvdt).}$$

□

Ví dụ 9. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=8$ và parabol $(P):y^2=2x$. (P) chia (C) thành 2 phần, tìm tỉ số diện tích hai phần đó.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (P) và (C) là:

$$2x=8-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4(\text{loại})\end{array}\right.$$

Xét giao điểm thuộc góc phần tư thứ nhất, với $x=2$ thì $y=2$.

Gọi S_2 là phần có diện tích nhỏ hơn, S_1 là phần còn lại.

Ta có:

$$S_2=2\int\limits_0^2\left[\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right]\,\mathrm{d}y=2\int\limits_0^2\sqrt{8-y^2}\,\mathrm{d}y-\int\limits_0^2y^2\,\mathrm{d}y=2I-\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2=2I-\frac{8}{3}.$$

Đặt $y=2\sqrt{2}\sin t\Rightarrow dy=2\sqrt{2}\cos t dt$.

$$I=\int\limits_0^2\sqrt{8-y^2}dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2t}.2\sqrt{2}\cos t dt=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2t}.\cos t dt$$
$$=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2t dt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=4\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi+2$$

Do đó $S_2=2\pi+\dfrac{4}{3}$.

Diện tích hình tròn $S=\pi.(2\sqrt{2})^2=8\pi$.

Suy ra $S_1=8\pi-\left(2\pi+\dfrac{4}{3}\right)=6\pi-\dfrac{4}{3}$ (đvdt).

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{6\pi-\dfrac{4}{3}}{2\pi+\dfrac{4}{3}}=\dfrac{9\pi-2}{3\pi+2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^3 - 2x^2$ và $y = x - 2$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$x^3 - 2x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-1}^{2} \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| \,\mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1}\right| + \left|\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{1}^{2}\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ (đvdt).}$$

□

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x - 3$ và $y = \dfrac{-2}{x}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$x - 3 = \frac{-2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x-3) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{1}^{2} \left|x - 3 + \frac{2}{x}\right| \,\mathrm{d}x = \left|\int_{1}^{2} \left(x - 3 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\ln x\right)\Big|_{1}^{2}\right| = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \text{ (đvdt).}$$

□

Bài 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = \sqrt{x-1}$ và $y = x - 1$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$\sqrt{x-1}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ (x-1)^2=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_1^2\left|x-1-\sqrt{x-1}\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_1^2\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)\right|\,\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right)\Big|_1^2\right|=\frac{1}{6}\text{ (đvdt).}$$

□

Bài 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y=2^x$ và $y=-x^2+5x-2$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$2^x=-x^2+5x-2\Leftrightarrow 2^x+x^2-5x+2=0$$

.

Xét $f(x)=2^x+x^2-5x+2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=2^x.\ln 2+2x-5\Rightarrow f"(x)=2^x.\ln^2 2+2>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có tối đa hai nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Mà ta có: $f(1)=0; f(2)=0$.

Nên phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm $x=1; x=2$.

Hay phương trình hoành độ giao điểm có đúng hai nghiệm $x=1; x=2$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_1^2\left|2^x+x^2-5x+2\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_1^2\left(2^x+x^2-5x+2\right)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x\right)\Big|_1^2\right|=\frac{19}{6}-\frac{2}{\ln 2}\text{(đvdt).}$$

□

Bài 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $x-\sqrt[3]{y}=0$ và $x-y=0$.

Lời giải.

Xét phương trình tung độ giao điểm ta có:

$$y = \sqrt[3]{y} \Leftrightarrow y^3 = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \\ y = 1 \end{array}\right. .$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} |y - \sqrt[3]{y}| \, \mathrm{d}y \\ &= \left| \int_{-1}^{0} (y - \sqrt[3]{y}) \, \mathrm{d}y \right| + \left| \int_{0}^{1} (y - \sqrt[3]{y}) \, \mathrm{d}y \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{y^4} \right) \Big|_{-1}^{0} \right| + \left| \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{y^4} \right) \Big|_{0}^{1} \right| = \frac{1}{2}(\text{đvdt}) \end{aligned}$$

□

Bài 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = |2x^2 - 4x|$ và $y = x + 3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$|2x^2 - 4x| = x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 4x \geq 0 \\ 2x^2 - 4x = x + 3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 4x \leq 0 \\ -(2x^2 - 4x) = x + 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \end{array}\right.$$

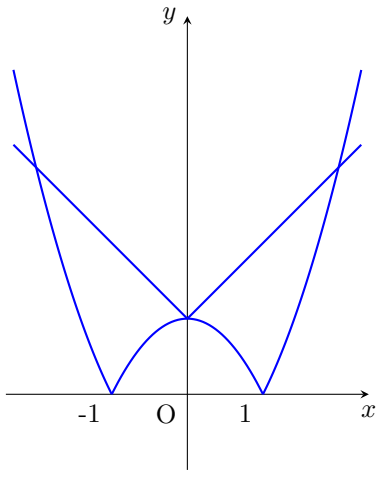
Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{3} \left| \left|2x^2-4x\right| - x - 3 \right| \mathrm{d}x \\ &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(2x^2-5x-3\right)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{2} \left(-2x^2+3x-3\right)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{2}^{3} \left(2x^2-5x-3\right)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \frac{19}{24} + \frac{16}{3} + \frac{17}{6} = \frac{215}{24} (\text{đvdt}). \end{aligned}$$

□

Bài 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = |x^2 - 1|$ và $y = |x| + 1$.

Lời giải.



Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$
\begin{aligned}
& |x^2-1| = |x| + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 + 2|x| + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 - 3x^2 - 2|x| = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - 3x^2 - 2x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x^4 - 3x^2 + 2x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^2 \left||x^2-1|-x-1\right| \mathrm{d}x \\ &= 2\left|\int_0^1 \left(-x^2+1-x-1\right) \mathrm{d}x\right| + 2\left|\int_1^2 \left(x^2-1-x-1\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= 2\left|\int_0^1 \left(-x^2-x\right)\right| + 2\left|\int_1^2 \left(x^2-x-2\right)\right| \\ &= 2\left|\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1\right| + 2\left|\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_1^2\right| \\ &= 2.\frac{5}{6}+2.\frac{7}{6}=4(\text{đvdt}) \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{-x^2+4}; y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned} &\sqrt{4-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow &4-x^2=\frac{x^4}{2} \\ \Leftrightarrow &x^4+2x^2-8=0 \\ \Leftrightarrow &x=\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Xét $x\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ ta có $\sqrt{4-x^2}\geq\sqrt{2}$ và $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} \geq \frac{x^2}{\sqrt{2}} \quad \forall x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S &= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{-x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} x^2\,\mathrm{d}x \right) \\
&= 2\left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \\
&= \pi + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin x; y = \dfrac{3}{5\pi}x$

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ:

$$\sin x - \frac{3}{5\pi}x = 0 \quad (*)$$

Ta thấy nếu $x > \dfrac{5\pi}{3}$ thì $\dfrac{3}{\pi.5}x > 1$

$$\Rightarrow \sin x - \frac{3}{5\pi}x < 0 \quad \forall x > \frac{5\pi}{3} \qquad (1)$$

Hơn nữa $x < \dfrac{-5\pi}{3}$ thì $\dfrac{3}{\pi.5}x < -1$

$$\Rightarrow \sin x - \frac{3}{5\pi}x > 0 \quad \forall x < \frac{-5\pi}{3} \qquad (2)$$

Từ (1); (2) suy ra nếu x là nghiệm của $(*)$ thì $x \in [\dfrac{-5\pi}{3}; \dfrac{5pi}{3}]$.

Lại có khi $x \in [\dfrac{-5\pi}{3}; -\pi]$ thì $\sin x > 0$

$$\Rightarrow \sin x - \frac{3}{5\pi}x > 0 \quad \forall x \in [\frac{-5\pi}{3}; -\pi]$$

$x \in [\pi; \dfrac{5\pi}{3}]$ thì $\sin x < 0$

$$\Rightarrow \sin x - \frac{3}{5\pi}x < 0 \quad \forall x \in [\pi; \frac{5\pi}{3}]$$

Vậy ta chỉ xét $x \in (-\pi;\pi)$

Xét

$$t(x) = \sin x - \frac{3}{5\pi}x \quad \forall x \in (-\pi;\pi)$$
$$t'(x) = \cos x - \frac{3}{5\pi}$$
$$t''(x) = -\sin x.$$

Ta có $t''(x) = 0$ trên $(-\pi;\pi) \Leftrightarrow x = 0$.

Theo định lí Rolle suy ra $t'(x)$ có không quá 2 nghiệm trên $(-\pi;\pi)$

Suy ra $t(x)$ có không quá 3 nghiệm trên $(-\pi;\pi)$.

Lại có $x = 0; x = \pm\frac{5\pi}{6}$ là nghiệm của $t(x)$ trên $(-\pi;\pi)$.

Suy ra $t(x)$ có đúng 3 nghiệm $x = \frac{-5\pi}{6}; x = 0; x = \frac{5\pi}{6}$ trên $(-\pi;\pi)$.

Ta có

$$S = \int\limits_{\frac{-5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin x - \frac{3}{5\pi}x| \, \mathrm{d}x$$

Ta thấy rằng $\sin\frac{\pi}{2} = 1 > \frac{3}{5\pi}.\frac{\pi}{2} = \frac{3}{10}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}.\frac{3}{5\pi}$$

Giả sử tồn tại $x_0 \in (0;\frac{5\pi}{6})$ để $\sin x_0 < x_0.\frac{3}{5\pi} \Rightarrow t(x_0) < 0$.

Lại có $t(\frac{\pi}{2}) > 0$.

Theo định lí giá trị trung bình thì tồn tại $x_1 \in (0;\frac{5\pi}{6})$ để $t(x_1) = 0$ (vô lí)

Suy ra $t(x) \geq 0 \forall x \in [0;\frac{5\pi}{6}]$.

Tương tự ta có $t(x) \leq 0 \forall x \in [\frac{-5\pi}{6};0]$.

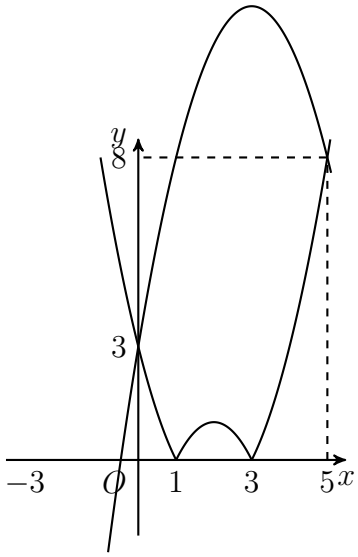
$$\Rightarrow S = \int\limits_{\frac{-5\pi}{6}}^{0} \left(\frac{3}{5\pi}x - \sin x\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin x - \frac{3}{5\pi}x\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2.\int\limits_{0}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin x - \frac{3}{5\pi}x\right) \mathrm{d}x$$
$$= 2.\left(-\cos x|_0^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{3}{10\pi}x^2|_0^{\frac{5\pi}{6}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{5\pi}{24}\right)$$
$$= \sqrt{3} + 2 - \frac{5\pi}{12}.$$

□

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|; y = -x^2 + 6x + 3$.

Lời giải.

□



Quan sát hình vẽ ta thấy hàm $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ và $g(x) = -x^2 + 6x + 3$ có hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình :

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 6x + 3 \\ \Leftrightarrow & x(x-5) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0; x = 5 \end{aligned}$$

Theo như hình vẽ

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \int_0^5 \left| -x^2 + 6x + 3 - |x^2 - 4x + 3| \right| \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[(-x^2 + 6x + 3) - (x^2 - 4x + 3) \right] \mathrm{d}x + \int_1^3 \left[(-x^2 + 6x + 3) - (-x^2 + 4x - 3) \right] \mathrm{d}x + \int_3^5 \left[(-x^2 + 6x \right. \\ &= \int_0^1 \left(-2x^2 + 10x \right) \mathrm{d}x + \int_1^3 (2x + 6) \mathrm{d}x + \int_3^5 \left(-2x^2 + 10x \right) \mathrm{d}x \\ &= 39. \end{aligned}$$

DẠNG 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba hàm số

Phương pháp giải. Muốn tính diện tích của hình (H) được giới hạn bởi ba đồ thị của hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ ta làm như sau:

- Vẽ hình (H).

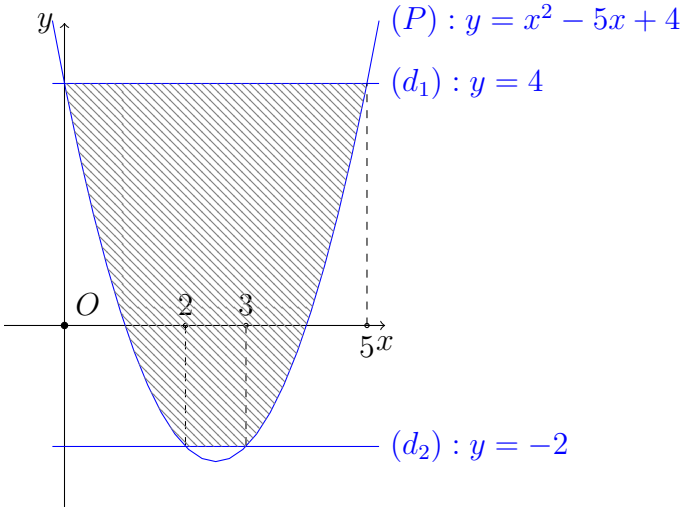
- Tìm hoành độ giao điểm của các đồ thị trong hình (H). Giả sử $x=a, x=b, x=c, ..., x=e, x=f$, với $a<b<c<...<e<f$.

- Tính diện tích bằng công thức $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_b^c |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_e^f |g(x)-h(x)|\mathrm{d}x$

(Tùy theo hình vẽ mà ta có biểu thức dưới dấu tích phân phù hợp).

Ví dụ 10. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P): y=x^2-5x+4$, $(d_1): y=4$ và $(d_2): y=-2$.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1) là $x^2-5x+4=4 \Leftrightarrow x=0$ hay $x=5$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2) là $x^2-5x+4=-2 \Leftrightarrow x=2$ hay $x=3$.

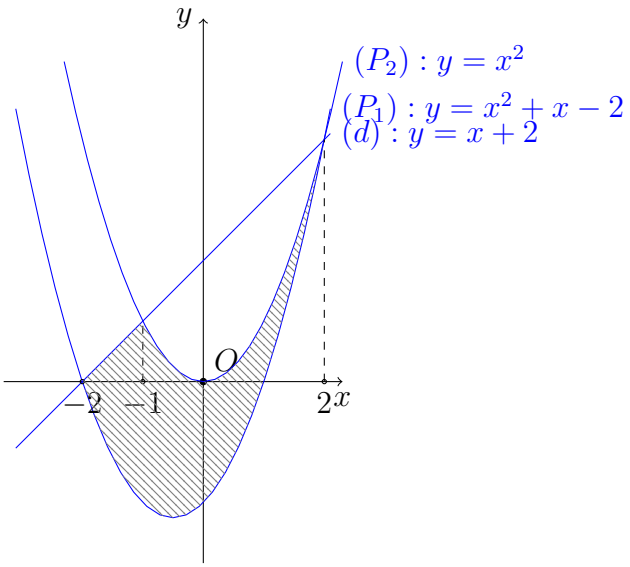
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^2 \left(4-(x^2-5x+4)\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 (4+2)\mathrm{d}x+\int\limits_3^5 \left(4-(x^2-5x+4)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^2 \left(-x^2+5x)\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 6\mathrm{d}x+\int\limits_3^5 \left(-x^2+5x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_0^2+6x\Big|_2^3+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_3^5 \\ &= \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 11. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P_1): y=x^2+x-2$, $(P_2): y=x^2$ và $(d): y=x+2$.

Lời giải.



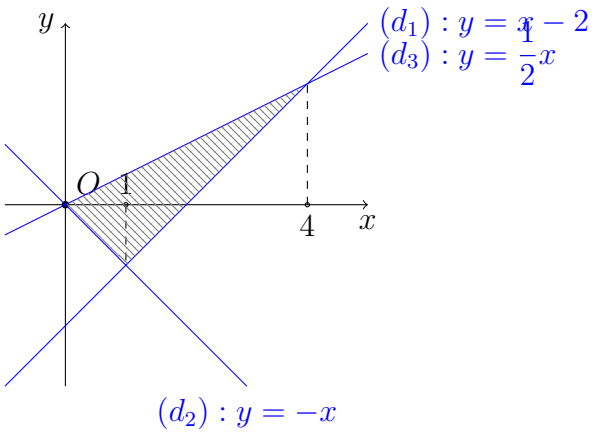
Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là $x^2 + x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x = 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (d) là $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P_1) là $x + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x = -2$ hay $x = 2$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} \left(x + 2 - (x^2 + x - 2)\right) \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \left(x^2 - (x^2 + x - 2)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(-x^2 + 4\right) \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-x + 2)) \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} \\ &= \frac{37}{6}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 12. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(d_1): y = x - 2, (d_2): y = -x$ và $(d_3): y = \dfrac{1}{2}x$.

Lời giải.



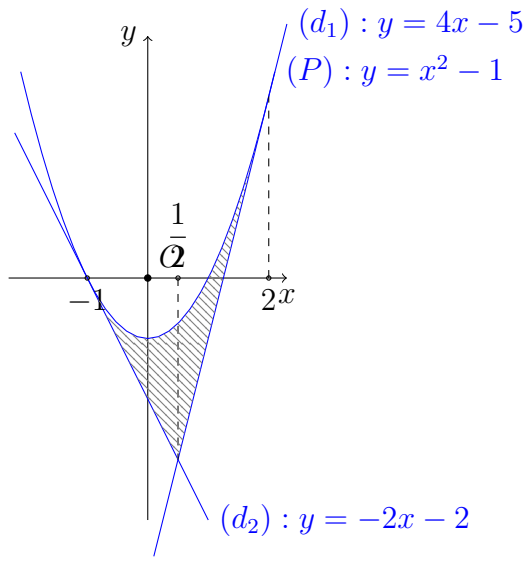
Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $x-2=-x \Leftrightarrow x=1$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_3) là $x-2=\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow x=4$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (d_3) là $-x=\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow x=0$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x+x)\right) \mathrm{d}x + \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x-x+2)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x\right) \mathrm{d}x + \int_1^4 \left(-\frac{1}{2}x+2)\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 13. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị $(P): y=x^2-1$ và hai tiếp tuyến của (P) tại $A(-1;0)$ và $B(2;3)$.

Lời giải.



Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $A(-1;0)$ là $(d_2): y=-2x-2$.
Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $B(2;3)$ là $(d_1): y=4x-5$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

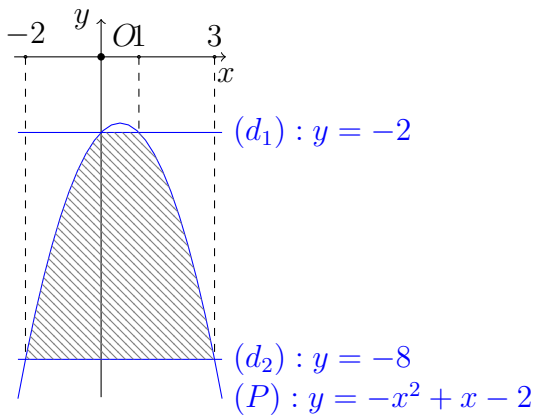
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x^2-1-(-2x-2)\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x^2-1-(4x-5)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P): y=-x^2+x-2$, $(d_1): y=-2$ và $(d_2): y=-8$.

Lời giải.



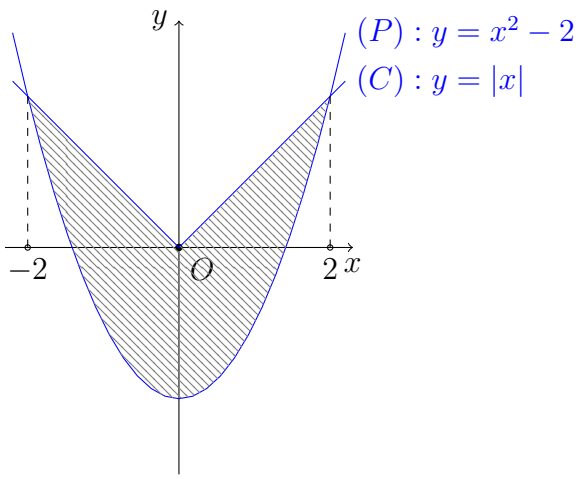
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1) là $-x^2+x-2=-2 \Leftrightarrow x=0$ hay $x=1$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2) là $-x^2+x-2=-8 \Leftrightarrow x=-2$ hay $x=3$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} \left(-x^2+x-2+8)\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (-2+8)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left(-x^2+x-2+8\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} \left(-x^2+x+6)\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 6\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left(-x^2+x+6\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right)\Big|_{-2}^{0} + 6x\Big|_{0}^{1} + \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right)\Big|_{1}^{3} \\ &= \frac{62}{3}. \end{aligned}$$

□

Bài 17. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P): y=x^2-2$ và $y=|x|$.

Lời giải.



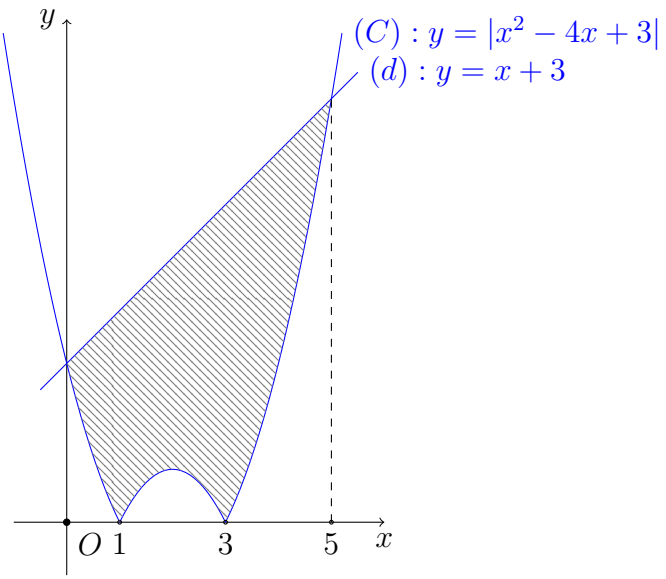
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) là $x^2-2=|x| \Leftrightarrow x=-2$ hay $x=2$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^2 \left(x-x^2+2\right)\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

□

Bài 18. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(C): y=|x^2-4x+3|$ và $(d): y=x+3$.

Lời giải.



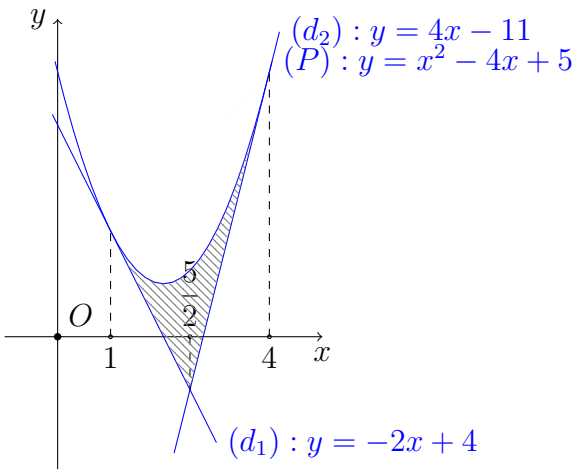
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là $|x^2-4x+3|=x+3 \Leftrightarrow x=0$ hay $x=5$.
Mặt khác (C) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=1, x=3$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(x+3-(x^2-4x+3)\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(x+3+x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x + \int_3^5 \left(x+3-(x^2-4x+3)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(-x^2+5x\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(x^2-3x+6\right)\mathrm{d}x + \int_3^5 \left(-x^2+5x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right)\Big|_1^3 + \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big|_3^5 \\ &= \frac{109}{6}. \end{aligned}$$

□

Bài 19. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị $(P): y = x^2-4x+5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$.

Lời giải.



Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ là $(d_1): y = -2x+4$.
Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $B(4;5)$ là $(d_2): y = 4x-11$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $-2x+4 = 4x-11 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

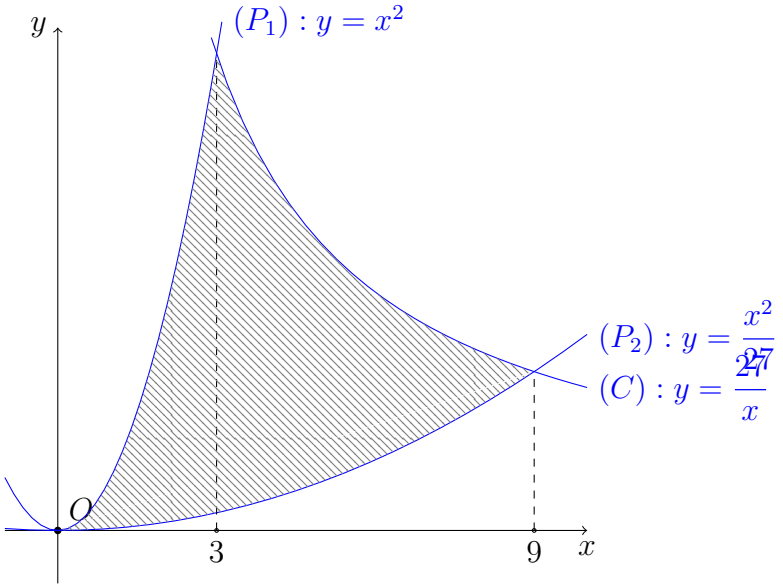
$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \left(x^2-4x+5+2x-4\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(x^2-4x+5-4x+11\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} \left(x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(x^2-8x+16\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_1^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{1}{3}x^3-4x^2+16x\right)\Big|_{\frac{5}{2}}^4 \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

□

Bài 20. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P_1): y = x^2$, $(P_2): y = \dfrac{x^2}{27}$ và

$(C): y = \dfrac{27}{x}$.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là $x^2 = \dfrac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (C) là $\dfrac{x^2}{27} = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x = 9$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P_1) là $\dfrac{27}{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 3$.

Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27}\right) \mathrm{d}x + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{26}{81}x^3\right)\Big|_0^3 + \left(27\ln|x| - \frac{1}{81}x^3\right)\Big|_3^9 \\ &= 27\ln 3. \end{aligned}$$

□

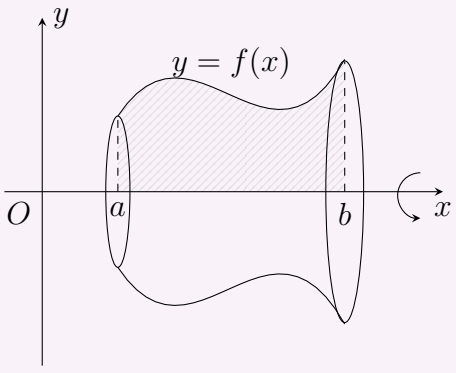
DẠNG 4. Thể tích khối tròn xoay

Phương pháp giải.

Loại 1

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quanh quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ với $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Áp dụng công thức: $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$

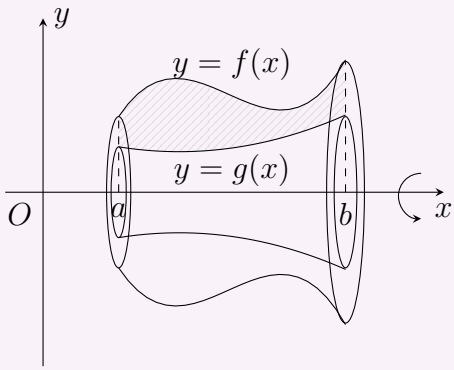


☑ **Loại 2**

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quanh quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ với $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $0 \le g(x) \le f(x)\ \forall x \in [a;b]$.

Áp dụng công thức:

$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] \mathrm{d}x}$$



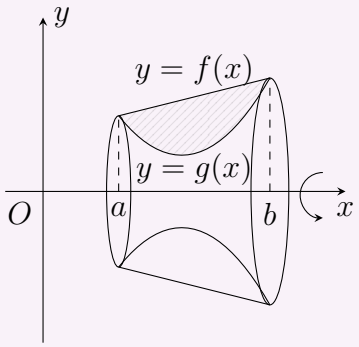
☑ **Loại 3**

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quanh quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ với $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$ để tìm hai cận a, b.

Bước 2: Giả sử $0 \le g(x) \le f(x)\ \forall x \in [a;b]$ và $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Áp dụng công thức: $\boxed{V = \pi \int\limits_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] \mathrm{d}x}$



☑ **Loại 4**

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng quanh trục Oy .

Cách làm hoàn toàn tương tự **Loại 1,2,3**.

Chú ý: *Nên vẽ hình để xác định công thức thể tích cho chính xác nhất.*

Ví dụ 14. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 2$ và $x = 4$ quay quanh trục Ox.

Lời giải.

Áp dụng công thức ta có: $V = \pi \int\limits_2^4 (\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \dfrac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 6\pi\, (đvtt).$ □

Ví dụ 15. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$; $y = 4x$; $x = 1$; $x = 2$ quay quanh trục Ox.

Lời giải.

Áp dụng công thức ta có $V = \pi \int\limits_1^2 \left[(4x)^2 - x^2\right] \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^2 15x^2 \,\mathrm{d}x = 15\pi \cdot \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 35\pi\ (đvtt).$ □

Ví dụ 16. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 5 - x^2$ và $y = 1$ quay quanh trục Ox.

Lời giải.

Giao điểm của hai đường $y = 5 - x^2$ và $y = 1$ có hoành độ thỏa mãn

$$5 - x^2 = 1.$$

Giải phương trình này, ta được hai nghiệm $x = 2, x = -2$.
Mặt khác, với $-2 < x < 2 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow 5 - x^2 > 1 \Rightarrow (5 - x^2)^2 - 1 > 0$. Khi đó, thể tích cần tìm là

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [(5 - x^2)^2 - 1^2] \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 10x^2 + 24\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - 10 \cdot \frac{x^3}{3} + 24x\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{832\pi}{15} \ (đvtt).$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN)

Bài 21. Cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi $y = x^3 + 2, y = 0, x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox.

Lời giải.

Áp dụng công thức ta có: $V = \pi \int_{0}^{1} (x^3 + 2)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{36\pi}{7} (đvtt).$ □

Bài 22. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$ và ba đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ quanh trục Ox.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là

$$V = \pi \int_{1}^{e} \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{1}^{e} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \pi \ (đvtt).$$

□

Bài 23. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục hoành có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi V là thể tích cần tìm.

$$V = \pi \int_{0}^{1} (\mathrm{e}^x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot e^{2x}\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)}{2} \ (đvtt).$$

□

Bài 24. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục hoành có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi V là thể tích cần tìm.

Ta có

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15} \text{ (đvtt).}$$

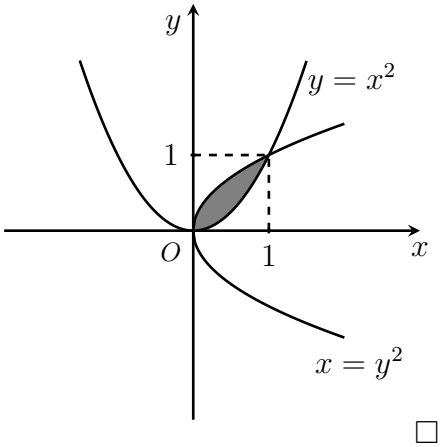
□

Bài 25. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2$ và $x = y^2$ quanh trục Ox.

Lời giải.

Ta có đường $x = y^2$ là hợp của hai đường $y = \sqrt{x}$ và $y = -\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$. Đường $y = -\sqrt{x}$ chỉ cắt $y = x^2$ tại gốc tọa độ. Còn đường $y = \sqrt{x}$ cắt $y = x^2$ tại hai điểm $(0;0)$ và $(1;1)$. Do đó, thể tích cần tìm là

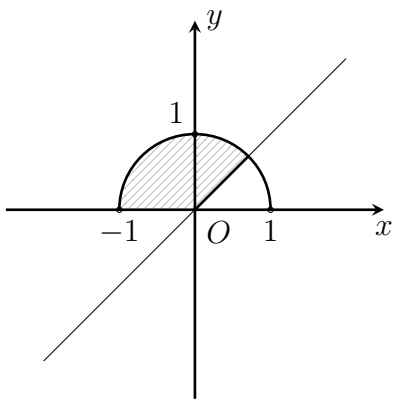
$$V = \pi \int_0^1 |(x^2)^2 - (\sqrt{x})^2| \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x - x^4) = \frac{3\pi}{10} \text{ (đvtt).}$$



□

Bài 26. Gọi $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn tâm O, bán kính 1 nằm phía trên trục hoành, đường thẳng $(\mathcal{D}) : y = x$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathcal{H})$ quanh trục hoành.

Lời giải.



Nửa đường tròn tâm O, bán kính 1 nằm phía trên trục hoành có phương trình $(C) : y = \sqrt{1 - x^2}$

Giao điểm của (C) và d là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Giao điểm của d và trục hoành là $(0;0)$

Giao điểm của (C) và trục hoành là $(1;0)$, $(-1;0)$.

Như vậy, thể tích cần tính bằng

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{-1}^{0} (\sqrt{1-x^2})^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} |x^2 - (\sqrt{1-x^2})^2| \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int\limits_{-1}^{0} (1-x^2) \,\mathrm{d}x + \pi \cdot \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-2x^2) \,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \pi \ \textit{(đvtt)}. \end{aligned}$$

□

Bài 27. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2+1, x = 0$ và tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + 1$ tại điểm $A(1;2)$ xung quanh trục Ox.

Lời giải.

Ta có: $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $A(1;2)$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x$.

Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị là $x = 1$ nên ta có

$$V = \pi \int\limits_{0}^{1} \left[(x^2+1)^2 - (2x)^2\right] \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{0}^{1} \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) \,\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15} \textit{(đvtt)}.$$

□

Bài 28. Gọi $(\mathcal{H})$ là hình phẳng xác định bởi $(C) : y = |x^2 - 3x + 2|$, $(\mathcal{D}) : y = x + 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox.

Lời giải.

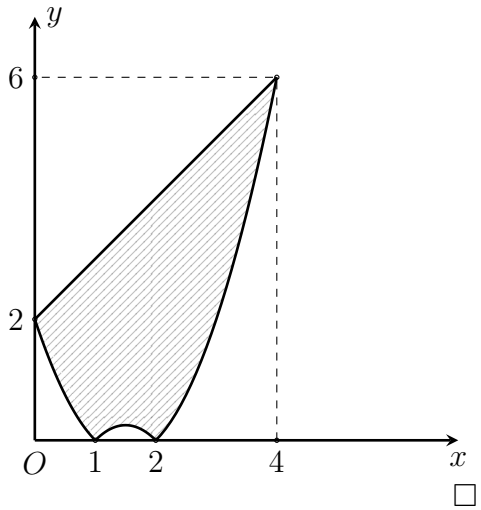
Tọa độ giao điểm của (C) và trục hoành là $(1;0)$, $(2;0)$.

Tọa độ giao điểm của (C) và $(\mathcal{D})$ là $(0;2)$ và $(4;6)$.

Dễ thấy, $x + 2 \geq |x^2 - 3x + 2| \geq 0$ với mọi $0 \leq x \leq 4$.

Vậy thể tích cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{0}^{4} \left[(x+2)^2 - (x^2 - 3x + 2)^2\right] \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int\limits_{0}^{4} \left(-x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 16x\right) \,\mathrm{d}x = \frac{256\pi}{5} \ \textit{(đvtt)}. \end{aligned}$$



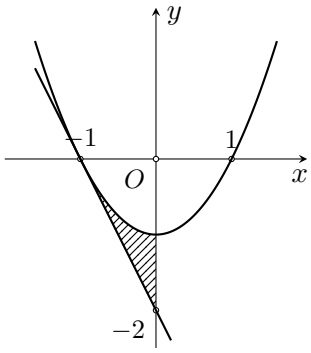
□

Bài 29. Gọi $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P) : y = x^2 - 1$, trục tung và tiếp tuyến của

(P) tại điểm $M(-1;0)$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(-1;0)$ là $y=-2x-2$.



Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox là

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_{-1}^{0}\left[(-2x-2)^2-(x^2-1)^2\right]\,\mathrm{d}x\\&=\pi\int\limits_{-1}^{0}(-x^4+6x^2+8x+3)\,\mathrm{d}x\\&=\left(-\frac{x^5}{5}+2x^3+4x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{0}\\&=\frac{4}{5}\pi\ \textit{(đvtt)}.\end{aligned}$$

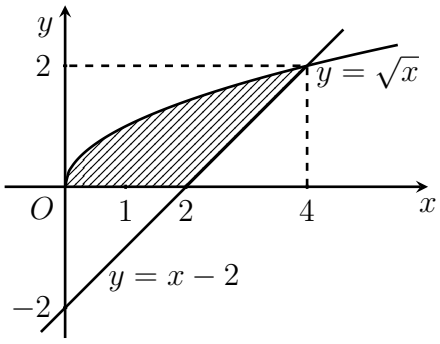
□

Bài 30. Cho hình $(\mathcal{H})$ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}, y=x-2$ và trục hoành. Tính thể tích của vật thể sinh ra khi cho hình $(\mathcal{H})$ quay quanh trục hoành.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\x=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$



Khi đó, thể tích cần tính là

$$\begin{aligned}V&=\pi\left[\int\limits_{0}^{2}x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}\left[x-(x-2)^2\right]\,\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\left[\int\limits_{0}^{2}x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}\left(-x^2+5x-4\right)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{16}{3}\pi\ \textit{(đvtt)}.\end{aligned}$$

□

Bài 31. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục hoành có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi V là thể tích cần tìm.

$$V=\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^4 x+\sin^4 x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3+\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\left(3x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi^2}{8}\ \textit{(đvtt)}.$$

□

Bài 32. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, $y=0$,$y=2$, $x=0$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục tung có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi V là thể tích cần tìm.

Ta có: $y=\sqrt{x-1} \Rightarrow x=y^2+1$

$$V=\pi\int\limits_0^2 (y^2+1)^2\,\mathrm{d}y=\pi\int\limits_0^2 (y^4+2y^2+1)\,\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{y^5}{5}+\frac{2y^3}{3}+y\right)\Big|_0^2=\frac{206\pi}{15}\ (đvtt).$$

□

Bài 33. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y=0$, $x=2$, khi nó quay quanh trục Ox.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=\sqrt{x}.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ và $y=0$ là

$$\sqrt{x}.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\ (\text{vì } \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}>0)\Leftrightarrow x=0.$$

Gọi V là thể tích cần tìm.

$$V=\pi\int\limits_0^2(\sqrt{x}.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2(x.\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\pi.I.$$

Bây giờ, ta tính $I=\displaystyle\int\limits_0^2(x.\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

Khi đó

$$I=(x.\mathrm{e}^x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^x\Big|_0^2=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2+1=\mathrm{e}^2+1.$$

Vậy $V=\pi(\mathrm{e}^2+1)$ *(đvtt).* □

DẠNG 5. Bài toán thực tế

Phương pháp giải. Hiểu và vận dụng những kiến thức về tích phân để giải quyết các bài toán thực tế.

Ví dụ 17. Một vật bắt đầu chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t)=3t+2$ (m/s). Hãy tính quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian 30 giây kể từ lúc bắt đầu chyển động.

Lời giải.

Quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian 30 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động là

$$s = \int_0^{30} (3t + 2)\,\mathrm{d}t = 1410\ (m)$$

. □

Ví dụ 18. Một vật đang chuyển động với vận tốc 5 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 2t + 3t^2$ m/s^2. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây sau khi tăng tốc, quãng đường vật đi được là bao nhiêu?

Lời giải.

Vận tốc của vật $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (2t + 3t^2)\,\mathrm{d}t = t^2 + t^3 + C$.

Theo giả thiết: $v(0) = 5$ nên $C = 5$.

Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây sau khi tăng tốc là:

$$s = \int_0^{10} \left(t^2 + t^3 + 5\right)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + 5t\right)\Big|_0^{10} = \frac{8650}{3}\ (\mathrm{m})$$

. □

Ví dụ 19. Một ôtô đang chuyển động đều với vận tốc v_0 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = -6t + v_0$ m/s. Tính vận tốc ban đầu v_0, biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô đi được 27 m.

Lời giải.

Xe dừng hẳn ứng với t thỏa $v(t) = 0$. Hay $-6t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{v_0}{6}$.

Quãng đường xe đi được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn:

$$27 = \int_0^{\frac{v_0}{6}} (-6t + v_0)\,\mathrm{d}t.$$

Từ đây ta giải được $v_0 = 18$ (m/s). □

Ví dụ 20. Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 150 - 10t$ (m/s). Hỏi trong 4 s trước khi dừng hẳn, vật di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải.

Khi vật dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

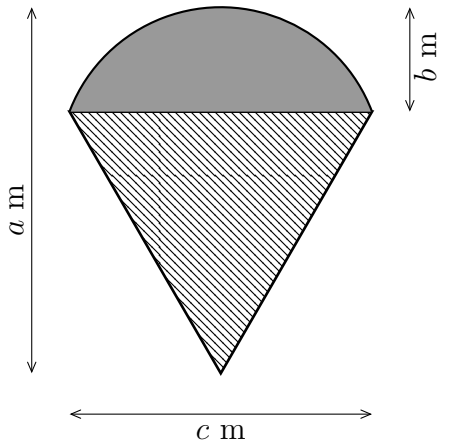
Trong 4 s trước khi dừng hẳn, vật di chuyển được quãng đường

$$s = \int_{11}^{15} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{11}^{15} (150 - 10t)\,\mathrm{d}t = 80\ (\mathrm{m}).$$

□

Ví dụ 21.

Một thửa đất có hình dạng như hình vẽ, phần đất tô màu đen có đường viền là một Parabol. Biết: $a = 25$ m, $b = 5$ m, $c = 20$ m. Người ta trồng hoa hồng trên phần đất tô màu đen với mật độ 15 bông/m^2 và phần tam giác gạch chéo trồng hoa cúc với mật độ 20 bông/m^2. Nếu giá mỗi cây hoa hồng là 2000 đồng/cây và hoa cúc là 1000 đồng/cây thì số tiền trồng hoa trên diện tích kể trên là bao nhiêu?

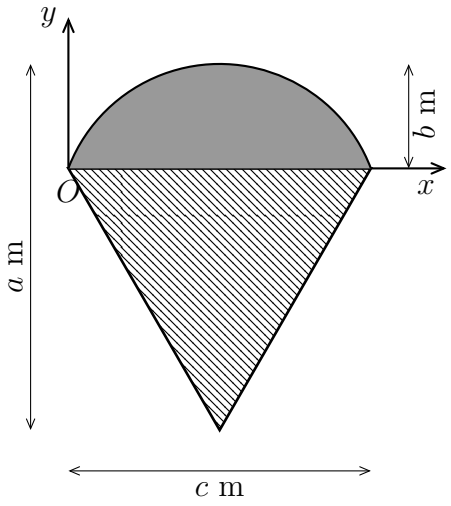


Lời giải.

Diện tích phần tam giác trồng hoa cúc: $S_1 = 200$ m^2.
Do đó số tiền trồng hoa cúc là $200 \times 20 \times 1000 = 4000000$ đồng.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta tìm được parabol có phương trình $y = -\dfrac{x^2}{20} + x$.

Phần diện tích trồng hoa hồng: $S_2 = \displaystyle\int_0^{20} \left| -\frac{x^2}{20} + x \right| \mathrm{d}x = \frac{200}{3}$ m^2.

Số tiền để trồng hoa hồng là $\dfrac{200}{3} \times 15 \times 2000 = 2000000$ đồng.
Vậy tổng số tiền để trồng bông hồng và bông cúc là $4000000 + 2000000 = 6000000$ đồng.



□

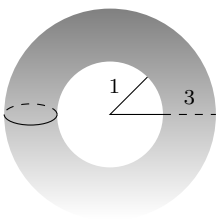
Ví dụ 22. Một nhà máy thủy điện xả lũ với tốc độ xả tại thời điểm t giây là $v(t) = 2t + 100$ (m^3/s). Hỏi sau 30 phút kể từ lúc bắt đầu xả, nhà máy xả được bao nhiêu mét khối nước?

Lời giải.

Số mét khối nước xả sau 30 phút (1800 giây) là $\displaystyle\int_0^{1800} (2t + 100)dt = 3.420.000$. □

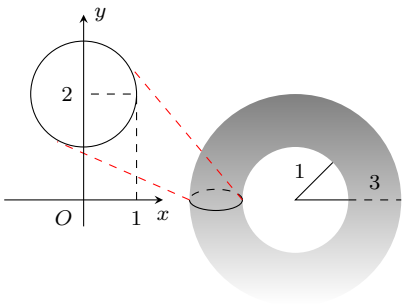
Ví dụ 23.

Một chiếc phao bơi hình xuyến, khi bơm căng chiếc phao có bán kính đường tròn viền ngoài và viền trong lần lượt là $R_1 = 3, R_2 = 1$ như hình vẽ. Tính thể tích của chiếc phao.



Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó, thể tích của chiếc phao bằng thể tích của vật tròn xoay tạo bởi khi xoay hình phẳng (hai nửa đường tròn tâm $(0;2)$, bán kính bằng 1) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+2$ và $y=\sqrt{1-x^2}-2$ quanh trục Ox. Vậy $V=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(\sqrt{1-x^2}+2\right)^2-\left(\sqrt{1-x^2}-2\right)^2\right]\mathrm{d}x=4\pi^2$ (đvtt).

□

Ví dụ 24. Tốc độ tăng trưởng của bán kính thân cây (đơn vị: cm/năm) được cho bởi công thức $f(t)=1.5+\sin\left(\dfrac{\pi t}{5}\right)$, trong đó t là thời gian khảo sát (tính theo năm), $t=0$ là thời điểm bắt đầu khảo sát; $F(t)$ là bán kính của thân cây tại thời điểm t và $F'(t)=f(t)$. Tính bán kính của thân cây sau 10 năm kể từ lúc bắt đầu khảo sát, biết rằng bán kính cây tại thời điểm bắt đầu khảo sát là 5 cm.

Lời giải.

Ta có $F(t)=\displaystyle\int\left(1.5+\sin\frac{\pi t}{5}\right)\mathrm{d}t=\left(1.5t-\frac{5}{\pi}\cos\frac{\pi t}{5}\right)+C$.

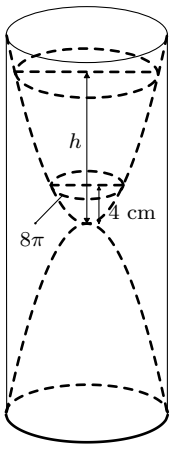
Từ giả thiết $F(0)=5$ ta giải được $C=5+\dfrac{5}{\pi}$.

Do đó $F(t)=1.5t-\dfrac{5}{\pi}\cos\dfrac{\pi t}{5}+5+\dfrac{5}{\pi}$.

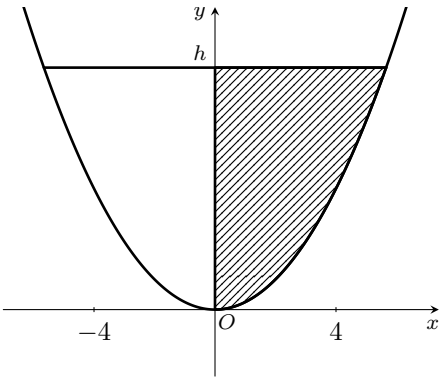
Sau 10 năm bán kính thân cây bằng $F(10)=15-\dfrac{5}{\pi}\cos 2\pi+5+\dfrac{5}{\pi}=20$ (cm). □

Ví dụ 25.

Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ bên, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao h của mực cát bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao của phần bên đó. Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $2,90$ cm^3/phút. Khi chiều cao của cát còn 4 cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn chu vi 8π cm. Biết sau 30 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài là bao nhiêu cm (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải.



Gọi r là bán kính đường tròn tạo thành khi chiều cao cột cát bằng 4 cm.

Khi đó, ta có $2r\pi = 8\pi \Leftrightarrow r = 4$ (cm).

Vậy phương trình parabol của thiết diện là $y = \dfrac{1}{4}x^2$.

Thể tích V của cột cát có chiều cao h bằng thể tích khối tròn xoay của miền gạch chéo (hình vẽ bên) quay quanh Oy.

Suy ra $V = \pi \displaystyle\int_0^h \sqrt{4y}^2 \,\mathrm{d}y = 2\pi h^2$.

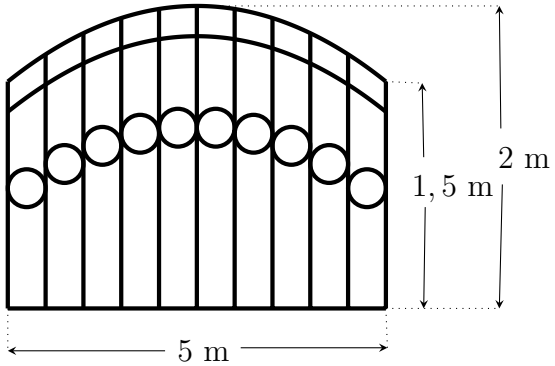
Do đó, $2\pi h^2 = 2,9.30 \Leftrightarrow h = \sqrt{\dfrac{2,9.15}{\pi}}$.

Vậy chiều cao của khối trụ bên ngoài là $2.\dfrac{4}{3}h \approx 9$ (cm).

□

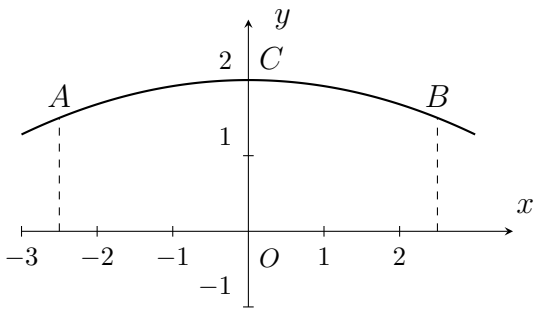
Ví dụ 26.

Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1(m^2)$ cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm các cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, trong đó $A(-2,5;0), B(2,5;0), C(0;2)$.



Giả sử đường cong phía trên là Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Do Parabol đi qua A, B, C nên tìm được $a = -\dfrac{2}{25}, b = 0, c = 2$.

Do đó Parabol có phương trình $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$; $x = -2,5$; $x = 2,5$; $y = 0$.

Do đó, $S = \displaystyle\int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{55}{6}$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S.700000 = \dfrac{55}{6}.700000 \approx 6.417.000$ đồng. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s^2. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải.

Vận tốc của vật $v(t) = \int \left(3t + t^2\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2} + C.$

Với $v(0) = 10$ nên $C = 10$. Do đó, $v(t) = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2} + 10.$

Vậy, quãng đường vật đi được trong khoảng 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$$S = \int_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2} + 10t\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{4300}{3}\ (\mathrm{m})$$

□

Bài 35. Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ (khi $t = 0$ s) chuyển động với vận tốc $v\,(t) = 5t - t^2$ m/s. Tính quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại (kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

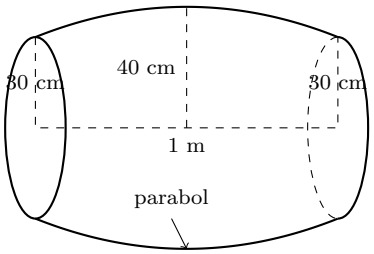
Lời giải.

- Thời điểm t vật dừng lại thỏa: $v(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 5 \end{array}\right.$. Hay $t = 5$.

- Quãng đường vật đi được $s = \displaystyle\int_0^5 (5t - t^2)\,\mathrm{d}t \approx 20,83\ (\mathrm{m}).$ □

Bài 36.

Một cái trống trường có bán kính đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều 2 đáy có diện tích là $1600\pi(\mathrm{cm}^2)$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường parabol. Hỏi thể tích của trống là bao nhiêu?



Lời giải.

Chọn trung điểm trục trống làm gốc tọa độ, trục trống nằm trên trục hoành.

Thể tích của trống bằng thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi $(P) : y = ax^2 + bx + c$; $x = -5$; $c = 5$; $y = 0$.

Trong đó (P) có đỉnh $(0; 4)$ và đi qua điểm $(5; 3)$.

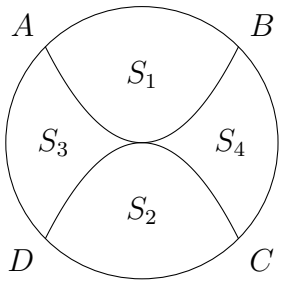
Vậy, thể tích của trống là $\pi \displaystyle\int_{-5}^{5} \left(-\frac{1}{25}x^2 + 4\right)^2 \mathrm{d}x \approx 425,2\ (\mathrm{dm}^3).$ □

Bài 37. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong vòng 40 phút với tốc độ dòng nước tại thời điểm t giây là $v(t) = 10t + 500$ m^3/s. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải.

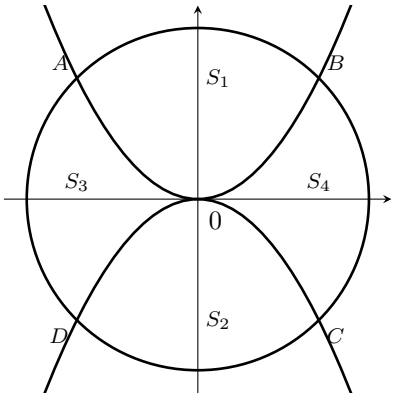
Lượng nước xả được trong thời gian 2400 giây (40 phút) là $\int\limits_0^{2400} (10t + 500)\,\mathrm{d}t = 3.10^7$ m^3. □

Bài 38. Sân trường có một bồn hoa hình tròn có tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường Parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O.



Hai đường Parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4 m (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí để trồng hoa là 150.000 đồng /1 m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng /1 m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn).

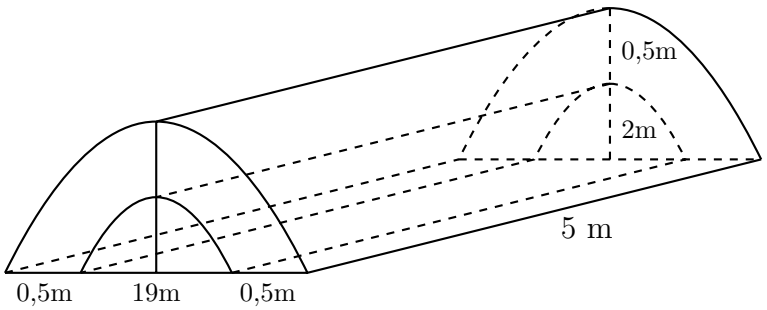
Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $O\,(0;0)$; $A\,(-2;2)$; $B\,(2;2)$.
Khi đó, phương trình Parabol phía trên có dạng là : $(P) : y = ax^2$ trong đó $B\,(2;2) \in (P) \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $(P) : y = \dfrac{x^2}{2}$.
Phương trình cung tròn nằm phía trên trục Ox là: $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{OA^2 - x^2} = \sqrt{8^2 - x^2}$.
Khi đó: $S_1 = \int\limits_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \dfrac{x^2}{2}\right) dx$.
Diện tích hình tròn là: $S = \pi.R^2 = \pi.OA^2 = 8\pi$.
Ta có: $T = 150.2S_1 + 100.\,(S - 2S_1) \approx 3.270$ nghìn đồng.

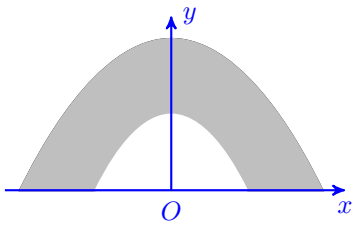
□

Bài 39. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình là các đường Parabol).



Lời giải.

Xét một mặt cắt theo phương thẳng đứng và vuông góc với bề dài khối bê tông.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên.

Thiết lập phương trình hai parabol và tính được diện tích mặt cắt $S = \displaystyle\int_{-10}^{10} \left(-\frac{x^2}{40} + 2,5\right) x - \int_{-9,5}^{9,5} \left(-\frac{8x^2}{361} + 2\right) \mathrm{d}x = 8.$

Vậy, thể tích khối bê tông cần tính là $V = \displaystyle\int_0^5 8\,\mathrm{d}x = 40\ \mathrm{m}^3.$

□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x$; $y=0$; $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính. Ta có

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b,\ (a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lí thuyết về tính diện tích hình phẳng ta có diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b,\ (a<b)$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2, y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\displaystyle\int\limits_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int\limits_0^2(2x-x^2)^2\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int\limits_0^2(2x-x^2)^2\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int\limits_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Theo công thức thể tích giới hạn bởi các đường ta có

$V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2(2x-x^2)^2\mathrm{d}x$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\displaystyle\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S = \int_0^2 |3^x| \,\mathrm{d}x = \int_0^2 3^x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox.

A. $\dfrac{15}{16}$. **B.** $\dfrac{15\pi}{8}$. **C.** $\dfrac{21\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{21}{16}$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox là

$$V = \pi \cdot \int_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx = \left.\frac{\pi x^3}{48}\right|_1^4 = \frac{21\pi}{16}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Với hàm số $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}, a < b$, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \left|\pi \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right|$.

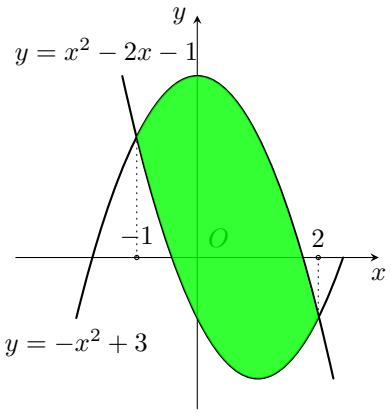
Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0, x = a, x = b (a < b)$và đồ thị hàm số $y = f(x)$là $S = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 7.

Diện tích hình phẳng bôi đậm trong hình vẽ dưới đây được xác định theo công thức



A. $\int_{-1}^2 \left(2x^2 - 2x - 4\right) \,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^2 \left(2x^2 + 2x - 4\right) \,\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^2 \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \,\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^2 \left(-2x^2 - 2x + 4\right) \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy công thức tính diện tích hình phẳng cần tính là

$$\int_{-1}^2 \left(-x^2 + 3 - x^2 + 2x + 1\right) \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

C. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-\ln x+C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Lời giải.

$I=\displaystyle\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$

Chú ý khi giải: Dùng dấu giá trị tuyệt đối khi có $\ln|x|$, học sinh có thể chọn nhầm đáp án C.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b], a<b$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a; x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\pi\displaystyle\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức diện tích hình phẳng SGK.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b, (a\leqslant b)$ có diện tích S là

A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. **B.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b, (a\leqslant b)$ có $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là

A. $\displaystyle\int_b^a|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo SGK.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Công thức tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ với $a<b$ là

A. $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b(f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết giáo khoa ta có hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a\\x=b\end{cases}$ là $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể bị giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, có diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a\le x\le b)$ là $S(x)$.

A. $V=\displaystyle\int\limits_b^a S(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của vật thể đã cho là $V=\displaystyle\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức

A. $S_H=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S_H=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S_H=\left|\displaystyle\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S_H=\displaystyle\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình (H) được tính bằng công thức $S_H=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

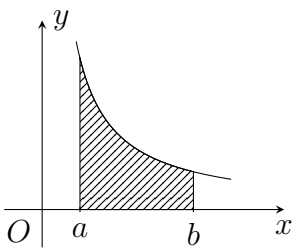
Chọn đáp án C □

Câu 16. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được tính bởi công thức nào?

A. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình phẳng D được tính bởi công thức

A. $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính bởi công thức $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 18. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ xung quanh trục Ox là: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b(a < b)$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **C.** $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức đúng là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 20. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ có diện tích là

A. $S=\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_{3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{3}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết về diện tích hình phẳng.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$.

A. 19. **B.** $\dfrac{2186}{7}\pi$. **C.** 20. **D.** 18.

Lời giải.

$$S=\int\limits_{1}^{3} |x^3|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{1}^{3} x^3\,\mathrm{d}x\right|=20.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết $V=\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $[a;b]$ $(a<b)$ và có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Khi đó công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1), (C_2) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là

A. $\left|\int\limits_{a}^{b} \left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int\limits_{a}^{b} \left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{a}^{b} \left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{a}^{b} g\left(x\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Do giả thiết diện tích hình phẳng bằng $\int\limits_{a}^{b} \left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

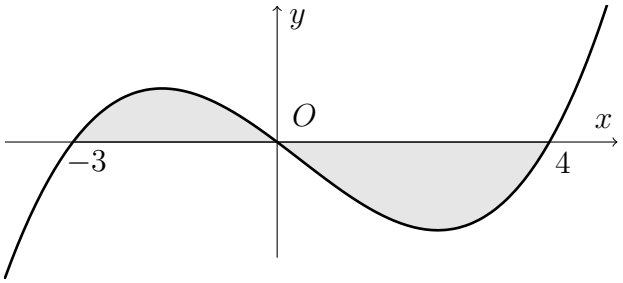
Câu 24. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là

A. $S=\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta được $S=\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ được tính theo công thức.

A. $S=\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=-\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$S=\displaystyle\int_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+y-2z+3=0$ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-2-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3-2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3-2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-2+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm vuông góc với mặt phẳng $x+y-2z+3=0$ nên nhận $\vec{u}=(1;1;-2)$ làm một véc-tơ chỉ phương.

Đường thẳng đi qua $M(1;-2;3)$, nhận $\vec{u}$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3-2t.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi^2\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x=a, x=b$ là

A. $\displaystyle\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $-\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo kiến thức giáo khoa, ta có diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{16\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{17\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{18\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{5\pi}{18}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay đã cho bằng

$$V=\pi\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2-2x\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^{2}\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{18\pi}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$ được tính bằng công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int\limits_a^b \left|f^2(x)\right|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b \left|f^2(x)\right|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Vật thể B giới hạn bởi mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt vật thể B với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x, $(0\le x\le 2)$ ta được thiết diện có diện tích bằng $x^2(2-x)$. Thể tích của vật thể B là

A. $V=\dfrac{2}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{2}{3}$. **C.** $V=\dfrac{4}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Thể tích của vật thể B là $V=\displaystyle\int_0^2 x^2(2-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2(2x^2-x^3)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi xoay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}, y=0$ và hai đường thẳng $x=1, x=2$ quanh trục Ox.

A. $V=3$. **B.** $V=\pi$. **C.** $V=1$. **D.** $V=3\pi$.

Lời giải.

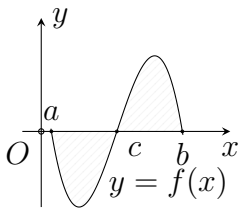
Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi xoay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2}x, y=0$ và hai đường thẳng $x=1, x=2$ quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{2x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x=\pi\cdot x^2\Big|_1^2=3\pi.$$

Chọn đáp án D □

Câu 33.

Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình bên). Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?



A. $S=\left|\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào hình biểu diễn hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$, $x=b$, ta có $S=-\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, đường thẳng $x=a$, $x=b$ và trục Ox được tính bởi công thức

A. $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\cos x, y=0, x=0, x=\pi$ quay xung quanh Ox.

A. 0. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Thể tích vật thể bằng

$$V=\pi\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a;\ x=b$ là

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int\limits_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int\limits_a^b(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết ta có $S=\displaystyle\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{-\mathrm{e}^x+4x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1;\ x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2(\mathrm{e}^x-4x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int\limits_1^2(\mathrm{e}^x-4x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\displaystyle\int\limits_1^2(4x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2(4x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích khối tròn xoay $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$, ta được $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2\left(\sqrt{-\mathrm{e}^x+4x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\displaystyle\int\limits_1^2(4x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hai hàm số $y=f(x),\ y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1), (C_2) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x-\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]\ \mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Dựa vào lí thuyết ta chọn $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b\,(a<b)$ quay quanh Ox được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V=\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Rõ ràng $V=\pi\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$. Gọi $S(t)$ là diện tích thiết diện của vật khi cắt bởi mặt phẳng $x=t$ $(a\le t\le b)$. Giả sử $S(t)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Thể tích V của vật thể B tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b (S(x))^2\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_a^b (S(x))^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Rõ ràng $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$. Viết công thức tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ với $a<b$.

A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x=a$, $x=b$ là

A. $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và các đường thẳng $y=0$; $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $V=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích cần tính là $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích hình phẳng D được xác định bởi công thức

A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích miền D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

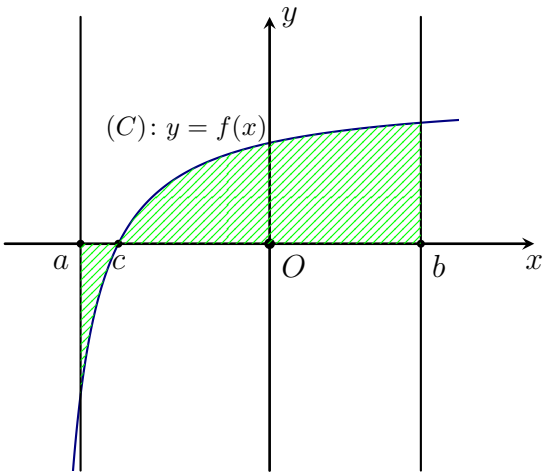
A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b\,(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có

$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^c [0-f(x)]\,\mathrm{d}x+\int_c^b [f(x)-0]\,\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích hình phẳng $\mathscr{D}$ được tính theo công thức là

A. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức đúng là $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\dfrac{496\pi}{15}$.

B. $\dfrac{32\pi}{15}$.

C. $\dfrac{4\pi}{3}$.

D. $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và Ox: $-x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ và $x=2$.

Khi đó $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2 \left(-x^2+2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2 \left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $y=0$, $x=1$, $x=4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $2\pi\ln 2$.

B. $\dfrac{3\pi}{4}$.

C. $\dfrac{3}{4}$.

D. $2\ln 2$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4=\pi\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 52. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) cho bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) được cho bởi công thức $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết thì $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x+1$ trục hoành và hai đường thẳng $x=-1; x=3$.

A. $S=\dfrac{64}{3}$. **B.** $S=\dfrac{56}{3}$. **C.** $S=\dfrac{37}{3}$. **D.** $S=\dfrac{68}{3}$.

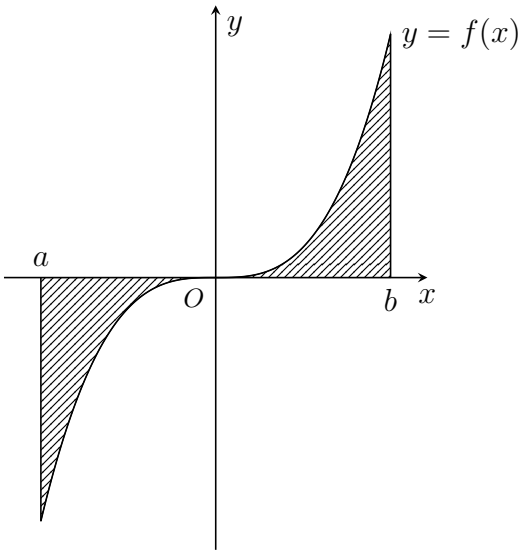
Lời giải.

Diện tích cần tính bằng $S=\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 55.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình vẽ bên). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D dưới đây?



A. $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S_D=\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa trên đồ thị ta thấy:

- Đồ thị cắt trục hoành tại $O(0;0)$.
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị ở phía dưới trục hoành nên $|f(x)|=-f(x)$.
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị ở phía trên trục hoành nên $|f(x)|=f(x)$.

Do đó $S_D=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ là

A. 30. **B**. 18. **C**. $\dfrac{98}{3}$. **D**. 21.

Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Khi đó $S=\displaystyle\int_1^3 (x+2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x+2)^3\Big|_1^3=\frac{98}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là

A. $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B**. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C**. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D**. $S=\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

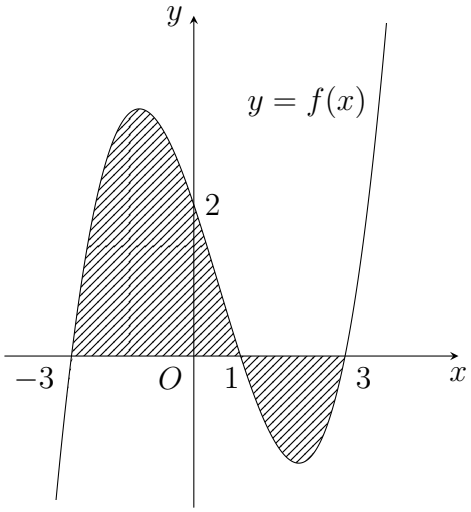
Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 58.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.

Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



A. $S=\left|\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

B. $S=\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\geqslant 0$ với $x\in[-3;1]$, $f(x)\leqslant 0$ với $x\in[1;3]$.

Do đó $S=\displaystyle\int_{-3}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$. Diện tích hình D được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b f|x|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, gọi S là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$; $x=b$. Khi đó:

A. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)>0$, $\forall x\in[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b f(x^2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b f(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox được tính theo công thức $S=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ có diện tích S là

A. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=2\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ là

A. $S=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0, x=1, y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{2x+1}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0,\ x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

A. $S=\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân ta có $S=\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$, $x = 1$ và thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ là một hình tròn có diện tích bằng 3π. Thể tích của vật thể là

A. $3\pi^2$. **B.** 6π. **C.** 6. **D.** 2π.

Lời giải.

Có $V = \int\limits_{-1}^{1} S(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} 3\pi \, \mathrm{d}x = 6\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

A. $S = 8$. **B.** $S = 12$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 9$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_0^2 \left|3x^2 + 1\right| \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (3x^2 + 1) \, \mathrm{d}x = (x^3 + x)\Big|_0^2 = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, xác định trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$. **C.** $S = -\int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_b^a |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b [|f(x)| - |g(x)|] \, \mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x$.

C. $S = \left|\int\limits_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức diện tích $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \dfrac{7}{3}$. **B.** $S = \dfrac{8}{3}$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_1^2 |x^2|\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định bởi công thức

A. $S = \pi \displaystyle\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ với $a < b$. Diện tích của D được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của D được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và nhận giá trị bất kỳ. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\left|S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Ta có: diện tích hình phẳng theo yêu cầu bài toán được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=5-4t \\ z=-6+7t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A và song song song với đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(3;-4;7)$. **B.** $\vec{u}=(3;-4;-7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;-4;-7)$. **D.** $\vec{u}=(-3;-4;7)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{v}=(3;-4;7)$.
Vì đường thẳng Δ song song song với đường thẳng d nên đường thẳng Δ nhận $\vec{v}=(3;-4;7)$ làm một véc-tơ chỉ phương.
Chọn đáp án A □

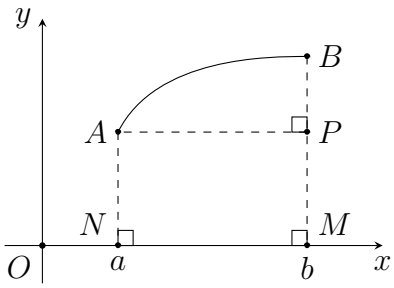
Câu 77. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0, x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V=\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $V=\pi\displaystyle\int_0^1 (x\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
Chọn đáp án C □

Câu 78.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

B. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn BP.

C. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn NM.

D. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn cong AB.

Lời giải.

Theo ý nghĩa hình học của tích phân thì $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

Chọn đáp án A □

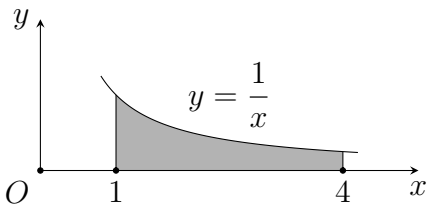
Câu 79. Cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $y=0$, $x=1$, $x=4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ quay xung quanh trục Ox.

A. $2\pi \ln 2$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải.

Hình phẳng $(\mathcal{H})$ là phần tô đậm trong hình vẽ bên. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^4 = \frac{3\pi}{4}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b \Big|f(x)\Big|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b f|x|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích $S = \displaystyle\int_a^b \Big|f(x)\Big|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a;\ x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo giáo khoa, ta có $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b\,(a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = 2\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi^2\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Cho hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)+f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được xác định bởi công thức $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\ln(2x+1)}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

A. $\dfrac{3}{2}\ln 3-1$.

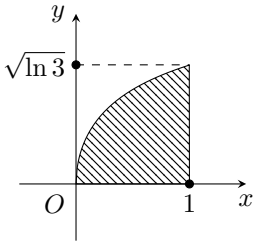
B. $\dfrac{\pi}{2}\ln 3-\pi$.

C. $\left(\pi+\dfrac{1}{2}\right)\ln 3-1$.

D. $\dfrac{3\pi}{2}\ln 3-\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay là $V=\displaystyle\int\limits_0^1 \pi\ln(2x+1)\,\mathrm{d}x$.



Đổi biến $2x+1=t$ thì $\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Khi $x=0$ thì $t=1$, $x=1$ thì $t=3$.

Do đó ta có $V=\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{\pi}{2}\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int\limits_1^3 \ln t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}\ln t=u\\ \mathrm{d}t=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}\\ v=t.\end{cases}$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

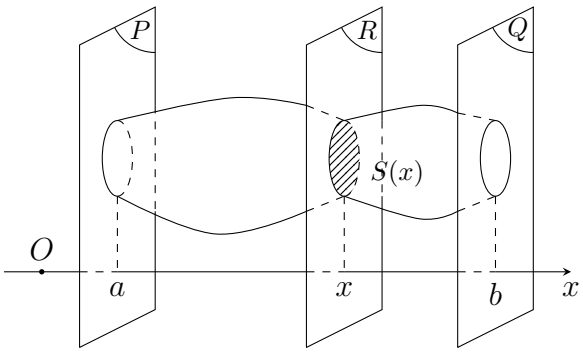
$$\int\limits_1^3 \ln t\,\mathrm{d}t=t\ln t\big|_1^3-\int\limits_1^3 \mathrm{d}t=(t\ln t-t)\big|_1^3=3\ln 3-2.$$

Vậy $V=\dfrac{(3\ln 3-2)\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}\ln 3-\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 85.

Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng (R) tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a\le x\le b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$, với $y=S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức



A. $V=\displaystyle\int_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\displaystyle\int_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân, thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ (với $a<b$). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ có công thức là

A. $\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $\left|\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $\displaystyle\int_b^a |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) là $\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0, x=\pi, y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_0^\pi |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\left|\displaystyle\int_0^\pi (-\sin x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a,\ x = b\ (a < b)$. Diện tích của D được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \int\limits_b^a |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của D được tính theo công thức

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 90. Gọi D là phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1, y = 0, y = x^3$. Thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{2\pi}{7}$.

B. $\dfrac{\pi}{8}$.

C. $\dfrac{\pi}{7}$.

D. $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{0} x^6\,\mathrm{d}x = \frac{\pi x^7}{7}\Big|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{7}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ quay quanh trục hoành là

A. $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

B. $V = \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $V = \pi \int\limits_b^u f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng quay quanh trục là $V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\displaystyle\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Cho hình phẳng $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$. Quay $(\mathscr{H})$ xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V=\displaystyle\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

B. $V=\displaystyle\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x^2-3x+2\right)^2\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$V=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

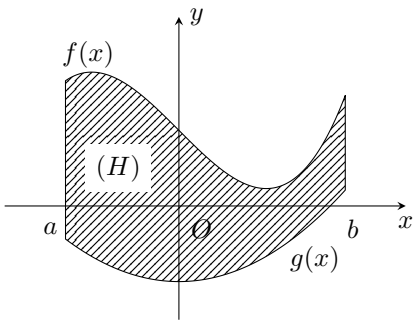
Chọn đáp án C □

Câu 94. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ có diện tích là

A. $S=\displaystyle\int\limits_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int\limits_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int\limits_2^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1)\colon y=f(x)\\(C_2)\colon y=g(x)\\x=a, x=b\,(a<b)\end{cases}$ thì diện tích của (H) được xác đinh bởi công thức $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 95. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ xung quanh trục Ox.

A. $\pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $2\pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức thể tích khối tròn xoay $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 97. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$; trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức:

A. $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính diện tích thì $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b, (a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2 \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức:

A. $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình D được tính theo công thức $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lí thuyết.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. A	5. C	6. A	7. C	8. D	9. D	10. D
11. C	12. A	13. D	14. B	15. C	16. C	17. C	18. A	19. D	20. B
21. C	22. C	23. C	24. D	25. B	26. C	27. B	28. C	29. C	30. A
31. C	32. D	33. C	34. B	35. C	36. A	37. D	38. C	39. C	40. A
41. D	42. D	43. D	44. D	45. B	46. C	47. B	48. A	49. B	50. D
51. B	52. A	53. C	54. A	55. C	56. C	57. C	58. C	59. A	60. A
61. B	62. A	63. A	64. B	65. B	66. C	67. A	68. B	69. C	70. A
71. D	72. A	73. D	74. A	75. C	76. A	77. C	78. A	79. B	80. A
81. B	82. B	83. D	84. D	85. D	86. A	87. B	88. C	89. B	90. C
91. A	92. A	93. C	94. B	95. A	96. A	97. D	98. A	99. D	100. A

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+4x}+2=2x$ là

A. $S=\mathbb{R}$. **B.** $S=\emptyset$. **C.** $S=\left\{\frac{2}{5};2\right\}$. **D.** $S=\{2\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{-x^2+4x}=2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ -5x^2+12x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ là

$$x^3-2x-1=2x-1 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=2 \\ x=0 \\ x=-2 \end{bmatrix}.$$

Vậy diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$,$x=2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $\frac{15}{4}$ cm^2. **B.** $\frac{17}{4}$ cm^2. **C.** 17 cm^2. **D.** 15 cm^2.

Lời giải.

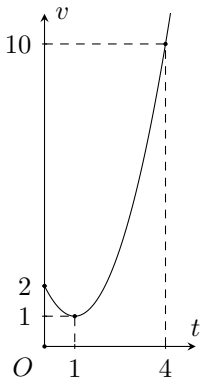
Ta có $S=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{-1}^{0}x^3\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}x^3\,\mathrm{d}x=-\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2}=\frac{17}{4}.$

Do mỗi đơn vị trên trục là 2 cm nên $S=\frac{17}{4}\cdot 2^2$ cm^2 $=17$ cm^2.

Chọn đáp án C □

Câu 4.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v(km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{40}{3}$(km). **B.** $s=8$(km). **C.** $s=\dfrac{46}{3}$(km). **D.** $s=6$(km).

Lời giải.

Vì đồ thị của hàm số $v(t)$ có dạng là một phần của parabol nên $v(t)=at^2+bt+c$ $(a\neq 0, t\geq 0)$.
Đồ thị hàm số $v(t)$ đi qua các điểm $(0;2)$, $(1;1)$, $(4;10)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 16a+4b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2. \end{cases}$$

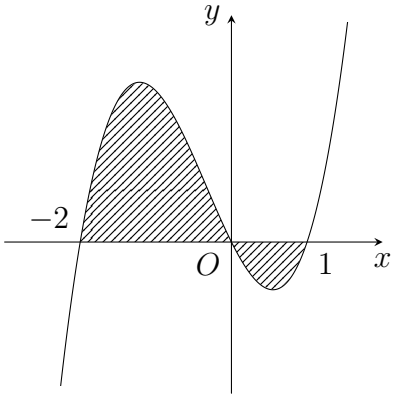
Do đó $v(t)=t^2-2t+2$.

Vậy quãng đường mà vật đi được là $s=\displaystyle\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^4 (t^2-2t+2)\,\mathrm{d}t=\dfrac{40}{3}$(km).

Chọn đáp án A □

Câu 5.

Đồ thị trong hình bên là của hàm số $y=f(x)$, S là diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình). Chọn khẳng định đúng.



A. $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_0^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x)\geq 0, \forall x\in[-2;0]$ và $f(x)\leq 0, \forall x\in[0;1]$.

Do đó $S=\displaystyle\int_{-2}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=4$. **D.** $t=3$.

Lời giải.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t=12-3(t-2)^2\leq 12$.
Vậy tại thời điểm $t=2$ tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^2 \text{ khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 \text{ khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0$, $x=3$, $y=0$.

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $x=a, x=b$ $(a<b)$ và các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Cách giải:

Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

☑ $4-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\notin(1;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2.$

☑ $7-4x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\notin[0;1].$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S&=\int_0^1 \left|7-4x^2\right|\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \left|4-x^2\right|\,\mathrm{d}x+\int_2^3 \left|4-x^2\right|\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 \left(7-4x^2\right)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \left(7-4x^2\right)\,\mathrm{d}x+\int_2^3 \left(7-4x^2\right)\,\mathrm{d}x\\ &=7-1+\frac{16}{3}-\frac{11}{3}-3+\frac{16}{3}=10.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ là

A. $S=\dfrac{397}{4}$. **B.** $S=\dfrac{937}{12}$. **C.** $S=\dfrac{3943}{12}$. **D.** $S=\dfrac{793}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Cách giải: Giải phương trình $-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow x^3-x^2-12x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\\ x=-3.\end{array}\right.$

Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$\begin{aligned}S&=\int_{-3}^4 \left|(-x^3+12x)-(-x^2)\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^4 \left|-x^3+12x+x^2\right|\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{-3}^0 \left|-x^3+12x+x^2\right|\,\mathrm{d}x+\int_0^4 \left|-x^3+12x+x^2\right|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-3}^{0} \left(-x^3+12x+x^2\right)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \left(-x^3+12x+x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{4} \\
&= 0-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^4-6\cdot 3^2+\frac{1}{3}\cdot 3^3\right)+\left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4+6\cdot 4^2+\frac{1}{3}\cdot 4^3\right)-0=\frac{937}{12}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho $f(x)=x^4-5x^2+4$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $S=\int_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S=2\left|\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=2\int_{0}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$.

D. $S=2\left|\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=x^4-5x^2+4$ và trục hoành

$$x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\x=\pm 2.\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

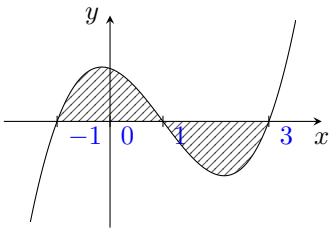
$$\begin{aligned}
S&=\int_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (1)\\
&=2\int_{0}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (2)\ (\text{do } f(x) \text{ là hàm số chẵn})\\
&=2\int_{0}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+2\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x\\
&=2\left|\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\right| \quad (3)\ (\text{do trong các khoảng}(0;1),(1;2)\text{ phương trình } f(x)=0 \text{ vô nghiệm}).
\end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra các đáp án A, B, C là đúng, đáp án D là sai.
Máy tính: Bấm máy kiểm tra, ba kết quả đầu bằng nhau nên đáp án là đáp án D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{1}{3}x+1$ và trục hoành như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=2\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=2\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3.\end{array}\right.$$

Từ hình vẽ ta thấy $f(x)>0,\forall x\in(-1;1)$ và $f(x)>0,\forall x\in(1;3)$.

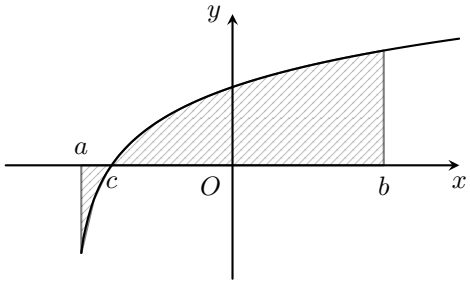
Do đó $S=\displaystyle\int_{-1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra các phương án A, C, D đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=-\displaystyle\int_{a}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\left|\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\displaystyle\int_{a}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$.

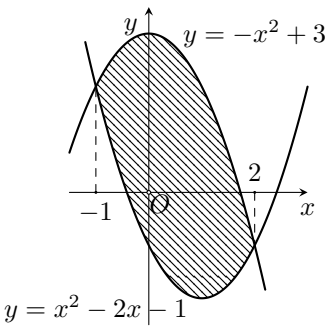
Lời giải.

Ta có: $S=\displaystyle\int_{a}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{a}^{c}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_{a}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành, hai đường thẳng $x=-1, x=2$. Biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục bằng 2cm.

A. $15\,\mathrm{cm}^2$. **B.** $\frac{15}{4}\,\mathrm{cm}^2$. **C.** $\frac{17}{4}\,\mathrm{cm}^2$. **D.** $17\,\mathrm{cm}^2$.

Lời giải.

Ta có: $\int_{-1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|x^3\right|\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}x^3\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^3\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{-1}+\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{17}{4}.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=4\cdot\frac{17}{4}=17\,\mathrm{cm}^2$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tính thể tích khối tròn xoay được tao thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quay quanh trục hoành.

A. $\frac{81\pi}{10}$. **B.** $\frac{85\pi}{10}$. **C.** $\frac{41\pi}{7}$. **D.** $\frac{8\pi}{7}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $3x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích vật thể cần tìm được cho bởi công thức:

$V=\pi\int_{0}^{3}\left[f(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{3}\left[3x-x^2\right]^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+3x^3\right)\Big|_{0}^{3}=\frac{81\pi}{10}(\text{ đvtt}).$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15$ m/s, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38 m. **B.** 37,2 m. **C.** 37,5 m. **D.** 37 m.

Lời giải.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0$ hay là $-3t+15=0\Leftrightarrow t=5$.

Khi đó, quãng đường s xe đi được tính từ lúc bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là

$$\int_{0}^{5}(-3t+15)\mathrm{d}t=\left(-\frac{3t^2}{2}+15\right)\Big|_{0}^{5}=37{,}5.$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho $0 < a < 1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\log_a x < 1$ khi $0 < x < a$.

B. Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

C. Nếu $0 < x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

D. $\log_a x > 0$ khi $x > 1$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng theo tính chất của đồ thị hàm số $y = \log_a x$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $y = x^3 + 1$ quay quanh Ox.

A. $V = \dfrac{47}{210}$. **B**. $V = \dfrac{47\pi}{210}$. **C**. $V = \dfrac{2}{35}$. **D**. $V = \dfrac{2\pi}{35}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $y = x^2 + 1$ và $y = x^3 + 1$.

$$x^2 + 1 = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left|\left(x^2+1\right)^2 - \left(x^3+1\right)^2\right| \mathrm{d}x \\ &= \pi \left|\int_0^1 \left[\left(x^2+1\right)^2 - \left(x^3+1\right)^2\right] \mathrm{d}x\right| \\ &= \pi \left|\int_0^1 \left(-x^6 + x^4 - 2x^3 + 2x^2\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \pi \left|\left(\frac{-1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1\right| \\ &= \frac{47\pi}{210}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + x$.

A. $\dfrac{9\pi}{8}$. **B**. $\dfrac{27}{8}$. **C**. $\dfrac{9}{8}$. **D**. $\dfrac{27\pi}{8}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = -x^2 + x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

$$S_{\text{hp}} = \int_0^{\frac{3}{2}} \left|2x^2 - 3x\right| \mathrm{d}x = \left|\int_0^{\frac{3}{2}} (2x^2 - 3x) \mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}\right| = \frac{9}{8}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số đã cho là $x^2 = x$. Phương trình này có hai nghiệm là 0 và 1. Do đó, diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 \left|x^2 - x\right| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - x^2\right) \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án A □

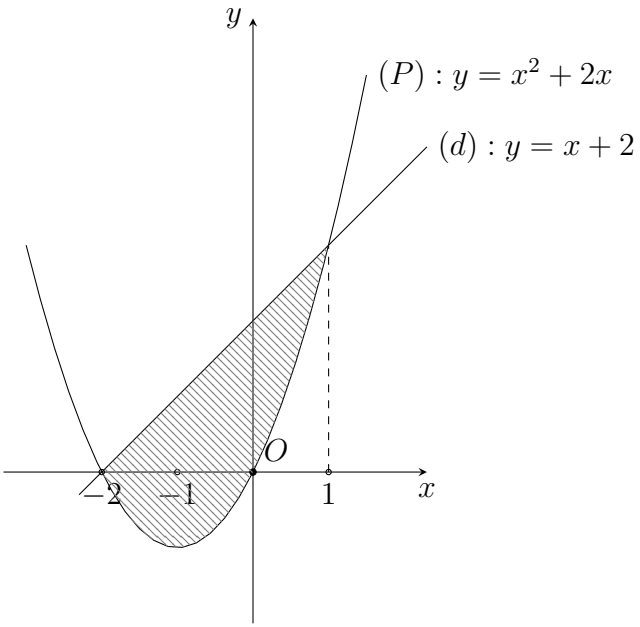
Câu 20. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y = x^2 + 2x$ và $d\colon y = x + 2$ là

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = x^2 + 2x$ và $d\colon y = x + 2$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$



Suy ra diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và d bằng $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} \left|(x^2 + 2x) - (x + 2)\right| \mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_{-2}^{1} \left|x^2 + x - 2\right| \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) \mathrm{d}x$

$= \left(-\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + 2\right) - \left(\dfrac{8}{3} - 2 - 4\right) = \dfrac{9}{2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)\colon y = 3x^4 - 4x^2 + 5, Ox, x = 1, x = 2$ là

A. $\dfrac{214}{15}$. **B.** $\dfrac{213}{15}$. **C.** $\dfrac{43}{3}$. **D.** $\dfrac{212}{15}$.

Lời giải.

Do $3x^4 - 4x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có:

$$S = \int_1^2 (3x^4 - 4x^2 + 5) \,\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 5x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{96}{5} - \frac{32}{3} + 10\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5} + 5\right) = \frac{214}{5}.$$

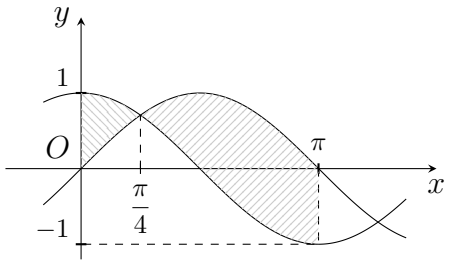
Chọn đáp án A □

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \sin x$, $y = \cos x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Với $x \in [0;\pi]$, khi đó $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$.



Diện tích hình phẳng $S = \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| \,\mathrm{d}x$.

Ta được $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $S = [\sin x + \cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = (\sqrt{2}-1) + (1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0) < 0 < f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau

1) $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 2) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 3) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 4) $S = \left|\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ Số mệnh đề đúng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $f(0) < 0 < f(-1) \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (-1;0)$.

Do vậy chỉ có 1 mệnh đề $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ đúng.

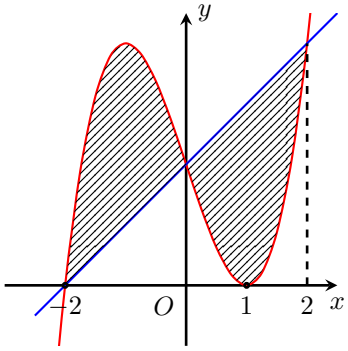
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và $g(x) = x + 2$.

A. $S = 8$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 12$. **D.** $S = 16$.

Lời giải.

☑ Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là nghiệm phương trình



$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

☑ Diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_0^2 = 8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Hình phẳng (H) giới

hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó.

A. $V = 60\pi$. **B.** 30π. **C.** $\dfrac{1188}{25}\pi$. **D.** $\dfrac{1416}{25}\pi$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{y^2}{9} = 1 - \dfrac{x^2}{25} \Leftrightarrow y = \sqrt{9\left(1 - \dfrac{x^2}{25}\right)}$ với $(-5 \le x \le 5)$.

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V = \pi \displaystyle\int_{-5}^{5} \left(9 - \frac{9x^2}{25}\right) \mathrm{d}x = 60\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ.

A. $S = 3\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **B.** $S = 5\ln\dfrac{3}{2} - 1$. **C.** $S = 3\ln\dfrac{5}{2} - 1$. **D.** $S = 2\ln\dfrac{3}{2} - 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho cắt hai trục Ox tại điểm $A(-1;0)$ và cắt trục Oy tại điểm $B\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$, do đó diện tích cần tìm là

$$S = \int_{-1}^{0} \left|\frac{x+1}{x-2}\right| \mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\left(x + 3\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0}\right| = 3\ln\frac{3}{2} - 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tính thể tích V của vật thể sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}\mathrm{e}^x$, đường thẳng $x = 1$ và trục hoành.

A. $V = \dfrac{\pi}{4}(\mathrm{e}^2 + 1)$. **B.** $V = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2 + 1)$. **C.** $V = \dfrac{\pi}{4}(\mathrm{e}^4 - 1)$. **D.** $V = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^4 - 1)$.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x}\mathrm{e}^x)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^1 x \mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) = \frac{\pi}{2}\left(x\mathrm{e}^{2x}\big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^2 + 1).$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x$ và $x + y = -2$ là

A. $\dfrac{6}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x + y = -2 \Leftrightarrow y = -x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = x^2 - 4x$ và $x + y = -2$ là:

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left|(x^2-4x)-(-x-2)\right| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left|x^2-3x+2\right| \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_1^2 \left(x^2-3x+2\right) \,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=4$, $x=-1$, $x=2$ là

A. 4. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{17}{4}$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm là $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left|x^2-4\right| \,\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{2}\left(x^2-4\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_{-1}^{2}\right|=9.$

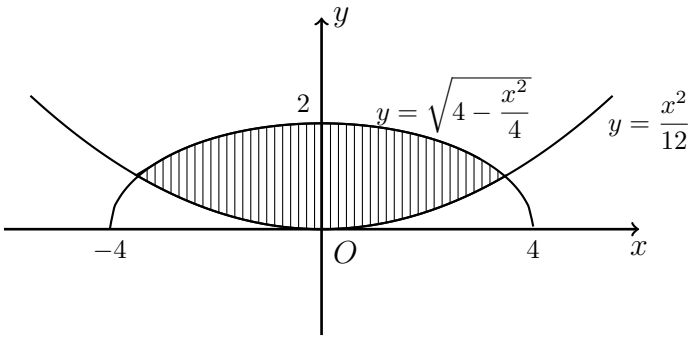
Chọn đáp án C □

Câu 30.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi Parabol $y=\dfrac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ (hình vẽ). Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\dfrac{\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$.



Lời giải.

Hoành độ giao điểm của Parabol $y=\dfrac{x^2}{12}$ và đường cong $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ là nghiệm của PT:

$\dfrac{x^2}{12}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}.$

Diện tích hình phẳng (H) bằng

$$S=2\int_0^{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right]dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}dx-\frac{1}{6}\int_0^{2\sqrt{3}}x^2dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}dx+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

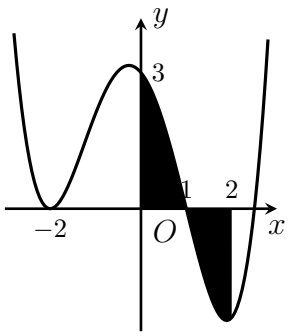
Đặt $x=4\sin t \Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}16\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}.$

$\Rightarrow S=\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}.$

Chọn đáp án D □

Câu 31.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ (phần tô đen) là



A. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy: khi $x\in(0;1)$ thì $f(x)>0$, khi $x\in(1;2)$ thì $f(x)<0$.

Vậy $\displaystyle S=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}, y=0, x=1, x=\mathrm{e}$ là $S=a\sqrt{2}+b$. Khi đó tính giá trị a^2+b^2?

A. $\dfrac{2}{3}$.

B. $\dfrac{4}{3}$.

C. $\dfrac{20}{9}$.

D. 2.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $\displaystyle S=\int_1^{\mathrm{e}}\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\right|\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Leftrightarrow t^2=1+\ln x\Leftrightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận: với $x=1$ thì $t=1$, với $x=\mathrm{e}$ thì $t=\sqrt{2}$. Khi đó $\displaystyle S=\int_1^{\sqrt{2}}2t^2\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}-\frac{2}{3}$ hay $a=\dfrac{4}{3}, b=\dfrac{2}{3}$.

Khi đó $a^2+b^2=\dfrac{20}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tính diện tích S_D của hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y=\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|$, trục hoành, đường thẳng $x=\dfrac{1}{e}; x=2$.

A. $S_D=\dfrac{1}{2}(1+\ln 2)$.

B. $S_D=\dfrac{1}{2}\left(1+\ln^2 2\right)$.

C. $S_D=\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\dfrac{1}{2}$.

D. $S_D=\dfrac{1}{2}\left(1-\ln^2 2\right)$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S_D &= \int\limits_{\frac{1}{e}}^{2} \left|\frac{\ln x}{x}\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \left|\frac{\ln x}{x}\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \left|\frac{\ln x}{x}\right| \mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_{1}^{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \ln^2 2\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b], (a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; trục hoành Ox; $x = a; x = b$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\left|S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **C.** $S = \int\limits_b^a \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng $\int\limits_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Thể tích của khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$, đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{3}$ quanh trục Ox là

A. $V = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$. **B.** $V = \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}$. **C.** $V = \pi\sqrt{3} + \dfrac{\pi^2}{3}$. **D.** $V = \pi\sqrt{3} - \dfrac{\pi^2}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x = \pi\left(\tan x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi\sqrt{3} - \dfrac{\pi^2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = 1$ và $x = 2$. Công thức tính diện tích S của (D) là công thức nào dưới đây?

A. $S = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_1^2 \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi \int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S = \int\limits_1^2 \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t(\mathrm{m/s})$. Đi được 5(s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường của ô tô đi được tính từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. 87.5 mét. **B**. 96.5 mét. **C**. 102.5 mét. **D**. 105 mét.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được trong 5(s) đầu là

$$s_1 = \int_0^5 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 7t\mathrm{d}t = \frac{7}{2}t^2\Big|_0^5 = \frac{175}{2}(\mathrm{m}).$$

Phương trình vận tốc khi ô tô phanh là $v(t) = 35 - 35t$, do đó quãng đường ô tô đi được từ khi phanh đến khi dừng hẳn là

$$s_2 = \int_0^1 (35 - 35t)\mathrm{d}t = 35\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{35}{2}(\mathrm{m}).$$

Vậy quãng đường cần tính là $s = s_1 + s_2 = 105(\mathrm{m})$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + x$.

A. 6. **B**. 12. **C**. $\frac{9}{8}$. **D**. $\frac{10}{3}$.

Lời giải.

$$x^2 - 2x = -x^2 + x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm có giá trị bằng $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \left|2x^2 - 3x\right| \mathrm{d}x = \frac{9}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Kí hiệu H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Tính diện tích S của hình phẳng H.

A. $S = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. **B**. $S = \pi\displaystyle\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_b^a |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D**. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f_1(x), y = f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x$. **B**. $S = \left|\displaystyle\int_a^b f_1(x) - f_2(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\displaystyle\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số liên tục $y=f_1(x), y=f_2(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được tính bởi công thức $S=\displaystyle\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ khi quay quanh Ox là

A. $\dfrac{\pi}{4}(e^2+1)$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}(e^2-1)$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}(e^2-1)$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}(e^2+1)$.

Lời giải.

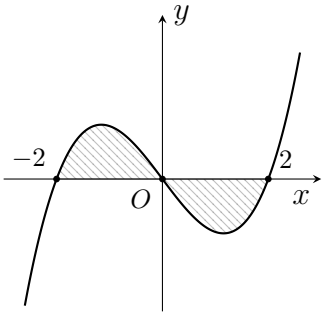
Gọi V là thể tích vật thể cần tính, khi đó:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right).\\&=\frac{\pi}{2}\left(x\cdot\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_0^1-\frac{\pi}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1\\&=\frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 42.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong Hình 1) được tính bởi công thức nào sau đây?



Hình 1

A. $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_0^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành, $x=2$, $x=5$ quanh trục Ox bằng

A. $\pi\displaystyle\int_2^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_2^5 (x-1)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\displaystyle\int_2^5 \left(y^2+1\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_2^5 (x-1)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int_2^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_2^5 (x-1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\sin 2x$, $y=2x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

A. $\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\pi^2-\pi$. **C.** $\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{4}-4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x\sin 2x=2x\Leftrightarrow x\left(\sin 2x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sin 2x=2\,(\text{vô nghiệm}).\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x\sin 2x-2x|\,\mathrm{d}x=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin 2x-2x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|\\&=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2-4x+6$, $y=-x^2-2x+6$.

A. 3π. **B.** $\pi-1$. **C.** π. **D.** 2π.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-4x+6=-x^2-2x+6\Leftrightarrow 2x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1.\end{array}\right.$

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+6; y=-x^2-2x+6; x=0; x=1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh Ox là

$$\begin{aligned}V&=\left|\pi\int_0^1\left[(x^2-4x+6)^2-(-x^2-2x+6)^2\right]\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\pi\int_0^1(2x^2-2x)(12-6x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\pi\int_0^1(-12x^3+36x^2-24x)\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

$$= \left|\pi\left(-3x^4+12x^3-12x^2\right)\right|\Big|_0^1$$
$$= |-3\pi| = 3\pi$$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2+1}$; $x = 1$ và trục Ox.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}-1}{5}$. **B.** $\dfrac{5-\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **D.** $\dfrac{5-2\sqrt{2}-1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó diện tích hình phẳng theo yêu cầu bài toán là

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = -x^2+2x+1$; $y = 2x^2-4x+1$.

A. 8. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong là $-x^2+2x+1 = 2x^2-4x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là $S = \displaystyle\int_0^2 \left|2x^2-4x+1-(-x^2+2x+1)\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 |3x^2-6x|\,\mathrm{d}x$

Do $3x^2-6x \le 0, \forall x \in [0;2]$ nên $S = \displaystyle\int_0^2 (6x-3x^2)\,\mathrm{d}x = (3x^2-x^3)\Big|_0^2 = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Một ô-tô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô-tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t+20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô-tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 20 m. **B.** 25 m. **C.** 60 m. **D.** 15 m.

Lời giải.

Khi ô-tô dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy đoạn đường ô-tô di chuyển được là $S = \displaystyle\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (20-10t)\,\mathrm{d}t = (20t-5t^2)\Big|_0^2 = 20$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = x$.

A. $S = \dfrac{1}{6}$. **B.** $S = \dfrac{5}{6}$. **C.** $S = \dfrac{1}{3}$. **D.** $S = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2, y = x$ là

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (-x^2 + x) \, \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình phẳng $(\mathscr{H})$ được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (liên tục trên đoạn $[a; b]$) và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích S của hình $(\mathscr{H})$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, \mathrm{d}x$.

B. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| \, \mathrm{d}x$.

C. $S = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \, \mathrm{d}x \right|$.

D. $S = \left| \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, \mathrm{d}x \right|$.

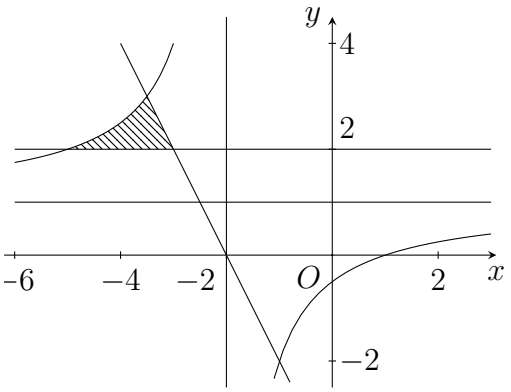
Lời giải.

Ta có $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 51.

Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ và các đường thẳng $y = 2$, $y = -2x - 4$ (như hình vẽ bên).



A. $\dfrac{1}{4}$.

B. $3\ln 3 - 2$.

C. $-\dfrac{5}{4} + 3\ln 2$.

D. $\dfrac{1}{4} + 3\ln 2$.

Lời giải.

Xét $\dfrac{x-1}{x+2} = -2x - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$

Xét $-2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = -3$.

Xét $\dfrac{x-1}{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = -5$.

Diện tích hình phẳng là $S = \int_{-5}^{-\frac{7}{2}} \left(\dfrac{x-1}{x+2} - 2 \right) \mathrm{d}x + \int_{-\frac{7}{2}}^{-3} (-2x - 4 - 2) \, \mathrm{d}x = -\dfrac{5}{4} + 3\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = 5x - 2$.

A. $S = \dfrac{5}{4}$.

B. $S = \dfrac{5}{8}$.

C. $S = \dfrac{9}{8}$.

D. $S = \dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

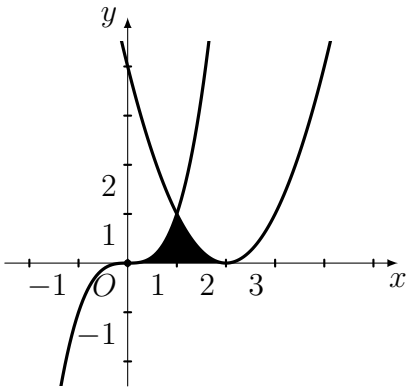
Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là:

$$2x^2 = 5x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Khi đó: $S = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left|2x^2 - (5x-2)\right| \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(-2x^2 + 5x - 2\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{9}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4x + 4$, đường cong $y = x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H).



A. $S = \dfrac{11}{2}$. **B.** $S = \dfrac{7}{12}$. **C.** $S = \dfrac{20}{3}$. **D.** $S = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $x^3 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích của hình (H) là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-2)^2 \,\mathrm{d}(x-2) \\ &= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 54. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^3 - 2x$ và đường thẳng $y = x$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{6}$. **C.** $\dfrac{27}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Suy ra $S = \left|\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x) \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \,\mathrm{d}x\right| = \frac{9}{2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích của D được cho bởi công thức nào dưới đây?

A. $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) là

$$S=\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 56. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=x^2-ax$ với trục hoành $(a\neq 0)$. Quay hình (H) xung quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích $V=\dfrac{16\pi}{15}$. Tìm a.

A. $a=-3$. **B.** $a=-2$. **C.** $a=2$. **D.** $a=\pm 2$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là nghiệm của $x^2-ax=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right.$.

☑ TH1: Với $a>0$ thì thể tích của khối tròn xoay
$V=\pi\displaystyle\int_0^a \left(x^2-ax\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{ax^4}{2}+\frac{a^2x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{a^5\pi}{30}$. Suy ra $\dfrac{a^5\pi}{30}=\dfrac{16\pi}{15}\Leftrightarrow a=2$.

☑ TH2: Với $a<0$ thì thể tích của khối tròn xoay
$V=\pi\displaystyle\int_a^0 \left(x^2-ax\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{ax^4}{2}+\frac{a^2x^3}{3}\right)\Big|_a^0=-\frac{a^5\pi}{30}$. Suy ra $-\dfrac{a^5\pi}{30}=\dfrac{16\pi}{15}\Leftrightarrow a=-2$.

Vậy $a=\pm 2$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 57. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x$; $y=0$; $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi quay (H) quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $V_H=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 58. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2-2x-2$ và $y=\dfrac{x-4}{2-x}$.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** 0,28. **C.** $\dfrac{5}{3}-2\ln 2$. **D.** $3-\ln 4$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị $(P)\colon y=x^2-2x-2$ và $(H)\colon y=\dfrac{x-4}{2-x}$ là nghiệm của phương trình

$$x^2-2x-2=\frac{x-4}{2-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\(x^2-2x-2)(2-x)=x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\x(x^2-4x+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right..$$

Suy ra diện tích hình phẳng bằng

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_0^1\left|x^2-2x-2-\frac{x-4}{2-x}\right|\mathrm{d}x+\int\limits_1^3\left|x^2-2x-2-\frac{x-4}{2-x}\right|\mathrm{d}x\\&=\left|\int\limits_0^1\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_1^3\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x-2\ln|x-2|\right)\Big|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x-2\ln|x-2|\right)\Big|_1^3\right|\\&=\frac{5}{3}-2\ln 2+\frac{4}{3}=3-\ln 4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

A. $S=\dfrac{7}{3}$. **B.** $S=\dfrac{8}{3}$. **C.** $S=7$. **D.** 8.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $S=\displaystyle\int\limits_1^2\left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$. Vậy $S=\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Cho hàm số $y=x^2-2x$ có đồ thị (P). Các tiếp tuyến với đồ thị tại $O\,(0;0)$ và tại $A\,(3;3)$ cắt nhau tại B. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung OA của (P) và hai tiếp tuyến BO, BA?

A. $\dfrac{9}{5}$(dvdt). **B.** $\dfrac{9}{4}$ (dvdt). **C.** $\dfrac{9}{8}$ (dvdt). **D.** $\dfrac{9}{3}$ (dvdt).

Lời giải.

TXD: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=2x-2$.

Tiếp tuyến tại $O\,(0;0)$ là $OB: y=y'(0)\cdot(x-0)+0\Leftrightarrow y=-2x$.

Tiếp tuyến tại $A\,(3;3)$ là $AB: y=y'(3)\,(x-3)+3\Leftrightarrow y=4x-9$.

Suy ra $OB\cap AB=B\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{3}{2}}^3\left(x^2-6x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}(\text{đvdt})$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=3$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0\leqslant x\leqslant 3)$ là hình chữ nhật có kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. 36(đvtt). **B.** 9 (đvtt). **C.** 18 (đvtt). **D.** 54 (đvtt).

Lời giải.

Thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x, (0\leqslant x\leqslant 3)$ là hình chữ nhật có kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.
Diện tích thiết diện được xác định theo hàm là $S(x)=2x\sqrt{9-x^2}$.
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay: $V=\displaystyle\int\limits_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=18$ (đvtt).

Chọn đáp án C □

Câu 62. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=2$, $x=0$, $x=1$.

A. $S=4\ln 2+\mathrm{e}-5$. **B.** $S=4\ln 2+\mathrm{e}-6$. **C.** $S=\mathrm{e}^2-7$. **D.** $S=\mathrm{e}-3$.

Lời giải.

Phương trình $\mathrm{e}^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2\in(0;1)$. Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=2$, $x=0$, $x=1$ là

$$\begin{aligned}S=\int_0^1|\mathrm{e}^x-2|\,\mathrm{d}x&=-\int_0^{\ln 2}(\mathrm{e}^x-2)\,\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^1(\mathrm{e}^x-2)\,\mathrm{d}x\\&=-\left(\mathrm{e}^x-2x\right)\big|_0^{\ln 2}+\left(\mathrm{e}^x-2x\right)\big|_{\ln 2}^1\\&=-(2-2\ln 2-1)+(\mathrm{e}-2-2+2\ln 2)=4\ln 2+\mathrm{e}-5.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 63. Hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): x^2-x-6$ và trục Ox có diện tích bằng

A. $\dfrac{95}{6}$. **B.** $\dfrac{-95}{6}$. **C.** $\dfrac{-125}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{6}$.

Lời giải.

Ta có $x^2-x-6=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=3$.
Với $x\in[-2;3]$ thì $x^2-x-6<0$, ta có $S=\displaystyle\int_{-2}^3(-x^2+x+6)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_{-2}^3=\frac{125}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+|x|$; $y=x^2+1$ được cho bởi công thức nào sau đây?

A. $\displaystyle\int_{-1}^0(-x-1)\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x$. **B.** $\left|\displaystyle\int_{-1}^0(-x-1)\mathrm{d}x\right|+\left|\displaystyle\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x\right|$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^1(|x|-1)\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_{-1}^0(x-1)\mathrm{d}x+\int_0^1(-x-1)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=x^2+|x|=\begin{cases}x^2+x & \text{nếu} \quad x\geq 0\\ x^2-x & \text{nếu} \quad x\leq 0\end{cases}$.
Do đó:

+) Với $x \geq 0$ thì $x^2 + x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1$.
+) Với $x \leq 0$ thì $x^2 - x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = -1$.
Ta có $S = \left|\int\limits_{-1}^{0} (-x-1)\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{0}^{1} (x-1)\mathrm{d}x\right|$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C) : y = \ln x$, hai đường thẳng $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $x = 1$ và trục Ox có diện tích bằng

A. $\dfrac{2}{7}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}+1}{14}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$. **D.** $\dfrac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Phương trình $\ln x = 0$ vô nghiệm trong đoạn $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}; 1\right)$ nên diện tích cần tìm là
$S = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} |\ln x|\ \mathrm{d}x = \left|\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x\right|$. Ta dùng phương pháp từng phần để tính tích phân này:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó $S = \left|(x\ln x)\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \mathrm{d}x\right| = \left|\dfrac{1}{\mathrm{e}} - x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\right| = \left|\dfrac{1}{\mathrm{e}} - \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\right| = \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi trục hoành và hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ bằng

A. $\pi\mathrm{e}^2$. **B.** $\pi(\mathrm{e}^2 - 1)$. **C.** $\pi(\mathrm{e} - 1)$. **D.** $\mathrm{e}^2 - 1$.

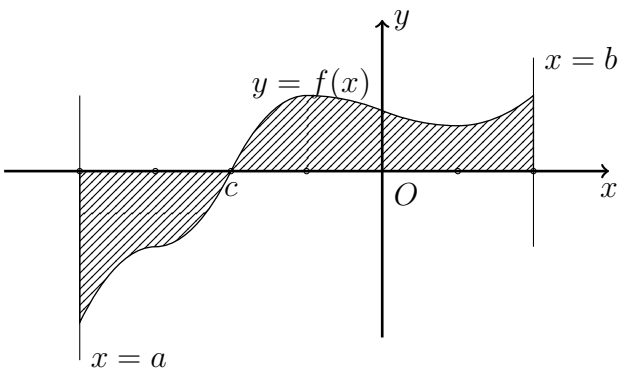
Lời giải.

Gọi thể tích cần tìm là V, ta có $V = \pi \displaystyle\int\limits_{0}^{2} \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^x\Big|_0^2 = \pi\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 67.

Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



A. $S=\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=-\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích phần tô đậm được tính bởi biểu thức $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được tính theo công thức

A. $S=-\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y=(4x-1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x=e$. Khi hình phẳng D quay quanh trục hoành được vật thể tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức

A. $V=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^e (4x-1)^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

B. $V=\displaystyle\int_1^e (4x-1)^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_1^e (4x-1)^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^e (4x-1)^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Điều kiện $\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Xét phương trình $(4x-1)\sqrt{\ln x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \text{ (loại)} \\ x=1 \end{array}\right.$. Do đó $V=\pi\displaystyle\int_1^e (4x-1)^2 \ln x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 70. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $x=9$. Khi (H) quay quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. 18. **B.** $\dfrac{81}{2}$. **C.** 18π. **D.** $\dfrac{81\pi}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $x=0$.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành là $V=\pi\displaystyle\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^9=\frac{81\pi}{2}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 71. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=-3x$, $y=0$ và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$. Công thức nào sau đây tính diện tích hình phẳng (H)?

A. $S=\pi\displaystyle\int_0^2 3x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^2 3x\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=-\displaystyle\int_0^2 3x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 9x^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của hình phẳng (H) là $S=\displaystyle\int_0^2 |-3x|\,\mathrm{d}x=\int_0^2 3x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 72. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x$, $y=x$, $x=0$, $x=1$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $V=\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là $V=\pi\cdot\displaystyle\int_0^1 \left|(2x)^2-x^2\right|\,\mathrm{d}x=\pi$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 73. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=3x^2$, $y=2x+5$, $x=-1$ và $x=2$.

A. $S=\dfrac{256}{27}$. **B.** $S=\dfrac{269}{27}$. **C.** $S=9$. **D.** $S=27$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $3x^2=2x+5 \Leftrightarrow 3x^2-2x-5=0$. Phương trình có hai nghiệm $x=-1$, $x=\dfrac{5}{3}$.

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\displaystyle\int_{-1}^2 |(3x^2-2x-5)|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{\frac{5}{3}}(3x^2-2x-5)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\frac{5}{3}}^2(3x^2-2x-5)\mathrm{d}x\right|$

$=\left|(x^3-x^2-5x)\Big|_{-1}^{\frac{5}{3}}\right|+\left|(x^3-x^2-5x)\Big|_{\frac{5}{3}}^2\right|=\left|-\frac{175}{27}-3\right|+\left|-6+\frac{175}{27}\right|=\frac{269}{27}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 74. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sin x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{6}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **B.** $V=\dfrac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$. **D.** $V=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lời giải.

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{4}\left(2x-\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 75. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=2^x-2$, $y=0$ và $x=2$.

A. $S=\dfrac{2+2\ln 2}{\ln 2}$. **B.** $S=\dfrac{3-4\ln 2}{\ln 2}$. **C.** $S=\dfrac{3+4\ln 2}{\ln 2}$. **D.** $S=\dfrac{2-2\ln 2}{\ln 2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2^x-2$ và trục hoành: $2^x-2=0\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\displaystyle\int\limits_1^2\left|2^x-2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right)\Big|_1^2=\frac{2-2\ln 2}{\ln 2}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 76. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường parabol $(P): y=x^2-x+2$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+1$ tại điểm có tọa độ $(1;2)$. Diện tích của hình (H) là

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=x^2+1$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $y'=2x$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1;2)$ của đồ thị hàm số $y=x^2+1$ là

$$y=y'(1)(x-1)+2\Leftrightarrow y=2x.$$

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $y=2x$. Xét phương trình tương giao của (P) và Δ

$$x^2-x+2=2x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) khi đó

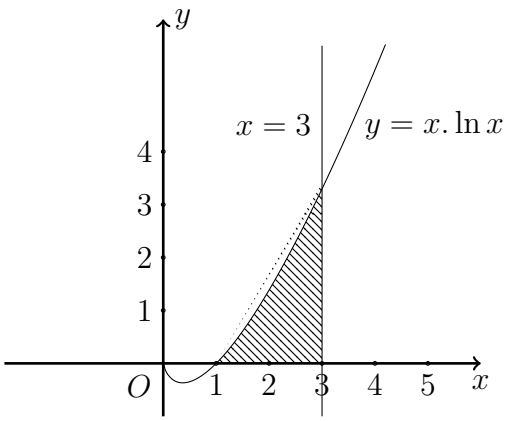
$$S=\int\limits_1^2\left|\left(x^2-x+2\right)-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$$

Do $x^2-3x+2\leq 0,\ \forall x\in[1;2]$ nên

$$S=-\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2=-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 77.
Cho hình phẳng (H) như hình vẽ (phần tô đậm). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}$.
B. 1.
C. $\frac{9}{2}\ln 3 - 4$.
D. $\frac{9}{2}\ln 3 - 2$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) theo hình vẽ suy ra $S = \int\limits_1^3 x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Theo công thức tích phân từng phần

$$S = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_2^3 + \int\limits_1^3 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^3 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^3 = \frac{9}{4}\ln 3 - 2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=-3, x=1, y=0, y=x^2-x$ có diện tích được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_{-3}^{1}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$.
B. $S = \int\limits_{-3}^{0}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$.
C. $S = \int\limits_{-3}^{0}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$.
D. $S = \int\limits_{0}^{1}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \int\limits_{-3}^{0}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{0}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^3$ và $y=\sqrt{x}$. Khối tròn xoay tạo ra khi (H) quay quanh trục Ox có thể tích là

A. $V = \pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^6-x\right)\mathrm{d}x$.
B. $V = \pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1\left(x-x^6\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy $V=\pi\displaystyle\int_0^1\left|x^6-x\right|\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x-x^6\right)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C):y=-x^2+4x$ và đường thẳng $d:y=x$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay do hình phẳng (H) quay quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{81\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{81\pi}{5}$. **C.** $V=\dfrac{108\pi}{5}$. **D.** $V=\dfrac{108\pi}{10}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2+4x=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích cần tính $V=\pi\displaystyle\int_0^3\left((4x-x^2)^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3\right)\Big|_0^3=\frac{108\pi}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1):y=x^2+2x$ và $(C_2):y=x^3$.

A. $S=\dfrac{83}{12}$. **B.** $S=\dfrac{15}{4}$. **C.** $S=\dfrac{37}{12}$. **D.** $S=\dfrac{9}{12}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+2x=x^3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích cần tính $S=\displaystyle\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)\mathrm{d}x+\int_0^2(x^2+2x-x^3)\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (S) giới hạn bởi các đường $y=4-x^2, y=0$ quanh trục Ox có kết quả có dạng $\dfrac{\pi a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $a-30b$ bằng

A. 62. **B.** 26. **C.** 82. **D.** 28.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích cần tính $V=\pi\displaystyle\int_{-2}^2(4-x^2)^2\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}-16x\right)\Big|_{-2}^2=\frac{512\pi}{15}$.

Suy ra $a=512$ và $b=15$. Vậy $a-30b=62$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$ là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{28}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{28}{9}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của $y = x^2$ và trục hoành là nghiệm phương trình $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Diện tích hình phẳng $S = \displaystyle\int_{-1}^{3} \left|x^2 - 0\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2 \mathrm{d}x + \int_{0}^{3} x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{28}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

A. $S = \dfrac{7}{2}$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = \dfrac{3}{2}$. **D.** $S = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (1-x)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

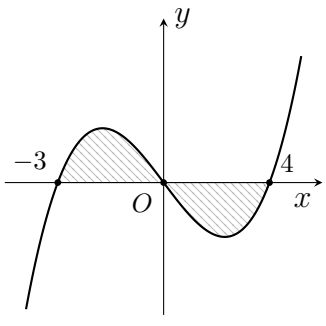
Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{2} \left|-x^3 + 3x^2 - 2\right| \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} \left|-x^3 + 3x^2 - 2\right| \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \left|-x^3 + 3x^2 - 2\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int_{0}^{1} \left(-x^3 + 3x^2 - 2\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{2} \left(-x^3 + 3x^2 - 2\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x\right)\Big|_{0}^{1}\right| + \left|\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x\right)\Big|_{1}^{2}\right| \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 85.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng thuộc phần tô đậm trong hình vẽ bên là



A. $S = \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_{-3}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa trên đồ thị hàm số, ta có

$$S=\int\limits_{-3}^{0}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 86. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2x-1}$, $y=1$ và đường thẳng $x=2$ là

A. $S=1+\ln 3$. **B.** $S=1-\dfrac{1}{2}\ln 3$. **C.** $S=\dfrac{1}{2}\ln 3$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}+\ln 3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{2x-1}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\2x-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Khi đó

$$S=\int\limits_{1}^{2}\left|\frac{1}{2x-1}-1\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{2x-1}-1\right)\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{\ln|2x-1|}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}\right|=\left|\frac{1}{2}\ln 3-1\right|=1-\frac{1}{2}\ln 3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=1-x^2$ và trục Ox. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{16}{15}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=1-x^2$ và trục hoành là

$$1-x^2=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=1\end{bmatrix}.$$

Khi đó, thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, trục hoànhkhi quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\cdot\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 88. Thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ khi quay quanh trục Ox là

A. $V=\dfrac{9}{15}$. **B.** $V=\dfrac{8\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{8}{15}$. **D.** $V=\dfrac{9\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = x\sqrt{x^2+1}$ và trục hoành là

$$x\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Khi đó, thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ khi quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^1 \left(x^4+x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = x + 2$.

A. $S = \dfrac{125}{6}$. **B.** $S = 10\sqrt{3}$. **C.** $S = -\dfrac{125}{6}$. **D.** $S = \dfrac{25}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^2 - 4 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$$S = \int_{-2}^{3} |x^2 - x - 6| \,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{-2}^{3} = \frac{125}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Một học sinh đang điều khiển xe đạp điện chuyển động thẳng đều với vận tốc a m/s. Khi phát hiện có chướng ngại vật phía trước học sinh đó thực hiện phanh xe. Sau khi phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = a - 2t$ m/s. Tìm giá trị lớn nhất của a để quãng đường xe đạp điện đi được sau khi phanh không vượt quá 9 m.

A. $a = 7$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = 5$. **D.** $a = 6$.

Lời giải.

Khi $v = 0 \Rightarrow t = \dfrac{a}{2}$. Quãng đường xe đi được kể từ lúc phanh cho đến khi dừng lại là $S = \displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} (a - 2t)\,\mathrm{d}t = \left(at - t^2\right)\Big|_0^{\frac{a}{2}} = \dfrac{a^2}{4}$. Để quãng đường đi được sau khi phanh không vượt quá 9 m thì $\dfrac{a^2}{4} \le 9 \Rightarrow a \le 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4x$ là

A. 34. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 9.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số là $\displaystyle\int_0^3 \left|2x^2 - 6x\right| \,\mathrm{d}x = \int_0^3 (6x - 2x^2)\,\mathrm{d}x = 9.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=3$ là

A. 3. **B.** $\dfrac{23}{3}$. **C.** $\dfrac{25}{3}$. **D.** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $\displaystyle\int_0^3 \left|-x^2+4\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 (-x^2+4)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=a$ $(a>0)$. Giá trị của a sao cho thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng 57π là

A. $a=3$. **B.** $a=5$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_0^a (2x+1)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{(2x+1)^3}{6}\bigg|_0^a=\pi\left(\frac{(2a+1)^3}{6}-\frac{1}{6}\right).$$

Mà $V=57\pi \Leftrightarrow \pi\left(\dfrac{(2a+1)^3}{6}-\dfrac{1}{6}\right)=57\pi \Leftrightarrow (2a+1)^3=343 \Leftrightarrow a=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Xét vật thể $(\mathcal{T})$ nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1-x^2}$. Thể tích vật thể $(\mathcal{T})$ bằng

A. $\dfrac{16\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** π. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x)=4(1-x^2)$.

Suy ra thể tích vật thể $(\mathcal{T})$ là $V=\displaystyle\int_{-1}^1 4(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{4x^3}{3}\right)\bigg|_{-1}^1=\frac{16}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-x$ và trục hoành quanh trục hoành là

A. $\dfrac{\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2-x$ và $y=0$ là $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Vậy thể tích của khối tròn xoay thỏa yêu cầu đề bài là $V=\pi\displaystyle\int_0^1 (x^2-x)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1=\frac{\pi}{30}$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $y = x-1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ $(m > 1)$. Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là

A. $m = 5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm chính là tích phân

$$S = \int_m^{2m} \left| \frac{x^2-2x}{x-1} - (x-1) \right| \mathrm{d}x.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_m^{2m} \left| \frac{x^2-2x}{x-1} - (x-1) \right| \mathrm{d}x = \int_m^{2m} \left| \frac{-1}{x-1} \right| \mathrm{d}x \\ &= \int_m^{2m} \frac{1}{|x-1|} \mathrm{d}x = \int_m^{2m} \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x \ (\text{do } m > 1) \\ &= (\ln|x-1|)\big|_m^{2m} = \ln \frac{2m-1}{m-1}. \end{aligned}$$

Do đó, $S = \ln 3 \Leftrightarrow \ln \dfrac{2m-1}{m-1} = \ln 3 \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{m-1} = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2x + 1$ và các đường thẳng $y = 0, x = -1, x = 1$. Tính diện tích S của hình phẳng (H).

A. $S = 5$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

$$S = \int_{-1}^{1} \left|3x^2+2x+1\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (3x^2+2x+1) \mathrm{d}x = (x^3+x^2+x)\big|_{-1}^{1} = 3-(-1) = 4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x+1}$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $V = \dfrac{2}{3}$. **B.** $V = \ln 3$. **C.** $V = \pi \ln 3$. **D.** $V = \dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{d}(x+1) = \pi \left(-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{-1}{3}+1\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$. Tính diện tích S của hình phẳng (H).

A. $S = 2$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = \dfrac{\pi^2}{2}$.

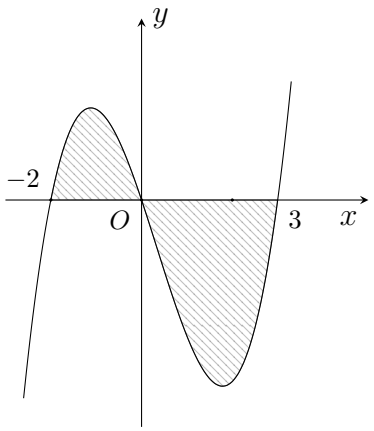
Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 100.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = b$. Tính diện tích của phần được gạch chéo theo a, b.



A. $\dfrac{a+b}{2}$. **B.** $a-b$. **C.** $b-a$. **D.** $a+b$.

Lời giải.

Từ đồ thị suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2;0]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [0;3]$. Do đó, diện tích phần gạch chéo là

$$S = \int_{-2}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = a - b.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 101. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72 km/h, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72 km/h, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72 km/h, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

A. 100 m. **B.** 150 m. **C.** 175 m. **D.** 125 m.

Lời giải.

Thời điểm t ô tô đạt tốc độ 72 km/h (tức 20 m/s) là nghiệm của $30 - 2t = 20 \Leftrightarrow t = 5$ (s).
Quãng đường đi được trong khoảng thời gian 5 s là

$$S = \int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 (30-2t)\,\mathrm{d}t = \left(30t - t^2\right)\Big|_0^5 = 30\cdot 5 - 5^2 = 125 \text{ m}.$$

Chọn đáp án D ☐

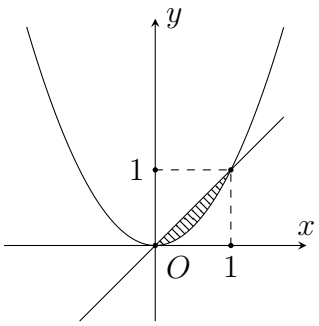
Câu 102. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $d\colon y = x$ xoay quanh trục Ox bằng

A. $\pi\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - x\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - x\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có (P) và d cắt nhau tại hai điểm $(0;0)$, $(1;1)$ và $x > x^2, \forall x \in (0;1)$.



Suy ra thể tích khối tròn xoay đã cho T bằng thể tích khối tròn xoay T_1 trừ đi thể tích khối tròn xoay T_2. Trong đó

- ☑ T_1 được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường d, trục Ox, $x = 0, x = 1$.
- ☑ T_2 được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường (P), trục Ox, $x = 0, x = 1$.

Vậy thể tích khối tròn xoay đã cho bằng $\pi \displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 103. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi(\pi + 1)$. **B.** $V = \pi - 1$. **C.** $V = \pi + 1$. **D.** $V = \pi(\pi - 1)$.

Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) \,\mathrm{d}x = \pi(2x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 104. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = \mathrm{e}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** e. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng là $S = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left|\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_1^{\mathrm{e}} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 105. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$.

A. $S = \dfrac{5}{4}$. **B.** $S = \dfrac{4}{3}$. **C.** $S = \dfrac{7}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích ta được

$$S = \int_0^1 |x^3 + 1| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^3 + 1) \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 106. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và $y = x$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa $y = x^2 - x$ và $y = x$ là:

$$x^2 - x = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

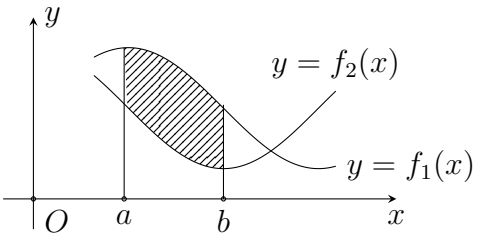
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và $y = x$ bằng

$$\int_0^2 |x^2 - x - x|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 |x^2 - 2x|\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 107.

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên và các đường thẳng $x = a; x = b$. Thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi S quay quanh trục Ox được tính bởi công thức nào sau đây?



A. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)]\mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x$.

C. $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)]\mathrm{d}x$.

D. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)]\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 108. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/ s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0.2 m. **B.** 2 m. **C.** 10 m. **D.** 20 m.

Lời giải.

Khi dừng hẳn thì vận tốc lúc đó bằng không nên thời gian ô tô chạy được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$0 = -5t + 10 \text{ hay } t = 2.$$

Quảng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t\right)\Big|_0^2 = 10\,\mathrm{m}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 109. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 6\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 9$. Tính S.

A. $S = 234$. **B.** $S = 104$. **C.** $S = 208$. **D.** $S = 52$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm là $S = 6\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{x^3}\Big|_1^9 = 104.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 110. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 12\pi$.

A. $V = \pi\displaystyle\int_0^{12\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi^2\displaystyle\int_0^{12\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi^2\displaystyle\int_0^{12\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\displaystyle\int_0^{12\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức SGK, ta có $V = \pi\displaystyle\int_0^{12\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 111. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = 6x^2$ và $y = 6x$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = \dfrac{1}{2}$. **D.** $S = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số là $6x^2 = 6x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. Diện tích cần tìm là

$$S = \int_0^1 |6x^2 - 6x|\,\mathrm{d}x = 6\left|\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(2x^3 - 3x^2\right)\Big|_0^1\right| = 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 112. Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox, biết (H) được giới hạn bởi các đường $y = 4x^2 - 1$, $y = 0$.

A. $\dfrac{8\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $V = \pi\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (16x^4 - 8x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{16}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{8\pi}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 113. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** 13. **C.** $\dfrac{37}{12}$. **D.** $\dfrac{81}{12}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Khi đó ta có $S=\displaystyle\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x.$

Ta có $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|=\frac{8}{3}.$

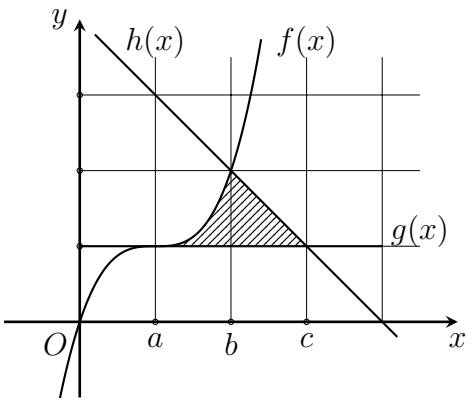
Và $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{5}{12}.$

Suy ra $S=\dfrac{37}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 114.

Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) giới hạn bởi đồ thị 3 hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ như hình bên, bằng kết quả nào sau đây.



A. $S=\displaystyle\int\limits_{a}^{c}\left|f(x)-g(x)\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left|g(x)-h(x)\right|\,\mathrm{d}x.$

B. $S=\displaystyle\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left[g(x)-h(x)\right]\,\mathrm{d}x.$

C. $S=\displaystyle\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x-\int\limits_{b}^{c}\left[g(x)-h(x)\right]\,\mathrm{d}x.$

D. $S=\displaystyle\int\limits_{a}^{c}\left[f(x)+h(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Diện tích miền tích phân được chia thành hai phần. Phần 1 với x nằm trong khoảng a đến b và phần 2 với x nằm trong khoảng b đến c.

$$\begin{aligned}V&=\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left|h(x)-g(x)\right|\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}\left[h(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x-\int\limits_{b}^{c}\left[g(x)-h(x)\right]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 115. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=x$ xoay quanh trục Ox bằng

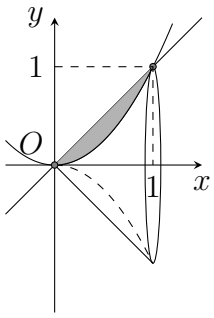
A. $\pi\displaystyle\int\limits_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{0}^{1}x^4\,\mathrm{d}x.$

B. $\pi\displaystyle\int\limits_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_{0}^{1}x^4\,\mathrm{d}x.$

C. $\pi \displaystyle\int_0^1 \left(x^2-x\right)^2 \mathrm{d}x$. **D.** $\pi \displaystyle\int_0^1 \left|x^2-x\right| \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2=x \Leftrightarrow \hoac{x=0\\x=1.}$



Từ đồ thị ta suy ra thể tích khối tròn xoay tạo thành là

$$V=\pi \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x-\pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x=\pi \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x-\pi \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 116. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y=x^2-4x+3$ và trục Ox.

A. $\dfrac{4}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \hoac{x=1\\x=3.}$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $\displaystyle\int_1^3 \left|x^2-4x+3\right| \mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

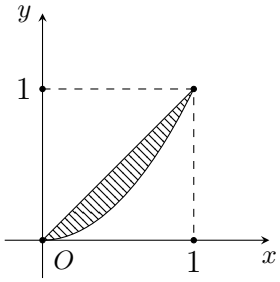
Câu 117. Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x$, $y=x^2$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=x$ và $y=x^2$ là các điểm có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\heva{y=x\\y=x^2} \Leftrightarrow \hoac{y=x=1\\y=x=0.}$$



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x$, $y=x^2$ bằng

$$\int_0^1 \left|x-x^2\right| \mathrm{d}x=\int_0^1 \left(x-x^2\right) \mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

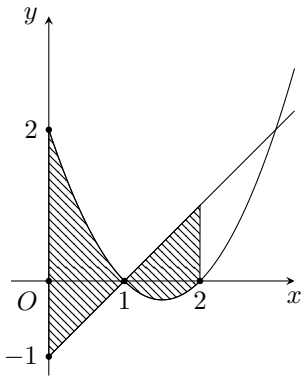
Chọn đáp án B □

Câu 118. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^2-3x+2$, $y=x-1$, $x=0$, $x=2$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^2-3x+2$, $y=x-1$, $x=0$, $x=2$ bằng



$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \left|(x^2-3x+2)-(x-1)\right| \mathrm{d}x\\
=&\int_0^2 \left|x^2-4x+3\right| \mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 \left(x^2-4x+3\right) \mathrm{d}x+\int_1^2 \left(-x^2+4x-3\right) \mathrm{d}x\\
=&\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^2=2.
\end{aligned}$$

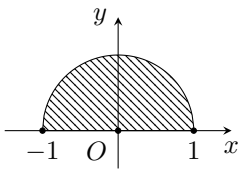
Chọn đáp án A ☐

Câu 119. Khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{1-x^2}$ quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{1-x^2}$ quanh trục Ox ta được khối tròn xoay là hình cầu tâm O và bán kính $R=1$.
Do đó thể tích của khối tròn xoay là $\frac{4\pi}{3}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 120. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ.

A. $2\ln\frac{3}{2}-1$. **B.** $5\ln\frac{3}{2}-1$. **C.** $3\ln\frac{5}{2}-1$. **D.** $3\ln\frac{3}{2}-1$.

Lời giải.

Xét $x=0\Rightarrow y=-2$.
Xét $y=0\Rightarrow x=-1$.
Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ là

$$S=\int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\mathrm{d}x.$$

Vì biểu thức $\frac{x+1}{x-2}$ không đổi dấu trên miền $[-1;0]$ nên

$$S=\left|\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{x-2}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left(x+3\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0}=|1+3(\ln 2-\ln 3)|=3\ln\frac{3}{2}-1.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 121. Gọi $\mathscr{H}$ là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình $\mathscr{H}$ xung quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{4}{3}$. **B.** $V=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{3}{4}$. **C.** $V=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$. **D.** $V=\pi\ln\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{2}\ln|4-x^2|\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

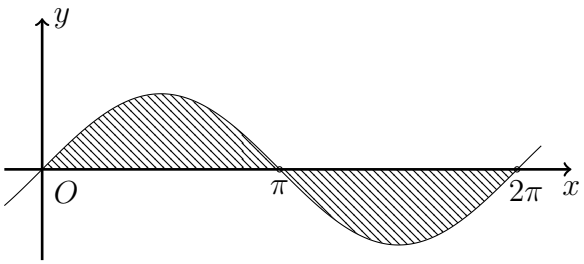
Câu 122. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sin x; y=0; x=0$ và $x=2\pi$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng được tính bởi

$I=2\displaystyle\int\limits_0^{\pi}(\sin x-0)\,\mathrm{d}x=2\,(-\cos x)|_0^{\pi}=4.$



Chọn đáp án C □

Câu 123. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y=x^4-x+2$ và $y=x^2-x+2$ là.

A. $-\dfrac{4}{15}$. **B.** $\dfrac{2}{15}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{4}{15}$.

Lời giải.

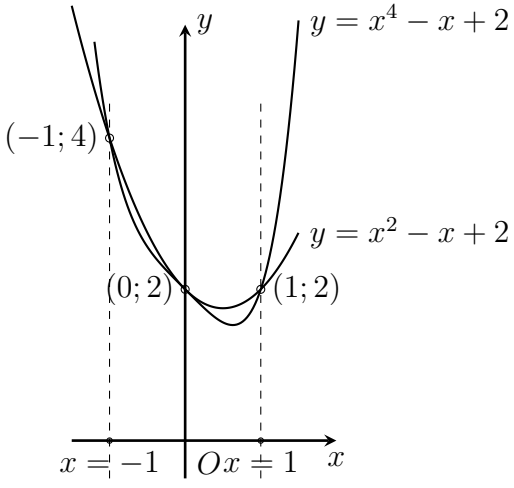
Phương trình hoành độ giao điểm là

$x^4-x+2=x^2-x+2\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow x=0; x=\pm1.$

Diện tích phẳng giới hạn bởi hai đường là

$I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}\left[(x^2-x+2)-(x^4-x+2)\right]\mathrm{d}x+$

$\displaystyle\int\limits_0^{1}\left[(x^2-x-2)-(x^4-x+2)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{2}{15}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{4}{15}.$



Chọn đáp án D □

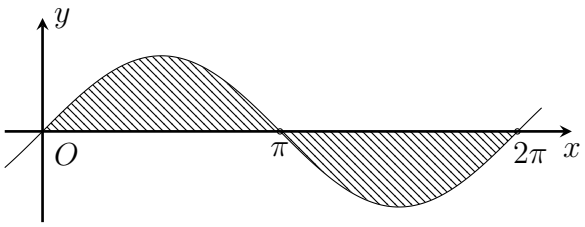
Câu 124. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x$; $y=0$;$x=0$;$x=2\pi$ xoay quanh trục Ox là

A. π^2. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Thể tích là

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad V &= 2\pi \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \pi^2. \end{aligned}$$



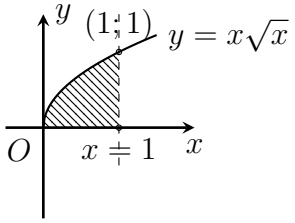
Chọn đáp án A □

Câu 125. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x}; y = 0; x = 0; x = 1$ xoay quanh trục Ox là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{5}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Thể tích là $V = \pi \int_0^1 (x\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x)^3 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.



Chọn đáp án B □

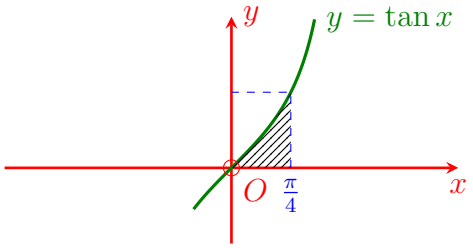
Câu 126. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x; Ox; x = 0; x = \frac{\pi}{4}$. Quay (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\pi - \frac{\pi^2}{4}$. **B.** $1 - \frac{\pi}{4}$. **C.** π^2. **D.** $\frac{\pi^2}{4} - \pi$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \mathrm{d}x = \pi \left(\tan x - x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$



Chọn đáp án B □

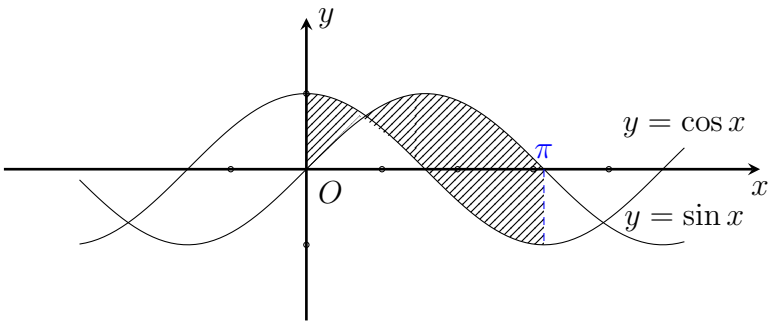
Câu 127. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0; x = \pi$ và đồ thị $y = \sin x; y = \cos x$ được tính bởi biểu thức

A. $S = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$. **B.** $S = \left|\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) \,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S = \int_0^{\pi} |\cos x| \,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Sử dụng công thức của tích phân về diện tích ta có $S = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| \, \mathrm{d}x$.



Chọn đáp án D □

Câu 128. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 4x$, Ox, $x = -3$, $x = 4$.

A. 36. **B.** 44. **C.** $\frac{201}{4}$. **D.** $\frac{119}{4}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng (H) được tính bởi tích phân $I = \int_{-3}^{4} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x = \int_{-3}^{4} |x(x-2)(x+2)| \, \mathrm{d}x = -\int_{-3}^{-2} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} (x^3 - 4x)\mathrm{d}x = \frac{201}{4}$.

Chọn đáp án C □

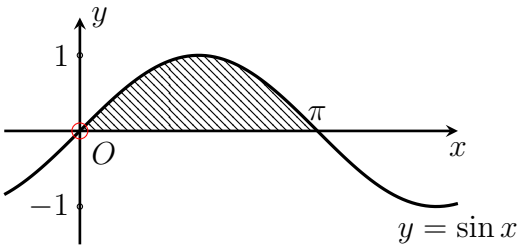
Câu 129. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sin x$; Ox; $x = 0$; $x = \pi$. Quay (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. π^2. **B.** 2π. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay khi ta quay hình (H) quanh trục Ox được tính bởi biểu thức

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng các từ điểm $A(1;-2;-1)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$ là

A. $\frac{\sqrt{11}}{3}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm $A(1;-2;-1)$ đến mặt phẳng (P) là $d(A,P) = \frac{|\,2.1 - (-2) + 2.(-1) - 5\,|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 131. Với giá trị nào của $m > 0$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2$ và $y = mx$ bằng $\frac{4}{3}$?

A. $m = 1$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = mx \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = m$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên được tính bởi $\int_0^m \left|x^2 - mx\right| \mathrm{d}x = \int_0^m \left(mx - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{m^3}{6} = \frac{4}{3}$. Từ đó ta tìm

được $m = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 132. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 + 5x + 6, Ox, x = 0, x = 2$ là

A. $\frac{56}{3}$. **B.** $\frac{52}{3}$. **C.** $\frac{55}{3}$. **D.** $\frac{58}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của hình giới hạn bởi các đường đã cho được tính bởi biểu thức $\int_0^2 \left|-x^2 + 5x + 6\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 |(x+1)(x-6)| \,\mathrm{d}x = -\int_0^2 (x+1)(x-6)\mathrm{d}x = \frac{58}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 133. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $0 < g(x) < f(x), \forall x \in [a;b]$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$. Khi đó V được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] \mathrm{d}x$.

C. $V = \left(\pi \int_a^b [f(x) - g(x)] \,\mathrm{d}x\right)^2$. **D.** $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta cần nhớ lại công thức sau: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó thể tích của vật thể tròn xoay giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x)$ (với $0 < g(x) < f(x)$) và hai đường thẳng $x = a; x = b$ khi quay quanh trục Ox là $\pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 134. Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi $(C): y = 3x^4 - 4x^2 + 5$; Ox; $x = 1$; $x = 2$ là

A. $\frac{212}{15}$. **B.** $\frac{214}{15}$. **C.** $\frac{213}{15}$. **D.** $\frac{43}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng (H) được tính bởi biểu thức $\int_1^2 \left|3x^4 - 4x^2 + 5\right| \mathrm{d}x = \frac{214}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 135. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$ và đồ thị (C') của hàm số $y = x^2 - x + 5$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) với đồ thị (C')

$$-2x^3 + x^2 + x + 5 = x^2 - x + 5 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{1} \left|2x^3 - 2x\right| \mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^{0} (2x^3 - 2x) \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{1} (2x^3 - 2x) \,\mathrm{d}x\right| = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 136. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 + 2$ và $y = 3x$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2+2=3x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\displaystyle\int_1^2 \left|(x^2+2)-3x\right| \mathrm{d}x=\left|\int_1^2 \left(x^2-3x+2\right) \mathrm{d}x\right|=\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=a$ và $x=b$ $(a<b)$. Gọi $f(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x, với $a \leq x \leq b$. Biết hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khi đó thể tích V của vật thể (H) được cho bởi công thức

A. $V=\pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi \displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. **C.** $V=\displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

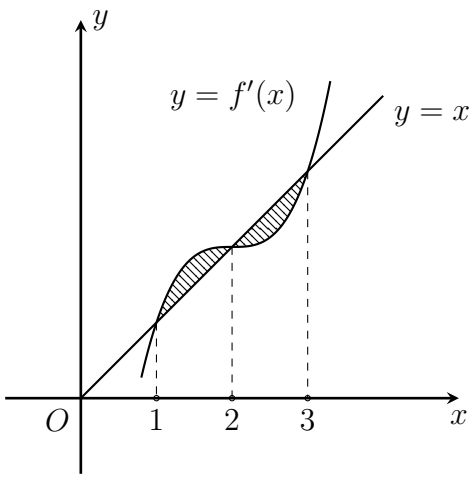
Chú ý rằng $f(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x, với $a \leq x \leq b$, ta có $V=\displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$, không phải $V=\pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 138.

Cho hàm $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x$ (phần gạch chéo trong hình vẽ bên). Diện tích hình (H) bằng

A. $2f(2)-f(1)-f(3)+1$. **B.** $f(3)-f(1)-4$.
C. $2f(3)-f(2)-f(1)+1$. **D.** $f(1)-f(3)+4$.



Lời giải.

Diện tích phần gạch chéo

$$S=\int_1^2 [f'(x)-x] \mathrm{d}x-\int_2^3 [f'(x)-x] \mathrm{d}x=\left[f(x)-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2-\left[f(x)-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_2^3=2f(2)-f(1)-f(3)+1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 139. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ m/s. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

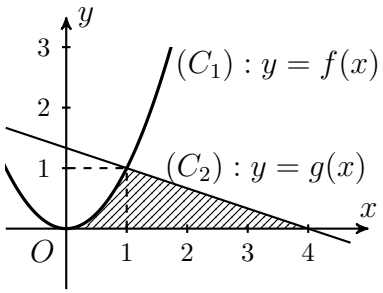
A. 20 m. **B.** 2 m. **C.** 0,2 m. **D.** 10 m.

Lời giải.

Chọn gốc thời gian lúc người lái đạp phanh. Thời điểm ô tô dừng hẳn là: $v(t)=0 \Leftrightarrow t=2$ s. Vậy quãng đường di chuyển được là $s=\displaystyle\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=0{,}2$ m.

Chọn đáp án D □

Câu 140. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường như hình vẽ (phần gạch sọc).



Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^4 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_1^4 |g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 141. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x\sqrt{x+1}$ và trục hoành.

A. $S=\dfrac{2}{15}$. **B.** $\dfrac{4}{15}$. **C.** $S=\dfrac{1}{2}$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

Xét phương trình $x\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-1$. Khi đó:

$S=\displaystyle\int_{-1}^0 \left|x\sqrt{x+1}\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2=x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	-1	0
t	0	1

$S=-\displaystyle\int_0^1 \left(t^2-1\right)t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 \left(2t^4-2t^2\right)\mathrm{d}t=-\left(\frac{2t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 142. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và $y=x$ quay quanh trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\dfrac{3\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $V=\pi$. **D.** $V=\dfrac{2\pi}{3}$.

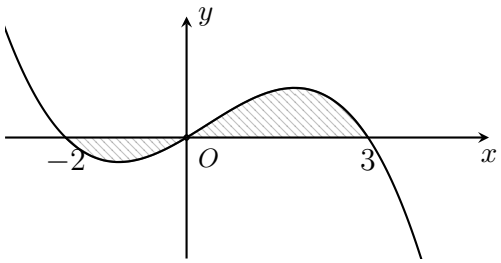
Lời giải.

Ta có: $\sqrt{x}=x \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \left|\left(\sqrt{x}\right)^2-x^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \left|x-x^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 143. Cho hàm số $y = f(x)$ (1) xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (1) và trục Ox (phần tô đen trong hình dưới). Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau



A. $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S = -\displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Dễ thấy phần tô đen được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ trục Ox hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 3$ nên có diện tích là $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 144. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x$ và $y = x^2$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $S = \displaystyle\int_{0}^{1} (x - x^2)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2 - x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \pi \displaystyle\int_{0}^{1} \left[(x^2)^2 - (x)^2\right]\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \displaystyle\int_{0}^{1} (x \cdot x^2)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vì $x > x^2$ với $0 < x < 1 \Rightarrow S = \displaystyle\int_{0}^{1} (x - x^2)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 145. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 4$.

A. $S = 7$. **B.** $S = 17$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 8$.

Lời giải.

Diện tích $S = \displaystyle\int_{1}^{4} |2x|\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_{1}^{4} = 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 146. Tính thể tích V khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quay quanh trục Ox.

A. $V = 22\pi$. **B.** $V = 20\pi$. **C.** $V = 18\pi$. **D.** $V = 3\pi$.

Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^3 (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 18\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 147. Tính thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quay quanh trục Ox.

A. $V = 4\pi$. **B.** $V = 16\pi$. **C.** $V = \pi^2$. **D.** $V = 8\pi$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 148. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Viết công thức tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

A. $S = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \pi \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

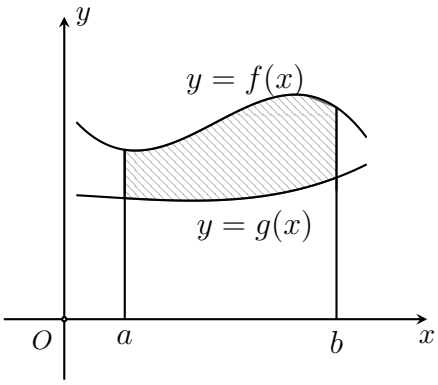
Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 149. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ (có đồ thị như hình vẽ). Gọi H là hình phẳng được tô đậm trong hình, khi quay H quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích V. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A. $V = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \displaystyle\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,\mathrm{d}x$.



Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 150. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{x}; y=0; x=1$ và $x=2$.

A. $\pi \ln 2$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\pi\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\pi\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 151. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x+1; y=0; x=0$ và $x=1$.

A. $\dfrac{7\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Thể tích $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}(x+1)=\dfrac{1}{3}\pi(x+1)^3\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{3}\left(2^3-1\right)=\dfrac{7\pi}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 152. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x; y=x; x=0$ và $x=3$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{27}{2}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{29}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2-2x=x\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=3\end{array}\right.$.

Diện tích cần tìm là $S=\displaystyle\int\limits_0^3 |x^2-3x|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 (3x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3=\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 153. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$, $y=x-1$ và $x=\mathrm{e}$.

A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1)}{2}$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x-1+\dfrac{\ln x}{x}=x-1\Leftrightarrow x=1$. Do đó diện tích hình phẳng là

$$\begin{aligned} S&=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left|\left(x-1+\dfrac{\ln x}{x}\right)-(x-1)\right|\,\mathrm{d}x\\ &=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 154. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$ và $y=2x^2+3x-1$.

A. $\dfrac{105}{2}$. **B.** $\dfrac{195}{2}$. **C.** $\dfrac{125}{3}$. **D.** $\dfrac{125}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+3=2x^2+3x-1 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1, x=-4$.

Diện tích cần tính là $S=\displaystyle\int_{-4}^{1}\left|(2x^2+3x-1)-(x^2+3)\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)\,\mathrm{d}x=\frac{125}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 155. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và các đường $y=\sqrt{x+1}$; $y=-2x+8$.

A. $\frac{17}{3}$. **B.** $\frac{19}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{37+10\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=y^2-1\ (y\geq 0)$ và $y=-2x+8 \Leftrightarrow x=-\frac{y}{2}+4$, trục $Ox: y=0$.

Phương trình tung độ giao điểm: $y^2-1=-\frac{y}{2}+4 \Rightarrow y=2\ (\geq 0)$.

Diện tích cần tính là $S=\displaystyle\int_{0}^{2}\left|(y^2-1)-\left(-\frac{y}{2}+4\right)\right|\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{2}\left(-y^2-\frac{y}{2}+5\right)\,\mathrm{d}y=\frac{19}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 156. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\tan^2 x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=\frac{\pi}{4}$.

A. $S=\pi-\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $S=1-\frac{\pi}{4}$. **C.** $S=1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $S=\pi+\frac{\pi^2}{4}$.

Lời giải.

Diện tích S được tính theo công thức $S=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=(\tan x-x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 157. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{4}\pi$. **B.** $V=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

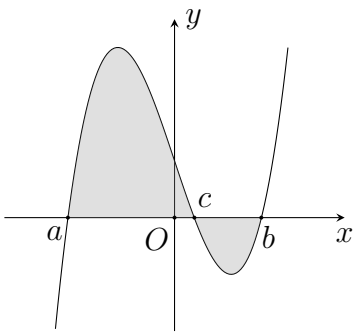
Lời giải.

Thể tích cần tính là $V=\pi\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{4}\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 158.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ a, b, c với $c\in(a;b)$ như hình bên. Đặt $m=\displaystyle\int_{a}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x$, $n=\int_{c}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành (phần tô đậm) bằng bao nhiêu?



A. $m+n$. **B.** $-m-n$. **C.** $m-n$. **D.** $n-m$.

Lời giải.

Ta có diện tích phần tô đậm bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= m - n. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 159. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ và trục Ox.

A. $S = \dfrac{9}{4}$. **B.** $S = \dfrac{9}{8}$. **C.** $S = \dfrac{9}{2}$. **D.** $S = \dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\begin{aligned} S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3 - 3x|\,\mathrm{d}x &= \int_{-\sqrt{3}}^{0} |x^3 - 3x|\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} |x^3 - 3x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 160. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $x = 4$, trục Ox quay quanh trục Ox.

A. $V = 8\pi$. **B.** $V = 4\pi$. **C.** $V = 16\pi$. **D.** $V = 8\pi^2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ cắt trục Ox tại hoành độ $x = 0$. Vậy

$$V = \pi \int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

Chọn đáp án A □

Câu 161. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. 500 (m). **B.** 2000 (m). **C.** $\dfrac{4000}{3}$ (m). **D.** $\dfrac{2500}{3}$ (m).

Lời giải.

Ta có $v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 10 & \text{(thỏa mãn)} \\ t = -20 & \text{(loại).} \end{array}\right.$

Như vậy khi máy bay chuyển động được 10 giây thì cất cánh.

Quãng đường máy bay di chuyển được tính theo công thức $S(t) = \displaystyle\int (t^2 + 10t)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + 5t^2$.

Quãng đường máy bay di chuyển trên đường băng là $S = \dfrac{10^3}{3} + 5 \times 10^2 = \dfrac{2500}{3}$ (m).

Chọn đáp án D □

Câu 162. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y = x^2 - 2x$, trục Ox, 2 đường thẳng $x = 0, x = 2$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng được tính theo công thức

$$S = \int_0^2 \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 163. Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45 m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

A. 5 m. **B.** 6 m. **C.** 4 m. **D.** 3 m.

Lời giải.

Khi xe dừng hẳn thì

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Quãng đường xe đi được kể từ khi đạp phanh đến lúc dùng lại là

$$S = \int_0^4 (-5t + 20)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right)\Big|_0^4 = 40.$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn $45-40=5$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 164. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x, x=\mathrm{e}, x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ và trục hoành.

A. $S=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (đvdt). **B.** $S=2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ (đvdt). **C.** $S=2+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ (đvdt). **D.** $S=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (đvdt).

Lời giải.

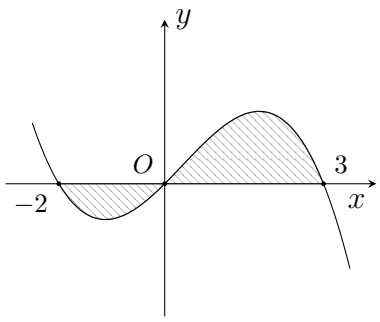
Diện tích cần tính bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} |\ln x|\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{\mathrm{e}} \\ &= 1-\frac{2}{\mathrm{e}}+1+\mathrm{e}-\mathrm{e}+1 = 2-\frac{2}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 165.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ (như hình vẽ). Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình dưới) là



A. $S=\displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{3}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Trên đoạn $[-2;0]$ thì $f(x)\le 0$ và trên đoạn $[0;3]$ thì $f(x)\ge 0$ nên

$$S=-\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{-2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$$

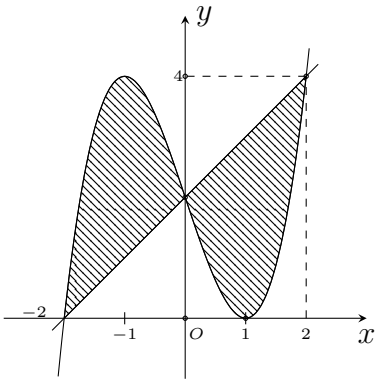
Chọn đáp án A □

Câu 166. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ và đường thẳng $y=x+2$ bằng bao nhiêu?

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $x^3-3x+2=x+2 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$



Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} |x^3-4x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} |x^3-4x|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |x^3-4x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} \left(x^3-4x\right)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} \left(x^3-4x\right)\,\mathrm{d}x = 8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 167. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-3x$, $y=0$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

A. $\dfrac{81\pi}{10}$. **B.** $\dfrac{85\pi}{10}$. **C.** $\dfrac{81}{10}$. **D.** $\dfrac{41\pi}{10}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3. \end{array}\right.$

Thể tích khối (H) cho bởi công thức $V=\pi\displaystyle\int_0^3 (x^2-3x)^2\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5}-\frac{6x^4}{4}+3x^3\right)\Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 168. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ bằng

A. $2\ln\dfrac{3}{2}-1$. **B.** $5\ln\dfrac{3}{2}-1$. **C.** $3\ln\dfrac{3}{2}-1$. **D.** $3\ln\dfrac{5}{2}-1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và trục hoành: $\dfrac{x+1}{x-2}=0\ (x\neq 2) \Leftrightarrow x=-1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ bằng:

$$\int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\,\mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^{0}\frac{x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x\right| = \left|(x+3\ln|x-2|)\Big|_{-1}^{0}\right| = \left|1+3\ln\frac{2}{3}\right| = -1-3\ln\frac{2}{3} = 3\ln\frac{3}{2}-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 169. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+3x^2-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

A. $S=\dfrac{5}{2}$. **B.** $S=\dfrac{3}{2}$. **C.** $S=\dfrac{7}{2}$. **D.** $S=4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành $-x^3+3x^2-2=0 \Leftrightarrow \hoac{x=1\\x=1\pm\sqrt{3}.}$

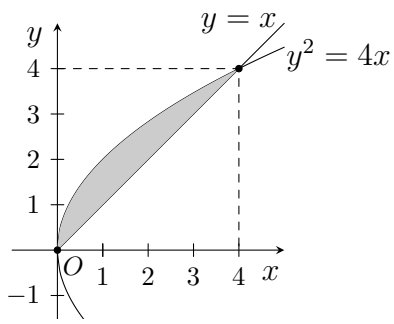
Diện tích cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right)\Big|_0^1\right| + \left|\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right)\Big|_1^2\right| \\ &= \left|-\frac{5}{4}\right| + \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 170.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2=4x$ và $y=x$ (với $0\le x\le 4$) được minh họa bằng hình vẽ bên (phần tô đậm). Cho (H) quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng



A. 11π. **B.** $\dfrac{32}{3}\pi$. **C.** $\dfrac{15}{7}\pi$. **D.** 10π.

Lời giải.

$y^2=4x \Rightarrow y=2\sqrt{x}$ (xét $y\ge 0$).

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int_0^4 (2\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x=2\pi x^2\Big|_0^4-\frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^4=\frac{32}{3}\pi.$$

Chọn đáp án B □

Câu 171. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là

A. $3-\ln 2$. **B.** $3-2\ln 2$. **C.** $3+2\ln 2$. **D.** $3+\ln 2$.

Lời giải.

Cho $\dfrac{x+1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-1}^2 \left|\frac{x+1}{x+2}\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 \left(1-\frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^2=3-2\ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 172. Tính diện tích của S của hình phẳng giới hạn bởi elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a,b>0$.

A. $S=\pi\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)^2$. **B.** $S=\pi(a+b)^2$. **C.** $S=\pi ab$. **D.** $S=\dfrac{\pi a^2b^2}{a+b}$.

Lời giải.

$$S=\frac{4b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi ab.$$

Chọn đáp án C □

Câu 173. Một xe buýt bắt đầu đi từ một nhà chờ xe buýt A với vận tốc $v(t)=10+3t^2$ (m/s) (khi bắt đầu chuyển động từ A thì $t=0$) đến nhà chờ xe buýt B cách đó 175 m. Hỏi thời gian xe đi từ A đến B là bao nhiêu giây?

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 9 . **D.** 5 .

Lời giải.

Ta có

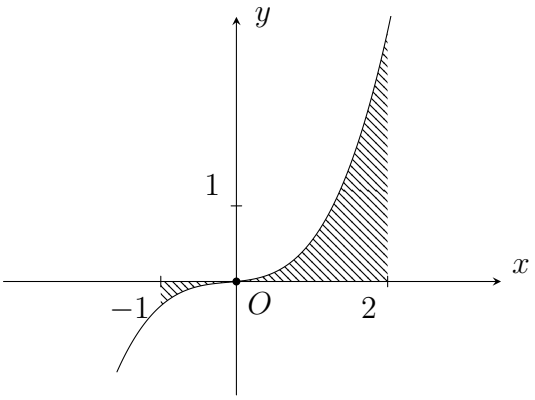
$$\begin{aligned}&\int\limits_0^b v(t)\,\mathrm{d}t=175\\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^b(10+3t^2)\,\mathrm{d}t=175\\ \Leftrightarrow\ &(10t+t^3)\big|_0^b=175\\ \Leftrightarrow\ &10b+b^3=175\\ \Leftrightarrow\ &b=5.\end{aligned}$$

Vậy xe đi từ A đến B mất 5 giây.

Chọn đáp án D □

Câu 174.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\displaystyle\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x, b=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=b-a$. **B.** $S=b+a$.

C. $S=-b+a$. **D.** $S=-b-a$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng

$$S=\int\limits_{-1}^2|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-a+b.$$

Chọn đáp án A □

Câu 175. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 - 1$(đvdt). **B.** $S = 2\ln 2 - 1$(đvdt).

C. $S = 2\ln 2 - 1$(đvdt). **D.** $S = \ln 2 + 1$(đvdt).

Lời giải.

Ta có hoành độ giao điểm của (H) với Ox là $x = 1$.

Trục Oy có phương trình $x = 0$.

Vậy $S = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \mathrm{d}x = \left|\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right| = |x - 2\ln(x+1)|\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$

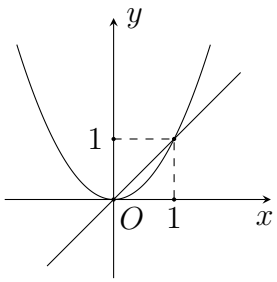
Chọn đáp án C □

Câu 176. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = x^2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\dfrac{2\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{25}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$



Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

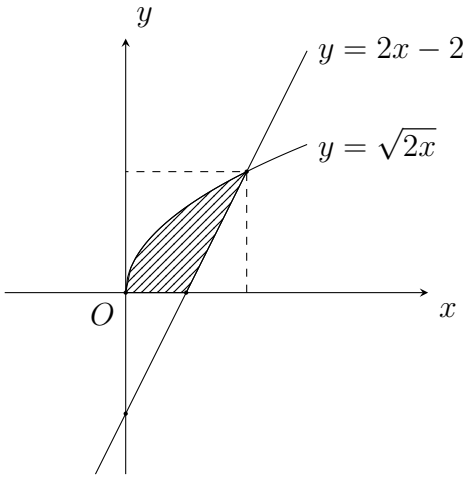
Câu 177. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đường cong $y = \sqrt{2x}$ và đường thẳng $y = 2x - 2$ là

$$\sqrt{2x} = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 2.$$



Đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ cắt Ox tại điểm $(1; 0)$.

Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_0^1 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\sqrt{2x} - 2x + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 178. Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ và $y = x^2 + x - 4$.

A. $S = \dfrac{253}{12}$. **B.** $S = \dfrac{125}{12}$. **C.** $S = \dfrac{16}{3}$. **D.** $S = \dfrac{63}{4}$.

Lời giải.

Ta thấy $x^3 - 3x^2 = x^2 + x - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \hoac{x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4.}$

Khi đó $S = \left| \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 4x^2 - x + 4\right) \mathrm{d}x \right| + \left| \displaystyle\int_{1}^{4} \left(x^3 - 4x^2 - x + 4\right) \mathrm{d}x \right| = \dfrac{16}{3} + \dfrac{63}{4} = \dfrac{253}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 179. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox của hình giới hạn bởi đường thẳng $y = 1 - x^2$ và Ox.

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 180. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$.

Vậy $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} \left|(x^2 - 2x) - (2x^2 - x - 2)\right| \mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 181. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 1)\mathrm{e}^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}^4}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^4}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^4}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^4}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x - 1)e^{2x}$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$(x - 1)\mathrm{e}^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |(x-1)\mathrm{e}^{2x}|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) \\ &= \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 182. Một khối cầu có bán kính 5 dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng song song và vuông góc với bán kính, hai mặt phẳng đó đều cách tâm của khối cầu 3 dm để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được (coi độ dày của bề mặt không đáng kể).

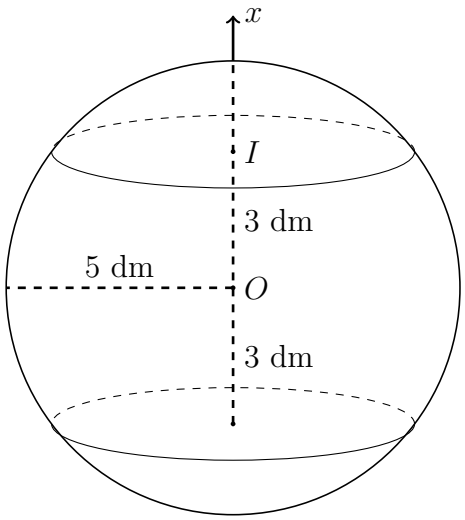
A. 132π dm^3. **B.** 41π dm^3. **C.** $\dfrac{100}{3}\pi$ dm^3. **D.** 43π dm^3.

Lời giải.

Đặt trục tọa độ như hình vẽ. Thể tích cái được tính bằng cách cho đường tròn có phương trình $x^2+y^2=25 \Leftrightarrow y^2=25-x^2$ quay quanh trục Ox.

Thể tích cái lu bằng

$$V = \pi\int_{-3}^{3}(25-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi(25x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{3} = 132\pi \text{ dm}^3.$$



Chọn đáp án A □

Câu 183. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}x-2}{x+3}=a$ là một số thực. Khi đó giá trị của a^2 bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

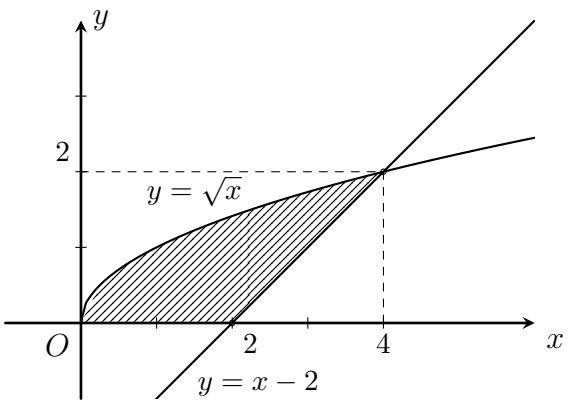
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}\Rightarrow a^2=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 184.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Quay (H) xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

A. $\dfrac{10\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có

$$V_{(H)}=\pi\int\limits_0^4(\sqrt{x})^2\ \mathrm{d}x-\pi\int\limits_2^4(x-2)^2\ \mathrm{d}x=\frac{16\pi}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 185. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\displaystyle\int\limits_1^2(x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

B. $V=\displaystyle\int\limits_1^2(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.

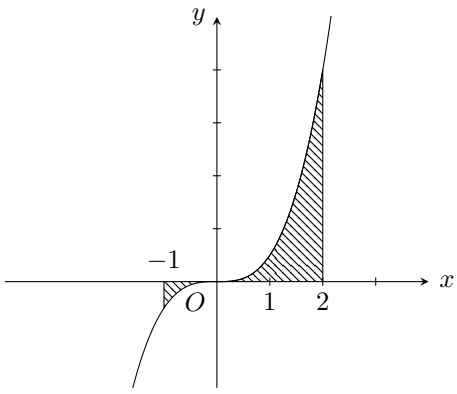
D. $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2(x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 186. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (như hình vẽ bên dưới). Đặt $a=\displaystyle\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$. **B**. $S = b + a$. **C**. $S = -b + a$. **D**. $S = -b - a$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -a + b.$

Chọn đáp án A □

Câu 187. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ là $V = \pi(a + be)$. Tính $a + b$.

A. 3. **B**. -1. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $V = \pi \displaystyle\int_{1}^{e} \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{x}\ln x\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$$V = \pi \left[x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^e x \cdot \frac{2}{x} \cdot \ln x\,\mathrm{d}x \right] = \pi \left(\mathrm{e} - 2\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x \right)$$

Đặt $\begin{cases} u_1 = \ln x \\ \mathrm{d}v_1 = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_1 = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v_1 = x \end{cases}$

$$V = \pi \left[\mathrm{e} - 2\left(x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^e \mathrm{d}x \right) \right] = \pi\left[\mathrm{e} - 2(\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1)\right] = \pi(\mathrm{e} - 2)$$

Vậy $a = -2; b = 1$ nên $a + b = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 188. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{16}{15}$. **B**. $\dfrac{4\pi}{3}$. **C**. $\dfrac{16\pi}{15}$. **D**. $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay bằng

$$V=\pi\int\limits_1^3(x^2-4x+3)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^3(x^4-8x^3+22x^2-24x+9)\,\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án C □

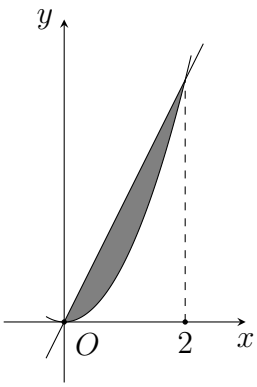
Câu 189. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=2x$.

A. $S=\dfrac{5}{3}$ (đvdt). **B.** $S=\dfrac{14}{3}$ (đvdt). **C.** $S=\dfrac{20}{3}$ (đvdt). **D.** $S=\dfrac{4}{3}$ (đvdt).

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$$



Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 190. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P)\colon y=x^2-4x+5$ và các tiếp tuyến với (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$.

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{9}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$y'=2x-4\Rightarrow y'(1)=-2$ và $y'(4)=4$.

Tiếp tuyến của (P) tại điểm A và B lần lượt là $d:y=-2x+4$ và $d':y=4x-11$.

d và d' cắt nhau tại điểm $M\left(\dfrac{5}{2};-1\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_1^{\frac{5}{2}}\left|x^2-4x+5-(-2x+4)\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{5}{2}}^4\left|x^2-4x+5-(4x-11)\right|\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_1^{\frac{5}{2}}(x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{5}{2}}^4(x^2-8x+16)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 191. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{32\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{64\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{21\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0$ và $x=2$.

Thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left|\left(x^2\right)^2-(2x)^2\right|\,\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 192. Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0, x=1, y=0, y=5x^4+3x^2+3$. Diện tích hình M bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng M là:

$$S_M = \int_0^1 (5x^4+3x^2+3)\,\mathrm{d}x = (x^5+x^3+3x)\Big|_0^1 = 5.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 193. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^2$ và $y=|x-2|$ bằng

A. $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{21}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=|x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=x-2 \\ x^2=-x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$ Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và $|x-2|$ là

$$S=\int_{-2}^{1}|x^2-|x-2||\,\mathrm{d}x=\left|\int_{-2}^{1}(x^2-|x-2|)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-2}^{1}[x^2-(-x+2)]\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|=\frac{9}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 194. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ bằng

A. $2\ln\frac{3}{2}-1$. **B.** $5\ln\frac{3}{2}-1$. **C.** $3\ln\frac{3}{2}-1$. **D.** $3\ln\frac{5}{2}-1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và trục hoành

$$\frac{x+1}{x-2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\neq 0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ là

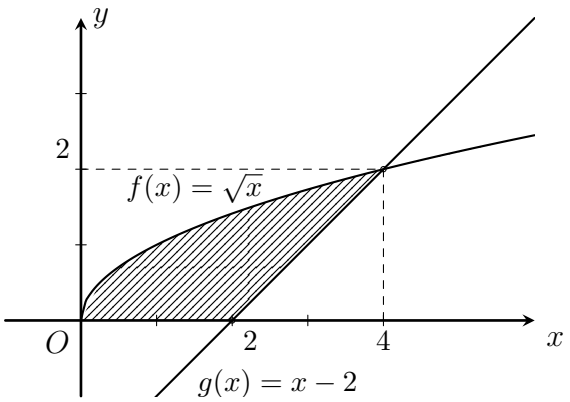
$$\begin{aligned} S&=\int_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{x-2}\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=-\left(x+3\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &=-1-3\ln\frac{2}{3}=3\ln\frac{3}{2}-1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 195.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.



Lời giải.

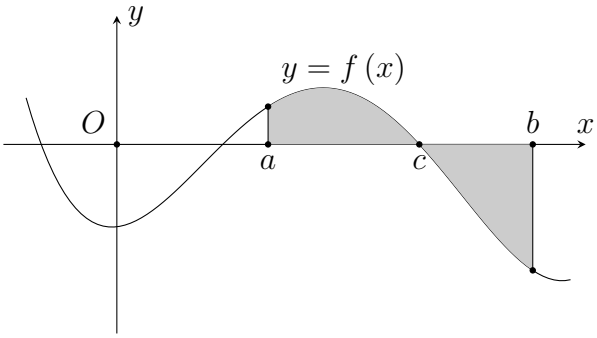
Dựa vào đồ thị, ta có

$$S_{(H)}=\int\limits_0^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4\left|\sqrt{x}-(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right)\Big|_2^4=\frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 196.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c\in[a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=0$, $x=a$, $x=b$ (phần tô đậm như ở hình bên). Mệnh đề nào sau đây sai?



A. $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a;c]$ và $f(x)\leqslant 0$, $\forall x\in[c;b]$ nên diện tích hình phẳng là

$$S=\int\limits_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra các phương án A, B, C đúng. Phương án còn lại sai.

Chọn đáp án D □

Câu 197. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $S=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $S=\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $S=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $S=\pi$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (H) với trục Ox là nghiệm phương trình $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó thể tích $V = \pi \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x\,\mathrm{d}(\ln x) = \pi \cdot \frac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 198. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a, x = b$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Vì $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$ nên $f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Vậy $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 199. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ và trục hoành.

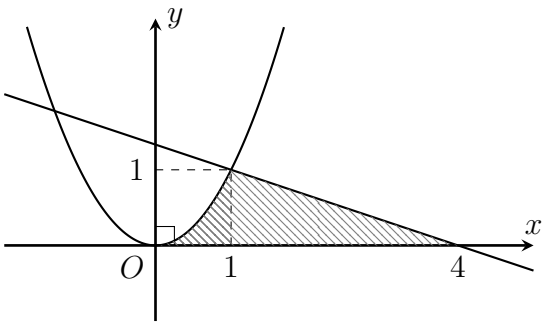
A. $\dfrac{11}{6}$.

B. $\dfrac{61}{3}$.

C. $\dfrac{343}{162}$.

D. $\dfrac{39}{2}$.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.\cdot$$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

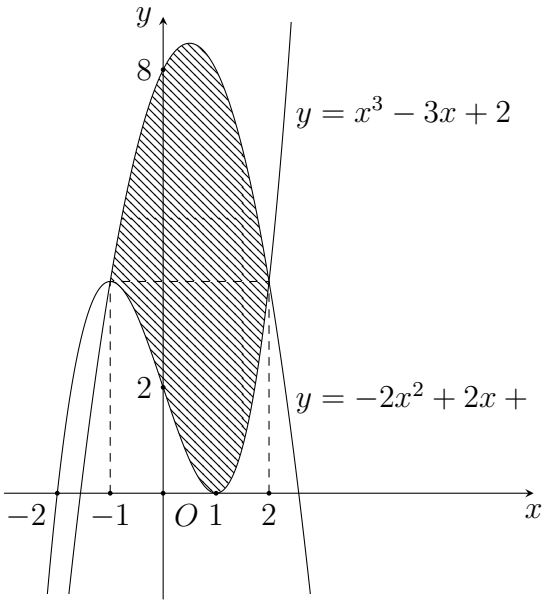
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\Big|_1^4 = \frac{11}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 200.

Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^3-2x^2+5x+6)\,\mathrm{d}x.$

B. $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-2x^2-x+10)\,\mathrm{d}x.$

C. $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3+2x^2-5x-6)\,\mathrm{d}x.$

D. $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3+2x^2-x-10)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Diện tích hình phẳng $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}[-2x^2+2x+8-(x^3-3x+2)]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(-x^3-2x^2+5x+6)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án A □

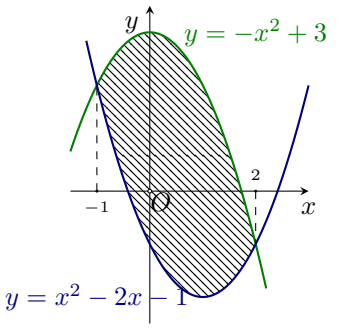
ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. A	5. D	6. A	7. C	8. B	9. D	10. B
11. A	12. D	13. D	14. A	15. C	16. B	17. B	18. C	19. A	20. B
21. A	22. C	23. B	24. A	25. A	26. A	27. A	28. C	29. C	30. D
31. C	32. C	33. B	34. D	35. D	36. C	37. D	38. C	39. D	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. A	46. C	47. B	48. A	49. A	50. A
51. C	52. C	53. B	54. A	55. D	56. D	57. A	58. D	59. A	60. B
61. C	62. A	63. D	64. B	65. C	66. B	67. D	68. D	69. C	70. D
71. B	72. D	73. B	74. A	75. D	76. B	77. D	78. B	79. D	80. C
81. C	82. A	83. B	84. D	85. A	86. B	87. A	88. B	89. A	90. D
91. D	92. B	93. A	94. B	95. C	96. C	97. D	98. D	99. A	100. B
101. D	102. A	103. A	104. A	105. A	106. C	107. A	108. C	109. B	110. A
111. A	112. A	113. C	114. C	115. A	116. B	117. B	118. A	119. A	120. D
121. A	122. C	123. D	124. A	125. B	126. B	127. D	128. C	129. D	130. B
131. C	132. D	133. B	134. B	135. C	136. B	137. C	138. A	139. D	140. A
141. B	142. B	143. A	144. A	145. C	146. C	147. D	148. B	149. D	150. B
151. A	152. A	153. B	154. D	155. B	156. B	157. A	158. C	159. C	160. A
161. D	162. B	163. A	164. B	165. A	166. C	167. A	168. C	169. A	170. B
171. B	172. C	173. D	174. A	175. C	176. A	177. A	178. A	179. B	180. A
181. D	182. A	183. B	184. B	185. C	186. A	187. B	188. C	189. D	190. A
191. B	192. A	193. C	194. C	195. A	196. D	197. B	198. C	199. A	200. A

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $\int\limits_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

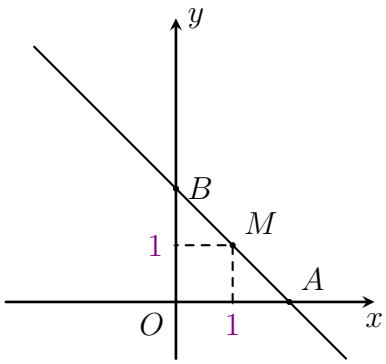
$S=\int\limits_{-1}^{2}\left[(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V. Giá trị nhỏ nhất của V bằng

A. 3π. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải.



Giả sử $A(a;0), B(0;b)$. Phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\Rightarrow d: y=-\dfrac{b}{a}x+b(1)$.

Mà $M(1;1)\in d$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow a+b=ab(2)$.

Từ (1) suy ra d có hệ số góc là $k=-\dfrac{b}{a}$, theo giả thiết ta có $-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow ab>0$.

Nếu $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$ thì $a+b<0$ mâu thuẫn với (2). Suy ra $a>0, b>0$. Mặt khác từ (2) suy ra $b=\dfrac{a}{a-1}$ kết hợp với $a>0, b>0$ suy ra $a>1$.

Khi quay ΔOAB quanh trục Oy, ta được hình nón có chiều cao $h=b$ và bán kính đường tròn đáy $r=a$.

Thể tích khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi a^2.b=\dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{a^3}{a-1}$.

Suy ra V đạt giá trị nhỏ nhất khi $\dfrac{a^3}{a-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f'(x)=2x+1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của V bằng $\dfrac{1}{3}\pi.f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9\pi}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{64\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi^2}{3}$.

Lời giải.

(E) có $a^2=4\Rightarrow a=2$. Do đó hai đỉnh thuộc trục lớn có tọa độ $A'(-2;0)$ và $(2;0)$.

Vì $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\Rightarrow y^2=1-\dfrac{x^2}{4}$.

Do đó thể tích khối tròn xoay là $V_{Ox}=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-2}^{2}\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{8\pi}{3}$.

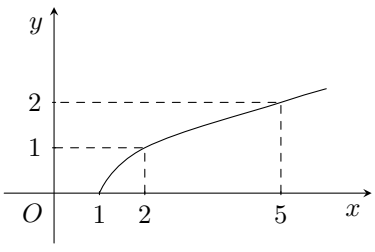
Vậy $V_{Ox}=\dfrac{8\pi}{3}$(đvtt).

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay, biết đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay có đường sinh là đồ thị hàm số $y=\sqrt{x-1}$. Tính thể tích bình cắm hoa đó.

A. 8π dm^2. **B.** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^2. **C.** $\dfrac{14\pi}{3}$ dm^3. **D.** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Lời giải.



Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm nên đáy và miệng có bán kính đáy lần lượt là 1 dm và 2 dm.

Ta có $\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x=2$ và $\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$.

Vậy thể tích bình hoa là $S=\pi\displaystyle\int_{2}^{5}(\sqrt{x-1})^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\dfrac{31\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{34\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{35\pi}{3}$.

Lời giải.

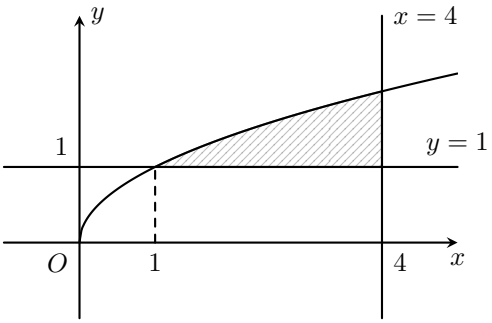
Ta có $\sqrt{4x-x^2}=0\Leftrightarrow 4x-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=4.\end{array}\right.$

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}\text{ đvtt.}$$

Chọn đáp án B □

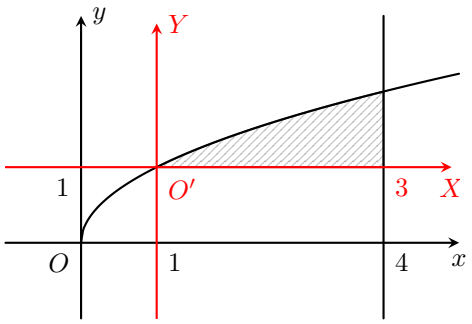
Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số sau $y=\sqrt{x}, y=1$ đường thẳng $x=4$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) khi quay quanh đường thẳng $y=1$ bằng



A. $\dfrac{9}{2}\pi$. **B.** $\dfrac{119}{6}\pi$. **C.** $\dfrac{7}{6}\pi$. **D.** $\dfrac{21}{2}\pi$.

Lời giải.

Phương pháp: Gắn hệ trục tọa độ mới. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai đồ thị số $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ khi quay quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x$.



Cách giải: Đặt $\begin{cases} X=x-1\\ Y=y-1\end{cases}$. Ta được hệ trục tọa độ OXY như hình vẽ:

Ta có: $y=\sqrt{x}\Leftrightarrow Y+1=\sqrt{X+1}\Leftrightarrow Y=\sqrt{X+1}-1$.

Thể tích cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^3\left(\sqrt{X+1}-1\right)^2\mathrm{d}X=\pi\int\limits_0^3\left(X+2-2\sqrt{X+1}\right)\mathrm{d}X$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}X^2+2X-\frac{4}{3}(X+1)\sqrt{X+1}\right)\Big|_0^3 = \pi\left[\left(\frac{9}{2}+6-\frac{32}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{7\pi}{6}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0<x<4)$ thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R=x\sqrt{4-x}$.

A. $V=\dfrac{64}{3}$. **B.** $V=\dfrac{32}{3}$. **C.** $V=\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

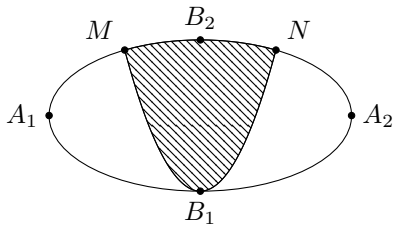
Ta có diện tích thiết diện là $S(x)=\dfrac{1}{2}\pi R^2=\dfrac{1}{2}\pi x^2(4-x)=\dfrac{1}{2}\pi\left(4x^2-x^3\right)$.

Thể tích của vật thể cần tìm là: $V=\displaystyle\int_0^4 S(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\int_0^4\left(4x^2-x^3\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8.

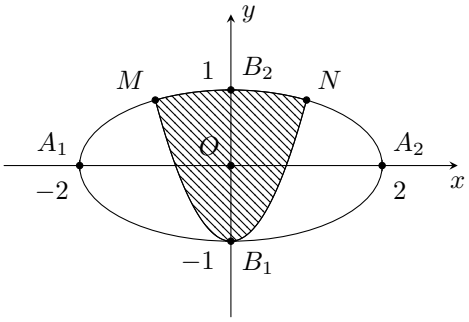
Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi Parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4$m, $B_1B_2=2$m, $MN=2$m.



A. 2.431.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của A_1A_2. Tọa độ các đỉnh $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1)$.



Phương trình đường Elip (E): $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$.

Ta có $M\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(E)$.

Parabol (P) có đỉnh $B_1(0;-1)$ và trục đối xứng là Ox nên (P) có phương trình $y=ax^2-1$, $(a>0)$, đi qua M, N.

$\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\Rightarrow(P)$ có phương trình $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm

$$S_1=2\int_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+2.$$

Đặt $x=2\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+2=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = (2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3}.$$

Diện tích hình Elip là $S = \pi ab = 2\pi$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần còn lại $S_2 = S - S_1 = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{4}{3}$.

Kinh phí sử dụng là $200000S_1 + 500000S_2 \approx 2341000$ (đồng).

Chọn đáp án A □

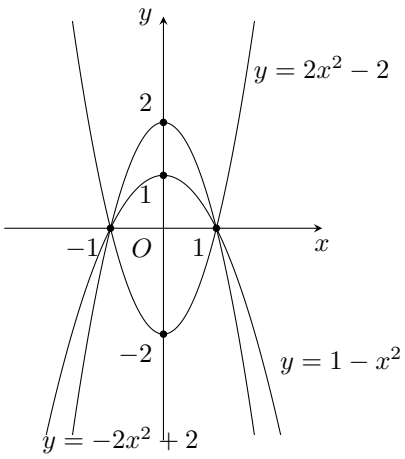
Câu 9. Cho hình phẳng D được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2-1); y = 1-x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do D quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{64\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{32}{15}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{64}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2-1)$ và $y = 1-x^2$ là

$$2(x^2-1) = 1-x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2-1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1-x^2)$.

Ta có $2(1-x^2) \geq 1-x^2, \forall x \in [-1;1]$.

Khi đó trên đoạn $[-1;2]$ phần thể tích của hàm số $y = 2(x^2-1)$ chứa cả phần thể tích của hàm số $y = 1-x^2$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi\int_{-1}^{1} \left[2(x^2-1)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{64\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau, diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\dfrac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1+x_2)^2$ bằng

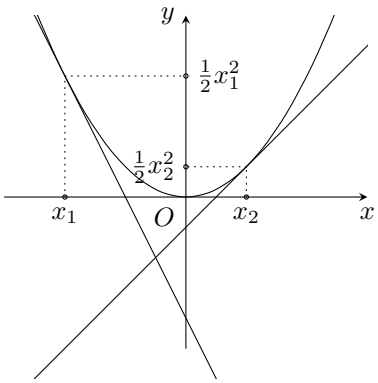
A. 7. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải.

$(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x$

Giả sử $A\left(x_1; \dfrac{1}{2}x_1^2\right); B\left(x_2; \dfrac{1}{2}x_2^2\right) \in (P)(x_1 \neq x_2)$.



Phương trình tiếp tuyến tại điểm A của (P) là $y = x_1(x - x_1) + \dfrac{1}{2}x_1^2 \Leftrightarrow y = x_1x - \dfrac{1}{2}x_1^2 (d_1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm B của (P) là $y = x_2(x - x_2) + \dfrac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow y = x_2x - \dfrac{1}{2}x_2^2 (d_2)$.

Do $(d_1) \perp (d_2)$ nên ta có $x_1x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{-1}{x_1}$.

Phương trình đường thẳng AB:

$$\begin{aligned}
&\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - \dfrac{1}{2}x_1^2}{\dfrac{1}{2}x_2^2 - \dfrac{1}{2}x_1^2} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(x - x_1)\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \left(y - \frac{1}{2}x_1^2\right)(x_2 - x_1) \\
\Leftrightarrow\ &(x - x_1)(x_2 + x_1) = 2y - x_1^2 \\
\Leftrightarrow\ &(x_1 + x_2)x - 2y - x_1x_2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)\,x - x_1x_2\right] = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)\,x + 1\right]
\end{aligned}$$

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi AB, (P) là:

$$\begin{aligned}
&S = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left((x_1 + x_2)\,x + 1 - x^2\right)dx \\
\Leftrightarrow\ &\frac{9}{4} = \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)\,\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{9}{4} = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) + (x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}\right] \\
\Leftrightarrow\ &\frac{9}{4} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\left(x_2^2 - x_1^2\right) + (x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \\
\Leftrightarrow\ &27 = 3\left(x_1x_2^2 - x_1^3 + x_2^3 - x_1^2x_2\right) + 6\,(x_2 - x_1) - 2x_2^3 + 2x_1^3 \\
\Leftrightarrow\ &27 = 3x_1x_2^2 - 3x_1x_2^2 + x_2^3 - x_1^3 + 6(x_2 - x_1) \\
\Leftrightarrow\ &27 = -3(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + 6(x_2 - x_1) \\
\Leftrightarrow\ &27 = 3(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) \\
\Leftrightarrow\ &27 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + 2\right) \\
\Leftrightarrow\ &27 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right) \\
\Leftrightarrow\ &27 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^3 \\
\Leftrightarrow\ &x_2 - x_1 = 3
\end{aligned}$$

Thay $x_2 = \dfrac{-1}{x_1}$ ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{x_1} - x_1 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & -1 - x_1^2 - 3x_1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \\ & x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-2}{-3+\sqrt{5}} \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)^2 = 5. \end{aligned}$$

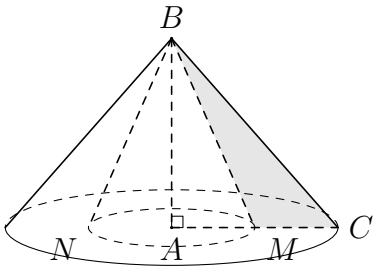
Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB = 6, AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh cạnh AB là

A. 86π. **B**. 106π. **C**. 96π. **D**. 98π.

Lời giải.

Khi quay tam giác BMC quanh cạnh AB tạo ra 2 khối tròn xoay có thể tích là: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AB - \dfrac{1}{3}\pi \cdot AM^2 \cdot AB = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$.



Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V = \dfrac{16}{15}\pi$. **B**. $V = \dfrac{16}{15}$. **C**. $V = \dfrac{4}{3}$. **D**. $V = \dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

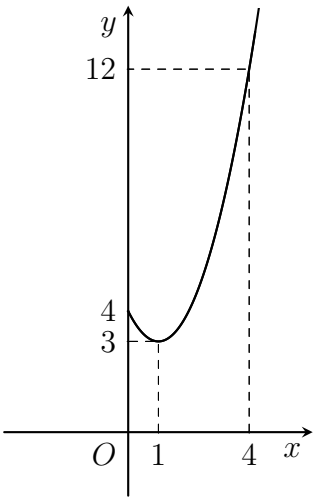
Phương trình hoành độ giao điểm là $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x = 2. \end{aligned}\right.$

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^2 (2x - 2^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) \,\mathrm{d}x = \pi \left(4\frac{x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 13.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v\,(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{50}{3}\,(km)$. **B.** $s=10\,(km)$. **C.** $s=20\,(km)$. **D.** $s=\dfrac{64}{3}\,(km)$.

Lời giải.

Ta có $v(t)=at^2+bt+c$ có dạng parabol đỉnh $I(1;3)$, đi qua điểm $A(0;4)$ và $B(4;12)$.

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ v(0)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ 0+0+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+(-2a)=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\ a=1\\ c=4.\end{cases}$$

Do đó $v(t)=t^2-2t+4$.

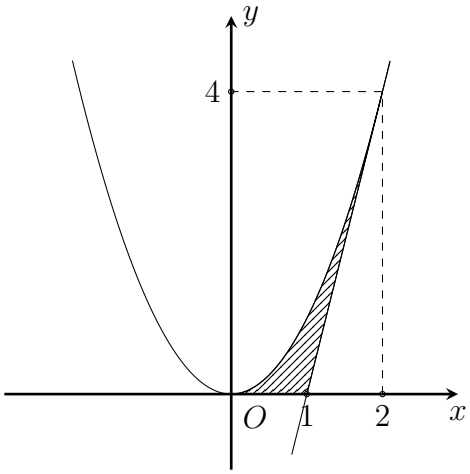
Quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát được tính như sau

$$s=\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^4\left(t^2-2t+4\right)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t\right)\Big|_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-4^2+4.4\right)-0=\frac{64}{3}\,(\text{km}).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14.

Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một parabol và một đường thẳng tiếp xúc với parabol đó tại điểm $A(2;4)$ như hình vẽ bên dưới. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{22\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có phương trình Parabol là $y=x^2$

Phương trình tiếp tuyến với Parabol tại A là $y=4x-4$

$$V_H=\pi\left[\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^4-(4x-4)^2\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{16\pi}{15}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều và sau đúng 4 giây thì ô tô bắt đầu dừng hẳn. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô

dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 20. **B**. 50. **C**. 40. **D**. 30.

Lời giải.

Từ khi người lái đạp phanh ô tô chuyển động chậm dần đều ta có $v = 20 + at$ với a là gia tốc của ô tô. Sau 4 giây thì ô tô dừng hẳn nên $20 + a \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow a = -5$.

Quảng đường xe đi được là $S = \displaystyle\int_0^4 (20 - 5t)\,\mathrm{d}t = \left(20t - \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^4 = 40.$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 8)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = \ln\dfrac{9}{2}$. **B**. $k = \ln 4$. **C**. $k = \dfrac{2}{3}\ln 4$. **D**. $k = \ln 5$.

Lời giải.

$S_1 = \displaystyle\int_0^k \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^k - 1$, $S_2 = \displaystyle\int_k^{\ln 8} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 8 - \mathrm{e}^k$. Từ đó, $\mathrm{e}^k - 1 = 8 - \mathrm{e}^k \Leftrightarrow k = \ln\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Biết rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5\cos x + 6}\,\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{c} + b,$$

trong đó a, b, c là các số hữu tỉ và $c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$. **B**. $S = 3$. **C**. $S = 0$. **D**. $S = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{(\cos x)^2 - 5\cos x + 6} = \frac{1}{(2 - \cos x)(3 - \cos x)} = \frac{1}{2 - \cos x} - \frac{1}{3 - \cos x}.$$

Do đó,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5\cos x + 6}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 - \cos x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 - \cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(2 - \cos x)}{2 - \cos x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(3 - \cos x)}{3 - \cos x} = \ln\frac{2 - \cos x}{3 - \cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

Suy ra $a = 1, b = 0, c = 3$. Vậy, $S = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho phần vật thể $(\mathfrak{T})$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể $(\mathfrak{T})$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2 - x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\mathfrak{T})$.

A. $V = \dfrac{4}{3}$. **B**. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $V = 4\sqrt{3}$. **D**. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S_{\triangle} = \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

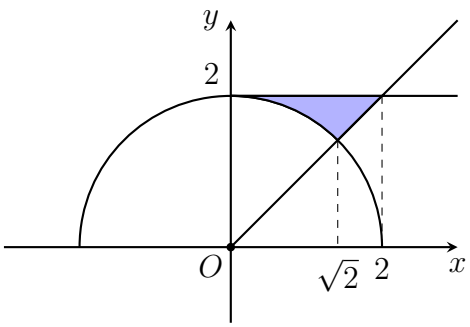
$$V_{\Im} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = x$ và $y = 2$ có diện tích là $S = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 1$ và $b > 1$. **B.** $a + b < 1$. **C.** $a + 2b = 3$. **D.** $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Lời giải.



Ta có $S = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^2 (2-x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi}{2}$ suy ra $a = 2, b = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox.

A. $V = \dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V = \dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V = \dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V = \dfrac{7\pi}{10}$.

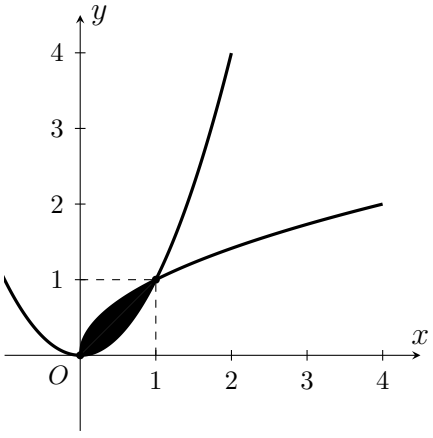
Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ là

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Từ đồ thị, ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi\left(\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{3\pi}{10}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 3$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng D quanh trục hoành là

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = 1$ và $x = 3$.Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng D quanh trục hoành là

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 \,\mathrm{d}x \\ =& \pi \int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9) \,\mathrm{d}x \\ =& \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{22x^3}{3} - 12x^2 + 9x \right) \Big|_1^3 = \frac{16\pi}{15}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $H(0;0;0)$.

Lời giải.

Ta thấy tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc tại O, do đó trực tâm H của tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$ hay $x + y + z - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

Tọa độ điểm H ứng với t là nghiệm phương trình:

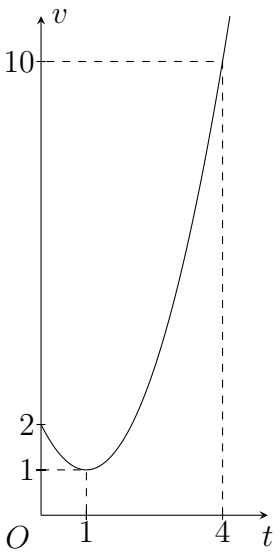
$$t + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Vậy $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 23.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s = 6$ km. **B.** $s = 8$ km. **C.** $s = \frac{46}{3}$ km. **D.** $s = \frac{40}{3}$ km.

Lời giải.

Hàm số biểu diễn vận tốc của vật là $v(t)=t^2-2t+2$. Do đó, hàm số biểu diễn quãng đường di chuyển được của vật là $s(t)=\displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+C$. Do khi bắt đầu chuyển động thì quãng đường đi được bằng 0 nên $C=0$. Vậy quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là $s(4)=\dfrac{40}{3}$ km.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hình D giới hạn bởi các đường $y=x^2-2$ và $y=-|x|$. Khi đó diện tích của hình D là

A. $\dfrac{13}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{13\pi}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2-2=-|x|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2=x \text{ nếu } x<0\\ x^2-2=-x \text{ nếu } x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-1$ và $x=1$.

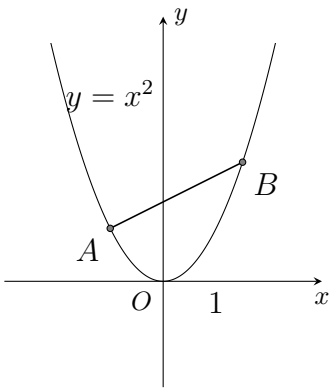
Do đó ta có $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+2-x^2)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(-x-x^2+2)\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.



Gọi $A(a;a^2)$ và $B(b;b^2)$ là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB=2$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a<b$.

Theo giả thiết ta có $AB=2$ nên $(b-a)^2+(b^2-a^2)^2=4\Leftrightarrow(b-a)^2[(b+a)^2+1]=4$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y=(b+a)x-ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB ta có

$$S=\int_a^b[(a+b)x-ab-x^2]\,\mathrm{d}x=\left[(a+b)\frac{x^2}{2}-abx-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_a^b=\frac{(b-a)^3}{6}.$$

Mặt khác $(b-a)^2[(b+a)^2+1]=4$ nên $\left|b-a\right|\le 2$ do $(b+a)^2+1\ge 1$.

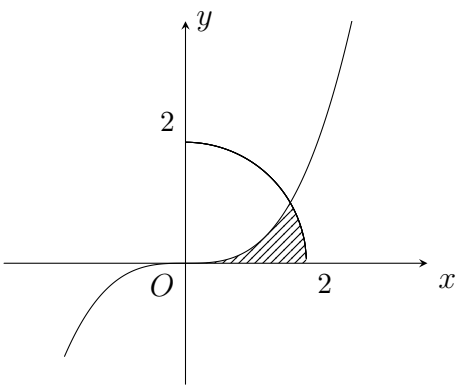
Suy ra $S=\dfrac{(b-a)^3}{6}\le\dfrac{2^3}{6}$.

Vậy $S_{\max}=\dfrac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=-b=\pm1$.

Chọn đáp án B □

Câu 26.

Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \le x \le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\dfrac{a}{b}\sqrt{3} + \dfrac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a+b+c+d$.



A. $P = 52$. **B.** $P = 40$. **C.** $P = 46$. **D.** $P = 34$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{\sqrt{3}}{9}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$.

Khi đó $V = \pi\left[\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\right]$

$= \pi\left[\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{27}x^6 \,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(4-x^2\right) \mathrm{d}x\right] = \left(-\dfrac{20\sqrt{3}}{7} + \dfrac{16}{3}\right)\pi.$

Suy ra $a = 20, b = 7, c = 16, d = 3 \Rightarrow P = 46$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Diện tích nhỏ nhất giới hạn bởi parabol $(P)\colon y = x^2+1$ và đường thẳng $d\colon y = mx+2$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+1 = mx+2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$.
Vì $\Delta = m^2+4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2} \text{ với } x_1 < x_2.$$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -1 \\ x_2 - x_1 = \sqrt{m^2+4}. \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d) là

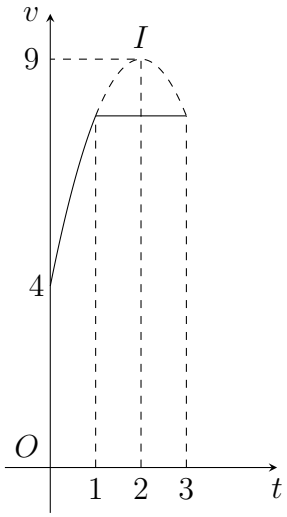
$$\begin{aligned}
S &= \int_{x_1}^{x_2} |x^2 - mx - 1| \,\mathrm{d}x = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - mx - 1) \,\mathrm{d}x \right| = \left| \left(\frac{x^3}{2} - \frac{mx^2}{2} - x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| \\
&= \left| \frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) - \frac{m}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) - (x_2 - x_1) \right| \\
&= (x_2 - x_1) \left| \frac{1}{3}\left(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2\right) - \frac{m}{2}(x_2 + x_1) - 1 \right| \\
&= (x_2 - x_1) \left| \frac{1}{3}(x_2 + x_1)^2 - x_2x_1 - \frac{m}{2}(x_2 + x_1) - 1 \right| \\
&= \sqrt{m^2+4} \left| \frac{m^2+1}{3} - \frac{m^2}{2} - 1 \right| = \sqrt{m^2+4} \left| -\frac{m^2}{6} - \frac{2}{3} \right| \\
&= \sqrt{m^2+4} \cdot \frac{m^2+4}{6} \geq \frac{4}{3}, \forall m \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy diện tích S nhỏ nhất bằng $\dfrac{4}{3}$ khi $m = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $S = 15{,}50$ (km). **B.** $S = 21{,}58$ (km).

C. $S = 23{,}25$ (km). **D.** $S = 13{,}83$ (km).

Lời giải.

Gọi phương trình chuyển động của vật trong 1 giờ đầu là $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ đồ thị ta có $\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4.$

Quãng đường đi được trong giờ đầu là $S_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) \mathrm{d}t = \frac{73}{12}$ (km).

Tại thời điểm $t = 1$, vận tốc của vật là $v(1) = \dfrac{31}{4}$.

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ tiếp theo là $S_2 = \dfrac{31}{4} \times 2 = \dfrac{31}{2}$ (km).

Vậy quãng đường vật di chuyển được trong 3 giờ là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{259}{12} \approx 21{,}58$ (km).

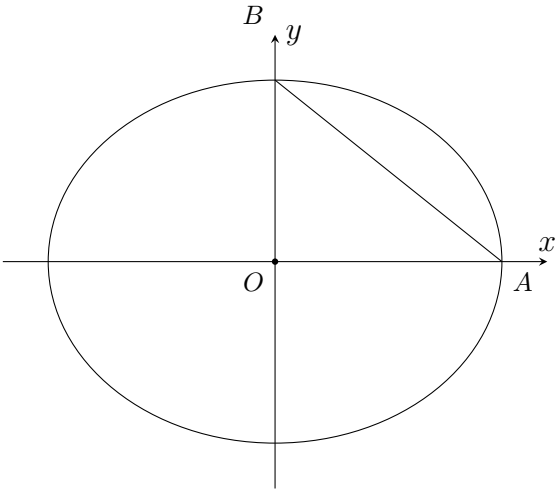
Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

A. 31904000. **B**. 23991000. **C**. 10566000. **D**. 17635000.

Lời giải.

Theo giả thiết phương trình của Ellip là
$\dfrac{x^2}{2500}+\dfrac{y^2}{1600}=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{5}\sqrt{2500-x^2}$ (m^2).
Diện tích của cả khu vườn là
$S=4\displaystyle\int_0^{50}\dfrac{4}{5}\sqrt{2500-x^2}\mathrm{d}x=2000\pi.$
Diện tích phần trồng cây con là
$S_1=\displaystyle\int_0^{50}\dfrac{4}{5}\sqrt{2500-x^2}\mathrm{d}x-S_{OAB}=500\pi-\dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot 50=$
$500\pi-1000$ (m^2).
Diện tích phần trồng rau là
$S_2=S-S_1=3\cdot 500\pi+1000$ (m^2).
Tổng thu nhập của cả mảnh vườn là
$T=2000\cdot(500\pi-1000)+4000\cdot(3\cdot 500\pi+1000)\approx 23991000.$
Chọn đáp án (B) □



Câu 30. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x$ và $y=\text{e}^x$, trục tung và đường thẳng $x=1$ được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=\displaystyle\int_0^1|\text{e}^x-1|\,\mathrm{d}x$. **B**. $S=\displaystyle\int_0^1(\text{e}^x-x)\,\mathrm{d}x$. **C**. $S=\displaystyle\int_0^1(x-\text{e}^x)\,\mathrm{d}x$. **D**. $S=\displaystyle\int_{-1}^1|\text{e}^x-x|\,\mathrm{d}x$.

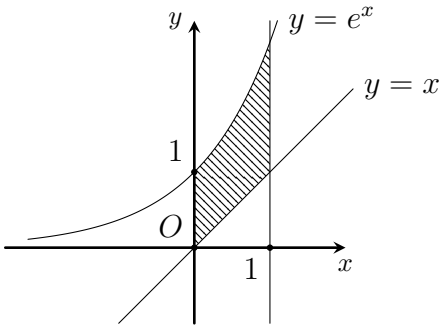
Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_0^1|\text{e}^x-x|\,\mathrm{d}x$.
Xét hàm số $f(x)=\text{e}^x-x$, hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.
Ta có $f'(x)=\text{e}^x-1>0,\forall x\in(0;1)$.
Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.
Do đó, với $0\le x\le 1$ ta có

$$f(0)\le f(x)\Leftrightarrow 0\le \text{e}^x-x\Leftrightarrow e^x\ge x.$$

Vậy $S=\displaystyle\int_0^1(\text{e}^x-x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □



Câu 31. Một chuyến máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t$ m/s với t là thời gian được tính bằng giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc

200 m/s thì nó rời đường băng. Tính quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng.

A. $\dfrac{2500}{3}$ m. **B.** 2000 m. **C.** 500 m. **D.** $\dfrac{4000}{3}$ m.

Lời giải.

Khi $v = 200$, ta có

$$t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 10 \\ t = -20 \text{ (loại)}. \end{bmatrix}$$

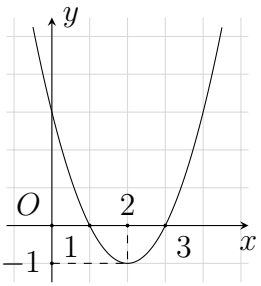
Máy báy di chuyển trên đường băng từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm $t = 10$, do đó quãng đường đi được trên đường băng là

$$s = \int_0^{10} \left(t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2\right)\Big|_0^{10} = \frac{2500}{3} \text{ m}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 32.

Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành.



A. 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Parabol đã cho có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Vì (P) cắt trục hoành tại các điểm $(1;0)$, $(3;0)$ và đi qua điểm $(2;-1)$ nên ta có

$$\begin{cases} f(1) = f(3) = 0 \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3. \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị của (P), ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$-\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

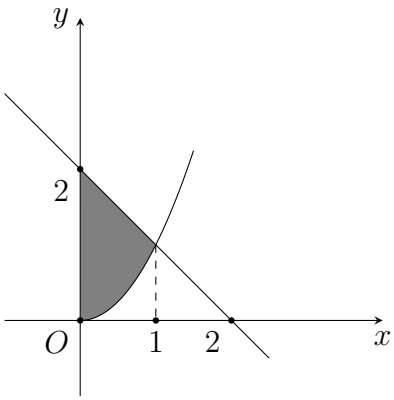
Chọn đáp án D □

Câu 33. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $y = -x + 2$, $x = 0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi$. **B.** $V = \dfrac{3}{2}\pi$. **C.** $V = \dfrac{32}{15}\pi$. **D.** $V = \dfrac{11}{6}\pi$.

Lời giải.

Ta có $x=\sqrt{y} \Leftrightarrow y=x^2, x \geq 0$. Do đó hình phẳng giới hạn bởi các đường đã cho là phần tô đậm trên hình vẽ. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quanh hình phẳng này quay trục Ox là

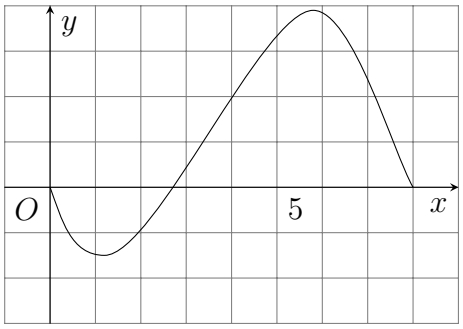


$$V=\pi \int_0^1 (-x+2)^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$=\pi \left[\frac{(x-2)^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{32}{15}\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và các biểu thức E, F, G, H xác định bởi $E=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $F=\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, $G=\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, $H=f'(1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $F<E<G<H$. **B.** $H<E<F<G$.
C. $E<H<G<F$. **D.** $G<H<E<F$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ và diện tích hình phẳng, ta có

$$E=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^3 |f(x)|\,\mathrm{d}x < -2.$$
$$F=\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x > 3.$$
$$0<G=\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x < 2.$$
$$-1<H=f'(1)<0. \text{ (hệ số góc của tiếp tuyến tại } x=1)$$

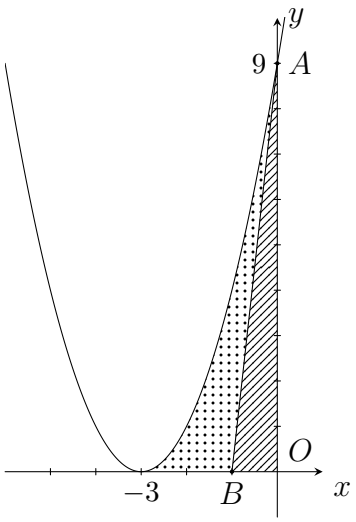
Như vậy $E<H<G<F$.

Chọn đáp án C □

Câu 35.

Xét hình phẳng $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ $(-3<b<0)$. Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia $(\mathscr{H})$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $b=-2$. **C.** $b=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $b=-1$.



Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$ tiếp xúc với trục hoành tại $x=-3$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-3$, $x=0$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$, đoạn thẳng AB và trục hoành.

Gọi S_2 là diện tích của tam giác OAB.

Vì $S_1=S_2$ nên $S=2S_2 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-3}^{0}(x+3)^2\,\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB \Leftrightarrow -9b=9 \Leftrightarrow b=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70$ (m/s^2). Tính quãng đường $\mathcal{S}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $\mathcal{S}=96{,}25$ (m). **B.** $\mathcal{S}=87{,}5$ (m). **C.** $\mathcal{S}=94$ (m). **D.** $\mathcal{S}=95{,}7$ (m).

Lời giải.

Ta có $v_1(t)=7t \Rightarrow S_1(t)=\dfrac{7}{2}t^2$.

Quãng đường xe đi được sau 5s là $S_1=\dfrac{7}{2}\times 5^2=87{,}5\,(\mathrm{m})$.

Vận tốc của xe sau 5s là $v_0=35\,(\mathrm{m/s})$.

Xe chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\,(\mathrm{m/s^2})$ nên $v_2(t)=v_0+at=35-70t\,(\mathrm{m/s})$.

Suy ra quãng đường xe chuyển động được tính theo công thức $S_2(t)=35t-35t^2\,(\mathrm{m})$.

Xe dừng hẳn thì $v_2=0 \Leftrightarrow 35-70t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\,(\mathrm{s})$.

Quãng đường xe đi thêm cho tới khi dừng hẳn là $S_2=35\times\dfrac{1}{2}-35\times\dfrac{1}{4}=8{,}75\,(\mathrm{m})$.

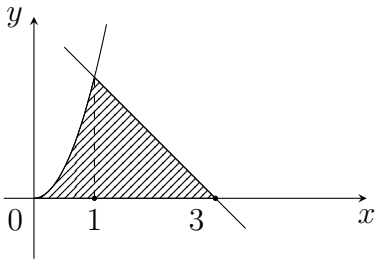
Vậy tổng quãng đường xe đi là $S_1+S_2=96{,}25\,(\mathrm{m})$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Gọi (H) là hình được giới hạn bởi nhánh của parabol $y=2x^2, x\geq 0$, đường thẳng $y=-x+3$ và trục hoành. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng (H) khi quay trục Ox.

A. $V=\dfrac{52\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{17\pi}{5}$. **C.** $V=\dfrac{51\pi}{17}$. **D.** $V=\dfrac{53\pi}{17}$.

Lời giải.



Các phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 = -x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x=1.$$

$-x+3=0 \Leftrightarrow x=3.$

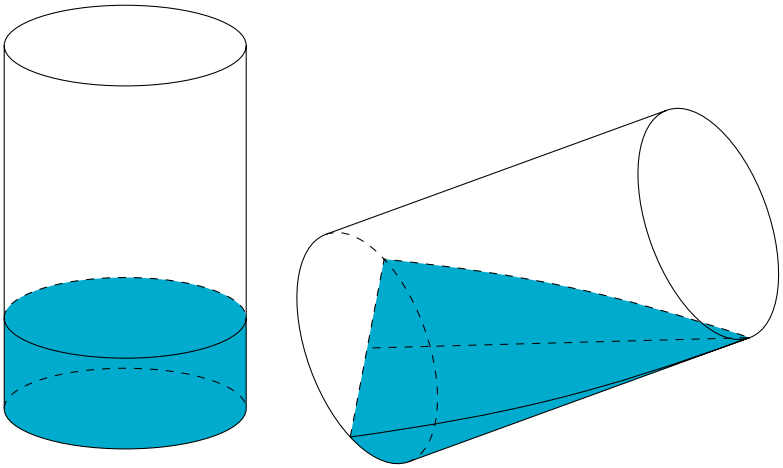
$2x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^1 (2x^2)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_1^3 (-x+3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{52\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 240 cm^3. **B**. 240π cm^3. **C**. 120 cm^3. **D**. 120π cm^3.

Lời giải.

Đặt trục tọa độ Ox như hình vẽ. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x cắt phần nước khi nghiêng cốc theo thiết diện là một tam giác MNK vuông tại N.

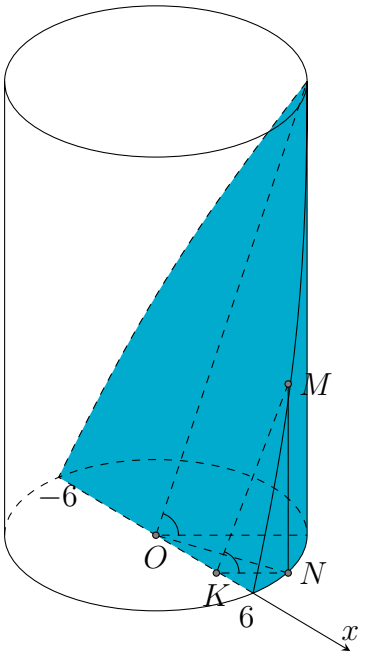
Từ giả thiết suy ra $\tan\widehat{MKN}=\dfrac{MN}{NK}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$, nên $MN=\dfrac{5}{3}NK$.

Mặt khác: $NK^2=ON^2-OK^2=36-x^2$.

Nên $S_{MNK}=\dfrac{1}{2}\cdot MN\cdot NK=\dfrac{5}{6}NK^2=\dfrac{5}{6}(36-x^2)$.

Thể tích lượng nước trong cốc là:

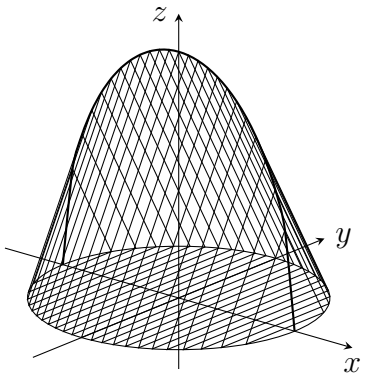
$$V=\int\limits_{-6}^{6}\frac{5}{6}(36-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(30x-\frac{5}{18}x^3\right)\Big|_{-6}^{6}=240\text{ cm}^3.$$



Chọn đáp án A □

Câu 39.

Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



A. $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = 3\sqrt{3}$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \pi$.

Lời giải.

Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó, diện tích của thiết diện là $S(x) = \dfrac{(2\sqrt{1-x^2})^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1-x^2)$.

Vậy, thể tích V của vật thể là

$$V = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V = 3$. **B.** $V = 3\pi$. **C.** $V = 2\pi\sqrt{3}$. **D.** $V = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$ là $S(x) = \dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4} = \sqrt{3}\sin x$.

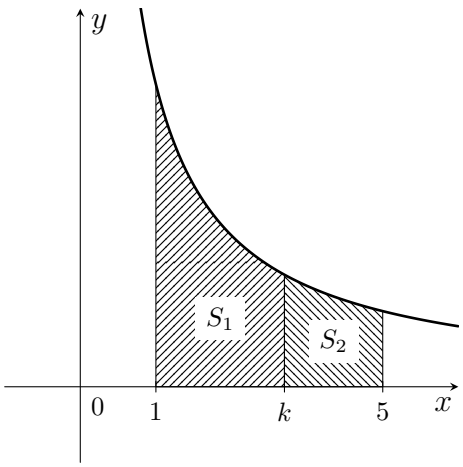
Vậy thể tích $V = \displaystyle\int_0^{\pi} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$,$x = 1$, $x = 5$. Đường thẳng $x = k$, $1 < k < 5$ chia (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 (*hình vẽ bên*). Giá trị k để $S_1 = 2S_2$ là

A. $k = 5$. **B.** $k = \ln 5$. **C.** $k = \sqrt[3]{5}$. **D.** $k = \sqrt[3]{25}$.



Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{x} > 0$ với $x > 1$, do đó ta được

$$S_1 = \int_1^k \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^k = \ln k.$$

$$S_2 = \int_k^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_k^5 = \ln 5 - \ln k.$$

$S_1 = 2S_2 \Rightarrow \ln k = 2(\ln 5 - \ln k) \Rightarrow k = \sqrt[3]{25}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1, x = 2$ và có thiết diện tại $x\,(1 < x < 2)$ là hình chữ nhật có cạnh là 2 và $\sqrt{2x+1}$ và được cho bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \pi \displaystyle\int_1^2 (8x+4)\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \displaystyle\int_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \displaystyle\int_1^2 (8x+4)\,\mathrm{d}x$.

D. $V = \displaystyle\int_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm $x\,(1 < x < 2)$ là $S(x) = 2 \cdot \sqrt{2x+1}$.

Khi đó thể tích cần tìm là $V = \displaystyle\int_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình phẳng D giới hạn bởi Parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành

A. $V = \dfrac{4\pi}{3}$.

B. $V = \dfrac{16\pi}{15}$.

C. $V = \dfrac{8\pi}{5}$.

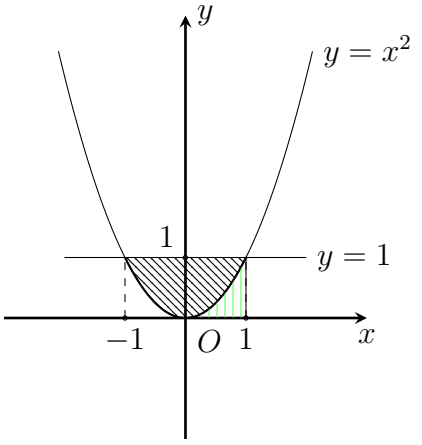
D. $V = \dfrac{12\pi}{5}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox là

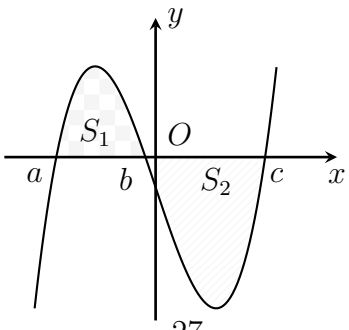
$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 \left(1 - x^4\right)\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot \left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{5}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 44.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $a,b,c(a<b<c)$. Biết phần hình phẳng nằm phía trên trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_1=\dfrac{7}{10}$, phần hình phẳng nằm phía dưới trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_2=2$ (như hình vẽ). Tính $I=\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.



A. $I=-\dfrac{13}{10}$. **B.** $I=\dfrac{13}{10}$. **C.** $I=\dfrac{27}{10}$. **D.** $I=-\dfrac{27}{10}$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $\begin{cases} S_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{10} \\ S_2=-\displaystyle\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=2\Rightarrow\displaystyle\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=-2. \end{cases}$

Mà $I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{10}-2=-\dfrac{13}{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12$ (m/s^2). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $s=168$ m. **B.** $s=166$ m. **C.** $s=144$ m. **D.** $s=152$ m.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh

$$s_1=\int_0^{12} v_1(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{12} 2t\,\mathrm{d}t=144\ (\mathrm{m}).$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$$v_2(t)\int(-12)\,\mathrm{d}t=-12t+C,\ v_2(12)=v_1(12)=24\Rightarrow C=168\Rightarrow v_2(t)=-12t+168\ (\mathrm{m/s}).$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t)=0\Leftrightarrow t=14$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn

$$s_2=\int_{12}^{14} v_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_{12}^{14}(-12t+168)\,\mathrm{d}t=24\ (\mathrm{m}).$$

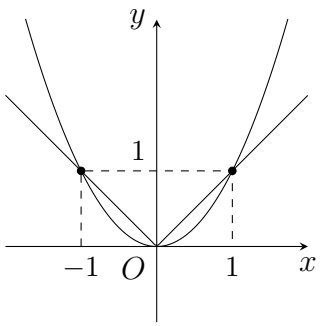
Quãng đường cần tính $s=s_1+s_2=144+24=168$ (m).

Chọn đáp án A □

Câu 46. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{15}$.

Lời giải.



Ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - y^2\right] \mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi - 1}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **D.** $\dfrac{\pi}{4} - 1$.

Lời giải.

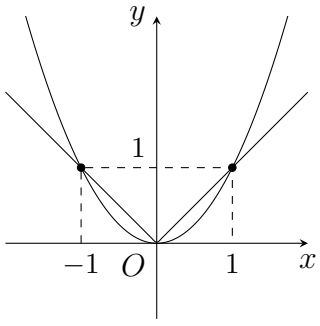
Đồ thị hàm số $y = |x-1|$ cắt đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ tại $A(1;0), B(0;1)$. Diện tích cần tìm bằng diện tích của một phần tư đường tròn trừ đi diện tích tam giác OAB, suy ra diện tích cần tìm bằng $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{15}$.

Lời giải.



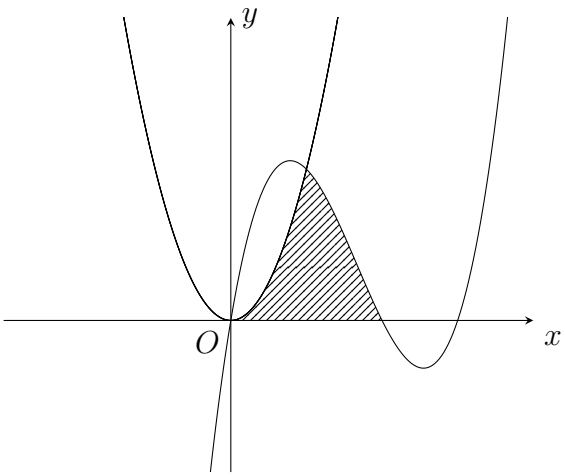
Ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - y^2\right] \mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49.

Cho $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 5x^2 + 6x$, $y = 2x^2$, trục Ox (phần gạch sọc). Tính diện tích hình phẳng $(\mathcal{H})$.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.



Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $x^3 - 5x^2 + 6x = 2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

Mặt khác hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ với trục Ox là nghiệm phương trình $x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Suy ra diện tích $S = \displaystyle\int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) \mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Một ô-tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô-tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S (m) đi được của ô-tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 87{,}50$ (m). **B.** $S = 94{,}00$ (m). **C.** $S = 95{,}70$ (m). **D.** $S = 96{,}25$ (m).

Lời giải.

Trong 5 giây đầu tiên xe đi được quãng đường $S_2 = \displaystyle\int_0^5 7t \,\mathrm{d}t = \frac{7}{2}t^2\Big|_0^5 = 87{,}5$ m.

Kể từ khi phanh $v_2 = \displaystyle\int (-70) \,\mathrm{d}t = -70t + C$.

Lúc xe bắt đầu phanh $t = 0$ thì $v_2 = 35$ (m/s) suy ra $35 = -70 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 35$.

Khi xe dừng hẳn $v_2 = 0 \Rightarrow -70t + 35 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

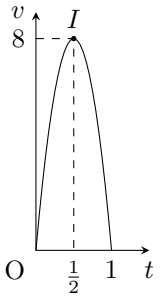
Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh $S_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (35 - 70t) \,\mathrm{d}t = \frac{35}{4}$ m.

Quãng đường đi được của ô-tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $S = S_1 + S_2 = 96{,}25$ (m).

Chọn đáp án D □

Câu 51.

Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị làm một phần của đường parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



A. $S = 5{,}3$ km. **B.** $S = 4{,}5$ km. **C.** $S = 4$ km. **D.** $S = 2{,}3$ km.

Lời giải.

Từ giả thiết công thức biểu thị vận tốc theo thời gian có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$.
Dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + c = 8 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$ Vậy hàm vận tốc là $v(t) = -32t^2 + 32t$.

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là $S = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(-32t^2 + 32t\right) \mathrm{d}t = 4{,}5$ km.

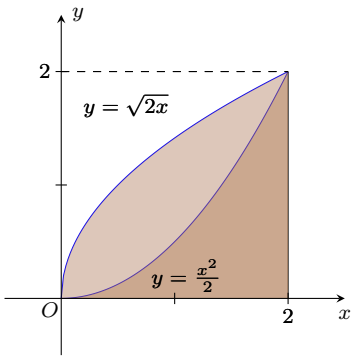
Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{28\pi}{5}$. **B.** $V = \frac{12\pi}{5}$. **C.** $V = \frac{4\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{36\pi}{35}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2}{2} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x^4}{4} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$



Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành là $V = \pi \cdot \int_0^2 \left[(\sqrt{2x})^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right] \mathrm{d}x =$

$\pi \cdot \int_0^2 \left(2x - \frac{x^4}{4}\right) \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(x^2 - \frac{x^5}{20}\right)\Big|_0^2 = \frac{12\pi}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = k$ $(k > 1)$. Ký hiệu V_k là thể tích khối tròn xoay thu dược khi quay hình (H) quan trục Ox. Biết rằng $V_k = \pi$, hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau

A. $4 < k < 5$. **B.** $1 < k < 2$. **C.** $2 < k < 3$. **D.** $3 < k < 4$.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $V_k = \pi \int\limits_1^k \ln x \,\mathrm{d}x$. Khi đó theo công thức tích phân từng phần ta có

$$V_k = \pi \left(x \cdot \ln x \Big|_1^k - \int\limits_1^k \mathrm{d}x \right) = \pi \left(x \cdot \ln x \Big|_1^k - x \Big|_1^k \right) = \pi \left(k \ln k - k + 1 \right)$$

Do $V_k = \pi$ suy ra

$$\pi \left(k \ln k - k + 1 \right) = \pi \Leftrightarrow k \ln k - k + 1 = 1 \Leftrightarrow k \left(\ln k - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ \ln k - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \mathrm{e} \end{array} \right.$$

So sánh điều kiện suy ra $k = \mathrm{e}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ với $A(-2;3), B(3;6), C(3;0), D(-2;0)$. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục Ox thì thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng bao nhiêu?

A. 72π. **B**. 74π. **C**. 76π. **D**. 105π.

Lời giải.

Phương trình các cạnh của hình thang là

$$AD\colon x = -2, CD\colon y = 0, BC\colon x = 3, AB\colon 3x - 5y + 21 = 0.$$

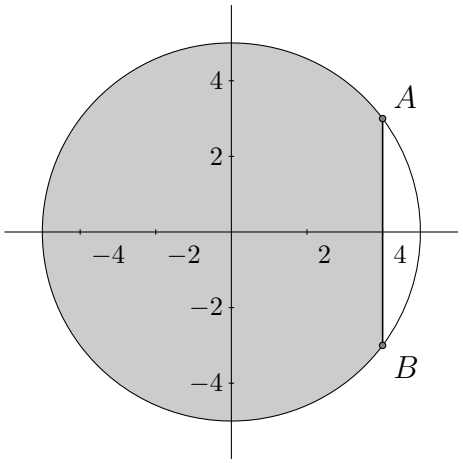
Ta thấy $ABCD$ là hình thang vuông có $CD\colon y = 0$ nên khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int\limits_{-2}^{3} \frac{(3x + 21)^2}{25} \mathrm{d}x = 105\pi.$$

Chọn đáp án D □

Câu 55.

Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên, cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6 m vào hai đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền? (Tính theo đơn vị nghìn đồng và bỏ số thập phân).



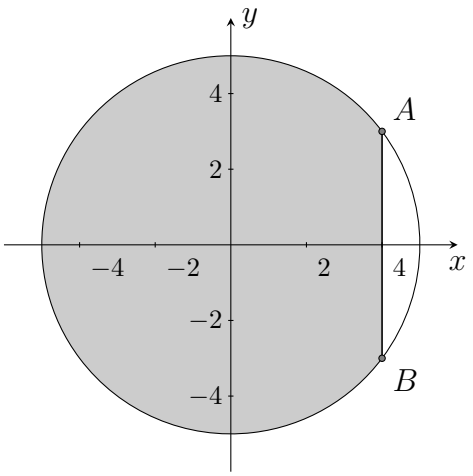
A. 3722. **B**. 7445. **C**. 7446. **D**. 3723.

Lời giải.

Đưa vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Diện tích trồng cây là $S = 2\displaystyle\int_{-5}^{4} \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x \approx 7445$.

Do đó, số tiền thu được là 7445 nghìn đồng.

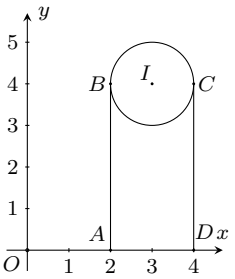


Chọn đáp án (B) □

Câu 56.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C) quanh trục hoành.

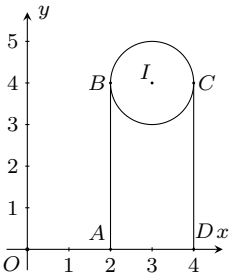
A. $5\pi^2$. **B**. $9\pi^2$. **C**. $8\pi^2$. **D**. $6\pi^2$.



Lời giải.

Từ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \Rightarrow y = 4 \pm \sqrt{1-(x-3)^2}$.

Thể tích khối tròn xoay là



$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_2^4 \left[\left(4 + \sqrt{1-(x-3)^2}\right)^2 - \left(4 - \sqrt{1-(x-3)^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= 16\pi \cdot \int_2^4 \sqrt{1-(x-3)^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $x - 3 = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

$1 - (3-x)^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$.

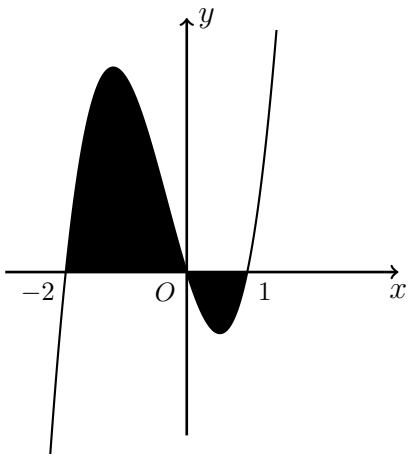
Khi $x = 2 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2}; x = 4 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$V = 16\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = 8\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = 8\pi \left(t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 8\pi.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 57.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) là



A. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\left|\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x+3$, trục hoành và các đường thẳng $x=1, x=m(m>1)$ bằng $\dfrac{20}{3}$. Giá trị của m bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

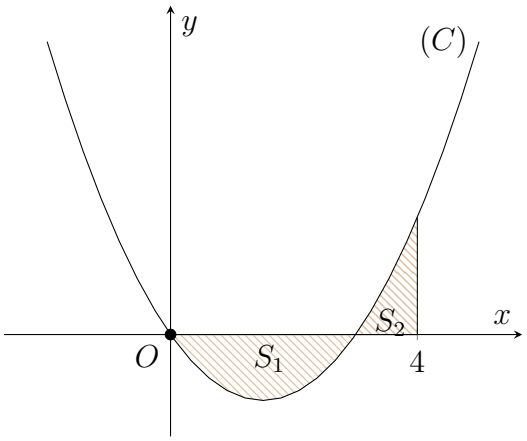
Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{1}^{m}|x^2-2x+3|\,\mathrm{d}x=\frac{20}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\int_{1}^{m}(x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x=\frac{20}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Big|_{1}^{m}=\frac{20}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{m^3}{3}-m^2+3m-9=0\\
\Leftrightarrow\ &m=3.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho hàm số $y=x^2-mx$ $(0<m<4)$ có đồ thị (C). Gọi S_1+S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=4$ (phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới). Giá trị của m sao cho $S_1=S_2$ là



A. $m=3$. **B**. $m=\dfrac{10}{3}$. **C**. $m=2$. **D**. $m=\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$x^2-mx=0\Leftrightarrow x=0\vee x=m.$$

Khi đó ta có

$$S_1=\int\limits_0^m(-x^2+mx)\mathrm{d}x=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{mx^2}{2}\right)\Big|_0^m=\frac{m^3}{6}.$$

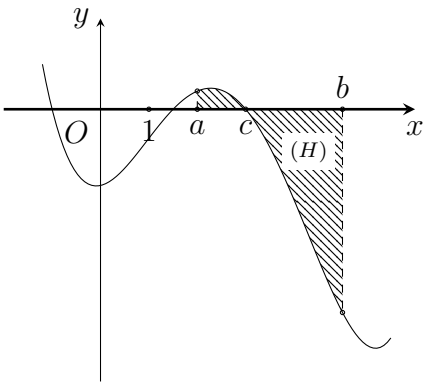
$$S_2=\int\limits_m^4(x^2-mx)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}\right)\Big|_m^4=\frac{m^3}{6}-8m+\frac{64}{3}.$$

Xét $S_1=S_2\Leftrightarrow\dfrac{m^3}{6}=\dfrac{m^3}{6}-8m+\dfrac{64}{3}\Leftrightarrow m=\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c\in[a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=0$, $x=a$, $x=b$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Từ đồ thị hàm số ta có $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a;c]$ và $f(x)\leq 0,\ \forall x\in[c;b]$.

Suy ra $S=\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-1)^3(x-2)$ và trục hoành. Tính diện tích S của hình phẳng (H).

A. $S=0{,}05$. **B.** $S=-\dfrac{1}{20}$. **C.** $S=-\dfrac{1}{5}$. **D.** $S=0{,}5$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $(x-1)^3(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_1^2 |(x-1)^3(x-2)|\,\mathrm{d}x\\&=-\int\limits_1^2 (x-1)^3(x-2)\,\mathrm{d}x\\&=-\int\limits_0^1 t^3(t-1)\,\mathrm{d}t\\&=-\int\limits_0^1 (t^4-t^3)\,\mathrm{d}t\\&=-\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1\\&=\frac{1}{20}=0{,}05.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}\cos\dfrac{x}{2}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{\pi}{6}(3\pi^2+4\pi-8)$. **B.** $V=\dfrac{\pi}{16}(3\pi^2-4\pi-8)$.

C. $V=\dfrac{\pi}{8}(3\pi^2+4\pi-8)$. **D.** $V=\dfrac{1}{16}(3\pi^2-4\pi-8)$.

Lời giải.

Ta có thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sqrt{x}\cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\frac{\cos x+1}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}I_1 + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}I_1 + \frac{3\pi^3}{16}. \end{aligned}$$

* Tính I_1

Chọn $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1 = x\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2} - 1.$

Vậy $V = -\dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\pi^3}{16} = \dfrac{\pi}{16}(3\pi^2 - 4\pi - 8)$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx$ với $m \neq 0$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20?

A. 4. **B**. 6. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \end{array}\right.$.

Ta có $m > 0$ nên $S = \displaystyle\int\limits_0^m |x^2 - mx|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^m (mx - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^m = \frac{m^3}{6}$.

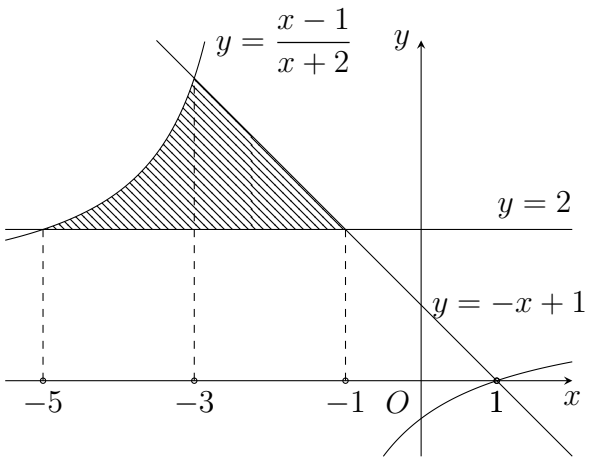
Theo đề $S < 20$ nên $\dfrac{m^3}{6} < 20 \Leftrightarrow m < \sqrt[3]{120}$.

Vì m nguyên dương nên m nhận các giá trị 1, 2, 3, 4.

Chọn đáp án A □

Câu 64.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ và hai đường thẳng $y=2$, $y=-x+1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình phẳng (H).



A. $S=8+3\ln 3$. **B.** $S=8-3\ln 3$.
C. $S=3\ln 3$. **D.** $S=-4+3\ln 3$.

Lời giải.

Theo hình vẽ ta thấy

$$\begin{aligned} S &= \int_{-5}^{-3}\left(\frac{x-1}{x+2}-2\right)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1}(-x+1-2)\,\mathrm{d}x \\ &= (-x-3\ln|x+2|)\Big|_{-5}^{-3}+2 \\ &= (3-3\ln 1)-(5-3\ln 3)+2=3\ln 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{9\pi}{70}$. **B.** $V=\dfrac{3}{10}$. **C.** $V=\dfrac{9}{70}$. **D.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

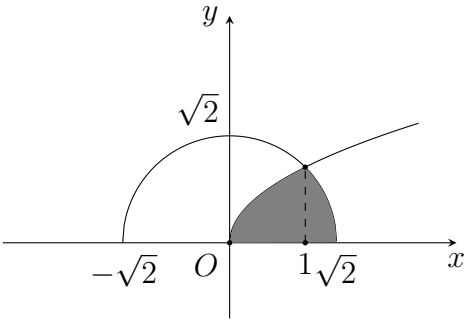
Với mọi $x\in[0;1]$ thì $0\le x^2\le\sqrt{x}$.

Do đó $V=\pi\displaystyle\int_0^1\left((\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 66.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $y=\sqrt{x}$, nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ (với $0\le x\le\sqrt{2}$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{3\pi+2}{12}$. **B.** $\dfrac{4\pi+2}{12}$. **C.** $\dfrac{3\pi+1}{12}$. **D.** $\dfrac{4\pi+1}{6}$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích của (H). Khi đó, ta có:

$$S=\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x=I+J$$

$$I=\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3},J=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t,t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4};x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}.$

Suy ra

$$J=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}.$$

Vậy $S=\frac{2}{3}+\frac{\pi-2}{4}=\frac{3\pi+2}{12}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=|x|$ và $y=x^2-2$.

A. $S=\frac{20}{3}$. **B.** $S=\frac{11}{2}$. **C.** $S=3$. **D.** $S=\frac{13}{3}$.

Lời giải.

Hoành độ giáo điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$|x|=x^2-2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ x^2+x-2=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=2.\end{array}\right.$$

Suy ra

$$S=\int\limits_{-2}^{2}\left||x|-x^2+2\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-2}^{2}\left(|x|-x^2+2\right)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{-2}^{0}(-x^2-x+2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}(-x^2+x+2)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{0}^{2}\right|=\frac{20}{3}.$$

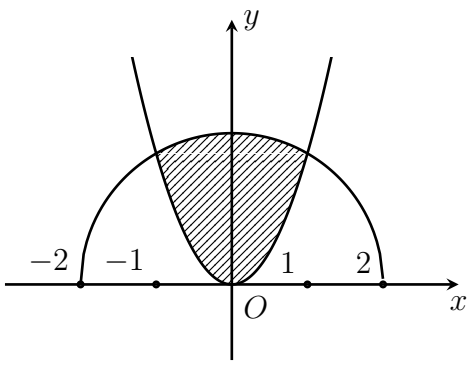
Chọn đáp án (A) □

Câu 68.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ với $-2\leq x\leq 2$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{2\pi+5\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4\pi+5\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải.

Hoành độ giao điểm của parabol với nửa đường tròn là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2=3x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Diện tích của (H) được tính theo công thức

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left|\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x.$$

Tính $I_1=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tính

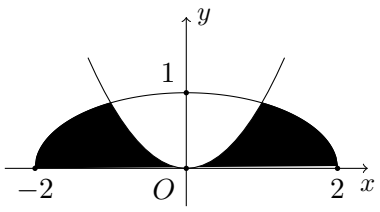
$$\begin{aligned} I_2&=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-(2\cos^2 t)}\,\mathrm{d}(2\cos t)=-8\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}|\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t \\ &=8\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=8\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &=4\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy $S=\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và nửa elip có phương trình $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ (với $-2\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Gọi S là diện tích của, biết $S=\dfrac{a\pi+b\sqrt{3}}{c}$ (với $a,b,c,\in\mathbb{R}$). Tính $P=a+b+c$.



A. $P=9$. **B.** $P=12$. **C.** $P=15$. **D.** $P=17$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Do tính chất đối xứng của đồ thị nên

$$S=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}\right)=2\left(S_1+S_2\right).$$

$S_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

$S_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

$x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}, x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

Với $t \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos t \geq 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$.

$S2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $S = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 4, b = -1, c = 6$.

$\Rightarrow P = a + b + c = 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8$ (m/s^2) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10s kể từ lúc tăng tốc là

A. 150 m. **B.** 250 m. **C.** 246 m. **D.** 540 m.

Lời giải.

Ta có 54 km/h = 15 m/s.

Vận tốc của ô tô có phương trình $v(t) = \displaystyle\int (3t-8)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}t^2 - 8t + C$.

Vì $v(0) = 15$ nên $v(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - 8t + 15$.

Quãng đường đi được của ô tô có phương trình

$s(t) = \displaystyle\int \left(\dfrac{3}{2}t^2 - 8t + 15\right)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 15t + C$.

Vì $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy quãng đường đi được của ô tô sau 10 s là 250 m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V = \dfrac{4}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4}{3}\pi$. **C.** $V = \dfrac{16}{15}\pi$. **D.** $V = \dfrac{16}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành là

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

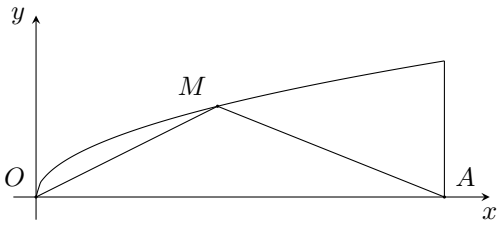
Khi đó thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox là

$$V = \pi\int_0^2 (2x-x^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (4x^2 + x^4 - 4x^3)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 72.

Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (C), đường thẳng $x = 9$, Ox. Cho điểm M thuộc (C), $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh Ox. Biết $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi $(C), OM$ (hình vẽ không thể hiện chính xác điểm M).



A. $S = 3$. **B.** $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{81\pi}{2}$.

$V_2 = \dfrac{81\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi \left(y_M\right)^2 OA = \dfrac{81\pi}{4} \Leftrightarrow y_M^2 = \dfrac{27}{4}$ hay $M\left(\dfrac{27}{4}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

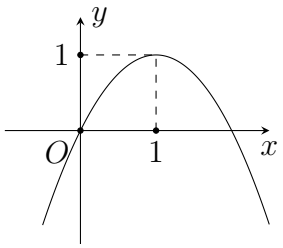
Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi $(C), Ox, (d): x = \dfrac{27}{4}$. Suy ra $S_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

$\Leftrightarrow S = S_1 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{27}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73.

Cho hàm bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Ox quanh trục Ox.



A. $\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{5}$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua gốc tọa độ O nên có phương trình $(P)\colon y = -x^2 + 2x$.

Giao điểm còn lại của (P) với trục hoành là $(2;0)$.

Khi đó ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left(\dfrac{x^5}{5} - x^4 + \dfrac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \dfrac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho khối cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$, mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 5 = 0$ cắt khối cầu (S) thành 2 phần. Tính thể tích của phần không chứa tâm của mặt cầu (S).

A. $\dfrac{25\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{25\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{14\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}$.

Lời giải.

Tính thể tích chỏm cầu (giới hạn từ điểm K đến điểm A).

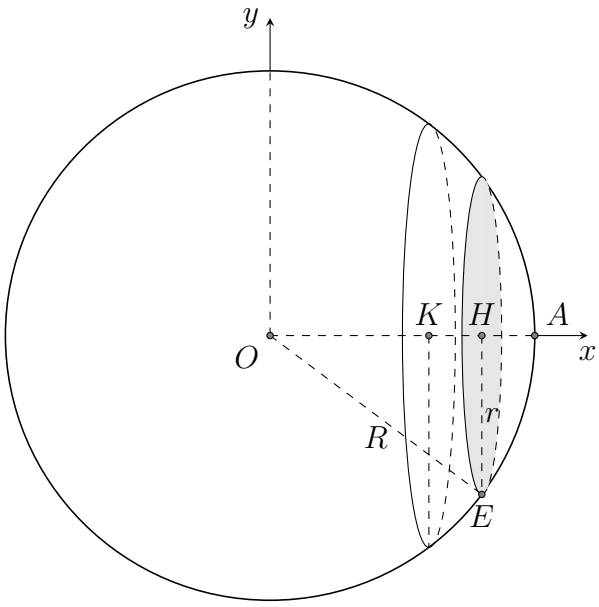
Xét một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

Đặt $OK = h$, $OH = x$, $HE = r$, $OE = R$. Lúc đó diện tích phần thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại H có diện tích $S(x)$.

Ta có $r^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow S(x) = \pi(R^2 - x^2)$.

Thể tích chỏm cầu:

$$\begin{aligned} V &= \int_h^R S(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_h^R (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{3}(R-h)^2(2R+h) \end{aligned}$$



Quay lại bài toán ban đầu. Mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R = 5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $h = \dfrac{|1+4+2+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 4$.

Áp dụng công thức trên ta có $V = \dfrac{14\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^3 - x$; $y = 3x$ bằng

A. 0. **B**. 8. **C**. 16. **D**. 24.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$x^3 - x = 3x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Diện tích phần giới hạn bởi hai đồ thị bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} \left|x^3 - 4x\right|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left|x^3 - 4x\right|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(4x - x^3\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} \\ &= 8. \end{aligned}$$

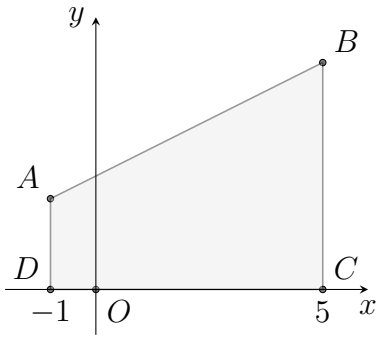
Chọn đáp án B □

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ với $A(-1;2)$, $B(5;5)$, $C(5;0)$, $D(-1;0)$. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục Ox thì thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng bao nhiêu?

A. 78. **B.** 18π. **C.** 78π. **D.** 74π.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng qua hai điểm A và B là $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.



Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_{-1}^{5}\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)^2\mathrm{d}x=78\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho hình phẳng (S) được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $(P_1)\colon y=x^2$, $(P_2)\colon y=\dfrac{x^2}{4}$, $(H_1)\colon y=\dfrac{2}{x}$, $(H_2)\colon y=\dfrac{8}{x}$. Diện tích hình phẳng (S) bằng

A. $8\ln 2$. **B.** $12\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

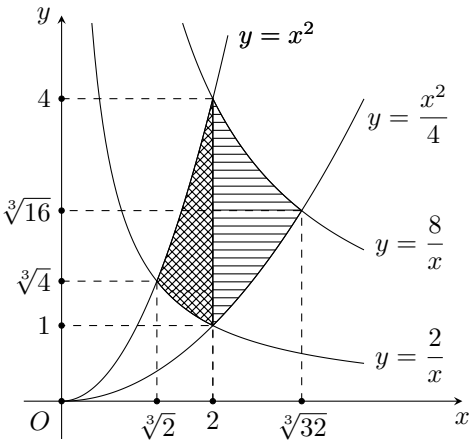
Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^2$ và $y=\dfrac{2}{x}$ là $\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^2$ và $y=\dfrac{8}{x}$ là $(2;4)$.

Giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=\dfrac{x^2}{4}$ và $y=\dfrac{2}{x}$ là $(2;1)$.

Giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=\dfrac{x^2}{4}$ và $y=\dfrac{8}{x}$ là $\left(\sqrt[3]{32};\sqrt[3]{16}\right)$.



Khi đó diện tích hình phẳng (S) bằng tổng diện tích của hai hình phẳng được chia trong hình vẽ trên (hình kẻ sọc ngang và hình kẻ sọc lưới).

Do đó diện tích hình phẳng (S) được tính bằng công thức

$$\int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{2}\left(x^2-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{\sqrt[3]{32}}\left(\frac{8}{x}-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-2\ln x\right)\Big|_{\sqrt[3]{2}}^{2}+\left(8\ln x-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_{2}^{\sqrt[3]{32}}=4\ln 2.$$

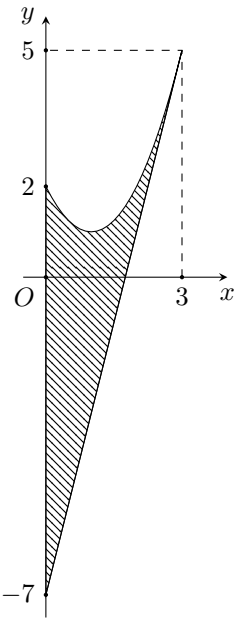
Chọn đáp án D □

Câu 78. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) của hàm số $y=x^2-2x+2$, tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(3;5)$ và trục Oy bằng

A. 9. **B.** 27. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(3;5)$ là $y=4x-7$.
Giao điểm của tiếp tuyến trên với đồ thị (P) là điểm $M(3;5)$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) của hàm số $y=x^2-2x+2$, đường thẳng $y=4x-7$ và trục Oy là



$$\begin{aligned}\int_0^3 \left|(x^2-2x+2)-(4x-7)\right|\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \left|x^2-6x+9\right|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3 (x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_0^3\\ &= 9.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

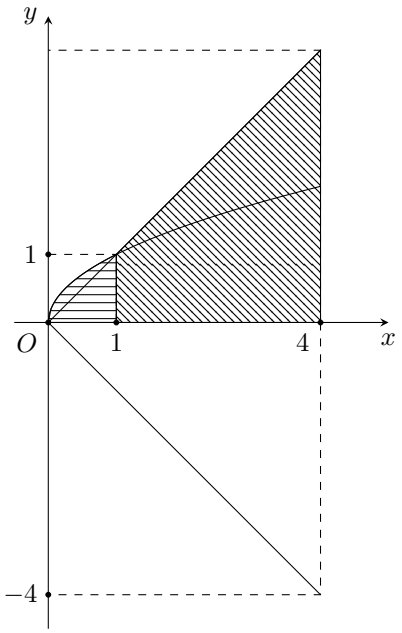
Câu 79. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=-x$ và $x=4$. Quay hình phẳng (S) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{43\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{38\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{40\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{41\pi}{3}$.

Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=\sqrt{x}$ và $y=x$ có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ \sqrt{x}=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1, x=1\\ y=0, x=0.\end{cases}$$

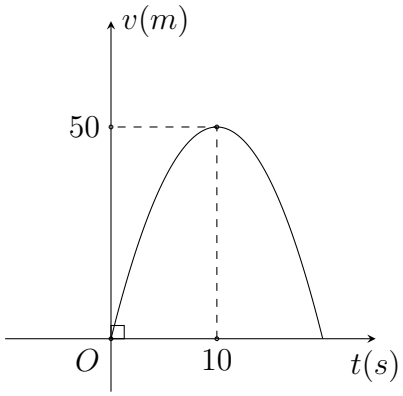


Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình phẳng (S) quanh trục Ox bằng thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng ở bên quanh trục Ox.
Hơn thế nữa, ta có thể chia hình phẳng đó thành hai hình phẳng riêng biệt (miền kể ngang và miền kẻ chéo). Do đó thể tích khối tròn xoay được tính bằng công thức

$$\begin{aligned}\int_0^1 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x+\int_1^4 \pi\left(x\right)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \pi x\,\mathrm{d}x+\int_1^4 \pi x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{\pi x^3}{3}\Big|_1^4\\ &= \frac{43\pi}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 80. Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. $\dfrac{1000}{3}$ m. **B.** $\dfrac{1100}{3}$ m. **C.** $\dfrac{1400}{3}$ m. **D.** 300 m.

Lời giải.

Phương trình vận tốc của vật theo thời gian có dạng $(P): v(t) = at^2 + bt + c$. Do (P) qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Đỉnh (P) là $I(10; 50)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20a \\ b^2 = -200a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 10t.$

Quãng đường vật đi được từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất là

$$L = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t = \left(-\frac{t^3}{6} + 5t^2\right)\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 81. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$.

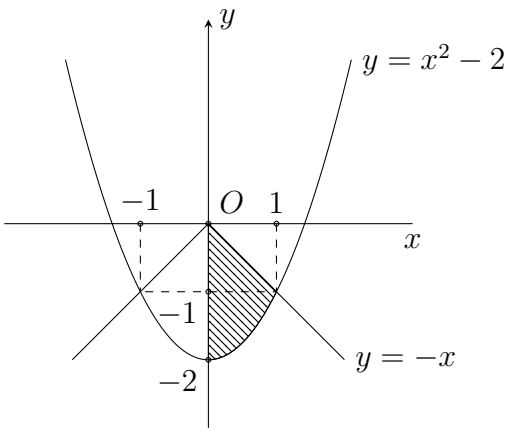
A. $\dfrac{11}{3}$. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Do các hàm số $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$ là các hàm số chẵn nên hình phẳng tạo thành nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Với $x \geq 0$, ta có đồ thị $y = x^2 - 2$ cắt đồ thị $y = -x$ tại điểm $(1; -1)$. Do đó diện tích hình phẳng tạo thành là

$$S = 2\int_0^1 \left(-x - (x^2 - 2)\right) \mathrm{d}x = \frac{7}{3}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 82. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox.

A. $\dfrac{34\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{31\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{35\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{4x-x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Khi đó thể tích cần tính là $V=\pi \displaystyle\int_0^4 (4x-x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=2x+1$ và đồ thị hàm số $y=x^2-x+3$.

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2-x+3=2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng cần tính là $S=\displaystyle\int_1^2 |x^2-3x+2|\,\mathrm{d}x = \left|\int_1^2 (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{2x+3}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$.

A. $S=2\ln 7$. **B.** $S=\dfrac{1}{2}\ln 7$. **C.** $S=\dfrac{\pi}{6}\ln 7$. **D.** $S=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln 7$.

Lời giải.

Trên đoạn $[-1;2]$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2x+3}$ luôn nằm phía trên trục Ox.

$S=\displaystyle\int_{-1}^{2} \dfrac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_{-1}^{2} = \dfrac{1}{2}\ln 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{64\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{21\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy thể tích cần tìm là $V_{(H)}=\pi \displaystyle\int_0^2 \left|x^4-4x^2\right|\,\mathrm{d}x = \left|\pi \int_0^2 (x^4-4x^2)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{64\pi}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3; y=0; x=0$ và $x=4$.

A. 4. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_0^4 |x^2-4x+3|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (x^2-4x+3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 (-x^2+4x-3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_3^4 (x^2-4x+3)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_0^1-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_1^3+\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_3^4=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$.

A. $\frac{\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{3\pi}{10}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=0, x=1$.

Thể tích cần tính là $V=\pi\int\limits_0^1 \left|x^4-x\right|\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 (x-x^4)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}$.

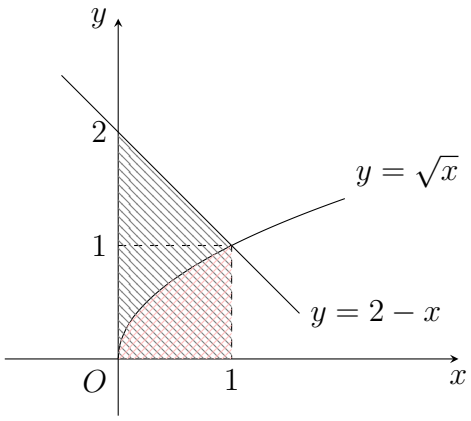
Chọn đáp án D □

Câu 88. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ và trục tung. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh Ox.

A. $V=\frac{5}{6}$. **B.** $V=\frac{11}{6}\pi$. **C.** $V=\frac{11}{6}$. **D.** $V=\frac{5}{6}\pi$.

Lời giải.

Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2-x$, Oy, Ox và $x=1$; (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, Oy, Ox$ và $x=1$. Gọi V_1, V_2 tương ứng là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay $(H_1), (H_2)$ quanh Ox. Khi đó, dễ thấy, $V=V_1-V_2$.



Ta tính được $V_1=\pi\int\limits_0^1 (2-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{7}{3}\pi, V_2=\pi\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi$.

Vậy, $V=V_1-V_2=\frac{11}{6}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2-4$ và $y=-x^2-2x$.

A. $S=9$. **B.** $S=-99$. **C.** $S=3$. **D.** $S=9\pi$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^2-4=-x^2-2x \Leftrightarrow x^2+x-2=0$. Phương trình này có hai nghiệm là 1 và -2. Do đó, diện tích cần tính là

$$S=\int\limits_{-2}^1 \left|x^2-4-(-x^2-2x)\right|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-2}^1 (2x^2+2x-4)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right)\Big|_{-2}^1\right|=9.$$

Chọn đáp án A □

Câu 90. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V=2\sqrt{3}$. **B.** $V=2\sqrt{3}\pi$. **C.** $V=\dfrac{3}{2}\pi$. **D.** $V=\dfrac{3}{2}\pi^2$.

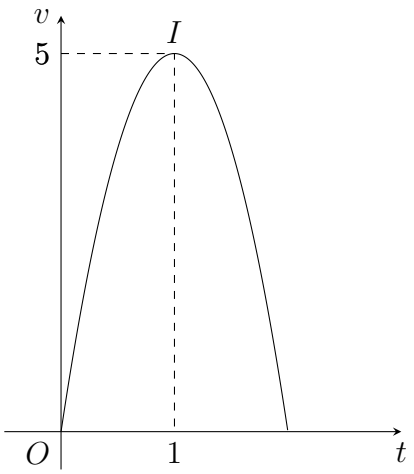
Lời giải.

Thể tích V được tính theo công thức $V=\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x=-\sqrt{3}\cos x\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 91.

Một người chạy bộ trong 2 giờ, với vận tốc $v=v(t)$ (t tính theo giờ, v tính theo km/h). Biết rằng đồ thị của $v=v(t)$ là một parabol có trục đối xứng song song với trục tung và có đỉnh là điểm $I(1;5)$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính quãng đường người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút đầu tiên kể từ lúc chạy (làm tròn đến hàng phần trăm).



A. 2,11 km. **B.** 6,67 km. **C.** 5,63 km. **D.** 3,33 km.

Lời giải.

Ta có $v(0)=0$, cùng với giả thiết về đồ thị của $v(t)$, ta suy ra phương trình của $v(t)$ theo t là $v(t)=-5(t-1)^2+5$. Do đó, $v(t)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=2$. Quãng đường người đó chạy được là

$$s=\int\limits_0^{1{,}5}v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{1{,}5}\left(-5(t-1)^2+5\right)\,\mathrm{d}t=5{,}625\text{ km}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 92. Một vật bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 (m/s), sau 6 giây chuyển động thì phát hiện có chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\dfrac{5}{2}t+a$ (m/s) cho đến lúc dừng hẳn. Tìm v_0, biết trong toàn bộ quá trình, vật di chuyển được 80 m.

A. $v_0=10$ m/s. **B.** $v_0=5$ m/s. **C.** $v_0=12$ m/s. **D.** $v_0=8$ m/s.

Lời giải.

Do $v(6)=v_0$ nên $a=v_0+15$. Suy ra $v(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2a}{5}=\dfrac{2v_0+30}{5}$. Quãng đường vật di chuyển được trong toàn bộ quá trình là

$$S=6v_0+\int\limits_6^{\frac{2v_0+30}{5}}v(t)\,\mathrm{d}t=6v_0+\int\limits_6^{\frac{2v_0+30}{5}}\left(-\frac{5}{2}t+v_0+15\right)\,\mathrm{d}t=6v_0+\frac{v_0^2}{5}.$$

Giải phương trình $6v_0+\dfrac{v_0^2}{5}=80$, ta suy ra $v_0=10$ m/s ($v_0>0$).

Chọn đáp án A □

Câu 93. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y=x^3-3x^2$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $S=\dfrac{5}{4}$. **B.** $S=\dfrac{81}{4}$. **C.** $S=108$. **D.** $S=\dfrac{43}{2}$.

Lời giải.

$y'=3x^2-6x$, $y'(-1)=9$. Suy ra các tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là $d\colon y=9x+5$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3-3x^2=9x+5\Leftrightarrow(x+1)^2(x-5)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=5$. Diện tích cần tính là $S=\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}\left|x^3-3x^2-9x-5\right|\mathrm{d}x=108$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V=\pi(\mathrm{e}-2)$. **B.** $V=\mathrm{e}-2$. **C.** $V=\dfrac{9\pi}{4}$. **D.** $V=\pi^2\mathrm{e}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Ta có

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\pi x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\pi\int\limits_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\&=\pi\mathrm{e}-2\pi\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\pi\mathrm{e}-2\pi x\mathrm{e}^x\Big|_0^1+2\pi\int\limits_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\&=\pi\mathrm{e}-2\pi\mathrm{e}+2\pi\mathrm{e}^x\Big|_0^1=-\pi\mathrm{e}+2\pi\mathrm{e}-2\pi=\pi\mathrm{e}-2\pi.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 95. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ xung quanh trục Ox là

A. $V=2\pi$. **B.** $V=2\pi^2$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ cần tìm là

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_0^\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

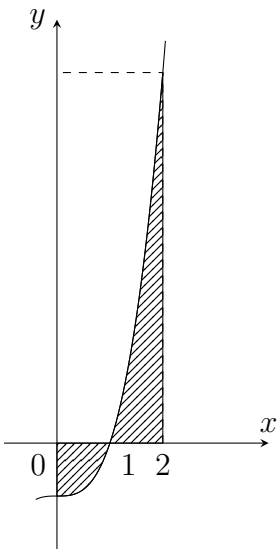
Câu 96. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-1$, đường thẳng $x=2$, trục tung và trục hoành là

A. $S=\dfrac{9}{2}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2$. **D.** $S=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị $(C)\colon y=x^3-1$ và trục hoành

$$x^3-1=0\Leftrightarrow x=1.$$



Vậy

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_0^1|x^3-1|\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2|x^3-1|\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1(1-x^3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(x^3-1)\,\mathrm{d}x\\&=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Big|_1^2\\&=\frac{3}{4}+\frac{11}{4}=\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

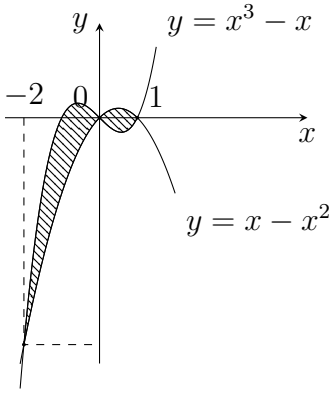
Câu 97. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$ là

A. $S=\dfrac{9}{4}$. **B.** $S=\dfrac{4}{3}$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=\dfrac{37}{12}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2.\end{array}\right.$$



$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{-2}^0\left[(x^3-x)-(x-x^2)\right]\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left[(x-x^2)-(x^3-x)\right]\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^0+\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{37}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 98. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2,\ x=4$ là

A. $S=22$. **B.** $S=36$. **C.** $S=44$. **D.** $S=8$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị $y=x^3-4x$ và trục hoành

$$x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2.\end{array}\right.$$

Vậy

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} |x^3-4x|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |x^3-4x|\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} |x^3-4x|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\int_{-2}^{0} (x^3-4x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3-4x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{2}^{4} (x^3-4x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{2}^{4}\right| = 44. \end{aligned}$$

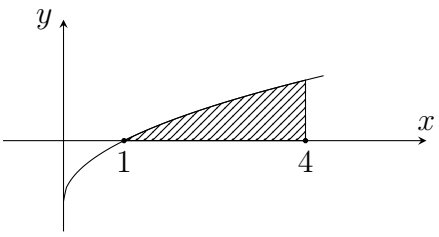
Chọn đáp án C □

Câu 99. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-1$, $y=0$ và $x=4$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $V=\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{7\pi}{6}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $V=\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị $(C)\colon y=\sqrt{x}-1$ và trục hoành: $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$.



Thể tích cần tìm

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_{1}^{4} \left(x+1-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{1}^{4} = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 100. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=2-x^2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

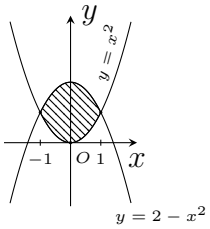
A. $S=2\displaystyle\int_{0}^{1} \left|1-x^2\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=2\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=2\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=2\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2$ và $y=2-x^2$ là

$$x^2=2-x^2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$$



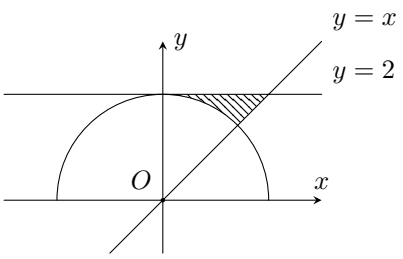
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-1}^{1} \left|2-x^2-x^2\right|\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \left|1-x^2\right|\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 101.

Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=2$, $y=x$ có diện tích là $S=a+b\cdot\pi$ (tham khảo hình vẽ bên). Kết quả nào sau đây là đúng?



A. $a+b<1$. **B.** $a+2b=3$.

C. $a^2+4b^2\geq 5$. **D.** $a>1$, $b>1$.

Lời giải.

Các phương trình hoành độ giao điểm là

☑ $\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

☑ $\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow x=0$.

☑ $x=2$.

Diện tích cần tính là:

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}(2-x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{2}}2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}(2-x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=(2x)\Big|_0^{\sqrt{2}}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=3-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^2 t\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}x$

$=2\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+1.$

Vậy $S=3-\dfrac{\pi}{2}-1=2-\dfrac{1}{2}\cdot\pi$.

Theo kí hiệu của bài toán ta suy ra $a=2$, $b=-\dfrac{1}{2}$. Do đó mệnh đề đúng là $a^2+4b^2\geq 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 102. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x(2017+\sqrt{2019-x^2})$ trên tập xác định của nó. Tính $M-m$.

A. $\sqrt{2019}+\sqrt{2017}$. **B.** $2019\sqrt{2019}+2017\sqrt{2017}$.

C. 4036. **D.** $4036\sqrt{2018}$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}\right]$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 2017 + \sqrt{2019 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{2019 - x^2}} \cdot x \\ &= 2017 + \frac{2019 - 2x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} \\ &= \frac{2017 \cdot \sqrt{2019 - x^2} + 2019 - 2x^2}{\sqrt{2019 - x^2}}. \end{aligned}$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 2017 \cdot \sqrt{2019 - x^2} + 2019 - 2x^2 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2019 - x^2} > 0$. Khi đó $2017t + 2t^2 - 2019 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \text{(thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{2019}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2019 - x^2} = 1 \Leftrightarrow 2019 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2018}$ (thỏa mãn).

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2019}$		$-\sqrt{2018}$		$\sqrt{2018}$		$\sqrt{2019}$
y'	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
y	$-2017\sqrt{2019}$	↘	$-2018\sqrt{2018}$	↗	$2018\sqrt{2018}$	↘	$2017\sqrt{2019}$

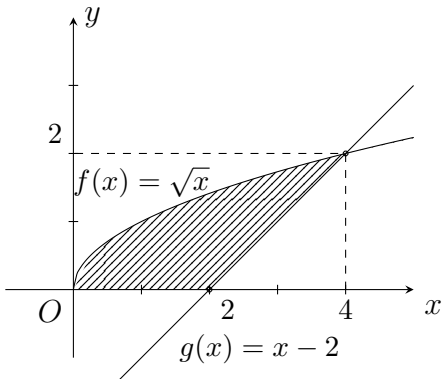
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $M = 2018\sqrt{2018}$, $m = -2018\sqrt{2018} \Rightarrow M - m = 4036\sqrt{2018}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 103.

Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau.

A. $S = \dfrac{8}{3}$. **B.** $S = \dfrac{11}{3}$. **C.** $S = \dfrac{10}{3}$. **D.** $S = \dfrac{7}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta có

$$S = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 104. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

A. 66. **B.** 33. **C.** 67. **D.** 62.

Lời giải.

☑ Ta có $8x=x \Leftrightarrow x=0$.

☑ $8x=x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

☑ $x^3=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |8x-x|\,\mathrm{d}x + \int_1^{2\sqrt{2}} \left|8x-x^3\right|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (8x-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{2\sqrt{2}} \left(8x-x^3\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{7}{2}x^2\Big|_0^1 + \left(4x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{63}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a=63$ và $b=4$ nên $a+b=67$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x=y^2$ và đường thẳng $x=a$ với $a>0$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của vật thể trong xoay được sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành và trục tung. Kí hiệu ΔV là giá trị lớn nhất của $V_1-\dfrac{V_2}{8}$ đạt được khi $a=a_0>0$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $5\Delta V=2\pi a_0$. **B.** $5\Delta V=4\pi a_0$. **C.** $4\Delta V=5\pi a_0$. **D.** $2\Delta V=5\pi a_0$.

Lời giải.

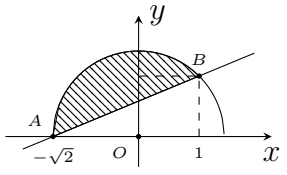
Ta có $V_1=\pi\displaystyle\int_0^a x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{2}$; $V_2=2\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}}(a^2-y^4)\,\mathrm{d}y=\frac{8\pi a^2\sqrt{a}}{5}$; $V_1-\dfrac{V_2}{8}=\dfrac{\pi}{10}a^2(5-2\sqrt{a})$.

Do đó $\Delta V \le \dfrac{\pi}{20}\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}+10-4\sqrt{a}}{5}\right)^5=\dfrac{32\pi}{20}=\dfrac{8\pi}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=a_0=4 \Rightarrow 5\Delta V=2\pi a_0$.

Chọn đáp án A □

Câu 106.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y=\sqrt{2-x^2}$, đường thẳng AB biết $A(-\sqrt{2};0)$, $B(1;1)$ (phần tô đậm như hình vẽ).



A. $\dfrac{\pi+\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{y}{1}\Rightarrow d\colon y=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\left[\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})\right]\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{1} \\ &= I-\frac{1+\sqrt{2}}{2}. \text{ Trong đó } I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t,\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-\sqrt{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Do đó $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}2|\cos t|\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

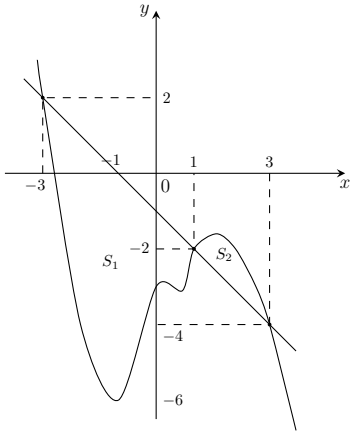
Do đó, $S=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 107.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=-x-1$ lần lượt là M, m. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{-3}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $6+m-M$. **B**. $6-m-M$. **C**. $M-m+6$. **D**. $m-M-6$.



Lời giải.

Tính diện tích S_1. Ta có

$$S_1=\int\limits_{-3}^{1}[-x-1-f(x)]\,\mathrm{d}x=M\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=-M-\int\limits_{-3}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Tính diện tích S_2. Ta có

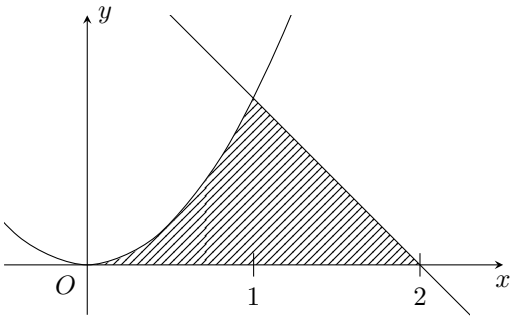
$$S_2=\int\limits_{1}^{3}[f(x)+x+1]\,\mathrm{d}x=m\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=m-\int\limits_{1}^{3}(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = m - M - \int_{-3}^{3} (x+1)\,\mathrm{d}x = m - M - 6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 108. Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ).



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có:

Parabol $y = x^2$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ 0.

Parabol $y = x^2$ cắt đường thẳng $y = -x + 2$ tại điểm có hoành độ 1.

Đường thẳng $y = -x + 2$cắt trục Ox tại điểm có hoành độ 2.

Diện tích hình phẳng đã cho là $S = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 109. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = \sqrt{x}$ quay quanh trục hoành. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $V = \frac{\pi}{6}$. **B.** $V = \frac{\pi}{2}$. **C.** $V = \pi$. **D.** $V = 0$.

Lời giải.

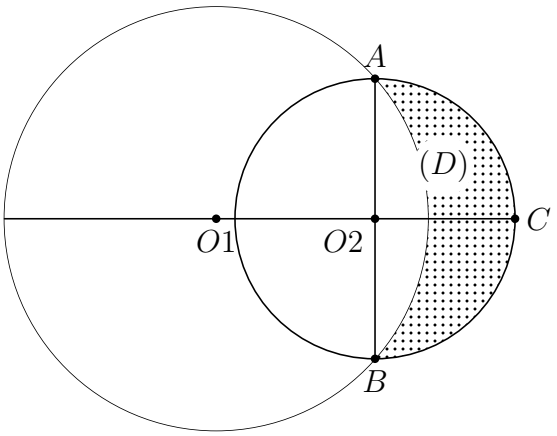
Phương trình hoành độ giao điểm $x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay là

$$V = \pi \int_0^1 |x^2 - x|\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 110. Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2; 3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

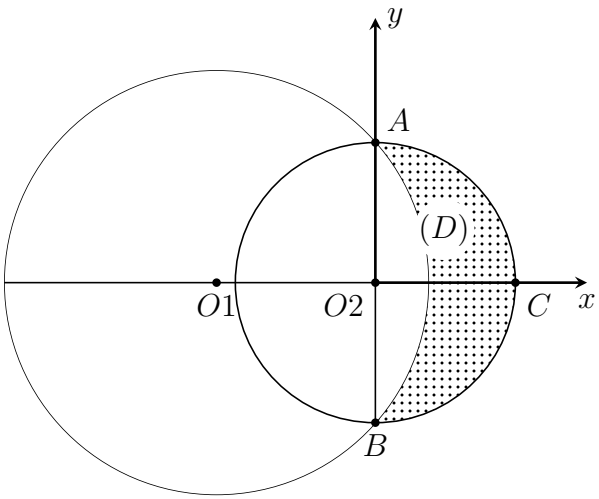


A. $V = 36\pi$. **B.** $V = \frac{68\pi}{3}$.

C. $V = \frac{14\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{40\pi}{3}$.

Lời giải.

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.
Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow$ $(O_1)\colon (x+4)^2 + y^2 = 25$.
Phương trình đường tròn $(O_2)\colon x^2 + y^2 = 9$.



Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - (x+4)^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.
Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 3$.
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.
Ta có $V_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi$.
Lại có $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 [25 - (x+4)^2] \,\mathrm{d}x = \pi \left[25x - \dfrac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \dfrac{14\pi}{3}$.
Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{40\pi}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 111. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của 2 hàm số $y = |x^2 - 4|$ và $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$ là

A. $S = \dfrac{32}{3}$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = \dfrac{64}{3}$. **D.** $S = 8$.

Lời giải.

$$|x^2 - 4| = \frac{x^2}{2} + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = \dfrac{x^2}{2} + 4 \end{cases}\right. \left.\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -(x^2 - 4) = \dfrac{x^2}{2} + 4 \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 = 16 \end{cases}\right. \left.\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ 3x^2 = 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-4}^{0}\left||x^2-4|-\left(\frac{x^2}{2}+4\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\left||x^2-4|-\left(\frac{x^2}{2}+4\right)\right|\mathrm{d}x\\
&= \left|\int_{-4}^{-2}\left(\frac{x^2}{2}-8\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-2}^{0}\frac{-3x^2}{2}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{2}\frac{-3x^2}{2}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{2}^{4}\left(\frac{x^2}{2}-8\right)\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\left(\frac{x^3}{6}-8x\right)\Big|_{-4}^{-2}\right|+\left|\frac{-x^3}{2}\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\frac{-x^3}{2}\Big|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{6}-8x\right)\Big|_{2}^{4}\right|\\
&= \frac{20}{3}+4+4+\frac{20}{3}\\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 112. Một vật chuyển động thẳng có vận tốc và gia tốc tại thời điểm t lần lượt là $v(t)$ m/s và $a(t)$ m/s^2. Biết rằng 1 giây sau khi chuyển động, vận tốc của vật là 1 m/s đồng thời $a(t)+v^2(t)\cdot(2t-1)=0$. Tính vận tốc của vật sau 3 giây.

A. $v(3)=\frac{1}{13}$ m/s. **B.** $v(3)=\frac{1}{7}$ m/s. **C.** $v(3)=\frac{1}{12}$ m/s. **D.** $v(3)=\frac{1}{6}$ m/s.

Lời giải.

Ta có $a(t)+v^2(t)(2t-1)=0 \Leftrightarrow \frac{a(t)}{v^2(t)}=1-2t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v(t)}\right)'=2t-1$.

$\Rightarrow \frac{1}{v(t)}=t^2-t+C$.

Mà $v(1)=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow v(t)=\frac{1}{t^2-t+1} \Rightarrow v(3)=\frac{1}{7}$ (m/s).

Chọn đáp án B □

Câu 113. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}$ có đồ thị (C). Biết $m=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$, $(a;b)=1$ và $m\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ có diện tích bằng 4. Tính $P=2a^2+b^2$.

A. 18. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải.

Xét phương trình $\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow m=\frac{\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}}{2-x^2}$ (do $x=\pm\sqrt{2}$ không phải là nghiệm của phương trình).

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}$.

$f'(x)=x^2-2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên sau

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{3}$

Dễ thấy với $x > \sqrt{2}$ thì $2 - x^2 < 0$ mà $\dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3} < 0$ nên $\dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}}{2 - x^2} < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x > \sqrt{2}$ thì $m = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}}{2 - x^2} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{3}\right) \geq \dfrac{5}{6}$.

Như vậy phương trình $m = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}}{2 - x^2}$ vô nghiệm với $m \in \left(0; \dfrac{5}{6}\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ là

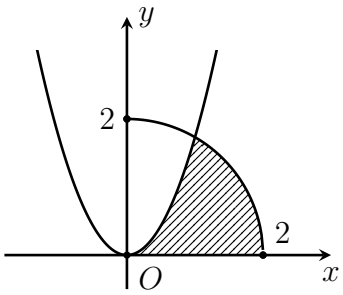
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 2x + 2m + \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{12}x^4 - \frac{mx^3}{3} + x^2 + 2mx + \frac{1}{3}x\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{10}{3} + \frac{4m}{3} = 4 \\ &\Rightarrow m = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nên $a = 1$, $b = 2$ và $P = 2a^2 + b^2 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 114.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng $S = \dfrac{a\pi - \sqrt{b}}{c}, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $T = a + b + c$.



A. 7. **B**. 13. **C**. 11. **D**. 12.

Lời giải.

☑ Ta có $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow 3x^4 = 4 - x^2 \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow x = 1 \in [0; 2]$.

☑ Diện tích của (H) được tính theo công thức

$$S = \int_0^2 \left|\sqrt{3}x^2\right| \mathrm{d}x + \int_1^2 \left|\sqrt{4 - x^2}\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{3}x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Tính $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính

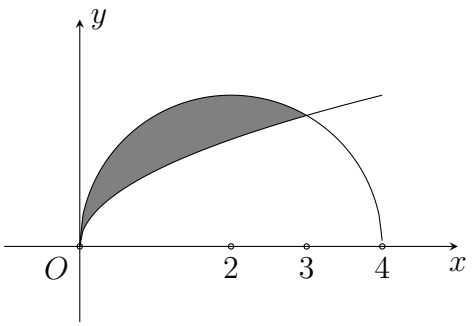
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sqrt{4-(2\cos t)^2}\,\mathrm{d}(2\cos t) = -4\int_{\frac{\pi}{3}}^0 |\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a=4, b=3, c=6 \Rightarrow a+b+c=13$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 115.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4x-x^2}$ (với $0\le x\le 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi+15\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{10\pi-9\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{10\pi-15\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Với $0\le x\le 4$ thì $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_0^3 \left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^3 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x - 2\sqrt{3}.$$

Đặt $x-2=2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$, suy ra

$$\int_0^3 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = (2t+\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{8\pi+3\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $S = \dfrac{8\pi+3\sqrt{3}}{6}-2\sqrt{3} = \dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 116. Một ô tô đang chạy với vận tốc v_0 m/s thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a(t) = -8t$ m/s^2 trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m. Tính v_0.

A. $\sqrt[3]{1269}$ m/s. **B.** $\sqrt[3]{36}$ m/s. **C.** 12 m/s. **D.** 16 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = -4t^2 + C$.

☑ Tại thời điểm $t = 0$, ta có $v_0 = C$.

☑ Tại thời điểm ô tô dừng hẳn $t = t_1$ ta có $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow -4t_1^2 + C = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\sqrt{C}}{2}$.

Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m, do đó

$$\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}t^3 + Ct\right)\Big|_0^{t_1} = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}t_1^3 + Ct_1 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\cdot\frac{C\sqrt{C}}{8} + \frac{C\sqrt{C}}{2} = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad C\sqrt{C} = 36 \Leftrightarrow C = \sqrt[3]{1296}.$$

Vậy $v_0 = \sqrt[3]{1296}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 117. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $d\colon y = 2x$ quay xung quanh trục Ox.

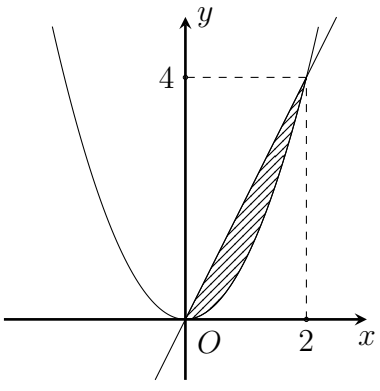
A. $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\displaystyle\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(2x - x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2x$ là

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$



Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2x$ quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 118. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \mathrm{e}^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi\left(5\mathrm{e}^2-3\right)}{6\mathrm{e}^2}$. **C.** $V=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\pi$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\mathrm{e}^{x-1}=2-x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-1}+x-2=0$ (1)

Hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+x-2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và (1) có nghiệm $x=1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Đường thẳng $y=2-x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=2$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^1 (e^{x-1})^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x\\ &= \pi\int_0^1 e^{2x-2}\,\mathrm{d}x+\pi\int_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{e}^{2x-2}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\pi\,(2-x)^3\Big|_1^2\\ &= \frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+\frac{1}{3}\pi=\frac{\pi\left(5\mathrm{e}^2-3\right)}{6\mathrm{e}^2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 119. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

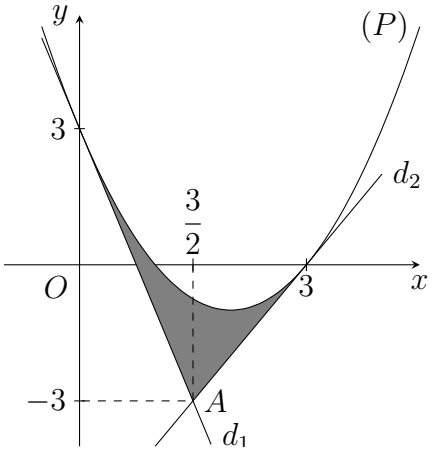
A. $S=9$. **B.** $S=\dfrac{9}{8}$. **C.** $S=\dfrac{9}{4}$. **D.** $S=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=2x-4$.

Giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (P) tại điểm $M(x_0;y_0)$, suy ra đường thẳng d có dạng

$$d\colon y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0.$$



Đường thẳng d đi qua điểm A, nên ta có

$$\begin{aligned}&(2x_0-4)\left(\frac{3}{2}-x_0\right)+x_0^2-4x_0+3=-3\\ \Leftrightarrow\ &3x_0-6-2x_0^2+4x_0+x_0^2-4x_0+6=0\\ \Leftrightarrow\ &-x_0^2+3x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=3.\end{array}\right.\end{aligned}$$

☑ Với $x_0=0\Rightarrow y_0=3$, suy ra phương trình tiếp tuyến d_1 tại điểm $M_1(0;3)$ là $y=-4x+3$.

☑ Với $x_0=3\Rightarrow y_0=0$, suy ra phương trình tiếp tuyến d_2 tại điểm $M_2(3;0)$ là $y=2x-6$.

Từ đó suy ra diện tích hình giới hạn

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\left|(x^2-4x+3)-(-4x+3)\right|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3\left|(x^2-4x+3)-(2x-6)\right|\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 120. Một ô tô chuyển động thẳng với vận tốc ban đầu bằng 10 m/s và gia tốc $a(t) = -2t + 8$ m/s^2, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất thì xe đi được quãng đường bao nhiêu?

A. $\frac{128}{3}$ m. **B.** $\frac{248}{3}$ m. **C.** 70 m. **D.** 80 m.

Lời giải.

Ta có vận tốc ô tô là $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int(-2t+8)\mathrm{d}t = -t^2 + 8t + C$. Vì vận tốc ban đầu là 10 m/s nên ta có $v(t) = -t^2 + 8t + 10 = -(t-4)^2 + 26 \geq 26$. Vậy vận tốc lớn nhất của ô tô bằng 26 m/s, đạt được khi $t = 4$. Do đó quãng đường xe đi được kể từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất là:

$$S = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 (-t^2 + 8t + 10)\mathrm{d}t = \frac{248}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 121. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\ln x}, y = 0$ và $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $V = 2\pi \ln 2$. **B.** $V = 2\pi(\ln 2 - 1)$. **C.** $V = \pi(2\ln 2 - 1)$. **D.** $V = \pi(\ln 2 + 1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, suy ra thể thích $V = \pi \int_1^2 \ln x \mathrm{d}x = \pi(2\ln 2 - 1)$.

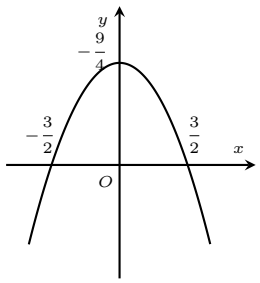
Chọn đáp án C □

Câu 122. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải.

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{9}{4} = c \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$. Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của cửa parabol là: $S = \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$ (m).

Số tiền phải trả là $\dfrac{9}{2} \times 1500000 = 6750000$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 123. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình H xung quanh trục Ox.

A. $V = \pi \ln \dfrac{4}{3}$. **B.** $V = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{4}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{4}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$.

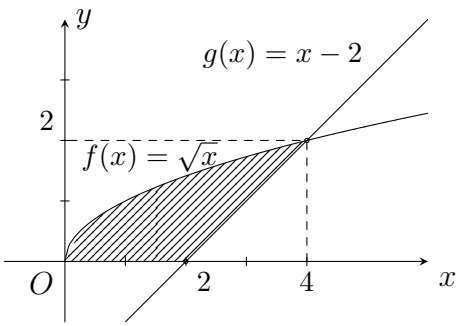
Ta có: $V = \pi \int\limits_0^1 \dfrac{x}{4-x^2} \mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{2} \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}(4-x^2)}{4-x^2} = -\dfrac{\pi}{2} \ln |4-x^2| \Big|_0^1 = -\dfrac{\pi}{2}(\ln 3 - \ln 4) = \dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 124.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$ là

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Diện tích hình phẳng (H) là

$$S = \int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 \left|\sqrt{x} - (x-2)\right| \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^2 + \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 125. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550. **B.** 400. **C.** 670. **D.** 335.

Lời giải.

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng

$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, -5 \le x \le 5 \right\}.$$

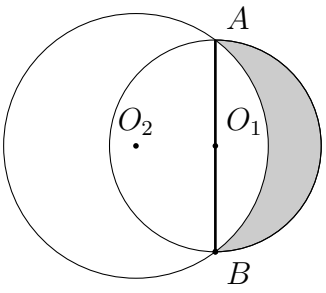
Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(16 - \frac{16x^2}{25}\right) \mathrm{d}x = \pi \left(16x - \frac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5} = \frac{320\pi}{3} \approx 335{,}1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 126.

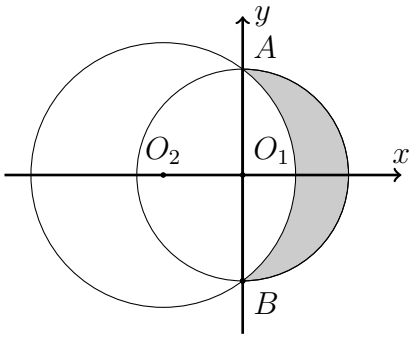
Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính lần lượt bằng 8 và 10. Hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô đậm như hình bên). Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục O_1O_2.



A. $\frac{824\pi}{3}$. **B.** $\frac{97\pi}{3}$. **C.** $\frac{608\pi}{3}$. **D.** $\frac{145\pi}{3}$.

Lời giải.

Gán hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_2A^2 - O_1A^2} = 6$, suy ra $O_2(-6;0)$.

- ☑ $(O_1) : x^2 + y^2 = 64$, suy ra phương trình phần (O_1) nằm phía trên trục hoành là $y = \sqrt{64 - x^2}$.
- ☑ $(O_2) : (x+6)^2 + y^2 = 100$, suy ra phương trình phần (O_2) nằm phía trên trục hoành là $y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$.

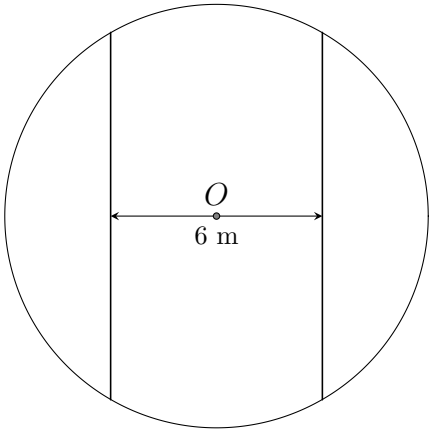
Thể tích cần tìm là

$$V = \pi \int_{0}^{8} (64 - x^2)\,\mathrm{d}x - \pi \int_{0}^{4} [100 - (x+6)^2]\,\mathrm{d}x = \frac{608\pi}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 127.

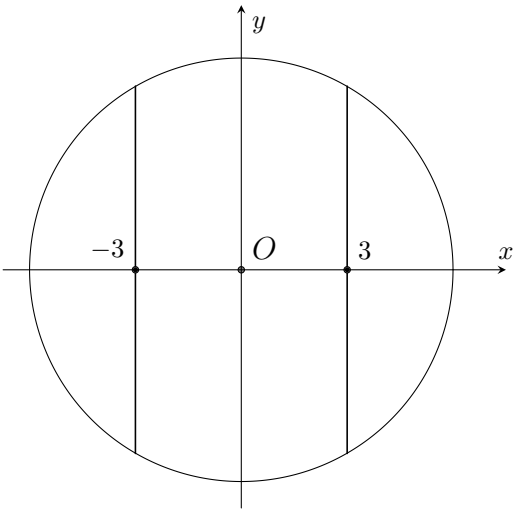
Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 4821232 đồng. **B.** 8412322 đồng.
C. 8142232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

Lời giải.

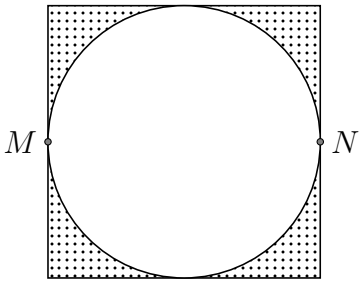
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có phương trình đường tròn (O) là $x^2+y^2=36$. Phần đường tròn phía trên trục Ox có phương trình là $y=f(x)=\sqrt{36-x^2}$. Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị hàm số $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3$, $x=3$. Do đó $S=2\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt $x=6\sin t$, ta tính được $S=18\sqrt{3}+12\pi$. Do đó số tiền cần dùng là $70000\times S\approx 4821322$ đồng.



Chọn đáp án D □

Câu 128.

Cho đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh $3a$ (như hình vẽ bên). Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và hình vuông (phần nằm bên ngoài đường tròn và bên trong hình vuông). Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục MN.



A. $V=\dfrac{9\pi a^3}{2}$. **B.** $V=\dfrac{9\pi a^3}{4}$. **C.** $V=9\pi a^3$. **D.** $V=27\pi a^3$.

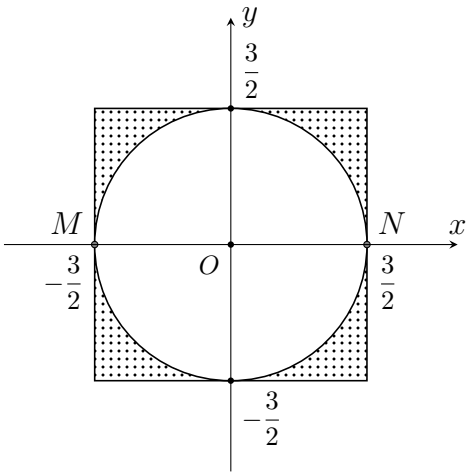
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó, đường tròn tâm O, bán kính $R=\dfrac{3}{2}$ có phương trình là

$$x^2+y^2=\frac{9}{4}.$$

Từ đồ thị suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V=2\pi a^3\int_0^{\frac{3}{2}}\left[\frac{9}{4}-\left(\frac{9}{4}-x^2\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{9\pi a^3}{4}.$$



Chọn đáp án B □

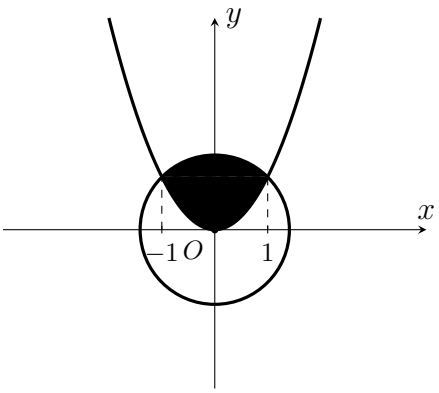
Câu 129. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi parabol $(P):y=x^2$ và đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ, bán kính $R=\sqrt{2}$. Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}+1$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn (C) là $x^2+y^2=2$.
Tọa độ giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1.$$



Từ đồ thị, diện tích hình phẳng (H) là

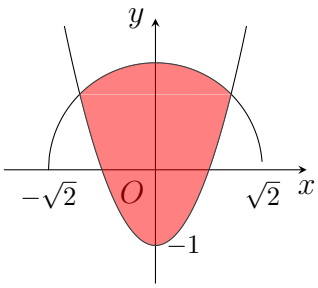
$$S=2\int\limits_0^1 \left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 130.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ (với $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{3\pi-2}{6}$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+2}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi+10}{6}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2-1=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow x=\pm 1$.
Diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2x^3}{3}-x\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$.

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ suy ra $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t;\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\sin t\right)=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.
Khi $x=-1\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}; x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1$.

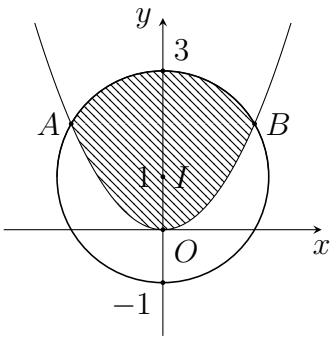
Vậy $S=\dfrac{\pi}{2}+1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 131.

Cho đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng $R=2$, parabol $(P)\colon y=m\cdot x^2$ cắt (C) tại hai điểm A, B có tung độ bằng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (phần gạch sọc ở hình vẽ) có kết quả gần đúng bằng số nào sau đây?

A. 7,0755. **B.** 7,0756. **C.** 5,4908. **D.** 11,6943.



Lời giải.

Ta có $(C)\colon x^2+(y-1)^2=4$.

Xét $A(x;2)\in(C)$, ta có $x^2+1=4\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Suy ra $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.

Vì $A\in(P)$ nên ta có $2=m\cdot 3\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$. Suy ra $(P)\colon y=\dfrac{2}{3}x^2$.

Từ phương trình của (C), ta có $y=\pm\sqrt{4-x^2}+1$ nên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ thuộc đồ thị hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+1$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S=\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\sqrt{4-x^2}+1-\frac{2}{3}x^2\right|\mathrm{d}x\approx 7{,}075541545$.

Chọn đáp án A □

Câu 132. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

A. $P=32$. **B.** $P=23$. **C.** $P=43$. **D.** $P=41$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \log_x 3+\log_{x^3}^2+\log_{x^3}^3+\cdots+log_{x^3}^n=190\cdot\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 3+2\cdot\log_x 3+3\cdot\log_x 3+\cdots+n\cdot\log_x 3=190\cdot\log_x 3$

$\Leftrightarrow (1+2+3+\cdots+n)\log_x 3=190\cdot\log_x 3\Leftrightarrow\dfrac{n(n+1)}{2}=190\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=19\,(\text{thoả mãn})\\ n=-20\,(\text{loại})\,.\end{array}\right.$

Vậy $P=2n+3=41$.

Chọn đáp án D □

Câu 133. Gọi V_x và V_y lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi phép quay hình elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1(a<b)$ xung quanh trục Ox, Oy. Hỏi khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $V_x<V_y$. **B.** $V_x>V_y$. **C.** $V_x=V_y$. **D.** $V_x\leqslant V_y$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\\ x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right).\end{cases}$

$$V_x=2\pi\int\limits_0^a y^2\,\mathrm{d}x=2\pi b^2\int\limits_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a=\frac{4\pi ab^2}{3}=\frac{4\pi ab}{3}b.$$

$$V_y=2\pi\int\limits_0^a x^2\mathrm{d}y=2\pi a^2\int\limits_0^a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4\pi ba^2}{3}=\frac{4\pi ab}{3}a.$$

Vì $a > b$ nên $V_x > V_y$.

Chọn đáp án (B) □

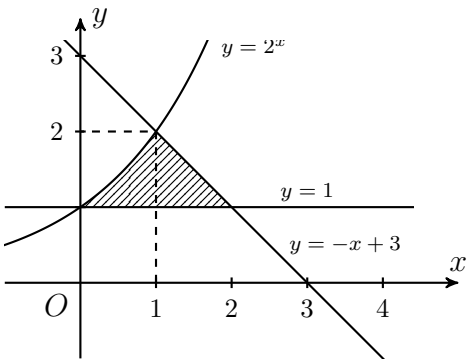
Câu 134. Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = -x + 3$ và $y = 1$ là

A. $S = \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{2}$. **B.** $S = \dfrac{1}{\ln 2} + 3$. **C.** $S = \dfrac{1}{\ln 2} + 1$. **D.** $S = \dfrac{47}{50}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường ta có:
$2^x = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1$; $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $-x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
Diện tích cần tìm là

$$S = \int_0^1 (2^x - 1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-x + 3 - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 135. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ được xác định bởi công thức

A. $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} (3x - x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \left|\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x - x^3)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ là $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} |(x^3 - x) - (2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x^3 - 3x|\,\mathrm{d}x$.
Bảng xét dấu $x^3 - 3x$

x	-1		0		1
$x^3 - 3x$		$+$	0	$-$	

Do đó dựa vào bảng ta có: $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

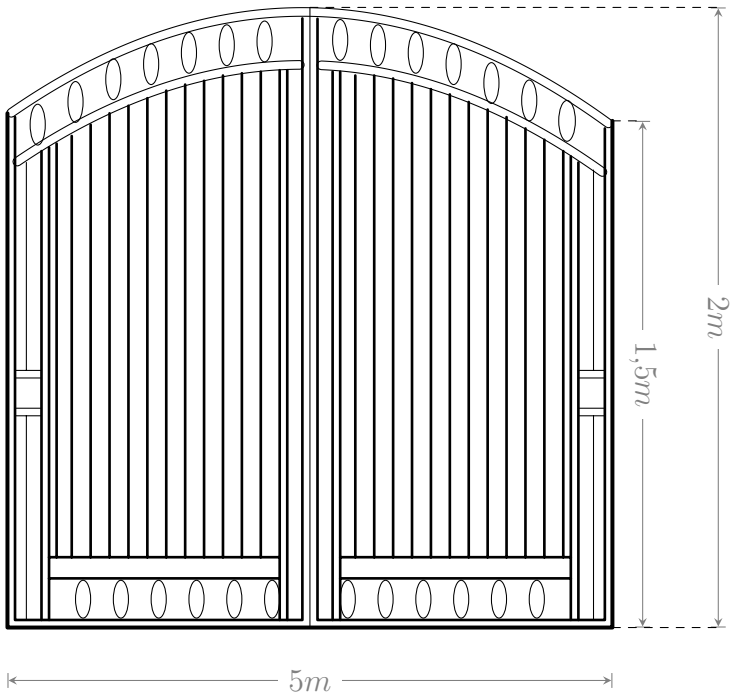
Chọn đáp án (A) □

Câu 136.

Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 6.620.000 đồng. **B**. 6.320.000 đồng.

C. 6.520.000 đồng. **D**. 6.417.000 đồng.



Lời giải.

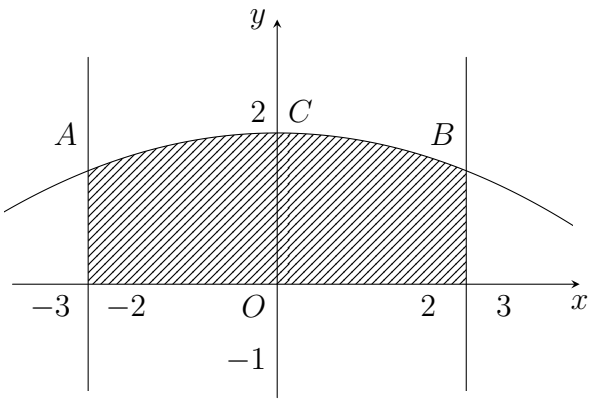
Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$, với $a;b;c\in\mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2+b(-2,5)+c=1,5 \\ a(2,5)^2+b(2,5)+c=1,5 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{25} \\ b=0 \\ c=2. \end{cases}$$



Khi đó phương trình Parabol là $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2,5$; $x=2,5$.

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2,5}^{2,5}=\frac{55}{6}$.

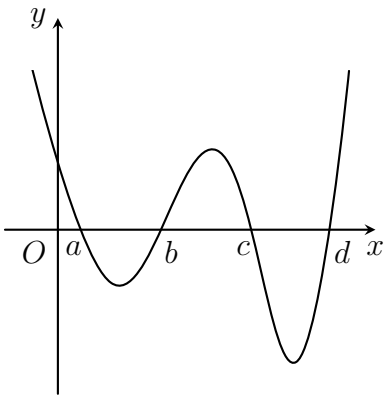
Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$S\times 700000=\dfrac{55}{6}\times 700000\approx 6.417.000$ (đồng).

Chọn đáp án (D) □

Câu 137.

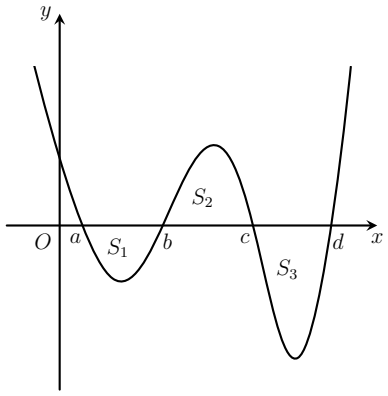
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A. $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$. **B.** $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$. **D.** $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$.

Lời giải.



Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a, x=b$; $x=b, x=c$; $x=c, x=d$ (như hình vẽ).

Ta có:

$$S_1<S_2\Rightarrow\int\limits_a^b[-f'(x)]\,\mathrm{d}x<\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow[-f(x)]\Big|_a^b<f(x)\Big|_b^c$$

$$\Leftrightarrow -f(b)+f(a)<f(c)-f(b)\Leftrightarrow f(a)<f(c)\ (1).$$

$$S_2<S_3\Rightarrow\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x<\int\limits_c^d[-f'(x)]\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(x)\Big|_b^c<[-f(x)]\Big|_c^d$$

$$\Leftrightarrow f(c)-f(b)<-f(d)+f(c)\Leftrightarrow f(b)>f(d)\ (2).$$

Từ (1) suy ra khẳng định $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$ và $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$ là sai.

Từ (2) suy ra khẳng định $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$ sai. Vậy khẳng định $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$ đúng.

Nhận xét:

- Có thể lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ hoặc sử dụng $S_1>0$ để suy ra $f(a)>f(b)$.
- Đề xuất bổ sung phương án nhiễu $f(b)>f(d)>f(c)>f(a)$.

Chọn đáp án A □

Câu 138. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}$, $y=1-x$ và trục Ox. Diện tích S của hình (H) bằng bao nhiêu?

A. $S=\dfrac{4}{3}$. **B.** $S=\dfrac{7}{6}$. **C.** $S=\dfrac{3}{2}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

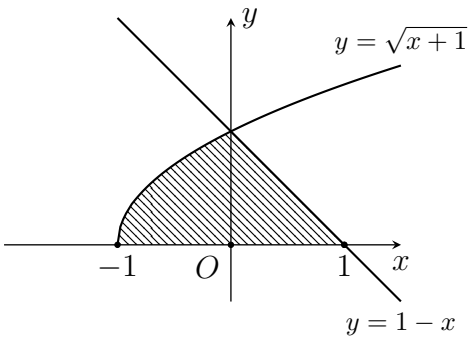
$$\sqrt{x+1}=1-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1-2x+x^2\\x\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x=0\\x\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=0.$$

Đồ thị $y=\sqrt{x+1}$ cắt Ox tại điểm $x=-1$ và đồ thị $y=1-x$ cắt Ox tại $x=1$.



Vậy $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{7}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 139. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y=x^2$ và $y=x+2$. Tính diện tích S của hình (H).

A. $S=\dfrac{3}{2}$. **B.** $S=-\dfrac{9}{2}$. **C.** $S=\dfrac{9}{2}$. **D.** $S=\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2=x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}|x^2-x-2|\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 140. Cho parabol $(P):y=x^2+2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** $\dfrac{21}{4}$.

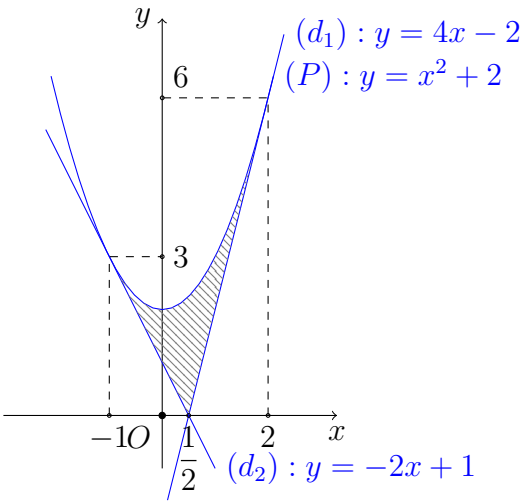
Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $N(2;6)$ là $(d_1):y=4x-2$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(-1;3)$ là $(d_2):y=-2x+1$.

(d_1) cắt (d_2) tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. Ta có diện tích

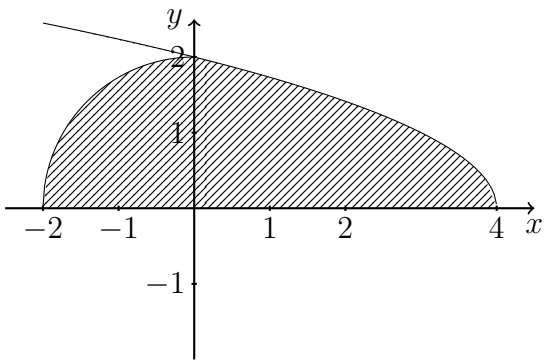
$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2+2x-1)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2+2-4x+2)\mathrm{d}x=\frac{7}{4}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 141.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R=2$, đường cong $y=\sqrt{4-x}$ và trục hoành (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục Ox.



A. $V=\dfrac{40\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{53\pi}{6}$.

C. $V=\dfrac{67\pi}{6}$. **D.** $V=\dfrac{77\pi}{6}$.

Lời giải.

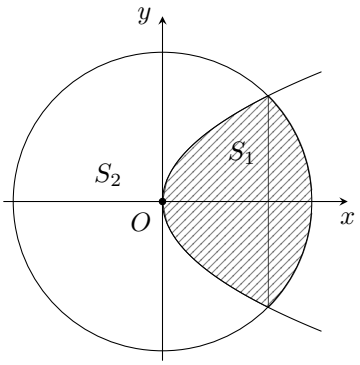
Phần đường tròn có phương trình hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$, nên thể tích khi quay hình giới hạn quanh trục Ox là

$$\pi\int\limits_{-2}^{0}(4-x^2)\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_{0}^{4}(4-x)\,\mathrm{d}x=\frac{40\pi}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 142.

Biết rằng đường parabol $(P)\colon y^2=2x$ chia đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (hình vẽ bên). Khi đó $S_2-S_1=a\pi-\dfrac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.



A. $S=13$. **B.** $S=14$. **C.** $S=15$. **D.** $S=16$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ diện tích $S=8\pi$.

Xét giao điểm của (P) và (C) là $\begin{cases}y^2=2x\\x^2+y^2=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x^2+2x=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Suy ra $S_1=2\displaystyle\int\limits_0^2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+2\int\limits_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+2\pi\Rightarrow S_2=S-S_1=6\pi-\frac{4}{3}.$

Vậy $\Rightarrow S_2-S_1=4\pi-\dfrac{8}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=8\\c=3.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 143. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d\colon y=x-1$ và $x=a$, $x=2a$ $(a>1)$ bằng $\ln 3$.

A. $a=1$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2-2x}{x-1}=x-1\Rightarrow x^2-2x=x^2-2x+1\Rightarrow$ vô nghiệm.

$$\Rightarrow S = \int\limits_{a}^{2a} \left| \frac{x^2-2x}{x-1} - (x-1) \right| \mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{2a} \left| \frac{-1}{x-1} \right| \mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{2a} \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x = \ln(x-1)\Big|_{a}^{2a} = \ln \frac{2a-1}{a-1} = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1} = 3 \Leftrightarrow a = 2.$$

Chọn đáp án D □

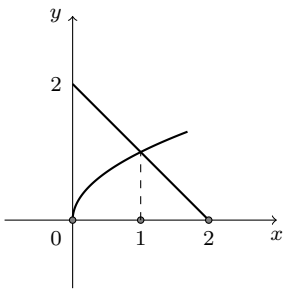
Câu 144. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x+y-2=0$; $y=\sqrt{x}$; $y=0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{6\pi}{5}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=2-x$; $g(x)=\sqrt{x}$; $h(x)=0$.

Xét $2-x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geqslant 0 \\ (2-x)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$



Ta có $(H_1): \begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=0 \\ x=0, x=1 \end{cases}$ và $(H_2): \begin{cases} x+y-2=0 \\ y=0 \\ x=1, x=2 \end{cases}$.

Cho (H_1), (H_2) quay quanh Ox có thể tích lần lượt là V_1, V_2 và thể tích cần tìm là $V=V_1+V_2$.

$$V_1 = \pi \int\limits_{0}^{1} g^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

$$V_2 = \pi \int\limits_{1}^{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{1}^{2} (2-x)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} (x-2)^2\,\mathrm{d}(x-2) = \pi \cdot \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_{1}^{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy $V=V_1+V_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 145. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$, với $a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{7}{10}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{51}{50}; \frac{11}{10}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{10}; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1; \frac{51}{50}\right)$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{0}^{a} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{a} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{a} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{2} - 1 - \cos a - \sin a. \end{aligned}$$

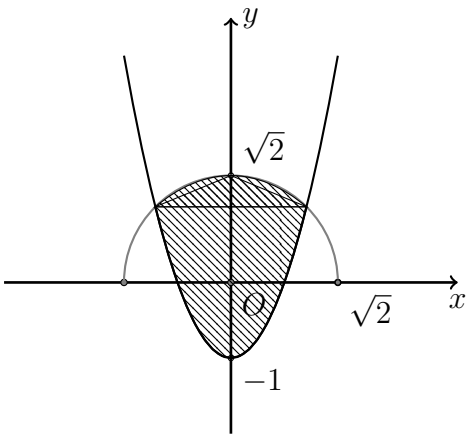
Theo bài ra ta có

$$\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-2+4\sqrt{2}-2\cos a-2\sin a \Leftrightarrow \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sin\frac{5\pi}{12}.$$

$\Rightarrow a+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12} \Leftrightarrow a=\dfrac{\pi}{3}\approx 1{,}047 \Rightarrow a\in\left(\dfrac{51}{10};\dfrac{11}{10}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 146. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ với $(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{3\pi+2}{6}$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+10}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi-2}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=f(x)=2x^2-1$ và nửa đường tròn $y=g(x)=\sqrt{2-x^2}$ $(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ là

$2x^2-1=\sqrt{2-x^2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\ge 1\\ 2-x^2=4x^4-4x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge\dfrac{1}{2}\\ 4x^4-3x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=-\dfrac{1}{4}\ \text{(vô lý)}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=1\vee x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right..$$

$$S=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|2x^2-1-\sqrt{2-x^2}|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}x=A-2B+C$$

Trong đó:

☑ $A=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$ với $t\in[-\pi;\pi]$

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$; $x=-1 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $A=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2-2cos^2t}\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2|\cos t|\cdot\cos t dt$

$=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cdot\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right)\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,\mathrm{d}t+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{\pi}{2}=1+\frac{\pi}{2}$

☑ $B=\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

☑ $C=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x=2$

Suy ra $S=A-2B+C=1+\dfrac{\pi}{2}-2\cdot\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 147. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ quanh trục Ox.

A. $V=\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})$. **B.** $V=\pi\mathrm{e}^2$. **C.** $V=\pi(\mathrm{e}^2+\mathrm{e})$. **D.** $V=\pi\mathrm{e}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích vật thể tròn xoay ta có

$V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$=\pi x\mathrm{e}^x|_1^2-\pi\displaystyle\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\pi\left(2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x|_1^2\right)=\pi\mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 148. Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số k diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần đất còn lại?

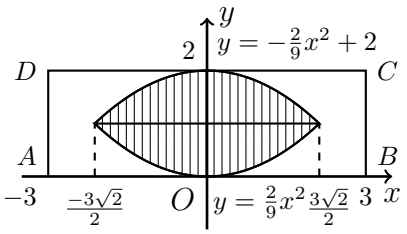
A. $=\dfrac{1}{3}$. **B.** $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $=\dfrac{1}{2}$. **D.** $=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải.

Giả sử mảnh vườn được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên. Khi đó phương trình hai parabol có đỉnh là trung điểm AB, CD lần lượt là $y=\dfrac{2}{9}x^2$ và $y=-\dfrac{2}{9}x^2+2$. Xét phương trình

$\dfrac{2}{9}x^2=-\dfrac{2}{9}x^2+2\Rightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Miền diện tích giới hạn bởi các parabol (như hình vẽ) có diện tích là



$$S=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left|-\frac{2}{9}x^2+2-\frac{2}{9}x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(2-\frac{4}{9}x^2\right)\mathrm{d}x=4\sqrt{2}.$$

Ta có $S_{ABCD}=12\Leftrightarrow k=\dfrac{4\sqrt{2}}{12-4\sqrt{2}}=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$ được tính theo công thức.

A. $\displaystyle\int\limits_b^a|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\displaystyle\int\limits_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int\limits_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 150. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4;2)$ và trục hoành là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

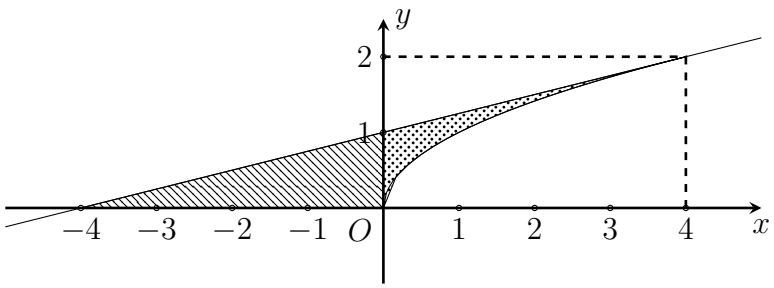
Lời giải.

TXD: $\mathscr{D}=[0;+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(4;2)$ là :

$y=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}(x-4)+2\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x+1$.



Tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là nghiệm: $\dfrac{1}{4}x+1=0\Leftrightarrow x=-4$.

Ta chia miền diện tích giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x},Ox$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại điểm $M(4;2)$ thành hai miền S_1(phần gạch chéo) và S_2 (phần chấm) như ở hình vẽ trên.

$$S_1=\int\limits_{-4}^{0}\frac{1}{4}x+1\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{8}+x\right)\Big|_{-4}^{0}=2.$$

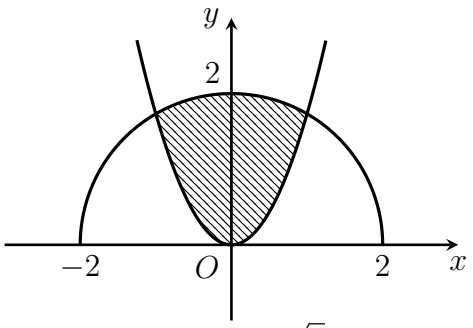
$$S_2=\int\limits_{0}^{4}\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{8}+x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_{0}^{4}=\frac{2}{3}$$

Vậy $S=S_1+S_2=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 151.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ với $-2\le x\le 2$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{2\pi+5\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi+5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm là $x=\pm 1$. Do đó diện tích cần tìm là

$$S=\int_{-1}^{1}(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x=I-\frac{2\sqrt{3}}{3},\text{ với } I=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Để tính I đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Nên $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2 t\,\mathrm{d}t=(2t-\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$.

Do đó $S=\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 152. Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t)=\dfrac{10000}{1+2t}$ với $t\ge 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

A. 17094. **B.** 9047. **C.** 32118. **D.** 8047.

Lời giải.

$F(t)=\displaystyle\int\frac{10000}{1+2t}\,\mathrm{d}t=5000\ln|1+2t|+C$.

$F(0)=1000\Leftrightarrow 5000\ln|1+2\cdot 0|+C=1000\Leftrightarrow C=1000$.

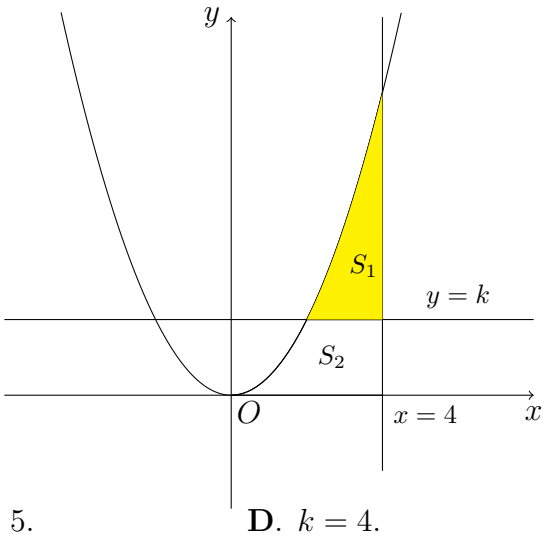
Số lượng vi khuẩn sau 2 giờ:

$F(2)=5000\ln|1+2\cdot 2|+1000=5000\ln(5)+1000\approx 9047$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 153.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=0, x=0, x=4$. Đường thẳng $y=k(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



A. $k=8$. **B.** $k=3$. **C.** $k=5$. **D.** $k=4$.

Lời giải.

Ta có hình (H) giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}, x=4, y=0, y=16$, khi đó diện tích hình (H) là: $S=\displaystyle\int\limits_0^{16}(4-\sqrt{y})\,\mathrm{d}x=\dfrac{64}{3}$.

Gọi (H_1) là hình giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}, x=4, y=0, y=k$, khi đó diện tích hình (H_1) là: $S_1=\displaystyle\int\limits_0^{k}(4-\sqrt{y})=4k-\dfrac{2}{3}\sqrt{k^3}$.

$$S_1=S_2=\frac{S}{2}\Leftrightarrow 4k-\frac{2}{3}\sqrt{k^3}=\frac{32}{3}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\left(\sqrt{k}\right)^3+4\left(\sqrt{k}\right)^2-\frac{32}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\sqrt{k}=2+2\sqrt{3}\\ \sqrt{k}=2-2\sqrt{3}\\ \sqrt{k}=2\end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{bmatrix}k=16+8\sqrt{3}\\ k=16-8\sqrt{3}\\ k=4.\end{bmatrix}$$

Kết hợp với điều kiện $0<k<16$ ta được $k=4$.

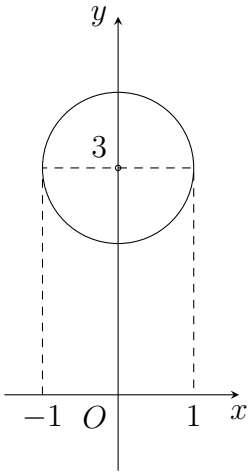
Chọn đáp án (D) □

Câu 154. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C)\colon x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

A. $V=6\pi$. **B.** $V=6\pi^3$. **C.** $V=3\pi^2$. **D.** $V=6\pi^2$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C)\colon x^2+(y-3)^2=1\Leftrightarrow \begin{bmatrix}y=3+\sqrt{1-x^2}\\ y=3-\sqrt{1-x^2}\end{bmatrix}$.



Khi đó hình xuyến cái phao được tạo thành khi quay đường tròn tâm $I(0;3)$ và có bán kính $r=1$ xung quanh trục Ox.

$$\Rightarrow V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x=12\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó

$$V=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=6\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=6\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=6\pi^2.$$

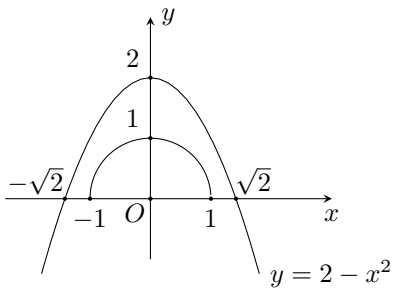
Chọn đáp án (D) □

Câu 155. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{1-x^2}, y=2-x^2$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}-\pi$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$, $2-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.



Gọi S là diện tích hình phẳng cần tính, S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y=2-x^2$ và trục Ox, S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{1-x^2}$ và trục Ox. Khi đó $S=S_1-S_2$.

Ta có $S_1=\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

S_2 chính là diện tích của nửa hình tròn bán kính 1, do đó $S_1=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $S=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 156. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{64\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{20\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta có $x^2\cdot 2x\geq 0,\ \forall x\in[0;2]$. Khi đó

$$V=\pi\int\limits_0^2|x^4-4x^2|\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2(-x^4+4x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 157. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$ (m/s^2). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2200}{3}$ m. **B.** $\dfrac{4000}{4}$ m. **C.** $\dfrac{1900}{3}$ m. **D.** $\dfrac{4300}{3}$ m.

Lời giải.

Ta có $a(t)=v'(t)\Rightarrow v(t)=\displaystyle\int\left(3t+t^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+c$, khi $t=0$ thì $v=10\Rightarrow c=10$.

Mặt khác $v(t)=s'(t)\Rightarrow s=\displaystyle\int\limits_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\,\mathrm{d}x=\frac{4300}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 158. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lại đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 10 m. **B.** 5 m. **C.** 20 m. **D.** 8 m.

Lời giải.

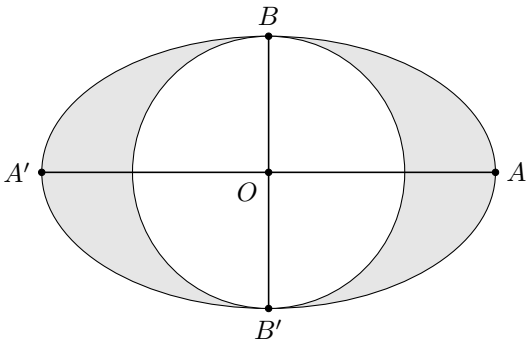
Thời điểm ô tô dừng hẳn $v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (s).

Quãng đường từ lúc đạp phanh tới khi ô tô dừng hẳn $s = \displaystyle\int_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = 10$ (m).

Chọn đáp án A □

Câu 159.

Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm 0 có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'.

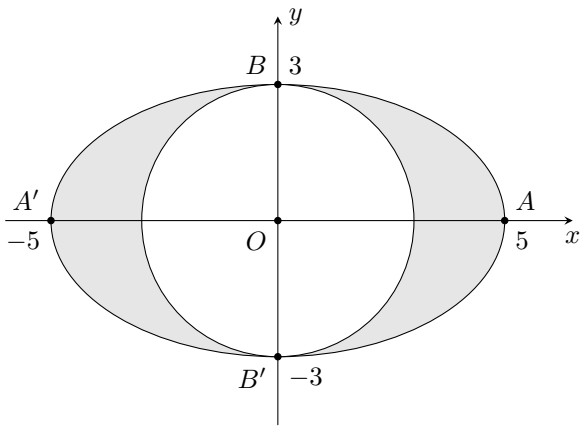


A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 60\pi$.

C. $V = 24\pi$. **D.** $V = \dfrac{20\pi}{3}$.

Lời giải.

Xét hình phẳng trong hệ tọa độ Oxy, nhận 0 làm gốc tọa độ và tọa độ các điểm lần lượt là $A(5;0)$, $A'(-5;0)$, $B(0;3)$, $B'(0;-3)$.



Ta có phương trình của elip và đường tròn lần lượt là $(E)\colon \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và $(C)\colon x^2 + y^2 = 9$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra là $V = \pi \displaystyle\int_{-5}^{5} 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)\mathrm{d}x - \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 24\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 160. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s^2. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. $\dfrac{43}{3}$ m. **B.** $\dfrac{430}{3}$ m. **C.** $\dfrac{4300}{3}$ m. **D.** $\dfrac{43000}{3}$ m.

Lời giải.

Vận tốc của vật sau khi tăng tốc có phương trình $v(t) = \displaystyle\int (3t + t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$.

Vì $v(0) = 10$ nên $c = 10$. Suy ra $v(t) = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + 10$.

Do đó, trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc vật được quảng đường

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t\right)\Big|_0^{10} = \frac{4300}{3}\ (\mathrm{m}).$$

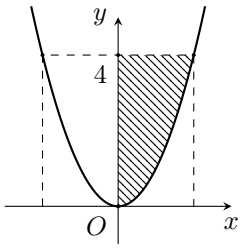
Chọn đáp án C □

Câu 161. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $y = 4$. Khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục tung ta được khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 6π. **B.** 10π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Lời giải.

Xét phần hình phẳng bên phải trục tung, ta có $x = \sqrt{y}$. Thể tích khối tròn xoay khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục tung có thể tích



$$V = \pi \int_0^4 y \,\mathrm{d}y = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 162. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_{\mathrm{A}}(t) = 16 - 4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33 m. **B**. 12 m. **C**. 31 m. **D**. 32 m.

Lời giải.

Dễ thấy ô tô A dừng lại sau 4 giây. Quãng đường mà ô tô A di chuyển từ lúc bắt đầu hãm phanh đến lúc dừng lại là

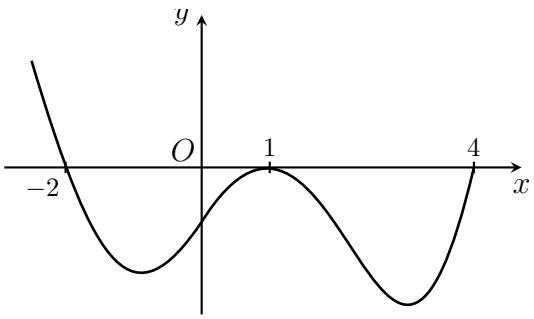
$$\int_0^4 (16 - 4t)\,\mathrm{d}t = \left(16t - 2t^2\right)\Big|_0^4 = 32 \text{ (m)}.$$

Vậy ô tô A phải bắt đầu hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất $32 + 1 = 33$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 163.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị của biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng



A. 21. **B**. 9. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = -9 \Rightarrow f(1) - f(-2) = -9.$ (1)

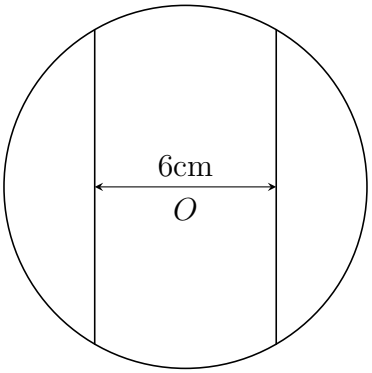
Ta có $\displaystyle\int_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = -12 \Rightarrow f(4) - f(1) = -12.$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(-2) + f(4) = 9 - 12 + 2f(1) = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 164.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).



A. 8142232 đồng. **B**. 4821232 đồng.
C. 4821322 đồng. **D**. 8412322 đồng.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$.
Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3; x=3 \Rightarrow S=2\displaystyle\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=6\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=6\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}$; $x=3\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S=2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 t\,\mathrm{d}t=36\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,\mathrm{d}t=18\,(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi.$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000\cdot S\approx 4821322$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 165. Cho một vật thể (T), gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Cắt vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x (với $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$) thiết diện thu được là một nửa hình tròn có bán kính bằng $\sin x$. Tính thể tích V của vật thể B.

A. $V=\dfrac{\pi^2}{8}$. **B**. $V=\dfrac{\pi}{8}$. **C**. $V=\dfrac{\pi}{4}$. **D**. $V=\dfrac{\pi^2}{4}$.

Lời giải.

Tại điểm có hoành độ x, diện tích thiết diện là $S=\dfrac{1}{2}\pi\sin^2 x$.
Thể tích vật thể B theo công thức tích phân là

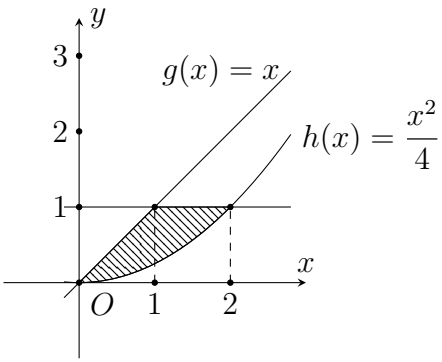
$$V=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}S\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 166.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=1$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{4}$ trong miền $x\geq 0$, $y\leq 1$ là $\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Khi đó $b-a$ bằng

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 1.



Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int\limits_0^1\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^1+\left(x-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_1^2=\frac{5}{6}.$$

Khi đó $a=5$, $b=6$. Vậy $b-a=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 167. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P)\colon y=x^2-4x+3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9. **B**. $\dfrac{9}{8}$. **C**. $\dfrac{9}{4}$. **D**. $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(P)\Rightarrow y_0=x_0^2-4x_0+3$.
Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M là: $d\colon y=(2x_0-4)(x-x_0)+x_0^2-4x_0+3$.
Vì tiếp tuyến đi qua điểm A nên thay tọa độ điểm A vào d ta được

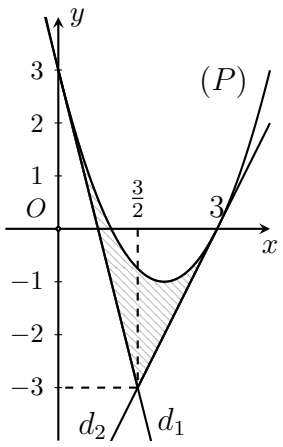
$$\begin{aligned}&-3=(2x_0-4)(\frac{3}{2}-x_0)+x_0^2-4x_0+3\\ \Leftrightarrow\ &x_0^2-3x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_0=0\\&x+0=3.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

- ☑ Với $x_0=0\Rightarrow$ tiếp tuyến $d_1\colon y=-4x+3$.
- ☑ Với $x_0=3\Rightarrow$ tiếp tuyến $d_2\colon y=2x-6$.

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm phương trình

$$-4x+3=2x-6\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Vẽ đồ thị (P) và hai đường thẳng d_1; d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ như hình vẽ.



Khi đó diện tích cần tính là phần được bôi đen bên hình được xác định bởi

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[(x^2-4x+3)-(-4x+3)\right] \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left[(x^2-4x+3)-(2x-6)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

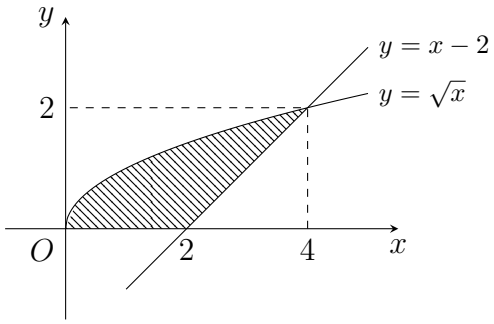
Câu 168. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0, y=\sqrt{x}, y=x-2$.

A. $\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** 8π.

Lời giải.

Xét các phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=x-2 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=2. \end{cases}$$



Suy ra thể tích của vật thể tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_2^4 \left|(x-2)^2-(\sqrt{x})^2\right| \mathrm{d}x = 2\pi + \pi I.$$

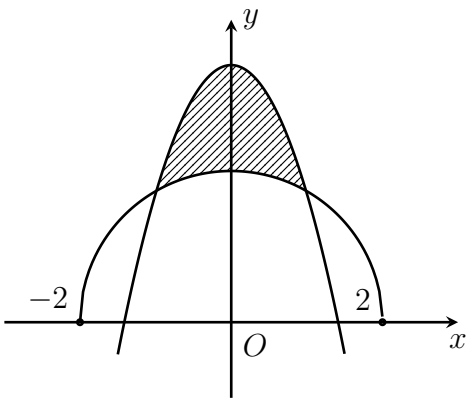
Ta có $I = \displaystyle\int_2^4 \left|(x-2)^2-(\sqrt{x})^2\right| \mathrm{d}x = \int_2^4 \left(-x^2+5x-4\right) \mathrm{d}x = \frac{10}{3}$.

Vậy $V = 2\pi + \dfrac{10}{3}\pi = \dfrac{16\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 169.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-\sqrt{3}\,(x^2-2)$, và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $-2 \le x \le 2$) (*phần tô đậm như hình vẽ*). Diện tích của hình (H) bằng



A. $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{6}$.

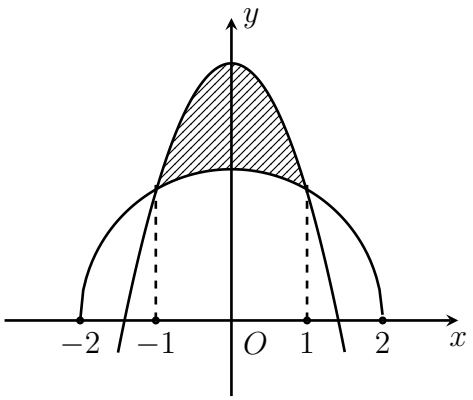
C. $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2\le 0 \\ 3(x^4-4x^2+4)=4-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x^2\le 2 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 1.$$



Suy ra, diện tích của hình H là

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left|-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)-\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

☑ Xét tích phân $I_1=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}-\sqrt{3}\left(x^2-2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

☑ Xét tích phân $I_2=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=2\sin t$ ta được

$$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}2\cos t\sqrt{4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}4\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}2\left(\cos 2t+1\right)\,\mathrm{d}t=\left(\sin 2t+2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}.$$

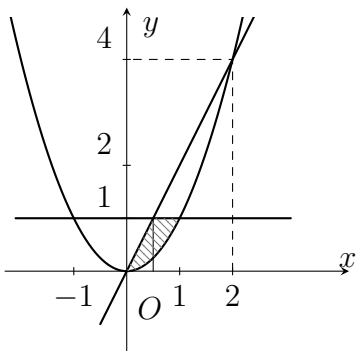
Từ đây ta tính được $S=I_1-I_2=\dfrac{10}{\sqrt{3}}-\left(\sqrt{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 170. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x$, $y=x^2$, $y=1$ trên miền $x\ge 0$, $y\le 1$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



$$S=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(2x-x^2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$$

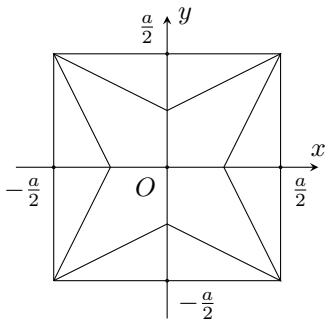
$$=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}+\left(x-x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{5}{24}+\frac{5}{24}=\frac{5}{12}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 171.

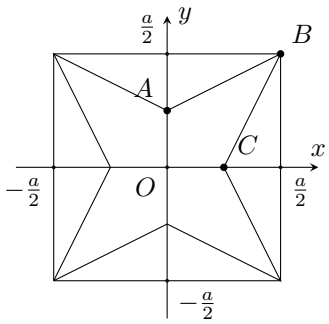
Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.



A. $V=\dfrac{5\pi a^3}{24}$. **B.** $V=\dfrac{5\pi a^3}{48}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi a^3}{96}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi a^3}{24}$.

Lời giải.

Ta có $AB\colon y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{4}$, $BC\colon y=2x-\dfrac{a}{2}$.



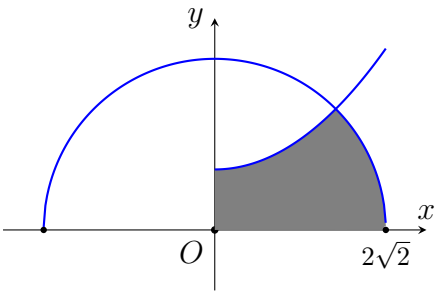
Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao quanh trục Ox là

$$\begin{aligned} V &= 2\left[\pi\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{a}{4}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}}\left(2x-\frac{a}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\\ &= 2\pi\left(\frac{7a^3}{96}-\frac{19a^3}{48}\right)=\frac{5\pi a^3}{48}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 172.

Cho $(\mathscr{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ (với $0\le x\le 2\sqrt{2}$), nửa đường tròn $y=\sqrt{8-x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của hình $(\mathscr{H})$ bằng



A. $\dfrac{3\pi+4}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi+2}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+2}{3}$. **D.** $\dfrac{3\pi+14}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parapol $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ và nửa đường tròn $y=\sqrt{8-x^2}$ là

$$\sqrt{8-x^2}=\frac{1}{4}x^2+1\Leftrightarrow x=2.$$

Từ đồ thị, ta có diện tích hình phẳng $(\mathscr{H})$ là

$$S=\int\limits_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

☑ $S_1=\displaystyle\int\limits_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{12}+x\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}$.

☑ $S_2 = \displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x = 2\sqrt{2}\sin t \left(t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$; $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

Suy ra $S_2 = 2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8-8\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$

$$= 4\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

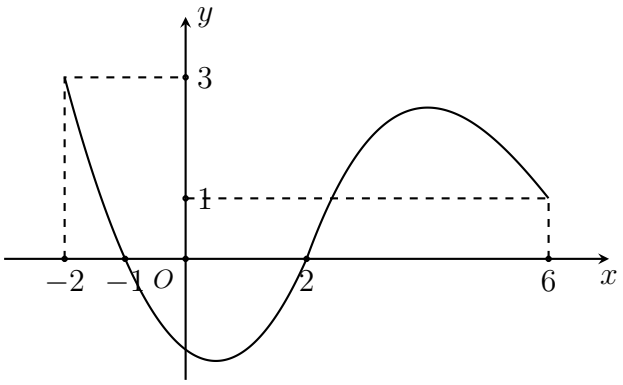
Vậy $S = S_1 + S_2 = \dfrac{8}{3} + \pi - 2 = \dfrac{3\pi+2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 173.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$.
B. $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.
C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$.
D. $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.



Lời giải.

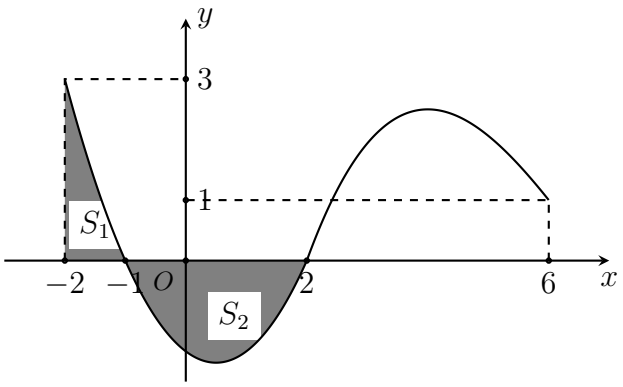
Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6). \end{cases}$

Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.



Ta có:

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) - f(-2).$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) - f(2).$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

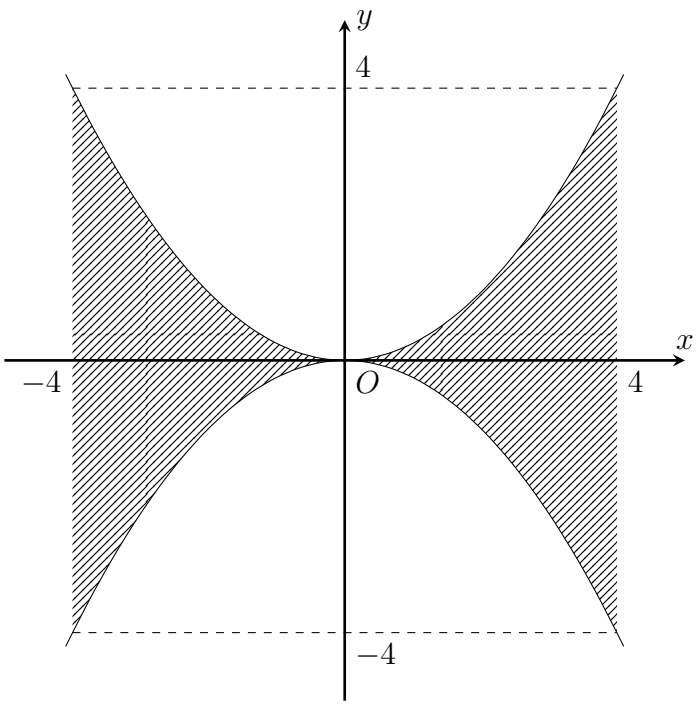
Chọn đáp án (B) □

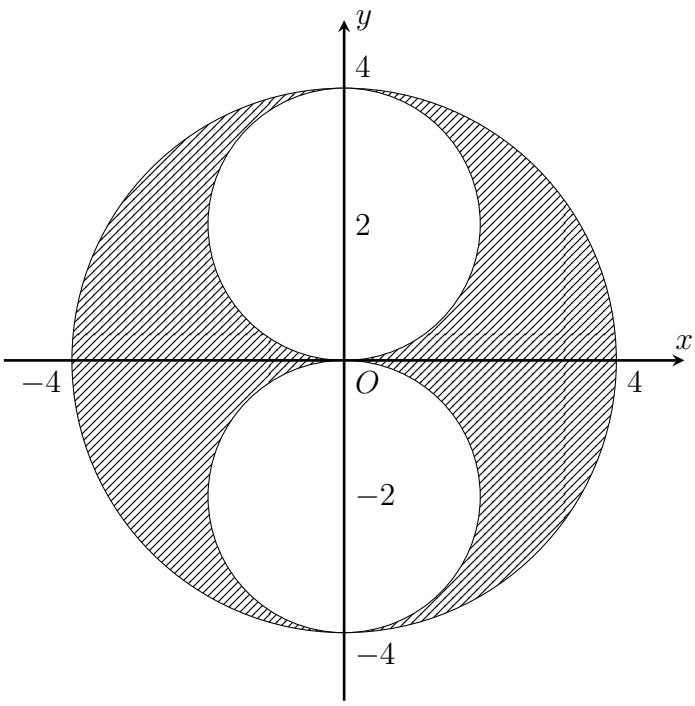
Câu 174. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $(\mathcal{H}_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{-x^2}{4}, \quad x = -4, \quad x = 4$$

và $(\mathcal{H}_2)$ là hình gồm tất cả các điểm $(x;y)$ thoả:

$$x^2 + y^2 \leqslant 16, \quad x^2 + (y-2)^2 \geqslant 4, \quad x^2 + (y+2)^2 \geqslant 4.$$





Cho $(\mathcal{H}_1)$ và $(\mathcal{H}_2)$ quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Dẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \dfrac{1}{2}V_2$. **B.** $V_1 = \dfrac{2}{3}V_2$. **C.** $V_1 = V_2$. **D.** $V_1 = 2V_2$.

Lời giải.

☑ V_1 bằng thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 8 trừ bốn lần thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi vật thể giới hạn bởi các đường $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ quay quanh trục Oy.

$$V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - 4\pi \int_0^4 2y \,\mathrm{d}y = 64\pi.$$

☑ Thể tích $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\left(4^3 - 2^3 - 2^3\right) = 64\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 175. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

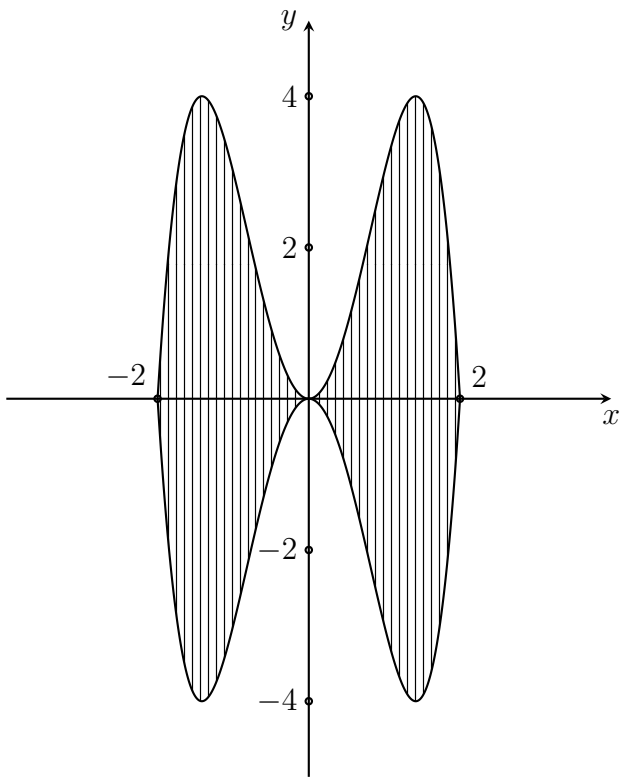
Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Xét trên $[0;\pi]$ suy ra $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 176. Ông Rich muốn gắn những viên kim cương nhỏ vào một mô hình như cánh bướm theo hình vẽ bên dưới. Để tính diện tích đó ông đưa vào một hệ trục tọa độ như hình vẽ thì nhận thấy rằng diện tích mô hình đó là phần giao (tô) giữa hai hàm số trùng phương $y = f(x)$, $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành. Hỏi ông Rich đã gắn bao nhiêu viên kim cương trên mô hình đó biết rằng mỗi đơn vị vuông trên mô hình đó mất 15 viên kim cương?



A. 256. **B**. 128. **C**. 64. **D**. 265.

Lời giải.

Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại $(2;0)$, $(-2;0)$ có giá trị cực đại bằng 4, giá trị cực tiểu bằng 0, dễ thấy $a = -1, b = 4, c = 0$, $f(x) = -x^4 + 4x^2$, $g(x) = x^4 - 4x^2$. Ta có

$$S = \int_{-2}^{2} \left(-x^4 + 4x^2 - (x^4 - 4x^2)\right)\, \mathrm{d}x = \frac{256}{15}$$

Vậy ông Rich đã gắn $15 \cdot \dfrac{256}{15} = 256$ viên kim cương.

Chọn đáp án (A) □

Câu 177. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) : $y = 2x^2$, tiếp tuyến của (P) tại $M(1;2)$ và trục Oy là

A. $S = 1$. **B**. $S = \dfrac{2}{3}$. **C**. $S = \dfrac{1}{3}$. **D**. $S = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $y' = 4x$, suy ra $y'(1) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M là $y = y'(1)(x-1) + 2 = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$.

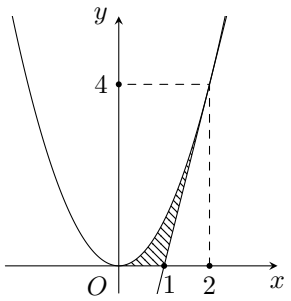
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{0}^{1} \left|2x^2 - 4x + 2\right|\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 2(x-1)^2\, \mathrm{d}x = \left.\frac{2(x-1)^3}{3}\right|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 178.

Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{22\pi}{5}$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y=x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y=4(x-2)+4=4x-4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^2 (x^2)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_1^2 (4x-4)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2-16\int\limits_1^2 (x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x\right)=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)=\frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 179. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\dfrac{343}{12}$. **B.** $S=\dfrac{793}{4}$. **C.** $S=\dfrac{397}{4}$. **D.** $S=\dfrac{937}{12}$.

Câu 180. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-6x+12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A\,(1;7)$ và $B\,(-1;19)$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

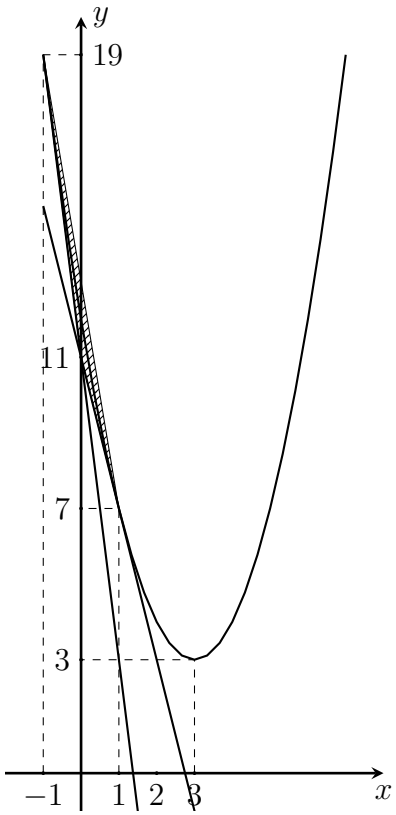
Xét hàm số $y=x^2-6x+12$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=2x-6$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y-7=y'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-4x+11$.

Tương tự phương trình tiếp tuyến tại điểm B là $y-19=y'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=-8x+11$.

Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị là phần gạch chéo hình bên.



Do đó diện tích là

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2-6x+12+8x-11\right)\mathrm{d}x+\\&+\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-6x+12+4x-11\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 181. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n}^{0}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}=\dfrac{8192}{15}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $6<n<9$. **B.** $9<n<12$. **C.** $n<6$. **D.** Không tồn tại n.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{1}x+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}$ (1)

và

$(1-x)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}-\mathrm{C}_{2n}^{1}x+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2-\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)=(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n} \quad (*)$$

Lấy tích phân hai vế của $(*)$ ta có

$$2\int_0^1\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\right]\mathrm{d}x \quad (**)$$

Mà

$$\begin{aligned}&2\int_0^1\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\ =&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}x+\mathrm{C}_{2n}^{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1\\ =&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int_0^1\left[(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}-\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Từ $(**)$ ta suy ra

$$\begin{aligned}&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\\ \Leftrightarrow&\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}=\frac{2^{2n}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Do đó $\dfrac{2^{2n}}{2n+1}=\dfrac{8192}{15}\Leftrightarrow\dfrac{2^{2n}}{2n+1}=\dfrac{2^{13}}{15}\Leftrightarrow 15\cdot 2^{2n-13}=2n+1$.

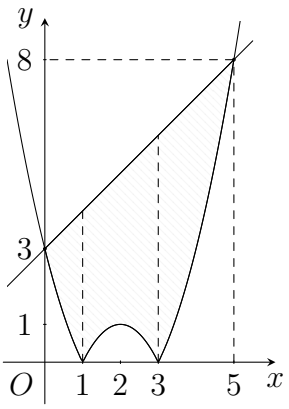
- Nếu $n\geq 7$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số chẵn và $2n+1$ là một số lẻ. Do đó không có giá trị thỏa mãn.
- Nếu $n\leq 6$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số hữu tỉ dạng $\dfrac{p}{q}$ với $(p,q)=1$ và $2n+1$ là một số lẻ. Dó đó không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 182. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P)\colon y=|x^2-4x+3|$, $d\colon y=x+3$.

A. $\dfrac{109}{3}$. **B.** $\dfrac{109}{6}$. **C.** $\dfrac{125}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{3}$.

Lời giải.



- $|x^2-4x+3|=x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5. \end{array}\right.$
- Từ đồ thị ta có $S=S_1+S_2+S_3$ trong đó

$$S_1=\int\limits_0^1 \big((x+3)-(x^2-4x+3)\big)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \left(-x^2+5x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{6}.$$

$$S_2=\int\limits_1^3 \big((x+3)+(x^2-4x+3)\big)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 \left(x^2-3x+6\right)\,\mathrm{d}x=\frac{26}{3}.$$

$$S_3=\int\limits_3^5 \big((x+3)-(x^2-4x+3)\big)\,\mathrm{d}x=\int\limits_3^5 \left(-x^2+5x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{22}{3}.$$

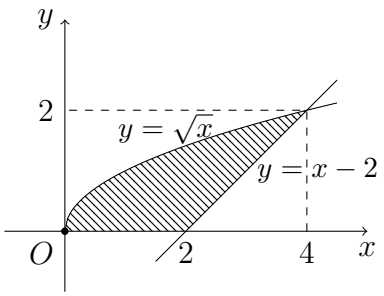
- Vậy $S=\dfrac{109}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 183.

Diện tích hình phẳng được tô đậm ở hình bên bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.



Lời giải.

Ta có diện tích phần tô đậm bằng $\displaystyle\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4-2=\frac{10}{3}$.

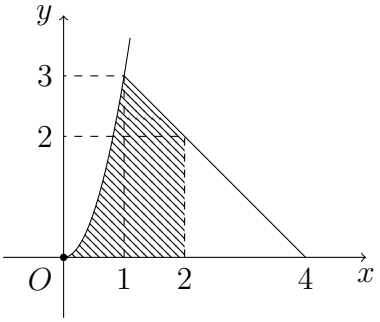
Chọn đáp án D □

Câu 184. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{với } x\le 1 \\ 4-x & \text{với } x>1 \end{cases}$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=2$ quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{29}{4}$. **B.** $\dfrac{29\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{122}{15}$. **D.** $\dfrac{122\pi}{15}$.

Lời giải.

Hình phẳng chính là phần tô đậm trong hình bên. Từ đó suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

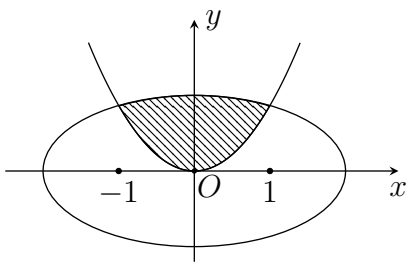


$$V=\pi\int\limits_0^1 9x^4\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_1^2 (4-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{122\pi}{15}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 185.

Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của nửa trên elip và parabol là

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow 3x^4+x^2-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Vì hình phẳng (H) đối xứng qua trục tung nên diện tích (H) là

$$S=2\int\limits_0^1\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\,\mathrm{d}x.$$

☑ Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x^3\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

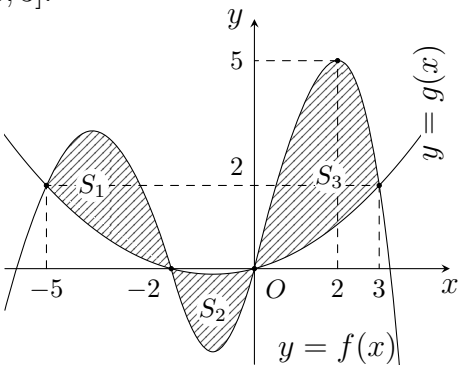
☑ Đặt $x=2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$. Khi đó,

$$\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}2\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 186. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m, n, p.



Tích phân $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

C. $m-n+p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_{-5}^{-2}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{S_1}+\underbrace{\int\limits_{-2}^{0}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{-S_2}+\underbrace{\int\limits_{0}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{S_3}$.

Do đó $\int\limits_{-5}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=m-n+p$. Suy ra $\int\limits_{-5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=m-n+p+\int\limits_{-5}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị thì parabol $(P)\colon y=g(x)=ax^2+bx+c$ đi qua $O(0,0)$, $A(-2,0)$ và $B(3;2)$ nên

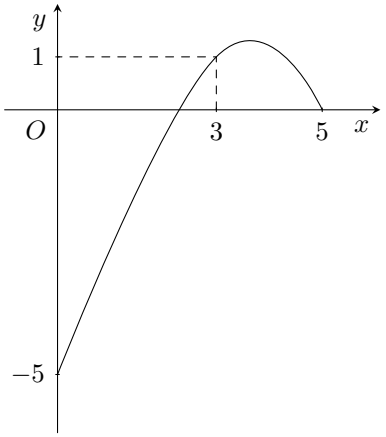
$$\begin{cases}c=0\\4a-2b+c=0\\9a+3b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{15}\\b=\dfrac{4}{15}\\c=0.\end{cases}$$

Vậy $\int\limits_{-5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=m-n+p+\int\limits_{-5}^{3}\left(\dfrac{2}{15}x^2+\dfrac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x=m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 187.

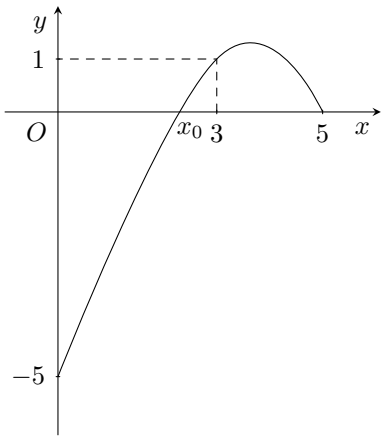
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên. Tìm mệnh đề đúng



A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

Lời giải.



Ta dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta được

☑ $\int\limits_{3}^{5}f'(x)\,\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0\Leftrightarrow f(5)>f(3)$. Do $\int\limits_{3}^{5}f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình phẳng của đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[3;5]$.

☑ $\int\limits_{0}^{3}f'(x)\,\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0\Leftrightarrow f(3)<f(0)$. Do diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ trên đoạn $[0,x_0]$ lớn hơn phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ trên đoạn từ $[x_0;3]$.

☑ $\int\limits_0^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(5) - f(0) < 0 \Leftrightarrow f(5) < f(0)$. Do diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ trên đoạn $[0, x_0]$ lớn hơn phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ trên đoạn từ $[x_0; 5]$.

Vậy $f(0) > f(5) > f(3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 188. Người ta thay nước mới cho một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu $h_1 = 280$ cm. Giả sử $h(t)$ cm là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao nước tại giây thứ t là $h'(t) = \dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\dfrac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

A. 7545,2 s. **B.** 7234,8 s. **C.** 7200,7 s. **D.** 7560,5 s.

Lời giải.

Sau m giây mức nước của bể là

$$\begin{aligned} h(m) &= \int\limits_0^m h'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^m \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \left.\frac{3\sqrt[3]{(t+3)^4}}{2000}\right|_0^m \\ &= \frac{3}{2000}\left[\sqrt[3]{(m+3)^4} - 3\sqrt[3]{3}\right]. \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2000}\left[\sqrt[3]{(m+3)^4} - 3\sqrt[3]{3}\right] = \frac{3}{4}\cdot 280 \\ \Leftrightarrow\ &\sqrt[3]{(m+3)^4} = 140000 + 3\sqrt[3]{3} \\ \Leftrightarrow\ &m = \sqrt[4]{\left(140000 + 3\sqrt[3]{3}\right)^3} - 3 = 7234{,}8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 189. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $C_{2n}^0 + \dfrac{C_{2n}^2}{3} + \dfrac{C_{2n}^4}{5}\dfrac{C_{2n}^6}{7} + \cdots + \dfrac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \dfrac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \dfrac{8192}{15}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $6 < n < 9$. **B.** $9 < n < 12$. **C.** $n < 6$. **D.** Không tồn tại n.

Lời giải.

- $A = \displaystyle\int\limits_0^1 (1+x)^{2n}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k x^k \mathrm{d}x = \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}\mathrm{C}_{2n} x^k\right)\Bigg|_0^1 = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}\mathrm{C}_{2n}.$
- $B = \displaystyle\int\limits_{-1}^0 (1+x)^{2n}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k x^k \mathrm{d}x = \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}\mathrm{C}_{2n} x^k\right)\Bigg|_{-1}^0 = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\mathrm{C}_{2n}.$

•

$$C_{2n}^0+\frac{C_{2n}^2}{3}+\frac{C_{2n}^4}{5}\frac{C_{2n}^6}{7}+\cdots+\frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}=A+B$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}(1+x)^{2n+1}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

• Ta có $\dfrac{2^{2n+1}}{2n+1}=\dfrac{8192}{15}$. Do n nguyên nên không tồn tại n thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

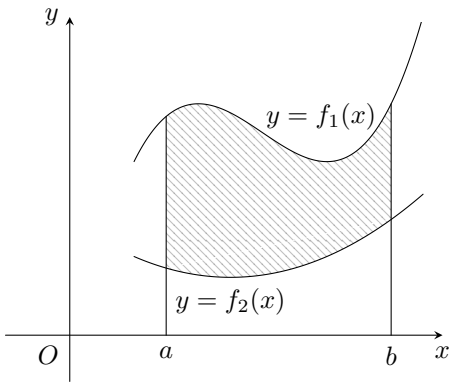
Câu 190. Cho hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị các hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ như hình vẽ bên quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính bằng công thức nào trong các công thức sau

A. $V=\displaystyle\int_a^b[f_1^2(x)-f_2^2(x)]\,\mathrm{d}x.$

B. $V=\pi\displaystyle\int_a^b[f_1^2(x)-f_2^2(x)]\,\mathrm{d}x.$

C. $V=\pi\displaystyle\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]\,\mathrm{d}x.$

D. $V=\pi\displaystyle\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]^2\,\mathrm{d}x.$



Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f_1(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ quay xung quanh trục Ox. Ta có

$$V_1=\pi\int_a^b f_1^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Gọi V_2 là thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f_2(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ quay xung quanh trục Ox. Ta có

$$V_2=\pi\int_a^b f_2^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

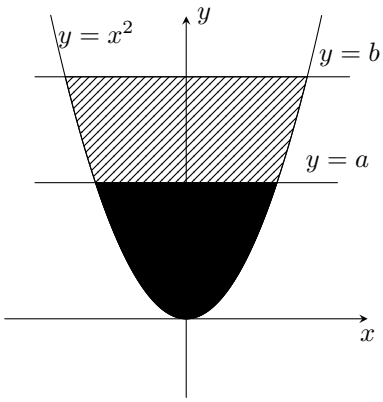
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=V_1-V_2=\pi\displaystyle\int_a^b[f_1^2(x)-f_2^2(x)]\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 191.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P)\colon y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ $(0 < a < b)$ (hình vẽ bên). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào của a và b thì $S_1 = S_2$?

A. $b = \sqrt[3]{4a}$. **B.** $b = \sqrt[3]{2a}$. **C.** $b = \sqrt[3]{3a}$. **D.** $b = \sqrt[3]{6a}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

$$x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ là

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng $y = b$ là

$$S = 2\int_0^{\sqrt{b}} \left(b - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

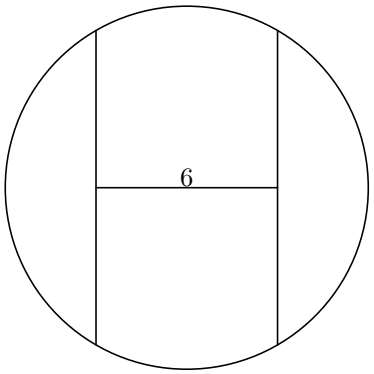
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng $y = a$ là

$$S_1 = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Do đó $S_2 = S_1 \Leftrightarrow S = 2S_1 \Leftrightarrow \dfrac{4b\sqrt{b}}{3} = \dfrac{8a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a.$

Chọn đáp án (A) □

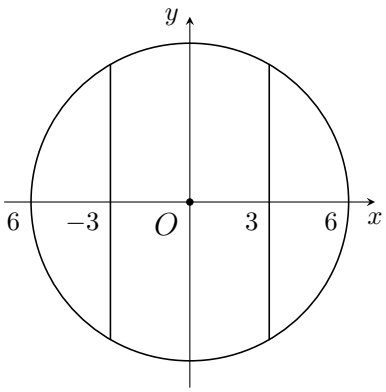
Câu 192. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính bằng 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng (hình bên), biết rằng kinh phí trồng cây là 70000 đồng / m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó? (Số tiền làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322. **B**. 4821322. **C**. 8142232. **D**. 4821232.

Lời giải.

Gán trục tọa độ như hình vẽ bên. Phương trình đường tròn là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên có phương trình $y=f(x)=\sqrt{36-x^2}$. Quan sát hình vẽ, ta thấy diện tích S của mảnh đất bằng hai lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x); x=-3; x=3$. Do đó



$$S=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $x=6\sin a\Rightarrow \mathrm{d}x=6\cos a\,\mathrm{d}a$ ta có

$$\begin{aligned}S&=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{36-36\sin^2 a}\cdot 6\cos a\,\mathrm{d}a=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 a\,\mathrm{d}a\\&=72\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\Big((\cos 2a+1)\,\mathrm{d}a=72\,\frac{\sin 2a}{2}+a\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=18\sqrt{3}+12\pi.\end{aligned}$$

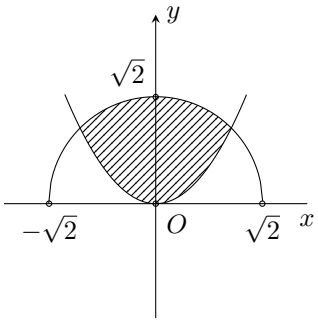
Vậy số tiền cần đóng là $70000S\approx 4821322$ (đồng).

Chọn đáp án B □

Câu 193.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$. Tính thể tích V của khối trong xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $\dfrac{5\pi}{3}$. **B**. $\dfrac{44\pi}{15}$. **C**. $\dfrac{\pi}{5}$. **D**. $\dfrac{22\pi}{15}$.

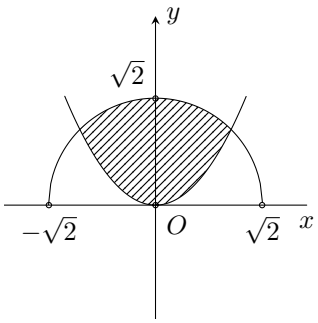


Lời giải.

Giải hệ $\begin{cases}y=x^2\\x^2+y^2=2\end{cases}$ được nghiệm $(-1;1)$ và $(1;1)$.

Thể tích vật thể cần tính là

$$V=\pi\left(\int\limits_{-1}^{1}(2-x^2)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}x^4\,\mathrm{d}x\right)=\pi\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{44\pi}{15}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 194. Một chất điểm chuyển động thẳng với gia tốc $a(t)=3t^2+t$ m/s (với t là thời gian tính bằng giây). Biết vận tốc ban đầu của chất điểm là 2 m/s. Tính vận tốc của chất điểm sau 2 s.

A. 12 m/s. **B**. 10 m/s. **C**. 8 m/s. **D**. 16 m/s.

Lời giải.

Vận tốc của chất điểm là $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (3t^2 + t)\,\mathrm{d}t = t^3 + \dfrac{t^2}{2} + C$.

Theo đề bài, vì vận tốc ban đầu của chất điểm là 2 m/s nên $v(0) = 2 \Leftrightarrow C = 2$.

Từ đó ta có $v(t) = t^3 + \dfrac{t^2}{2} + 2$. Suy ra vận tốc của chất điểm sau 2 s là $v(2) = 12$ m/s.

Chọn đáp án A □

Câu 195. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $\dfrac{937}{12}$. **B**. $\dfrac{343}{12}$. **C**. $\dfrac{793}{4}$. **D**. $\dfrac{397}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình $-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4. \end{array}\right.$

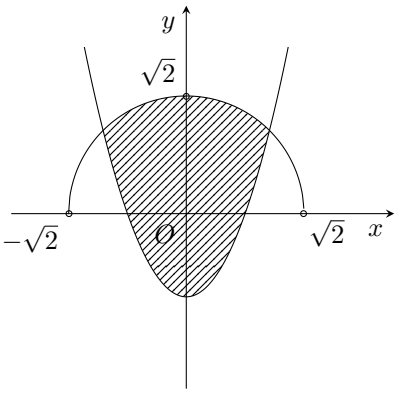
Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{4} \left|x^3 - x^2 - 12x\right| \mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{0} \left|x^3 - x^2 - 12x\right| \mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \left|x^3 - x^2 - 12x\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int_{-3}^{0} \left(x^3 - x^2 - 12x\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} \left(x^3 - x^2 - 12x\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right| \\ &= \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 196.

Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}$ (m). Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\dfrac{3\pi - 2}{6} \times 250000$. **B**. $\dfrac{3\pi + 10}{6} \times 250000$.

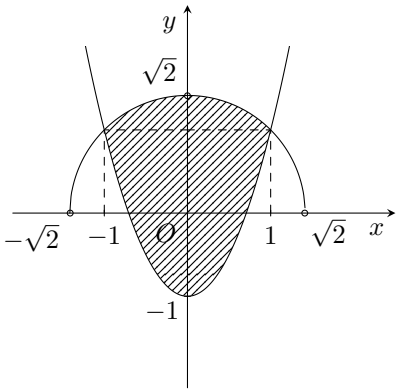
C. $\dfrac{3\pi + 10}{3} \times 250000$. **D**. $\dfrac{3\pi + 2}{6} \times 250000$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$ là $x^2+y^2=2 \Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường tròn là

$$2x^2-1=\sqrt{2-x^2}.$$



Đặt $t=\sqrt{2-x^2} \geq 0$, suy ra $t^2=2-x^2 \Leftrightarrow x^2=2-t^2$.

Phương trình trở thành $2(2-t^2)-1=t \Leftrightarrow 2t^2+t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (thỏa mãn} \\ t=-\dfrac{3}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Diện tích hình phẳng phần gạch chéo là

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left[\sqrt{2-x^2}-(2x^2-1)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\left(\frac{2}{3}x^3-x\right)\Big|_{-1}^{1}=I+\frac{2}{3}.$$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t$ với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}$ và $x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1. \end{aligned}$$

Suy ra $S=\dfrac{\pi}{2}+1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

Vậy số tiền tối thiểu để trồng hoa là $\dfrac{3\pi+10}{6}\times 250000$.

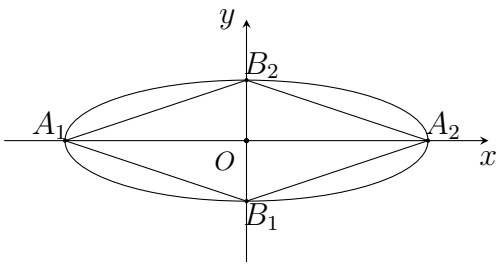
Chọn đáp án (B) □

Câu 197. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{2};0)$ và độ dài trục lớn bằng 6. Đường thẳng d: $y=\dfrac{x}{3}-1$ chia elip (E) thành hai phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2 $(S_1<S_2)$. Giá trị của S_2 làm tròn đến hàng phần trăm bằng

A. 8,57. **B**. 8,56. **C**. 7,57. **D**. 7,56.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $2a = 6 \Rightarrow a = 3$, và $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - b^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$.



Do đó phương trình $(E)\colon \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$.

Diện tích của (E) bằng $S_1 + S_2 = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = 3\pi$.

Đường thẳng $d\colon y = \dfrac{x}{3} - 1$ qua hai đỉnh của (E) là $B_1(0;-1)$ và $A_2(3;0)$.

Bốn đỉnh của (E) là một hình thoi có diện tích bằng $\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.

Do đó $S_1 = \dfrac{3\pi - 6}{4}$, suy ra $S_2 = 3\pi - \dfrac{3\pi - 6}{4} = \dfrac{9\pi + 6}{4} \approx 8{,}57$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 198. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S = 2\left|\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + 2\left|\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S = 2\displaystyle\int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S = 2\left|\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Khi đó ta có

☑ Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

☑ Vì $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ là hàm số chẵn nên

$$S = \int_{-2}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

☑ Vì $x = 1$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên khoảng $(0;2)$ nên suy ra

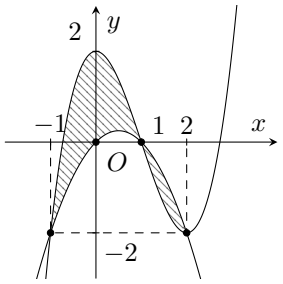
$$S = 2\int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2\left|\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + 2\left|\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Vậy mệnh đề sai là $S = 2\left|\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 199.

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2$, $y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$.

Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0.$$

Với $x = 0$ ta được $2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy diện tích phần tô đậm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} |(x+1)(x-1)(x-2)| \,\mathrm{d}x \\ &= \left| \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2) \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2) \,\mathrm{d}x \right| \\ &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. A	5. D	6. A	7. C	8. B	9. D	10. B
11. A	12. D	13. D	14. A	15. C	16. B	17. B	18. C	19. A	20. B
21. A	22. C	23. B	24. A	25. A	26. A	27. A	28. C	29. C	30. D
31. C	32. C	33. B	34. D	35. D	36. C	37. D	38. C	39. D	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. A	46. C	47. B	48. A	49. A	50. A
51. C	52. C	53. B	54. A	55. D	56. D	57. A	58. D	59. A	60. B
61. C	62. A	63. D	64. B	65. C	66. B	67. D	68. D	69. C	70. D
71. B	72. D	73. B	74. A	75. D	76. B	77. D	78. B	79. D	80. C
81. C	82. A	83. B	84. D	85. A	86. B	87. A	88. B	89. A	90. D
91. D	92. B	93. A	94. B	95. C	96. C	97. D	98. D	99. A	100. B
101. D	102. A	103. A	104. A	105. A	106. C	107. A	108. C	109. B	110. A
111. A	112. A	113. C	114. C	115. A	116. B	117. B	118. A	119. A	120. D
121. A	122. C	123. D	124. A	125. B	126. B	127. D	128. C	129. D	130. B
131. C	132. D	133. B	134. B	135. C	136. B	137. C	138. A	139. D	140. A
141. B	142. B	143. A	144. A	145. C	146. C	147. D	148. B	149. D	150. B
151. A	152. A	153. B	154. D	155. B	156. B	157. A	158. C	159. C	160. A
161. D	162. B	163. A	164. B	165. A	166. C	167. A	168. C	169. A	170. B
171. B	172. C	173. D	174. A	175. C	176. A	177. A	178. A	179. B	180. A
181. D	182. A	183. B	184. B	185. C	186. A	187. B	188. C	189. D	190. A
191. B	192. A	193. C	194. C	195. A	196. D	197. B	198. C	199. A	200. A

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho hai quả bóng A, B di chuyển ngược chiều nhau va chạm với nhau. Sau va chạm mỗi quả bóng nảy ngược lại một đoạn thì dừng hẳn. Biết sau khi va chạm, quả bóng A nảy ngược lại với vận tốc $v_A(t) = 8 - 2t\,(m/s)$ và quả bóng B nảy ngược lại với vận tốc $v_B(t) = 12 - 4t\,(m/s)$. Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn (Giả sử hai quả bóng đều chuyển động thẳng).

A. 36 mét. **B**. 32 mét. **C**. 34 mét. **D**. 30 mét.

Lời giải.

Thời gian quả bóng A chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4s$.

Quãng đường quả bóng A di chuyển $S_A = \displaystyle\int_0^4 (8 - 2t)\,\mathrm{d}x = 16m$

Thời gian quả bóng B chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_B(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3s$.

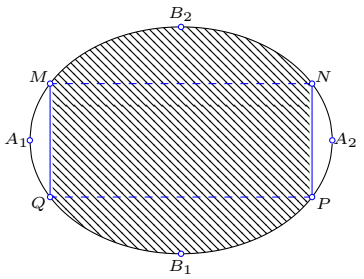
Quãng đường quả bóng B duy chuyển $S_B = \displaystyle\int_0^3 (12 - 4t)\,\mathrm{d}x = 18m$

Vậy: Khoảng cách hai quả bóng sau khi dừng hẳn là $S = S_A + S_B = 34m$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$m, $B_1B_2 = 6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$m ?



A. 7.322.000 đồng. **B**. 7.213.000 đồng.

C. 5.526.000 đồng. **D**. 5.782.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 3 \end{cases}$

Suy ra $(E)\colon \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi\ (m^2)$.

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d\colon y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M(-2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2})$ và $N(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2})$.

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{4} (\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2})\mathrm{d}x = 4\pi - 6\sqrt{3}(m^2)$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

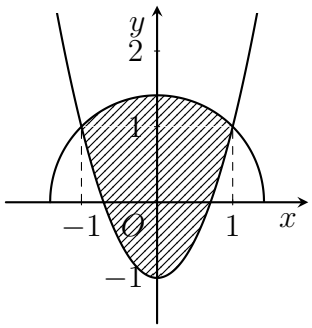
Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T = 100.000 \times (4\pi - 6\sqrt{3}) + 200.000 \times (8\pi + 6\sqrt{3}) \approx 7.322.000 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 3.

Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng



A. 893000 đồng. **B**. 476000 đồng. **C**. 809000 đồng. **D**. 559000 đồng.

Lời giải.

Nửa đường tròn (T) có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$.

Xét parabol (P) có trục đối xứng Oy nên có phương trình dạng: $y=ax^2+c$.

(P) cắt Oy tại điểm $(0;-1)$ nên ta có: $c=-1$.

(P) cắt (T) tại điểm $(1;1)$ thuộc (T) nên ta được: $a+c=1\Rightarrow a=2$.

Phương trình của (P) là: $y=2x^2-1$.

Diện tích miền phẳng D (tô màu trong hình) là:

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)\mathrm{d}x.$$

$$I_1=\int\limits_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Xét $I_2=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $x=\sqrt{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,dt$.

Đổi cận: $x=-1$ thì $t=-\frac{\pi}{4}$, với $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{4}$, ta được:

$$I_2=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t dt=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}2\cos^2 t dt$$

$$=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1+\frac{\pi}{2}.$$

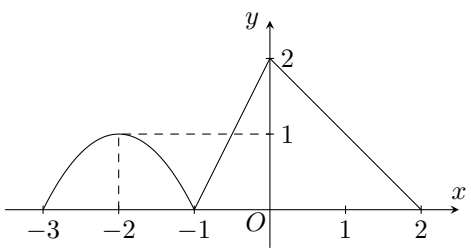
Suy ra $S=I_1+I_2=\dfrac{5}{3}+\dfrac{\pi}{2}$ m^2.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)\approx 809365$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 4.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\dfrac{23}{6}$. **B**. $\dfrac{31}{6}$. **C**. $\dfrac{35}{3}$. **D**. $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 3.$$

Do $f(-3) = 0$ nên

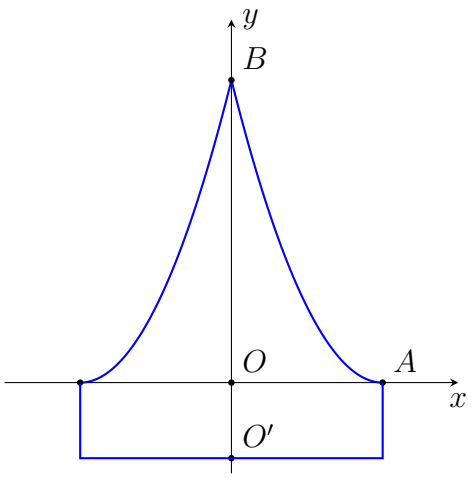
$$\begin{aligned} f(-1) + f(1) &= [f(1) - f(0)] + [f(0) - f(-1)] + 2[f(-1) - f(3)] \\ &= \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= S_1 + S_2 + 2\int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ và $x = 0$, $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ *cm*, $OA = 10$ *cm*, $OB = 20$ *cm*, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\dfrac{2750\pi}{3}$ (cm^3). **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}$ (cm^3).

C. $\dfrac{2050\pi}{3}$ (cm^3). **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}$ (cm^3).

Lời giải.

Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

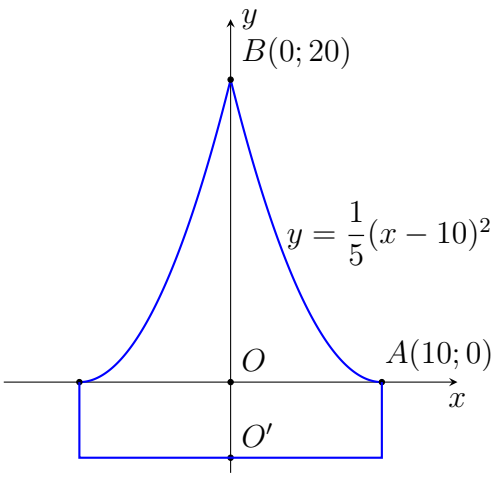
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$.

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi$ (cm^3).

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P) : y = a(x - 10)^2$.



Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a=\dfrac{1}{5}$.

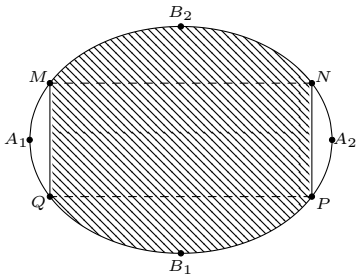
Do đó, $(P):y=\dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x=10-\sqrt{5y}$ (do $x<10$).

Suy ra $V_2=\pi\displaystyle\int_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2dy=\pi\left(3000-\dfrac{8000}{3}\right)=\dfrac{1000}{3}\pi\ (cm^3)$.

Do đó $V=V_1+V_2=\dfrac{1000}{3}\pi+500\pi=\dfrac{2500}{3}\pi\ (cm^3)$.

Chọn đáp án (B) □

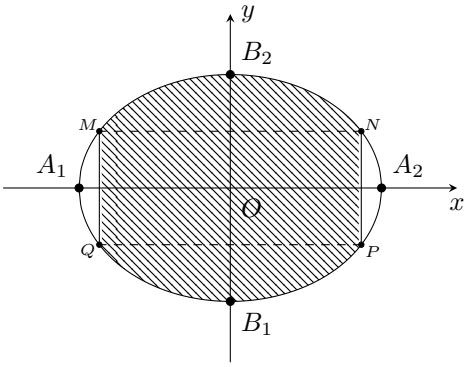
Câu 6. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$m, $B_1B_2=6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3$ m?



A. 7.322.000 đồng. **B**. 7.213.000 đồng. **C**. 5.526.000 đồng. **D**. 5.782.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành trùng với trục lớn, trục tung trùng với trục bé của biển quảng cáo.



Khi đó, đường viền của biển quảng cáo có phương trình của dạng elip sau $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}A_1A_2=8\\B_1B_2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=8\\2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow(E):$ $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có: $MQ=3\Rightarrow\begin{cases}M=d\cap(E)\\N=d\cap(E)\end{cases}$ với d: $y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow M\left(-2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

Do Elip nhận trục Ox và Oy làm trục đối xứng nên diện tích phần tô màu gấp 4 diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ và các đường thẳng $x=2\sqrt{3}$, trục tung, trục hoành, chính là

$S=4\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x=3\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $x=4\sin t$, khi đó $\mathrm{d}x=4\cos t\,\mathrm{d}t$. Và với $x=0\Rightarrow t=0$; với $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$S=3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{16-16\sin^2t}\cdot4\cdot\cos t\right)\mathrm{d}t=48\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2t\right)\mathrm{d}t=24\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2t)\,\mathrm{d}t=(24t+12\sin2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$ $8\pi+6\sqrt{3}$ m^2.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là $T=100.000\times\left(4\pi-6\sqrt{3}\right)+200.000\times\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)\approx7.322.000$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hai chất điểm A và B cùng bắt đầu chuyển động trên trục Ox từ thời điểm $t=0$. Tại

thời điểm t, vị trí của chất điểm A được cho bởi $x = f(t) = -6 + 2t - \dfrac{1}{2}t^2$ và vị trí của chất điểm B được cho bởi $x = g(t) = 4\sin t$. Gọi t_1 là thời điểm đầu tiên và t_2 là thời điểm thứ hai mà mà hai chất điểm có vận tốc bằng nhau. Tính theo t_1, t_2 độ dài quãng đường mà chất điểm A đã di chuyển từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2.

A. $4 - 2(t_1 + t_2) + \dfrac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)$.

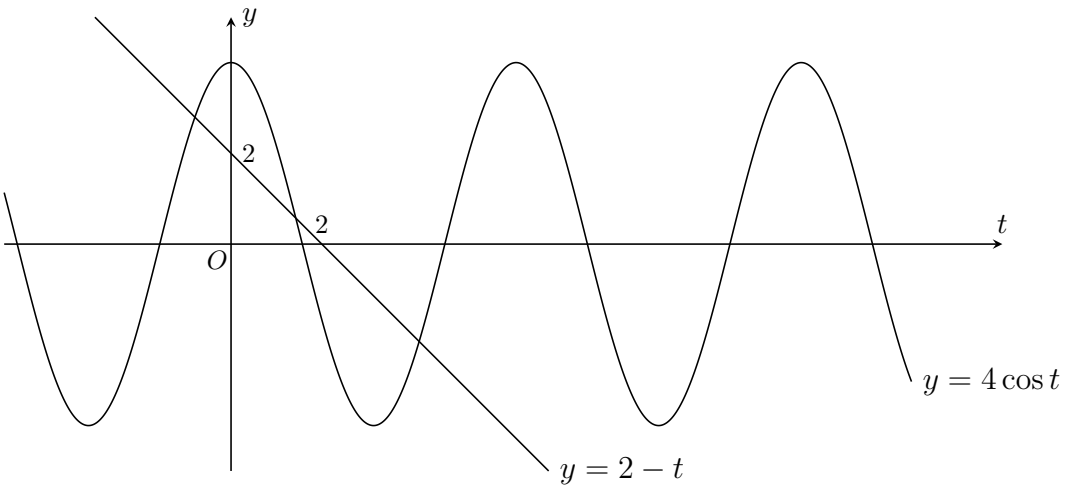
B. $4 + 2(t_1 + t_2) - \dfrac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)$.

C. $2(t_2 - t_1) - \dfrac{1}{2}(t_2^2 - t_1^2)$.

D. $2(t_1 - t_2) - \dfrac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(t) = 2 - t, g'(t) = 4\cos t$. Theo giả thiết ta có t_1, t_2 là các nghiệm của phương trình $f'(t) = g'(t)$ với $0 < t_1 < t_2$. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = g'(t)$ trên cùng hệ trục ta thấy $t_1 < 2 < t_2$.



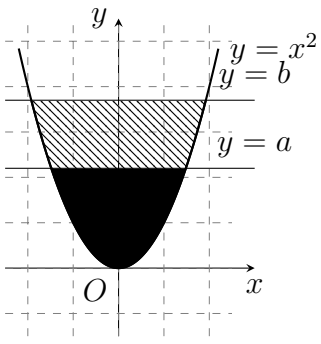
Quãng đường cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} |2 - t| \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{2} |2 - t| \mathrm{d}t + \int_{2}^{t_2} |2 - t| \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{2} (2 - t) \mathrm{d}t + \int_{2}^{t_2} (t - 2) \mathrm{d}t \\ &= \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t_1}^{2} + \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)\Big|_{2}^{t_2} \\ &= 4 - 2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 8.

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P) : y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b\,(0 < a < b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol P và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{4}a$. **B.** $b = \sqrt[3]{2}a$. **C.** $b = \sqrt[3]{3}a$. **D.** $b = \sqrt[3]{6}a$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P) : y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là $x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}$.
Phương trình hoành độ giao điểm của $(P) : y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) : $y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là $S = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{b}} \left(b - x^2\right) \mathrm{d}\, x =$ $2\left(bx - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{b}} = 2\left(b\sqrt{b} - \dfrac{b\sqrt{b}}{3}\right) = \dfrac{4b\sqrt{b}}{3}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) : $y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là $S_1 =$ $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) \mathrm{d}\, x = 2\left(ax - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}} = 2\left(a\sqrt{a} - \dfrac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \dfrac{4a\sqrt{a}}{3}$.

Do đó $S = 2S_1 \Leftrightarrow \dfrac{4b\sqrt{b}}{3} = 2 \cdot \dfrac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3 = 2(\sqrt{a})^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$.

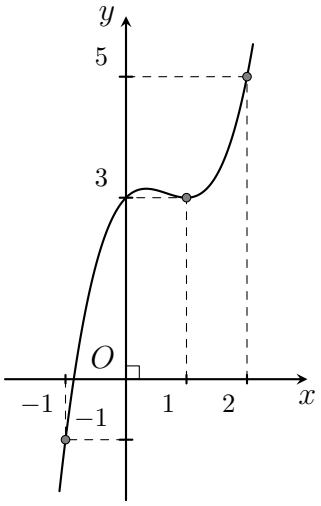
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$.

B. $g(-1) = g(1)$.

C. $g(1) = g(2)$.

D. $g(1) > g(2)$.



Lời giải.

Đặt $h(x) = x^2 + x$. Gọi (Δ) là đồ thị của $h'(x) = 2x + 1$.

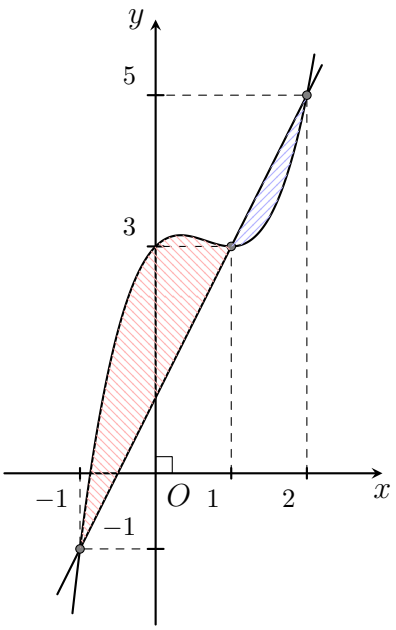
Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = h'(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta thấy $\displaystyle\int_{-1}^{1} [f'(x) - h'(x)]\, \mathrm{d}x = g(1) - g(-1) > 0$ (1).

Ta thấy $\displaystyle\int_{1}^{2} [f'(x) - h'(x)]\, \mathrm{d}x = g(2) - g(1) < 0$ (2).

Từ (1), ta thấy khẳng định $g(-1) > g(1)$ và $g(-1) = g(1)$ sai.

Từ (2), ta thấy khẳng định $g(1) = g(2)$ sai và $g(1) > g(2)$ đúng.



Chọn đáp án (D) □

Câu 10.

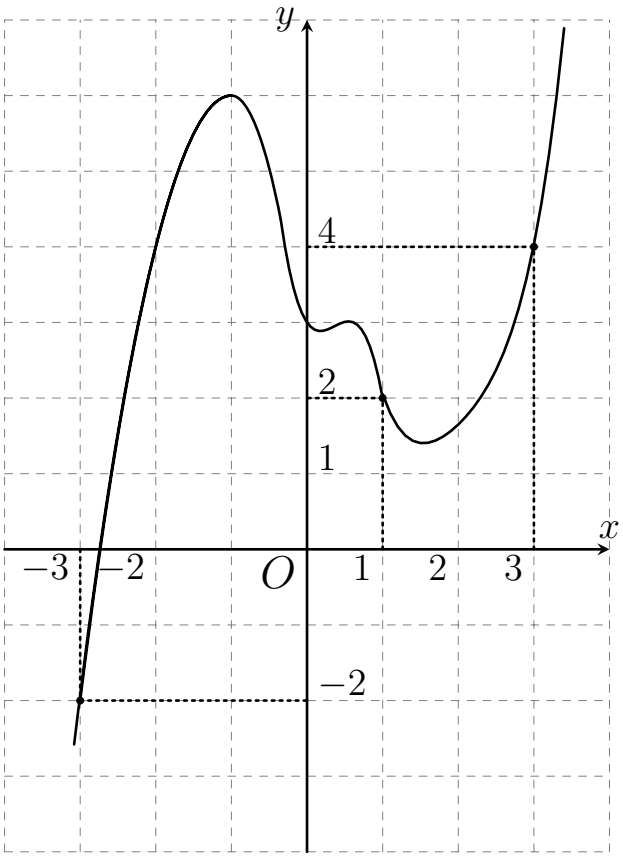
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.



Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x+1)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1$.

Từ đồ thị ta thấy $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=1\\ x=3\end{array}\right.$

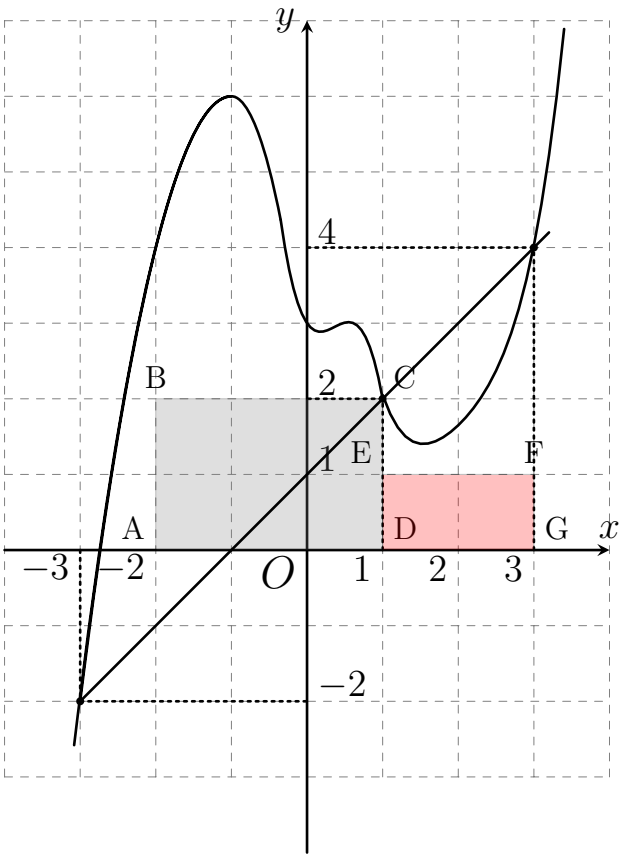
Từ đồ thị ta thấy

$\displaystyle\int\limits_{-3}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x > S_{ABCD}\Leftrightarrow f(1)-f(-3)>6\Leftrightarrow f(-3)<0$.

Do đó $g(-3)=f(-3)-2<0$.

Mặt khác $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x > S_{OEFG}\Leftrightarrow f(3)-f(1)>2$

$\Leftrightarrow f(3)>8$, nên $g(3)>0$.



Dựa vào hình vẽ ta có bảng biến thiên

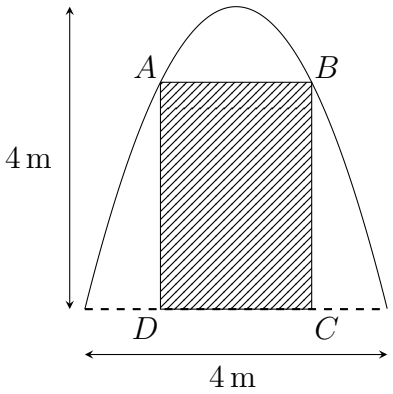
x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)<0$	↗	4	↘	$g(3)>0$

Do đó $g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $[-3;3]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một 2 m bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 900.000 (đồng). **B**. 1.232.000 (đồng). **C**. 902.000 (đồng). **D**. 1.230.000 (đồng).

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Parabol của pano có dạng $y=ax^2+c$ với $a<0$.

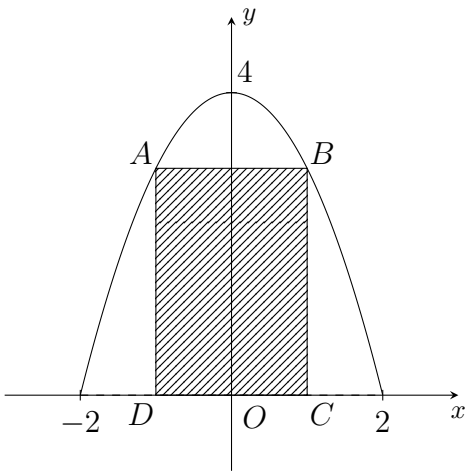
Vì (P) cắt Oy tại điểm có tung độ 4 nên $c=4$.

Mà (P) đi qua điểm $(2;0)$ nên $a=-1$.

Như vậy, parabol của pano là đồ thị của hàm số $y=4-x^2$ trên đoạn $[-2;2]$.

Giả sử $CD=2x$ với $0\le x\le 2$, khi đó diện tích hình chữ nhật là $S_{ABCD}=2x(4-x^2)$.

Diện tích phần trang trí hoa văn là



$$S(x)=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x-2x(4-x^2)=2x^3-8x+\frac{32}{3}.$$

Hàm số $S(x)$ có $S'(x)=6x^2-8$ và $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Trên đoạn $[-2;2]$, ta có $S(\pm 2)=\dfrac{32}{3}, S\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}, S\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{96+32\sqrt{3}}{9}$.

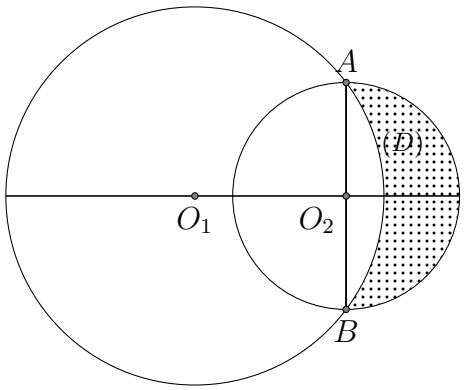
Do đó giá trị nhỏ nhất của $S(x)$ trên $[-2;2]$ là $\dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}$.

Chi phí cho việc trang trí hoa văn lúc đó là $\dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}\times 200.000\approx 902.000$ (đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 12.

Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



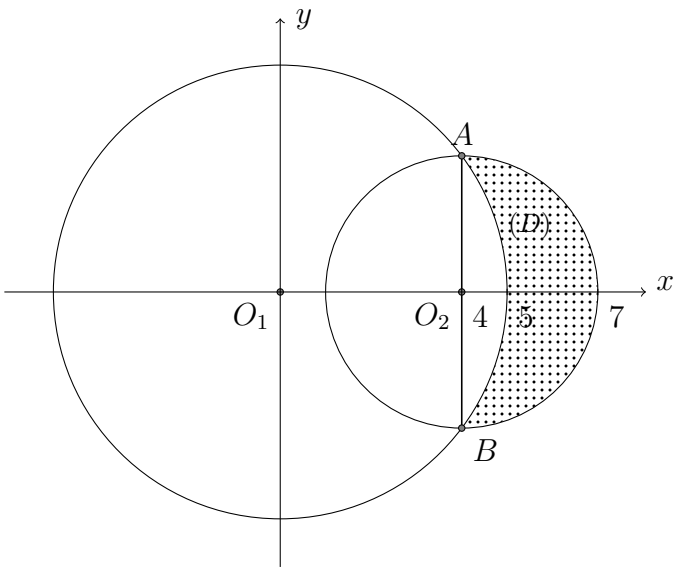
A. $V = 36\pi$. **B.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{14\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{40\pi}{3}$.

Lời giải.

Không làm mất tính tổng quát ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $O \equiv O_1$, trục hoành chứa đường thẳng O_1O_2, khi đó phương trình của (O_1) và (O_2) lần lượt là $y^2 = 25 - x^2$ và $y^2 = 9 - (x-4)^2$.

Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (D_1) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9-(x-4)^2}$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 7$ quanh Ox

$$\Rightarrow V_1 = \pi \int_4^7 \left(9 - (x-4)^2\right) \mathrm{d}x.$$



Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (D_2) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25-x^2}$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 5$ quanh trục Ox

$$\Rightarrow V_2 = \pi \int_4^5 \left(25 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

Khi đó thể tích của khối tròn xoay cần tìm là

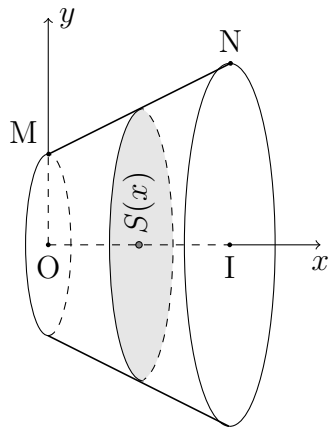
$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_4^7 \left(9 - (x-4)^2\right) \mathrm{d}x - \pi \int_4^5 \left(25 - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{40\pi}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Một vật thể có hai đáy trong đó có đáy lớn là một elip có độ dài trục lớn bằng 8, trục bé là 4 và đáy bé có độ dài trục lớn là 4 và trục bé là 2. Thiết diện vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai đáy luôn là một elip, biết chiều cao của vật thể là 4. Tính thể tích của vật thể này.

A. $\dfrac{55\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{56\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{57\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{58\pi}{3}$.

Lời giải.



☑ **Tính độ dài trục lớn của thiết diện**: (hình vẽ)
Gọi $M(0;2)$, $N(4;4)$ đường thẳng qua M, N có phương trình

$$y = \frac{x+4}{2};$$

☑ **Tính độ dài trục bé của thiết diện**:
Tương tự như trên, lấy $P(0;1)$, $Q(4;2)$ đường thẳng qua P, Q có phương trình

$$y = \frac{x+4}{4}.$$

Thiết diện là 1 elip có diện tích là $S(x) = \pi \cdot \dfrac{x+4}{2} \cdot \dfrac{x+4}{4}$.
Thể tích vật thể cho bởi công thức

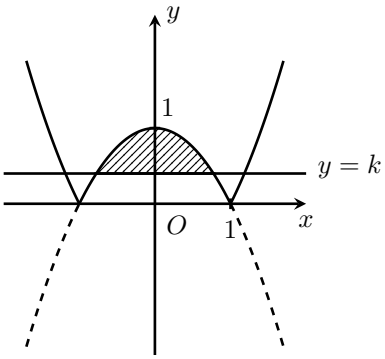
$$V = \int_0^4 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \pi \cdot \frac{x+4}{2} \cdot \frac{x+4}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{56\pi}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

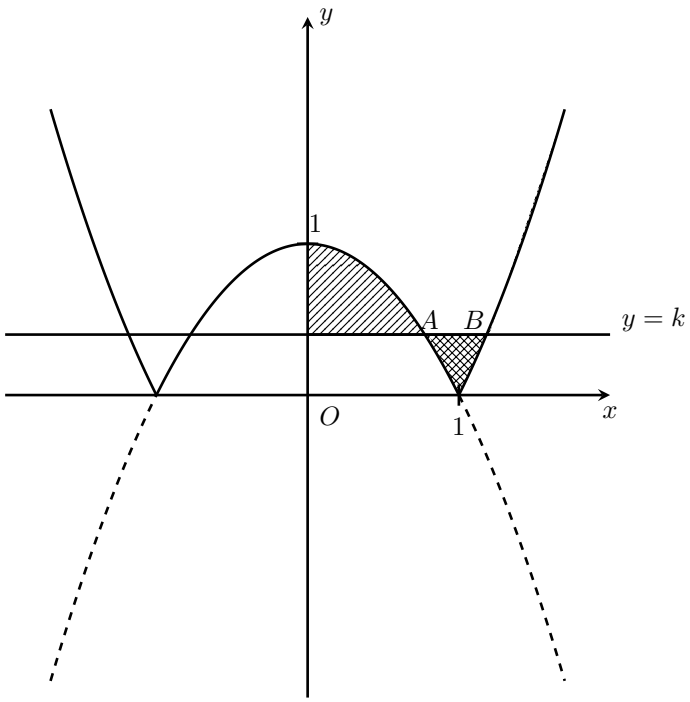
Câu 14.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên.

A. $k = \sqrt[3]{4} - 1$. **B**. $k = \dfrac{1}{2}$. **C**. $k = \sqrt[3]{4}$. **D**. $k = \sqrt[3]{2} - 1$.



Lời giải.



Gọi S là diện tích hình phẳng (H). Lúc đó $S = 2S_1 + 2S_2$, trong đó S_1 là diện tích phần gạch sọc ở bên phải Oy và S_2 là diện tích phần gạch ca-rô trong hình vẽ bên.
Gọi A, B là các giao điểm có hoành độ dương của đường thẳng $y = k$ và đồ thị hàm số $y = |x^2 - 1|$, trong đó $A(\sqrt{1-k}; k)$ và $B(\sqrt{1+k}; k)$.
Theo yêu cầu bài toán $S = 2 \cdot 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-k}} (1 - x^2 - k)\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{1-k}}^{1} (k - 1 - x^2)\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k - x^2 + 1)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}$$
$$+(1-k)\sqrt{1-k} + (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+k}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow k = k = \sqrt[3]{4} - 1.$$

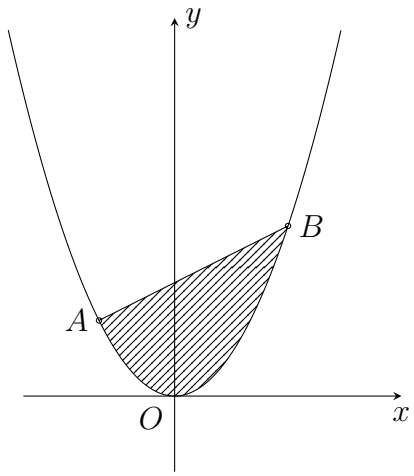
Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho parabol $(P)\colon y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $A\left(a,a^2\right), B\left(b,b^2\right) \in (P)$, với $a<b$ sao cho $AB=2$.



Phương trình đường thẳng AB có dạng $y=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}x+m \Leftrightarrow y=(a+b)x+m$.

Thay tọa độ $A\left(a;a^2\right)$ ta có: $a^2=(a+b)a+m \Rightarrow m=-ab$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=(a+b)x-ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB, khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_a^b \left|(a+b)x-ab-x^2\right| \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left((a+b)x-ab-x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{a+b}{2}x^2-abx-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b = \frac{1}{6}(b-a)^3. \end{aligned}$$

Lại có $AB=2 \Rightarrow (b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4$
$\Leftrightarrow (b-a)^2\left(1+(a+b)^2\right)=4$.

Mà $1+(a+b)^2 \geq 1 \Rightarrow (b-a)^2 \leq 4 \Rightarrow b-a \leq 2$. Dẫn tới $S \leq \dfrac{4}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=-1, b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tính tổng $S=\dfrac{2^2}{2}\mathrm{C}_{2018}^1+\dfrac{2^3}{3}\mathrm{C}_{2018}^2+\dfrac{2^4}{4}\mathrm{C}_{2018}^3+\cdots+\dfrac{2^{2019}}{2019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

A. $S=\dfrac{3^{2019}+4039}{2019}$. **B.** $S=\dfrac{3^{2018}+4039}{2019}$. **C.** $S=\dfrac{3^{2018}-4039}{2019}$. **D.** $S=\dfrac{3^{2019}-4039}{2019}$.

Lời giải.

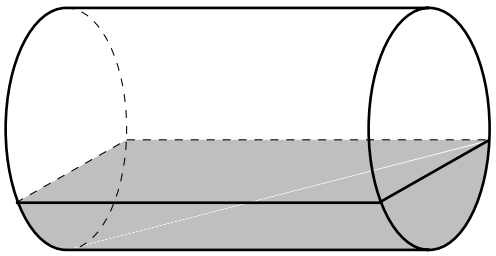
Ta có $(1+x)^{2018}=1+\mathrm{C}_{2018}^1x+\mathrm{C}_{2018}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2018}x^{2018}$,
hay $(1+x)^{2018}-1=\mathrm{C}_{2018}^1x+\mathrm{C}_{2018}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2018}x^{2018}$.
Khi đó

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^2 \left[(1+x)^{2018}-1\right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\mathrm{C}_{2018}^1x+\mathrm{C}_{2018}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2018}x^{2018}\right) \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ &\left[\frac{(1+x)^{2019}}{2019}-x\right]\Big|_0^2 = \left(\frac{x^2}{2}\mathrm{C}_{2018}^1+\frac{x^3}{3}\mathrm{C}_{2018}^2+\cdots+\frac{x^{2019}}{2019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}\right)\Big|_0^2 \\ \Leftrightarrow\ &S=\frac{3^{2019}}{2019}-2-\frac{1}{2019}=\frac{3^{2019}-4039}{2019}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 17.

Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1 m, trục bé bằng 0,8 m, chiều dài (nằm trong của thùng) bằng 3 m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng(như hình vẽ bên). Biết chiều cao của dầu trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6 m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (kết quả được làm tròn đến phần trăm).

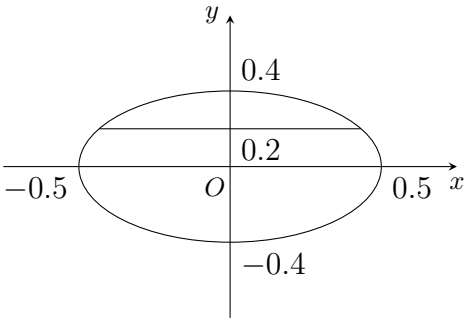


A. $V = 1{,}42$ m^3. **B**. $V = 1{,}31$ m^3.

C. $V = 1{,}27$ m^3. **D**. $V = 1{,}52$ m^3.

Lời giải.

Xét một đáy của của thùng đựng dầu và gán hệ trục như hình vẽ.



Phương trình đường elip đáy khi đó có phương trình $\dfrac{x^2}{0{,}5^2} + \dfrac{y^2}{0{,}4^2} = 1$.

Khi đó chiều cao mép dầu trong thùng trùng với đường thẳng $y = 0{,}2$.

Xét phương trình $0{,}4\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{0{,}5^2}} = 0{,}2 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích phần mặt chứa dầu là

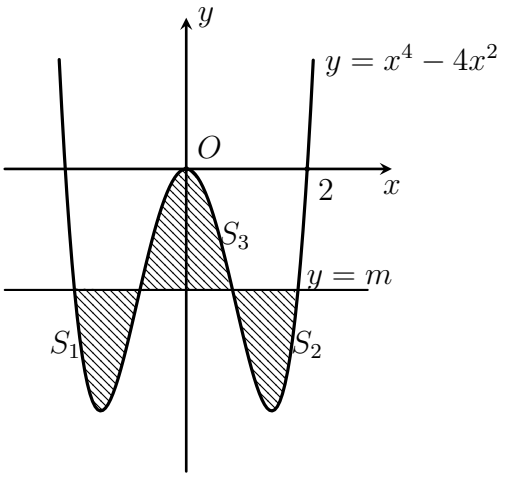
$$S = 0{,}5 \times 0{,}4 \times \pi - \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(0{,}4\sqrt{1 - \frac{x^2}{0{,}5^2}} - 0{,}2\right) \mathrm{d}x \approx 0{,}506.$$

Do đó thể tích dầu trong thùng là $V = 3 \cdot S \approx 1{,}52\text{m}^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$ cắt đường thẳng d: $y = m$ tại 4 điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 thỏa mãn $S_1 + S_2 = S_3$ (như hình vẽ). Giá trị m là số hữu tỷ tối giản có dạng $m = -\dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Giá trị của $T = a - b$ bằng:



A. 29. **B**. 3. **C**. 11. **D**. 25.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 4x^2 - m = 0$ có biệt thức $\Delta = 16 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x^2 = 2 + \sqrt{4+m} \\ x^2 = 2 - \sqrt{4+m} \end{array}\right.$, do $2 - \sqrt{4+m} > 0 \Leftrightarrow m < 0$. Vậy $-4 < m < 0$.

Khi đó ta có bốn nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2+\sqrt{4+m}}=\pm t_1 \\ x=\pm\sqrt{2-\sqrt{4+m}}=\pm t_2 \end{array}\right.$.
Theo tính đối xứng của đồ thị hàm trùng phương, nên để thỏa yêu cầu bài toán ta cần có

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2}(x^4-4x^2-m)\,\mathrm{d}x=-\int_{t_2}^{t_1}(x^4-4x^2-m)\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^{t_1}(x^4-4x^2-m)\,\mathrm{d}x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{15}(3x^4-20x^2-15m)\Big|_0^{t_1}=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3t_1^4-20t_1^2-15m=0. \end{aligned}$$

Mặt khác ta có $t_1^4-4t_1^2-m=0$. Suy ra $2t_1^2=-3m\Leftrightarrow 2\sqrt{4+m}=-4-3m\Leftrightarrow m=-\dfrac{20}{9}$.
Vậy $T=a-b=11$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và dương trên $\mathbb{R}$, hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g(x)=(x-1)f(x^2-2x+1)$, trục hoành, $x=1;x=2$ có diện tích bằng 5. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B**. $I=20$. **C**. $I=5$. **D**. $I=9$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$J=\int_1^2|(x-1)f[(x-1)^2]|\,\mathrm{d}x=5.$$

Đặt $t=x-1$ ta được

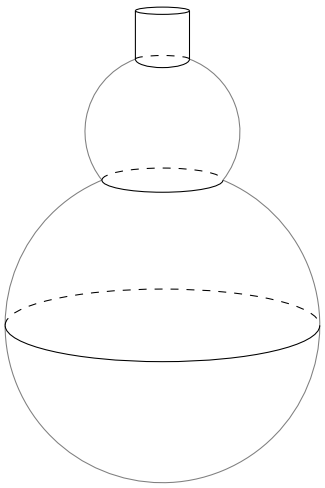
$$J=\int_0^1 t\cdot f(t^2)\,\mathrm{d}t=5\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)\,\mathrm{d}(t^2)=10$$

hay $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 20.

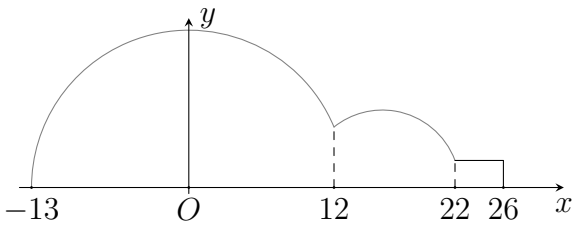
Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13$ cm và $r = \sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hình cầu có bán kính $r' = 5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm trong đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).



A. 9,5 lít. **B**. 8,2 lít. **C**. 10,2 lít. **D**. 11,4 lít.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
Có thể coi hồ lô được tạo thành bằng cách cho đường cong, gấp khúc quay quanh trục Ox.
Phương trình cung cong lớn là $x^2 + y^2 = 13^2 \Rightarrow y = \sqrt{169 - x^2}$.

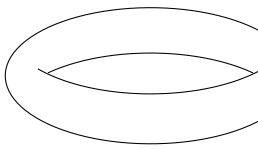


Phương trình cung cong nhỏ là $(x - 16)^2 + y^2 = 41 \Rightarrow y = \sqrt{41 - (x - 16)^2}$.
Thể tích hồ lô là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-13}^{12} (169 - x^2)\,\mathrm{d}x + \pi \int_{12}^{22} [41 - (x - 16)]\,\mathrm{d}x + \pi \int_{22}^{26} 5\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left(\frac{8750}{3} + \frac{950}{3} + 20 \right) = \frac{9760}{3}\pi \approx 10220{,}65\,\mathrm{cm}^3 \approx 10{,}2\,\text{lít}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Người ta làm một chiếc phao bơi như hình vẽ (với bề mặt có được bằng cách quay đường tròn

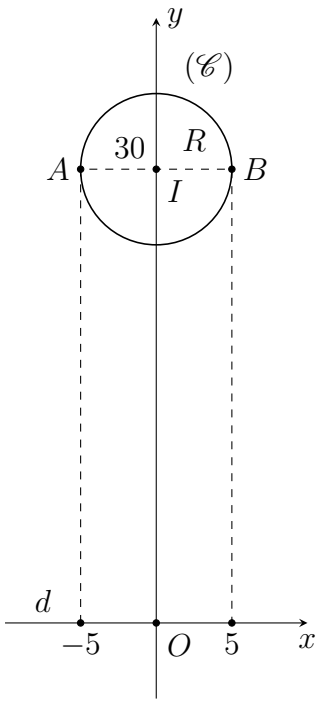


$(\mathscr{C})$ quanh trục d). Biết rằng $OI = 30$ cm, $R = 5$ cm. Tính thể tích V của chiếc phao.

A. $V = 1500\pi^2\,\mathrm{cm}^3$. **B**. $V = 9000\pi^2\,\mathrm{cm}^3$. **C**. $V = 1500\pi\,\mathrm{cm}^3$. **D**. $V = 9000\pi\,\mathrm{cm}^3$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó, phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ là $x^2+(y-30)^2=25$.



Phương trình nửa trên và nửa dưới (theo đường kính AB) của $(\mathscr{C})$ là

$$\mathscr{C}_t\colon y=30+\sqrt{25-x^2};$$
$$\mathscr{C}_d\colon y=30-\sqrt{25-x^2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_{-5}^{5}\left[\left(30+\sqrt{25-x^2}\right)^2-\left(30-\sqrt{25-x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\&=\pi\int\limits_{-5}^{5}120\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Đặt $x=5\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=5\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-5\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}; x=5\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

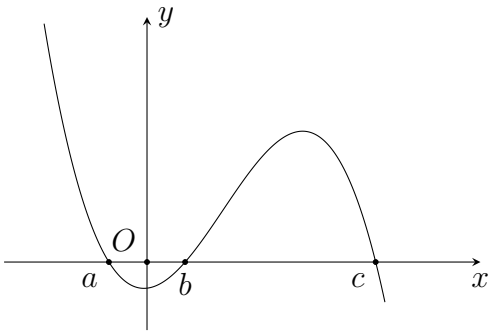
Khi đó, ta có

$$V=120\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}25\cos^2 t\,\mathrm{d}t=1500\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=1500\pi t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+750\pi\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1500\pi^2\ \mathrm{cm}^3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(c)>f(b)>f(a)$. **B.** $f(b)>f(a)>f(c)$.

C. $f(a)>f(c)>f(b)$. **D.** $f(c)>f(a)>f(b)$.

Lời giải.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$.

Tương tự, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$, Ox, $x=b$, $x=c$.

Ta có $S_1=\displaystyle\int\limits_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(a)-f(b)$. Do $S_1>0$ nên $f(a)>f(b)$.

Ta có $S_2=\displaystyle\int\limits_b^c|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x=f(c)-f(b)$. Do $S_2>0$ nên $f(c)>f(b)$.

Lại có $S_2>S_1\Rightarrow f(c)-f(b)>f(a)-f(b)\Rightarrow f(c)>f(a)$.

Suy ra $f(c)>f(a)>f(b)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{4-3x}}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ quay xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V, biết $V=\dfrac{\pi}{a}\left(b\ln\dfrac{c}{2}-1\right)$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính giá trị của biểu thức $P=ab-2c$.

A. $P=-48$. **B.** $P=24$. **C.** $P=30$. **D.** $P=48$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1+\sqrt{4-3x}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1\frac{1}{5-3x+2\sqrt{4-3x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{4-3x}\Rightarrow t^2=4-3x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-3\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_2^1\frac{1}{1+t^2+2t}\cdot\frac{-2t}{3}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}\int\limits_1^2\frac{t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2\pi}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}\left(\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)\Big|_1^2\\&=\frac{2\pi}{3}\left(\ln 3+\frac{1}{3}-\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{9}\left(6\ln\frac{3}{2}-1\right).\end{aligned}$$

Theo giả thiết $V=\dfrac{\pi}{a}\left(b\ln\dfrac{c}{2}-1\right)$ nên $a=9,b=6,c=3\Rightarrow P=ab-2c=54-6=48$.

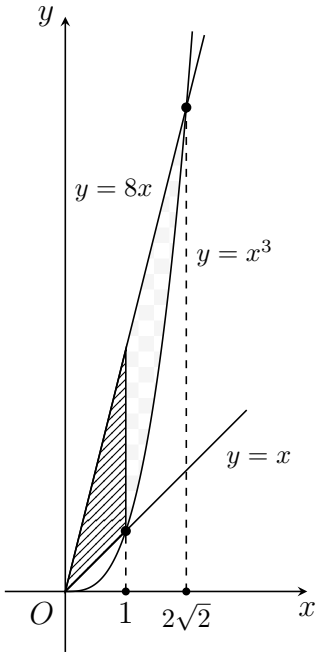
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

A. $I=66$. **B.** $I=60$. **C.** $I=59$. **D.** $I=67$.

Lời giải.

Đồ thị của ba hàm số đã cho được minh họa như hình vẽ bên.



Trong góc phần tư thứ nhất, xét các phương trình hoành độ giao điểm:

- ☑ $x^3=x\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.
- ☑ $x^3=8x\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2\sqrt{2}$.

Hình phẳng cần tính diện tích là phần gạch sọc, được chia ra làm 2 vùng.

Theo hình vẽ, ta có

$$S=\int\limits_0^1(8x-x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^{2\sqrt{2}}(8x-x^3)\,\mathrm{d}x=\frac{63}{4}.$$

Suy ra $a=63$ và $b=4$. Vậy, $I=a-b=59$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Một xe chuyển động với vận tốc thay đổi là $v(t) = 3at^2 + bt$. Gọi $S(t)$ là quãng đường đi được sau t giây. Biết rằng sau 5 giây thì quãng đường đi được là 150 m, sau 10 giây thì quãng đường đi được là 1100 m. Tính quãng đường xe đi được sau 20 giây.

A. 8400 m. **B**. 600 m. **C**. 4200 m. **D**. 2200 m.

Lời giải.

Quãng đường đi được sau 5 giây là

$$S_1 = \int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 (3at^2 + bt)\,\mathrm{d}t = \left(at^3 + \frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 125a + \frac{25}{2}b.$$

Quãng đường đi được sau 10 giây là

$$S_2 = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{10} (3at^2 + bt)\,\mathrm{d}t = \left(at^3 + \frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^{10} = 1000a + 50b.$$

Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} 125a + \dfrac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 12 \\ 100a + 5b = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Suy ra $v(t) = 3t^2 + 2t$, nên quãng đường xe đi được sau 20 giây là

$$S = \int_0^{20} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{20} (3t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t = (t^3 + t^2)\Big|_0^{20} = 8000 + 400 = 8400 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (A) □

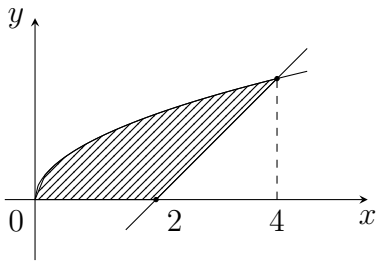
Câu 26. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$ bằng

A. $S = \dfrac{16}{3}$. **B**. $S = \dfrac{10}{3}$. **C**. $S = 2$. **D**. $S = \dfrac{17}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \ \vee \ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$



Diện tích của hình phẳng cần tìm

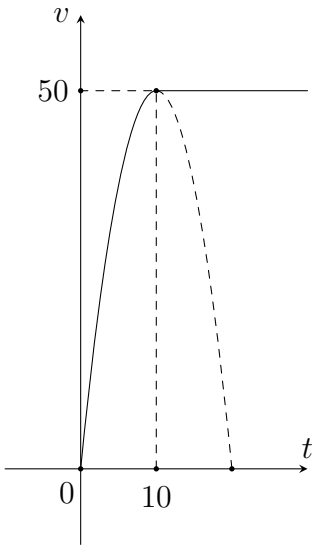
$$S = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2 = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 27.

Một ô tô bắt đầu chuyển động với vận tốc $v(t) = at^2 + bt$ với t tính bằng giây và v tính bằng mét/giây (m/s). Sau 10 giây thì ô tô đạt vận tốc cao nhất $v = 50\ m/s$ và giữ nguyên vận tốc đó, có đồ thị vận tốc như hình bên. Tính quãng đường s ô tô đi được trong 20 giây đầu.



A. $s = \dfrac{2500}{3}$ m. **B.** $s = \dfrac{2600}{3}$ m.

C. $s = 800$ m. **D.** $s = \dfrac{2000}{3}$ m.

Lời giải.

Hàm số $v(t) = at^2 + bt$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 khi $t = 10$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ 100a + 10b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a + b = 0 \\ 100a + 10b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 10. \end{cases}$$

Do đó $v(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 10t$.

Quãng đường s ô tô đi được trong 20 giây đầu được tính bằng công thức

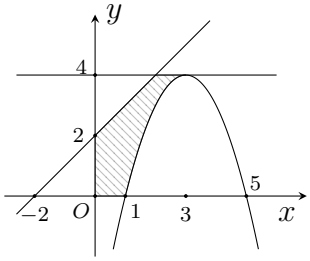
$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t + \int_{10}^{20} 50\,\mathrm{d}t \\ &= \left(-\frac{t^3}{6} + 5t^2\right)\Big|_0^{10} + 50t\Big|_{10}^{20} \\ &= \frac{2500}{3}. \end{aligned}$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 20 giây đầu là $s = \dfrac{2500}{3}$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 28.

Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (*phần tô màu đen trong hình bên*) quanh trục Ox.



A. $\dfrac{61\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{88\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{8\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{424\pi}{15}$.

Lời giải.

- ☑ Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = x + 2$ và $y = 4$ là $x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
- ☑ Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = -x^2 + 6x - 5$ và $y = 4$ là $-x^2 + 6x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.
- ☑ Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = x + 2$ và trục tung là $x = 0$.

☑ Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=-x^2+6x-5$ và trục hoành là $-x^2+6x-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5. \end{cases}$

Ta có phần diện tích giới hạn bởi các đồ thị $d\colon y=x+2$, $\Delta\colon y=4$ và parabol $(P)\colon y=-x^2+6x-5$ và hai trục tọa độ.

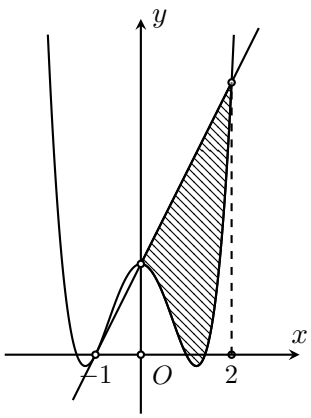
Thể tích vật thể là

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 (x+2)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_1^2 \left[(x+2)^2-(-x^2+6x-5)^2\right]\,\mathrm{d}x+\pi\int_2^3 \left[4^2-(-x^2+6x-5)^2\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\frac{(x+2)^3}{3}\Big|_0^1+\pi\left[-\frac{x^5}{5}+3x^4-15x^3+32x^2-21x\right]\Big|_1^2+\pi\left[-\frac{x^5}{5}+3x^4-\frac{46}{3}x^3+30x^2-9x\right]\Big|_2^3 \\ &= \frac{19\pi}{3}+\frac{44\pi}{5}+\frac{37\pi}{15}=\frac{88\pi}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 29.

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính diện tích giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=-1$, $x=0$.



A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $y'=4ax^3+2bx$.

Phương trình tiếp tuyến d tại $A(-1;0)$ là $d: y=y'(-1)(x+1)+0=(-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c$.

Theo giả thiết, $x=0$ và $x=2$ là hai nghiệm của phương trình này, lần lượt thay $x=0$ và $x=2$ vào ta được

$$\begin{cases} -4a-2b=c \\ -12a-6b=16a+4b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=0 \quad (1) \\ 28a+10b+c=0 \quad (2) \end{cases}$$

Mặt khác, diện tích của phần gạch chéo là

$$\begin{aligned} \frac{28}{5} &= \int_0^2 \left[(-4a-2b)(x+1)-(ax^4+bx^2+c)\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \left[(-4a-2b)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\left(\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^3}{3}+cx\right)\right]\Big|_0^2 \\ &= (-4a-2b)\cdot 4-\left(\frac{32}{5}a+\frac{8}{3}b+2c\right) \end{aligned}$$

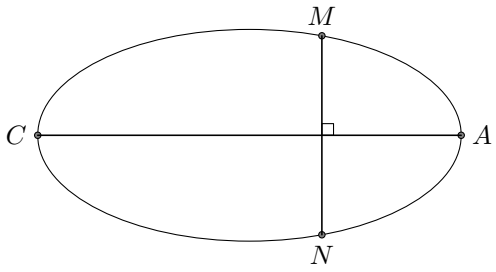
Tương đương với $\frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $a=1, b=-3, c=2$.

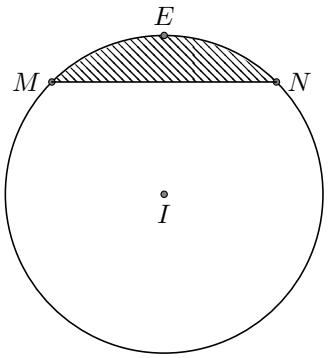
Do đó, $(C): y = x^4 - 3x^2 + 2$, $d: y = 2x + 2$. Suy ra diện tích của hình giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ là $S = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left[(x^4 - 3x^2 + 2) - (2x + 2)\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Sân vận động Sports Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m (Hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt Elip (E) ở M, N (Hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong Hình b) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu làm mái không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?



Hình a



Hình b

A. 57793 m^3 . **B.** 115586 m^3 . **C.** 32162 m^3 . **D.** 101793 m^3 .

Lời giải.

Ta có $2a = 150 \Rightarrow a = 75$, $2b = 90 \Rightarrow b = 45$. Phương trình Elip có dạng $\dfrac{x^2}{75^2} + \dfrac{y^2}{45^2} = 1$.

Gọi $M(x, y) \in (E) \Rightarrow N(x, -y) \in (E) \Rightarrow MN = 2|y| = 2 \cdot \dfrac{45}{75}\sqrt{75^2 - x^2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{75^2 - x^2}$.

Diện tích phần gạch sọc được tính bằng

$$\frac{1}{4}S_{(I,IM)} - S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}\pi IM^2 - \frac{1}{2}IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Khi đó, thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, được tính bằng

$$\int_{-75}^{75} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \int_{-75}^{75} \frac{18}{25}(75^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \approx 115586 \text{ m}^3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở điểm dừng xe, một chiếc xe đang chuyển động đều với vận tốc là 60 km/h. Chiếc xe di chuyển trong trạng thái đó 5 phút rồi bắt đầu đạp phanh và chuyển động chậm dần đều thêm 8 phút nữa rồi mới dừng hẳn ở điểm đỗ xe. Tính quãng đường mà xe đi được từ thời điểm t nói trên đến khi dừng hẳn.

A. 4 km. **B**. 5 km. **C**. 9 km. **D**. 6 km.

Lời giải.

Vận tốc xe khi bắt đầu phanh là $v = 60 + at$ (km/h), mà xe dừng khi chạy được 8 phút $= \dfrac{2}{15}$ giờ thì dừng hẳn nên $0 = 60 + \dfrac{2a}{15} \Leftrightarrow a = -450$ (m/h^2). Khi đó quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh là

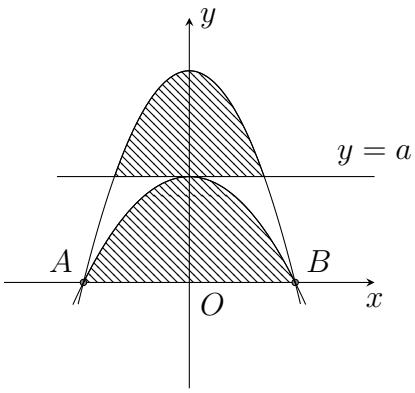
$$\int_0^{\frac{2}{15}} (60 - 450t)\,\mathrm{d}t = 4.$$

Vậy tổng quãng đường cần tính là $60 \cdot \dfrac{5}{60} + 4 = 9$ km.

Chọn đáp án C □

Câu 32.

Cho parabol $(P_1) : y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d : y = a$ $(0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.



A. $T = 32$. **B**. $T = 64$. **C**. $T = 72$. **D**. $T = 99$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = a$ cắt (P_1) tại hai điểm có hoành độ $-\sqrt{4-a}$ và $\sqrt{4-a}$. Vậy

$$S_1 = \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} (-x^2 + 4 - a)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{4-a} \cdot (4-a).$$

Parabol (P_2) có dạng $y = m\,(x^2 - 4)$. Chú ý vì nó còn đi qua điểm $(0; a)$ nên $m = -\dfrac{a}{4}$. Vậy $(P_2) : y = -\dfrac{a}{4}x^2 + a$. Từ đó suy ra

$$S_2 = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right)\,\mathrm{d}x = \frac{8a}{3}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{16(4-a)^3}{9} = \frac{64a^2}{9} \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64.$$

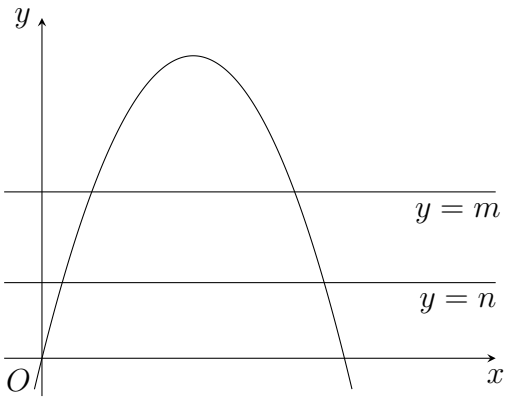
Chọn đáp án B □

Câu 33.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$, $y=n$ chia hình (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (*ta có thể tham khảo hình vẽ*). Tính giá trị biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$.

A. $T=\dfrac{320}{9}$. **B.** $T=\dfrac{75}{2}$.

C. $T=\dfrac{512}{15}$. **D.** $T=405$.



Lời giải.

Hoành độ giao điểm giữa parabol và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4.\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng (H) là $S=\displaystyle\int\limits_0^4\left|-x^2+4x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$.

Ta có

$$-x^2+4x=y\Leftrightarrow x^2-4x+y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{4-y}\\x=2+\sqrt{4-y}\end{array}\right.(y<4).$$

Suy ra diện tích hình giới hạn bởi $y=n$, $y=-x^2+4x$ và trục hoành là

$$S_1=\int\limits_0^n\left|\left(2+\sqrt{4-y}\right)-\left(2-\sqrt{4-y}\right)\right|\mathrm{d}y=\int\limits_0^n 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=-\left.\frac{4\sqrt{(4-y)^3}}{3}\right|_0^n=\frac{32}{3}-\frac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}.$$

Tương tự ta có diện tích hình giới hạn bởi $y=m$, $y=-x^2+4x$ và trục hoành là

$$S_2=\frac{32}{3}-\frac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}.$$

Để hai đường thẳng $y=n$, $y=m$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi

$$\left\{\begin{array}{l}S_1=\dfrac{32}{9}\\S_2=\dfrac{64}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{32}{3}-\dfrac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}=\dfrac{32}{9}\\\dfrac{32}{3}-\dfrac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}=\dfrac{64}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}=\dfrac{64}{9}\\\dfrac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}=\dfrac{32}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(4-n)^3=\dfrac{256}{9}\\(4-m)^3=\dfrac{64}{9}\end{array}\right..$$

Từ đó suy ra $T=(4-m)^3+(4-n)^3=\dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+bx^{2017}+2018$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(\log\left(\log\mathrm{e}\right)\right)=2019$. Tính giá trị của $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)$.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+bx^{2017}+2018 \\ &= a\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+bx^{2017}+2018 \\ &= -a\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+bx^{2017}+2018 \\ &= -a\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)\right)-b(-x)^{2017}+2018 \\ &= 4036-f(-x), \end{aligned}$$

mà $\log(\ln 10)=\log\dfrac{1}{\log \mathrm{e}}=-\log(\log \mathrm{e})$ nên

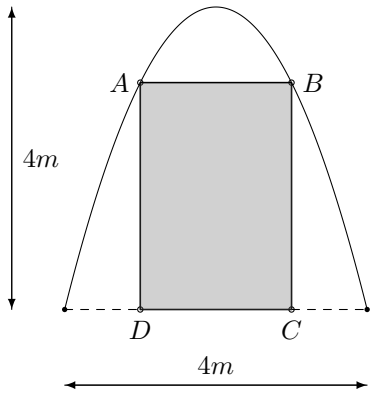
$$f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)=4036-f\left(\log\left(\log \mathrm{e}\right)\right)=4036-2019=2017.$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong đợt hội trại được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

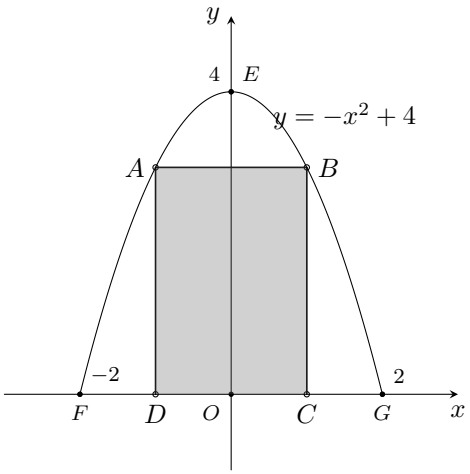
A. 900.000 (đồng). **B**. 1.232.000 (đồng).

C. 902.000 (đồng). **D**. 1.230.000 (đồng).



Lời giải.

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Giả sử parabol là $(P)\colon y=ax^2+bx+c$.

Khi đó (P) đi qua ba điểm $E(0;4), F(2;0), G(-2;0) \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow (P)\colon y=-x^2+4$.

Đặt $CD=2x, 0<x<2 \Rightarrow C(x;0) \Rightarrow BC=-x^2+4$.

Do đó diện tích phần trang trí hoa văn là

$$S_{hv}=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,\mathrm{d}x-2x(-x^2+4)=2x^3-8x+\frac{32}{3}=f(x)$$

Chi phí để dán hoa văn là: $T=200000\cdot S_{hv}=200000f(x)$.

Xét hàm số $f(x)=2x^3-8x+\dfrac{32}{3},\ 0<x<2$.

Ta có $f'(x)=6x^2-8=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \in (0;2)$ nên ta có bảng biến thiên sau:

Từ BBT ta có $T \geqslant 200000\cdot\dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

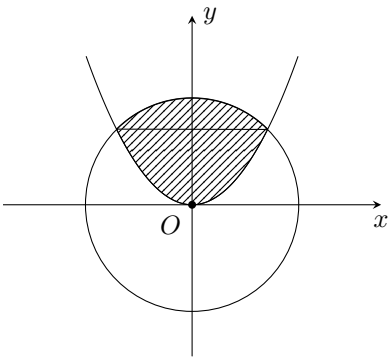
Vậy $\min T=200000\cdot\dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}\approx 902000$ (đồng).

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{44\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{22\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\pi}{5}$.



Lời giải.

Với $y=x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được $x^2+x^4=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Hơn nữa $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{2-x^2} \\ y=\sqrt{2-x^2}. \end{array}\right.$

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng $(H_1)\colon \begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ x=-1 \\ x=1 \\ Ox \end{cases}$ quay

quanh Ox bỏ đi phần thể tích vật thể trong xoay do hình phẳng (H_2): $\begin{cases} y=x^2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox.

Do đó $V=\pi\left[\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}(x^2)^2\,\mathrm{d}x\right]=\dfrac{44\pi}{15}$.

Chọn đáp án A □

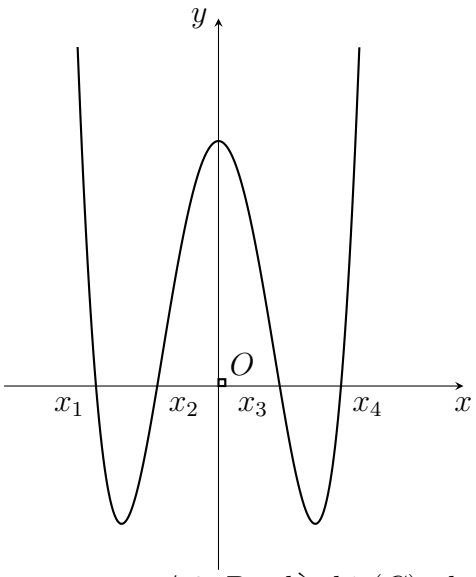
Câu 37. Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành. Biết rằng $S_1=S_2$. Giá trị của m bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4-3x^2+m=0$ (1). Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$, ta được phương trình $t^2-3t+m=0$ (2). Ta có (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 9-4m>0 \\ 3>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}.$$



Gọi các nghiệm của phương trình (1) là $x_1<x_2<x_3<x_4$, $x_1,x_2,x_3,x_4\neq 0$. Do đồ thị (C) nhận trục tung là trục đối xứng nên ta có

$$S_1=2\int_{x_2}^{0}(x^4-3x^2+m)\,\mathrm{d}x \quad \text{và} \quad S_2=2\int_{x_1}^{x_2}(-x^4+3x^2-m)\,\mathrm{d}x.$$

Vì $S_1=S_2$ nên

$$\int_{x_1}^{x_2}(-x^4+3x^2-m)\,\mathrm{d}x=\int_{x_2}^{0}(x^4-3x^2+m)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left(-\frac{x_2^5}{5}+x_2^3-mx_2\right)-\left(-\frac{x_1^5}{5}+x_1^3-mx_1\right)$$
$$=-\left(\frac{x_2^5}{5}-x_2^3+mx_2\right) \Leftrightarrow \frac{x_1^5}{5}-x_1^3+mx_1=0.$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x_1^5}{5}-x_1^3+mx_1=0 \\ x_1^4-3x_1^2+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^5}{5}-x_1^3+(3x_1^2-x_1^4)x_1=0 \\ m=3x_1^2-x_1^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=\dfrac{5}{2} \\ m=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 38.

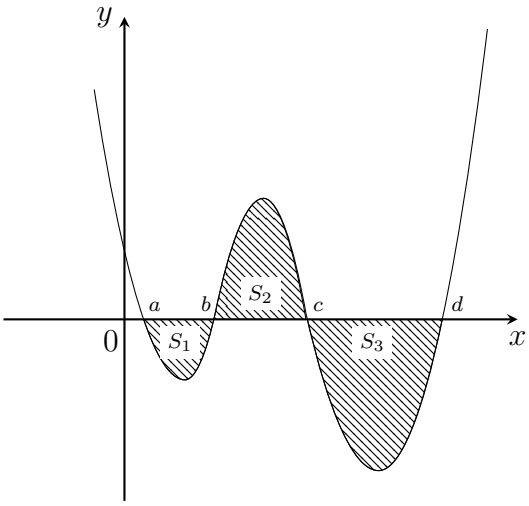
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$.

B. $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$.

D. $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và bảng biến thiên như hình bên.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$.

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$f(d)$	↗	

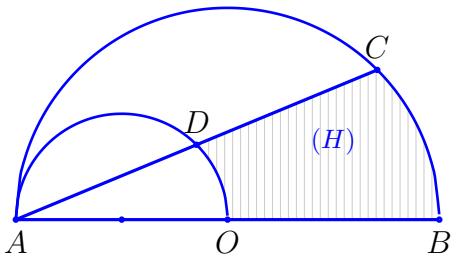
☑ $S_1<S_2 \Rightarrow \displaystyle\int_b^a f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(a)-f(b)<f(c)-f(b) \Rightarrow f(a)<f(c)$.

☑ $S_2<S_3 \Rightarrow \displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_d^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(c)-f(b)<f(c)-f(d) \Rightarrow f(b)>f(d)$.

Vậy ta có $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ bên dưới, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $\widehat{BAC}=30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ) xung quanh đường thẳng AB.



A. 279π. **B**. $\dfrac{620\pi}{3}$. **C**. $\dfrac{784\pi}{3}$. **D**. $\dfrac{325\pi}{3}$.

Lời giải.

Đặt $AB=2R$. Ta được $\dfrac{\pi R^2}{2}=32\pi \Rightarrow R^2=64 \Rightarrow R=8$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn lớn, $A(-8;0)$, $B(8;0)$.

Phương trình đường tròn lớn là $(C_1)\colon x^2+y^2=64$.
Phương trình đường tròn nhỏ là $(C_2)\colon (x+4)^2+y^2=16$.
Đường thẳng AC đi qua điểm $A(-8;0)$, hệ số góc $k=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ có phương trình là $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+8)$.
Tọa độ các điểm $C\left(4;4\sqrt{3}\right)$, $D\left(-2;2\sqrt{3}\right)$.
Thể tích khối tròn xoay khi quay xung quanh trục AB phần tam giác cong ABC là

$$V_1=\pi\left(\int\limits_{-8}^{4}\frac{1}{3}(x+8)^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{4}^{8}(64-x^2)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{896\pi}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay xung quanh trục AB phần tam giác cong AOD là

$$V_2=\pi\left(\int\limits_{-8}^{-2}\frac{1}{3}(x+8)^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{0}(16-(x+4)^2)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{112\pi}{3}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=V_1-V_2=\dfrac{896\pi}{3}-\dfrac{112\pi}{3}=\dfrac{784\pi}{3}$.
Chọn đáp án C □

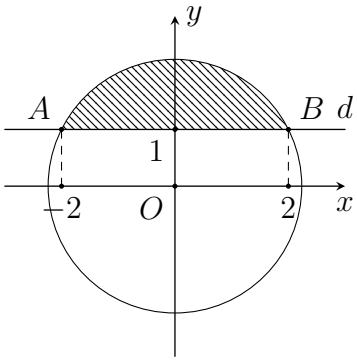
Câu 40. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=5$, và đường thẳng d có phương trình $y=1$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi d và cung nhỏ AB của (C). Quay hình (H) xung quanh đường thẳng d ta được một khối tròn xoay có thể tích V. Giá trị của V gần nhất với số nào sau đây?

A. 46,1. **B**. 12,4. **C**. 11,3. **D**. 33,5.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của hệ

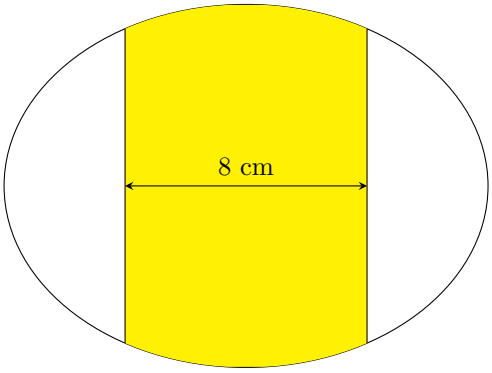
$$\begin{cases}y=1\\x^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$



Vậy giao điểm là $A(-2;1)$ và $B(2;1)$.
Phương trình nửa đường tròn phía trên trục Ox là $y=\sqrt{5-x^2}$.
Gọi I là giao điểm của d và Oy, suy ra $I(0;1)$. Tịnh tiến hệ trục tọa độ theo $\overrightarrow{OI}=(0;1)$ thành hệ trục XIY với $\begin{cases}x-0=X\\y-1=Y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X\\y=Y+1\end{cases}$, trục IX nằm trùng với đường thẳng d. Khi đó hình phẳng quay quanh trục IX.
Đối với hệ trục XIY phương trình nửa đường tròn là $Y=\sqrt{5-X^2}-1$. Do đó, thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{5-X^2}-1\right)^2\,\mathrm{d}X=\frac{44\pi}{3}-10\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 11{,}295$.
Chọn đáp án C □

Câu 41.

Ông Nam có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ 1 m^2. Hỏi ông Nam cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B**. 7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng. **D**. 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$.

Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1\Rightarrow \left[\begin{aligned} &y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} \quad (E_1)\\ &y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} \quad (E_2).\end{aligned}\right.$

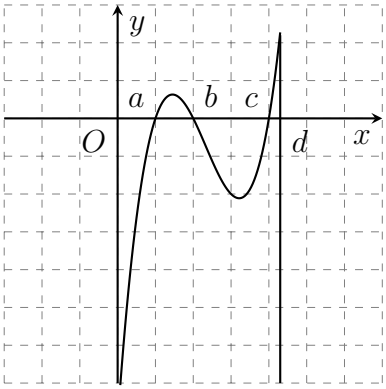
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1), (E_2), $x=-4$, $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\displaystyle\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.

Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$. **B**. $M+m=f(d)+f(c)$.

C. $M+m=f(b)+f(a)$. **D**. $M+m=f(0)+f(a)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên cho hàm $f(x)$

x	0		a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT ta có $M\in\{f(0),f(b),f(d)\}$ và $m\in\{f(a),f(c)\}$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_1): \begin{cases} x=0, x=a \\ y=0 \\ y=f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_2): \begin{cases} x=a, x=b \\ y=0 \\ y=f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_3): \begin{cases} x=b, x=c \\ y=0 \\ y=f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_4): \begin{cases} x=c, x=d \\ y=0 \\ y=f'(x) \end{cases}$.

Ta có

$$S_1=\int\limits_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x=-f(x)\big|_0^a=f(0)-f(a),\ S_2=\int\limits_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x=f(x)\big|_a^b=f(b)-f(a).$$

Dễ dàng thấy $S_1>S_2$ nên $f(0)-f(a)>f(b)-f(a)\Rightarrow f(0)>f(b)$.

Ta có

$$S_3=\int\limits_b^c |f'(x)|\,\mathrm{d}x=-f(x)\big|_b^c=f(b)-f(c) \text{ và } S_4=\int\limits_c^d |f'(x)|\,\mathrm{d}x=f(x)\big|_c^d=f(d)-f(c).$$

Do $S_3>S_4$ nên $f(b)>f(d)$. Từ đó suy ra $f(0)>f(b)>f(d)$ và $M=f(0)$.

Mặt khác $S_3>S_2$ nên $f(a)>f(c)$ hay $m=f(c)$.

Vậy $M+m=f(0)+f(c)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Xét 4 mệnh đề sau:

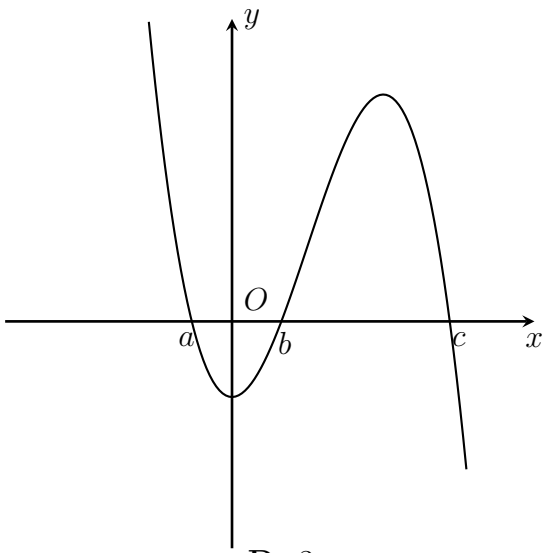
(1): $f(c)<f(a)<f(b)$.

(2): $f(c)>f(b)>f(a)$.

(3): $f(a)>f(b)>f(c)$.

(4): $f(a)>f(b)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?



A. 4. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	

Từ đó ta thấy mệnh đề (4) đúng.

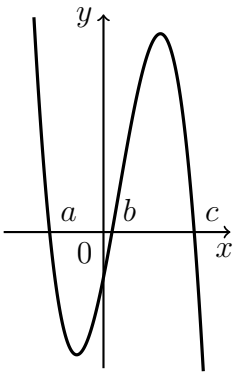
Từ đồ thị ta có diện tích hình phẳng giới hạn các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = a, x = b$ nhỏ hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = b, x = c$.

Do đó $\displaystyle\int_a^b (-f'(x))\,\mathrm{d}x < \int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -f(x)\Big|_a^b < f(x)\Big|_b^c \Leftrightarrow -(f(b) - f(a)) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$. Mà $f(a) > f(b) \Rightarrow f(a) > f(b) > f(c)$, hay mệnh đề (3) đúng.

Chọn đáp án C □

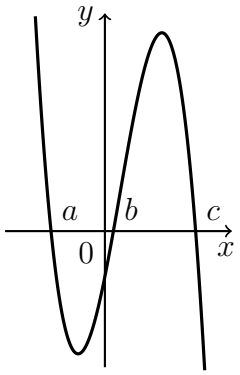
Câu 44.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(a) > f(b) > f(c)$.
B. $f(c) > f(a) > f(b)$.
C. $f(b) > f(a) > f(c)$.
D. $f(c) > f(b) > f(a)$.

Lời giải.



Gọi S_1 là diện tích của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên đoạn $[a; b]$ và S_2 là diện tích của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên đoạn $[b; c]$. Ta có

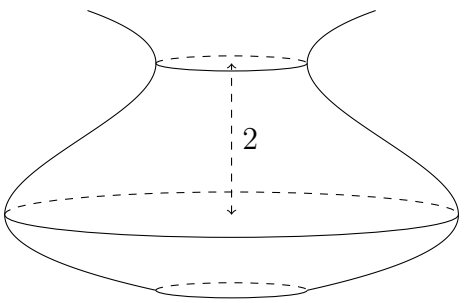
$S_1 = -\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(a) - f(b)$ và $S_2 = \displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(c) - f(b)$.

Từ đồ thị ta có $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(c) > f(a) > f(b)$.

Chọn đáp án B □

Câu 45.

Một con quạ khát nước, nó tìm thấy một cái lọ có nước nhưng cổ lọ lại cao nó không thò mỏ uống được nên đã gắp từng viên bi (hình cầu) bỏ vào trong lọ để nước dâng lên. Hỏi con quạ cần bỏ vào lọ ít nhất bao nhiêu viên bi để có thể uống nước? Biết rằng viên bi có bán kính là $\dfrac{3}{4}$ (đvdd) và không thấm nước, cái lọ có hình dáng là một khối tròn xoay với đường sinh là

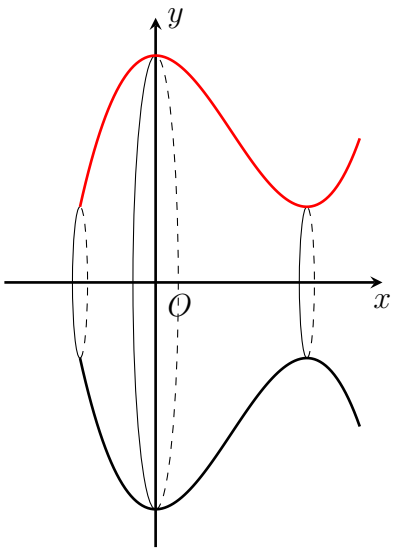


đồ thị của một hàm bậc 3, mực nước ban đầu trong lọ ở vị trí mà mặt thoáng tạo thành hình tròn có bán kính lớn nhất $R = 3$, mực nước mà quạ có thể uống được là vị trí mà hình tròn có bán kính nhỏ nhất $r = 1$ và khoảng cách giữa hai mặt này bằng 2, được minh họa ở hình vẽ trên.

A. 15. **B**. 16. **C**. 17. **D**. 18.

Lời giải.

Đặt cái bình vào hệ trục Oxy sao cho O trùng với tâm đường tròn lớn, Ox trùng với trục của cái bình, đi qua tâm hai đường tròn lớn và bé. Khi đó một đường sinh của cái bình là đồ thị hàm bậc ba có hai điểm cực trị là $A(3;0)$ và $B(2;1)$.



Gọi hàm bậc ba đó là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có hệ

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 3 \\ 3a + b = 0 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c;d) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0; 3\right).$$

Từ đó thể tích phần bình từ đường tròn lớn lên đường tròn nhỏ là

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{314\pi}{35}.$$

Thể tích một viên bi là $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{9\pi}{16}$. Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5024}{315} \approx 15{,}95$.

Do đó số viên bi ít nhất cần phải thả vào lọ là 16 viên.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Một ô tô đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500 m thì xe dừng hẳn, hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

A. $a = -\frac{200}{13}$ m/s^2. **B**. $a = -\frac{100}{13}$ m/s^2. **C**. $a = \frac{40}{3}$ m/s^2. **D**. $a = -\frac{40}{3}$ m/s^2.

Lời giải.

Thời điểm xe dừng hẳn là $200 + at = 0 \Rightarrow t = -\frac{200}{a}$.

Khi đó ta có

$$\int_0^{-\frac{200}{a}} (200 + at)\,\mathrm{d}t = 1500 \Leftrightarrow -\frac{200^2}{2a} = 1500 \Leftrightarrow a = -\frac{40}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Xác định m để đồ thị hàm số $(C)\colon y = 5x^4 - 8x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành có phần trên và phần dưới bằng nhau.

A. $\frac{9}{16}$. **B**. $\frac{16}{9}$. **C**. 9. **D**. $\frac{25}{16}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $5x^4-8x^2+m=0$.
Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$. Ta có $5t^2-8t+m=0$. (1)
Đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16-5m>0\\ \dfrac{m}{5}>0\\ \dfrac{8}{5}>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{16}{5}.$$

Ta có hàm số $y=f(x)=5x^4-8x^2+m$ là hàm số chẵn nên $S_1+S_2=S_3\Rightarrow S_2=\dfrac{1}{2}S_3$. Gọi $x_1<x_2<x_3<x_4$ là bốn hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành ta có

$$S_2=\frac{1}{2}S_3\Rightarrow\int\limits_{x_3}^{x_4}(-f(x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{x_3}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{x_3}^{x_4}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{x_3}f(x)\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{x_4}f(x)\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{x_4}(5x^4-8x^2+m)\,\mathrm{d}x=0$$

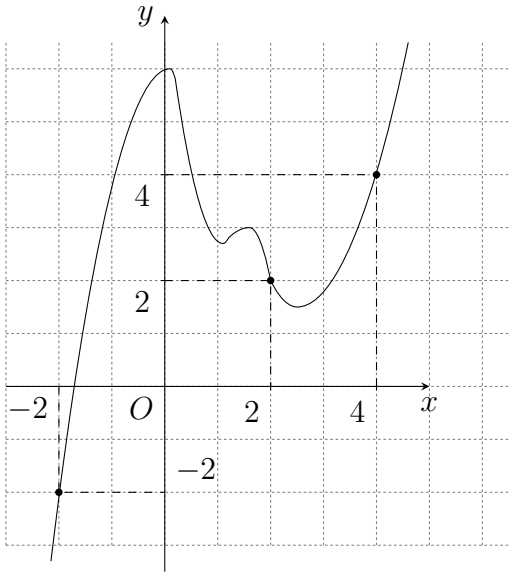
$$\Leftrightarrow\left(x^5-\frac{8}{3}x^3+mx\right)\Big|_0^{x_4}=0\Leftrightarrow x_4^5-\frac{8}{3}x_4^3+mx_4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_4=0\\ x_4^4-\dfrac{8}{3}x_4^2+m=0\end{array}\right.\quad(2)$$

Với $x_4=0\Rightarrow m=0$ (loại).
Xét (2) $\Leftrightarrow(5x_4^4-8x_4^2+m)-4x_4^4+\dfrac{16}{3}x_4^2=0\Leftrightarrow 4x_4^4-\dfrac{16}{3}x_4^2=0\Leftrightarrow x_4^2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow m=\dfrac{16}{9}$(nhận).
Chọn đáp án (B) □

Câu 48.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.
B. Hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
C. Hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.
D. Hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

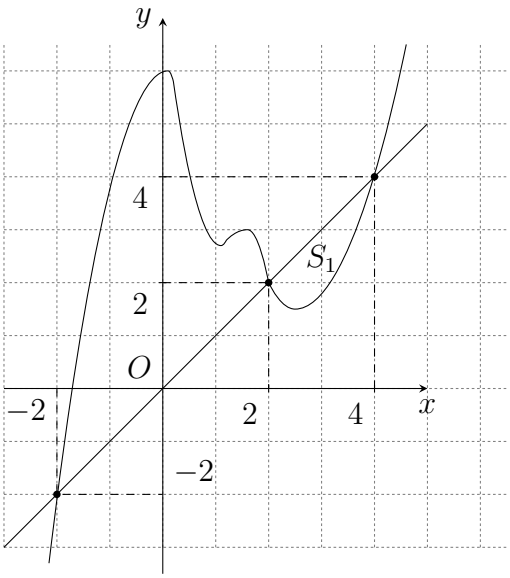


Lời giải.

Ta có $h(x)=2f(x)-x^2$ nên $h'(x)=2f'(x)-2x=2\left(f'(x)-x\right)$.
Vẽ đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị tại ba điểm $(-2;-2)$, $(2;2)$, $(4;4)$ tạo ra hai miền (H_1), (H_2) có diện tích là S_1 và S_2. Trong đó

$$S_1=\int\limits_2^4 (x-f'(x))\mathrm{d}x>0$$

nên $0<2\displaystyle\int\limits_2^4 (x-f'(x))\mathrm{d}x=\left(x^2-2f(x)\right)\Big|_2^4=h(2)-h(4)$.
Do đó $h(2)>h(4)$.



Ta có $f(x)$ là hàm liên tục nên $h(x)$ cũng là hàm liên tục, $\forall x\in(2;4)$, mà $h(2)>h(4)$ nên suy ra hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 49. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y=ax^2-2$ và $y=4-2ax^2$ có diện tích bằng 16. Tìm giá trị của a.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2-2=4-2ax^2\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2}{a}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$.

Đặt $m=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}>0$. Khi đó, diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol là

$$S=\int_{-m}^{m}|3ax^2-6|\mathrm{d}x=\int_{-m}^{m}(6-3ax^2)\mathrm{d}x=(6x-ax^3)|_{-m\to m}=12m-2am^3=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=16\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

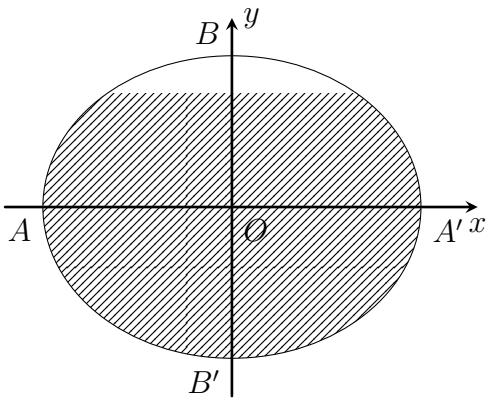
Chọn đáp án B ☐

Câu 50. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng $1m$, trục bé bằng $0,8m$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3m$. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V=1,52m^3$. **B.** $V=1,31m^3$. **C.** $V=1,27m^3$. **D.** $V=1,19m^3$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4}{25}}=1$.



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4}{25}}=1$ ta có $y=\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\dfrac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=\dfrac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\dfrac{\pi}{3}$; Khi $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $S_2=\dfrac{4}{5}\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{10}=\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{\sqrt{3}}{20}\right)\cdot 3=1{,}52$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=2$ có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$ là một nửa đường tròn đường kính là $\sqrt{5}x^2$. Tính thể tích V của vật thể đã cho.

A. $V=2\pi$. **B.** $V=5\pi$. **C.** $V=4\pi$. **D.** $V=3\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện là nửa đường tròn với đường kính $\sqrt{5}x^2$ nên diện tích của thiết diện là

$$S(x)=\frac{\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2}{2}=\frac{5\pi x^4}{8}.$$

Từ đó suy ra thể tích của vật thể là

$$V = \int_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{5\pi x^4}{8}\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\dfrac{\mathrm{C}_n^0}{1\cdot 2} + \dfrac{\mathrm{C}_n^1}{2\cdot 3} + \dfrac{\mathrm{C}_n^2}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_n^n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$.

A. $n = 99$. **B.** $n = 100$. **C.** $n = 98$. **D.** $n = 101$.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + x\mathrm{C}_n^1 + x^2\mathrm{C}_n^2 + x^3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + x^2\mathrm{C}_n^n$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\displaystyle\int (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{C}_n^0 + x\mathrm{C}_n^1 + x^2\mathrm{C}_n^2 + x^3\mathrm{C}_n^3 + \cdots + x^n\mathrm{C}_n^n\right)\mathrm{d}x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tức là $\dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = x\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{x^2}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{x^3}{3}\mathrm{C}_n^2 + \dfrac{x^4}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{C}_n^n$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x\mathrm{C}_n^0 + \frac{x^2}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{x^3}{3}\mathrm{C}_n^2 + \frac{x^4}{4}\mathrm{C}_n^3 + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{C}_n^n\right)\mathrm{d}x$.

Tức là $\dfrac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{1\cdot 2}\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{2\cdot 3}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{3\cdot 4}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\mathrm{C}_n^n$.

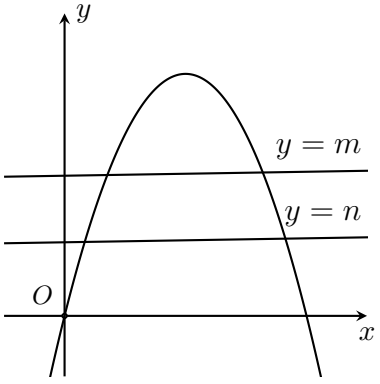
Như vậy $\dfrac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow n + 2 = 100 \Leftrightarrow n = 98$.

Chọn đáp án C □

Câu 53.

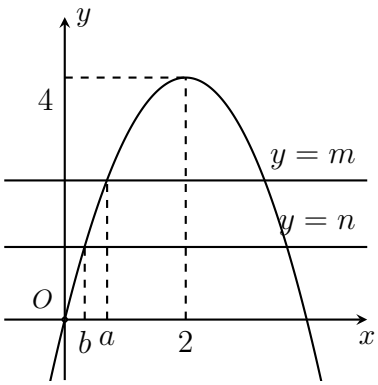
Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$ bằng

A. $T = \dfrac{320}{9}$. **B.** $T = \dfrac{75}{2}$. **C.** $T = \dfrac{512}{15}$. **D.** $T = 405$.



Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.



Khi đó $S=\displaystyle\int_0^2(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$.

Đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia S thành ba phần bằng nhau có diện tích theo thứ tự từ trên xuống là S_1; S_2; S_3.

Gọi hoành độ các giao điểm của parabol với hai đường thẳng như hình bên.

Ta có

$$\begin{aligned}
&S_1=2\int_a^2(-x^2+4x-m)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}S\\
\Leftrightarrow\ &\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-mx\right)\Big|_a^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{16}{3}-2m\right)-\left(-\frac{a^3}{3}+2a^2-ma\right)=\frac{16}{9}\quad(1).
\end{aligned}$$

Mà $x=a$ là nghiệm của phương trình $-x^2+4x=m$ nên ta có $-a^2+4a=m\quad(2)$.

Thay (2) vào (1) ta được $-\dfrac{2a^3}{3}+4a^2-8a+\dfrac{32}{9}=0\Leftrightarrow a\approx 0{,}613277$.

Suy ra $m=-a^2+4a\approx 2{,}077$.

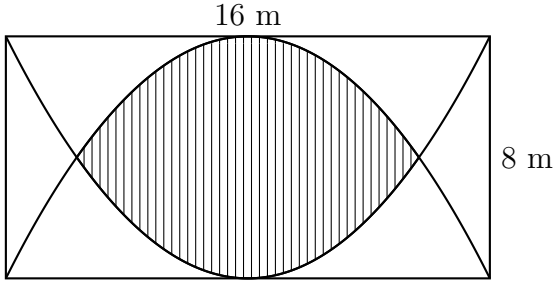
Tương tự ta có

$$\begin{aligned}
&S_1+S_2=\frac{2}{3}S\\
\Rightarrow\ &2\int_b^2(-x^2+4x-n)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\int_0^2(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{2}{3}b^3+4b^2-8b+\frac{16}{9}=0\\
\Leftrightarrow\ &b\approx 0{,}252839\Rightarrow n=-b^2+4b=0{,}947428.
\end{aligned}$$

Khi đó $T=(4-m)^3+(4-n)^3=\dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 54. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m và chiều rộng là 8 m. Các nhà toán học dùng hai đường parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 điểm đầu của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa) được trồng hoa hồng. Biết chi phí để trồng hoa hồng là 45000 đồng/m^2. Hỏi các nhà toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 3322000 đồng. **B**. 3476000 đồng. **C**. 2715000 đồng. **D**. 2159000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc là tâm hình chữ nhật, các trục tọa độ song song với các cạnh của hình chữ nhật khi đó các phương trình của parabol là $y=-\dfrac{x^2}{8}+4$ và $y=\dfrac{x^2}{8}-4$. Diện tích phần trồng hoa là

$$S=\int\limits_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}}\left(-\frac{x^2}{8}+4-\frac{x^2}{8}+4\right)\mathrm{d}x\approx 60,34\ \mathrm{m}^2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $(\mathcal{C})$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathcal{C})$ và hai trục toạ độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thoả mãn $S=1$?

A. Không. **B**. Một. **C**. Hai. **D**. Ba.

Lời giải.

☑ Ta có $y'=\dfrac{m^2+1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq 1$, nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định với mọi m.

☑ $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại $A(m^2;0)$ và cắt trục tung $B(0;-m^2)$.

☑ $S=-\displaystyle\int\limits_0^{m^2}\frac{x-m^2}{x+1}\mathrm{d}x=\left(m^2+1\right)\ln\left(m^2+1\right)-m^2$.

☑ $S=1\Leftrightarrow\left(m^2+1\right)\cdot\left[\ln\left(m^2+1\right)-1\right]=0\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\mathrm{e}-1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=\pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\dfrac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0)=2$ thì $2a+5b$ bằng

A. 8. **B**. 9. **C**. 10. **D**. 11.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x$; $f'(0)=2\Rightarrow a=2$.

$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\alpha\right)$ với $\alpha=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(a^2+b^2\right)\sin^2\left(x+\alpha\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[1-\cos\left(2x+2\alpha\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin\left(2x+2\alpha\right)\right]\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin\left(2x+2\alpha\right)\right]\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{\pi^2(a^2+b^2)}{2}\\&=\frac{\pi^2(4+b^2)}{2}.\end{aligned}$$

Lại có: $V=\dfrac{5\pi^2}{2}\Rightarrow 4+b^2=5\Rightarrow b=1$ (vì $b>0$) Vậy $2a+5b=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Tập hợp nào dưới đây có chứa số thực m để diện tích giới hạn bởi đường cong $(C)\colon y=x^3-3x$ và đường thẳng $(d)\colon y=mx$ có diện tích bằng 8(đvdt)?

A. $(-8;0)$. **B.** $(-8;3)$. **C.** $(1;7)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-3x=mx\Leftrightarrow x(x^2-m-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m+3}\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ và đường thẳng $y=mx$ cũng đi qua gốc tọa độ nên diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là

$$S=2\int\limits_0^{\sqrt{m+3}}\left|x^3-(m+3)x\right|\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\sqrt{m+3}}\left[(m+3)x-x^3\right]\,\mathrm{d}x=8$$

$$\Leftrightarrow(m+3)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-7\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho hàm số $y=x^3-2x^2-(m-1)x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số và hai trục Ox,Oy có diện tích không lớn hơn 1 (đvdt)?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

$y'=3x^2-4x-(m-1)$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $3x^2-4x-(m-1)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\leqslant-\dfrac{1}{3}$.
$y=x^3-2x^2-(m-1)x+m=(x-1)(x^2-x-m)$ cho nên hàm số cắt trục hoành tại điểm $x=1$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và các trục tọa độ là

$$S=\int\limits_0^1\left|x^3-2x^2-(m-1)x+m\right|\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{(m-1)x^2}{2}+mx\right)\Big|_0^1=-\frac{6m+1}{12}$$

Theo giả thiết $S\leqslant 1\Leftrightarrow-\dfrac{13}{6}\leqslant m\Rightarrow m=-1,m=-2$.

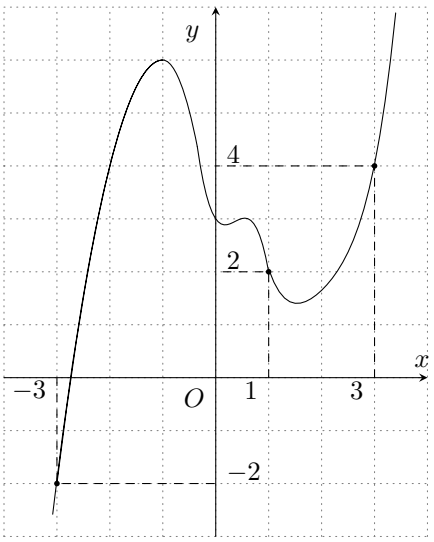
Chọn đáp án B □

Câu 59.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $g(-1)>g(-3)>g(3)$. **B**. $g(-3)>g(3)>g(1)$.

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$. **D**. $g(1)>g(3)>g(-3)$.



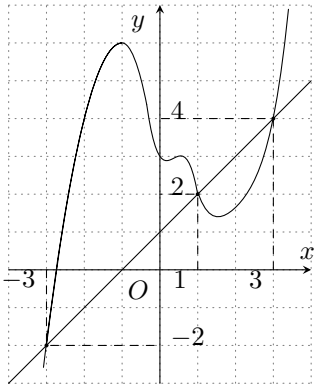
Lời giải.

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại 3 điểm $A(-3;-2)$, $B(1;2)$, $C(3;4)$.

Suy ra $g'(-3)=g'(1)=g'(3)=0$ và $g(x)$ có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $g(1)$ là số lớn nhất trong ba số $g(-3),g(1),g(3)$ (1).

Từ đồ thị hàm số ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x),y=x+1$ và $x=-3,x=1$ lớn hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x),y=x+1$ và $x=1,x=3$. Do đó

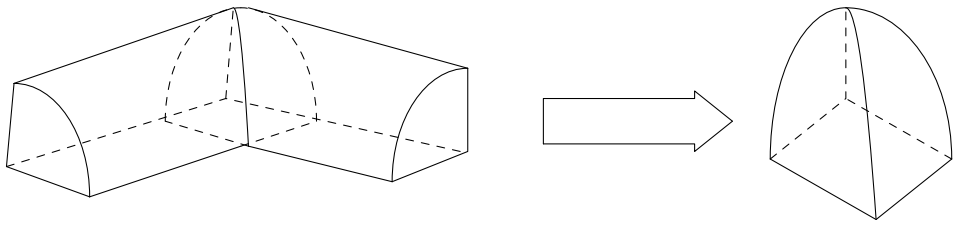
$$\int\limits_{-3}^{1}[f'(x)-(x+1)]\,\mathrm{d}x>\int\limits_{1}^{3}[(x+1)-f'(x)]\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1}g'(x)\,\mathrm{d}x>-\int\limits_{1}^{3}g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $g(1)-g(-3)>g(1)-g(3)\Leftrightarrow g(3)>g(-3)$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Chọn đáp án D □

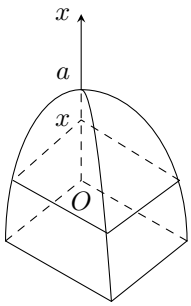
Câu 60. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ đều có bán kính $R=a$, biết hai trục hình trụ vuông góc với nhau (*hình vẽ dưới*). Tính thể tích V của khối (H).



A. $V_{(H)}=\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải.

Dựng trục tọa độ Ox như hình vẽ. Qua điểm có tọa độ x, với $0\le x\le a$, kẻ mặt phẳng song song với mặt đáy của khối (H), ta được thiết diện là hình vuông có cạnh là $\sqrt{a^2-x^2}$.



Diện tích của thiết diện là $S(x)=a^2-x^2$.

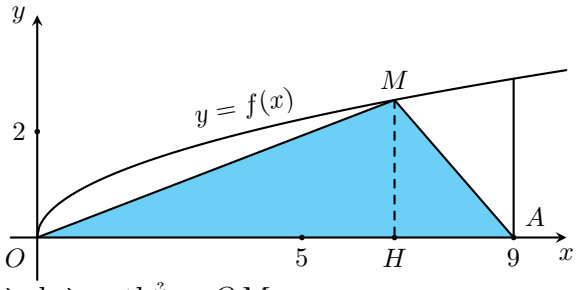
Thể tích V của khối (H) là

$$V=\int\limits_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{2a^3}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 61.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=\sqrt{x}$, trục Ox và đường thẳng $x=9$. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình phẳng (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi tam giác OMA quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1=2V_2$.



Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.

A. $S=3$. **B.** $S=\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $V_1=\pi\displaystyle\int\limits_0^9(\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox, đặt $OH=m$ (với $0<m<9$). Khi đó $M(m;\sqrt{m})$, $MH=\sqrt{m}$, $AH=9-m$.

Suy ra $V_2=\dfrac{1}{3}\pi\cdot MH^2\cdot OH+\dfrac{1}{3}\pi\cdot MH^2\cdot AH=\dfrac{1}{3}\pi\cdot MH^2\cdot OA=3m\pi$.

Theo giả thiết $V_1=2V_2$ nên $\dfrac{81\pi}{2}=6m\pi\Leftrightarrow m=\dfrac{27}{4}$. Do đó $M\left(\dfrac{27}{4};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

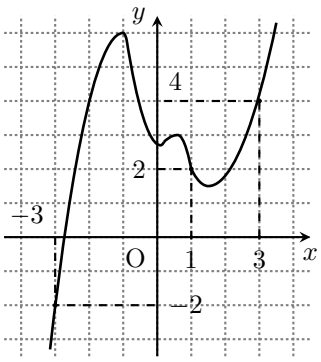
Phương trình đường thẳng OM là $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S=\int\limits_0^{\frac{27}{4}}\left(\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{3}}{9}x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)\Big|_0^{\frac{27}{4}}=\frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

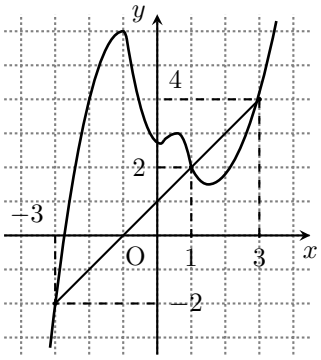
Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
B. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
D. Không tồn tại $\min\limits_{[-3;3]} g(x)$.

Lời giải.

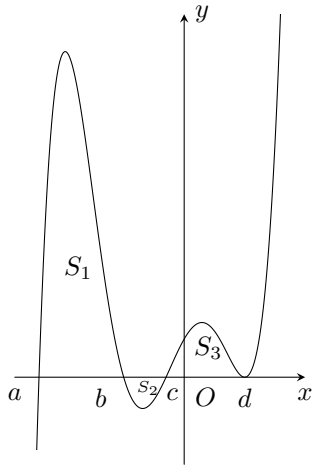


Ta có $g'(x) = 2\left(f'(x) - (x+1)\right)$.
Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$. Quan sát trên đồ thị ta thấy giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x = 1$.
Ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$ và $g(3)$.
Từ $g(3) - g(1) = \displaystyle\int_1^3 g'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_1^3 \left(f'(x) - (x+1)\right)\mathrm{d}x < 0$ suy ra $g(3) < g(1)$.
Tương tự, $g(3) - g(-3) = \displaystyle\int_{-3}^3 g'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^3 \left(f'(x) - (x+1)\right)\mathrm{d}x > 0$ suy ra $g(-3) < g(3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63.

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c và tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ d. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành, biết $S_1 > S_3 > S_2$ (hình vẽ). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$.



A. $\min f(x) = f(a)$.
B. $\min f(x) = f(b)$.
C. $\min f(x) = f(c)$.
D. $\min f(x) = f(d)$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = \displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a)$, (1)

$S_2 = -\displaystyle\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(c) > 0 \Rightarrow f(b) > f(c)$, (2)

$$S_1 = \int_c^d f'(x)\,\mathrm{d}x = f(d) - f(c) > 0 \Rightarrow f(d) > f(c). \quad (3)$$

Vì $S_1 > S_2$ nên $f(a) < f(c)$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(a)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n}^0 + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1} = \dfrac{8192}{15}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $6 < n < 9$. **B**. $9 < n < 12$. **C**. $n < 6$. **D**. Không tồn tại n.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 \cdot x + \mathrm{C}_{2n}^2 \cdot x^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot x^{2n}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n}\mathrm{d}x = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1.x + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2n}^2.x^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}.x^{2n}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1 \cdot x + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2n}^2.x^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}.x^{2n}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(2^{2n+1}-1\right)}{2n+1} = 2.\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{2}{2}\mathrm{C}_{2n} + \frac{2}{3}\mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \frac{2}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}. \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\int_0^1 (1+x)^{2n}\mathrm{d}x = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1 \cdot x + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2n}^2 \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot x^{2n}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2n+1} = -2 \cdot \mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{2}{2}\mathrm{C}_{2n} - \frac{2}{3}\mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \frac{2}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}. \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7} + \ldots + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2.\frac{8192}{15} \Leftrightarrow n = 6{,}44.$$

Vậy không có giá trị tự nhiên của n thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n}^0 + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1} = \dfrac{8192}{15}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $6 < n < 9$. **B**. $9 < n < 12$. **C**. $n < 6$. **D**. Không tồn tại n.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 \cdot x + \mathrm{C}_{2n}^2 \cdot x^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot x^{2n}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n}\mathrm{d}x = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1.x + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2n}^2.x^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}.x^{2n}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1 \cdot x + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2n}^2.x^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}.x^{2n}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(2^{2n+1}-1\right)}{2n+1} = 2.\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{2}{2}\mathrm{C}_{2n} + \frac{2}{3}\mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \frac{2}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}. \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\int_0^1 (1+x)^{2n}\mathrm{d}x = \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1 \cdot x + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2n}^2 \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot x^{2n}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2n+1} = -2\cdot \mathrm{C}_{2n}^{0} + \frac{2}{2}\mathrm{C}_{2n} - \frac{2}{3}\mathrm{C}_{2n}^{2} + \cdots + \frac{2}{2n+1}\mathrm{C}_{2n}^{2n}. \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7} + \ldots + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)$$

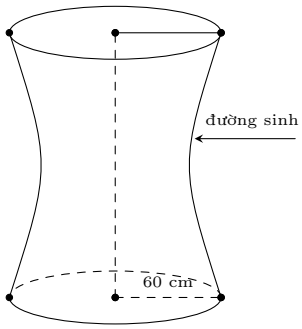
$$\Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2.\frac{8192}{15} \Leftrightarrow n = 6{,}44.$$

Vậy không có giá trị tự nhiên của n thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66.

Cho một chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nữa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

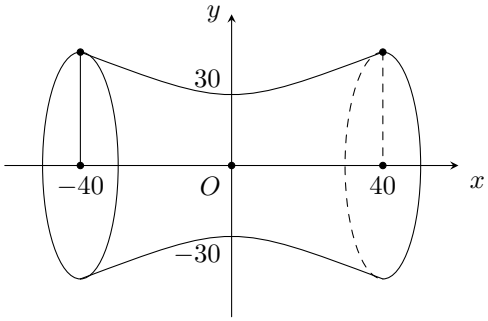


A. $V = 344.963$ cm^3. **B**. $V = 344.964$ cm^3.

C. $V = 20.8347$ cm^3. **D**. $V = 20.8346$ cm^3.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó chiếc trống là hình tròn xoay được sinh bởi một nửa elip, dưới của elip có phương trình là $\dfrac{x^2}{40^2} + \dfrac{(y-60)^2}{30^2} = 1$. Khi đó nửa đường elip dưới có phương trình $y = 60 - \dfrac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}$.



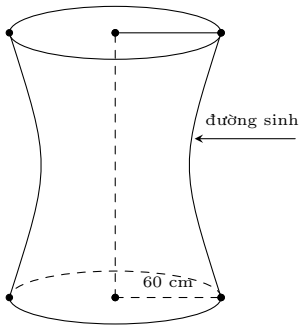
Vậy thể tích của chiếc trống là

$$\begin{aligned} V &= \pi\cdot\int_{-40}^{40}\left(60 - \frac{3}{4}\sqrt{40^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\approx 344.964 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 67.

Cho một chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nữa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

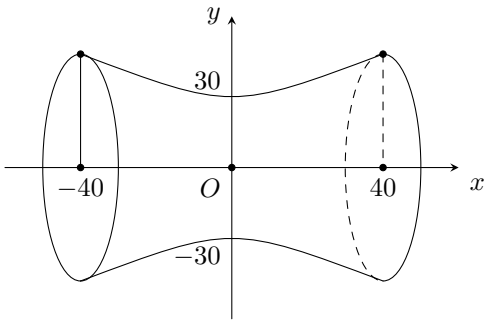


A. $V = 344.963$ (cm^3). **B**. $V = 344.964$ (cm^3).

C. $V = 20.8347$ (cm^3). **D**. $V = 20.8346$ (cm^3).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó chiếc trống là hình tròn xoay được sinh bởi một nữa elip, dưới của elip có phương trình là $\dfrac{x^2}{40^2}+\dfrac{(x-60)^2}{30^2}=1$. Khi đó nữa đường elip dưới có phương trình $y=60-\dfrac{3}{4}\sqrt{40^2-x^2}$.



Vậy thể tích của chiếc trống là

$$\begin{aligned} V &= \pi\cdot\int\limits_{-40}^{40}\left(60-\frac{3}{4}\sqrt{40^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &\approx 344.964\ (\mathrm{cm}^3). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình tương giao $\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\dfrac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a.\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho là

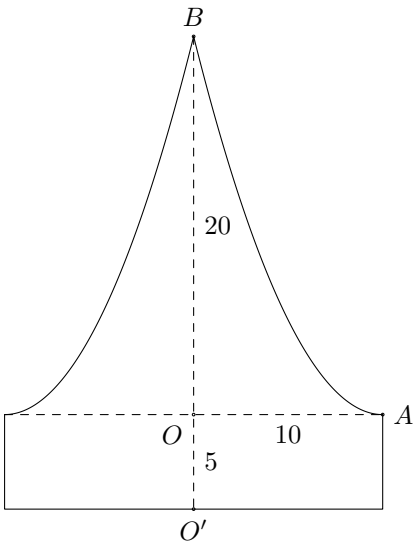
$$S=\left|\int\limits_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{1+a^6}\left|\left(\frac{x^3}{3}+3a\frac{x^2}{2}+2a^2x\right)\Big|_{-a}^{-2a}\right|=\frac{1}{6}\cdot\frac{|a^3|}{1+a^6}\le\frac{1}{6}\cdot\frac{|a^3|}{2\,|a^3|}=\frac{1}{12}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|=1\Leftrightarrow a=\pm1$.

Chọn đáp án (B) □

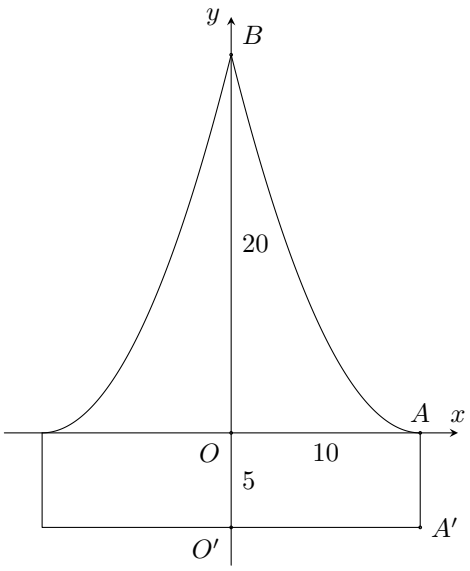
Câu 69.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có hình dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A. Tính thể tích chiếc mũ (đơn vị cm^3).



A. $\dfrac{2750\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{2050\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2500\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}$.

Lời giải.



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.
Khi cho đường gấp khúc $OAA'O'$ quay quanh OO' ta được hình trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm, gọi thể tích của nó là V_1.
Ta có $V_1 = 5 \cdot 10^2\pi = 500\pi$ cm^3.
Gọi thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $O(0;0)$, $A(10;0)$, $B(0;20)$.
Parabol có đỉnh $A(10;0)$ nên nó có phương trình dạng $(P)\colon y = a(x-10)^2$.
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ suy ra $a = \dfrac{1}{5}$.
Vậy $(P)\colon y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đây suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $0 \le x \le 10$).
Suy ra

$$V_2 = \pi \int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi.$$

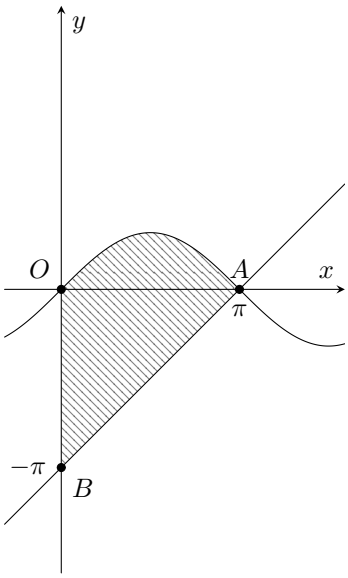
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi$ cm^3.

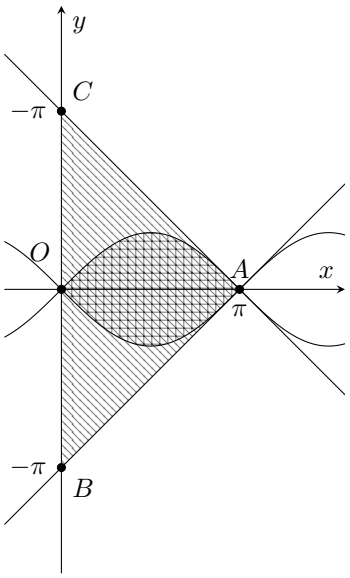
Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y = x - \pi$, $y = \sin x$ và $x = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V = p\pi^4$, $(p \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8. **B**. 4. **C**. 24. **D**. 12.

Lời giải.





Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \pi$ và $y = \sin x$

$x - \pi = \sin x \Leftrightarrow x - \pi - \sin x = 0$ (1). Ta thấy $x = \pi$ là một nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(x) = x - \pi - \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = \pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = \pi - x - \sin x$, $x \in (0; \pi)$.

$g'(x) = -1 - \cos x < 0$, $\forall x \in (0; \pi)$, suy ra hàm số $g(x) = \pi - x - \sin x$ nghịch biến trên $(0; \pi)$.

$\forall x \in (0; \pi)$, ta có $g(x) > g(\pi) \Rightarrow \pi - x - \sin x > \pi - \pi - \sin \pi = 0 \Rightarrow \pi - x > \sin x$. (2)

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.

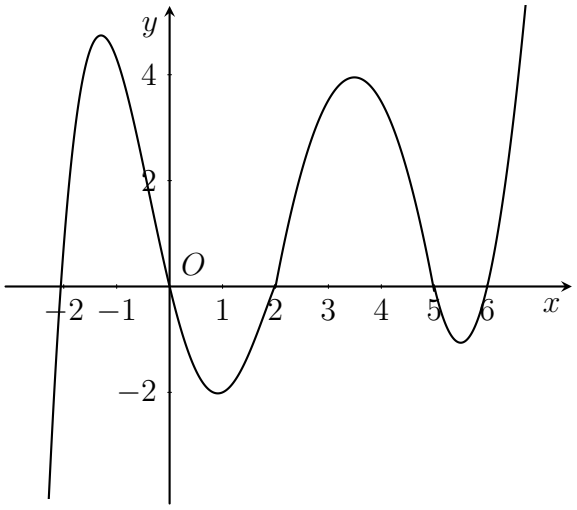
$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OB^2 \cdot OA = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \pi^2 \cdot \pi = \dfrac{1}{3}\pi^4 \Rightarrow p = \dfrac{1}{3}$. Vậy $24p = 24 \cdot \dfrac{1}{3} = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 71.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = f(0)$ thuộc đoạn $[-1; 5]$ là

A. 4. **B**. 3. **C**. 5. **D**. 2.



Lời giải.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	$f(0)$	↘		↗	$f(5)$	↘		↗	

Xét hình phẳng 1 giới hạn bởi: $y = f'(x)$, Ox, $x = 0$, $x = 2$.
Và hình phẳng 2 giới hạn bởi: $y = f'(x)$, Ox, $x = 2$, $x = 5$.
Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hình phẳng 1 và hình phẳng 2. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S_1 < S_2 &\Leftrightarrow \int_0^2 [-f'(x)]\,\mathrm{d}x < \int_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \\ &\Leftrightarrow f(0) < f(5). \end{aligned}$$

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-1; 5]$.

Chọn đáp án (D) □

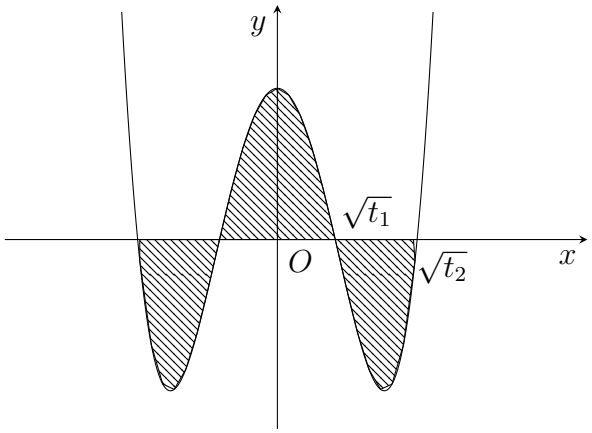
Câu 72. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$. Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó $m = \dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + 2b$.

A. 29. **B.** 0. **C.** 37. **D.** 38.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là $x^4 - 4x^2 + m = 0$. (1)
Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 4t + m = 0$. (2)
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt ⇔ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.
⇔ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$
Khi $0 < m < 4$, phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 = 2 - \sqrt{4 - m}$ và $t_2 = 2 + \sqrt{4 - m}$.
Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm là $\pm\sqrt{t_1}; \pm\sqrt{t_2}$.

Theo giả thiết ta có



$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{t_1}} y\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} (-y)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{\sqrt{t_1}} y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} y\,\mathrm{d}x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{\sqrt{t_2}} y\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{t_2}} y\,\mathrm{d}x = 0 \ &\Leftrightarrow\ \int_0^{\sqrt{t_2}} (x^4 - 4x^2 + m)\,\mathrm{d}x = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + mx\right)\Big|_0^{\sqrt{t_2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \frac{1}{5}t_2^2 - \frac{4}{3}t_2 + m = 0 \\
&\Leftrightarrow\ 3m - 2\sqrt{4-m} - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ m = \frac{20}{9}.
\end{aligned}$$

Vậy $a + 2b = 38$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ $x_A = a$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d) và (C) bằng $\frac{27}{4}$, các giá trị của a thỏa mãn đẳng thức nào?

A. $2a^2 - 2a - 1 = 0$. **B.** $a^2 - 2a = 0$. **C.** $a^2 - a - 2 = 0$. **D.** $a^2 + 2a - 3 = 0$.

Lời giải.

Điểm $A \in (C)$ có tọa độ là $(a; a^3 - 3a^2 + 1)$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là $y = (3a^2 - 6a)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm đường thẳng (d) và đồ thị (C) là

$$x^3 - 3x^2 + 1 = (3a^2 - 6a)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 1 \Leftrightarrow (x-a)^2(x + 2a - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2a + 3. \end{array}\right.$$

Không giảm tổng quát, ta có

$$\left| \int_a^{-2a+3} \left[(x-a)^2(x+2a-3)\right]\,\mathrm{d}x \right| = \frac{27}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{4}(x-a)^4 + (a-1)(x-a)^3 \Big|_a^{-2a+3} \right| = \frac{27}{4}.$$

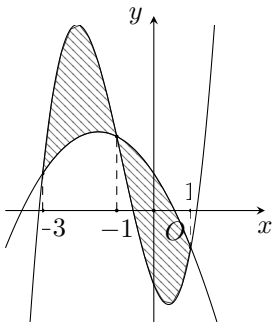
Từ đó, suy ra $(a-1)^4 = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0$.

Nhận xét: Từ phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép là $x = a$, suy ra tiếp tuyến sẽ đi qua một trong hai điểm cực trị nên chọn phương án $a^2 - 2a = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3,-1,1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (miền gạch chéo) có diện tích bằng

A. $\dfrac{9}{2}$.
B. 4.
C. 5.
D. 8.



Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f(x)-g(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}-dx^2-ex-1.$ (1)

Do $-3,-1,1$ là các nghiệm của (1) $\Rightarrow f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)\Rightarrow -3a=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.
Ta có diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị là

$$S(H)=\int\limits_{-3}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1}|(x+3)(x-1)(x+1)|\,\mathrm{d}x=4.$$

Vậy diện tích cần tích bằng 4.

Chọn đáp án B □

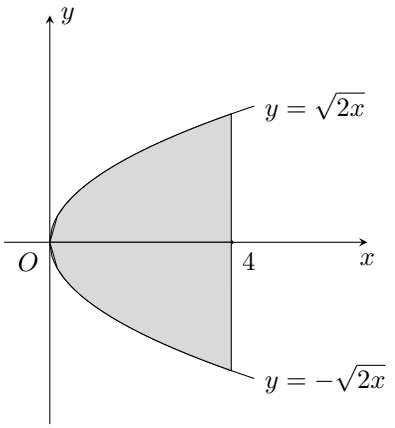
Câu 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình (H_1) giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$, $y=-\sqrt{2x}$, $x=4$; hình (H_2) là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện: $x^2+y^2\le 16$, $(x-2)^2+y^2\ge 4$, $(x+2)^2+y^2\ge 4$. Khi quay (H_1), (H_2) quanh Ox ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V_2=2V_1$. **B.** $V_1=V_2$. **C.** $V_1+V_2=48\pi$. **D.** $V_2=4V_1$.

Lời giải.

☑ Tính V_1.
Hình H_1 được tô như hình bên.
Vậy thể tích của khối tròn xoay khi quay hình H_1 quanh trục Ox là

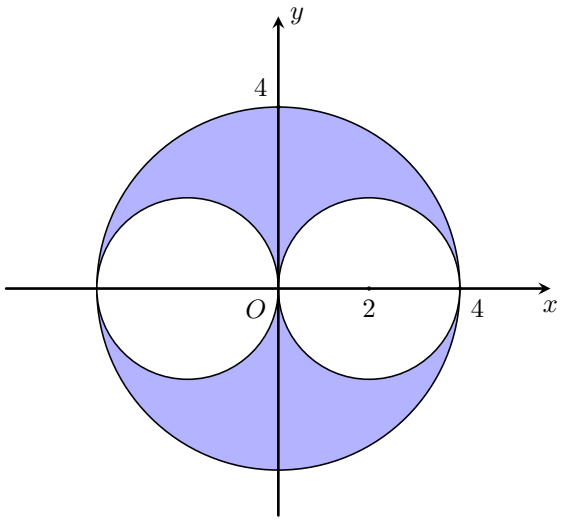
$$V_1=\int\limits_{0}^{4}\pi\left(\sqrt{2x}\right)^2\mathrm{d}x=16\pi.$$



☑ Tính V_2.

Hình H_2 được tô như hình bên.
Vậy thể tích của khối tròn xoay khi quay hình H_2 quanh trục Ox bằng thể tích khối cầu bán kính bằng 4 trừ đi thể tích của hai khối cầu bán kính bằng 2, tức là

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 64\pi.$$



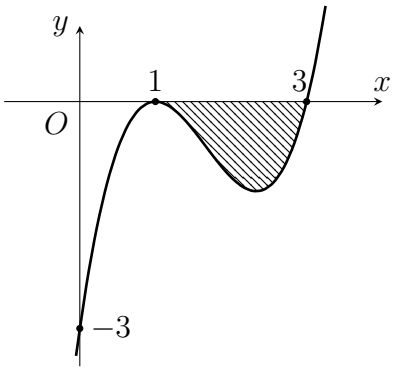
☑ Vậy $V_2 = 4V_1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76.

Tính diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + xc + d$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ (phần được tô như hình vẽ), thì ta được

A. $S = \frac{7}{3}$. **B.** $S = \frac{5}{3}$. **C.** $S = \frac{4}{3}$. **D.** $S = \frac{6}{3}$.



Lời giải.

Vì đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại điểm có tọa độ $(1;0)$ và cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(3;0)$, do đó, hàm số đã cho có dạng

$$y = a(x-1)^2(x-3).$$

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-3)$, nên

$$-3 = a(-3) \Leftrightarrow a = 1.$$

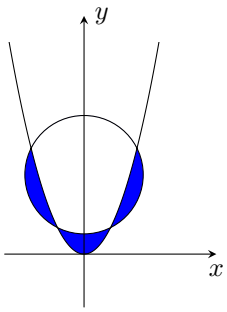
Vậy $y = (x-1)^2(x-3)$. Diện tích cần tìm là

$$S = \left| \int_1^3 (x-1)^2(x-3)\,\mathrm{d}x \right| = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Cho Parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường tròn (C) có tâm $A(0;3)$, bán kính $\sqrt{5}$ như hình vẽ. Diện tích phần được tô đậm giữa (C) và (P) gần với số nào nhất dưới đây?

A. 3,44.
B. 1,51.
C. 3,54.
D. 1,77.



Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C)\colon x^2+(y-3)^2=5$.
Đường tròn (C) và Parabol (P) cắt nhau tại các điểm $(1;1),(-1;1),(2;4),(-2;4)$.
Xét hình (H_1) giới hạn bởi $\begin{cases} y=x^2 \\ y=3-\sqrt{5-x^2} \\ x=0, x=1 \end{cases}$, hình (H_2) giới hạn bởi $\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ x=\sqrt{5-(y-3)^2} \\ y=1, y=4. \end{cases}$
Diện tích của hình phẳng cần tính là

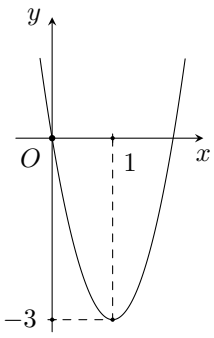
$$S=2\int\limits_0^1\left(3-\sqrt{5-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_1^4\left(\sqrt{5-(y-3)^2}-\sqrt{y}\right)\mathrm{d}y\approx 5{,}54.$$

Chọn đáp án C □

Câu 78.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C). Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng đường thẳng $d\colon y=x$ cắt (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích bằng nhau. Tổng $a+b+c+d$ bằng

A. 1.
B. 0.
C. 2.
D. 3.

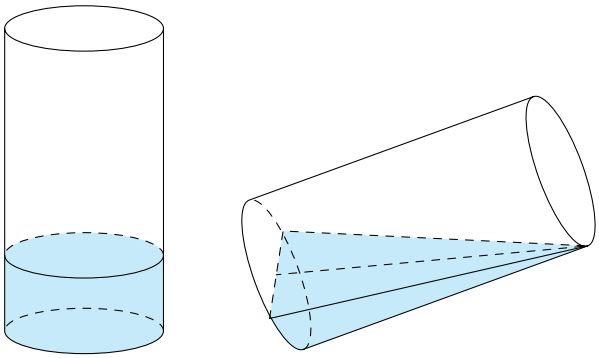


Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, suy ra $f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+d$.
Vì đường thẳng $d\colon y=x$ cắt (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích bằng nhau nên d đi qua điểm uốn có tọa độ $I(1;d-2)$, suy ra $1=d-2\Leftrightarrow d=3$.
Vậy $a+b+c+d=1-2+3=1$.

Chọn đáp án A □

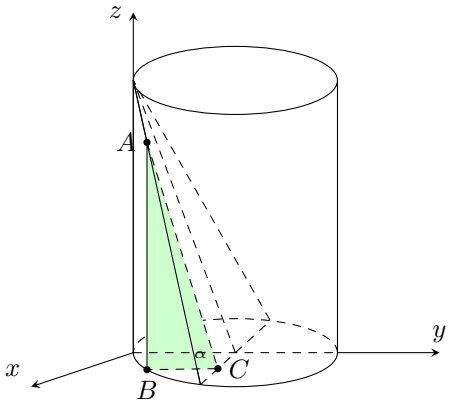
Câu 79. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 4 cm, chiều cao trong lòng cốc là 12 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết rằng khi nghiêng cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc, mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 128π cm^3. **B**. 128 cm^3. **C**. 256 cm^3. **D**. 256π cm^3.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Cắt khối nước trong cốc khi nằm nghiêng theo mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác ABC vuông tại B.

Ta có: $AB = BC \cdot \tan\alpha = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan\alpha$

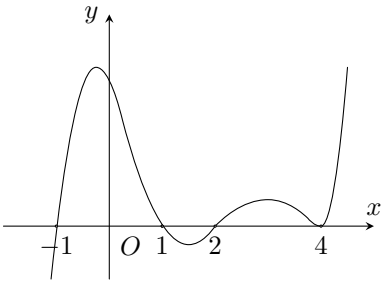
$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{2}(R^2 - x^2) \cdot \tan\alpha = \dfrac{1}{2}(R^2 - x^2) \cdot \dfrac{h}{R}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-4}^{4} (R^2 - x^2)\dfrac{h}{R}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{-4}^{4} (R^2 - x^2)\dfrac{12}{4}\,\mathrm{d}x = 128$ cm^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc đoạn $[-1;4]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là



A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$			
f	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗			$+\infty$

Để biết số nghiệm của phương trình $f(x) = f(0)$ trên $[-1;4]$, trước tiên ta so sánh $f(0)$ với $f(2)$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $x = 0$, $x = 1$ và trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành.

Từ đồ thị suy ra

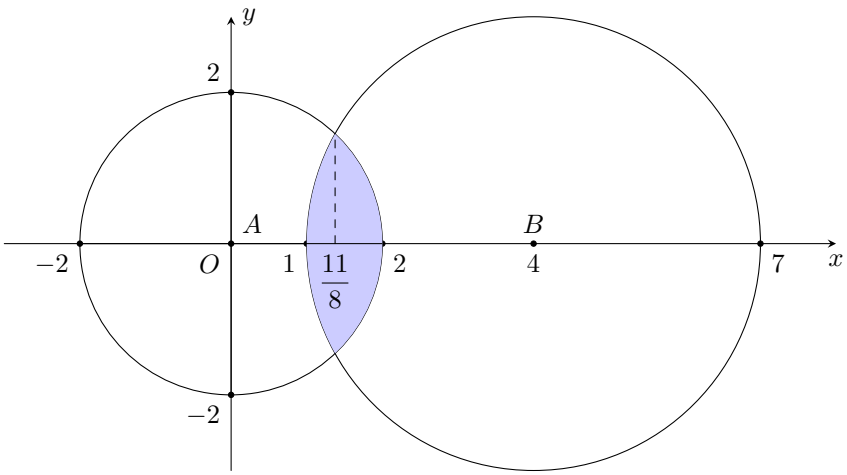
$$S_1 > S_2 \Rightarrow \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x > -\int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(1) - f(0) > f(1) - f(2) \Rightarrow f(0) < f(2).$$

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có đúng 1 nghiệm trên $[-1; 4]$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Trên một cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cái cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

A. 1,989 m^2. **B**. 1,034 m^2. **C**. 1,574 m^2. **D**. 2,824 m^2.

Lời giải.



Gọi hai vị trí cột hai con bò là A và B. Phần cỏ lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung là phần giao nhau của hai hình tròn (C_1) tâm A bán kính $R_1 = 2$ và hình tròn (C_2) tâm B bán kính $R_2 = 3$.
Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với $A(0; 0)$ và $B(4; 0)$.
Khi đó ta được phương trình đường tròn $(C_1)\colon x^2 + y^2 = 4$ và $(C_2)\colon (x-4)^2 + y^2 = 9$.
Hoành độ giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) là nghiệm phương trình

$$4 - x^2 = 9 - (x-4)^2 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

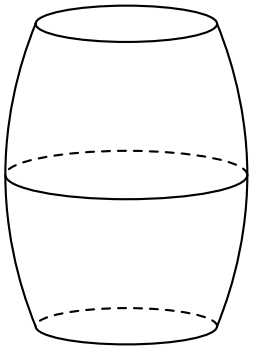
Ta có (C_1) là hợp bởi 2 đồ thị hàm số $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$;
(C_2) là hợp bởi 2 đồ thị hàm số $y = \pm\sqrt{9 - (x-4)^2}$.
Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - (x-4)^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = \dfrac{11}{8}$.
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = \dfrac{11}{8}$, $x = 2$.
Phần diện tích lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung là

$$S = 2(S_1 + S_2) = 2\left[\int_1^{\frac{11}{8}} \sqrt{9 - (x-4)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{11}{8}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x\right] \approx 1{,}989\,(\text{m}^2).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 82.

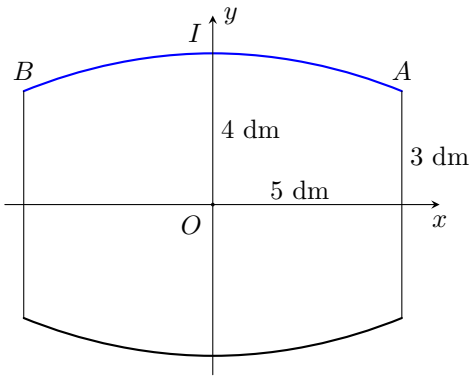
Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có là đường tròn bán kính là 40 cm, chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?



A. 425162 lít. **B**. 212581 lít. **C**. 212,6 lít. **D**. 425,2 lít.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục của thùng rượu. Mặt phẳng (α) cắt mặt xung quanh của thùng rượu theo các đường parabol.



Trong mặt phẳng (α) chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đơn vị độ dài trên trục là 1 dm.

Phương trình parabol (P) qua A, B, I có dạng $y = ax^2 + c$.

Có $\begin{cases} I(0;4) \\ A(5;3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 40 \\ 3 = 25a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{25} \\ c = 4. \end{cases}$

Phương trình parabol (P) là $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + 4$

Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 5$.

Thùng rượu được xem là khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng D khi quay xung quanh trục Ox. Suy ra thể tích thùng rượu là

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(-\frac{1}{25}x^2 + 4 \right) \mathrm{d}x = \frac{406}{3}\pi \,(\mathrm{dm}^3) \approx 425{,}2 \,(\text{lít}).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \dfrac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là

A. 7. **B**. 6. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Điều kiện để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là phương trình $x^4 - 6x^2 + m = 0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt. Khi đó phương trình $t^2 - 6t + m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' = 9 - m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9.$$

Giả sử phương trình (1) có bốn nghiệm là $-a$, $-b$, b, a $(0 < b < a)$. Do tính chất đối xứng của đồ thị

nên ta có

$$\int_{-a}^{-b}|x^4-6x^2+m|\mathrm{d}x+\int_{b}^{a}|x^4-6x^2+m|\mathrm{d}x=\int_{-b}^{b}x^4-6x^2+m|\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{b}|x^4-6x^2+m|\mathrm{d}x=\int_{b}^{a}|x^4-6x^2+m|\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{b}(x^4-6x^2+m)\mathrm{d}x=-\int_{b}^{a}(x^4-6x^2+m)\mathrm{d}$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{b}(x^4-6x^2+m)\mathrm{d}x+\int_{b}^{a}(x^4-6x^2+m)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{a}(x^4-6x^2+m)\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow \frac{a^5}{5}-2a^3+ma=0\Leftrightarrow a^4-10a^2+5m=0\Leftrightarrow a^4-6a^2+m+4m-4a^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4m-4a^2=0\Leftrightarrow a^2=m.$$

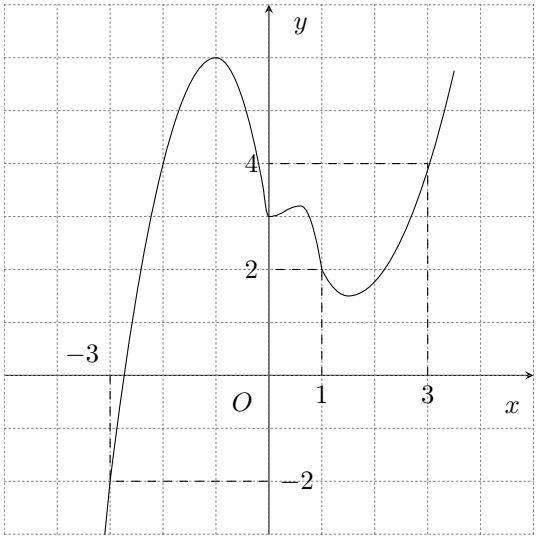
Do a là nghiệm của phương trình (1) nên ta có

$$m^2-6m+m=0\Leftrightarrow m^2-5m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (loại)}\\ m=5 \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Vậy $S=6$.

Chọn đáp án (B) □

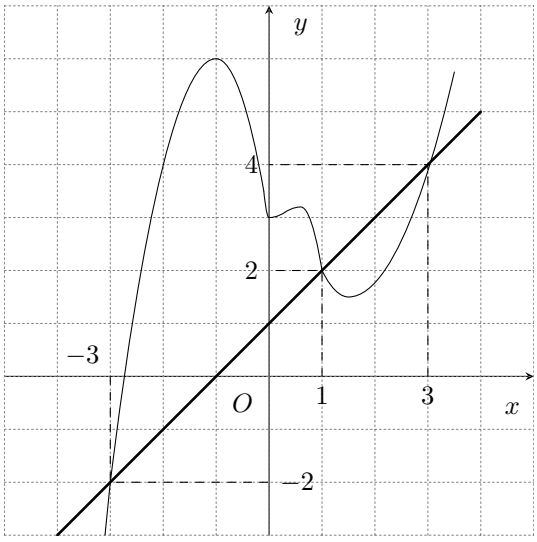
Câu 84. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.
B. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.
C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.
D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải.



Ta có $g'(x)=f'(x)-(x+1)$.

Dựa vào đồ thị ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và các đường thẳng $y=x+1$, $x=-3$, $x=1$ thì $S_1>4$ và

$$S_1=\int\limits_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x=g(1)-g(-3)>4 \Rightarrow g(-3)<g(1)-4=0.$$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và các đường thẳng $y=x+1$, $x=1$, $x=3$ thì $S_2<4$ và

$$S_2=-\int\limits_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x=g(1)-g(3)<4 \Rightarrow g(3)>g(1)-4=0.$$

Khi đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

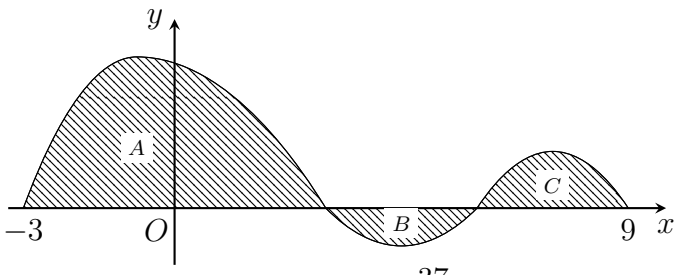
x	-3		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-3)$	↗	4	↘	$g(3)$

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 85.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3;9]$ như hình vẽ bên. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 30; 3 và 4. Tích phân $\int\limits_{-1}^{2}[f(4x+1)+x]\,\mathrm{d}x$ bằng



A. $\dfrac{45}{2}$. **B.** 41. **C.** 37. **D.** $\dfrac{37}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}(f(4x+1)+x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}f(4x+1)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

Ta có $I_1=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}=\frac{3}{2}$.

Xét $I_2=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}f(4x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=4x+2\Rightarrow x=\dfrac{t-2}{4}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

Với $x=-1\Rightarrow t=-3$; với $x=2\Rightarrow t=9$.

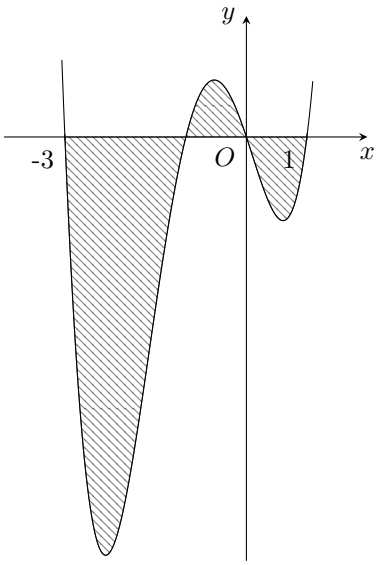
Ta có: $I_2=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_{-3}^{9}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_{-3}^{9}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(30-3+4)=\frac{31}{4}$.

Vậy $I=I_1+I_2=\dfrac{31}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{37}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 86.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3;1]$ như hình vẽ. Diện tích các phần A, B, C trên hình vẽ có diện tích lần lượt là 8, $\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{4}{5}$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0}(f(2x+1)+3)\,\mathrm{d}x$.



A. $-\dfrac{41}{5}$. **B.** $-\dfrac{42}{5}$. **C.** $-\dfrac{21}{5}$. **D.** $-\dfrac{82}{5}$.

Lời giải.

Diện tích các phần A, B, C trên hình vẽ có diện tích lần lượt là 8, $\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{4}{5}$ nên

$$\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -8 + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{41}{5}.$$

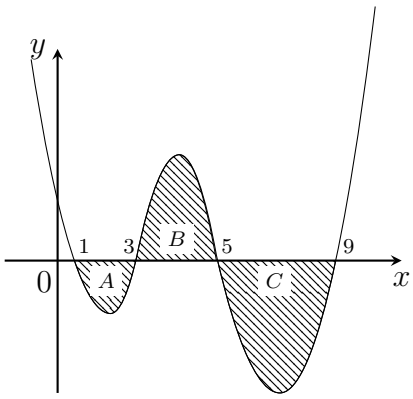
Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Ta lại có

$$\int\limits_{-2}^{0} (f(2x+1)+3)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} (f(t)+1)\cdot 2\mathrm{d}t = 2\int\limits_{-3}^{1} f(t)\mathrm{d}t + 2\int\limits_{-3}^{1} \mathrm{d}t = 2\cdot\left(-\frac{41}{5}\right) + 2\cdot 4 = -\frac{42}{5}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 87.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[1;9]$ như hình bên. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 2, 4, 7. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{-1}^{3} (f(2x+3)+1)\,\mathrm{d}x$.



A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x + 3$, ta được

$$\int\limits_{-1}^{3} (f(2x+3)+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{9} (f(t)+1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{1}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{5}^{9} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{9} \mathrm{d}x\right)$$

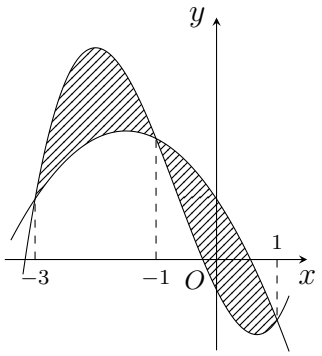
Dựa vào hình vẽ ta được

$$\int\limits_{-1}^{3} (f(2x+3)+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-2+4-7+(9-1)) = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 88.

Cho hàm số $f(x) = ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2+ex+1$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Do $(C)\colon y=f(x)$ và $(C')\colon y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3;-1$ và 1 nên

$$f(x)-g(x)=A(x+3)(x+1)(x-1).$$

Từ giả thiết ta có $f(0)-g(0)=-\dfrac{3}{2}$ nên $-3A=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow A=\dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

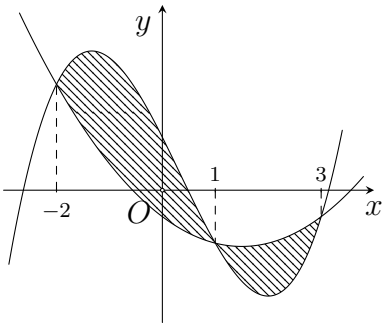
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{-3}^{-1}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x=2-(-2)=4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 89.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\dfrac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\dfrac{3}{4}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{253}{48}$. **B.** $\dfrac{125}{24}$.

C. $\dfrac{125}{48}$. **D.** $\dfrac{253}{24}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+\dfrac{3}{4}=dx^2+ex-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\dfrac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1$; $x=3$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b-d=-\dfrac{1}{2}\\ c-e=-\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

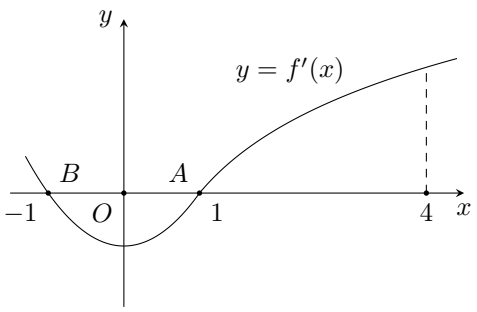
Khi đó diện tích hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{-2}^{3}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x\\&=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 90.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng các điểm $A(1;0)$, $B(-1;0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là



A. $f(1);\ f(-1)$.
B. $f(0);\ f(2)$.
C. $f(1);\ f(4)$.
D. $f(-1);\ f(4)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ trên $[-1;4]$

x	-1		1		4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{[-1;4]} f(x)=f(1)$.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có

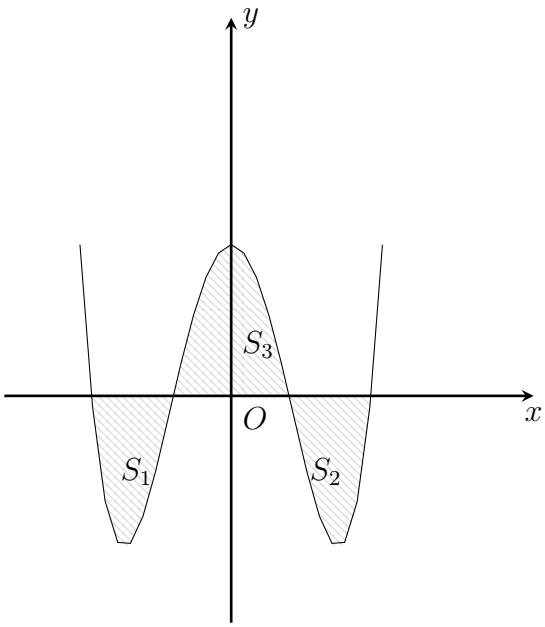
$$\int\limits_{-1}^{1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x<\int\limits_{1}^{4}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(-1)-f(1)<f(4)-f(1)\Leftrightarrow f(-1)<f(4).$$

Vậy $\max\limits_{[-1;4]} f(x)=f(4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 91.

Cho hàm số $y=x^4-3x^2+2$ có dáng đồ thị như hình vẽ. Gọi S_3 là miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Khi quay S_3 quay trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích V. Tính V.



A. $V=\dfrac{2008}{315}\pi$.
B. $V=\dfrac{584}{315}\pi$.
C. $V=\dfrac{1168}{315}\pi$.
D. $V=\dfrac{4016}{315}\pi$.

Lời giải.

☑ $x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Hình S_3 là hình giới hạn bởi đồ thị $y=x^4-3x^2+2$ và trục Ox với x lấy từ -1 đến 1.

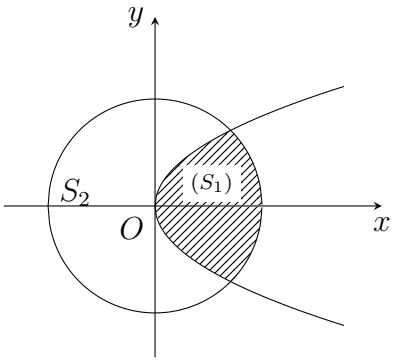
☑ Vậy $V=\pi\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}(x^4-3x^2+2)^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1168}{315}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 92.

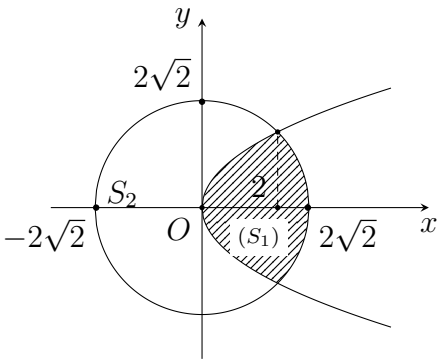
Biết rằng đường parabol $(P)\colon y^2=2x$ chia đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2. Khi đó $S_2-S_1=a\pi-\dfrac{b}{c}$, với a,b,c nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=13$. **B**. $S=16$. **C**. $S=15$. **D**. $S=14$.



Lời giải.

Ta viết lại đường parabol $(P)\colon y^2=2x$ chia đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=8$ là $(P)\colon y=\pm\sqrt{2x}$ và $(C)\colon y=\pm\sqrt{8-x^2}$.



Ta xét trường hợp $y\geq 0$: Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)\colon y=\sqrt{2x}$ và $(C)\colon y=\sqrt{8-x^2}$ là $\sqrt{2x}=\sqrt{8-x^2}\Leftrightarrow x=2$ và $y=2$.

Do cả hai đồ thị của (P) và (C) đều nhận trục Ox làm trục đối xứng nên để tính diện tích S_1, ta chỉ cần tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$ và $y=\sqrt{8-x^2}$, trục Ox.

Khi đó $S_1=2\displaystyle\int\limits_0^2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+2\int\limits_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$, với $\displaystyle\int\limits_0^2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{x^3}\Big|_0^2=\dfrac{8}{3}$,

và $I=\displaystyle\int\limits_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$ được tính như sau

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t$. Khi đó $\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$ và $\begin{cases}x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\\ x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

hay $I=2\sqrt{2}\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{8-8\sin^2 x}\cos t\,\mathrm{d}t=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=4\left(t+\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$

$\pi-2$. Khi đó $S_1=\dfrac{16}{3}+2\pi-4=\dfrac{4}{3}+2\pi$.

Diện tích hình tròn có bán kính $2\sqrt{2}$ là 8π. Do vậy $S_2=8\pi-S_1=8\pi-\left(\dfrac{4}{3}+2\pi\right)=6\pi-\dfrac{4}{3}$.

Vậy $S_2-S_1=6\pi-\dfrac{4}{3}-\left(\dfrac{4}{3}+2\pi\right)=4\pi-\dfrac{8}{3}$.

Khi đó $a=4, b=8, c=3$. Do đó $a+b+c=15$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}, y=x-2$ và trục hoành. Diện tích của hình (H) bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

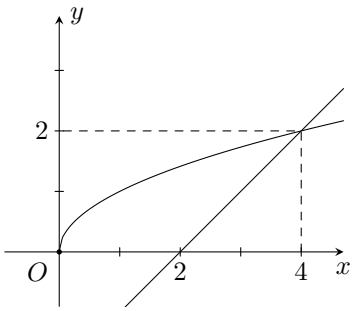
Lời giải.

Hoành độ giao điểm giữa đường $y=\sqrt{x}$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Hoành độ giao điểm giữa đường $y=x-2$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$



Hoành độ giao điểm giữa đường $y=\sqrt{x}$ và đường $y=x-2$ là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Kết hợp với hình vẽ trên, diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{3}.$$

Vậy $S=\dfrac{10}{3}$.

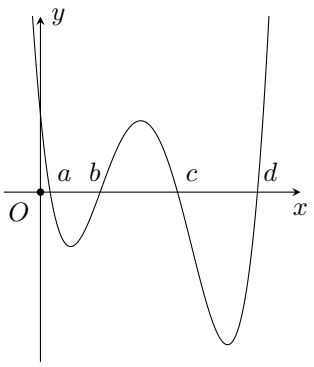
Chọn đáp án (D) □

Câu 94.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ theo thứ tự từ trái sang phải trên trục hoành là a,b,c,d $(a<b<c<d)$ như hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng.

A. $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$. **B.** $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$. **D.** $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$.



Lời giải.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), Ox, x=a, x=b$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), Ox, x=b, x=c$.

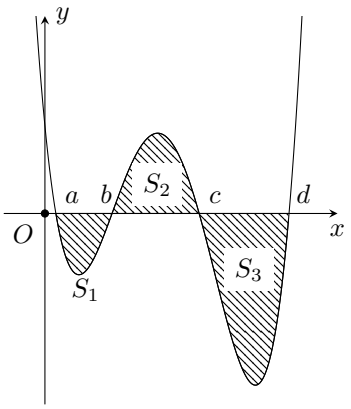
Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x), Ox, x=c, x=d$.

Ta có

☑ $S_1=-\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(a)-f(b)$.

☑ $S_2=\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x=f(c)-f(b)$.

☑ $S_3=-\int\limits_c^d f'(x)\,\mathrm{d}x=f(c)-f(d)$.



Từ hình vẽ, ta nhận thấy $S_1 < S_2 < S_3 \Rightarrow \begin{cases} f(a)-f(b) < f(c)-f(b) \\ f(c)-f(b) < f(c)-f(d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) < f(c) & (1) \\ f(d) < f(b). & (2) \end{cases}$

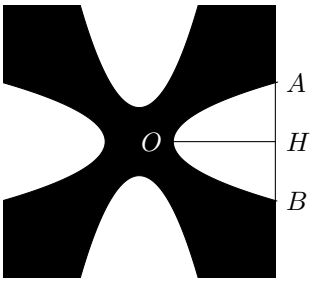
Vì $0 < S_1 = f(a) - f(b)$ nên $f(b) < f(a)$, (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Chọn đáp án A □

Câu 95.

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích của bề mặt hoa văn đó.

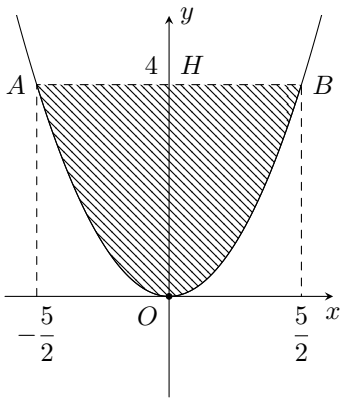


A. $\frac{160}{3}$ cm^2. **B.** 50 cm^2. **C.** $\frac{140}{3}$ cm^2. **D.** $\frac{14}{3}$ cm^2.

Lời giải.

Diện tích bề mặt hoa văn là $S = 10^2 - 4S_0$, trong đó S_0 là diện tích của Parabol.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.



Parabol có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $B\left(\frac{5}{2};4\right)$ nên có phương trình là $y = \frac{16}{25}x^2$.

Từ $y = \frac{16}{25}x^2$ suy ra $x = \pm\frac{5\sqrt{y}}{4}$ với $y \geq 0$.

Phần Parabol cần tính diện tích giới hạn bởi các đường $x = \pm\frac{5\sqrt{y}}{4}$, $y = 0$, $y = 4$.

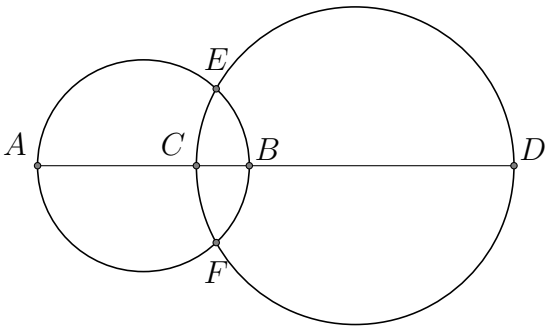
Do đó, $S_0 = \int_0^4 \left|\frac{5\sqrt{y}}{4} - \left(-\frac{5\sqrt{y}}{4}\right)\right| \mathrm{d}y = \int_0^4 \left|\frac{5\sqrt{y}}{2}\right| \mathrm{d}y = \frac{40}{3}$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = 100 - 4 \cdot \frac{40}{3} = \frac{140}{3}$ cm^2.

Chọn đáp án C □

Câu 96.

Cho đường tròn đường kính $AB = 4$ và đường tròn đường kính $CD = 4\sqrt{3}$ cắt nhau theo dây cung $EF = 2\sqrt{3}$ (xem hình vẽ bên). Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay cung AE, ED xung quanh trục AD.

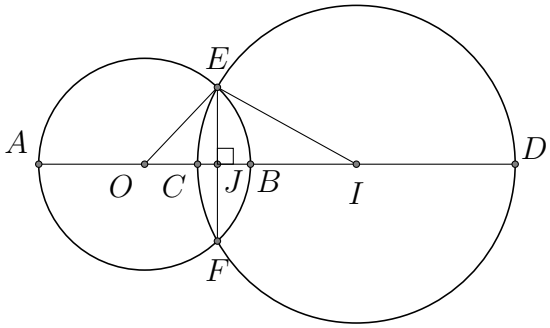


A. $\left(64 - 16\sqrt{2}\right)\pi$. **B.** $\left(36 + 16\sqrt{2}\right)\pi$.

C. $\left(36 + 16\sqrt{3}\right)\pi$. **D.** $\left(64 - 16\sqrt{3}\right)\pi$.

Lời giải.

Ta có
$IJ = \sqrt{OE^2 - EJ^2} = \sqrt{4-3} = 1.$
$OJ = \sqrt{IE^2 - EJ^2} = \sqrt{12-3} = 3.$
Thể tích của khối tròn xoay cần tìm
$V = \pi \int\limits_{-2}^{1} \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \pi \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{3} \left(\sqrt{12-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$

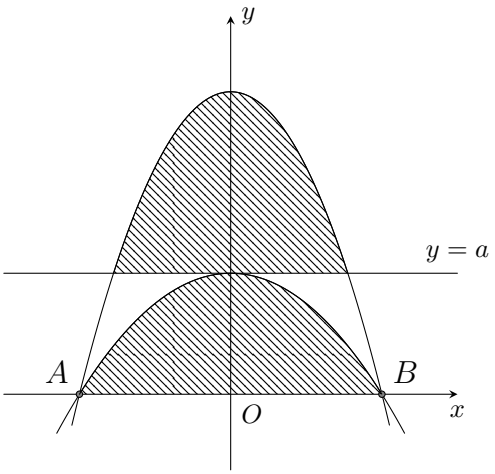


Ta có
$\pi \int\limits_{-2}^{1} \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \pi\left(4 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = 9\pi.$
$\pi \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{3} \left(\sqrt{12-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(12x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2\sqrt{3}}^{3} = \pi\left(36 - 9 + 24\sqrt{3} - 8\sqrt{3}\right) = \left(27 + 16\sqrt{3}\right)\pi.$
Vậy $V = 9\pi + \left(27 + 16\sqrt{3}\right)\pi = \left(36 + 16\sqrt{3}\right)\pi.$
Chọn đáp án C □

Câu 97.

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a\,(0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$.Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$. **B.** $T = 64$. **C.** $T = 32$. **D.** $T = 72$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = \int\limits_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \left(-x^2 + 4 - a\right)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}x^3 + (4-a)\,x\right)\Big|_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} = \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}.$
$S_2 = \int\limits_{-2}^{2} \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{a}{12}x^3 + ax\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{8a}{3}.$
Mà $S_1 = S_2 \Leftrightarrow (4-a)\sqrt{4-a} = 2a \Leftrightarrow a^3 - 8^2 + 48a = 64.$
Chọn đáp án B □

Câu 98. Xác định m để đồ thị hàm số (C): $y = 5x^4 - 8x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành có phần trên và phần dưới bằng nhau.

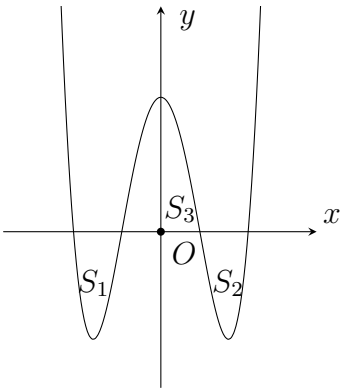
A. $\frac{9}{16}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** 9. **D.** $\frac{25}{16}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $5x^4 - 8x^2 + m = 0$.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Ta có $5t^2 - 8t + m = 0$. (1)

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt



$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 5m > 0 \\ \dfrac{m}{5} > 0 \\ \dfrac{8}{5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{16}{5}.$$

Ta có hàm số $y = f(x) = 5x^4 - 8x^2 + m$ là hàm số chẵn nên $S_1 + S_2 = S_3 \Rightarrow S_2 = \dfrac{1}{2}S_3$.

Gọi $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ là bốn hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành ta có

$$S_2 = \frac{1}{2}S_3 \Rightarrow \int\limits_{x_3}^{x_4} (-f(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{x_3}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{x_4} (5x^4 - 8x^2 + m)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^5 - \frac{8}{3}x^3 + mx\right)\Big|_0^{x_4} = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - \frac{8}{3}x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_4^4 - \dfrac{8}{3}x_4^2 + m = 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

Với $x_4 = 0 \Rightarrow m = 0$ (loại).

Xét (2) $\Leftrightarrow (5x_4^4 - 8x_4^2 + m) - 4x_4^4 + \dfrac{16}{3}x_4^2 = 0 \Leftrightarrow 4x_4^4 - \dfrac{16}{3}x_4^2 = 0 \Leftrightarrow x_4^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow m = \dfrac{16}{9}$ (nhận).

Chọn đáp án B □

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq 2)$ là một nửa đường tròn đường kính là $\sqrt{5}x^2$. Tính thể tích V của vật thể đã cho.

A. $V = 2\pi$. **B.** $V = 5\pi$. **C.** $V = 4\pi$. **D.** $V = 3\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện là nửa đường tròn với đường kính $\sqrt{5}x^2$ nên diện tích của thiết diện là

$$S(x) = \frac{\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\pi x^4}{8}.$$

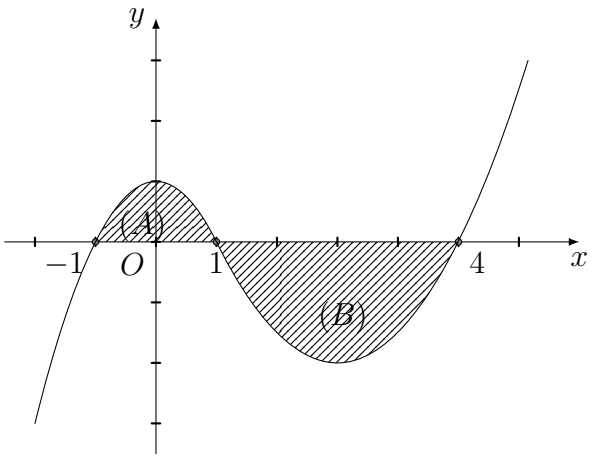
Từ đó suy ra thể tích của vật thể là

$$V = \int\limits_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \frac{5\pi x^4}{8}\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 100.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình (A), (B) lần lượt bằng 3 và 7. Tích tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot f(5\sin x-1)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. $I=-\dfrac{4}{5}$.

B. $I=2$.

C. $I=\dfrac{4}{5}$.

D. $I=-2$.

Lời giải.

Theo đề $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=3, \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-7$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot f(5\sin x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(5\sin x-1)\mathrm{d}(5\sin x-1)=\frac{1}{5}\int_{-1}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right]=-\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. C	4. B	5. B	6. A	7. A	8. A	9. D	10. B
11. C	12. D	13. B	14. A	15. C	16. D	17. D	18. C	19. A	20. C
21. A	22. D	23. D	24. C	25. A	26. B	27. A	28. B	29. D	30. B
31. C	32. B	33. A	34. D	35. C	36. A	37. D	38. A	39. C	40. C
41. B	42. A	43. C	44. B	45. B	46. D	47. B	48. C	49. B	50. A
51. C	52. C	53. A	54. C	55. C	56. B	57. B	58. B	59. D	60. A
61. B	62. B	63. A	64. D	65. D	66. B	67. B	68. B	69. C	70. A
71. D	72. D	73. B	74. B	75. D	76. C	77. C	78. A	79. B	80. D
81. A	82. D	83. B	84. C	85. D	86. B	87. D	88. C	89. A	90. C
91. C	92. C	93. D	94. A	95. C	96. C	97. B	98. B	99. C	100. A

5 Bài toán thực tế

Câu 1. Hai người A và B ở cách nhau 180(m) trên đoạn đường thẳng và cùng chuyển động theo một hướng với vận tốc biến thiên theo thời gian , A chuyển động với vận tốc $v_1(t) = 6t + 5$(m/s), B chuyển động với vận tốc $v_2(t) = 2at - 3$(m/s) (a là hằng số), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A và B bắt đầu chuyển động . Biết rằng lúc A đuổi theo B và sao 10(giây) thì đuổi kịp. Hỏi sau 20(giây), A cách B bao nhiêu mét?

A. 320(m). **B**. 720(m). **C**. 360(m). **D**. 380(m).

Lời giải.

Quảng đường A đi được trong 10 (giây): $\displaystyle\int_0^{10}(6t+5)\,\mathrm{d}t = \left(3t^2+5t\right)\Big|_0^{10} = 350$(m).

Quảng đường B đi được trong 10 (giây): $\displaystyle\int_0^{10}(2at-3)\,\mathrm{d}t = \left(at^2-3t\right)\Big|_0^{10} = 100a - 30$(m).

Vì lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 (giây) thì đuổi kịp nên ta có:

$$(100a - 30) + 180 = 350 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow v_2(t) = 4t - 3\text{(m/s)}$$

Sau 20(giây) quãng đường A đi được : $\displaystyle\int_0^{20}(6t+5)\,\mathrm{d}t = \left(3t^2+5t\right)\Big|_0^{20} = 1300$(m) .

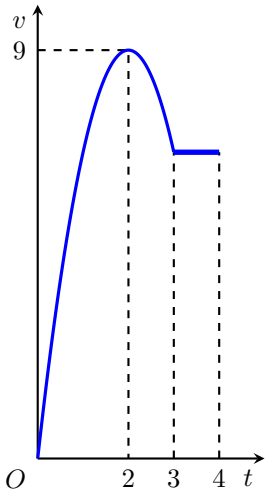
Sau 20(giây) quãng đường B đi được : $\displaystyle\int_0^{20}(4t-3)\,\mathrm{d}t = \left(2t^2-3t\right)\Big|_0^{20} = 740$(m).

Khoảng cách giữa A và B sau 20 (giây) $1300 - 740 - 180 = 380$(m) .

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. 28,5 (km). **B**. 27 (km). **C**. 26,5 (km). **D**. 24 (km).

Lời giải.

Gọi parabol đồ thị vận tốc hình bên có dạng: $v = at^2 + bt + c$. Vì parabol đi qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b = 9 \end{cases}$.

Vậy parabol cần tìm $v = -\dfrac{9}{4}t^2 + 9t$.

Quãng đường vật di chuyển trong 4 giờ được tính theo công thức:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^3 \left(-\frac{9}{4}t^2 + 9t\right) \mathrm{d}t + v(3) \cdot 1 = \frac{81}{4} + \frac{27}{4} = 27 \text{ (km)}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t(\text{m/s})$ với t là thời gian tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200(m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}$ (m). **B.** 2000 (m). **C.** 500 (m). **D.** $\frac{4000}{3}$ (m).

Lời giải.

Xét $v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -20 \end{array}\right.$

Vậy thời gian máy bay đạt vận tộc 200 m/s là thời điểm $t = 10$ s sau khi bắt đầu chuyển động.

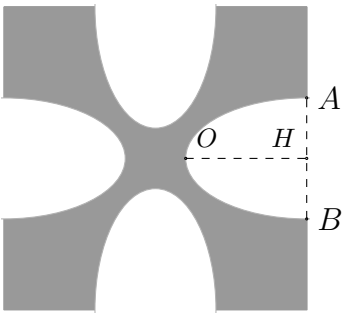
Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$S = \int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{10} (t^2 + 2t)\mathrm{d}t = \frac{2500}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4.

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.

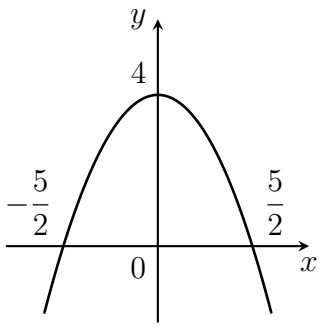


A. $\frac{160}{3}$ cm^3. **B.** $\frac{140}{3}$ cm^3. **C.** $\frac{14}{3}$ cm^3. **D.** 50 cm^3.

Lời giải.

Coi parabol trong hình vẽ có đỉnh là $H(0;4)$ cắt trục hoành tại A và B có hoành độ lần lượt là $x = -\frac{5}{2}$ và $x = \frac{5}{2}$ nên có phương trình là $y = -\frac{16}{25}x^2 + 4$ khi đó diện tích diện tích của mỗi phần parabol là

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right) \mathrm{d}x.$$



Vậy diện tích của bề mặt hoa văn là $S = 10^2 - 4S_1 = 100 - 8\int_0^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{140}{3}$ cm^3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{45}{2}$ m. **B.** $\frac{201}{4}$ m. **C.** $\frac{81}{4}$ m. **D.** $\frac{65}{2}$ m.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + C$.

Coi $t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu tăng tốc.

Theo giả thiết $v(0) = 10 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 10$.

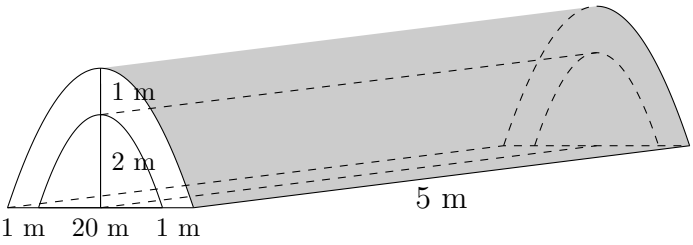
Quãng đường vật đi được trong khoảng 3 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc là

$S = \int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 10\right)\mathrm{d}t = \frac{201}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6.

Một nhóm từ thiện ở Hà Nội khởi công dự án xây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình là các đường parabol). Tính thể tích khối bê tông đủ để đổ cho cây cầu gần nhất với kết quả nào sau đây?



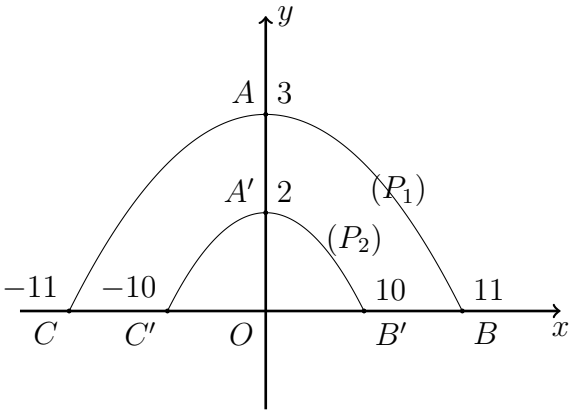
A. $84\,\mathrm{m}^3$. **B.** $88\,\mathrm{m}^3$. **C.** $85\,\mathrm{m}^3$. **D.** $90\,\mathrm{m}^3$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho parabol (P_1) đi qua các điểm $A\,(0;3)$; $B\,(11;0)$ và $C\,(-11;0)$. Khi đó phương trình parabol $(P_1) : y = -\frac{3}{121}x^2 + 3$.

Tương tự parabol (P_2) đi qua các điểm $A'\,(0;2)$; $B'\,(10;0)$ và $C'\,(-10;0)$. Khi đó phương trình parabol $(P_2) : y = -\frac{x^2}{50}x^2 + 2$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và trục Ox.



Khi đó

$$S_1 = \int_{-11}^{11} \left(-\frac{3}{121}x^2 + 3\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{121} + 3x\right)\Big|_{-11}^{11} = 44$$

Tương tự gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục Ox. Khi đó

$$S_2 = \int_{-10}^{10} \left(-\frac{x^2}{50} + 2\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{150} + 2x\right)\Big|_{-10}^{10} = \frac{80}{3}$$

Gọi V là thể tích khối bê-tông khi đó

$$V = h \cdot S_{\text{đ}} = h \cdot (S_1 - S_2) = 5 \cdot \left(44 - \frac{80}{3}\right) = \frac{160}{3}$$

Chọn đáp án B □

Câu 7. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 25 m. **B.** $\frac{44}{5}$ m. **C.** $\frac{25}{2}$ m. **D.** $\frac{45}{4}$ m.

Lời giải.

Khi $v = 0$ thì $t = 5$, khi đó quãng đường ô tô đi được đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^5 (10 - 2t)\,\mathrm{d}t = 25 \quad (\text{m}).$$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Một ôtô đang chạy với vận tốc 9 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 9$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 13,5 (m). **B.** 12,5 (m). **C.** 11,5 (m). **D.** 10,5 (m).

Lời giải.

Gọi t_0 là thời điểm lúc ô tô bắt đầu đạp phanh, ta có $9 = -3t_0 + 9 \Leftrightarrow t_0 = 0$.

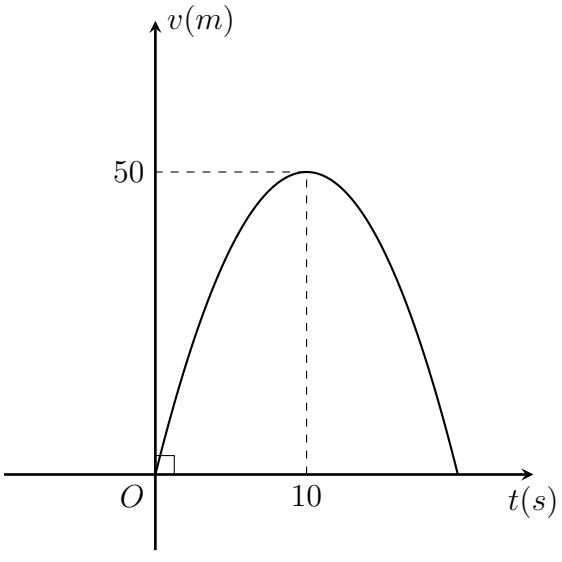
Gọi t_1 là thời điểm lúc ô tô dừng hẳn, ta có $0 = -3t_1 + 9 \Leftrightarrow t_1 = 3$.

Vậy quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$S(t) = \int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 (-3t + 9)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{-3}{2}t^2 + 9t\right)\Big|_0^3 = 13,5(m).$$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. $\dfrac{1000}{3}$ m. **B**. $\dfrac{1100}{3}$ m. **C**. $\dfrac{1400}{3}$ m. **D**. 300 m.

Lời giải.

Quãng đường xe đi được chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục Ox.

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do (P) qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Đỉnh (P) là $I(10; 50)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20a \\ b^2 = -200a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

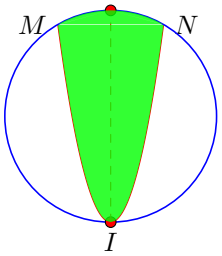
Ta có $\displaystyle\int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 10x\right) \mathrm{d}x = \frac{1000}{3}.$

Vậy quãng đường xe đi được bằng $\dfrac{1000}{3}$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Một tấm biển quảng cáo có hình dạng là một hình tròn bán kính là $2m$. Biết chi phí để sơn phần tô đậm mỗi mét vuông là 200.000 đồng và phần còn lại chi phí để sơn mỗi mét vuông là 100.000 đồng. Hỏi chi phí cần để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu? Biết rằng phần tô đậm được giới hạn bằng một Parabol có trục đi qua tâm của đường tròn và đi qua hai điểm MN và $MN = 2$. (tham khảo hình vẽ).

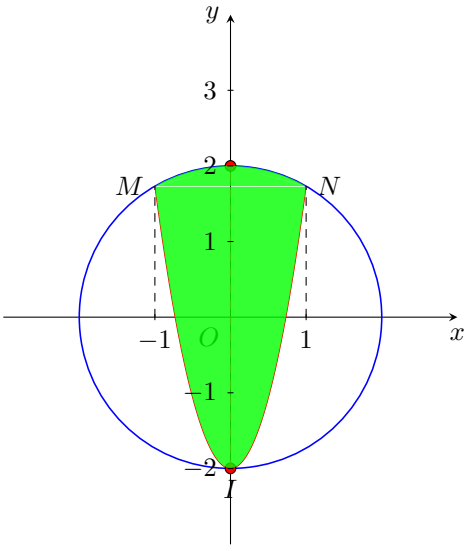


A. 5693551.000 đồng. **B**. 2693551.000 đồng.

C. 3693551.000 đồng. **D**. 4693551.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục như hình vẽ:



Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

Gọi Parabol (P): $y = ax^2 + c$

$I(0; -2) \in (P) \Rightarrow c = -2$. $N\left(1; \sqrt{3}\right) \in (P) \Rightarrow a - 2 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow a = \sqrt{3} + 2$.

$\Rightarrow (P)$: $y = \left(\sqrt{3} + 2\right)x^2 - 2$.

Diện tích hình phẳng phần tô đậm:

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \left[\sqrt{4 - x^2} - \left[\left(\sqrt{3} + 2\right)x^2 - 2\right]\right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \left[\left(\sqrt{3} + 2\right)x^2 - 2\right] \mathrm{d}x$$

Tính $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\sin t \left(t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t \cdot \mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}; x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}4\cdot\cos^2 t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $I_2=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(\sqrt{3}+2\right)x^2-2\right]\mathrm{d}x$

$=\left(\dfrac{\left(\sqrt{3}+2\right)}{3}x^3-2x\right)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2\sqrt{3}-8}{3}$.

Diện tích phần tô đậm: $S_1=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}-8}{3}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{8}{3}$.

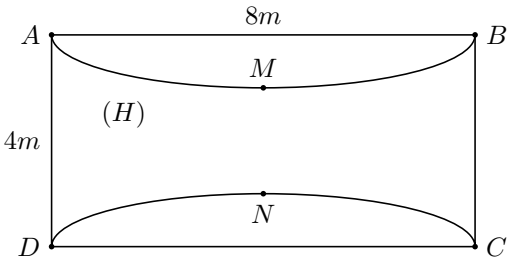
Diện tích đường tròn $S_T=4\pi$.

Diện tích phần còn lại $S_0=4\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{11\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{8}{3}$.

Chi phí làm bảng quảng cáo $T=200.000\cdot S_1+100.000S_0=3693551.000$ đồng.

Chọn đáp án C □

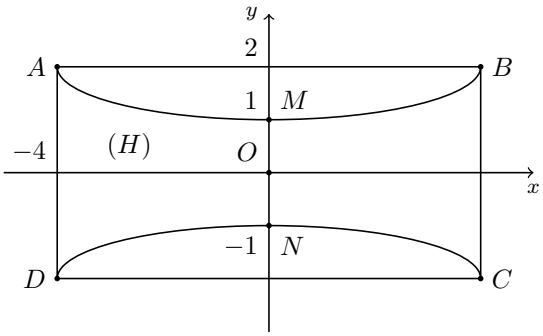
Câu 11. Một sân vườn hình chữ nhật (hình vẽ) có chiều dài $AB=8$ m, chiều rộng $AD=4$ m. Anh Thông chia sân vườn đó thành một phần lối đi (H) ở chính giữa sân (phần tô đậm) và phần còn lại để trồng hoa. Biết phần đất để trồng hoa là hai nửa của một hình Elíp (E), khoảng cách ngắn nhất của hai điểm M,N trên hai viền của Elip là $MN=2$ m. Tính diện tích phần lối đi (H).



A. $(32-4\pi)$ m^2. **B.** $(16-4\pi)$ m^2.
C. $(32-8\pi)$ m^2. **D.** $(16-8\pi)$ m^2.

Lời giải.

Diện tích sân vườn hình chữ nhật $ABCD$
$S=8\cdot 4=32$ m^2.
Xét elip (E) có độ dài trục lớn $2a=AB=8\Rightarrow a=4$.
Vì $MN=2$ nên suy ra độ dài trục nhỏ của elip (E)
$2b=2\Rightarrow b=1$
Vì hai phần đất trồng hoa là hai nửa của một hình elip (E) nên diện tích phần trồng hoa là
$S_{(E)}=\pi ab=4\pi$ m^2
Suy ra diện tích phần lối đi (H) là
$S_{(H)}=S-S_{(E)}=(32-4\pi)$ m^2.



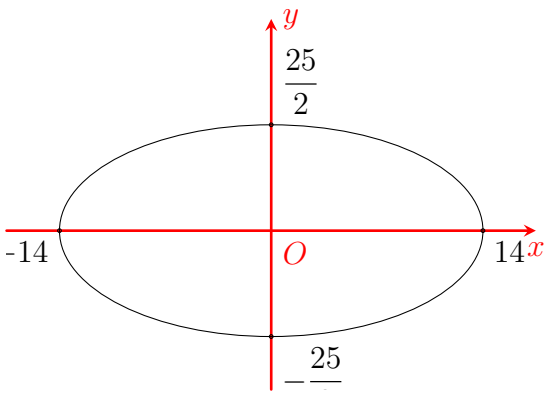
Chọn đáp án A □

Câu 12. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183.000đ. **B**. 180.000đ. **C**. 185.000đ . **D**. 190.000đ.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{14^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1$. Suy ra phương trình nửa đường Elip nằm phía trên trục hoành là $y=\dfrac{25}{28}\sqrt{196-x^2}$.



Thể tích của quả dưa hấu là

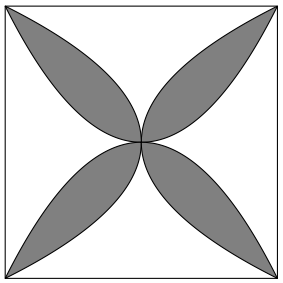
$$V=\pi\int\limits_{-14}^{14}\left(\frac{25}{28}\sqrt{196-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=9162\text{cm}^3$$

. Vậy từ quả dưa hấu có thể thu được số tiền là $20.000\cdot 9.162=183.000$đ.

Chọn đáp án A □

Câu 13.

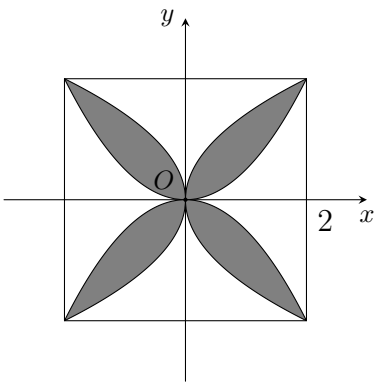
Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



A. 800 cm^2. **B**. $\dfrac{800}{3}$ cm^2. **C**. $\dfrac{400}{3}$ cm^2. **D**. 250 cm^2.

Lời giải.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng 10 cm = 1 dm), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình là $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=-\dfrac{x^2}{2}$, $x=-\dfrac{y^2}{2}$, $x=\dfrac{y^2}{2}$.



Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$,$y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0;x=2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int\limits_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Vậy diện tích một cánh hoa là $\dfrac{4}{3}$ dm^2 $=\dfrac{400}{3}$ cm^2.

Chọn đáp án C □

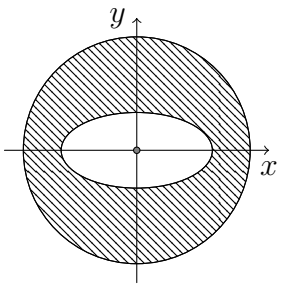
Câu 14. Một quả đào có dạng hình cầu đường kính 6 cm. Hạt của nó là khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh đường thẳng nối hai tiêu điểm F_1, F_2. Biết tâm của Ê-líp trùng với tâm của khối cầu và độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là 4 cm và 2 cm. Thể tích phần cùi (phần ăn được) của quả đào bằng $\dfrac{a}{b}\pi$ (cm^3) với a, b là các số thực và $\dfrac{a}{b}$ (tối giản), khi đó $a-b$ bằng

A. 97. **B**. 36. **C**. 5. **D**. 103.

Lời giải.

Xét Elip có độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ lần lượt là 4 và 2. Ta có $a = 2$, $b = 1$. Phương trình chính tắc của Ê-líp là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$



Gọi V_1 là thể tích khối cầu. V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh trục Ox. Khi đó thể tích V phần cùi (phần ăn được) của quả đào là $V = V_1 - V_2$.

Ta có $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

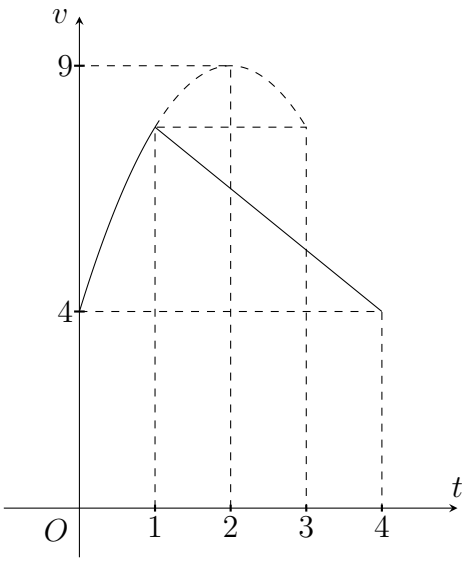
Ta có $V_2 = 2\pi \displaystyle\int_0^2 \left|1 - \frac{x^2}{4}\right| \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^2 = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

Khi đó $V = V_1 - V_2 = 36\pi - \dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{100\pi}{3}$. Khi đó $a = 100$, $b = 3$ suy ra $a - b = 97$.

Chọn đáp án A □

Câu 15.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $S = 23,71$ km. **B**. $S = 23,58$ km.

C. $S = 23,56$ km. **D**. $S = 23,72$ km.

Lời giải.

Trong 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v = at^2 + bt + c$, suy ra $v' = 2at + b$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 9 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4$, từ đó ta có $v(1) = \dfrac{31}{4}$.

Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t) = at + b$.

Theo giả thiết ta có

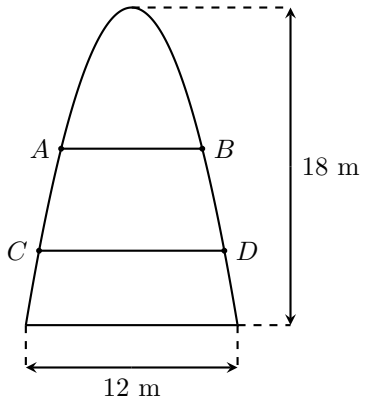
$$\begin{cases} v(1) = a + b = \dfrac{31}{4} \\ v(4) = 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t + 9$.
Quãng đường vật đi trong 4 giờ là

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int_1^4 \left(-\frac{5}{4}t + 9\right) \mathrm{d}t = 23,7083.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16.
Một cổng chào có dạng hình parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên).



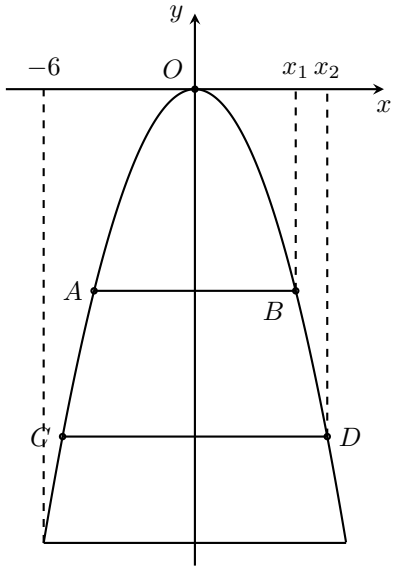
Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
Phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2$.
Parabol (P) đi qua điểm $(-6; -18)$ nên suy ra

$$a \cdot (-6)^2 = -18 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$



Suy ra $(P) : y = -\dfrac{1}{2}x^2$.
Từ hình vẽ ta có: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng AB: $y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng CD: $y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

Từ giả thiết ta có

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

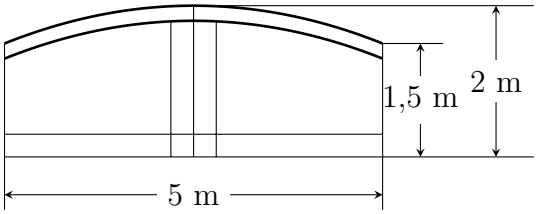
Vậy $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17.

Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là

A. 6500. **B**. $\dfrac{55}{6}\cdot 10^3$. **C**. 5600. **D**. 6050.

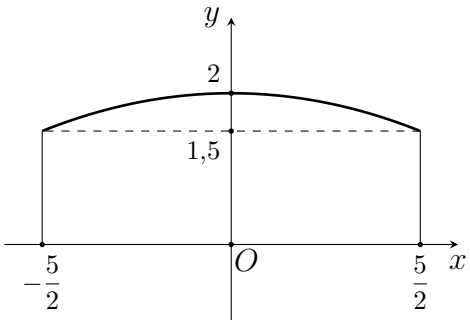


Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó, vòm cửa là một parabol có phương trình dạng $y=ax^2+2$.

Ta có $1{,}5=a\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+2\Leftrightarrow a=-\dfrac{2}{25}$.

Như vậy $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$.



Diện tích của cửa sắt là

$$S=\int\limits_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\mathrm{d}x=\frac{55}{6}\ \left(\text{m}^2\right).$$

Vậy, giá tiền cửa sắt là

$$\frac{55}{6}\cdot 660000=6050000\ \left(\text{đồng}\right)=6050\ \left(\text{nghìn đồng}\right).$$

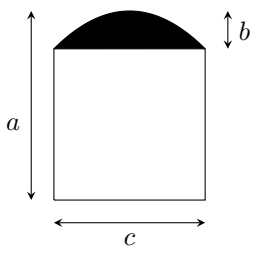
Chọn đáp án D □

Câu 18.

Nhà bạn Minh cần làm một cái cửa có dạng như hình vẽ, nửa dưới là hình vuông, phần phía trên (phần tô đen) là một Parabol. Biết các kích thước $a=2{,}5$ m, $b=0{,}5$ m, $c=2$ m. Biết số tiền để làm 1 m^2 cửa là 1 triệu đồng. Số tiền để làm cửa là

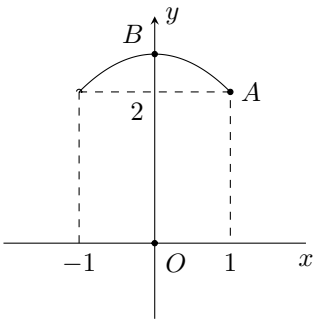
A. $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng. **B**. $\dfrac{13}{3}$ triệu đồng.

C. $\dfrac{63}{17}$ triệu đồng. **D**. $\dfrac{17}{3}$ triệu đồng.



Lời giải.

Gọi $(P)\colon y=ax^2+bx+c$ là Parabol đi qua $A(1;2)$ và có đỉnh là $B(0;2{,}5)$.



Khi đó ta có $\begin{cases} a+b+c=2 \\ -\dfrac{b}{2a}=0 \\ c=2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-0{,}5 \\ b=0 \\ c=2{,}5. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=-0{,}5x^2+2{,}5$.

Diện tích cái cửa là $\displaystyle\int_{-1}^{1}(-0{,}5x^2+2{,}5)\,\mathrm{d}x=\frac{14}{3}$ m^2.

Do đó, số tiền để làm cửa là $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t)=2+\dfrac{t^2-4}{t+4}$ (m/s). Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t=5$ s đến thời điểm $t=10$ s là

A. 12,23 m. **B.** 32,8 m. **C.** 45,03 m. **D.** 10,24 m.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được là $s=\displaystyle\int_{5}^{10}\left(2+\frac{t^2-4}{t+4}\right)\mathrm{d}t=32{,}8$ m.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Một vật chuyển động có phương trình $v(t)=t^3-3t+1$ m/s. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là

A. $\dfrac{15}{4}$ m. **B.** 20 m. **C.** 19 m. **D.** $\dfrac{39}{4}$ m.

Lời giải.

Gia tốc của chuyển động là $a(t)=v'(t)=3t^2-3$.

Tại thời điểm vật có gia tốc 24 m/s^2 thì $24=3t^2-3\Leftrightarrow t=3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là quãng đường vật đi từ vị trí $t=0$ đến vị trí $t=3$.

Vậy $S(3)=\displaystyle\int_{0}^{3}(t^3-3t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{39}{4}$ m.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2 m. **B.** 2 m. **C.** 10 m. **D.** 20 m.

Lời giải.

Xét phương trình $-5t+10=0\Leftrightarrow t=2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2 s ô tô dừng hẳn.

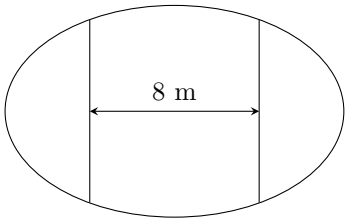
Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10)\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

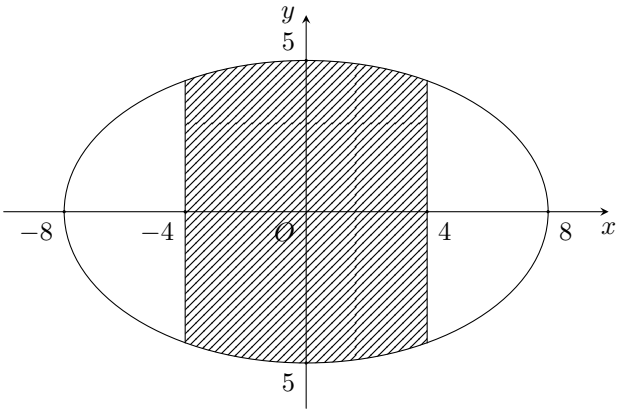


A. 7.862.000 đồng. **B**. 7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng. **D**. 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết, ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$.

Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = \dfrac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} & (E_1) \\ y = -\dfrac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} & (E_2)\,. \end{array}\right.$

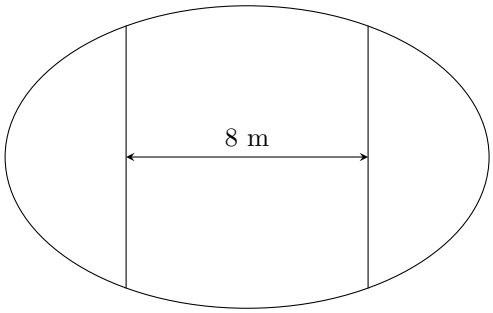
Khi đó diện tích dải đất được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x = -4$; $x = 4$ nên có diện tích là

$$S = 2\int_{-4}^{4} \frac{5}{8}\sqrt{64 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_0^4 \sqrt{64 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3}.$$

Khi đó số tiền để trồng hoa là $T = \left(\dfrac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3}\right) \cdot 100000 \approx 7652891{,}82$ đồng.

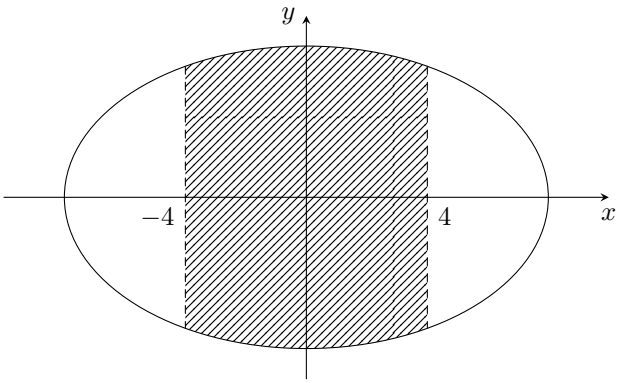
Chọn đáp án B □

Câu 23. Ông An có một mảnh vườn hình e-lip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của e-lip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B**. 7.653.000 đồng. **C**. 7.128.000 đồng. **D**. 7.826.000 đồng.

Lời giải.



Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó phương trình của e-lip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

Dải đất trồng hoa là miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}$, $y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}$ và hai đường thẳng $x=-4$, $x=4$.

Diện tích dải đất trồng hoa là

$$S=2\int\limits_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=8\sin t$, với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khi $x=-4$ thì $t=-\dfrac{\pi}{6}$. Khi $x=4$ thì $t=\dfrac{\pi}{6}$.

$\mathrm{d}x=8\cos t\,\mathrm{d}t$.

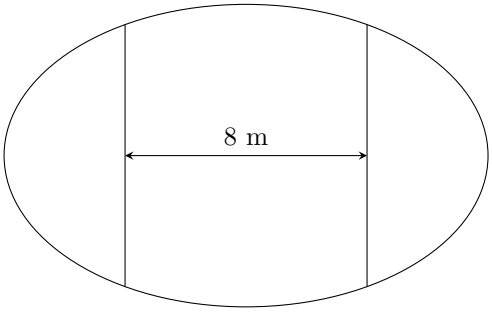
Do đó $S=\dfrac{5}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}8\cos t\cdot 8\cos t\,\mathrm{d}t=40\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(40t+20\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}$ (m^2).

Số tiền ông An cần để trồng hoa là $\left(\dfrac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\right)\cdot 100000\approx 7653000$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24.

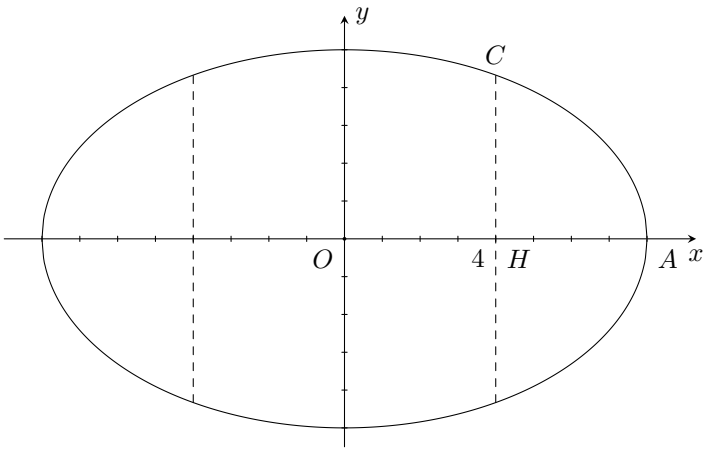
Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B**. 7.653.000 đồng . **C**. 7.128.000 đồng. **D**. 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình chính tắc của Elip là $\dfrac{x^2}{8^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$.

Tam giác cong AHC giới hạn bởi các đường $y=5\sqrt{1-\dfrac{x^2}{64}}$, $y=0$, $x=4$, $x=8$.

Diện tích của tam giác cong AHC là $S_1=\displaystyle\int\limits_4^8 5\sqrt{1-\dfrac{x^2}{64}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{20\pi}{3}-5\sqrt{3}$.

Diện tích của Elip là $S=\pi\cdot 8\cdot 5=40\pi$.

Diện tích của dải đất trồng hoa là $S_2=S-4S_1=40\pi-4\left(\dfrac{20\pi}{3}-5\sqrt{3}\right)\approx 76{,}53$ m^2.

Vậy số tiền cần dùng để trồng hoa là $76{,}53\times 100.000=7.653.000$ đồng.

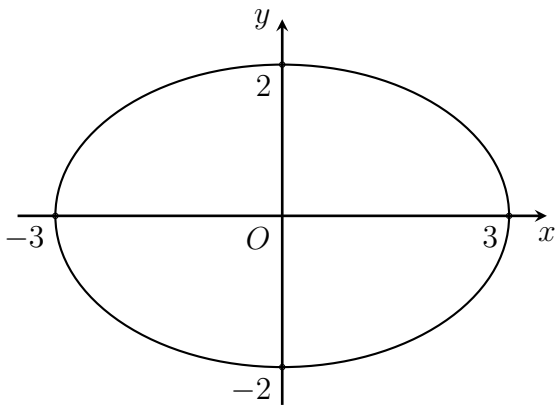
Chọn đáp án B □

Câu 25. Một quả trứng có hình dạng khối tròn xoay, thiết diện qua trục của nó là hình elip có độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục bé bằng 4. Tính thể tích quả trứng đó.

A. 12π. **B**. 18π. **C**. 14π. **D**. 16π.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta có phương trình đường elip là $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Suy ra $y=\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}$.

Elip cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 3 và -3. Do đó thể tích của quả trứng là

$$V = \frac{1}{9}\pi \int_{-3}^{3} (36 - 4x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{9}\left(36x - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} = 16\pi.$$

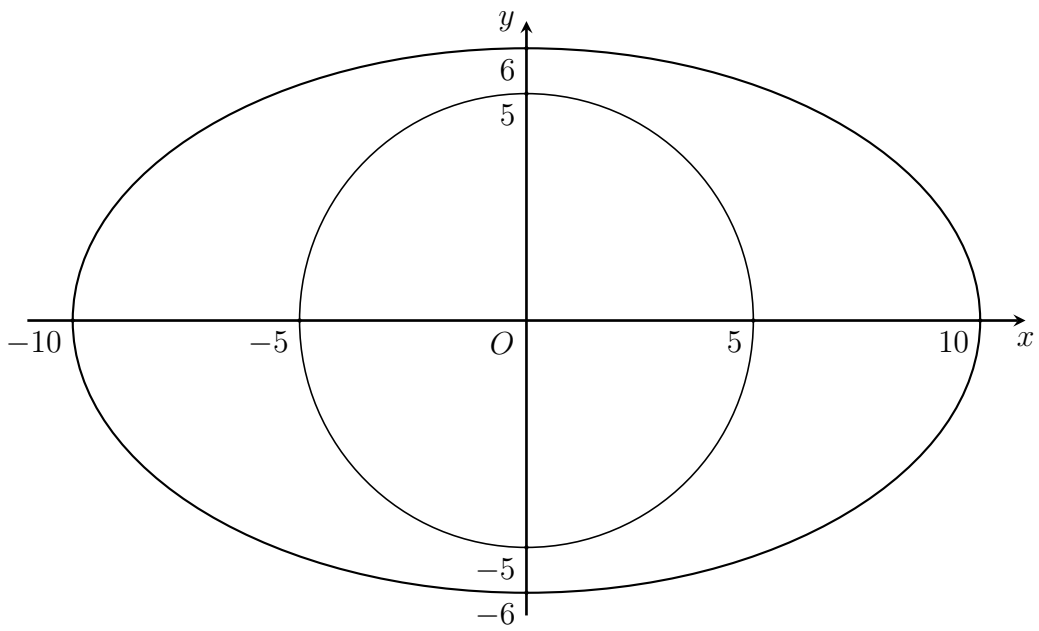
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Trong trung tâm công viên có một khuôn viên hình elip có độ dài trục lớn bằng 20 m, độ dài trục bé bằng 12 m. Giữa khuôn viên là một đài phun nước hình tròn có đường kính 10 m, phần còn lại của khuôn viên người ta thả cá. Tính diện tích phần thả cá.

A. 35π m^2. **B**. 25π m^2. **C**. 85π m^2. **D**. 60π m^2.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Phương trình đường elip là $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{3}{5}\sqrt{100 - x^2}$.

Elip cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ là -10 và 10. Diện tích khuôn viên hình elip là

$$S = \frac{6}{5}\int_{-10}^{10} \sqrt{100 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = 10\sin t, t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{d}x = 10\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $S = \dfrac{6}{5}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 100\cos^2 x\,\mathrm{d}t = 120\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}t = 60\left(t + \frac{\sin 2t}{t}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 60\pi.$

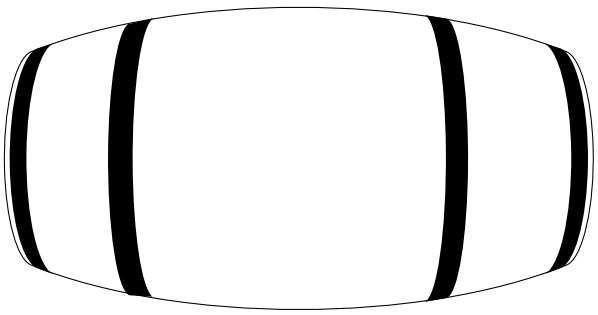
Diện tích đài phun nước là $S' = 25\pi$.

Diện tích phần thả cá bằng $S - S' = 35\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27.

Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa hai đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng gần với số nào sau đây?

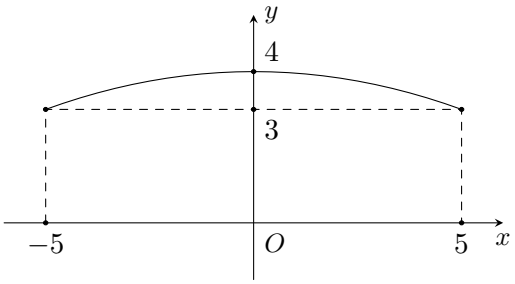


A. 425,2 (lít). **B.** 284 (lít). **C.** 212,6 (lít). **D.** 142,2 (lít).

Lời giải.

+ Bán kính đáy 30 cm= 3 dm.
+ Khoảng cách giữa hai đáy là 1 m= 10 dm.
+ Thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm= 8π dm

$\Rightarrow$ Bán kính $r = 4$ dm.

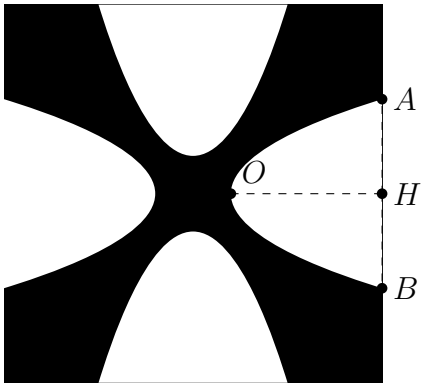


+ Mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol có đồ thị như trên
+ Phương trình parabol $y = 4 - \dfrac{1}{25}x^2$.
+ Thể tích của thùng $V = \pi \displaystyle\int_{-5}^{5} \left(4 - \frac{1}{25}x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{406\pi}{3}$ dm$^3 \approx 425{,}2$ (lít).

Chọn đáp án A □

Câu 28.

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{140}{3}$ cm^2. **B.** $\dfrac{160}{3}$ cm^2. **C.** $\dfrac{14}{3}$ cm^2. **D.** 50 cm^2.

Lời giải.

Ta chọn hệ trục Oxy với $H(0;0)$, $A\left(\dfrac{5}{2};0\right)$, $B\left(-\dfrac{5}{2};0\right)$, $O(0;4)$.

$(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ là parabol qua ba điểm A; B; O.

Ta có $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \\ O \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{25}{4}a + \dfrac{5}{2}b + c \\ 0 = \dfrac{25}{4}a - \dfrac{5}{2}b + c \\ 4 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{16}{25} \\ b = 0 \\ c = 4. \end{cases}$

Suy ra $(P)\colon y = -\dfrac{16}{25}x^2 + 4$.

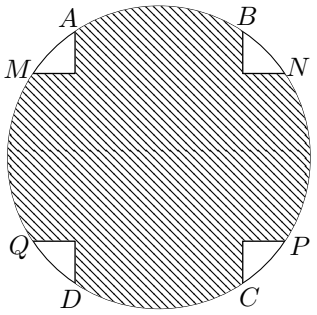
Diện tích phần bỏ đi là $S_{\text{bỏ}} = 4\displaystyle\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{160}{3}$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = 10^2 - S_{\text{bỏ}} = \dfrac{140}{3}$ (cm^2)

Chọn đáp án A □

Câu 29.

Một vườn hoa có dạng hình tròn, bán kính bằng 5 m. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Kinh phí để trồng hoa là 50.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng đơn vị) cần để trồng hoa trên diện tích phần đất đó là bao nhiêu? Biết hai hình chữ nhật $ABCD$ và $MNPQ$ có $AB = MQ = 5$ m.



A. 3.533.057 đồng. **B**. 3.641.528 đồng.

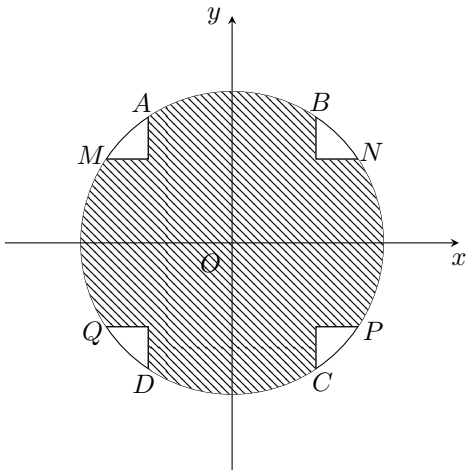
C. 3.641.529 đồng. **D**. 3.533.058 đồng.

Lời giải.

Xét phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ (C).

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C) và các đường thẳng AD, BC là

$$S_1 = 4\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{25\pi}{3} + \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$



Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C) và các đường thẳng MN, PQ là $S_2 = S_1$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MN với AD và BC; L, K lần lượt là giao điểm của PQ với AD và BC.

Ta có $S_{IJKL} = 5 \cdot 5 = 25$ m^2.

Vậy diện tích phần đất trồng hoa là

$$S = S_1 + S_2 - S_{IJKL} = \frac{50\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 25\ \left(\text{m}^2\right).$$

Vậy số tiền cần để trồng hoa là 3.533.057 đồng.

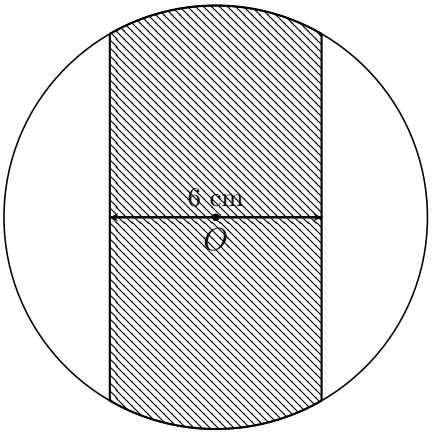
Chọn đáp án A □

Câu 30.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/ m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó?

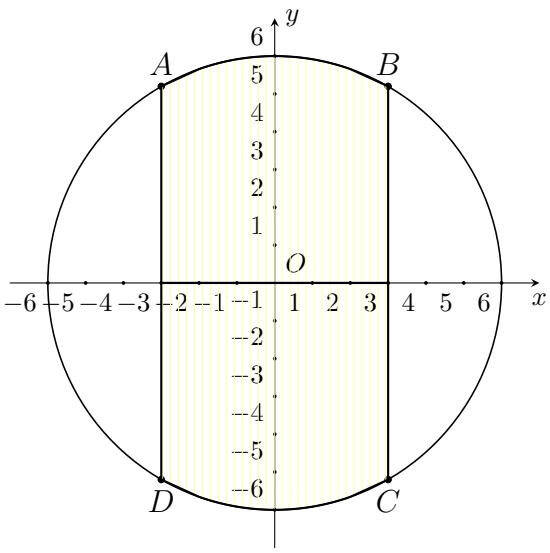
A. 8412322 đồng. **B**. 4821322 đồng.

C. 3142232 đồng. **D**. 4821232 đồng.



Lời giải.

Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ.



Phương trình đường tròn

$$x^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}.$$

Diện tích phần trồng cây $S = 2\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 6\sin t$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = 6\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{36 - 36\sin^2 t} \cdot 6\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 72\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= 36\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 12\pi + 18\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Số tiền cần để trồng cây là $70000 \cdot S \approx 4821322$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trên đoạn thẳng AB dài 200 m có hai chất điểm X, Y. Chất điểm X xuất phát từ A, chuyển động thẳng hướng đến B với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{80}t^2 + \dfrac{1}{3}t$ m/s, trong đó t giây là khoảng thời gian tính từ lúc X bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, chất điểm Y xuất

phát từ B và xuất phát chậm hơn 10 giây so với X; Y chuyển động thẳng theo chiều ngược lại với X và có gia tốc bằng a m/s^2 (a là hằng số). Biết rằng hai chất điểm X, Y gặp nhau tại đúng trung điểm đoạn thẳng AB. Gia tốc của chất điểm Y bằng

A. 2 m/s^2. **B**. 1,5 m/s^2. **C**. 2,5 m/s^2. **D**. 1 m/s^2.

Lời giải.

Chọn mốc thời gian $t_0 = 0$ tại thời điểm chất điểm X xuất phát từ A.
Giả sử hai chất điểm gặp nhau sau T giây, $T > 10$.
Quãng đường chất điểm X đi được cho đến khi gặp chất điểm Y là

$$\int_0^T \left(\frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{3}t\right) \mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{240} + \frac{t^2}{6}\right)\Big|_0^T = \frac{T^3 + 40T^2}{240} \text{ m}.$$

Vì hai chất điểm gặp nhau tại trung điểm của AB nên

$$\frac{T^3 + 40T^2}{240} = 100 \Leftrightarrow T^3 + 40T^2 - 24000 = 0 \Leftrightarrow T = 20 \text{ giây}.$$

Chất điểm Y có gia tốc bằng a nên vận tốc biến thiên theo quy luật $v_Y(t) = at + C$ m/s, $C \in \mathbb{R}$.
Do ở giây thứ 10 chất điểm Y mới bắt đầu chuyển động nên

$$v_Y(10) = 0 \Leftrightarrow 10a + C = 0 \Leftrightarrow C = -10a.$$

Quãng đường chất điểm Y đi được cho đến khi gặp chất điểm X là

$$\int_{10}^{20} (at - 10a) \mathrm{d}t = \left(\frac{at^2}{2} - 10at\right)\Big|_{10}^{20} = 150a - 100a = 50a \text{ m}.$$

Theo đề bài thì $50a = 100 \Leftrightarrow a = 2$.
Vậy gia tốc của chất điểm Y là $a = 2$ m/s^2.
Chọn đáp án A □

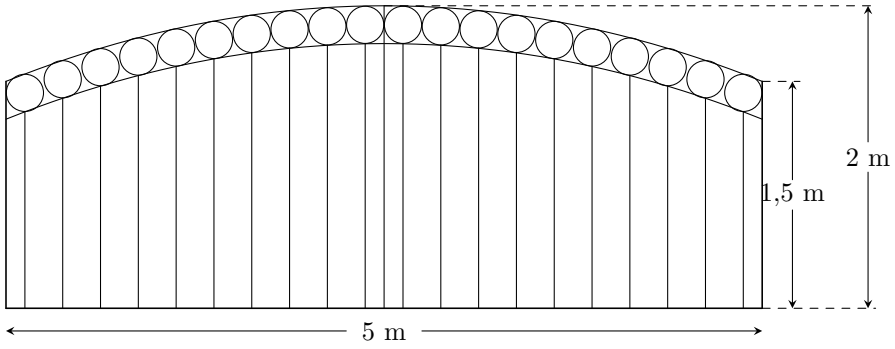
Câu 32. Một ô-tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô-tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 20 - 4t$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc hãm phanh. Quãng đường xe ô-tô di chuyển trong giây cuối cùng trước khi dừng lại là

A. 0,5 (m). **B**. 1 (m). **C**. 2 (m). **D**. 2,5 (m).

Lời giải.

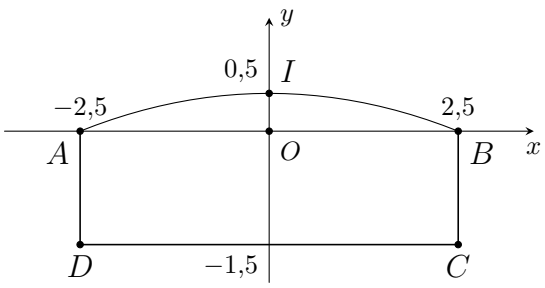
Khi ô-tô dừng hẳn, ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$ (s).
Quãng đường ô-tô di chuyển trong giây cuối cùng là $S = \displaystyle\int_4^5 (20 - 4t) \mathrm{d}t = 2$ (m).
Chọn đáp án C □

Câu 33. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một đường parabol. Giá 1 mét vuông cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn)?



A. 6.620.000 đồng. **B**. 6.320.000 đồng. **C**. 6.520.000 đồng. **D**. 6.417.000 đồng.

Lời giải.



Ta mô hình hóa cánh cửa rào bằng hình thang cong $ADCB$ vuông tại C và D, cung AB như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho 2 điểm A, B nằm trên trục Ox như hình vẽ.

Vậy diện tích cánh cửa sẽ bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$ cộng thêm diện tích miền cong AIB.

Parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(0;0{,}5)$ và cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-2{,}5;0)$, $B(2{,}5;0)$ có phương trình là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Diện tích miền cong AIB bằng $\displaystyle\int_{-2{,}5}^{2{,}5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{5}{3}$.

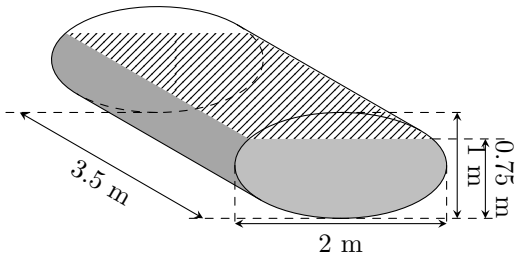
Suy ra diện tích cánh cửa bằng $\dfrac{5}{3} + 1{,}5 \cdot 5 = \dfrac{55}{6}$ (m^2).

Giá 1 m^2 cửa rào sắt là 700.000. Vậy giá tiền cửa rào sắt là 6.416.666 đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.

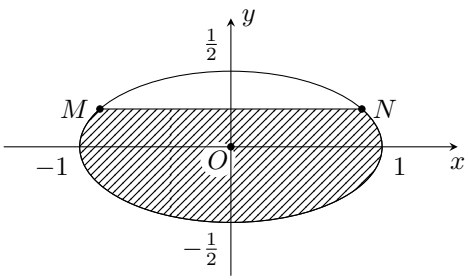
Một thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có độ dài trục lớn bằng 2 m, độ dài trục bé bằng 1 m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3,5 m. Thùng được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ điểm thấp nhất của đáy thùng đến mặt dầu) là 0,75 m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $V = 4{,}42$ m^3. **B**. $V = 3{,}25$ m^3. **C**. $V = 1{,}26$ m^3. **D**. $V = 7{,}08$ m^3.

Lời giải.

Ta có phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.



Gọi S_1 là diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi elip, ta có $S_1=\pi\cdot a\cdot b=\pi\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới giới hạn bởi nửa trên elip và đường thẳng MN.

Phương trình MN: $y=\dfrac{1}{4}$.

Phương trình nửa trên elip là $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{4}}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của elip và MN là

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 1-x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $S_2=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra

$$\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

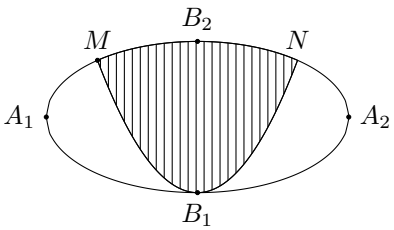
Suy ra $S_2=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Vậy thể tích $V=\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)\cdot 3{,}5\approx 4{,}42$ m^3.

Chọn đáp án A □

Câu 35.

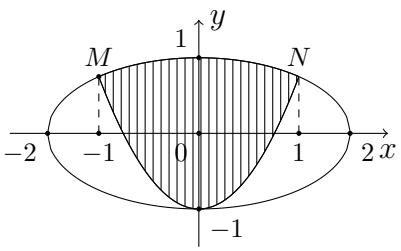
Một biển quảng cáo có dạng hình elíp với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elíp bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần gạch chéo với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4$ m, $B_1B_2=2$ m, $MN=2$ m.



A. 2.341.000 đồng. **B**. 2.057.000 đồng. **C**. 2.760.000 đồng. **D**. 1.664.000 đồng.

Lời giải.

Phương trình đường Elip là $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.



Do Elip nhận hai trục Ox và Oy làm hai trục đối xứng nên diện tích hình Elip là $S_E=4\displaystyle\int\limits_0^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\mathrm{d}x$

Đặt $\dfrac{x}{2}=\sin t$ suy ra $\dfrac{\mathrm{d}x}{2}=\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=2\to t=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Suy ra

$$S_E=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\,\mathrm{d}t=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi.$$

Tọa độ giao điểm M, N là nghiệm hệ

$$\begin{cases}x=\pm 1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 1\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Do đó $M\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy nên có dạng $y=ax^2+c$, $a\neq 0$.

Vì $B_1(0;-1)$, $N\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(P)$ nên

$$\begin{cases}c=-1\\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\end{cases}\Rightarrow (P)\colon y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1.$$

Diện tích phần gạch chéo là diện tích hình phẳng giới hạn bởi Elip và phần phía trên parabol nên ta có

$$S_1=2\int\limits_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]\mathrm{d}x.$$

☑ Tính $\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x$. Đặt $\dfrac{x}{2}=\sin t$ suy ra $\dfrac{\mathrm{d}x}{2}=\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

Suy ra

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2 t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos t)\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

☑ Tính $\displaystyle\int\limits_0^1\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]\mathrm{d}x=\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{x^3}{3}+x\right]\Big|_0^1=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}$.

Vậy $S_1=2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{4}{3}$ m^2.

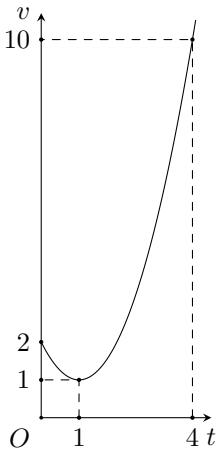
Tổng số tiền sử dụng là

$$S_1\cdot 200000+(S_E-S_1)\cdot 500000\approx 2.341.000 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/giờ) phụ thuộc thời gian t (giờ) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{40}{3}$ km. **B.** $s=8$ km. **C.** $s=\dfrac{46}{3}$ km. **D.** $s=6$ km.

Lời giải.

Gọi phương trình của vận tốc chuyển động là $v(t)=at^2+bt+c$, a, b, $c\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a+(-2a)+2=1 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2. \end{cases}$$

Như vậy $v(t)=t^2-2t+2$ (km/giờ).

Phương trình chuyển động của vật là $s(t)=\displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(t^2-2t+2\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+C$.

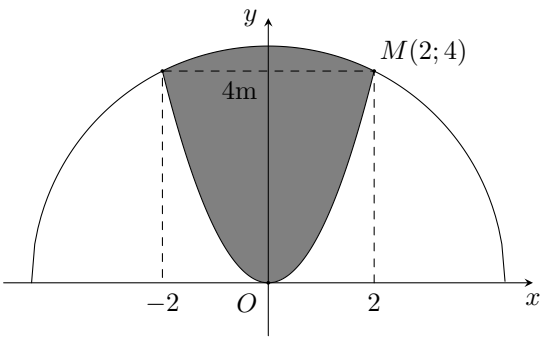
Quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là

$$s=s(4)-s(0)=\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-4^2+2\cdot 4+C\right)-(C)=\frac{40}{3}\text{ km}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 37.

Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.



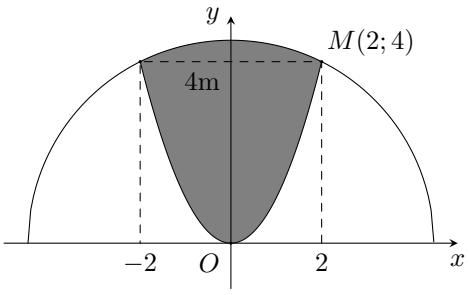
Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150 000 đồng/m^2 và 100 000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 3 738 574 đồng. **B.** 1 948 000 đồng. **C.** 3 926 990 đồng. **D.** 4 115 408 đồng.

Lời giải.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Tính được bán kính của nửa hình tròn là $R = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.
Khi đó, phương trình nửa đường tròn là

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}.$$



Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ O nên có dạng $y = ax^2$. Vì (P) đi qua $M(2;4)$ nên $4 = a \cdot 2^2$, suy ra $a = 1$.
Phương trình $(P)\colon y = x^2$.
Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn (phần tô màu). Khi đó

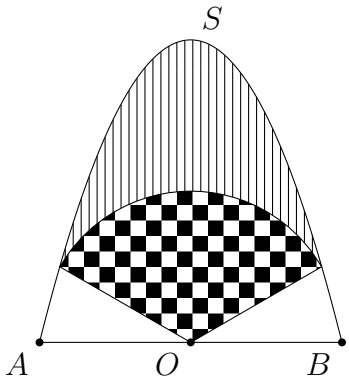
$$S_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{20 - x^2} - x^2\right) \mathrm{d}x \approx 1194\,\mathrm{m}^2.$$

Gọi S_2 là phần diện tích trồng cỏ Nhật. Khi đó

$$S_2 = S_{\text{nửa đường tròn}} - S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 - S_1 = 1948\,\mathrm{m}^2.$$

Vậy số tiền cần có là $150000 \cdot S_1 + 100000 \cdot S_2 \approx 3\,738\,574$ đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38.
Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS = AB = 4$ cm, O là trung điểm AB. Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc 140000 đồng/m^2, phần giữa là hình quạt tâm O, bán kính 2 m được tô đậm 150000 đồng/m^2, phần còn lại 160000 đồng/m^2. Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần nhất với số nào sau đây?



A. 1,597.000 đồng. **B**. 1,625.000 đồng. **C**. 1,575.000 đồng. **D**. 1,600.000 đồng.

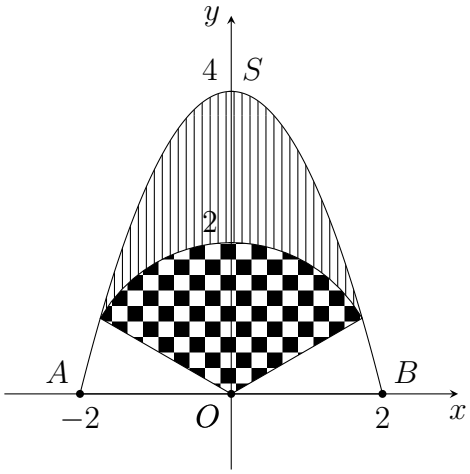
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tạo độ O, tia $Ox \equiv OB$, $Oy \equiv OS$.
Khi đó, parabol có phương trình là $y = 4 - x^2$ và đường tròn có phương trình là $y = \sqrt{4 - x^2}$.
Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$4 - x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Số tiền phần kẻ sọc là

$$T_1 = 140000 \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-x^2 + 4 + \sqrt{4 - x^2}\right) \mathrm{d}x.$$



Phần tô đậm là hình quạt có góc ở tâm là $\dfrac{2\pi}{3}$. Số tiền phần tô đậm là $T_2 = 150000 \cdot \dfrac{\pi R^2}{3}$.
Phần còn lại là phần bù của quạt trong hình tròn $T_3 = 160000 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\pi R^2 - \dfrac{p^2}{3}\right) = 160000 \cdot \dfrac{\pi R^2}{6}$.
Vậy tổng số tiền là $T = T_1 + T_2 + T_3 = 1589427$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Một bác thợ làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox, khi quay quanh trục Ox. Biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Khi đó thể tích của lọ là

A. 8π dm^3. **B.** $\dfrac{15}{2}\pi$ dm^3. **C.** $\dfrac{14}{3}\pi$ dm^3. **D.** $\dfrac{15}{2}$ dm^3.

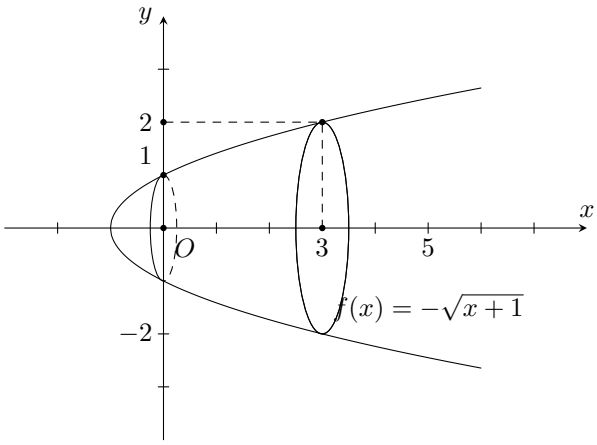
Lời giải.

Đường kính đáy lần lượt là 2 dm và 4 dm nên ta có hoành độ giao điểm của mặt đáy và Ox là nghiệm của các phương trình sau

$$\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy thể tích của lọ là $V = \pi \displaystyle\int_0^3 (x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{15}{2}\pi$ dm^3.

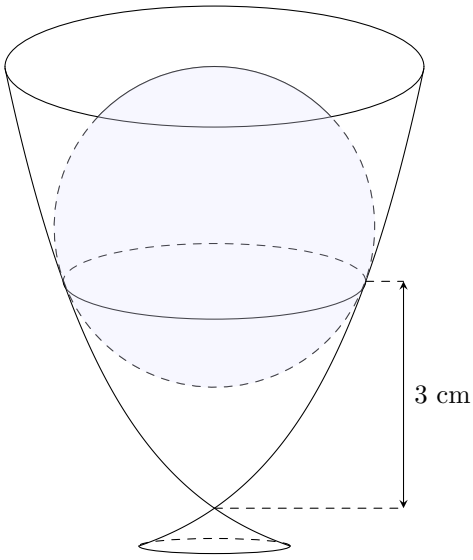


Chọn đáp án (B) □

Câu 40.

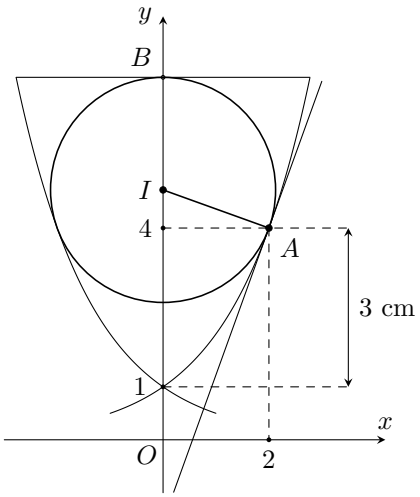
Một chiếc ly bằng thủy tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành khi quay một phần đồ thị hàm số $y = 2^x$ xung quanh trục Oy. Người ta thả vào chiếc ly một viên bị hình cầu có bán kính R thì mực nước dâng lên phủ kín viên bi đồng thời chạm tới miệng ly. Biết điểm tiếp xúc của viên bi và chiếc ly cách đáy của chiếc ly 3 cm (như hình vẽ). Thể tích nước có trong ly gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 30 cm^2. **B.** 40 cm^2. **C.** 50 cm^2. **D.** 60 cm^2.



Lời giải.

Xét mặt phẳng (α) đi qua trục của chiếc ly. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn lớn của quả cầu. Ta thấy đường tròn $(\mathscr{C})$ và đồ thị $(C)\colon y = 2^x$ tiếp xúc nhau A.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta được $A(2;4)$.

Tiếp tuyếp với (C) tại A là

$$(d)\colon y = (4\ln 2)\cdot x - 8\ln 2 + 4.$$

Đường thẳng vuông góc với (d) tại A là

$$(\Delta)\colon y = -\frac{1}{4\ln 2}\cdot x + \frac{1}{2\ln 2} + 4.$$

Tâm I của đường tròn $(\mathscr{C})$ là giao điểm của (Δ) và Oy, ta được $I\left(0;\dfrac{1+8\ln 2}{2\ln 2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = \left(2;-\dfrac{1}{2\ln 2}\right)$, suy ra thể tích khối cầu $V_{\text{khối cầu}} = \dfrac{4\pi}{3}\cdot IA^3 \approx 40{,}26\ \text{cm}^3$.

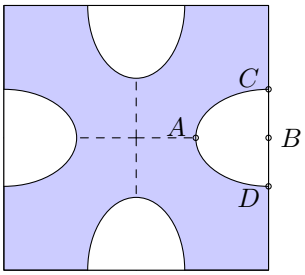
Dung tích chiếc ly là $V = \pi\displaystyle\int_1^{y_B} [\log_2 y]^2\,\mathrm{d}y \approx 69{,}92\ \text{cm}^3$.

Thể tích nước chứa trong chiếc ly là $V_{\text{nước}} = V - V_{\text{khối cầu}} \approx 29{,}66\ \text{cm}^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng một nửa e-líp như hình vẽ. Biết nửa trục lớn $AB = 6$ cm, trục bé $CD = 8$ cm. Diện tích bề mặt của một hoa văn đó bằng

A. $400 - 48\pi\ \text{cm}^2$.
B. $400 - 96\pi\ \text{cm}^2$.
C. $400 - 24\pi\ \text{cm}^2$.
D. $400 - 36\pi\ \text{cm}^2$.



Lời giải.

Gọi S_E là diện tích của một hình e-líp, S_{hv} là diện tích của hình vuông và S_0 là diện tích của hoa văn. Ta có

$$S_0 = S_{hv} - 2S_E.$$

Xét e-lip $(E)\colon \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ có trục lớn bằng 12 cm, trục bé bằng 8 cm.

Ta có $S_E = 2\displaystyle\int_{-6}^{6} 4\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}\,\mathrm{d}x = 8\int_{-6}^{6}\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 6\sin t, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = 6\cos t\mathrm{d}t$.

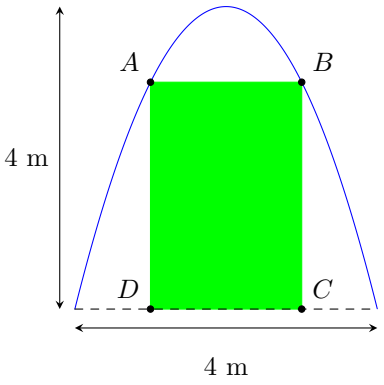
Khi đó ta có $S_E = 48\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 24\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 24\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 24\pi\ \text{cm}^2$.

Vậy ta có diện tích của một hoa văn là $S_0 = S_{hv} - 2S_E = 20^2 - 2\times 24\pi = 400 - 48\pi\ \text{cm}^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 42.

Đợt thi đua 26 tháng 3 Đoàn trường THPT Nho Quan A có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ bên. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 150.000 đồng trên 1 m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (kết quả làm tròn lấy phần nguyên)?

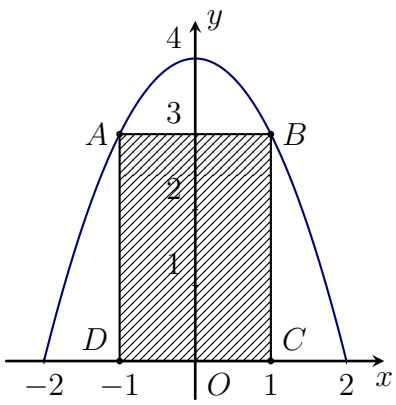


A. 575.034 đồng . **B**. 676.239 đồng .

C. 536.272 đồng . **D**. 423.215 đồng .

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + c$ với $a < 0$.



Vì parabol đi qua các điểm $(0;4)$ và $(2;0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 4. \end{cases}$$

Do đó phương trình parabol là $y = -x^2 + 4$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi parabol và trục hoành là

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Goi $C(t;0), (0 < t < 2) \Rightarrow B(t; 4 - t^2)$. Khi đó $CD = 2t$ và $BC = 4 - t^2$.
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_2 = BC \times CD = (4 - t^2) \cdot 2t = -2t^3 + 8t.$$

Diện tích phần trang trí hoa văn là: $S = S_1 - S_2 = 2t^3 - 8t + \dfrac{32}{3}$.
Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 8t + \dfrac{32}{3}, (0 < t < 2)$. Ta có:

$$f'(t) = 6t^2 - 8;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \in (0;2) \\ t = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \notin (0;2). \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{32}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{32}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra diện tích phần trang trí nhỏ nhất là $S = \dfrac{96-32\sqrt{3}}{9}$ m^2.
Khi đó chi phí thấp nhất là

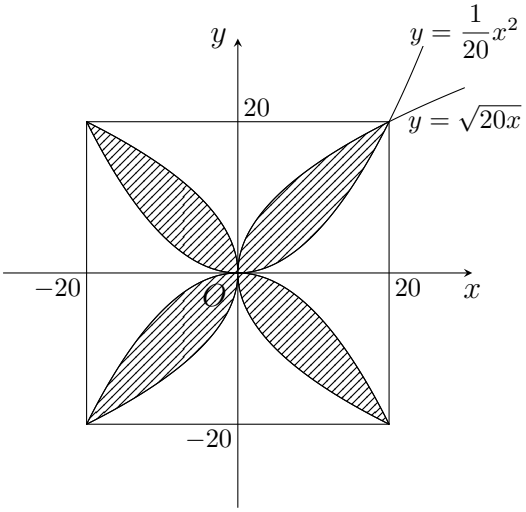
$$T = \frac{96-32\sqrt{3}}{9} \times 150.000 = 676.239 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 43.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa bằng

A. $\dfrac{400}{3}$ cm^2. **B.** $\dfrac{800}{3}$ cm^2. **C.** 250 cm^2. **D.** 800 cm^2.



Lời giải.

Diện tích mỗi cánh hoa là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{20} \left| \sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right| \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{20} \sqrt{20x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{20} \frac{1}{20}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{5} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\bigg|_0^{20} - \frac{x^3}{60}\bigg|_0^{20} \\ &= \frac{400}{3}. \end{aligned}$$

Vậy diện tích mỗi cánh hoa là $\dfrac{400}{3}$ cm^2.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s^2). Tính quãng đường S (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 168$ m. **B.** $S = 166$ m. **C.** $S = 144$ m. **D.** $S = 152$ m.

Lời giải.

Quãng đường xe đi được trong 12 giây đầu là $s_1 = \displaystyle\int_0^{12} 2t\,\mathrm{d}t = 144$ (m).

Sau khi đi được 12 giây thì đạt vận tốc $v = 24$ (m/s).

Sau đó vận tốc của vật có phương trình $v_2(t) = 24 - 12t$ (m/s).

Vật dừng hẳn sau 2 giây kể từ khi phanh.

Quãng đường xe đi được từ khi đạp phanh đến khi dừng hẳn là $s_2 = \displaystyle\int_0^{2} (24 - 12t)\,\mathrm{d}t = 24$ (m).

Vậy $S = s_1 + s_2 = 168$ (m).

Chọn đáp án A □

Câu 45. Thời gian và vận tốc của một vật khi nó đang trượt trên mặt phẳng nghiêng có mối liên hệ theo công thức $t = \displaystyle\int \frac{2}{20 - 3v}\,\mathrm{d}v$ (giây). Chọn gốc thời gian là lúc vật bắt đầu chuyển động, hãy tìm phương trình vận tốc của vật.

A. $v = \dfrac{20}{3} + \dfrac{20}{3\sqrt{\mathrm{e}^{3t}}}$. **B.** $v = \dfrac{20}{3} - \dfrac{20}{3\sqrt{\mathrm{e}^{3t}}}$.

C. $v = \dfrac{20}{3} - \dfrac{20}{3\sqrt{\mathrm{e}^{3t}}}$ hoặc $v = \dfrac{20}{3} + \dfrac{20}{3\sqrt{\mathrm{e}^{3t}}}$. **D.** $v = \dfrac{20}{5} - \dfrac{20}{5\sqrt{\mathrm{e}^{3t}}}$.

Lời giải.

Ta có $t = \displaystyle\int \frac{2}{20 - 3v}\,\mathrm{d}v = -\frac{2}{3}\ln|20 - 3v| + C$, với C là hằng số.

Tại thời điểm $t = 0$, vật bắt đầu chuyển động nên có vận tốc $v = 0$. Do đó

$$0 = -\frac{2}{3}\ln 20 + C \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}\ln 20.$$

Nên ta có $t = -\dfrac{2}{3}\ln|20 - 3v| + \dfrac{2}{3}\ln 20 \Leftrightarrow \dfrac{3t}{2} = \ln\dfrac{20}{|20 - 3v|}$.

Mũ hóa hai vế, ta có

$$\mathrm{e}^{\frac{3t}{2}} = \frac{20}{|20 - 3v|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = \dfrac{20}{3} - \dfrac{20}{3\mathrm{e}^{\sqrt{3t}}} \\ v = \dfrac{20}{3} + \dfrac{20}{3\mathrm{e}^{\sqrt{3t}}} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, nếu biết phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết tốc độ phát triển của vi khuẩn ngày thứ t là $F'(t) = \dfrac{1000}{2t + 1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày?

A. 5434. **B.** 1499. **C.** 283. **D.** 3717.

Lời giải.

Ta có $F(t)=\displaystyle\int F'(t)\mathrm{d}t=500\ln|2t+1|+C$.
Theo đề bài, $F(0)=2000\Rightarrow C=2000\Rightarrow F(t)=500\ln(2t+1)+2000\Rightarrow F(15)\approx 3716{,}994$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Một ô tô chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái đạp phanh (còn nói là thắng). Sau khi đạp phanh, ô tô di chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 20 (m). **B.** 15 (m). **C.** 5 (m). **D.** 10 (m).

Lời giải.

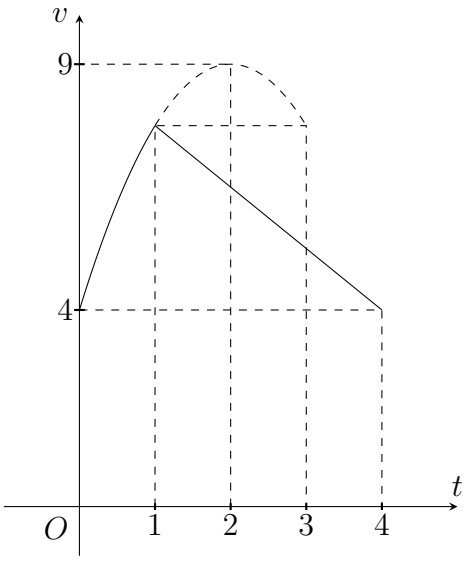
Ta có $v(t)=-40t+20$.
Lúc ô tô dừng hẳn $v(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.
Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh ($t=0$) đến lúc ô tô dừng $\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$ là

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}(-40t+20)\,\mathrm{d}t=5\text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $S=23,71$ km. **B.** $S=23,58$ km.
C. $S=23,56$ km. **D.** $S=23,72$ km.

Lời giải.

Trong 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v=at^2+bt+c$, suy ra $v'=2at+b$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}v(0)=4\\v(2)=9\\v'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4\\4a+2b+4=9\\4a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{4}\\b=5\\c=4\end{cases}.$$

Suy ra $v(t)=-\dfrac{5}{4}t^2+5t+4$, từ đó ta có $v(1)=\dfrac{31}{4}$.
Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t)=at+b$.

Theo giả thiết ta có

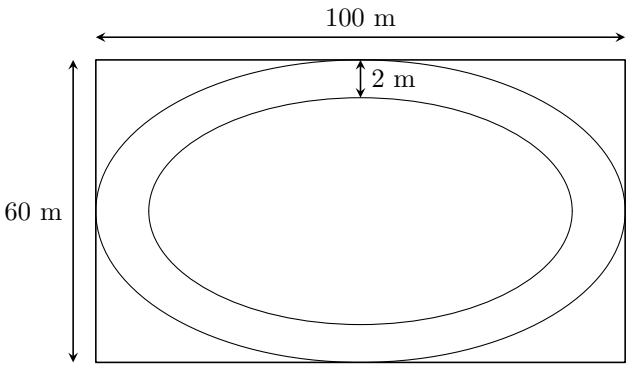
$$\begin{cases} v(1) = a + b = \dfrac{31}{4} \\ v(4) = 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t + 9$.
Quãng đường vật đi trong 4 giờ là

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int_1^4 \left(-\frac{5}{4}t + 9\right) \mathrm{d}t = 23,7083.$$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng là 60 m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ).



Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường Elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh phí của mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 293.904.000. **B**. 283.904.000. **C**. 293.804.000. **D**. 294.053.072.

Lời giải.

Gọi (E_1), (E_2) lần lượt là đường elip viền ngoài và viền trong của con đường.
Elip (E_1) có nửa trục lớn là 50 m và nửa trục bé là 30 m.
Elip (E_2) có nửa trục lớn là $50 - 2 = 48$ m và nửa trục bé là $30 - 2 = 28$ m.
Diện tích mặt đường là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai elip (E_1) và (E_2).
Suy ra diện tích mặt đường là $S = \pi(50 \cdot 30 - 48 \cdot 28) = 156\pi$.
Vậy số tiền làm đường là $T = 600000 \cdot S \approx 294053072$.
Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. B	5. B	6. B	7. A	8. A	9. A	10. C
11. A	12. A	13. C	14. A	15. A	16. C	17. D	18. A	19. B	20. D
21. C	22. B	23. B	24. B	25. D	26. A	27. A	28. A	29. A	30. B
31. A	32. C	33. D	34. A	35. A	36. A	37. A	38. D	39. B	40. A
41. A	42. B	43. A	44. A	45. B	46. D	47. C	48. A	49. D	

CHƯƠNG 4

SỐ PHỨC

BÀI 1 SỐ PHỨC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Định nghĩa số phức

Định nghĩa 1. Một **số phức** là một biểu thức dạng $a+bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thỏa mãn $\boxed{i^2=-1}$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z=a+bi$.
i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực*, b được gọi là *phần ảo* của số phức $z=a+bi$.
Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1. Các số sau là những số phức:
$3-5i$; $-\sqrt{3}+5i$; $2+(-4)\,i$.

2 Số phức bằng nhau

Định nghĩa 2. Hai số phức được gọi là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$\boxed{a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ và } b=d.}$$

Ví dụ 2. Tìm các số thực x, y, biết

$$(3x-y)+(2y-1)\,i=(x+1)+(y+2)\,i$$

Lời giải.

Từ định nghĩa hai số phức bằng nhau, ta có

$$\begin{cases}3x-y=x+1\\2y-1=y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$$

Vậy $x=2$ và $y=3$. □

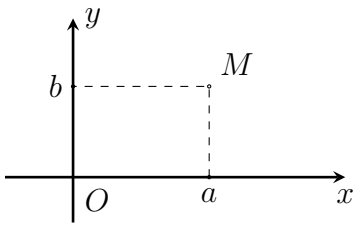
⚠ ① *Mỗi số thực a được gọi là một số phức với phần ảo bằng 0, tức là $a=a+0i$. Như vậy, mỗi số thực cũng là một số phức. Ta có $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.*

② *Số phức $0+bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi, tức là $bi=0+bi$.*

3 Biểu diễn hình học số phức

Định nghĩa 3.

Điểm $M(a;b)$ trong một hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z=a+bi$.



4 Môđun của số phức

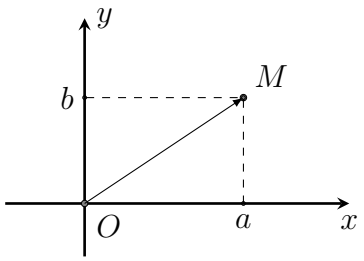
Giả sử số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Định nghĩa 4.

Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **mô-đun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Từ định nghĩa, suy ra $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ hay $|a+bi|=\left|\overrightarrow{OM}\right|$. Khi đó

$$\boxed{|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.}$$

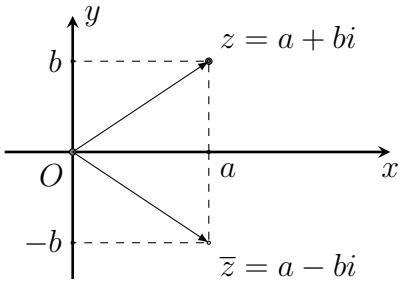


5 Số phức liên hợp

Định nghĩa 5.

Cho số phức $z=a+bi$. Ta gọi $a-bi$ là **số phức liên hợp** của z và kí hiệu là $\overline{z}=a-bi$. Tức là

$$\boxed{\overline{a+bi}=a-bi}.$$



Tính chất 1. $\overline{\overline{z}}=z$.

Tính chất 2. $|\overline{z}|=|z|$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Xác định phần thực - phần ảo của số phức

Phương pháp giải.

Số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ có a là phần thực, b là phần ảo.

Ví dụ 3. Xác định phần thực, phần ảo của các số phức:

① $z=2+3i$.
② $z=2i-4$.
③ $z=3$.
④ $z=15i$.

Lời giải.

① Số phức $z = 2 + 3i$ có phần thực $a = 2$ và phần ảo $b = 3$.
② Số phức $z = 2i - 4$ có phần thực $a = -4$ và phần ảo $b = 2$.
③ Số phức $z = 3$ có phần thực $a = 3$ và phần ảo $b = 0$.
④ Số phức $z = 15i$ có phần thực $a = 0$ và phần ảo $b = 15$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định phần thực, phần ảo của các số phức:

① $z = 4i$.
② $z = -3i + 4$.
③ $z = 16$.
④ $z = -43 + 15i$.

Lời giải.

① Số phức $z = 4i$ có phần thực $a = 0$ và phần ảo $b = 4$.
② Số phức $z = -3i + 4$ có phần thực $a = 4$ và phần ảo $b = -3$.
③ Số phức $z = 16$ có phần thực $a = 16$ và phần ảo $b = 0$.
④ Số phức $z = -43 + 15i$ có phần thực $a = -43$ và phần ảo $b = 15$.

□

DẠNG 2. Xác định mô-đun của số phức

Phương pháp giải. Mô-đun của số phức $z = a + bi$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ 4. Tìm mô-đun của các số phức sau:

① $z = 1 + 2i$.
② $z = 3 - 5i$.
③ $z = -5 + 4i$.
④ $z = -4i$.
⑤ $z = 2$.

Lời giải.

① Ta có $|z| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
② Ta có $|z| = |3 - 5i| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.
③ Ta có $|z| = |-5 + 4i| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.
④ Ta có $|z| = |-4i| = \sqrt{(-4)^2} = 4$.
⑤ Ta có $|z| = |2| = \sqrt{2^2} = 2$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm mô-đun của các số phức sau:

① $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
② $z=4i-3$.
③ $z=-3-4i$.
④ $z=-6$.
⑤ $z=-4i$.

Lời giải.

① Ta có $|z|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.
② Ta có $|z|=|4i-3|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$.
③ Ta có $|z|=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.
④ Ta có $|z|=|-6|=\sqrt{(-6)^2}=6$.
⑤ Ta có $|z|=|-4i|=\sqrt{(-4)^2}=4$.

□

DẠNG 3. Hai số phức bằng nhau

Phương pháp giải. Hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i$ được gọi là bằng nhau nếu $\begin{cases}a=a'\\b=b'.\end{cases}$

Ví dụ 1. Tìm các số thực x, y biết:
① $x+2y+3i=4x-5y+(6-y)i$.
② $-3x+6y-(8+4y)i=3x-4+(4x-y)i$.

Lời giải.

① $x+2y+3i=4x-5y+(6-y)i \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=4x-5y\\3=6-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+7y=0\\y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\y=3.\end{cases}$
② $-3x+6y-(8+4y)i=3x-4+(4x-y)i$
$\Leftrightarrow \begin{cases}-3x+6y=3x-4\\-(8+4y)=4x-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+6y=-4\\-4x-3y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{6}{7}\\y=-\dfrac{32}{21}.\end{cases}$

□

Ví dụ 2. Cho $z=(3a+2)+(b-4)i$. Tìm các số a, b để
① z là số thực.
② z là số thuần ảo.

Lời giải.

① z là số thực khi $b-4=0$ hay $b=4$.
② z là số thuần ảo khi $3a+2=0$ hay $a=-\dfrac{2}{3}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm các số thực x, y, biết:

① $(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i$.
② $(1-3x)+(y+1)i=(x+y)-(2x+1)i$.

Lời giải.

① Ta có $\begin{cases}2x+1=x+2\\3y-2=y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3.\end{cases}$

② Ta có $\begin{cases}1-3x=x+y\\y+1=-(2x+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y=1\\2x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=-5.\end{cases}$

□

Bài 2. Tìm các số thực x, y, biết:
① $2x+1+5i=-4+(3y-2)i$.
② $(x-\sqrt{2})-4i=3-(y+1)i$.

Lời giải.

① Ta có $\begin{cases}2x+1=4\\5=3y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{7}{3}.\end{cases}$

② Ta có $\begin{cases}x-\sqrt{2}=3\\-4=-(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+\sqrt{2}\\y=3.\end{cases}$

□

Bài 3. Cho số phức $z=(a-5)+(b+4)i$. Tìm các số a, b để:

① z là số thuần ảo. ② z là số thực.

Lời giải.

① Để z là số thuần ảo thì $a-5=0$ hay $a=5$.
② Để z là số thực thì $b+4=0$ hay $b=-4$.

□

Bài 4. Cho số phức $z=(a^2-4b^2)+(a+2b)i$. Tìm các số a, b để z là số ảo.

Lời giải.

Để z là số ảo thì $a^2-4b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\a=-2b.\end{array}\right.$

□

DẠNG 4. Tìm tập hợp điểm biểu diễn

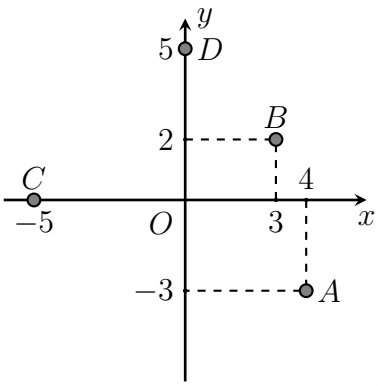
Phương pháp giải.

Số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$.

Ví dụ 3. Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ các số phức sau: $4-3i$, $3+2i$, -5, $5i$.

Lời giải.

Điểm $A(4;-3)$ biểu diễn số phức $4-3i$.
Điểm $B(3;2)$ biểu diễn số phức $3+2i$.
Điểm $C(-5;0)$ biểu diễn số phức -5.
Điểm $D(0;5)$ biểu diễn số phức $5i$.



□

Ví dụ 4. Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn theo thứ tự các số: $-1+i$, $-1-i$, $2i$, $2-2i$.
Tìm các số z_1, z_2, z_3, z_4 theo thứ tự biểu diễn các vec-tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

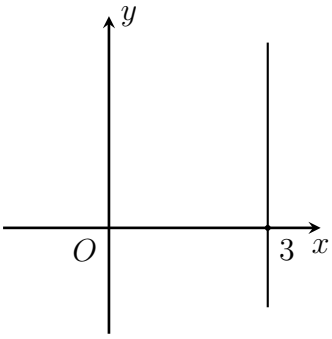
Theo đề bài ta có $A(-1;1)$, $B(-1;-1)$, $C(0;2)$, $D(2;-2)$.
Suy ra $\overrightarrow{AC}=(1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(3;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(1;3)$, $\overrightarrow{BD}=(3;-1)$.
Vậy $z_1=1+i$, $z_2=3-3i$, $z_3=1+3i$, $z_4=3-i$. □

Ví dụ 5. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện:
a. Phần thực của z bằng 3;
b. Phần ảo của z bằng -5;
c. Phần thực thuộc khoảng $(-2;3)$;
d. Phần ảo thuộc đoạn $[-3;6]$.

Lời giải.

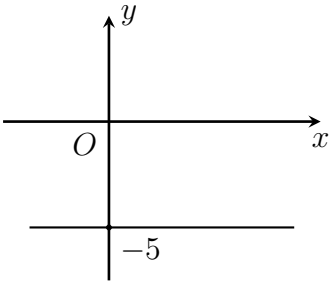
a.

Số phức z có phần thực bằng 3 được biểu diễn bởi điểm $M(3;b)$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x=3$.



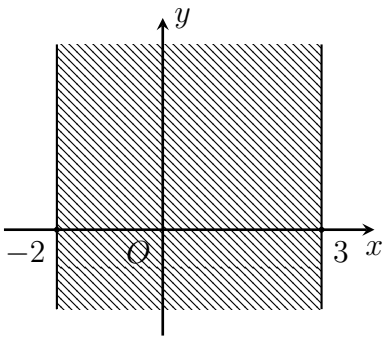
b.

Số phức z có phần ảo bằng -5 được biểu diễn bởi điểm $M(a;-5)$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $y=-5$.



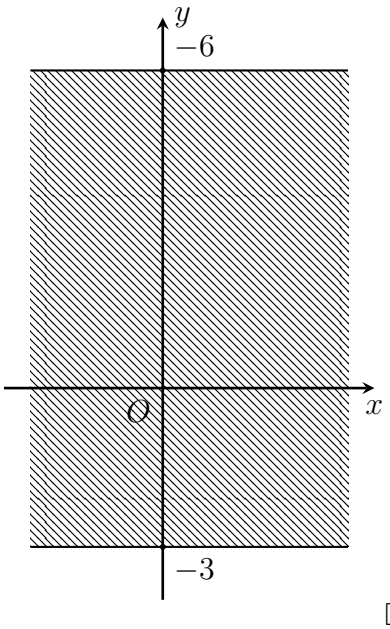
c.

Số phức z có phần thực thuộc khoảng $(-2;3)$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $a \in (-2;3)$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=-2$ và $x=3$.



d.

Số phức z có phần ảo thuộc khoảng $[-3;6]$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $b \in [-3;6]$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $y=-3$ và $y=6$, kể cả các điểm nằm trên hai đường thẳng này.



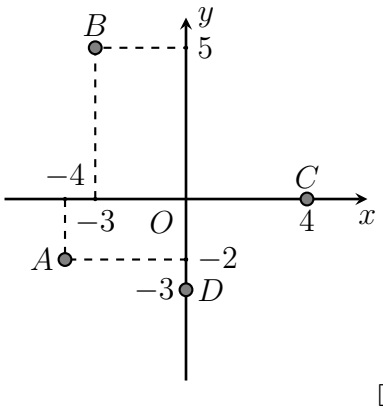
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ các số phức sau: $-4-2i$, $-3+5i$, 4, $-3i$.

Lời giải.

Điểm $A(-4;-2)$ biểu diễn số phức $-4-2i$.
Điểm $B(-3;5)$ biểu diễn số phức $-3+5i$.
Điểm $C(4;0)$ biểu diễn số phức 4.
Điểm $D(0;-3)$ biểu diễn số phức $-3i$.



□

Bài 6. Cho $ABCD$ là một hình bình hành với A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $1-2i, 4-2i, 5+i, z$. Tìm số phức z.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $A(1;-2)$, $B(4;-2)$, $C(5;1)$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Suy ra $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = 2 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = 1. \end{cases}$

Vậy $D(2;1)$ biểu diễn số phức $z = 2 + i$. □

DẠNG 5. Số phức liên hợp

Phương pháp giải.

Số $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của $z = a + bi$.

Ví dụ 6. Tìm $\overline{z}$, biết:

a. $z = 3 - i\sqrt{2}$;
b. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$;
c. $z = 3$;
d. $z = -5i$.

Lời giải.

a. $\overline{z} = 3 + i\sqrt{2}$.
b. $\overline{z} = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$.
c. $\overline{z} = 3$.
d. $\overline{z} = 5i$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Tìm $\overline{z}$, biết:

a. $z = -5 + i\sqrt{3}$.
b. $z = \pi - 2\pi i$.
c. $z = 2$.
d. $z = i\cos\sqrt{2}$.

Lời giải.

a. $\overline{z} = -5 - i\sqrt{3}$.
b. $\overline{z} = \pi + 2\pi i$.
c. $\overline{z} = 2$.
d. $\overline{z} = -i\cos\sqrt{2}$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 8. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện:

a. Phần thực của z lớn hơn hoặc bằng 1;
b. Phần ảo của z thuộc nửa khoảng $(-1;2]$;
c. Phần thực thuộc đoạn $[-1;2]$, phần ảo thuộc đoạn $[-1;3]$;
d. $|z| = 2$;

e. $|z| \leq 2$;

f. $|z| = 2$ và phần thực nhỏ hơn 1;

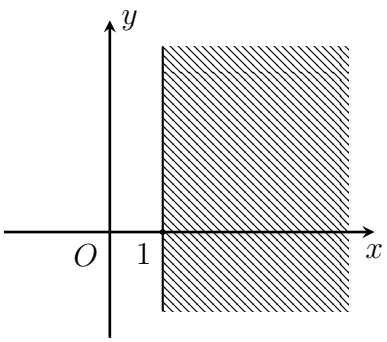
g. $|z| \leq 2$ và phần thực thuộc đoạn $[-1;1]$.

Lời giải.

a.

Số phức z có phần thực lớn hơn hoặc bằng 1 được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $a \in [1;+\infty)$.

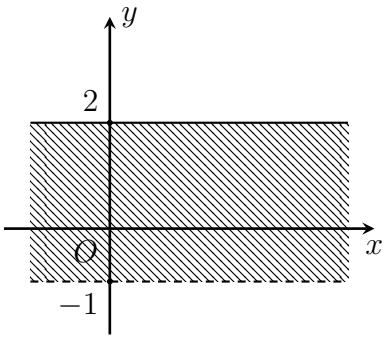
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là phần gạch chéo ở hình bên, kể cả các điểm nằm trên đường thẳng $x = 1$.



b.

Số phức z có phần ảo thuộc nửa khoảng $(-1;2]$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $b \in (-1;2]$.

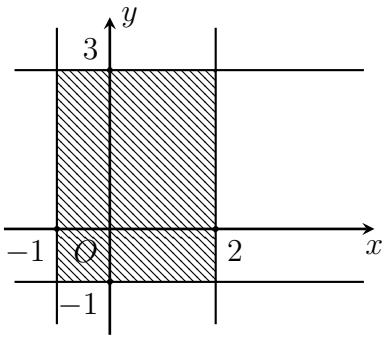
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là phần mặt phẳng tọa độ giới hạn bởi hai đường thẳng $y = -1$ và $y = 2$, kể cả các điểm nằm trên đường thẳng $y = 2$.



c.

Số phức z có phần thực thuộc đoạn$[-1;2]$, phần ảo thuộc đoạn $[-1;3]$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $a \in [-1;2]$ và $b \in [-1;3]$.

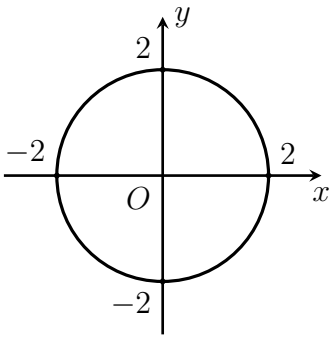
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$ và $y = 3$, kể cả các điểm nằm trên bốn đường thẳng này.



d.

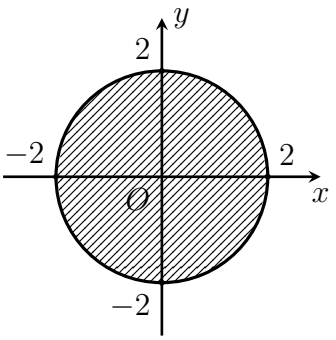
Số phức z có mô-đun $|z| = 2$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $\sqrt{a^2+b^2} = 2$ hay $a^2+b^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $x^2+y^2 = 4$ (đường tròn tâm O, bán kính 2).



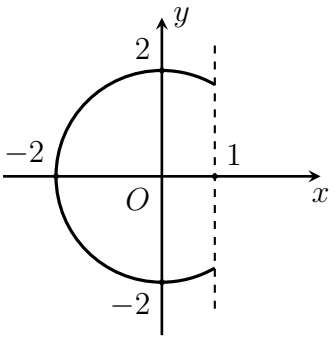
e.

Số phức z có mô-đun $|z| \leq 2$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $\sqrt{a^2+b^2} \leq 2$ hay $a^2+b^2 \leq 4$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình tròn tâm O, bán kính 2 (gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn).



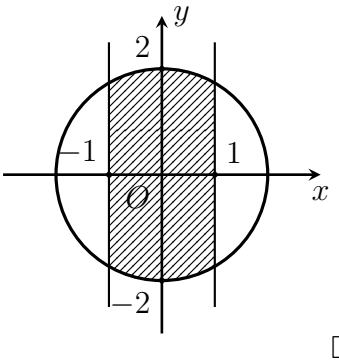
f.

Số phức z có mô-đun $|z| = 2$ và phần thực nhỏ hơn 1 được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $\sqrt{a^2+b^2} = 2$ hay $a^2+b^2 = 4$ và $a < 1$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là cung tròn tâm O, bán kính 2 từ điểm $(1;\sqrt{3})$ đến điểm $(1;-\sqrt{3})$ (như hình vẽ), không gồm hai đầu mút.



g.

Số phức z có mô-đun $|z| \leq 2$ và phần thực thuộc đoạn $[-1;1]$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ với $\sqrt{a^2+b^2} \leq 2$ hay $a^2+b^2 \leq 4$ và $a \in [-1;1]$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là phần gạch chéo ở hình bên, kể cả các điểm nằm trên hai cung tròn và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.



□

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 2-2i$, $b = -1+i$, $c = 5+mi$ $(m \in \mathbb{R})$.

a. Tìm số phức d được biểu diễn bởi điểm D;

b. Xác định m sao cho ABCD là hình chữ nhật.

Lời giải.

a. Theo đề bài, ta có $A(2;-2)$, $B(-1;1)$, $C(5;m)$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Suy ra $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = 8 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = m-3. \end{cases}$
Vậy số phức $d = 8 + (m-3)i$.

b. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;3)$, $\overrightarrow{AD} = (6;m-1)$.
$ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
$\Leftrightarrow -3 \cdot 6 + 3 \cdot (m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 7$.

□

Bài 10. Cho A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức $a = -1-i$, $b = i$, $c = 1+ki$ $(k \in \mathbb{R})$. Xác định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $A(-1;-1)$, $B(0;1)$, $C(1;k)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;k+1)$.
Vậy A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{2}{1}=\dfrac{k+1}{2}\Leftrightarrow k=3$. □

Bài 11. Cho số phức $z=m+(m-3)i$, $m\in\mathbb{R}$.

a. Tìm m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng $y=-x$;

b. Tìm m để điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn $x^2+y^2=5$;

c. Tìm m để khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức đến gốc tọa độ là nhỏ nhất.

Lời giải.

a. Gọi $M(m;m-3)$ là điểm biểu diễn số phức $z=m+(m-3)i$.
M nằm trên đường thẳng $y=-x$ khi và chỉ khi $m-3=-m\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

b. M nằm trên đường tròn $x^2+y^2=5$ khi và chỉ khi $m^2+(m-3)^2=5$.
$\Leftrightarrow 2m^2-6m+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2\end{array}\right.$.

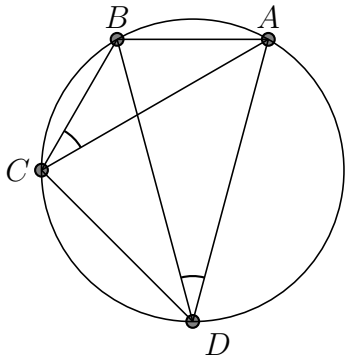
c. Ta có $OM=\sqrt{m^2+(m-3)^2}=\sqrt{2m^2-6m+9}=\sqrt{2\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}$.
Vậy $OM_{min}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}$ khi $m=\dfrac{3}{2}$.

□

Bài 12. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số $4+(3+\sqrt{3})i$, $2+(3+\sqrt{3})i$, $1+3i$, $3+i$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $A(4;3+\sqrt{3})$, $B(2;3+\sqrt{3})$, $C(1;3)$, $D(3;1)$.
Suy ra
$\overrightarrow{CA}=(3;\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CB}=(1;\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DA}=(1;2+\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DB}=(-1;2+\sqrt{3})$.
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=6$,
$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=-1+4+4\sqrt{3}+3=6+4\sqrt{3}$,
$\left|\overrightarrow{DA}\right|=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$,
$\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{(-1)^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.



Vậy ta có

$$\cos\widehat{ACB}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{6}{2\sqrt{3}\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\widehat{ADB}=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB}\right|}=\frac{6+4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

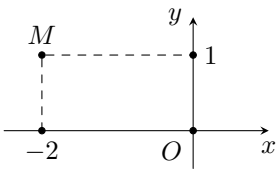
Do đó tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=30^\circ$ nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ vận nhận biết

Câu 1. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức nào?

A. $z = 1 + 2i$. **B.** $z = 1 - 2i$. **C.** $z = -2 + i$. **D.** $z = 2 + i$.



Lời giải.

Ta có $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn của số phức có phần thực bằng -2 và phần ảo bằng 1.

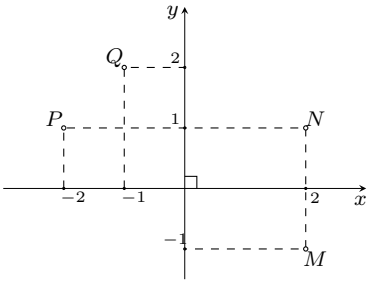
Suy ra điểm biểu diễn của M là số phức $z = -2 + i$.

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$

A. N. **B.** P. **C.** M. **D.** Q.



Lời giải.

Số phức $z = -1 + 2i$ có phần thực -1, phần ảo 2 nên có điểm biểu diễn tọa độ $(-1;2)$ chính là Q.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1;-2)$?

A. $-1 - 2i$. **B.** $1 + 2i$. **C.** $1 - 2i$. **D.** $-2 + i$.

Lời giải.

$M(1;-2)$ là điểm biểu diễn cho số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -2, tức là $1 - 2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z} = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực bằng -3, phần ảo bằng 2. **B.** Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2.

C. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2. **D.** Phần thực bằng -3, phần ảo bằng -2.

Lời giải.

Vì $\overline{z} = 3 + 2i \Rightarrow z = 3 - 2i$. Do đó số phức z có phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là

A. 1 và 2. **B.** 1 và i. **C.** 1 và $2i$. **D.** 2 và 1.

Lời giải.

Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

A. $\overline{z} = 3 - 2i$. **B.** $\overline{z} = 3 + 2i$. **C.** $\overline{z} = -2 - 3i$. **D.** $\overline{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Do định nghĩa số phức liên hợp nên số phức liên hợp của $z = 2 - 3i$ là $\overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Số phức liên hợp của $z = 4 + 3i$ là

A. $\overline{z} = -3 + 4i$. **B.** $\overline{z} = 4 - 3i$. **C.** $\overline{z} = 3 + 4i$. **D.** $\overline{z} = 3 - 4i$.

Lời giải.

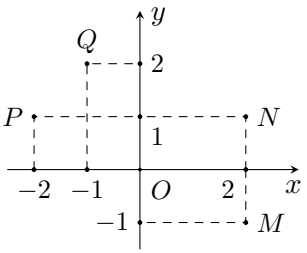
Số phức liên hợp của $z = 4 + 3i$ là $\overline{z} = 4 - 3i$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

A. N. **B.** P. **C.** M. **D.** Q.



Lời giải.

Vì $z = -1 + 2i$ nên điểm biểu diễn của số phức z có tọa độ $(-1; 2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tìm phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$.

A. Phần thực là 1, phần ảo là -1. **B.** Phần thực là 1, phần ảo là $-i$.

C. Phần thực là 1, phần ảo là 1. **D.** Phần thực là 1, phần ảo là i.

Lời giải.

$\overline{z} = 1 - i$, phần thực bằng 1, phần ảo bằng -1.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức $z = 5 - 8i$.

A. 8. **B.** $-8i$. **C.** 5. **D.** -8.

Lời giải.

Theo sách giáo khoa ta thấy z có phần ảo là -8.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tìm phần ảo của số phức $z = 8 - 12i$.

A. -12. **B.** 18. **C.** 12. **D.** $-12i$.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 8 - 12i$ là -12.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho số phức $z = 2018 - 2017i$. Điểm M biểu diễn của số phức liên hợp của z là

A. $M(-2018; 2017)$. **B.** $M(2018; -2017)$. **C.** $M(-2018; -2017)$. **D.** $M(2018; 2017)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 2018 - 2017i$ là $\overline{z} = 2018 + 2017i$.

Suy ra điểm biểu diễn của $\overline{z}$ là $M(2018; 2017)$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{5}$. **B.** $|z| = \sqrt{13}$. **C.** $|z| = 5$. **D.** $|z| = 13$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Tính mô-đun của số phức z, biết rằng z vừa là số thực vừa là số thuần ảo.

A. $|z| = 1$. **B.** $|z| = 0$.

C. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. **D.** $|z| = i$.

Lời giải.

Do z vừa là số thực vừa là số thuần ảo nên $z = 0$.

Vậy $|z| = |0| = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Điểm nào sau đây là biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$?

A. $M(2; -3)$. **B.** $M(-2; -3)$. **C.** $M(-2; 3)$. **D.** $M(2; 3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 2 - 3i$ là $M(2; -3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tìm số phức liên hợp của của số $z = 5 + i$.

A. $\overline{z} = 5 - i$. **B.** $\overline{z} = -5 - i$. **C.** $\overline{z} = 5 + i$. **D.** $\overline{z} = -5 + i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của của số $a + bi$ là $a - bi$. Do đó $\overline{z} = 5 - i$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$.

B. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là -3.

C. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là $3i$.

D. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là 3.

Lời giải.

Một số phức $z = a + bi$ thì a là phần thực, b là phần ảo và i là đơn vị ảo.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tính mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Số phức liên hợp của số phức $z = 6 - 4i$ là

A. $\bar{z} = -6 + 4i$. **B.** $\bar{z} = 4 + 6i$. **C.** $\bar{z} = 6 + 4i$. **D.** $\bar{z} = -6 - 4i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $6 - 4i$ là $6 + 4i$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Mô-đun của số phức $z = 3 - 2i$ bằng

A. 1. **B**. 13. **C**. $\sqrt{13}$. **D**. 5.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 2i$ có mô-đun là $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $|z| = \sqrt{a + b}$ là mô-đun của z. **B**. $\overline{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z.

C. a là phần thực của z. **D**. b là phần ảo của z.

Lời giải.

Theo định nghĩa có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy $|z| = \sqrt{a + b}$ là mô-đun của z là mệnh đề sai.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho số phức $z = 2 + i$. Số phức liên hợp $\overline{z}$ có phần thực, phần ảo lần lượt là

A. 2 và 1. **B**. -2 và -1. **C**. -2 và 1. **D**. 2 và -1.

Lời giải.

$z = 2 + i \Rightarrow \overline{z} = 2 - i$. Vậy $\overline{z}$ có phần thực, phần ảo lần lượt là 2 và -1.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 - \mathrm{i}$ là

A. 2. **B**. -1. **C**. -2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có phần thực của z bằng 3 và phần ảo của z bằng -1. Do đó tổng phần thực và phần ảo là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tìm điểm M biểu diễn số phức $z = i - 2$.

A. $M = (1; -2)$. **B**. $M = (2; 1)$. **C**. $M = (2; -1)$. **D**. $M = (-2; 1)$.

Lời giải.

Viết lại $z = -2 + i$. Từ đó điểm biểu diễn z là $M(-2; 1)$.

Chọn đáp án D □

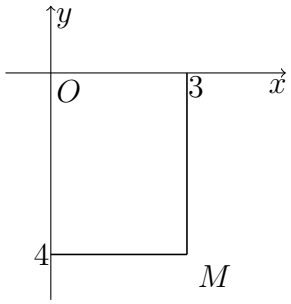
Câu 25. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta được số phức $z = 3 - 4i$. Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho số phức $z = 4 - 3i$. Điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng phức là

A. $M(4; 3)$. **B**. $M(-4; 3)$. **C**. $M(4; -3)$. **D**. $M(-3; 4)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng phức là $M(4;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z=-3+2i$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -4. **D.** -7.

Lời giải.

Ta có $a=-3, b=2$ nên $a+2b=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Số phức z thỏa mãn $\overline{z}=-3-2i$ là

A. $z=3+2i$. **B.** $z=-3-2i$. **C.** $z=-3+2i$. **D.** $z=3-2i$.

Lời giải.

Dễ thấy ngay $z=\overline{\overline{z}}=\overline{-3-2i}=-3+2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Mô-đun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** 5. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Điểm biểu diễn của các số phức $z=7+bi$ với $b\in\mathbb{R}$ nằm trên đường thẳng có phương trình là

A. $y=x+7$. **B.** $y=7$. **C.** $x=7$. **D.** $y=x$.

Lời giải.

Các điểm biểu diễn của các số phức $z=7+bi, b\in\mathbb{R}$ có tọa độ $M_b=(7;b), b\in\mathbb{R}$. Tập hợp các điểm M_b là đường thẳng $x=7$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các điểm $A(4;0)$, $B(1;4)$ và $C(1;-1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết rằng G là điểm biểu diễn số phức z. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $z=3-\dfrac{3}{2}i$. **B.** $z=3+\dfrac{3}{2}i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=2+i$.

Lời giải.

G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $G\left(\dfrac{4+1+1}{3};\dfrac{0+4+(-1)}{3}\right)=(2;1)$.

Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $z=2+i$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho các số phức $z_1=3i$, $z_2=-1-3i$ và $z_3=m-2i$. Tập giá trị của tham số m để số phức z_3 có mô-đun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

A. $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **B.** $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

C. $\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} |z_3| < |z_1| \\ |z_3| < |z_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4 < 9 \\ m^2+4 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}.$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho số phức $z = 3 - 5i$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của z. Tính $S = a + b$.

A. $S = -8$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = -2$.

Lời giải.

Ta có $a = 3, b = -5 \Rightarrow S = a + b = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho số phức $z = 7 - 5i$. Tìm phần thực a của z.

A. $a = -7$. **B.** $a = 5$. **C.** $a = -5$. **D.** $a = 7$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ có phần thực là a nên số phức $z = 7 - 5i$ có phần thực là 7.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 4 - 3i + 2z$. Số phức liên hợp của số phức z là

A. $\bar{z} = 2 + i$. **B.** $\bar{z} = -2 + i$. **C.** $\bar{z} = -2 - i$. **D.** $\bar{z} = 2 - i$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$.

Ta có: $(1 + 2i)z = 4 - 3i + 2z \Leftrightarrow (-1 + 2i)z = 4 - 3i \Leftrightarrow z = -2 - i$.

Vậy $\bar{z} = -2 + i$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho số phức $z = -3 - 2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng

A. -1. **B.** $-i$. **C.** -5. **D.** $-5i$.

Lời giải.

Số phức $z = -3 - 2i$ có phần thực bằng -3, phần ảo bằng -2. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z là -5.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tính mô-đun của số phức $\bar{z}$.

A. $|\bar{z}| = a^2 + b^2$. **B.** $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. **C.** $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 - b^2}$. **D.** $|\bar{z}| = \sqrt{a + b}$.

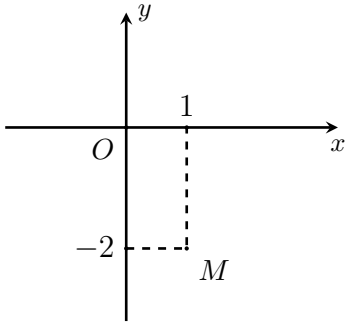
Lời giải.

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức.



A. Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$. **B**. Phần thực là -2 và phần ảo là 1.
C. Phần thực là -2 và phần ảo là i. **D**. Phần thực là 1 và phần ảo là -2.

Lời giải.

Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là -2.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là
A. 2. **B**. 3. **C**. $3i$. **D**. -3.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Tính mô-đun của số phức $z = 4 - 3i$.
A. $|z| = 7$. **B**. $|z| = \sqrt{7}$. **C**. $|z| = 5$. **D**. $|z| = 25$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là $(-2; 9)$.
A. $z = -2i + 9i$. **B**. $z = -2i + 9$. **C**. $z = -2x + 9yi$. **D**. $z = -2 + 9i$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ là $(a; b)$, với a, b là số thực.
Chọn đáp án D □

Câu 42. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-5i| = 6$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là
A. $I(-2; 5)$ và $R = 36$. **B**. $I(-2; 5)$ và $R = 6$. **C**. $I(2; -5)$ và $R = 36$. **D**. $I(2; -5)$ và $R = 6$.

Lời giải.

Gọi $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có $|z + 2 - 5i| = 6 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 36$.
Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn có tâm $I(-2; 5)$ và bán kính $R = 6$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Số phức liên hợp của số phức $z = 7i + 2$ là
A. $\overline{z} = 7i - 2$. **B**. $\overline{z} = 2 - 7i$. **C**. $\overline{z} = -2 - 7i$. **D**. $\overline{z} = 2 + 7i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Mô-đun của số phức $z = a - 2i$ là
A. $|z| = \sqrt{a^2 + 4}$. **B**. $|z| = \sqrt{a^2 - 4}$. **C**. $|z| = z + 2$. **D**. $|z| = \sqrt{a + 2}$.

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{a^2 + (-2)^2} = \sqrt{a^2 + 4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 5 - 4i$.

A. Phần thực là 5, phần ảo là $4i$.
B. Phần thực là 5, phần ảo là $-4i$.
C. Phần thực là 5, phần ảo là -4.
D. Phần thực là 5, phần ảo là 4.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực là a và phần ảo là b.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho số phức $z = -4 - 6i$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Tung độ của điểm M là

A. 4. **B**. -6. **C**. 6. **D**. -4.

Lời giải.

Có $z = -4 - 6i \Rightarrow \overline{z} = -4 + 6i$, suy ra điểm biểu diễn của $\overline{z}$ là $M(-4; 6)$.
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho số phức $z = 7 - i\sqrt{5}$. Phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là

A. 7 và $\sqrt{5}$. **B**. -7 và $\sqrt{5}$. **C**. 7 và $i\sqrt{5}$. **D**. 7 và $-\sqrt{5}$.

Lời giải.

Có $\overline{z} = 7 + i\sqrt{5}$, có phần thực là 7, phần ảo là $\sqrt{5}$.
Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ được gọi là số thuần ảo (hay số ảo) khi $a = 0$.
B. Số i được gọi là đơn vị ảo.
C. Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0.
D. Số 0 không phải là số ảo.

Lời giải.

Số 0 vừa là số thực, vừa là số thuần ảo.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Phần thực của số phức $z = 3 + 2i$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

Phần thực của số phức $3 + 2i$ là 3.
Chọn đáp án C □

Câu 50. Số phức nào sau đây là số thuần ảo?

A. $z = 3i$. **B**. $z = \sqrt{3} + i$. **C**. $z = -2 + 3i$. **D**. $z = -2$.

Lời giải.

Vì $z = 3i$ có phần thực bằng 0 và phần ảo bằng $3 \neq 0$ nên $z = 3i$ là số thuần ảo.
Chọn đáp án A □

Câu 51. Điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{1}{2 - 3i}$ là

A. $\left(\dfrac{2}{13}; \dfrac{3}{13}\right)$. **B**. $(4; -1)$. **C**. $(2; -3)$. **D**. $(3; -2)$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{1}{2-3i} = \dfrac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2+3i}{13} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$. Suy ra điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$ là $\left(\dfrac{2}{13}; \dfrac{3}{13}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Trong mặt phẳng phức, cho hai điểm $A(-3;5)$, $B(2;4)$. Trung điểm M của đoạn AB là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2}i$. **B.** $z = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **C.** $z = 9 - i$. **D.** $z = -1 + 9i$.

Lời giải.

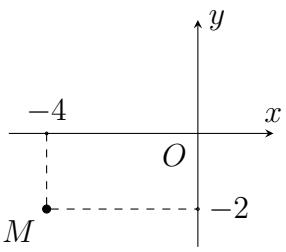
Tọa độ điểm M là $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$. Suy ra, điểm M biểu diễn số phức $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 53.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Số phức liên hợp của iz là

A. $2 + 4i$. **B.** $-4 + 2i$. **C.** $-4 - 2i$. **D.** $2 - 4i$.



Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy $z = -4 - 2i \Rightarrow iz = 2 - 4i \Rightarrow \overline{iz} = 2 + 4i$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. $z = \sqrt{2}$. **B.** $z = -1 + i$. **C.** $z = \sqrt{2}i$. **D.** $z = \sqrt{2} + i$.

Lời giải.

Số thuần ảo là số có dạng $z = bi$, $b \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Số phức $z = 12 - 3i$ có phần thực và phần ảo lần lượt bằng

A. -12 và 3. **B.** 12 và 3. **C.** -3 và 12. **D.** 12 và -3.

Lời giải.

Số phức $z = 12 - 3i$ có phần thực là 12 và phần ảo là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong mặt phẳng Oxy, tìm điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$.

A. $Q(-2;3)$. **B.** $P(2;-3)$. **C.** $N(-2;-3)$. **D.** $M(2;3)$.

Lời giải.

Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn $P(2;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho số phức $z = 2 + i$. Tìm số phức liên hợp của z.

A. $\overline{z} = -2 - i$. **B.** $\overline{z} = 1 - 2i$. **C.** $\overline{z} = 2 - i$. **D.** $\overline{z} = 1 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = 2 - i$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là $M(3;-4)$.

A. $z=-4+3i$. **B.** $z=3+4i$. **C.** $z=4+3i$. **D.** $z=3-4i$.

Lời giải.

Do $M(3;-4)$ nên phần thực bằng 3, phần ảo bằng -4, suy ra $z=3-4i$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho số phức $z=4-3i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy là M. Tính độ dài OM.

A. 5. **B.** 25. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $OM=|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho số phức $z=2+i$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức liên hợp của số phức z.

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(2;-1)$.

Lời giải.

Dễ thấy $\bar{z}=2-i$, điểm biểu diễn tương ứng có tọa độ là $(2;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Tìm phần ảo của số phức $z=3-2i$.

A. $\text{Im}z=-2i$. **B.** $\text{Im}z=-2$. **C.** $\text{Im}z=2$. **D.** $\text{Im}z=3$.

Lời giải.

Dễ thấy $\text{Im}z=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Mô-đun của số phức $w=a+2i$ với $a\in\mathbb{R}$ bằng bao nhiêu?

A. $|w|=\sqrt{a+2}$. **B.** $|w|=\sqrt{a^2-4}$. **C.** $|w|=\sqrt{a^2+4}$. **D.** $|w|=a^2+4$.

Lời giải.

Số phức $w=a+2i$ có mô-đun là $|w|=\sqrt{a^2+4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=1-3i$.

A. 1 và $-3i$. **B.** 1 và -3. **C.** -3 và 1. **D.** 1 và 3.

Lời giải.

Phần thực là 1 và phần ảo là -3.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho số phức $z=2-i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Phần thực bằng 2. **B.** Phần thực bằng -1.

C. Phần thực bằng 1. **D.** Phần ảo bằng 2.

Lời giải.

Số phức $z=2-i$ có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng -1.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ điểm M biểu diễn số phức $z=4-i$ là

A. $M(4;1)$. **B.** $M(-4;1)$. **C.** $M(4;-1)$. **D.** $M(-4;-1)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 4 - i$ là $M(4; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp $\overline{z}$ của số phức z là

A. $\overline{z} = -3 + 2i$. **B.** $\overline{z} = 2 + 3i$. **C.** $\overline{z} = -2 + 3i$. **D.** $\overline{z} = -2 - 3i$.

Lời giải.

$z = 2 - 3i \Rightarrow \overline{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$ trên mặt phẳng Oxy là điểm nào sau đây?

A. $(-2; 3)$. **B.** $(-3; 2)$. **C.** $(2; 3)$. **D.** $(2; -3)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức $z = 2 - 3i$ trong mặt phẳng Oxy là $(2; -3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(-1; 5)$. Tính mô-đun của z.

A. $|z| = \sqrt{26}$. **B.** $|z| = 4$. **C.** $|z| = 2$. **D.** $|z| = \sqrt{24}$.

Lời giải.

Điểm $M(-1; 5)$ biểu diễn của số phức $z = -1 + 5i$.

Vậy mô-đun của z là $|z| = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1 - 2i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

A. $E(2; -1)$. **B.** $B(-1; 2)$. **C.** $A(1; 2)$. **D.** $F(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(1 - 2i) = 2 + i \Rightarrow \overline{z} = 2 - i$ nên điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ là $E(2; -1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho số phức $z = 6 + 17i$. Điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là

A. $M(-6; -17)$. **B.** $M(-17; -6)$. **C.** $M(17; 6)$. **D.** $M(6; 17)$.

Lời giải.

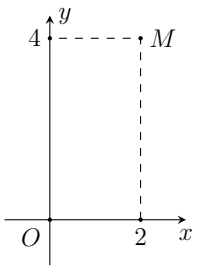
Điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là $M(6; 17)$.

Chọn đáp án D □

Câu 71.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn cho số phức nào trong 4 số phức được liệt kê dưới đây?

A. $z = 4 - 2i$. **B.** $z = 2 + 4i$. **C.** $z = 4 + 2i$. **D.** $z = 2 - 4i$.



Lời giải.

Ta có tọa độ $M(2; 4)$, suy ra số phức biểu diễn bởi M là $z = 2 + 4i$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Cho số phức $z = 6 - 7i$. Tìm số phức liên hợp của số phức z.

A. $\overline{z} = -6 + 7i$. **B.** $\overline{z} = -6 - 7i$. **C.** $\overline{z} = 6 + 7i$. **D.** $\overline{z} = -i$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 6 + 7i$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho số phức $z = 1 + 3i$. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\overline{z}$. Tọa độ điểm M là

A. $M(-1;-3)$. **B.** $M(1;3)$. **C.** $M(1;-3)$. **D.** $M(-1;3)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp $\overline{z} = 1 - 3i$ nên $M(1;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$.

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. **B.** Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. **D.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Lời giải.

Theo định nghĩa thì số phức $z = 3 + 2i$ có phần thực và phần ảo tương ứng là 3 và 2.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho số phức $z = a + bi$, với a, b là hai số thực. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $|z^2| = |z|^2$. **B.** $z + \overline{z} = 2bi$. **C.** $z \cdot \overline{z} = a^2 - b^2$. **D.** $z - \overline{z} = 2a$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow z^2 = a^2 + 2abi - b^2$.

Khi đó

$$\begin{aligned} |z^2| &= \sqrt{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2} \\ &= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)^2} \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 76. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - i$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_1 \cdot z_2|$.

A. $P = 85$. **B.** $P = 5$. **C.** $P = 50$. **D.** $P = 10$.

Lời giải.

Ta có $z_1 \cdot z_2 = (3 + i)(2 - i) = 7 - i \Rightarrow z_1 + z_1 \cdot z_2 = 3 + i + 7 - i = 10$.

Suy ra $P = |z_1 + z_1 \cdot z_2| = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0)$, M' là điểm biểu diễn cho số phức $\overline{z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. M' đối xứng với M qua Oy. **B.** M' đối xứng với M qua Ox.

C. M' đối xứng với M qua đường thẳng $y=x$. **D**. M' đối xứng với M qua O.

Lời giải.

Điểm M' có tọa độ $M'(a;-b)$ đối xứng với M qua Ox.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Tìm tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức $z=8-9i$.

A. $(8;9)$. **B**. $(8;-9)$. **C**. $(-9;8)$. **D**. $(8;-9i)$.

Lời giải.

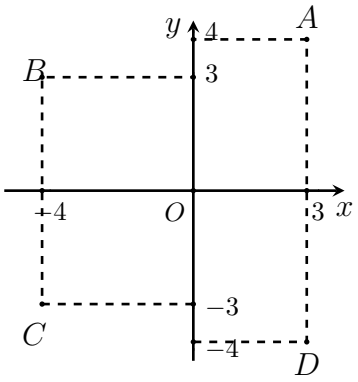
Tọa độ điểm biểu diễn số phức $z=8-9i$ là $(8;-9)$.

Chọn đáp án B □

Câu 79.

Trong mặt phẳng tọa độ (hình vẽ bên), số phức $z=3-4i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D?

A. Điểm A. **B**. Điểm B. **C**. Điểm C. **D**. Điểm D.

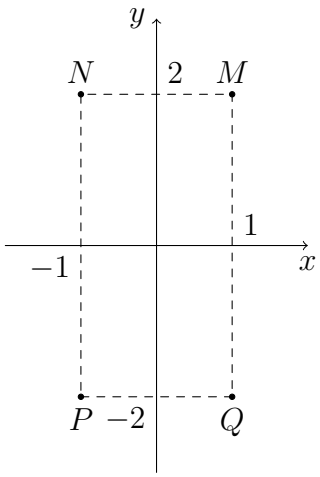


Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$ là điểm $D(3;-4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Giả sử M, N, P, Q được cho ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 trên mặt phẳng tọa độ.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2=2-i$.

B. Điểm Q là điểm biểu diễn số phức $z_4=-1+2i$.

C. Điểm P là điểm biểu diễn số phức $z_3=-1-2i$.

D. Điểm M là điểm biểu diễn số phức $z_1=2+i$.

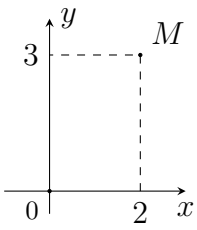
Lời giải.

M, N, P, Q được cho ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 nên $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -1 + 2i$; $z_3 = -1 - 2i$; $z_4 = 1 - 2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 81.

Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức $\overline{z}$.



Số phức z bằng

A. $2 + 3i$. **B.** $3 + 2i$.

C. $2 - 3i$. **D.** $3 - 2i$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy điểm M biểu diễn của số phức $2 + 3i$, do đó từ giả thiết suy ra $\overline{z} = 2 + 3i$.

Vậy, $z = 2 - 3i$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Tìm phần thực của số phức $z = 1 - 2i$.

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Số phức $z = 2 - 3i$ có số phức liên hợp là

A. $3 - 2i$. **B.** $2 + 3i$. **C.** $-2 + 3i$. **D.** $3 + 2i$.

Lời giải.

$\overline{z} = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Cho số phức $z = 5 + 8i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z} = 5 + 8i$. **B.** $\overline{z} = -5 - 8i$. **C.** $\overline{z} = -5 + 8i$. **D.** $\overline{z} = 5 - 8i$.

Lời giải.

Ta có $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Suy ra số phức liên hợp của $z = 5 + 8i$ là $\overline{z} = 5 - 8i$

Chọn đáp án D □

Câu 85. Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ nằm trên đường thẳng có phương trình là

A. $y = 7$. **B.** $x = 7$. **C.** $y = x + 7$. **D.** $y = x$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ là $M(7; b)$. Dễ thấy các điểm $M(7; b)$ nằm trên đường thẳng $x = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hai số thực x, y thỏa mãn phương trình $x + 2i = 3 + 4yi$. Khi đó giá trị của x, y là

A. $x = 3, y = 2$. **B.** $x = 3i, y = \dfrac{1}{2}$. **C.** $x = 3, y = \dfrac{1}{2}$. **D.** $x = 3, y = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $x+2i=3+4yi \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 87. Phần thực và phần ảo của số phức $z=1+2i$ lần lượt là

A. 2 và 1. **B.** 1 và $2i$. **C.** 1 và 2. **D.** 1 và i.

Lời giải.

Số phức $z=1+2i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là 1 và 2.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức

A. $\overline{z}=-a+bi$. **B.** $\overline{z}=b-ai$. **C.** $\overline{z}=-a-bi$. **D.** $\overline{z}=a-bi$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Phần ảo của số phức $z=2-3i$ là

A. $-3i$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $3i$.

Lời giải.

Phần thực của z bằng 2 và phần ảo của z bằng -3.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho hai số phức $z_1=-1+2i, z_2=-1-2i$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. **C.** -6. **D.** 4.

Lời giải.

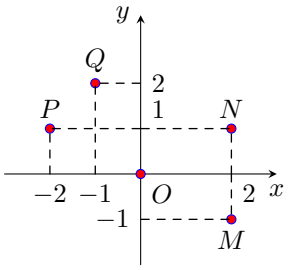
Ta có $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$; $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

$|z_1|^2+|z_2|^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=10$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Điểm nào trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

A. N. **B.** P. **C.** M. **D.** Q.



Lời giải.

Số phức $z=-1+2i$ có điểm biểu diễn là điểm $Q(-1;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=3+4i$. Tìm điểm M biểu diễn số phức $z_1.z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $M(-2;11)$. **B.** $M(-2;-11)$. **C.** $M(11;-2)$. **D.** $M(11;2)$.

Lời giải.

Ta có $z_1.z_2=(1-2i)(3+4i)=11-2i$.

Vậy $M(11;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{5}$. **B.** $|z| = 5$. **C.** $|z| = 2$. **D.** $|z| = 3$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z| = \sqrt{34}$. **B.** $|z| = 34$. **C.** $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 95. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

A. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng -2. **B.** Phần thực bằng 3, phần ảo bằng $-2i$.

C. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 2. **D.** Phần thực bằng -3, phần ảo bằng -2.

Lời giải.

Với số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực là a, phần ảo là b.

Chọn đáp án A □

Câu 96.

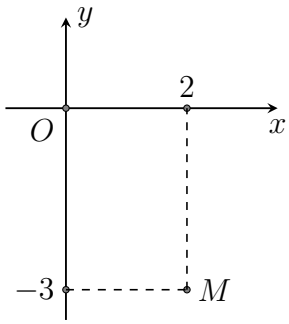
Điểm M trong hình bên là biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$.

B. Phần thực là -3 và phần ảo là 2.

C. Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.

D. Phần thực là 2 và phần ảo là -3.



Lời giải.

Điểm $M(a; b)$ trong hệ trục Oxy là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$. Do đó, điểm $M(2; -3)$ biểu diễn cho số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2 và phần ảo là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Số phức liên hợp của $z = 2016 + 2017i$ là số phức nào?

A. $-2016 - 2017i$. **B.** $-2016 + 2017i$. **C.** $2017 - 2016i$. **D.** $2016 - 2017i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 2016 - 2017i$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z} = -2 - 3i$. **B.** $\overline{z} = -2 + 3i$. **C.** $\overline{z} = 2 + 3i$. **D.** $\overline{z} = 2 - 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $2 - 3i$ là $2 + 3i$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$. **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. **D.** Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Lời giải.

Số phức $z = 3 - 4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Mô-đun của số phức $z = 2 + 3i$ là

A. $\sqrt{5}$. **B**. 5. **C**. $\sqrt{13}$. **D**. 13.

Lời giải.

$z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. C	5. A	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. A	12. D	13. B	14. B	15. A	16. A	17. B	18. B	19. C	20. C
21. A	22. D	23. A	24. D	25. C	26. C	27. A	28. C	29. C	30. C
31. D	32. B	33. D	34. D	35. B	36. C	37. B	38. D	39. D	40. C
41. D	42. B	43. B	44. A	45. C	46. C	47. A	48. D	49. C	50. A
51. A	52. A	53. A	54. C	55. D	56. B	57. C	58. D	59. A	60. D
61. B	62. C	63. B	64. A	65. C	66. B	67. D	68. A	69. A	70. D
71. B	72. C	73. C	74. D	75. A	76. D	77. B	78. B	79. D	80. C
81. C	82. C	83. B	84. D	85. B	86. C	87. C	88. D	89. C	90. B
91. D	92. C	93. A	94. A	95. A	96. D	97. D	98. C	99. B	100. C

2 Mức độ vận thông hiểu

Câu 1. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0,\ b=2$. **B.** $a=\dfrac{1}{2},\ b=1$. **C.** $a=0,\ b=1$. **D.** $a=1,\ b=2$.

Lời giải.

Ta có $2a+(b+i)i=1+2i \Leftrightarrow (2a-1)+bi=1+2i \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(3-i)=4x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=3;y=-1$. **B.** $x=\dfrac{2}{3};y=-1$. **C.** $x=3;y=-3$. **D.** $x=-3;y=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x+2yi)+(3-i)=4x-3i \Leftrightarrow (3x+3)+(2y-1)i=4x-3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3=4x \\ 2y-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, $|z-(2-3i)|=|(x-2)+(y+3)\,i|=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$.

Do đó $|z-(2-3i)|\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\le 2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2\le 4$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z nằm trên hình tròn có bán kính $r=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho số phức $z=2+5i$. Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(5;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-2;5)$. **D.** $(2;-5)$.

Lời giải.

Phương pháp: Số phức $z=a+bi,(a;b\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn số phức trong mặt phẳng Oxy là $(a;b)$.

Cách giải: Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là $(2;5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $(1-\sqrt{3}i)^2z=4-3i$. Môđun của z bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $z=\dfrac{4-3i}{(1-\sqrt{3}i)^2}=\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}i$

Suy ra $|z|=\left|\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\dfrac{5}{4}$

Cách 2: Ta có $z=\dfrac{4-3i}{(1-\sqrt{3}i)^2}$ Suy ra $|z|=\dfrac{|4-3i|}{(1-\sqrt{3}i)^2|}=\dfrac{|4-3i|}{|-2-2\sqrt{3}i|}=\dfrac{5}{4}$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho số phức $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1;4)$. **B**. $(-1;4)$. **C**. $(-1;-4)$. **D**. $(1;-4)$.

Lời giải.

Ta có

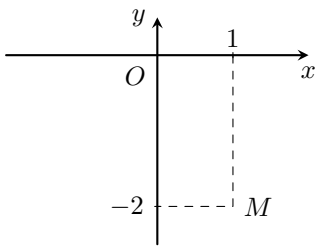
$$\begin{aligned} z=\frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} &= \frac{(8-3)-(2+12)i}{3+2i} \\ &= \frac{5-14i}{3+2i} \\ &= \frac{(5-14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{(15-28)-(10+42)i}{9+4} \\ &= \frac{-13-52i}{13}=-1-4i. \end{aligned}$$

Vậy điểm biểu diễn số phức $z$trên mặt phẳng Oxy là $M(-1;-4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 7.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là -2 và phần ảo là i.

B. Phần thực là 1 và phần ảo là -2.

C. Phần thực là 1 và phần ảo là $-2i$.

D. Phần thực là -2 và phần ảo là 1.

Lời giải.

Điểm M có tọa độ $M(1;-2)$ nên $z=1-2i$.

Vậy phần thực là 1 và phần ảo là -2.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho 4 điểm M,N,P,Q là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $-i, 2+i, 5, 1+4i$. Hỏi điểm nào là trọng tâm của tam giác tạo bởi ba điểm còn lại?

A. M. **B**. N. **C**. P. **D**. Q.

Lời giải.

Ta có: $M(0;-1), N(2;1), P(5;0), Q(1;4)$ nên điểm N là trọng tâm của tam giác MPQ.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|z+i|$ là

A. một đường thẳng. **B**. một đường tròn. **C**. một đường elip. **D**. một đoạn thẳng.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

$|z-i|=|z+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|x+(y+1)i| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\omega=z+2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x-4y+3=0$. **B.** $x+3y+4=0$. **C.** $x-3y+4=0$. **D.** $-x+3y+4=0$.

Lời giải.

Đặt $\omega=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó, $z=\omega-2i=x+(y-2)i$. Suy ra $|z-i|=|z-1+2i|\Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|x-1+yi|$, hay tương đương với $x^2+(y-3)^2=(x-1)^2+y^2\Leftrightarrow x-3y+4=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}-3+i=0$. Môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 4.

Lời giải.

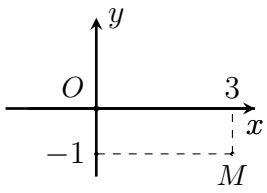
Ta có $|z|=|\overline{z}|=|3-i|=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z=1-3i$. **B.** $z=-1+3i$. **C.** $z=3+i$. **D.** $z=3-i$.



Lời giải.

Điểm $M(3;-1)$ là biểu diễn cho số phức $z=3-i$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho số phức $z=2i-8$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=2i+8$. **B.** $\overline{z}=-2i+8$. **C.** $\overline{z}=2i+8$. **D.** $\overline{z}=-2i-8$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z}=-2i-8$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong mặt phẳng phức cho các điểm $A(-4;1)$, $B(1;3)$, $C(-6;0)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $-3+\dfrac{4}{3}i$. **B.** $3+\dfrac{4}{3}i$. **C.** $3-\dfrac{4}{3}i$. **D.** $-3-\dfrac{4}{3}i$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G=-3 \\ y_G=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(-3;\dfrac{4}{3}\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3+\dfrac{4}{3}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho số phức $z=\sqrt{7}-3i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=3$. **C.** $|z|=4$. **D.** $|z|=16$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+(3)^2}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho số phức $z = 3 - 2\mathrm{i}$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + \mathrm{i}\overline{z}$.

A. $M(1;1)$. **B.** $M(1;-5)$. **C.** $M(5;-5)$. **D.** $M(5;1)$.

Lời giải.

Ta có $w = 3 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}(3 + 2\mathrm{i}) \Leftrightarrow w = 3 - 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow w = 1 + \mathrm{i}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Điểm $M(3;-1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = -1 + 3i$. **B.** $z = 1 - 3i$. **C.** $z = 3 - i$. **D.** $z = -3 + i$.

Lời giải.

Số phức $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 2$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 2 + 4i$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Tính diện tích tam giác ABC.

A. 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $A(2;0)$, $B(0;4)$, $C(2;4)$ suy ra $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 4$, $BC = 2$ suy ra tam giác ABC vuông tại C nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực x, y sao cho: $x - 1 - yi = y + (2x - 5)i$.

A. $x = 3, y = 2$. **B.** $x = 2, y = 1$. **C.** $x = -2, y = -1$. **D.** $x = -2, y = 9$.

Lời giải.

$$x - 1 - yi = y + (2x - 5)i \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 &= y \\ -y &= 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho số phức $z = a + (a - 5)\,\mathrm{i}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm a để điểm biểu diễn của số phức nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư

A. $a = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $a = \dfrac{5}{2}$. **C.** $a = 0$. **D.** $a = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $a - 5 = -a \Leftrightarrow 2a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho cho hai số phức $z = 3 + 2\mathrm{i}$ và $w = 3 - 2\mathrm{i}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $|z| > |w|$.

B. $|z| = |w|$.

C. Nếu A và B theo thứ tự là hai điểm biểu diễn của z và w trên hệ tọa độ Oxy thì $AB = |z - w|$.

D. Số phức z là số phức liên hợp của số phức w.

Lời giải.

Do $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ và $|w| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ nên $|z| = |w|$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho số phức z có số phức liên hợp là $\overline{z}$. Gọi M và M' tương ứng, lần lượt là điểm biểu diễn hình học của z và $\overline{z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng.

A. M và M' đối xứng qua trục thực. **B.** M và M' trùng nhau.

C. M và M' đối xứng qua gốc tọa độ. **D.** M và M' đối xứng qua trục ảo.

Lời giải.

Hai số phức liên hợp của nhau có phần thực giống nhau và phần ảo đối nhau nên điểm biểu diễn đối xứng nhau qua trục Ox.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm hai số thực x, y thỏa mãn $2+(5-y)i=(x-1)+5i$.

A. $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$2+(5-y)i=(x-1)+5i \Leftrightarrow \begin{cases} 2=x-1 \\ 5-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A là điểm biểu diễn số phức $z=1+2i$, B là điểm thuộc đường thẳng $y=2$ sao cho tam giác OAB cân tại O. Điểm B là điểm biểu diễn của số phức nào trong các số phức dưới đây?

A. $-3+2i$. **B.** $-1+2i$. **C.** $3+2i$. **D.** $1-2i$.

Lời giải.

$z=1+2i \Rightarrow A(1;2)$; điểm B thuộc đường thẳng $y=2 \Rightarrow B(a;2)$. Tam giác OAB cân tại $O \Leftrightarrow OA=OB \Leftrightarrow 5=a^2+4 \Leftrightarrow a=\pm 1$. Vậy điểm B biểu diễn cho số phức $z=\pm 1+2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-2+yi=-2+5i$.

A. $x=0$, $y=5$. **B.** $x=-2$, $y=5$. **C.** $x=2$, $y=5$. **D.** $x=2$, $y=-5$.

Lời giải.

Ta có $x^2-2+yi=-2+5i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=-2 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $-2+3i$, điểm B biểu diễn số phức $4-5i$. Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó, điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau

A. $3-4i$. **B.** $3+4i$. **C.** $1+i$. **D.** $1-i$.

Lời giải.

Ta có $A(-2;3)$, $B(4;-5)$. M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(1;-1)$. Vậy M biểu diễn số phức $1-i$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=(1-i)(3+2i)$.

A. $\overline{z}=-5+i$. **B.** $\overline{z}=5-i$. **C.** $\overline{z}=5+i$. **D.** $\overline{z}=-5-i$.

Lời giải.

Ta có $z=(1-i)(3+2i)=5-i$, suy ra $\overline{z}=5+i$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ, N là điểm đối xứng của M qua Oy (M, N không thuộc các trục tọa độ). Số phức ω có điểm biểu diễn lên mặt phẳng tọa độ là N. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\omega = -z$. **B**. $\omega = -\bar{z}$. **C**. $\omega = \bar{z}$. **D**. $|\omega| > |z|$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$, N là điểm đối xứng của M qua Oy. Khi đó $N(-x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $\omega = -x + yi = -(x - yi) = -\bar{z}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29.

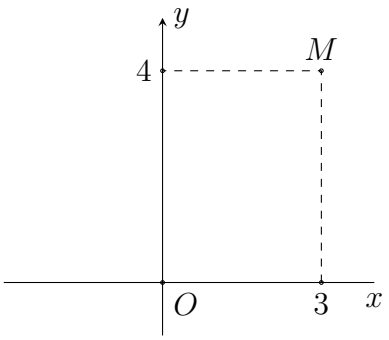
Trong mặt phẳng phức, cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Số phức z có phần ảo bằng 4 .

B. $\overline{z} = 3 - 4i$.

C. $|z| = 5$.

D. $z - \overline{z} = 6$.



Lời giải.

Ta có $z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$, do đó $z - \overline{z} = 8i$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = (1 - i)(2 + i), z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 - 3i$. Tam giác ABC là

A. Một tam giác vuông cân. **B**. Một tam giác cân (không đều).

C. Một tam giác vuông (không cân). **D**. Một tam giác đều.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 3 - i, z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 - 3i$. Điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3 lần lượt là $A(3; -1), B(1; 3), C(-1; -3)$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{(1-3)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. Tương tự $BC = 2\sqrt{10}$, $CA = 2\sqrt{5}$. Do $AB = AC (= 2\sqrt{5})$ và $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC là tam giác vuông cân.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho số phức z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$. Tìm mô-đun của số phức $\omega = 2z - 3 + \sqrt{14}$.

A. $\sqrt{24}$. **B**. $\sqrt{17}$. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Ta có phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $z = \dfrac{3 + \sqrt{11}i}{2}$ và $z = \dfrac{3 - \sqrt{11}i}{2}$.

$\Rightarrow \omega = \sqrt{14} \pm \sqrt{11}i$.

$\Rightarrow |\omega| = \sqrt{14 + 11} = \sqrt{25} = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho số phức $z = a + a^2 i$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z nằm trên đường nào?

A. Đường thẳng $y=-x+1$.
B. Đường thẳng $y=2x$.
C. Parabol $y=x^2$.
D. Parabol $y=-x^2$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn của số phức liên hợp $\bar{z}$ là $M\left(a;-a^2\right)$. Do đó điểm M thuộc $y=-x^2$.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(x+y)+(2x-y)i=3-6i$.
A. $x=-1;y=-4$.
B. $y=-1;x=4$.
C. $x=-1;y=4$.
D. $x=1;y=-4$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$.
Chọn đáp án C □

Câu 34. Mô-đun của số phức $z=m-2i$ $(m\in\mathbb{R})$ là
A. $\sqrt{m^2-2}$.
B. $\sqrt{m^2+2}$.
C. $\sqrt{m^2-4}$.
D. $\sqrt{m^2+4}$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{m^2+4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong mặt phẳng Oxy, điểm biểu diễn số phức $z=-3+4i$ là
A. $M(3;-4)$.
B. $M(-3;-4)$.
C. $M(-3;4)$.
D. $M(3;4)$.

Lời giải.

$M(-3;4)$ là điểm biểu diễn số phức $z=-3+4i$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Tìm số phức z, biết z có phần thực dương thỏa mãn $|z|=2$ và có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $y-\sqrt{3}x=0$.
A. $z=1-\sqrt{3}i$.
B. $z=-1-\sqrt{3}i$.
C. $z=1+\sqrt{3}i$.
D. $z=-1+\sqrt{3}i$.

Lời giải.

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z và M thuộc đường thẳng d: $y-\sqrt{3}x=0$.
☑ $z=1-\sqrt{3}i\Rightarrow|z|=2$ và $M(1;-\sqrt{3})\notin d$.
☑ $z=-1-\sqrt{3}i\Rightarrow|z|=2$ và $M(-1;-\sqrt{3})\in d$.
☑ $z=1+\sqrt{3}i\Rightarrow|z|=2$ và $M(1;\sqrt{3})\notin d$.
☑ $z=-1+\sqrt{3}i\Rightarrow|z|=2$ và $M(-1;\sqrt{3})\notin d$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Tìm cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)+(x-y)i=5+3i$.
A. $(x;y)=(3;2)$.
B. $(x;y)=(4;1)$.
C. $(x;y)=(1;4)$.
D. $(x;y)=(2;3)$.

Lời giải.

Ta có $(x+y)+(x-y)i=5+3i\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\Rightarrow(x;y)=(4;1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Biết rằng số phức z có mô-đun bằng 3 và phần ảo bằng -3. Tìm phần thực của số phức z.
A. 3.
B. 6.
C. 0.
D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa bài toán. Khi đó

$$\begin{cases} b=-3 \\ \sqrt{a^2+b^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a^2=9-(-3)^2=0 \end{cases} \Rightarrow a=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho số phức $z=3-2i$. Mô-đun của số phức z là

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=\sqrt{13}$. **C.** $|z|=13$. **D.** $|z|=1$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$. Mệnh đề nào dưới đây luôn đúng?

A. $z-\bar{z}=2a$. **B.** $z\bar{z}=a^2-b^2$. **C.** $z+\bar{z}=2bi$. **D.** $|z^2|=|z|^2$.

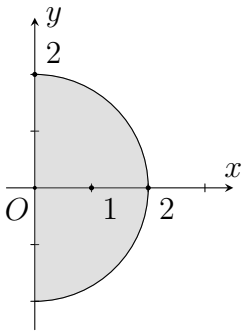
Lời giải.

Dễ thấy $|z^2|=|z|^2$ với mọi số phức z.

Chọn đáp án D □

Câu 41.

Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ là nửa hình tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=2$ (phần tô đậm, kể cả đường giới hạn) như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng?**



A. $x\geq 0$ và $|z|=\sqrt{2}$. **B.** $y\geq 0$ và $|z|=2$.

C. $x\geq 0$ và $|z|\leq 2$. **D.** $y\geq 0$ và $|z|\leq 2$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ trên ta thấy số phức z có phần thực không âm và $|z|\leq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho số phức $z=5-4i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn M là

A. $M(-5;-4)$. **B.** $M(5;-4)$. **C.** $M(5;4)$. **D.** $M(-5;4)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z}=5+4i$ suy ra $M(5;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều $|z+2-i|=2$ là

A. đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=4$. **B.** đường tròn tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=2$.

C. đường thẳng $x-y-2=0$. **D.** đường thẳng $x+y-2=0$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z+2-i|=2\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều $|z+2-i|=2$ là đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phần thực bằng 3 là đường thẳng có phương trình

A. $x=-3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

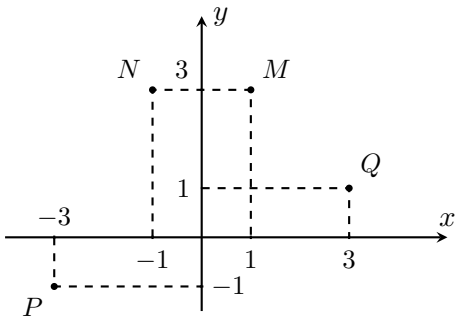
Do z có phần thực bằng 3 nên $x=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 45.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z=(1+i)(2-i)$?

A. P. **B.** M. **C.** N. **D.** Q.



Lời giải.

Ta có: $z=2-i+2i-i^2=3+i$.

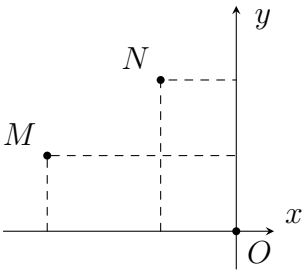
Chọn đáp án D □

Câu 46.

Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 khác 0. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|z_1+z_2|=MN$. **B.** $|z_2|=ON$.

C. $|z_1-z_2|=MN$. **D.** $|z_1|=OM$.



Lời giải.

Gọi $z_1=a_1+b_1i\Rightarrow M(a_1,b_1)$, $z_2=a_2+b_2i\Rightarrow M(a_2,b_2)$.

Ta có $|z_1+z_2|=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$.

Mà $MN=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$. Suy ra $|z_1+z_2|\neq MN$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho số phức $z=1+2i$. Điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ là

A. $M(-1;2)$. **B.** $M(-1;-2)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $M(2;1)$.

Lời giải.

$\overline{z}=1-2i$. Suy ra điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ là $M(1;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tìm các số phức z thỏa mãn điều kiện $(2+i)z=(3-2i)\overline{z}-4(1-i)$.

A. $z=3-i$. **B.** $z=-3-i$. **C.** $z=3+i$. **D.** $z=-3+i$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi \Rightarrow \overline{z}=x-yi$ với $x;\ y\in\mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&(2+i)z=(3-2i)\overline{z}-4(1-i)\\
\Leftrightarrow\ &(2+i)(x+yi)=(3-2i)(x-yi)-4(1-i)\\
\Leftrightarrow\ &2x-y+2yi+xi=3x-2y-3yi-2xi-4+4i\\
\Leftrightarrow\ &-x+y+(3x+5y)i=-4+4i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-x+y=-4\\3x+5y=4\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\\
\Rightarrow\ &z=3-i.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Gọi A và B lần lượt là điểm biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Độ dài đoạn thẳng AB là:

A. 4. **B.** $\sqrt{20}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=2+i\\z=2-i\end{array}\right. \Rightarrow A(2;1), B(2;-1)$. Vậy $AB=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho số phức $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $(\varphi\in\mathbb{R})$. Tìm mô-đun của z.

A. $|\cos\varphi|+|\sin\varphi|$. **B.** 1. **C.** $|\cos\varphi+\sin\varphi|$. **D.** $|\cos 2\varphi|$.

Lời giải.

Ta có $z=\cos\varphi+i\sin\varphi=1\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ nên $r=1$.

Vậy $|z|=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $(2+i)z+\dfrac{15-5i}{1-i}=20$.

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=7$. **C.** $|z|=\sqrt{5}$. **D.** $|z|=1$.

Lời giải.

Ta có $(2+i)z+\dfrac{15-5i}{1-i}=20 \Leftrightarrow z=3-4i \Rightarrow |z|=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2;-3)$ biểu diễn số phức z_A, điểm B biểu diễn số phức $z_B=(1+i)z_A$. Tính diện tích S của tam giác OAB.

A. $S=\dfrac{11}{2}$. **B.** $S=\dfrac{13}{2}$. **C.** $S=\dfrac{17}{2}$. **D.** $S=\dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_A=2-3i \Rightarrow z_B=5-i \Rightarrow B(5;-1)$.

Trong không gian $Oxyz$, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(2;-3;0)\\\overrightarrow{OB}=(5;-1;0)\end{cases} \Rightarrow S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]\right|=\dfrac{13}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho các số phức $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + 2i$, $z_3 = -1 - i$ được biểu diễn lần lượt bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M biểu diễn số phức

A. $z = 6i$. **B.** $z = -6i$. **C.** $z = 2$. **D.** $z = -2$.

Lời giải.

Tọa độ $A(1;3)$, $B(-2;2)$, $C(-1;-1)$. Gọi tọa độ điểm $M(x;y)$.
$\overrightarrow{AM} = (x-1;y-3)$, $\overrightarrow{AB} = (-3;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;-4)$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -3-(-2) \\ y-3 = (-1)-(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow z = 6i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{18}$. **C.** $-\dfrac{9}{4}$. **D.** $-\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Ta có $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \pm \dfrac{\sqrt{21}}{4}i$.
Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 = -\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = |\overline{z}i + 3i|$. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình

A. $6x + 4y - 5 = 0$. **B.** $6x - 4y = 0$. **C.** $6x - 4y + 5 = 0$. **D.** $6x + 4y + 5 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $|z - 2i| = |\overline{z}i + 3i| \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = y^2 + (x+3)^2 \Leftrightarrow 6x + 4y + 5 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Có bao nhiêu số thực a để số phức $z = a + 2i$ có mô-đun bằng 2?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có $|z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy có một số thực $a = 0$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $(z - \overline{z})^2$ với $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$. Chọn kết luận **đúng**.

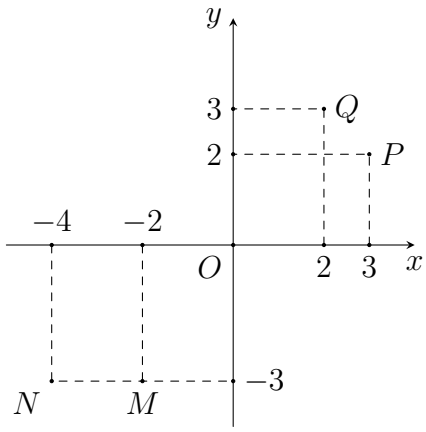
A. M thuộc tia Ox. **B.** M thuộc tia Oy.
C. M thuộc tia đối của tia Ox. **D.** M thuộc tia đối của tia Oy.

Câu 58. Gọi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1| = 1$ và $(1 + i)(\overline{z} - 1)$ có phần thực bàng 1 đồng thời z không là số thực. Khi đó ab bằng

A. $ab = 1$. **B.** $ab = 2$. **C.** $ab = -2$. **D.** $ab = -1$.

Câu 59.
Cho số phức z thoả $(1-i)z-2\overline{z}=1+7i$. Điểm nào sau đây ở hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z?

A. N. **B**. M. **C**. P. **D**. Q.



Lời giải.

Gọi số phức $z=a+bi$ với $a,\, b\in\mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{aligned}(1-i)z-2\overline{z}=1+7i &\Leftrightarrow (1-i)(a+bi)-2(a-bi)=1+7i\\ &\Leftrightarrow -a+b+(-a+3b)i=1+7i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=1\\ -a+3b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow z=2+3i$ có điểm biểu diễn là điểm Q.
Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Tìm số thực x, y thỏa mãn $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i$.

A. $x=1,\, y=1$. **B**. $x=-1,\, y=1$. **C**. $x=-1,\, y=-1$. **D**. $x=1,\, y=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1-2i)x+(1+2y)i=1+i &\Leftrightarrow x+(1+2y-2x)i=1+i\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 1+2y-2x=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Cho số phức $z=2-3i$. Tìm mô-đun của số phức $w=2z+(1+i)\overline{z}$.

A. $|w|=\sqrt{10}$. **B**. $|w|=4$. **C**. $|w|=\sqrt{15}$. **D**. $|w|=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w=2(2-3i)+(1+i)(2+3i)=3-i\Rightarrow |w|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Tìm phần ảo của số phức z biết $\overline{z}=\left(\sqrt{3}+i\right)^2\left(\sqrt{3}-i\right)$.

A. 4. **B**. $4\sqrt{3}$. **C**. $-4\sqrt{3}$. **D**. -4.

Lời giải.

Ta có: $\overline{z}=\left(\sqrt{3}+i\right)^2\left(\sqrt{3}-i\right)=4\sqrt{3}+4i \Rightarrow z=4\sqrt{3}-4i$.
Vậy phần ảo của số phức z là -4.
Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{5}$ và số phức $w=(1+i)\overline{z}$. Tìm $|w|$.
A. $2\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|w|=|(1+i)\overline{z}|=|1+i|\cdot|\overline{z}|=\sqrt{2}\cdot|z|=\sqrt{10}$.
Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho số phức thỏa $|z|=3$. Biết rằng tập hợp số phức $w=\overline{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.
A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải.

Đặt $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.
Ta có $w=\overline{z}+i \Leftrightarrow x+yi=\overline{z}+i \Leftrightarrow \overline{z}=x+(y-1)i \Leftrightarrow z=x+(1-y)i$.
Mặt khác ta có $|z|=3$ suy ra $x^2+(1-y)^2=9$ hay $x^2+(y-1)^2=9$.
Vậy tập hợp số phức $w=\overline{z}+i$ là đường tròn tâm $I(0;1)$. □

Câu 65. Cho số phức $z=5-4i$. Môđun của số phức z bằng
A. 3. **B.** 9. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$.
Chọn đáp án C □

Câu 66. Số phức z nào sau đây thỏa mãn $|z|=\sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?
A. $z=\sqrt{5}$. **B.** $z=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$. **C.** $z=5i$. **D.** $z=-\sqrt{5}i$.

Lời giải.

Vì z là số thuần ảo nên ta đặt $z=bi \Rightarrow |z|=|b|=\sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\sqrt{5} \\ b=-\sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\sqrt{5}i \\ z=-\sqrt{5}i \end{array}\right.$.
Chọn đáp án D □

Câu 67. Điểm $M(3;-4)$ là điểm biểu diễn của số phức z, số phức liên hợp của z là
A. $\bar{z}=3-4i$. **B.** $\bar{z}=-3+4i$. **C.** $\bar{z}=3+4i$. **D.** $\bar{z}=-3-4i$.

Lời giải.

Ta có $z=3-4i$ suy ra $\bar{z}=3+4i$.
Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho số phức $z=6+7i$. Số phức liên hợp của z trong mặt phẳng (Oxy) có điểm biểu diễn hình học là
A. $(6;7)$. **B.** $(6;-7)$. **C.** $(-6;7)$. **D.** $(-6;-7)$.

Lời giải.

Ta có $z=6+7i \Rightarrow \overline{z}=6-7i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn hình học của $\overline{z}$ là $M(6;-7)$.
Chọn đáp án B □

Câu 69. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 5 - i$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

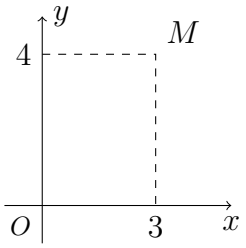
A. $\sqrt{37}$. **B.** 5. **C.** 25. **D.** $\sqrt{5} + \sqrt{26}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 + 2i \Rightarrow A(1;2)$ và $z_2 = 5 - i \Rightarrow B(5;-1)$.
Suy ra $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Chọn đáp án B □

Câu 70.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là 4 và phần ảo là 3. **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là $4i$.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là 4. **D.** Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải.

Điểm $M(3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 4i$.
Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3 - 5i$. Tính môđun của z.

A. $|z| = 4$. **B.** $|z| = \sqrt{17}$. **C.** $|z| = 17$. **D.** $|z| = 16$.

Lời giải.

Ta có $z(1+i) = 3 - 5i \Leftrightarrow z = \dfrac{3-5i}{1+i} = \dfrac{(3-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -1 - 4i$. Suy ra $|z| = \sqrt{17}$.
Chọn đáp án B □

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = 1+i$, $z_2 = 8 + i$, $z_3 = 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây là một mệnh đề đúng?

A. Tam giác MNP cân, không vuông. **B.** Tam giác MNP đều.
C. Tam giác MNP vuông, không cân. **D.** Tam giác MNP vuông cân.

Lời giải.

Ta có $M(1;1)$, $N(8;1)$, $P(1;-3)$.
nên $\overrightarrow{MN} = (7;0)$; $\overrightarrow{MP} = (0;-4)$; $\overrightarrow{NP} = (-7;-4)$ và $MN = 7$; $MP = 4$; $NP = \sqrt{65}$.
Ngoài ra $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ nên tam giác MNP vuông tại M nhưng không cân.
Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Tính mô-đun của số phức $\overline{z}$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** $\sqrt{41}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = 5 + 4i$, suy ra $|\overline{z}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.
Chọn đáp án D □

Câu 74. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức $\dfrac{7-4i}{z_1}$ trong mặt phẳng phức.

A. $P(3;2)$. **B.** $N(1;-2)$. **C.** $Q(3;-2)$. **D.** $M(1;2)$.

Lời giải.

Ta có

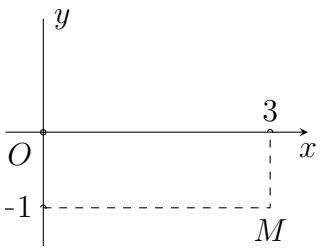
$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm 2i.$$

Do đó $z_1 = 1 - 2i$. Suy ra $\dfrac{7 - 4i}{z_1} = 3 + 2i$. Vậy điểm cần tìm là $P(3; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75.

Điểm M trong hình là điểm biểu diễn số phức nào?



A. $z = (1 + 2i)(1 - i)$.
B. $2z - 6 = (1 - i)^2$.
C. $z = \dfrac{1 + i}{1 - i}$.
D. $z = (1 + i)(2 - 3i)$.

Lời giải.

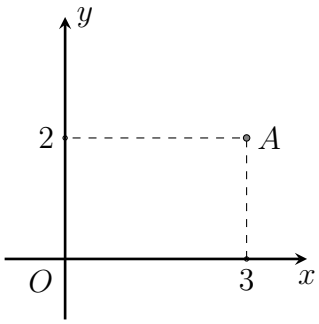
Điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - i$, do đó:

① $z = (1 + 2i)(1 - i) = 3 + i$ loại.
② $2z - 6 = (1 - i)^2 = -2i \Rightarrow z = 3 - i$ thỏa mãn.
③ $z = \dfrac{1 + i}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)^2}{2} = i$ loại.
④ $z = (1 + i)(2 - 3i) = 5 - i$ loại.

Chọn đáp án (B) □

Câu 76.

Điểm A trong hình vẽ bên là biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.



A. Phần thực là 3 và phần ảo là -2.
B. Phần thực là -3 và phần ảo là 2.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$.
D. Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 2i$. Do đó $\overline{z} = 3 - 2i$.

Suy ra, $\overline{z}$ có phần thực là 3 và phần ảo là -2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Cho số phức z thoả mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Môđun của z bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **B**. $\dfrac{1}{10}$. **C**. 1. **D**. $\sqrt{10}$.

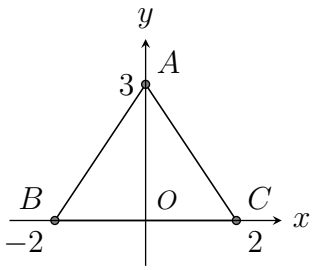
Lời giải.

$(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -1 \Leftrightarrow |1 + 3i| \cdot |z| = 1 \Rightarrow |z| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 78.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$.



A. 1. **B**. -1. **C**. $-i$. **D**. i.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(2;0)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(0;1)$ nên $z = i \Rightarrow \overline{z} = -i$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Cho số phức $z = 3 + i$. Tính $|\overline{z}|$.

A. $|\overline{z}| = 2\sqrt{2}$. **B**. $|\overline{z}| = 2$. **C**. $|\overline{z}| = 4$. **D**. $|\overline{z}| = \sqrt{10}$.

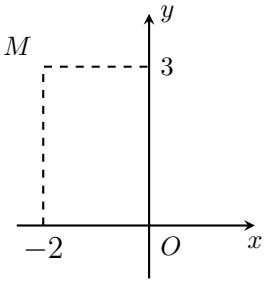
Lời giải.

Ta có $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 80.

Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức



A. $3 - 2i$. **B**. $-2 + 3i$. **C**. $2 - 3i$. **D**. $3 + 2i$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, số phức có phần thực là -2 và phần ảo là 3. Suy ra số phức cần tìm là $-2 + 3i$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Mô-đun số phức $z = 4 - 3i$ bằng

A. 7. **B**. 5. **C**. 1. **D**. 25.

Lời giải.

Ta có $|z| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức đối của z có tọa độ điểm biểu diễn là

A. $(-5;4)$. **B**. $(5;-4)$. **C**. $(-5;-4)$. **D**. $(5;4)$.

Lời giải.

Ta có $z = 5 - 4i \Leftrightarrow -z = -5 + 4i$.

Vậy tọa độ điểm biểu diễn của $-z$ là $(-5;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho số phức $z = 2 + 3i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là

A. 2 và 3. **B**. -2 và -3. **C**. 2 và $-3i$. **D**. 2 và -3.

Lời giải.

Ta có $z = 2 + 3i \Rightarrow \overline{z} = 2 - 3i$. Vậy phần thực của $\overline{z}$ là 2 và phần ảo của $\overline{z}$ là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là điểm nào sau đây?

A. $M(6; -7)$. **B.** $N(-6; 7)$. **C.** $P(-6; -7)$. **D.** $Q(6; 7)$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = 6 - 7i$ nên được biểu diễn bởi $M(6; -7)$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Có bao nhiêu số phức z có phần thực bằng 2 và $|z + 1 - 2i| = 3$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi số phức z có phần thực bằng 2 là $z = 2 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$.

Do $|z + 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow 9 + (b - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (b - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$. Vậy $z = 2 + 2i$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Tìm hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x = 3,\ y = -1$. **B.** $x = \dfrac{2}{3},\ y = -1$. **C.** $x = 3,\ y = -3$. **D.** $x = -3,\ y = -1$.

Lời giải.

Ta có $(3x + 2yi) + (3 - i) = 4x - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 4x \\ 2y - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x = \dfrac{3}{2}$, $y = -2$. **B.** $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = -\dfrac{4}{3}$. **C.** $x = 1$, $y = \dfrac{4}{3}$. **D.** $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x + 1 \\ 2y + 1 = -(y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Tìm các số thực x, y thỏa mãn $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = \dfrac{1}{7}; y = \dfrac{4}{7}$. **B.** $x = -\dfrac{2}{7}; y = \dfrac{4}{7}$. **C.** $x = -\dfrac{1}{7}; y = \dfrac{4}{7}$. **D.** $x = -\dfrac{1}{7}; y = -\dfrac{4}{7}$.

Lời giải.

Ta có đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x + y = 2y - 1 \\ 5x = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 89. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1 - 3i$. Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó M biểu diễn cho số phức nào sau đây?

A. $-i$. **B.** $2 - 2i$. **C.** $1 + i$. **D.** $1 - i$.

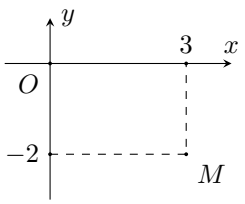
Lời giải.

Ta có $A(1;1), B(1;-3) \Rightarrow$ tọa độ của M là $M(1;-1) \Rightarrow M$ biểu diễn cho $z = 1 - i$.

Chọn đáp án D □

Câu 90.

Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $\overline{z} = -3 - 2i$. **B.** $\overline{z} = 3 + 2i$. **C.** $\overline{z} = 3 - 2i$. **D.** $\overline{z} = -3 + 2i$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $z = 3 - 2i$ nên suy ra $\overline{z} = 3 + 2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Cho số phức $z = -3 + 4i$. Mô-đun của z là

A. $|z| = 7$. **B.** $|z| = 4$. **C.** $|z| = 5$. **D.** $|z| = 3$.

Lời giải.

Ta có mô-đun của z là $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Trong mặt phẳng Oxy, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = -3i$, $z_2 = 2 - 2i$, $z_3 = -5 - i$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó điểm G biểu diễn số phức

A. $z = 2 - i$. **B.** $z = 1 - 2i$. **C.** $z = -1 - 2i$. **D.** $z = -1 - i$.

Lời giải.

Ta có: $A(0;-3)$; $B(2;-2)$; $C(-5;-1)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G(-1;-2)$.

Điểm G biểu diễn số phức $z = -1 - 2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Biết rằng có duy nhất một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $(x + y) + (x - y)i = 5 + 3i$. Tính giá trị của $S = x + 2y$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$(x + y) + (x - y)i = 5 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

Do đó $S = x + 2y = 4 + 2 \cdot 1 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Nếu điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thoả mãn $OM = 4$ thì

A. $|z| = \dfrac{1}{4}$. **B.** $|z| = 4$. **C.** $|z| = 16$. **D.** $|z| = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra $OM = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow |z| = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 95. Cho số phức z thoả mãn $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn số phức $\omega = 1 + \overline{z}$ là

A. đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$. **B**. đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.

C. đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$. **D**. đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Lời giải.

Gọi $\omega = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

+ Ta có $\omega = 1 + \overline{z} \Leftrightarrow x + yi = 1 + \overline{z} \Leftrightarrow \overline{z} = x - 1 + yi \Rightarrow z = x - 1 - yi$.

+ $|z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow |x - 1 - yi + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn số phức $\omega = 1 + \overline{z}$ là đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{7}$.

A. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \dfrac{7}{2}$. **B**. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 7$.

C. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 49$. **D**. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{7}$.

Lời giải.

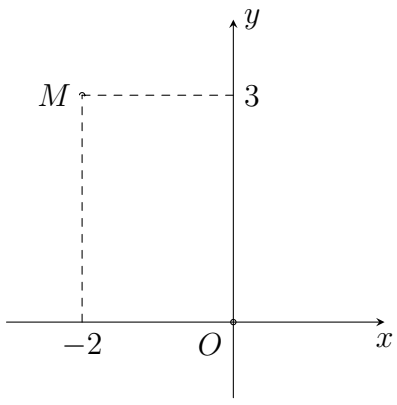
Gọi $M(x; y)$ là tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết $|z| = \sqrt{7} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 7$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức z. Chọn khẳng định đúng.



A. $\overline{z} = -2 + 3i$. **B**. $\overline{z} = 3 - 2i$. **C**. $\overline{z} = -2 - 3i$. **D**. $\overline{z} = 3 + 2i$.

Lời giải.

$z = -2 + 3i \Rightarrow \overline{z} = -2 - 3i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Cho số phức $z = -1 - 4i$. Tìm phần thực của số phức $\overline{z}$.

A. -4. **B**. -1. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = -1 + 4i \Rightarrow$ Phần thực của số phức $\overline{z}$ là -1.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Cho các số phức z, z' có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm M, M' trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Nếu $OM = 2OM'$ thì

A. $|z| = 2|z'|$. **B.** $z' = 2z$. **C.** $z = 2z'$. **D.** $|z'| = 2|z|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = OM$, $|z'| = OM'$. Do đó, nếu $OM = 2OM'$ thì $|z| = 2|z'|$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 100. Cho số phức $z = -2 - 5i$. Nếu z và z' là hai số phức liên hợp của nhau thì

A. $z' = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$. **B.** $z' = 2 - 5i$. **C.** $z' = 2 + 5i$. **D.** $z' = -2 + 5i$.

Lời giải.

z' là số phức liên hợp của $z = -2 - 5i$ thì $z' = -2 + 5i$.

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. C	5. A	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. A	12. D	13. B	14. B	15. A	16. A	17. B	18. B	19. C	20. C
21. A	22. D	23. A	24. D	25. C	26. C	27. A	28. C	29. C	30. C
31. D	32. B	33. D	34. D	35. B	36. C	37. B	38. D	39. D	40. C
41. D	42. B	43. B	44. A	45. C	46. C	47. A	48. D	49. C	50. A
51. A	52. A	53. A	54. C	55. D	56. B	57. C	58. D	59. A	60. D
61. B	62. C	63. B	64. A	65. C	66. B	67. D	68. A	69. A	70. D
71. B	72. C	73. C	74. D	75. A	76. D	77. B	78. B	79. D	80. C
81. C	82. C	83. B	84. D	85. B	86. C	87. C	88. D	89. C	90. B
91. D	92. C	93. A	94. A	95. A	96. D	97. D	98. C	99. B	100. C

❸ Mức độ vd-vdc

Câu 1. Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;-1)$. **B**. $(1;1)$. **C**. $(-1;1)$. **D**. $(-1;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$, ta được

$$\begin{aligned}(z+2i)(\overline{z}+2)&=[a+(b+2)i][(a+2)-bi]\\&=[a(a+2)+b(b+2)]+[(a+2)(b+2)-ab]i.\end{aligned}$$

$(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$a(a+2)+b(b+2)=0\Leftrightarrow(a+1)^2+(b+1)^2=2$$

nên tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn phương trình

$$(x+1)^2+(y+1)^2=2$$

có tâm $I(-1;-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\overline{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned}&|z|^2=2|z+\overline{z}|+4\\\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=4|x|+4\\\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x^2+y^2-4x-4=0,\ x\geq 0\quad(1)\\&x^2+y^2+4x-4=0,\ x<0.\quad(2)\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}&|z-1-i|=|z-3+3i|\\\Leftrightarrow\ &(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2\\\Leftrightarrow\ &4x=8y+16\\\Leftrightarrow\ &x=2y+4\quad(3)\end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&(2y+4)^2+y^2-4(2y+4)-4=0\\\Leftrightarrow\ &5y^2+8y-4=0\\\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&y=\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{24}{5}\ (\text{nhận})\\&y=-2\Rightarrow x=0\ (\text{nhận}).\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&(2y+4)^2+y^2+4(2y+4)-4=0\\ \Leftrightarrow&5y^2+24y+28=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}y=-2\Rightarrow x=0 \text{ (loại)}\\ y=-\dfrac{14}{5}\Rightarrow x=-\dfrac{8}{5} \text{ (nhận)}\end{array}\right.\end{aligned}.$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

A. 4. **B**. 6. **C**. 9. **D**. 10.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó, điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$.

Với $m=0$, ta có $z=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>0$, ta có

- ☑ $|z|=m\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;0)$, bán kính $R=m$.
- ☑ $|z-4m+3mi|=m^2\Leftrightarrow(x-4m)^2+(y+3m)^2=m^4\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R'=m^2$.
- ☑ Có duy nhất một số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}II'=R+R'\\ II'=|R-R'|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}5m=m^2+m\\ 5m=|m^2-m|\end{array}\right.\\ m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=6\end{array}\right..$$

Suy ra, tập giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\{0;4;6\}$. Do đó, tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z-5+i|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(2;-3), R=\sqrt{2}$. **B**. $I(2;-3), R=2$. **C**. $I(-2;3), R=\sqrt{2}$. **D**. $I(-2;3), R=2$.

Lời giải.

Gọi số phức $z=x+yi$.

$$\begin{aligned}&|(1+i)z-5+i|=2\\ \Leftrightarrow\ &|(1+i)(x+yi)-5+i|=2\\ \Leftrightarrow\ &|(x-y-5)+(x+y+1)i|=2\\ \Leftrightarrow\ &(x-y-5)^2+(x+y+1)^2=4\\ \Leftrightarrow\ &(x-y)^2-10(x-y)+25+(x+y)^2+2(x+y)+1=4\\ \Leftrightarrow\ &2x^2+2y^2-8x+12y+22=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2-4x+6y+11=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-2)^2+(y+3)^2=2\end{aligned}$$

. Vậy đường tròn biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện bài toán có tâm $I(2;-3), R=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm M biểu diễn số phức $z=-2+3\mathrm{i}$. Gọi N là điểm thuộc đường thẳng $y=3$ sao cho tam giác OMN cân tại O. Điểm N là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z=3-2\mathrm{i}$. **B.** $z=-2-3\mathrm{i}$. **C.** $z=2+3\mathrm{i}$. **D.** $z=-2+\mathrm{i}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra tọa độ $M(-2;3)$ nên M thuộc đường thẳng $y=3$. Vì tam giác OMN cân tại O suy ra N đối xứng với M qua Oy nên tọa độ điểm $N(2;3)$. Khi đó điểm N là biểu diễn của số phức $z=2+\mathrm{i}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên hệ tọa độ Oxy. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

A. $(1;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2\mathrm{i} \\ z=1-2\mathrm{i} \end{array}\right.$. Không mất tính tổng quát giả sử $z_1=1+2\mathrm{i}$ và $z_2=1-2\mathrm{i}$ do đó tọa độ điểm $M(1;2)$ và $N(1;-2)$. Gọi I là trung điểm của MN ta suy ra tọa độ $I(1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho số phức z thoả mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
& a+bi-4=(1+i)\sqrt{a^2+b^2}-(4+3a+3bi)i \\
\Leftrightarrow\ & a-4+bi=\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{a^2+b^2}-(4+3a)i+3b \\
\Leftrightarrow\ & a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4+(b-\sqrt{a^2+b^2}+3a+4)i=0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4=0 \\ 3a+b-\sqrt{a^2+b^2}+4=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4=0 \\ 2a+4b+8=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -2b-4-3b-\sqrt{(-2b-4)^2+b^2}-4=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \sqrt{(-2b-4)^2+b^2}=5b+8 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5b^2+16b+16=25b^2+80b+64 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 20b^2+64b+48=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-\dfrac{6}{5} \\ a=-\dfrac{8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2 \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

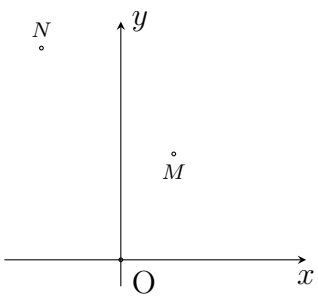
Với cả hai trường hợp ta đều có $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8.

Cho số phức z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M, biết z^2 có điểm biểu diễn là N như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z|<1$. **B.** $1<|z|<3$. **C.** $3<|z|<5$. **D.** $|z|>5$.



Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}^+$ và $a<b$. Khi đó $z^2=a^2-b^2+2abi$.

Từ hình vẽ ta thấy

$$\begin{cases} a^2-b^2 & <0 \\ 2ab & >2b \\ a^2-b^2 & >-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ b<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1<a<b<\sqrt{2}$$

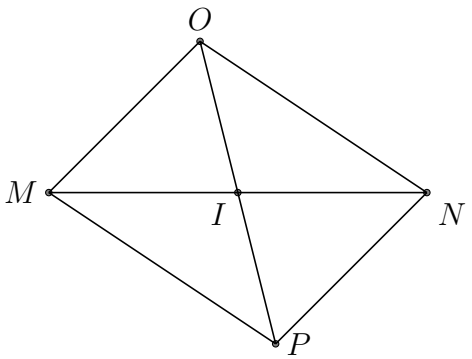
Vậy $1<|z|<3$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng phức, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ (3 điểm O, M, N phân biệt và không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z_1+z_2|=2OI$. **B.** $|z_1+z_2|=OI$.
C. $|z_1-z_2|=OM+ON$. **D.** $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$.

Lời giải.

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức z_1+z_2.
Khi đó $OMPN$ là hình bình hành nên $2OI=OP=|z_1+z_2|$.
$|z_1-z_2|=MN$ và $MN\neq OM+ON$, $MN\neq 2(OM+ON)$.
Vậy đáp số đúng là $|z_1+z_2|=2OI$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Gọi A, B, C là các điểm trong mặt phẳng Oxy theo thứ tự biểu diễn các số phức $2+3i$, $3+i$, $1+2i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z. Tìm z.

A. $z=1+i$. **B.** $z=1-i$. **C.** $z=2-2i$. **D.** $z=2+2i$.

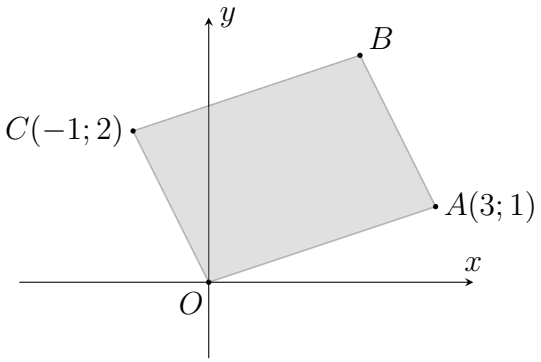
Lời giải.

Ta có: $A(2;3)$, $B(3;1)$, $C(1;2) \Rightarrow G(2;2)$ là điểm biểu diễn số phức $z=2+2i$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 11.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $OABC$ có tọa độ điểm $A(3;1)$, $C(-1;2)$ (như hình vẽ bên). Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là điểm B?

A. $w_1=-2+3i$. **B.** $w_2=2+3i$.
C. $w_3=4-i$. **D.** $w_4=-4+i$.



Lời giải.

Do $OABC$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Mà $\overrightarrow{OA} = (3;1)$ và $\overrightarrow{OC} = (-1;2)$ nên từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{OB} = (2;3). \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra điểm $B(2;3)$ hay điểm B là điểm biểu diễn của số phức $w_2 = 2+3i$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho tập $X = \{1;3;5;7;9\}$. Có bao nhiêu số phức $z = x+yi$ có phần thực, phần ảo đều thuộc X và có tổng $x+y \le 10$?

A. 20. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 24.

Lời giải.

Xét số phức $z = x+yi$ $(x,\ y \in X)$.

Vì số phức $z = x+yi$ thỏa mãn $x+y \le 10$ nên ta xét các trường hợp sau

① $(x;y) \in \{(1;3),(1;5),(1;7),(1;9),(3;5),(3;7)\}$, có $2\times 6 = 12$ số phức thỏa mãn.

② $(x;y) \in \{(1;1),(3;3),(5;5)\}$, có 3 số phức thỏa mãn.

Vậy có $12+3 = 15$ số phức thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+w}$. Môđun của số phức w bằng

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** $\sqrt{2019}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+w} \Rightarrow \dfrac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0$, suy ra $\left(z+\dfrac{1}{2}w\right)^2 = \left(-\dfrac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$.

Khi đó $z = \left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$ hoặc $z = \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w \Rightarrow |w| = -\dfrac{2018}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}} = 2018.$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $\dfrac{4i}{-1+i}$, $(1-i)(1+2i)$, $\dfrac{2+6i}{3-i}$. Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -1$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4i}{-1+i} = 2-2i \Rightarrow A(2;-2)$, $(1-i)(1+2i) = 3+i \Rightarrow B(3;1)$, $\dfrac{2+6i}{3-i} = 2i \Rightarrow C(0;2)$.

Lại có

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b+2)^2 = (a-3)^2+(b-1)^2 \\ (a-2)^2+(b+2)^2 = a^2+(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = 1 \\ a-2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(1+i) + (2-i)$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 = 2$. **B**. Đường thẳng $y = x + 2$.

C. Đường thẳng $y = x$. **D**. Đường parabol $2x = y^2$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} & w = z(1+i) + (2-i) \\ \Leftrightarrow\ & w = (x+yi)(1+i) + (2-i) \\ \Leftrightarrow\ & w = (x+2-y) + (x+y-1)iw = z(1+i) + (2-i). \end{aligned}$$

Khi đó w là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x + 2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trên mặt phẳng tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\overline{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = x + 1$. **B**. $y = -x + 1$. **C**. $y = -x - 1$. **D**. $y = x - 1$.

Lời giải.

Ta có $|z + 2 + i| = |\overline{z} - 3i| \Leftrightarrow |(x+2) + (y+1)i| = |x - (y+3)i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+3)^2$ $\Leftrightarrow 4x + 4 + 2y + 1 = 6y + 9 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hai số phức z_1, z_2 thuộc tập hợp $S = \{z \in \mathbb{C} : |iz - 2 - 3i| = 2\}$ và thỏa mãn $z_1 + z_2 = 4 - 2i$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $A = 6$. **B**. $A = 14$. **C**. $A = 8$. **D**. $A = 12$.

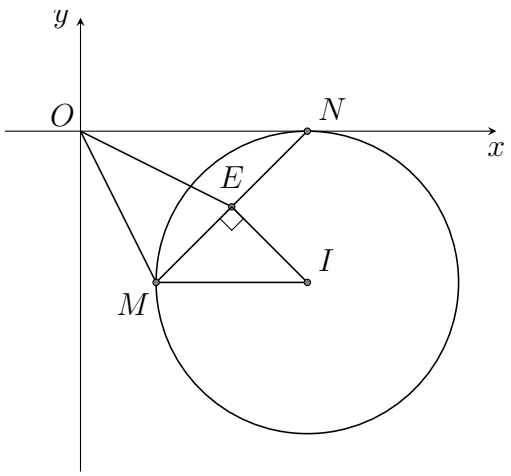
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2.

Gọi E là trung điểm MN.

Ta có

$$\begin{aligned} & |iz - 2 - 3i| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & |i \cdot (z - 3 + 2i)| = 2 \\ \Leftrightarrow\ & |z - 3 + 2i| = 2. \qquad (1) \end{aligned}$$



Từ (1) ta thấy M, N thuộc đường tròn tâm $I(3; -2)$ bán kính $R = 2$.

Ta có $E(2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{EI} = (1; -1) \Rightarrow EI = \sqrt{2} \Rightarrow MN = 2\sqrt{2}$.

Trong $\triangle OMN$, ta có

$$\begin{aligned} OE^2 &= \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \\ \Rightarrow OM^2 + ON^2 &= 14. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-2|=|z|$ và $(z+1)(\overline{z}-i)$ là số thực.

A. $z=1-2i$. **B.** $z=-1-2i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=1+2i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}|z-2|=|z|\\(z+1)(\overline{z}-i) \text{ là số thực}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|(a-2)+bi|=|a+bi|\\(a+bi+1)(a-bi-i) \text{ là số thực}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)^2+b^2=a^2+b^2\\a^2+a+b^2+b-(a+b+1)i \text{ là số thực}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+4=0\\a+b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$$

Vậy $z=1-2i$ là số phức cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2|=5$ là một đường tròn. Khi đó số phức $w=(3+4i)z+i$ có điểm biểu diễn thuộc đường tròn bán kính

A. 5. **B.** 7. **C.** 35. **D.** 25.

Lời giải.

$w=(3+4i)z+i\Leftrightarrow\dfrac{w-i}{3+4i}=z\Leftrightarrow\dfrac{w-i}{3+4i}-2=z-2\Leftrightarrow\dfrac{w-6-9i}{3+4i}=z-2$

Suy ra: $\left|\dfrac{w-6-9i}{3+4i}\right|=|z-2|\Leftrightarrow\dfrac{|w-(6+9i)|}{5}=5\Leftrightarrow|w-(6+9i)|=25.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6;9)$, bán kính $R=25$.

Cách 2:

$w=(3+4i)z+i=(3+4i)(z-2)+6+9i\Leftrightarrow w-(6+9i)=(3+4i)(z-2).$

Suy ra: $|w-(6+9i)|=|(3+4i)||(z-2)|$ hay $|w-(6+9i)|=25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(6;9)$, bán kính $R=25$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1=-1+i$, $z_2=1+2i$, $z_3=2-i$, $z_4=-3i$. Gọi S diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S.

A. $S=\dfrac{17}{2}$. **B.** $S=\dfrac{19}{2}$. **C.** $S=\dfrac{23}{2}$. **D.** $S=\dfrac{21}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_1=-1+i\Rightarrow A(-1;1)$;

$z_2=1+2i\Rightarrow B(1;2)$;

$z_3=2-i\Rightarrow C(2;-1)$;

$z_4=-3i\Rightarrow D(0;-3)$.

$AB=\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{13}$, $BC=\sqrt{10}$, $AD=\sqrt{17}$, $CD=2\sqrt{2}$.

Do đó: $p_1=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{10}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{p_1(p_1-AB)(p_1-BC)(p_1-AC)}}{2}=\dfrac{7}{2}$.

$p_2=\dfrac{AD+CD+AC}{2}=\dfrac{\sqrt{17}+2\sqrt{2}+\sqrt{13}}{2}$.

Diện tích tam giác ACD là $S_{\triangle ACD}=\sqrt{p_2(p_2-AC)(p_2-AD)(p_2-CD)}=5$.

Vậy diện tích tứ giác $ABCD$ là $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\dfrac{7}{2}+5=\dfrac{17}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z+\overline{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng. **B**. đường tròn. **C**. parabol. **D**. hypebol.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi\Rightarrow z+\overline{z}=2x$.

Khi đó $2|x-1+yi|=|2x+2|\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|2x+2|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1\Leftrightarrow y^2=4x$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z+\overline{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho số phức $z=1+i\sqrt{3}$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=1-i\sqrt{3}$. **B**. $\overline{z}=-\sqrt{3}-i$. **C**. $\overline{z}=-1+i\sqrt{3}$. **D**. $\overline{z}=\sqrt{3}+i$.

Lời giải.

$$z=a+ib\Rightarrow\overline{z}=a-bi.$$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Có bao nhiêu số thức thỏa mãn $z+|z|^2i-1-\dfrac{3}{4}i=0$?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Thay vào biểu thức của bài toán ta có:

$$(a-1)+\left(a^2+b^2+b-\frac{3}{4}\right)i=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b^2+b+\dfrac{1}{4}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Vậy chỉ có đúng một số phức thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho số phức $z=1+i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1=a+5i$, $z_2=b$ (trong đó $a,b\in\mathbb{R},b>1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z-z_1|=\sqrt{3}|z-z_2|=|z_1-z_2|$. Tính $b-a$.

A. $b-a=5\sqrt{3}$. **B**. $b-a=2\sqrt{3}$. **C**. $b-a=4\sqrt{3}$. **D**. $b-a=3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $M(1;1),N(a;5),P(b;0)(b>1)$ lần lượt là các điểm biểu thị cho các số phức z,z_1,z_2.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(a-1;4)$, $\overrightarrow{MP}=(b-1;-1)$ nên

$$\begin{cases}|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{MP}|\\ \cos 120^\circ=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MP}|}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-1)^2+16=(b-1)^2+1\\ -\dfrac{1}{2}=\dfrac{(a-1)(b-1)-4}{(a-1)^2+16}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a-1)^2-(b-1)^2=-15\\ (a-1)^2+2(a-1)(b-1)=-8\end{cases}\quad(*)$$

Đặt $x=a-1,y=b-1(y>0)$ thì $\begin{cases}x^2+y^2=-15\\ x^2+2xy=-8\end{cases}\Rightarrow 7x^2+30xy+8y^2=0$ (nhân chéo vế với vế của hai phương trình).

Tìm được $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{7}y \\ x=-4y \end{array}\right.$. Thay vào $(*)$ thì thấy chỉ có $x=\dfrac{-2}{7}y$ thỏa mãn.

Lúc này $y^2=\dfrac{49}{3}$. Do $y>0 \Rightarrow y=\dfrac{7}{\sqrt{3}}x=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$. Vậy $b-a=y-x=3\sqrt{3}$.

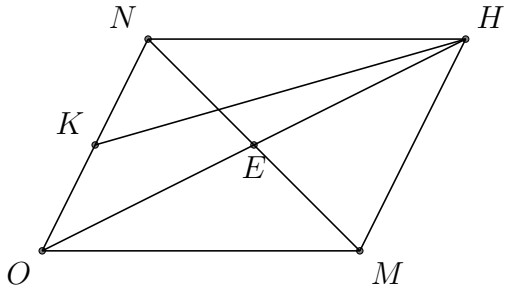
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1|=|z_2|=\sqrt{17}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN=3\sqrt{2}$, gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON. Tính độ dài ℓ của đoạn thẳng KH.

A. $\ell=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. **B.** $\ell=5\sqrt{2}$. **C.** $\ell=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$. **D.** $\ell=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của OH và MN.



$$\begin{aligned} OE^2 &= \frac{OM^2+ON^2}{2}-\frac{MN^2}{4} \\ &= 17-\frac{9}{2}=\frac{25}{2} \Rightarrow OH^2=4OE^2=50 \\ HK^2 &= \frac{HN^2+HO^2}{2}-\frac{ON^2}{4}=\frac{OM^2+OH^2}{2}-\frac{ON^2}{4} \\ &= \frac{17+50}{2}-\frac{17}{4}=\frac{117}{4} \Rightarrow \ell=HK=\frac{3\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$; $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Giả sử M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2.

Theo bài ra ta có $OM=ON=1$ và $|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|=\sqrt{3}$.

Do đó $3=|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|^2=OM^2+ON^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} \Rightarrow 2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=3-1-1=1$.

Ta có $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=\sqrt{\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right)^2}=\sqrt{OM^2+ON^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $1\le|z|\le 2$ là một hình phẳng có diện tích bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** 3π.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với x, y là các số thực. Theo giả thiết, ta có

$$1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2 \Leftrightarrow 1\le x^2+y^2\le 4.$$

Gọi (C_1), (C_2) lần lượt là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$. Khi đó, (C_1), (C_2) có tâm $O(0;0)$, bán kính lần lượt là $R_1=1$ và $R_2=2$.

Hình phẳng cần tìm chính là vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Gọi S là diện tích vành khăn, suy ra

$$S=\pi R_2^2-\pi R_1^2=4\pi-\pi=3\pi.$$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Điểm $M(m+3; m^2-1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$.

Đặt $x = m + 3$; $y = m^2 - 1$, ta có $y = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$. Suy ra điểm M thuộc đường $(C)\colon y = x^2 - 6x + 8$.

Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành là

$$S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 29. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+2i$, $1+\sqrt{3}+i$,$1+\sqrt{3}-i$, $1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $A(1;2)$, $B\left(1+\sqrt{3};1\right)$, $C\left(1+\sqrt{3};-1\right)$, $D(1;-2)$.

Khi đó $\overrightarrow{BA} = \left(-\sqrt{3};1\right)$, $\overrightarrow{BD} = \left(-\sqrt{3};-3\right)$ suy ra $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại B.

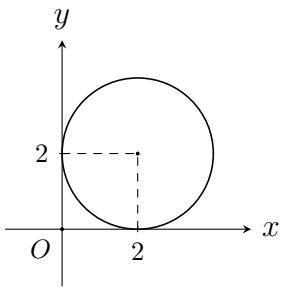
$\overrightarrow{CA} = \left(-\sqrt{3};3\right)$, $\overrightarrow{CD} = \left(-\sqrt{3};-1\right)$ suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C.

Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ là trung điểm đoạn AD có tọa độ $I(1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.

Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tô đậm như hình vẽ bên là tập hợp điểm biểu diễn số phức z. Hỏi số phức z thỏa mãn đẳng thức nào sau đây ?



A. $|z - 2 - 2i| = 2$. **B.** $|z - 2| = 2$. **C.** $|z - 1 - 2i| = 2$. **D.** $|z - 2i| = 2$.

Lời giải.

z thuộc đường tròn tâm $I(2;2)$ bán kính 2. Do đó $|z - 2 - 2i| = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho số phức z thỏa $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=9$. **B.** $r=16$. **C.** $r=25$. **D.** $r=4$.

Lời giải.

$w-3-i\sqrt{3}=(1+i\sqrt{3})(z-1)$.

Suy ra $|w-3-i\sqrt{3}|=|(1+i\sqrt{3})(z-1)|=4$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính 4.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của số phức z, iz và $z+iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z|=2\sqrt{3}$. **B.** $|z|=3\sqrt{2}$. **C.** $|z|=6$. **D.** $|z|=9$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có

$iz=i(x+yi)=-y+xi$ và $z+iz=x+yi-y+xi=x-y+(x+y)i$.

Gọi $A(x;y)$, $B(-y;x)$, $C(x-y;x+y)$ là các điểm biểu diễn của z, iz, $z+iz$.

Ta có $AB=\sqrt{(-x-y)^2+(x-y)^2}$, $AC=\sqrt{(-y)^2+x^2}$, $BC=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại C.

Khi đó $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=18\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=6=|z|$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $z=x+iy$ (với x, $y\in\mathbb{R}$).

Ta có $|z-i|=5\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=25$. $(*)$

z^2 là số thuần ảo, suy ra $x^2-y^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y.\end{array}\right.$

Với $x=y$ thay vào $(*)$ ta được $x^2+(x-1)^2=25\Leftrightarrow 2x^2-2x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3.\end{array}\right.$

Với $x=-y$ thay vào $(*)$ ta được $x^2+(x+1)^2=25\Leftrightarrow 2x^2+2x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=3.\end{array}\right.$

Vậy có 4 số phức cần tìm là $4+4i$, $-3-3i$, $-4+4i$, $3-3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\overline{z}-(3-4i)|=2$ là

A. Đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=2$. **B.** Đường tròn tâm $I(-3;-4)$, bán kính $R=2$.

C. Đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$. **D.** Đường tròn tâm $I(-3;4)$, bán kính $R=2$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết $|\overline{z}-(3-4i)|=2\Leftrightarrow|a-bi-(3-4i)|=2\Leftrightarrow(a-3)^2+(b-4)^2=4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|2z-1|=|\overline{z}+1+i|$ và điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$. Khi đó tích môđun của tất cả các số phức z thỏa mãn các yêu cầu trên là?

A. $\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}&|2(a+bi)-1|=|a-bi+1+i|\\ \Leftrightarrow&|(2a-1)+2bi|=|(a+1)-(b-1)i|\\ \Leftrightarrow&(2a-1)^2+(2b)^2=(a+1)^2+(b-1)^2\\ \Leftrightarrow&3a^2+3b^2-6a+2b-1=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Vì điểm biểu diễn cuả z trên mặt phẳng tọa đọ thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$, $R=\sqrt{5}$ nên ta có

$$\begin{aligned}&(a-1)^2+(b-1)^2=5\\ \Leftrightarrow&a^2+b^2-2a-2b=3\\ \Leftrightarrow&a^2-2a=3-b^2+2b.\end{aligned}\tag{2}$$

Thế (2) vào (1) ta được $3(3-b^2+2b)+3b^2+2b-1=0\Leftrightarrow b=-1$.
Khi đó, thay vào (2) ta suy ra $\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-1\\z_2=2-i\end{array}\right.\Rightarrow|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C là ba điểm lần lượt biểu diễn ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ và $|z_1-z_2|=2$. Khi đó tam giác ABC

A. dều. **B.** vuông. **C.** cân. **D.** có một góc tù.

Lời giải.

Theo giả thiết, tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;1)$ có $AB=2$. Suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$. Tính mô-đun của số phức z

A. $|z|=\sqrt{34}$. **B.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **C.** $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z|=34$.

Lời giải.

Cách 1 Ta có $z(2-i)+13i=1\Rightarrow|z(2-i)|=|1-13i|\Leftrightarrow|z|\cdot\sqrt{5}=\sqrt{170}\Leftrightarrow|z|=\sqrt{34}$.
Cách 2 Ta có $z(2-i)+13i=1\Leftrightarrow z(2-i)=1-13i$
$\Leftrightarrow z(2-i)(2+i)=(1-13i)(2+i)\Leftrightarrow 5z=15-25i\Leftrightarrow z=3-5i$
$\Rightarrow|z|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 2i$; M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \dfrac{3i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM'.

A. $S_{\triangle OMM'} = 4$. **B.** $S_{\triangle OMM'} = 6$. **C.** $S_{\triangle OMM'} = 3$. **D.** $S_{\triangle OMM'} = \dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có $M(2;2)$. Mặt khác $z' = \dfrac{3i}{2}z = -3 + 3i \Rightarrow M'(-3;3)$.

Tam giác OMM' có $\overrightarrow{OM} = (2;2)$, $\overrightarrow{OM'} = (-3;3) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow OM \perp OM'$.

Diện tích tam giác OMM' là $S_{\triangle OMM'} = \dfrac{1}{2}OM \cdot OM' = \dfrac{1}{2} \cdot |z| \cdot |z'| = 6$.

Chọn đáp án (B) □

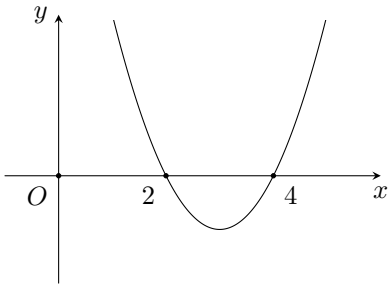
Câu 39. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z = m + 3 + (m^2 - 1)i = x + yi \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$.



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là $\displaystyle\int_2^4 -(x^2 - 6x + 8)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. D	4. A	5. C	6. A	7. A	8. B	9. A	10. D
11. B	12. C	13. A	14. B	15. B	16. D	17. B	18. A	19. D	20. A
21. C	22. A	23. A	24. D	25. C	26. C	27. D	28. B	29. D	30. A
31. D	32. C	33. D	34. A	35. A	36. B	37. A	38. B	39. B	

BÀI 2 CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Phép cộng và phép trừ hai số phức

a) Tổng của hai số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $w = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Khi đó ta có

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i.$$

b) Tính chất của phép cộng số phức

Phép cộng số phức có tất cả các tính chất của phép cộng số thực.

☑ Tính chất kết hợp

$$(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Do đó ta kí hiệu chung các số $(x + y) + z$ và $x + (y + z)$ là $x + y + z$.
Nếu $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $\ldots$, $z_n = a_n + b_n i$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n)$ thì

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)i.$$

☑ Tính chất giao hoán

$$x + y = y + z,\ \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

☑ Cộng với 0

$$z + 0 = 0 + z = z,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

☑ Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z. Điểm biểu diễn số phức z và điểm biểu diễn số đối của nó đối xứng qua gốc tọa độ.

☑ Với mọi số phức z và w ta có

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}.$$

c) Phép trừ hai số phức Hiệu của hai số phức z và w là tổng của z với $-w$, tức là

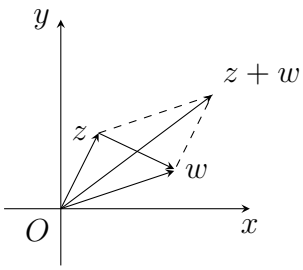
$$z - w = z + (-w).$$

Nếu $z = a + bi$ và $w = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thì

$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

d) Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Nếu $z=a+bi$, $w=c+di$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ lần lượt được biểu diễn bởi các véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì $z+w$ được biểu diễn bởi $\vec{u}+\vec{v}$, $z-w$ được biểu diễn bởi $\vec{u}-\vec{v}$.



2 Phép nhân hai số phức

a) Tích của hai số phức Cho hai số phức $z=a+bi$ và $w=c+di$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Khi đó ta có

$$zw=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Nhận xét. Với mọi số thực k ta có $kz=ka+kbi$. Đặc biệt $0z=0$.

b) Tính chất của phép nhân số phức Phép nhân số phức có tất cả các tính chất của phép nhân số thực.

☑ Tính chất kết hợp

$$(xy)z=x(yz),\ \forall x,y,z\in\mathbb{C}.$$

Do đó ta kí hiệu các số phức $(xy)z$ và $x(yz)$ là xyz.
Đặc biệt ta kí hiệu $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\cdots z}_{n \text{ số phức } z}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

☑ Tính chất giao hoán

$$xy=yx,\ \forall x,y\in\mathbb{C}.$$

☑ Nhân với 1

$$1\cdot z=z\cdot 1=z,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

☑ Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

$$x(y+z)=xy+xz,\ \forall x,y,z\in\mathbb{C}.$$

☑ Với mọi số phức z, w ta đều có

$$\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w},$$
$$z\overline{z}=|z|^2.$$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Cộng trừ hai số phức

Phương pháp giải.

① Phép cộng hai số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$:

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

Tính chất:

- Kết hợp: $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
- Giao hoán: $z + z' = z' + z$.
- Số đối của $z = a + bi$ là số $-z = -a - bi$.

② Phép trừ hai số phức.

$$z - z' = (a - a') + (b - b')i.$$

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

① $(2 + 3i) + (5 - 3i)$

② $(-5 + 2i) + (3i)$

③ $(2 - 3i) - (5 - 4i)$

Lời giải.

① $(2 + 3i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + (3 - 3)i = 7$

② $(-5 + 2i) + (3i) = -5 + (2 + 3)i = -5 + 5i$

③ $(2 - 3i) - (5 - 4i) = (2 - 5) + (-3 + 4)i = -3 + i$

□

Ví dụ 2. Tìm phần thực phần ảo của các số phức sau:

① $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$

② $\left(3 - \frac{1}{3}i\right) + \left(-\frac{3}{2} + 2i\right) - \frac{1}{2}i$

Lời giải.

① $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i) = 1 + i$

Phần thực là 1, phần ảo là 1.

② $\left(3 - \frac{1}{3}i\right) + \left(-\frac{3}{2} + 2i\right) - \frac{1}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{7}{6}i.$

Phần thực là $\frac{3}{2}$, phần ảo là $\frac{7}{6}$.

□

Ví dụ 3. Giải phương trình sau: $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$x + yi + 2(x - yi) = 2 - 4i \Leftrightarrow 3x - yi = 2 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy $z = \frac{2}{3} + 4i$. □

Ví dụ 4. Tìm tập hợp điểm M thỏa: $|z+\bar{z}+3|=4$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$.

$|z+\bar{z}+3|=4 \Leftrightarrow |x+yi+x-yi+3|=4 \Leftrightarrow |2x+3|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+3=4\\2x+3=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ hoặc đường thẳng $x=-\dfrac{7}{2}$ □

Ví dụ 5. Số phức $z=a+bi$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z'=(4a-3b)+(3a+4b)i$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

Lời giải.

- Nhận thấy: M, M' đối xứng qua Ox; N, N' đối xứng qua Ox.
- Từ giả thiết suy ra $MN \perp Oy$ hoặc $MN' \perp Oy$, tức là $y_M=y_N$ hoặc $y_M=y_{N'}$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}b=3a+4b\\b=-3a-4b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=0\\3a+5b=0\end{array}\right. \Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $\Delta_1: x+y=0$ hoặc $\Delta_2: 3x+5y=0$.

- Lại có $|z+4i-5|=MK$, với $K(5;-4)$.

Suy ra MK nhỏ nhất khi $MK=\min\{d(K;\Delta_1);d(K;\Delta_2)\}=\min\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{5}{\sqrt{34}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z-i|=|z-1|\\|z-2i|=|z|\end{cases}$. Tính $|z|$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$. Hệ đã cho trở thành:

$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+y^2\\x^2+(y-2)^2=x^2+y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y=0\\4y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

Suy ra $z=1+i$. Do đó $|z|=\sqrt{2}$. □

Bài 2. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1+i|=|z+2i|$.

Lời giải.

- Chú ý rằng $|z-z_1|=MA$ với M biểu diễn z và A biểu diễn z_1.
- Giả thiết có dạng $|z-z_1|=|z-z_2|$ hay $MA=MB$ với $A(1;-1)$ và $B(0;-2)$.

Do đó tập hợp M là trung trực của đoạn AB. □

Bài 3. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$, $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$.

Lời giải.

- Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn z_1, z_2, dựng hình bình hành $OACB$ thì $OA=OB=1$ và $OC=\sqrt{3}$.

- Từ đó suy ra $OACB$ là hình thoi có $\widehat{AOB} = 60°$. Tức là tam giác OAB đều.
- Khi đó $|z_1 - z_2| = AB = 1$. □

Bài 4. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = \dfrac{3}{2}$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = \dfrac{3}{2}$ là đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = \dfrac{3}{2}$.
Gọi M là điểm biểu diễn số phức z có mô-đun nhỏ nhất. Khi đó $M \in (C)$ sao cho MO nhỏ nhất, với O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow M$ là giao của đường tròn (C) với đoạn OI.
Tính được tọa độ của M là $\left(\dfrac{26 - 3\sqrt{13}}{13}; -\dfrac{78 - 9\sqrt{13}}{26}\right)$. □

Bài 5. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|, w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là bao nhiêu?

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, khi đó $z + 2 - 2i = a + 2 + (b - 2)i$ và $z - 4i = a + (b - 4)i$.
Nên ta có $(a + 2)^2 + (b - 2)^2 = a^2 + (b - 4)^2 \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - a$.
Khi đó $\omega = iz + 1 = 1 - b + ai \Rightarrow |\omega| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{a^2 + (a - 1)^2} \geq \sqrt{\dfrac{1}{2}}$
$\Rightarrow \min |\omega| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 6. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$).
Ta có $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |a - 2 + (b - 4)i| = |a + (b - 2)i| \Leftrightarrow b = 4 - a$.
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2(a - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i$. □

Bài 7. Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z + 1| = |z - i|$. Tìm số phức $w = z + 2i - 3$ có mô-đun nhỏ nhất.

Lời giải.

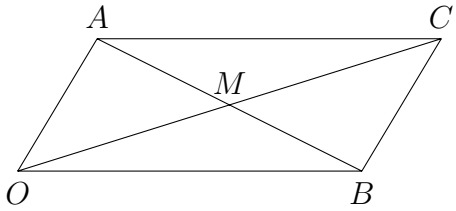
Cách 1: Gọi số phức $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Ta có $|z + 1| = |z - i| \Leftrightarrow |a + bi + 1|^2 = |a + bi - i|^2 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + b^2 = a^2 + (b - 1)^2 \Leftrightarrow a = -b$.
Khi đó $\omega = a - 3 + (2 - a)i$ hay $|\omega| = \sqrt{(a - 3)^2 + (2 - a)^2} = \sqrt{2a^2 - 10a + 13}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = \dfrac{5}{2}$.
Vậy $\omega = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ thỏa mãn yêu cầu.

Cách 2: Từ điều kiện $|z + 1| = |z - i|$ suy ra z được biểu diễn trên đường thẳng $x + y = 0$ (dạng quỹ tích quen thuộc).

Vì $w = z + 2i - 3$ nên w được biểu diễn trên đường thẳng $(\Delta) : x + y + 1 = 0$. Điểm trên (Δ) gần gốc toạ độ nhất là $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Vậy $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ thỏa mãn yêu cầu. □

Bài 8. Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất K của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

Lời giải.



Đặt $OA = |z_1|, OB = |z_2|$, với O là gốc toạ độ và A, B là 2 điểm biểu diễn của z_1, z_2.
Ta có: $|z_1 - z_2| = AB = 2$, $OC = |z_1 + z_2| = 10$.
$OM^2 = \frac{OA^2}{2} + \frac{OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$.
$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = 52 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$.
Ta có: $|z_1| + |z_2| \le \sqrt{2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)} = 2\sqrt{26}$.
Dấu bằng xảy ra khi $z_1 = \frac{23}{5} + \frac{11}{5}i, z_2 = \frac{17}{5} + \frac{19}{5}i$ hoặc $z_2 = \frac{23}{5} + \frac{11}{5}i, z_1 = \frac{17}{5} + \frac{19}{5}i$. Vậy $K = 2\sqrt{26}$.

□

DẠNG 2. Phép nhân hai số phức

Phương pháp giải. • Thực hiện phép nhân tương tự như nhân hai đa thức với chú ý $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

- $(1 + i)^2 = 2i, (1 - i)^2 = -2i$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i \Rightarrow i^n \in \{\pm 1; \pm i\}$.

Ví dụ 6. Thực hiện phép tính
① $(1 + 2i)(-3 + 5i)$.
② $-i(2 - 3i)$.
③ $(-3 + 2i)^2$.

Lời giải.

① $(1 + 2i)(-3 + 5i) = [1 \cdot (-3) - 2 \cdot 5] + [1 \cdot 5 + 2 \cdot (-3)]i = -13 - i$.
② $-i(2 - 3i) = -i \cdot 2 + i \cdot (3i) = -3 - 2i$.
③ $(-3 + 2i)^2 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot (2i) + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$.

□

Ví dụ 7. Tìm phần thực, phần ảo, mô-đun và tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức z biết $\overline{z} = 5 + 3i - (2 + i)(1 - 4i)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overline{z} &= 5+3i-(2+i)(1-4i) = 5+3i-[2-8i+i+4]\\ &= 5+3i-(6-7i) = 5+3i-6+7i = -1+10i \Rightarrow z = -1-10i.\end{aligned}$$

Vậy z có phần thực là -1, phần ảo là -10, $|z| = \sqrt{(-1)^2+(-10)^2} = \sqrt{101}$ và tọa độ điểm biểu diễn hình học là $(-1;-10)$. □

Ví dụ 8. Tìm số phức z biết

① $z = i^{2017}$.

② $z = (1+i)^{2018}$.

Lời giải.

① $z = i^{2017} = i^{4\cdot 504+1} = (i^4)^{504}\cdot i = i$.

② $z = (1+i)^{2018} = [(1+i)^2]^{1009} = (2i)^{1009} = 2^{1009}\cdot i^{1009}$.
Mà $i^{1009} = i^{4\cdot 252+1} = i$. Suy ra $z = 2^{1009}i$.

□

Ví dụ 9. Tìm số phức z thỏa mãn $z+(2+i)\overline{z} = 3+5i$.

Lời giải.

Giả sử $z = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}, i^2 = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned}z+(2+i)\overline{z} = 3+5i &\Leftrightarrow a+bi+(2+i)(a-bi) = 3+5i\\ &\Leftrightarrow (3a+b)+(a-b)i = 3+5i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}3a+b=3\\ a-b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases} \Rightarrow z = 2-3i.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 10. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi-2-i| = 2$.

Lời giải.

Đặt $z = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}, i^2 = -1$. Ta có

$$\begin{aligned}|zi-2-i| = 2 &\Leftrightarrow |(a+bi)i-2-i| = 2 \Leftrightarrow |(a-1)i-b-2| = 2\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2} = 2 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+2)^2 = 4.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 2$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Chứng minh $z = (1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ là một số thực.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}z &= (2-3i+4i+6)(6-4i+3i+2)\\ &= (8+i)(8-i) = 8^2-i^2 = 65.\end{aligned}$$

□

Bài 10. Tìm phần thực, phần ảo, mô-đun, số phức liên hợp và tọa độ điểm biểu diễn hình học của số phức z biết

① $z = (-7+2i)(2+5i)$.

② $z = 3i(2-i)(3+4i)$.

Lời giải.

① $z = (-7+2i)(2+5i) = -14-35i+4i-10 = -24-31i$.
Vậy z có phần thực là -24, phần ảo là -31, $|z| = \sqrt{(-24)^2+(-31)^2} = \sqrt{1537}$, $\overline{z} = -24+31i$ và tọa độ điểm biểu diễn hình học là $(-24;-31)$.

② $z = 3i(2-i)(3+4i) = (6i+3)(3+4i) = 18i-24+9+12i = -15+30i$.
Vậy z có phần thực là -15, phần ảo là 30, $|z| = \sqrt{(-15)^2+(30)^2} = 15\sqrt{5}$, $\overline{z} = -15-30i$ và tọa độ điểm biểu diễn hình học là $(-15;30)$.

□

Bài 11. Tìm số phức z biết

① $z = i^{106}$.

② $z = (1+i)^{50}$.

③ $z = (1-i)^{2019}$.

Lời giải.

① $z = i^{106} = i^{4\cdot 26+2} = (i^4)^{26}\cdot i^2 = -1$.

② $z = (1+i)^{50} = [(1+i)^2]^{25} = (2i)^{25} = 2^{25}\cdot i^{25}$.
Mà $i^{25} = i^{4\cdot 6+1} = i$. Suy ra $z = 2^{25}i$.

③ $z = (1-i)^{2019} = (1-i)^{2018}(1-i) = [(1-i)^2]^{1009}(1-i) = (-2i)^{1009}(1-i) = -2^{1009}\cdot i^{1009}\cdot(1-i)$.
Mà $i^{1009} = i^{4\cdot 252+1} = i$. Suy ra $z = -2^{1009}i(1-i) = -2^{1009}-2^{1009}i$.

□

Bài 12. Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn $2z(1+i)+(\overline{z}+2)(1-i) = -1+5i$.

Lời giải.

Giả sử $z = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}, i^2 = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2z(1+i)+(\overline{z}+2)(1-i) = -1+5i &\Leftrightarrow 2(a+bi)(1+i)+(a-bi+2)(1-i) = -1+5i \\ &\Leftrightarrow (3a-3b+2)+(a+b-2)i = -1+5i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b+2 = -1 \\ a+b-2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5. \end{aligned}$$

□

Bài 13. Tìm số phức z biết $z^2 = 3-4i$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R},i^2=-1$. Khi đó

$$z^2=3-4i\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=3-4i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=3\\b=-\dfrac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2-\frac{4}{a^2}=3\Leftrightarrow a^4-3a^2-4=0,a\neq0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a^2=-1&\text{(loại)}\\a^2=4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a=2\\a=-2.\end{bmatrix}$$

- Với $a=2$, ta có $b=-\dfrac{2}{a}=-1$.
- Với $a=-2$, ta có $b=-\dfrac{2}{a}=1$.

Vậy có hai số phức thỏa mãn $z_1=2-i$ và $z_2=-2+i$. □

Bài 14. Tìm số phức z biết $|z|=3\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R},i^2=-1$. Ta có $z^2=a^2-b^2+2abi$ và z^2 là số thuần ảo. Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}\\a^2-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=9\\a^2=b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a=3,b=3\\a=3,b=-3\\a=-3,b=3\\a=-3,b=-3.\end{bmatrix}$$

Vậy có bốn số phức thỏa mãn $z_1=3+3i,z_2=3-3i,z_3=-3+3i$ và $z_4=-3-3i$. □

Bài 15. Tìm số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z|^2+2z\overline{z}+|\overline{z}|^2=52\\z+\overline{z}=6.\end{cases}$

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R},i^2=-1$. Ta có $|z|^2=|\overline{z}|^2=z\overline{z}$. Khi đó

$$\begin{cases}|z|^2+2|z|^2+|z|^2=52\\(a+bi)+(a-bi)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^2=13\\2a=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=13\\a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a=3,b=2\\a=3,b=-2.\end{bmatrix}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn $z_1=3+2i,z_2=3-2i$. □

Bài 16. Tìm số phức z biết $z^2+2\left(|z|^2+\overline{z}\right)=9$ và z không là số thực.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R},b\neq0,i^2=-1$. Ta có

$$z^2+2\left(|z|^2+\overline{z}\right)=9\Leftrightarrow(a^2-b^2+2abi)+2(a^2+b^2+a-bi)=9$$

$$\Leftrightarrow(3a^2+b^2+2a)+(2ab-2b)i=9$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2+b^2+2a=9\\2ab-2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=4\\a=1\quad(\text{vì}\quad b\neq0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a=1,b=2\\a=1,b=-2.\end{bmatrix}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 1 - 2i$. □

Bài 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Xác định phương trình đường chứa các điểm biểu diễn số phức $w = (2 + i)z - 3i$.

Lời giải.

Giả sử $w = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. Ta có

$$\begin{aligned} &a + bi = (2 + i)z - 3i \Leftrightarrow a + (b + 3)i = (2 + i)z \\ &\Rightarrow |a + (b + 3)i| = |(2 + i)z| \Leftrightarrow |a + (b + 3)i| = |2 + i| \cdot |z| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b + 3)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + (b + 3)^2 = 25. \end{aligned}$$

Vậy các điểm biểu diễn số phức w nằm trên đường tròn có phương trình $x^2 + (y + 3)^2 = 25$. □

Bài 18. Trong các số phức z thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$, tìm phần thực của số phức z sao cho $|z|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. Ta có

$$\begin{cases} iz - 3 = i(a + bi) - 3 = (-b - 3) + ai \\ z - 2 - i = (a - 2) + (b - 1)i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |iz - 3| = \sqrt{(-b - 3)^2 + a^2} \\ |z - 2 - i| = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2}. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &|iz - 3| = |z - 2 - i| \Leftrightarrow \sqrt{(-b - 3)^2 + a^2} = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow b^2 + 6b + 9 + a^2 = a^2 - 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow b = -\frac{a + 1}{2}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{a^2 + \left(-\frac{a + 1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + (a + 1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(a\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 19. Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau

① $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i|$.

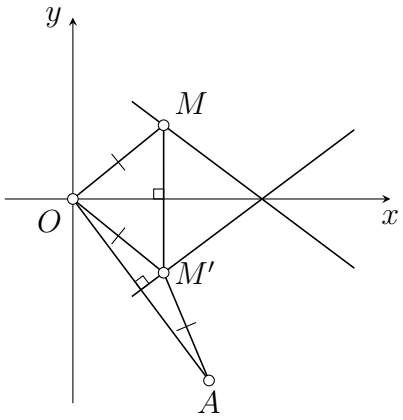
② $|z - i| + |z + i| = 4$.

③ $z^2 = \overline{z}^2$.

Lời giải.

① Giả sử $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết ta có $a^2 + b^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2$ hay $6a + 8b - 25 = 0$. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $6a + 8b - 25 = 0$.

Nhận xét. Đặt $A(3; -4)$, M' là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Khi đó bài toán tương đương tìm tập hợp các điểm M sao cho $MO = M'A$ với M' là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Dễ thấy yêu cầu này lại tương đương $M'O = M'A$ hay M' nằm trên đường trung trực của OA. Vậy tập các điểm M cần tìm là ảnh của đường trung trực của đoạn thẳng OA qua phép đối xứng trục Ox.



② Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức i và $-i$. Theo giả thiết ta có $MA + MB = 4$. Mà $AB = 2 < 4$ nên tập hợp các điểm M là elip nhận A, B là các tiêu điểm và có độ dài trục lớn là 4.

③ Giả sử $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} &(a+bi)(a+bi) = (a-bi)(a-bi) \\ \Leftrightarrow &a^2 - b^2 + 2abi = a^2 - b^2 - 2abi \\ \Leftrightarrow &ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai trục tọa độ.

□

Bài 20. Tìm số phức z thỏa mãn các điều kiện sau

① $|z - 2 - 3i| = |z + 1 - i|$.

② $\omega = (-z^2 - 4iz)\left(\overline{z^2 + 16}\right)$ là số thực không âm.

Lời giải.

① Gọi $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$ và M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng. Khi đó theo giả thiết ta có $MA = MB$, hay M nằm trên đường trung trực của AB.
Vậy tập các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

② Giả sử $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. ω là số thực khi và chỉ khi số phức $(z^2+4iz)\left(\overline{z^2+16}\right)$ là số thực, hay

$$\begin{aligned}
&(z^2+4iz)\left(\overline{z^2+16}\right)=(\overline{z^2+4iz})\left(z^2+16\right)\\
\Leftrightarrow&z(z+4i)\left(\overline{z+4i}\right)\left(\overline{z-4i}\right)=\overline{z}\left(\overline{z+4i}\right)(z-4i)(z+4i)\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}|z+4i|^2=0\\ z(\overline{z}+4i)=\overline{z}(z-4i)\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}z=-4i\\ 4i(z+\overline{z})=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}z=-4i\\ a=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}z=-4i\\ z=bi\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Thay $z=-4i$ vào biểu thức của ω ta được $\omega=0$. Thay $z=bi$ vào biểu thức của ω ta được

$$\omega=-\left((bi)^2+4i(bi)\right)\left(\overline{(bi)^2+16}\right)=-b(b-4)(b+4)^2.$$

Do đó $\omega\geq 0\Leftrightarrow b(b-4)(b+4)^2\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-4\\ 0\leq b\leq 4\end{array}\right.$.

Vậy tập các số phức z cần tìm là $S=\{bi\mid b\in[0;4]\cup\{-4\}\}$. □

Bài 21. Gọi $\mathscr{X}$ là tập các số phức z thỏa mãn $|z-i|\geq 3$ và $|z-2-2i|\leq 5$. Tìm các số phức $z_1,z_2\in\mathscr{X}$ sao cho $|z_1|$ là nhỏ nhất và $|z_2|$ là lớn nhất.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $3\leq|z-i|\leq|z|+1\Rightarrow|z|\geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}|z-i|=3\\ |z|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(b-1)^2=9\\ a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-2\end{cases}.$$

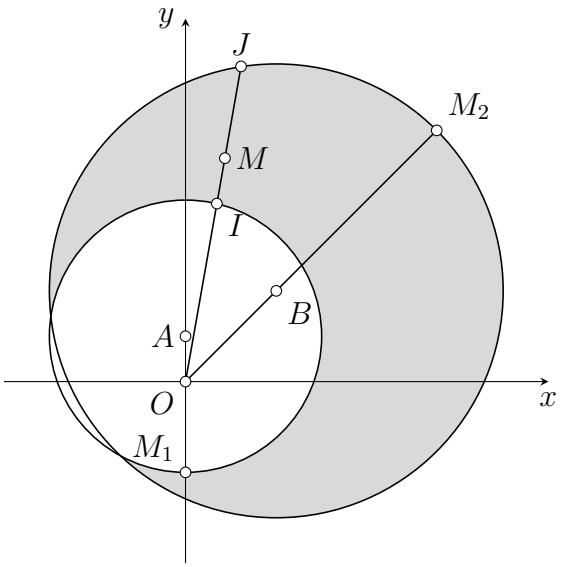
Vậy $z_1=-2i$.

Ta lại có $|z|-2\sqrt{2}\leq|z-2-2i|\leq 5$ nên $|z|\leq 5+2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}|z-2-2i|=5\\ |z|=5+2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)^2+(b-2)^2=25\\ a^2+b^2=33+20\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{4+5\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $z_2=\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}+\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}i$.

Cách 2.



Ta thấy tập các số phức thỏa mãn $|z-i| \geq 3$ là đường tròn $A(0;1)$ bán kính 3 và phần mặt phẳng nằm ngoài hình tròn đó, tập các số phức z thỏa mãn $|z-2-2i| \leq 5$ là hình tròn tâm $B(2;2)$ bán kính 5. Do đó $\mathcal{X}$ là hình được tô màu.

Từ hình vẽ ta thấy, với mỗi điểm M thì $OI \leq OM \leq OJ$ với I, J lần lượt là giao điểm của tia OM với đường tròn $(A;3)$, $(B,5)$. Từ đó OM bé nhất (lớn nhất) khi M là nằm trên đường tròn $(A;3)$ $((B;5))$.

Vậy OM bé nhất khi $M \equiv M_1$ là giao điểm của tia AO với đường tròn $(A;2)$, lớn nhất khi $M \equiv M_2$ là giao điểm của tia OB với đường tròn $(B;5)$.

Từ đó ta tìm được $z_1 = -2i$, $z_2 = \dfrac{4+5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}i$.

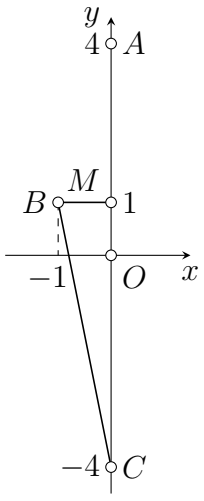
□

Bài 22. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+16| + |z(z+4i)| = 4|z+4i|$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1-i|$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &|z^2+16| + |z(z+4i)| = 4|z+4i| \\ \Leftrightarrow &|z^2-(4i)^2| + |z(z+4i)| = 4|z+4i| \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} z+4i=0 & (1) \\ |z-4i|+|z|=4 & (2) \end{cases}. \end{aligned}$$



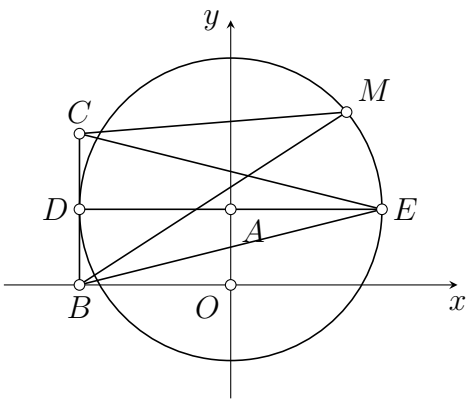
Đặt $A(0;4)$, $B(1;1)$, gọi M là điểm diễn số phức z. Dễ thấy (2) tương đương $MA+MO=4=OA$. Mà $MA+MO \geq OA$ nên M nằm trên đoạn OA. Vậy tập hợp các điểm M là đoạn thẳng OA và điểm $(0;-4)$.

Khi đó $P = MB \leq \sqrt{26}$, dấu bằng xảy ra khi $M=(0;-4)$ và $P = MB \geq 1$, dấu bằng xảy ra khi $M=(0;1)$. Vậy $\min P = 1$, $\max P = \sqrt{26}$.

□

Bài 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z+2-2i|$.

Lời giải.



Đặt $A(0;1)$, $B(-2;0)$, $C(-2;2)$, $D(-2;1)$, $E(2;1)$ và gọi M là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng. Theo giả thiết ta có $|z-i|=2$ hay $MA=2$. Vậy M chạy trên đường tròn đường kính $(A;2)$. Dễ thấy đường tròn này tiếp xúc với BC tại D, do đó $P=|z+2|+|z+2-2i|=MB+MC\geq BC=2$, đẳng thức xảy ra khi $M\equiv D$. Vậy $\min P=2$.

Dễ thấy $D(-2;1)$ là trung điểm của BC nên theo công thức đường trung tuyến ta có

$$MD^2+\frac{BC^2}{4}=\frac{MB^2+MC^2}{2}\geq (MB+MC)^2$$

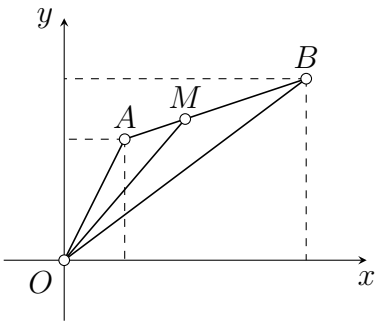
$$\Rightarrow P=MB+MC\leq \sqrt{MD^2+\frac{BC^2}{4}}\leq \sqrt{DE^2+\frac{BC^2}{4}}=\sqrt{17}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M\equiv E$. Vậy $\max P=\sqrt{17}$. □

Bài 24. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|+|z-4-3i|=\sqrt{10}$. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Lời giải.

Đặt $A(1;2)$, $B(4;3)$ và gọi M là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng. Theo giả thiết ta có



$$MA+MB=|z-1-2i|+|z-4-3i|=\sqrt{10}=AB$$

Mà $MA+MB\geq AB$ nên M nằm trên đoạn thẳng AB. Lại có

$$\cos\widehat{OAB}=\frac{OA^2+AB^2-OB^2}{2OA\cdot OB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

nên $\widehat{OAB}$ là góc tù. Suy ra $OA\leq OM\leq OB$.

Vậy $\min|z|=OA=\sqrt{5}$ và $\max|z|=OB=5$.

□

Bài 25. Cho số phức z.Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P = |z-(1+2i)| + |z-(2+3i)| + |z-(3+4i)| + \cdots + |z-(2017+2018i)|.$$

Tìm z để $P = m$.

Lời giải.

Gọi M, A_1, A_2, …, A_{2017} lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z, $1+2i$, $2+3i$, …, $2017+2018i$. Khi đó $P = MA_1 + MA_2 + \cdots MA_{2017}$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$MA_1 + MA_{2017} \geq A_1A_{2017} = 2016\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi M nằm trên A_1A_{2017}.

$MA_2 + MA_{2016} \geq A_2A_{2016} = 2014\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi M nằm trên A_2A_{2016}.

…

$MA_{1008} + MA_{1010} \geq A_{1008}A_{1010} = 2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi M nằm trên A_1A_{2017}.

$MA_{1009} \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv A_{1009}$.

Do đó $P \geq 2016\sqrt{2} + 2014\sqrt{2} + \cdots + 2\sqrt{2} = 1008 \cdot 1009\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi tất cả các bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức. Chú ý rằng các điểm A_1, A_2, …, A_{2017} đều nằm trên đường thẳng $y = x+1$ và $A_1A_{2017} \supset A_2A_{2016} \supset \cdots \supset A_{1008}A_{1010} \ni A_{1009}$ nên đẳng thức xảy ra khi $z = 1009 + 1010i$. Vậy $\min P = 1008 \cdot 1009\sqrt{2}$, đạt được khi $z = 1009 + 1010i$. □

Bài 26. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 3z + \overline{z}| - |z + \overline{z}|$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z||z^2 + 3 + \overline{z}^2| - |z + \overline{z}| \\ &= |z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + 1| - |z + \overline{z}| \\ &= |(z+\overline{z})^2 + 1| - |z + \overline{z}|. \end{aligned}$$

Đặt $t = |z + \overline{z}| = 2|a|$ với a là phần thực của z. Do $|z| = 1$ nên $|a| \leq 1$, suy ra $t \in [0; 2]$. Suy ra

$$P = |t^2 + 1| - t = t^2 - t + 1.$$

Xét bảng biến thiên của $f(t) = t^2 - t + 1$, $t \in [0; 2]$.

t	0		$\frac{1}{2}$		2
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	3

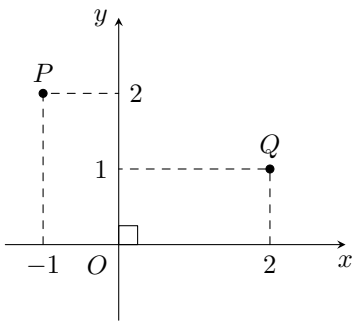
Vậy $\max P = f(2) = 3$, đạt được khi $z = 1$ và $\min P = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, đạt được khi $z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}i$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ vận nhận biết

Câu 1.

Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1, điểm Q biểu diễn số phức z_2. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.



A. $1 + 3i$. **B.** $-3 + i$. **C.** $-1 + 2i$. **D.** $2 + i$.

Lời giải.

Theo hình vẽ ta có $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 2 + i$ nên $z = z_1 + z_2 = 1 + 3i$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a = 0, b = 2$. **B.** $a = \dfrac{1}{2}, b = 1$. **C.** $a = 0, b = 1$. **D.** $a = 1, b = 2$.

Lời giải.

Ta có $2a + (b + i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow 2a - 1 + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hai số phức $z = a + bi, z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$. Tìm phần ảo của số phức zz'.

A. $(ab' + a'b)i$. **B.** $ab' + a'b$. **C.** $ab' - a'b$. **D.** $aa' - bb'$.

Lời giải.

Ta có $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$, suy ra phần ảo của số phức zz' là $ab' + a'b$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm phần ảo của số phức $z = (a + bi)(1 - 2i)$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

A. $2a + b$. **B.** $2a - b$. **C.** $a + 2b$. **D.** $b - 2a$.

Lời giải.

$z = (a + bi)(1 - 2i) = (a + 2b) + (b - 2a)i$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho số phức $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

A. $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **B.** $w = 0$. **C.** $w = 1$. **D.** $w = 2 - \sqrt{3}i$.

Lời giải.

$w = 1 + z + z^2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(2x - 1) + (y + 1)i = 1 + 2i$. Giá trị của biểu thức $x^2 + 2xy + y^2$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Từ $(2x-1)+(y+1)i=1+2i$ ta có $\begin{cases}2x-1=1\\y+1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$

Vậy $x^2+2xy+y^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tính mô-đun của số phức $z=(2-i)(1+i)^2+1$.

A. $|z|=4$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=2\sqrt{5}$. **D.** $|z|=25$.

Lời giải.

Ta có $z=(2-i)(1+i)^2+1=3+4i$. Suy ra $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hai số phức $z_1=1-i, z_2=2+3i$. Tính mô-đun của số phức $z=z_1+z_2$.

A. $|z|=1$. **B.** $|z|=\sqrt{5}$. **C.** $|z|=5$. **D.** $|z|=\sqrt{13}$.

Lời giải.

$z=z_1+z_2=3+2i\Rightarrow|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Với các số phức z thỏa mãn $|z-2+i|=4$, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=8$. **B.** $R=16$. **C.** $R=2$. **D.** $R=4$.

Lời giải.

Viết z dưới dạng $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó, ta có:

$$|z-2+i|=4\Leftrightarrow|(a-2)+(b+1)i|=4\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+1)^2=16.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z đã cho là đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho số phức $z_1=1+2i, z_2=3-i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w=z_1+z_2$.

A. $\overline{w}=4-i$. **B.** $\overline{w}=4+i$. **C.** $\overline{w}=-4+i$. **D.** $\overline{w}=-4-i$.

Lời giải.

Ta có $w=z_1+z_2=(1+3)+(2-1)i=4+i\Rightarrow\overline{w}=4-i$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho z là một số thuần ảo khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{z}$ là số thực. **B.** Phần ảo của z bằng 0.

C. $z=\overline{z}$. **D.** $z+\overline{z}=0$.

Lời giải.

Vì z là số thuần ảo khác 0 nên $z=bi, b\in\mathbb{R}, b\neq0$ và $\overline{z}=-bi$.

Suy ra $z+\overline{z}=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Số phức $z+\overline{z}$ là

A. Số thực. **B.** Số ảo. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Vậy $z + \overline{z} = 2a$ là số thực.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tính mô-đun của số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{25}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi ω là số phức nghịch đảo của số phức $z = (1 - 2i)^2 \Rightarrow \omega = \dfrac{1}{z} = \dfrac{-3 + 4i}{25}$.

Vậy $|\omega| = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho số phức z thỏa $(1 + i)z = 3 - i$. Tìm phần ảo của z.

A. $-2i$. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{3 - i}{1 + i} = 1 - 2i$, do đó phần ảo của z bằng -2.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z = (-2 + 3i)(-9 - 10i)$.

A. $a = 48$ và $b = 7$. **B.** $a = -48$ và $b = 7$. **C.** $a = -48$ và $b = -7$. **D.** $a = 48$ và $b = -7$.

Lời giải.

Ta có $z = (-2 + 3i)(-9 - 10i) = 48 - 7i$ nên $a = 48$ và $b = -7$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tìm mô-đun của số phức $z = (-6 + 8i)^2$.

A. $|z| = 4\sqrt{527}$. **B.** $|z| = 2\sqrt{7}$. **C.** $|z| = 100$. **D.** $|z| = 10$.

Lời giải.

Ta có $z = (-6 + 8i)^2 = -28 - 96i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-28)^2 + (-96)^2} = 100$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \overline{z}$.

A. $w = -3 - 3i$. **B.** $w = 3 + 7i$. **C.** $w = -7 - 7i$. **D.** $w = 7 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $w = i \cdot (2 + 5i) + (2 - 5i) = -3 - 3i$.

Chọn đáp án A □

Câu 18.

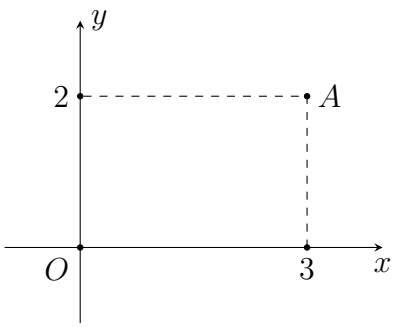
Điểm A trong hình vẽ biểu diễn cho số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là 3, phần ảo là $-2i$.

B. Phần thực là 3, phần ảo là 2.

C. Phần thực là 3, phần ảo là -2.

D. Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.



Lời giải.

Ta có tọa độ điểm $A(3;2)$, suy ra số phức $z=3+2i$.
Vậy phần thực của z là 3 và phần ảo của z là 2.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Phần thực của số phức $z=(a+i)(1-i)$ là
A. $-a+1$. **B.** $a-1$. **C.** $a+1$. **D.** a^2+1.

Lời giải.

$$z=(a+i)(1-i)=a+1+(1-a)i.$$

Phần thực của z là $a+1$.
Chọn đáp án C □

Câu 20. Số phức $z=(1+2i)(2-3i)$ bằng
A. $8-i$. **B.** 8. **C.** $8+i$. **D.** $-4+i$.

Lời giải.

Có $z=(1+2i)(2-3i)=2+4i-3i-6i^2=8+i$.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho $z_1=1+2i$, $z_2=2-3i$. Khi đó $w=z_1-2z_2$ bằng
A. $w=5+8i$. **B.** $w=-3+8i$. **C.** $w=3-i$. **D.** $w=-3-4i$.

Lời giải.

$w=z_1-2z_2=(1+2i)-2(2-3i)=-3+8i$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho số phức $z=a+bi$. Khi đó phần ảo của số phức z^2 bằng
A. b. **B.** a. **C.** $2ab$. **D.** a^2-b^2.

Lời giải.

Ta có $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$. Do đó phần ảo của z^2 là $2ab$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=(3+2i)(3-2i)$.
A. $\overline{z}=13$. **B.** $\overline{z}=i$. **C.** $\overline{z}=0$. **D.** $\overline{z}=-13$.

Lời giải.

Ta có $z=(3+2i)(3-2i)=13\Rightarrow\overline{z}=13$.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Nghiệm của phương trình $2z^2+3z+4=0$ trên tập số phức là
A. $z_1=\dfrac{-3+\sqrt{23}i}{4};z_2=\dfrac{3-\sqrt{23}i}{4}$. **B.** $z_1=\dfrac{3+\sqrt{23}i}{4};z_2=\dfrac{-3-\sqrt{23}i}{4}$.
C. $z_1=\dfrac{-3+\sqrt{23}i}{4};z_2=\dfrac{-3-\sqrt{23}i}{4}$. **D.** $z_1=\dfrac{3+\sqrt{23}i}{4};z_2=\dfrac{3-\sqrt{23}i}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1=\dfrac{-3+\sqrt{23}i}{4};z_2=\dfrac{-3-\sqrt{23}i}{4}$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 3i + (1 - i)^2$.

A. $\overline{z} = -1 - 5i$. **B.** $\overline{z} = 1 - 5i$. **C.** $\overline{z} = 1 + 5i$. **D.** $\overline{z} = 5 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - 3i + 1 - 2i + i^2 = 1 - 5i$. Suy ra $\overline{z} = 1 + 5i$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Tìm số phức $w = z_1 - 2z_2$, biết rằng $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$.

A. $w = 3 - i$. **B.** $w = 5 + 8i$. **C.** $w = -3 + 8i$. **D.** $w = -3 - 4i$.

Lời giải.

Ta có: $w = z_1 - 2z_2 = 1 + 2i - 2(2 - 3i) = -3 + 8i$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho các số thực x và y thỏa mãn x+2+yi=-2+5i. Giá trị của $x + y$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải.

Từ phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{cases} x + 2 = -2 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 7i$ và $z_2 = -4 + i$. Điểm biểu diễn số phức $z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(-2; -6)$. **B.** $P(-5; -3)$. **C.** $N(6; -8)$. **D.** $M(3; -11)$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = -2 - 6i$. Vậy điểm biểu diễn $z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm $Q(-2; -6)$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (4 - 3i) + (1 - i)$.

A. Số phức z có phần thực là 1 và có phần ảo là -7.

B. Số phức z có phần thực là 3 và có phần ảo là -2.

C. Số phức z có phần thực là 5 và có phần ảo là -4.

D. Số phức z có phần thực là 5 và có phần ảo là $4i$.

Lời giải.

Ta có $z = (4 - 3i) + (1 - i) = 5 - 4i \Rightarrow$ phần thực là 5 phần ảo là -4.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Thu gọn số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$ về dạng $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tính $S = a - b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = -2$.

Lời giải.

Ta có $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = -1 - i \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = a - b = -1 - (-1) = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Phần thực của số phức z^2 là

A. $2abi$. **B.** $a^2 + b^2$. **C.** $2ab$. **D.** $a^2 - b^2$.

Lời giải.

Ta có $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Vậy phần thực của z^2 là $a^2 - b^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Thu gọn số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$, ta được:

A. $z = -1 - i$. **B.** $z = 1 - i$. **C.** $z = -1 - 2i$. **D.** $z = 1 + i$.

Lời giải.

Ta có $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = i + 2 - 4i - 3 + 2i = -1 - i$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho số phức $z = 2 + bi$. Tính $z \cdot \bar{z}$.

A. $z \cdot \bar{z} = \sqrt{4 + b^2}$. **B.** $z \cdot \bar{z} = 4 - b^2$. **C.** $z \cdot \bar{z} = -b$. **D.** $z \cdot \bar{z} = 4 + b^2$.

Lời giải.

Ta có $z \cdot \bar{z} = (2 + bi)(2 - bi) = 4 - b^2 i^2 = 4 + b^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1 + i)z - (2 - i)\overline{z}$.

A. -5. **B.** -9. **C.** $-5i$. **D.** $-9i$.

Lời giải.

$$w = (1 + i)z - (2 - i)\overline{z} = (1 + i)(2 - 3i) - (2 - i)(2 + 3i) = -2 - 5i.$$

Phần ảo của số phức w là -5.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Tìm số phức $z = z_1 + 2z_2$.

A. $1 + i$. **B.** 1. **C.** $4 - i$. **D.** $2i$.

Lời giải.

$z = z_1 + 2z_2 = 2 + i + 2(1 - i) = 4 - i$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho $z_1 = 2 + 3i; z_2 = 4 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức w biết $w = 2(z_1 + z_2)$.

A. $\overline{w} = 12 - 16i$. **B.** $\overline{w} = 12 + 16i$. **C.** $\overline{w} = -14 + 44i$. **D.** $\overline{w} = -14 - 44i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(2 + 3i + 4 + 5i) = 12 + 16i$. Vậy $\overline{w} = 12 - 16i$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $z = 3 + 6i$. **B.** $z = 11$. **C.** $z = -1 - 10i$. **D.** $z = -3 - 6i$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = -3 - 6i$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

A. 11. **B**. 12. **C**. 1. **D**. $12i$.

Lời giải.

Ta có $w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = -1 + 12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + 2i)\, i$ lần lượt là

A. 1 và 2. **B**. -2 và 1. **C**. 1 và -2. **D**. 2 và 1.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 2i)\, i = -2 + i$. Do đó phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là -2 và 1.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho số phức $z_1 = 1 + 7i; z_2 = 3 - 4i$. Tính mô-đun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. **B**. $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{5}$. **C**. $|z_1 + z_2| = 25\sqrt{2}$. **D**. $|z_1 + z_2| = 5$.

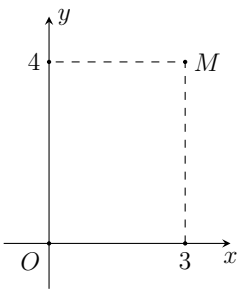
Lời giải.

Ta có: $z_1 + z_2 = 4 + 3i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 41.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng 3.

B. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $3i$.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.

D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $4i$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $M(3; 4)$ nên $z = 3 + 4i$. Vậy Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $z = 2 - i + \left(\dfrac{1}{3} - 2i\right)$.

A. $\dfrac{7}{3}$ và $-3i$. **B**. $\dfrac{7}{3}$ và -3. **C**. $\dfrac{7}{3}$ và 2. **D**. $\dfrac{5}{3}$ và $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z = 2 - i + \left(\dfrac{1}{3} - 2i\right) = \dfrac{7}{3} - 3i$.

Vậy phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là $\dfrac{7}{3}$ và -3.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trên tập số phức, cho phương trình: $az^2 + bz + c = 0 (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$. Chọn kết luận **sai**.

A. Phương trình luôn có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau.

B. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình có hai nghiệm mà mô-đun bằng nhau.

C. Nếu $b = 0$ thì phương trình có hai nghiệm mà tổng bằng 0.

D. Phương trình luôn có nghiệm.

Câu 44. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;\ y=-3$. **B.** $x=-1;\ y=-3$. **C.** $x=-1;\ y=-1$. **D.** $x=1;\ y=-1$.

Lời giải.

Ta có: $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i \Leftrightarrow 2x+1-(3y+3)i=-1+6i$.

Suy ra $\begin{cases}2x+1=-1\\-3y-3=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-3.\end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho số phức $z=(1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** $2i$.

Lời giải.

Ta có $z=(1+i)^2(1+2i)=2i(1+2i)=-4+2i$.

Vậy số phức z có phần ảo là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=-3-5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=z_1+z_2$.

A. -3. **B.** 0. **C.** $-1-2i$. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $w=z_1+z_2=(2+3i)+(-3-5i)=-1-2i$.

Phần thực $a=-1$ và phần ảo $b=-2$.

Suy ra $a+b=-1+(-2)=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hai số phức $z_1=2+3i$, $z_2=-4-5i$. Tính $z=z_1+z_2$.

A. $z=-2-2i$. **B.** $z=-2+2i$. **C.** $z=2+2i$. **D.** $z=2-2i$.

Lời giải.

$z=z_1+z_2=2+3i-4-5i=-2-2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho số phức $z=-3+4i$. Mô-đun của số phức z là

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hai số phức $z_1=5-7i$, $z_2=2-i$. Mô-đun của hiệu hai số phức đã cho bằng

A. $|z_1-z_2|=3\sqrt{5}$. **B.** $|z_1-z_2|=45$.

C. $|z_1-z_2|=\sqrt{113}$. **D.** $|z_1-z_2|=\sqrt{74}-\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z_1-z_2=3-6i \Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-3i|\leqslant 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=4$. **B.** Hình tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=4$.

C. Hình tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=2$. **D**. Hình tròn tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=2$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z+4-3i|\leqslant 2\Leftrightarrow\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}\leqslant 2\Leftrightarrow(x+4)^2+(y-3)^2\leqslant 4$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là điểm cách điểm $I(-4;3)$ một khoảng bé hơn hoặc bằng 2 hay tập hợp điểm biểu diễn là hình tròn tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=2$.
Chọn đáp án D □

Câu 51. Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i+1)(\overline{z}+3i)$ là số thuần ảo, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó là:

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B**. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C**. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **D**. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi số phức z có dạng $z=x+yi$.
Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}(z+2i+1)(\overline{z}+3i) &= (x+yi+2i+1)(x-yi+3i)\\ &= (x^2+x-6+y^2-y)+(5x+3-y)i\end{aligned}$$

Mà $(z+2i+1)(\overline{z}+3i)$ là một số thuần ảo nên phần thực bằng 0.
Suy ra

$$\begin{aligned}&x^2+x-6+y^2-y=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}.\end{aligned}$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm là $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức $w=1+\overline{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2;1)$ bán kính $R=3$. **B**. Đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.
C. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=9$. **D**. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Lời giải.

Từ $w=1+\overline{z}\Rightarrow\overline{w}=\overline{1+\overline{z}}\Rightarrow z=\overline{w}-1$.
Thế vào $|z+2-i|=3$ ta được

$$|\overline{w}+1-i|=3\Leftrightarrow\left|\overline{\overline{w}+1-i}\right|=3\Leftrightarrow|w+1+i|=3.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $R=3$.
Chọn đáp án D □

Câu 53. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2+2|z|=0$?

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi,\ x,\ y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết $z^2+2|z|=0\Leftrightarrow (x+yi)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ 2xy=0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ |y|-y^2=0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2+|x|=0. \end{cases} (2) \end{array}\right.$

Giải hệ (1) ta được $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} |y|=0 \\ |y|=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$

Giải hệ (2) ta được $\begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn bài toán là $z=0$, $z=i$, $z=-i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\,(x;y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-i|=4$ là đường cong có phương trình

A. $(x-1)^2+y^2=4$. **B.** $x^2+(y-1)^2=4$. **C.** $(x-1)^2+y^2=16$. **D.** $x^2+(y-1)^2=16$.

Lời giải.

Ta có $|z-i|=4|x+yi-i|=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho số phước $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ

A. $N(2;1)$. **B.** $P(-2;1)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $Q(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $w=iz=i(1-2i)=2+i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=-4-5i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=2+2i$. **B.** $z=-2-2i$. **C.** $z=2-2i$. **D.** $z=-2+2i$.

Lời giải.

Ta có $z_1+z_2=(2+3i)+(-4-5i)=-2-2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Cho hai số phức: $z_1=1-2i$, $z_2=2+3i$. Tìm số phức $w=z_1-2z_2$.

A. $w=-3+8i$. **B.** $w=-5+i$. **C.** $w=-3-8i$. **D.** $w=-3+i$.

Lời giải.

Ta có $w=z_1-2z_2=(1-2i)-2(2+3i)=-3-8i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Cho số phức $z=2-3i$. Mô-đun của số phức $w=(1+i)z$ là

A. $|w|=\sqrt{26}$. **B.** $|w|=\sqrt{37}$. **C.** $|w|=5$. **D.** $|w|=4$.

Lời giải.

Ta có $w=(1+i)z=(1+i)(2-3i)=5-i$, $|w|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z=(1+i)^2-(3+3i)$ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** -4. **C.** 4. **D.** $-3-i$.

Lời giải.

Ta có $z=2i-3-3i=-3-i$ nên tổng phần thực và phần ảo bằng -4.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho số phức $z=1-\dfrac{1}{3}i$. Tính số phức $w=i\overline{z}+3z$.

A. $w=\dfrac{8}{3}$. **B.** $w=\dfrac{8}{3}+i$. **C.** $w=\dfrac{10}{3}+i$. **D.** $w=\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $w=i\left(1+\dfrac{1}{3}i\right)+3\left(1-\dfrac{1}{3}i\right)=\left(3-\dfrac{1}{3}\right)+i\,(1-1)=\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho số phức $z=(1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** $2i$.

Lời giải.

Ta có $z=(1+i)^2(1+2i)=2i(1+2i)=-4+2i$.

Do đó phần ảo của số phức z là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(2;-3)$. Tìm tọa độ điểm M' biểu diễn cho số phức iz.

A. $M'(-3;2)$. **B.** $M'(-3;-2)$. **C.** $M'(3;-2)$. **D.** $M'(3;2)$.

Lời giải.

Ta có $z=2-3i\Leftrightarrow iz=3+2i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức iz là điểm $M'(3;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho số phức $z=a+bi$, với a,b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $z-\overline{z}$ không phải là số thực. **B.** Phần ảo của z là bi.

C. Mô-đun của z^2 bằng a^2+b^2. **D.** Số z và $\overline{z}$ có mô-đun khác nhau.

Lời giải.

Ta có: $|z^2|=(|z|)^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho các số phức $z_1=2+3i$, $z_2=4+5i$. Số phức liên hợp của số phức $w=2(z_1+z_2)$ là

A. $\overline{w}=8+10i$. **B.** $\overline{w}=12-16i$. **C.** $\overline{w}=12+8i$. **D.** $\overline{w}=28i$.

Lời giải.

Ta có $w=2(6+8i)=12+16i\Rightarrow\overline{w}=12-16i$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)(1+i)-5+i=0$. Số phức $w=1+z$ bằng

A. $-1+3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $2-3i$.

Lời giải.

Ta có $(1+z)(1+i)-5+i=0 \Leftrightarrow 1+z=\dfrac{5-i}{1+i} \Leftrightarrow 1+z=2-3i \Leftrightarrow z=1-3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho hai số phức $z=3-5i$ và $w=-1+2i$. Điểm biểu diễn số phức $z'=\overline{z}-w\cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(-4;-6)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(4;-6)$. **D.** $(-6;-4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z' &= \overline{z}-w\cdot z \\ &= 3+5i-(-1+2i)\cdot(3-5i) \\ &= 3+5i-(7+11i) \\ &= -4-6i. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho số phức $z=5-4i$. Số phức $z-2$ có

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$. **B.** Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng -4.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4. **D.** Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng 3.

Lời giải.

Với $z=5-4i$ ta có $z-2=5-4i-2=3-4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho hai số thực x, y thoả mãn phương trình $x+2i=3+4yi$. Khi đó giá trị của x và y là

A. $x=3i$, $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=3$, $y=2$. **C.** $x=3$, $y=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=3$, $y=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x+2i=3+4yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 69. Cho số phức $z=-2+i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $M(-1;-2)$. **B.** $P(-2;1)$. **C.** $N(2;1)$. **D.** $Q(1;2)$.

Lời giải.

Với $z=-2+i$ ta có $w=iz=i(-2+i)=-1-2i \Rightarrow$ điểm biểu diễn của w là $M(-1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Số nào trong các số phức sau là số thực?

A. $\left(\sqrt{3}+2i\right)-\left(\sqrt{3}-2i\right)$. **B.** $(3+2i)+(3-2i)$.

C. $(5-2i)+\left(\sqrt{5}-2i\right)$. **D.** $(1+2i)+(-1+2i)$.

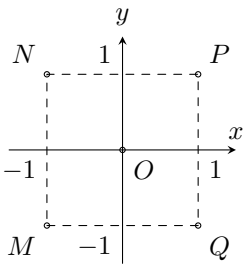
Lời giải.

Ta có $(3+2i)+(3-2i)=3+3=6$ nên $(3+2i)+(3-2i)$ là số thực.

Chọn đáp án B □

Câu 71.

Cho số phức $z=-1+2i, w=2-i$. Điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $z+w$?



A. P. **B**. N. **C**. Q. **D**. M.

Lời giải.

Vì $z+w=-1+2i+2-i=1+i$ nên điểm biểu diễn là điểm $P(1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho số phức $z=1+2i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=2z+\overline{z}$.

A. 3. **B**. 5. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $w=2(1+2i)+(1-2i)=3+2i$. Suy ra tổng của phần thực và phần ảo của w là $3+2=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Cho số phức $z=1-i$. Biểu diễn số phức z^2 là điểm

A. $M(-2;0)$. **B**. $N(1;2)$. **C**. $P(2;0)$. **D**. $Q(0;-2)$.

Lời giải.

Ta có $z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$.

Do đó, điểm biểu diễn số phức z^2 là điểm $Q(0;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&(3+2i)z+(2-i)^2=4+i\\
\Leftrightarrow\ &(3+2i)z=4+i-(2-i)^2\\
\Leftrightarrow\ &(3+2i)z=1+5i\\
\Leftrightarrow\ &z=\frac{1+5i}{3+2i}\\
\Leftrightarrow\ &z=1+i.
\end{aligned}$$

Suy ra phần thực là 1 và phần ảo là 1.

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $(2x-y)i+y(1-2i)=3+7i$. Khi đó biểu thức $P=x^2-xy$ nhận giá trị nào sau đây?

A. 30. **B**. 40. **C**. 10. **D**. 20.

Lời giải.

Ta có $(2x-y)i+y(1-2i)=3+7i \Leftrightarrow y+(2x-3y)i=3+7i \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=8. \end{cases}$

Vậy $P=x^2-xy=64-24=40$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho số phức $z=(1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. $2i$. **B**. 4. **C**. 2. **D**. -4.

Lời giải.

Ta có $z=(1+i)^2(1+2i)=-4+2i$. Suy ra phần ảo của z là 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$ là

A. Đường parabol có phương trình $x=\dfrac{y^2}{4}$. **B**. Đường parabol có phương trình $y=\dfrac{x^2}{4}$.

C. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$. **D**. Đường tròn tâm $I(\sqrt{3};0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$. Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} 2|x+yi-i|=|x+yi-(x-yi)+2i| &\Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=2|(y+1)i| \\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2=4y. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn là đường parabol có phương trình $y=\dfrac{x^2}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho hai số phức $z_1=3-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=1-10i$. **B**. $z=5-4i$. **C**. $z=3-10i$. **D**. $z=3+3i$.

Lời giải.

Ta có $z=z_1+z_2=3-7i+2+3i=5-4i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\overline{z}=3+i$. **B**. $\overline{z}=-3+i$. **C**. $\overline{z}=3-i$. **D**. $\overline{z}=-3-i$.

Lời giải.

Ta có $z=i(3i+1)=3i^2+i=-3+i \Rightarrow \overline{z}=-3-i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Cho số phức z thỏa $z+2\overline{z}=2+3i$, thì $|z|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{3}$. **B**. $\dfrac{85}{3}$. **C**. $\dfrac{29}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{85}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, suy ra $\bar{z}=a-bi$.

Ta có $z+2\bar{z}=2+3i \Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=2+3i \Leftrightarrow \begin{cases}3a=2\\ -b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=-3\end{cases}$.

$\Rightarrow |z|=\dfrac{\sqrt{85}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần ảo của số phức $w=(1+2i)z$.

A. 4. **B.** 7. **C.** -4. **D.** $4i$.

Lời giải.

Ta có $w=(1+2i)(3-2i)=7+4i$. Suy ra phần ảo của w bằng 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Tìm số z thỏa mãn phương trình $z+2\bar{z}=2-4i$.

A. $z=\dfrac{-2}{3}-4i$. **B.** $z=\dfrac{2}{3}-4i$. **C.** $z=\dfrac{-2}{3}+4i$. **D.** $z=\dfrac{2}{3}+4i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó, phương trình có dạng

$$a+bi+2(a-bi)=2-4i \Leftrightarrow 3a-bi=2-4i \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=4.\end{cases}$$

Vậy $z=\dfrac{2}{3}+4i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Cho hai số phức $z_1=2+3i, z_2=1+i$. Tính $|z_1+3z_2|$.

A. $|z_1+3z_2|=\sqrt{11}$. **B.** $|z_1+3z_2|=11$. **C.** $|z_1+3z_2|=\sqrt{61}$. **D.** $|z_1+3z_2|=61$.

Lời giải.

Ta có $z_1+3z_2=(2+3i)+3(1+i)=5+6i \Rightarrow |z_1+3z_2|=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Cho số phức z khác 0 là số thuần ảo. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\bar{z}$ là số thực. **B.** $z=\bar{z}$.

C. $z+\bar{z}=0$. **D.** Phần ảo của z bằng 0.

Lời giải.

Ta có $z=bi$, với $b\neq 0$, suy ra $\bar{z}=-bi$. Do đó $z+\bar{z}=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Cho z_1, z_2 là hai số phức tùy ý. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. **B.** $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

C. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. **D.** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

Lời giải.

Khẳng định $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ sai vì $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $P(-2;1)$. **B.** $Q(1;2)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $N(2;1)$.

Lời giải.

Ta có $w = iz = i(1-2i) = i - 2i^2 = 2 + i$. Do đó, điểm $N(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính mô-đun của số phức $w = z^2 - 1$.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** 20.

Lời giải.

Ta có $w = z^2 - 1 = (2+i)^2 - 1 = 4 + 4i + i^2 - 1 = 2 + 4i$.

Do đó $|w| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $-2 \cdot \overline{z}$.

A. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $-4i$. **B.** Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng -4.

C. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $4i$. **D.** Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng 4.

Lời giải.

Ta có $z = 3 + 2i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 2i$, do đó $-2 \cdot \overline{z} = -6 + 4i$.

Vậy số phức $-2 \cdot \overline{z}$ có phần thực bằng -6 và phần ảo bằng 4.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Cho số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$.

A. $\overline{w} = 3 - 2i$. **B.** $\overline{w} = 1 - 4i$. **C.** $\overline{w} = -1 + 4i$. **D.** $\overline{w} = 3 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 + z_2 = 3 - 2i$.

Khi đó $\overline{w} = 3 + 2i$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = i(7 - 4i)$ trong mặt phẳng tọa độ?

A. $P(-4;7)$. **B.** $M(4;7)$. **C.** $Q(-4;-7)$. **D.** $N(4;-7)$.

Lời giải.

Ta có $z = 7i - 4i^2 = 4 + 7i$. Do đó z được biểu diễn bởi $M(4;7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Số nào trong các số phức sau là số thực?

A. $(1 + 2i) + (-1 + 2i)$. **B.** $(3 + 2i) + (3 - 2i)$.

C. $(5 + 2i) - (\sqrt{5} - 2i)$. **D.** $(\sqrt{3} - 2i) - (\sqrt{3} + 2i)$.

Lời giải.

Số phức có phần ảo bằng 0 là số thực. Do đó $(3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$ là số thực.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = -3 - 5i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + z_2$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** $-1-2i$.

Lời giải.

Ta có $w=-1-2i \Rightarrow$ tổng phần thực và phần ảo của số phức w là -3.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho số phức $z=2+3i$. Tính $\dfrac{z}{\overline{z}}$.

A. $\dfrac{-5+12i}{13}$. **B.** $\dfrac{5-6i}{11}$. **C.** $\dfrac{5-12i}{13}$. **D.** $\dfrac{-5-12i}{13}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z\cdot z}{\overline{z}\cdot z}=\frac{z^2}{|z|^2}=\frac{(2+3i)^2}{2^2+3^2}=\frac{-5+12i}{13}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hai số phức $z_1=2-2i, z_2=-3+3i$. Khi đó số phức z_1-z_2 là

A. $-5+5i$. **B.** $-5i$. **C.** $5-5i$. **D.** $-1+i$.

Lời giải.

Ta có $z_1-z_2=(2-2i)-(-3+3i)=5-5i$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Tổng 2 số phức $1+i$ và $\sqrt{3}+i$ bằng

A. $1+\sqrt{3}+2i$. **B.** $2i$. **C.** $1+\sqrt{3}+i$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $1+i+\sqrt{3}+i=1+\sqrt{3}+2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hai số phức $z=5+2i$ và $z'=1-i$. Tính mô-đun của số phức $w=z-z'$.

A. 5. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{37}$.

Lời giải.

Ta có $|w|=|z-z'|=|5+2i-(1-i)|=|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Cho i là đơn vị ảo. Giá trị của biểu thức $z=(1+i)^2$ là

A. $2i$. **B.** $-i$. **C.** $-2i$. **D.** i.

Lời giải.

Ta có $z=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho số phức $z=2-3i$. Số phức $w=i\cdot\overline{z}+z$ là

A. $w=-1+i$. **B.** $w=5-i$. **C.** $w=-1+5i$. **D.** $w=-1-i$.

Lời giải.

$w=i\cdot(2+3i)+2-3i=-1-i$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Tìm số phức liên hợp của số phức z, biết: $4z+(2+3i)(1-2i)=4+3i$

A. $\overline{z}=-1-\dfrac{5}{4}i$. **B.** $\overline{z}=1-\dfrac{5}{4}i$. **C.** $\overline{z}=-1+\dfrac{5}{4}i$. **D.** $\overline{z}=-1-i$.

Lời giải.

$4z+(2+3i)(1-2i)=4+3i \Leftrightarrow 4z+8-i=4+3i \Leftrightarrow 4z=-4+4i \Leftrightarrow z=-1+i$. Vậy $\overline{z}=-1-i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $a+(b-i)i=1+3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=-2, b=3$. **B**. $a=1, b=3$. **C**. $a=2, b=4$. **D**. $a=0, b=3$.

Lời giải.

Ta có: $a+(b-i)i=1+3i \Leftrightarrow a+1+bi=1+3i \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. D	10. A
11. D	12. A	13. D	14. D	15. D	16. C	17. A	18. B	19. C	20. C
21. B	22. C	23. A	24. C	25. C	26. C	27. B	28. A	29. C	30. B
31. D	32. A	33. D	34. A	35. C	36. A	37. D	38. B	39. B	40. D
41. C	42. B	43. A	44. B	45. A	46. A	47. A	48. D	49. A	50. D
51. D	52. D	53. D	54. D	55. A	56. B	57. C	58. A	59. B	60. A
61. A	62. D	63. C	64. B	65. D	66. A	67. C	68. D	69. A	70. B
71. A	72. B	73. D	74. D	75. B	76. C	77. B	78. B	79. D	80. D
81. A	82. D	83. C	84. C	85. B	86. D	87. A	88. D	89. D	90. B
91. B	92. B	93. A	94. C	95. A	96. A	97. A	98. D	99. D	100. D

❷ Mức độ thông hiểu

Câu 1. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz+(1-i)\overline{z}=-2i$ bằng

A. 6. **B**. -2. **C**. 2. **D**. -6.

Lời giải.

Số phức z có dạng $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} iz+(1-i)\overline{z}=-2i &\Leftrightarrow i(x+yi)+(1-i)(x-yi)=-2i\\ &\Leftrightarrow x-2y-yi=-2i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0\\ -y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\\ y=2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của z là $x+y=4+2=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho $a,b\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a+bi)i-2a=1+3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a-b$ bằng

A. 4. **B**. -10. **C**. -4. **D**. 10.

Lời giải.

Ta có $(a+bi)i-2a=1+3i\Leftrightarrow -2a-b+ai=1+3i\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=1\\ a=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=3\\ b=-7. \end{cases}$

Vậy $a-b=3+7=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ là

A. một điểm. **B**. một đường tròn. **C**. một đường thẳng. **D**. một Parabol.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có

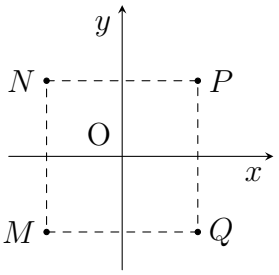
$$\begin{aligned} &2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\\ \Leftrightarrow\ &4\left|z-i\right|^2=\left|z-\overline{z}+2i\right|^2\\ \Leftrightarrow\ &4\left|x+yi-i\right|^2=\left|x+yi-(x-yi)+2i\right|^2\\ \Leftrightarrow\ &4\left[x^2+(y-1)^2\right]=4(y+1)^2\\ \Leftrightarrow\ &4x^2-16y=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2=4y \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một Parabol.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4.

Cho các số phức $z=-1+2i$, $w=2-i$. Điểm nào trong hình vẽ bên biểu diễn số phức $z+w$?



A. P. **B**. N. **C**. Q. **D**. M.

Lời giải.

Ta có $z+w=1+i$, suy ra điểm biểu diễn số phức $z+w$ là điểm P.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$ và $|z_1-z_2|=2$. Môđun $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2. **B**. 3. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

① **Cách 1:** Gọi các số phức $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $(a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\sqrt{3}\Rightarrow a_1^2+b_1^2=3$, $|z_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}=\sqrt{3}\Rightarrow a_2^2+b_2^2=3$.

Do đó

$$\begin{aligned} |z_1-z_2|=2 &\Leftrightarrow \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}=2\\ \Leftrightarrow\ (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=4 &\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2-2a_1a_2-2b_1b_2=4\\ \Leftrightarrow\ 2a_1a_2+2b_1b_2=2.& \end{aligned}$$

Do đó $|z_1+z_2|=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}=\sqrt{a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2a_1a_2+2b_1b_2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

② **Cách 2:** Ta có $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})=4$

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})=8$

$\Rightarrow |z_1+z_2|=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình.

A. $x-2y+1=0$. **B**. $x+2y=0$. **C**. $x-2y=0$. **D**. $x+2y+1=0$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có:

$$\begin{aligned} &|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|\\ &\Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=|x-yi+1+2i|\\ &\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4\\ &\Leftrightarrow x-2y=0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a+6i=2-2bi$, với i là đơn vị ảo. Giá trị của $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $a+6i=2-2bi \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ 6=-2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1.$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Mô-đun của z bằng

A. 20. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & (2+3i)z+4-3i=13+4i \\ \Leftrightarrow\ & (2+3i)z=13+4i-4+3i \\ \Leftrightarrow\ & (2+3i)z=9+7i \\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{9+7i}{2+3i} \\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{(9+7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{18-21.i^2+14i-27i}{2^2+3^2} \\ \Leftrightarrow\ & z=\frac{39-13i}{13} \\ \Leftrightarrow\ & z=3-i \\ \Rightarrow\ & |z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10} \end{aligned}$$

.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Xét số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;-1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$, ta có

$$(z+2i)(\overline{z}+2)=[a+(b+2)i][(a+2)-bi]=[a(a+2)+b(b+2)]+[(a+2)(b+2)-ab]i.$$

$(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a(a+2)+b(b+2)=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=2$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có phương trình $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ có tâm $I(-1;-1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong các số phức $(1+i)^3, (1+i)^4, (1+i)^5, (1+i)^6$ số phức nào là số thuần ảo?

A. $(1+i)^3$. **B.** $(1+i)^4$. **C.** $(1+i)^5$. **D.** $(1+i)^6$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4, (1+i)^5 = -4-4i, (1+i)^6 = -8i$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z biết số phức $(z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo.

A. Đường thẳng $2x-y+1=0$. **B.** Đường thẳng $x+2y-2=0$.

C. Đường thẳng $2x+y-1=0$. **D.** Đường thẳng $2x-y-1=0$.

Lời giải.

Gọi $z = x+yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

$(z-i)(2+i) = (x+yi-i)(2+i) = (2x-y+1)+(x+2y-2)i$.

Để $(z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo thì $2x-y+1=0$ hay tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x-y+1=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong tập số phức, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$. **B.** $z+\overline{z}$ là số thuần ảo.

C. $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$. **D.** $z^2-(\overline{z})^2 = 4ab$ với $z = a+bi$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a_1+b_1i$ và $z_2 = a_2+b_2i$, với $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó $z_1+z_2 = a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i$.

Do đó $\overline{z_1+z_2} = a_1+a_2-(b_1+b_2)\,i = a_1-b_1i+a_2-b_2i = \overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho số phức $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 6+5i$. Tìm số phức liên hợp của $z = 6z_1+5z_2$.

A. $\bar{z} = 51+40i$. **B.** $\bar{z} = 51-40i$. **C.** $\bar{z} = 48+37i$. **D.** $\bar{z} = 48-37i$.

Lời giải.

Ta có $z = 6z_1+5z_2 = 48+37i$ nên $\bar{z} = 48-37i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho số phức $z = a+bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\overline{z}-2+5i| = 1$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $(1-3i)z = (a+3b)+(b-3a)i$, $\overline{z}-2+5i = (a-2)+(5-b)i$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b-3a=0 \\ (a-2)^2+(5-b)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ 5a^2-17a+14=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{7}{5}\ (\text{loại}) \\ a=2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

Vậy $a+b=8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z+(3-4i)=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z=1+5i \Leftrightarrow z=1+i$.

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho số phức $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính $P=a+b$.

A. $P=5$. **B.** $P=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=7$. **D.** $P=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$$z+7+i-|z|(2+i)=0 \Leftrightarrow a+7+(b+1)i-2\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2}i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+7=2\sqrt{a^2+b^2}\ (1) \\ \sqrt{a^2+b^2}=b+1\ (2) \end{cases}.$$

Suy ra $a+7=2(b+1) \Rightarrow a=2b-5$ thế vào (2) ta được

$$\sqrt{(2b-5)^2+b^2}=b+1 \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -1 \\ 4b^2-22b+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $b=4 \Rightarrow a=3 \Rightarrow |z|=5>3$ (không thỏa mãn).

Với $b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a=-2 \Rightarrow |z|=\dfrac{5}{2}<3$.

Vậy $z=-2+\dfrac{3}{2}i \Rightarrow P=a+b=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho số phức $z=2-3i$. Tính mô-đun của số phức $w=(1+i)z$.

A. $|w|=\sqrt{26}$. **B.** $|w|=\sqrt{37}$. **C.** $|w|=5$. **D.** $|w|=4$.

Lời giải.

Ta có $|w|=|(1+i)z|=|1+i|\cdot|2-3i|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}=\sqrt{26}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Tính $P=\left|1+\sqrt{3}i\right|^{2018}+\left|1-\sqrt{3}i\right|^{2018}$.

A. $P=2$. **B.** $P=2^{1010}$. **C.** $P=2^{2019}$. **D.** $P=4$.

Lời giải.

Ta có: $\left|1+\sqrt{3}i\right|=\left|1-\sqrt{3}i\right|=2$, nên $P=2^{2018}+2^{2018}=2^{2019}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=5$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng.

C. Một đường parabol. **D.** Một đường elip.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giải thiết $|z-3+4i|=5 \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i|=5 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính $R=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tìm mô-đun của số phức z biết $z-4=(1+\mathrm{i})\,|z|-(4+3z)\,\mathrm{i}$.

A. $|z|=4$. **B.** $|z|=1$. **C.** $|z|=\dfrac{1}{2}$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải.

Ta có

$$z-4=(1+\mathrm{i})\,|z|-(4+3z)\,\mathrm{i}\Leftrightarrow(1+3\mathrm{i})\,z=(1+\mathrm{i})\,|z|+4\,(1-\mathrm{i})$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\cdot|z|+4\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=\frac{(1+\mathrm{i})\,(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})\,(1-3\mathrm{i})}\cdot|z|+4\cdot\frac{(1-\mathrm{i})\,(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})\,(1-3\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow z=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}\right)\cdot|z|-4\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)=\Leftrightarrow z=\left(\frac{2}{5}\,|z|-\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{|z|}{5}+\frac{8}{5}\right)\mathrm{i}.$$

Khi đó

$$|z|^2=\left(\frac{2}{5}\,|z|-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{|z|}{5}+\frac{8}{5}\right)^2\Leftrightarrow25\,|z|^2=(2\,|z|-4)^2+(|z|+8)^2$$

$$\Leftrightarrow25\,|z|^2=4\,|z|^2-16\,|z|+16+|z|^2+16\,|z|+64\Leftrightarrow20\,|z|^2=80\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=2\\|z|=-2.\end{array}\right.$$

Suy ra $|z|=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tìm phần ảo của số phức z, biết $(1+i)z=3-i$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z=3-i\Leftrightarrow z=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{2}=2-2i$.

Vậy phần ảo của số phức z là -2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho số phức $z=(1-i)^2(3+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. 6. **B.** $-6i$. **C.** -6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $z=(1-i)^2(3+2i)=4-6i$. Do đó $\mathrm{Im}(z)=-6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z-i|=6$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 3. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$|2z-i|=6\Leftrightarrow|2x+(2y-1)i|=6\Leftrightarrow(2x)^2+(2y-1)^2=36\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=9.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R=3$.

Cách khác. $|2z-i|=6\Leftrightarrow\left|2\left(z-\dfrac{1}{2}i\right)\right|=6\Leftrightarrow|2|\cdot\left|z-\dfrac{1}{2}i\right|=6\Leftrightarrow\left|z-\dfrac{1}{2}i\right|=3$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ và bán kính $R=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho số phức $z=a+bi(a,\,b\in\mathbb{R})$ và thỏa mãn điều kiện $(1+2i)z-(2-3i)\bar{z}=2+30i$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=2$. **C.** $S=8$. **D.** $S=-8$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&(1+2i)(a+bi)-(2-3i)(a-bi)=2+30i\\ \Leftrightarrow\ &a-2b+2ai+bi-2a+3b+3ai+2bi=2+30i\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}a-2b-2a+3b=2\\2a+b+3a+2b=30\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}-a+b=2\\5a+3b=30\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=3\\b=5.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $S=8$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho số phức z, biết số phức liên hợp $\bar{z}=(1-2i)(1+i)^3$. Điểm biểu diễn z trên mặt phẳng phức Oxy là điểm nào dưới đây?

A. $P(6;-2)$. **B.** $M(2;6)$. **C.** $Q(6;2)$. **D.** $N(2;-6)$.

Lời giải.

Có $\bar{z}=(1-2i)(1+i)^3=(1-2i)(1+3i+3i^2+i^3)=(1-2i)(-2+2i)=2+6i\Rightarrow z=2-6i$. Vậy điểm biểu diễn của z là $N(2;-6)$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a-3b$.

A. $S=-\dfrac{7}{3}$. **B.** $S=3$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Gọi số phức $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có phương trình $z+1+3i-|z|i=0\Leftrightarrow(a+bi)+1+3i-i\sqrt{a^2+b^2}=0\Leftrightarrow(a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$. Suy ra $S=a-3b=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Nếu mô-đun của số phức z là $r\ (r>0)$ thì mô-đun của số phức $(1-\mathrm{i})^3\cdot z$ bằng

A. $\sqrt{2}r$. **B.** $3r$. **C.** $2r$. **D.** $2\sqrt{2}r$.

Lời giải.

Do $\left|(1-\mathrm{i})^3\cdot z\right|=\left|(1-\mathrm{i})^3\right||z|=|2-2\mathrm{i}|\,|z|=2\sqrt{2}\,|z|=2\sqrt{2}r$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = \mathrm{i}\,(3\mathrm{i} - 1)$ là

A. $\overline{z} = 3 - \mathrm{i}$. **B.** $\overline{z} = -3 + \mathrm{i}$. **C.** $\overline{z} = 3 + \mathrm{i}$. **D.** $\overline{z} = -3 - \mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có $z = \mathrm{i}\,(3\mathrm{i} - 1) \Leftrightarrow z = -3 - \mathrm{i}$ suy ra $\overline{z} = -3 + \mathrm{i}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

A. $\left(\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3} - 2\mathrm{i}\right)$. **B.** $\left(\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) + \left(\sqrt{3} - 2\mathrm{i}\right)$.

C. $\dfrac{1 - 4\mathrm{i}}{1 + 4\mathrm{i}}$. **D.** $(3 + 3\mathrm{i})^2$.

Lời giải.

Do $(3 + 3\mathrm{i})^2 = 9 + 18\mathrm{i} + 9\mathrm{i}^2 = 18\mathrm{i}$ nên $(3 + 3\mathrm{i})^2$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hai số phức $z = 6 + 5i$ và $z' = 5 - 4i + z$. Tìm mô-đun của số phức $w = z \cdot z'$.

A. $|w| = 612$. **B.** $|w| = 61$. **C.** $|w| = 61\sqrt{2}$. **D.** $|w| = 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z' = 5 - 4i + 6 + 5i = 11 + i \Rightarrow z \cdot z' = 61 + 61i$. Do đó $|w| = 61\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i \cdot \overline{z}$.

A. $M\,(5; -5)$. **B.** $M\,(1; -5)$. **C.** $M\,(1; 1)$. **D.** $M\,(5; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{z} = 3 + 2i$.

Khi đó $w = z + i \cdot \overline{z} = 3 - 2i + i(3 + 2i) = 1 + i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức w là $M(1; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

A. $\overline{z} = 3 - i$. **B.** $\overline{z} = -3 - i$. **C.** $\overline{z} = -3 + i$. **D.** $\overline{z} = 3 + i$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(3i + 1) = -3 + i \Rightarrow \overline{z} = -3 - i$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho số phức $z = (2 - 3i)(3 - 4i)$. Điểm biểu diễn số phức z là

A. $M\,(6; 17)$. **B.** $M\,(17; 6)$. **C.** $M\,(-17; -6)$. **D.** $M\,(-6; -17)$.

Lời giải.

Ta có $z = (2 - 3i)(3 - 4i) = -6 - 17i$. Do đó, điểm biểu diễn cho số phức z là $M(-6; -17)$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Rút gọn biểu thức $P = i^{2000} + i^{2021}$.

A. $P = 1 + i$. **B.** $P = 1 - i$. **C.** $P = -1 + i$. **D.** $P = -1 - i$.

Lời giải.

$P = i^{2000} + i^{2021} = 1 + i$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $(1+i)z+2\overline{z}=4-3i$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=10$. **C.** $P=7$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó

$$\begin{aligned}&(1+i)z+2\overline{z}=4-3i\\ \Leftrightarrow&(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=4-3i\\ \Leftrightarrow&(3a-b)+i(a-b)=4-3i\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}3a-b=4\\ a-b=-3\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a=\dfrac{7}{2}\\ b=\dfrac{13}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $P=a+b=10$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $2+3i, 1-2i$ và $-3+i$. Tìm tọa độ của điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

A. $Q(0;2$. **B.** $Q(6;0)$. **C.** $Q(-2;6)$. **D.** $Q(-4;-4$.

Lời giải.

Ta có $M(2;3), N(1;-2), P(-3;1)$.

Gọi H là trung điểm của MP, suy ra $H\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$.

Vì $MNPQ$ là hình bình hành nên H cũng là trung điểm của NQ, do đó $Q(-2;6)$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|2-3i-z|$ là

A. Đường thẳng $x-2y-3=0$. **B.** Đường thẳng $x+2y+1=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2=2$. **D.** Đường tròn $x^2+y^2=4$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}&|z-i|=|2-3i-z|\\ \Leftrightarrow\ &|x+yi-i|=|2-3i-x-yi|\\ \Leftrightarrow\ &|x+(y-1)i|=|(2-x)+(-3-y)i|\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(2-x)^2+(-3-y)^2}\\ \Leftrightarrow\ &x^2+(y-1)^2=(2-x)^2+(-3-y)^2\\ \Leftrightarrow\ &x-2y-3=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+4-8i|=2\sqrt{5}$ là đường tròn có phương trình

A. $(x-4)^2+(y+8)^2=20$. **B.** $(x+4)^2+(y-8)^2=2\sqrt{5}$.

C. $(x-4)^2+(y+8)^2=2\sqrt{5}$. **D.** $(x+4)^2+(y-8)^2=20$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, suy ra các điểm biểu diễn cho các số phức z có tọa độ là $(x;y)$.
Theo đề ta có

$$|z+4-8i|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|x+yi+4-8i|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow(x+4)^2+(y-8)^2=20.$$

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $7a+4+2bi=-10+(6-5a)i$. Tính $P=(a+b)|z|$.

A. $P=12\sqrt{17}$. **B.** $P=\dfrac{72\sqrt{2}}{49}$. **C.** $P=\dfrac{-4\sqrt{29}}{7}$. **D.** $P=24\sqrt{17}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&7a+4+2bi=-10+(6-5a)i\\
\Leftrightarrow\ &(7a+14)+(5a+2b-6)i=0\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}7a+14=0\\5a+2b-6=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=-2\\b=8\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &z=-2+8i.
\end{aligned}$$

Vậy $P=(a+b)|z|=(-2+8)\cdot\sqrt{(-2)^2+8^2}=12\sqrt{17}$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Tìm số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$.

A. $z=-2+i$. **B.** $z=-2-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=2+i$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&z-(2+3i)\overline{z}=1-9i\\
\Leftrightarrow\ &(a+bi)-(2+3i)(a-bi)=1-9i\\
\Leftrightarrow\ &(-a-3b)+(3b-3a)i=1-9i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-a-3b=1\\-3a+3b=-9\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=2\\b=-1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $z=2-i$.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hai số phức $z_1 = 2+4i, z_2 = -1+3i$. Tính môđun của số phức $w = z_1\overline{z_2} - 2\overline{z_1}$.

A. $|w| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|w| = 2\sqrt{10}$. **C.** $|w| = 4\sqrt{2}$. **D.** $|w| = 2$.

Lời giải.

Ta có $w = (2+4i)(-1-3i)-2(2-4i) = (10-10i)-(4-8i) = 6-2i$. Do đó $|w| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = 2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Biết phương trình $z^2+2z+m = 0$ $(m \in \mathbb{R})$ có một nghiệm phức $z_1 = -1+3i$ và z_2 là nghiệm phức còn lại. Số phức $z_1 + 2z_2$ là

A. $-3+3i$. **B.** $-3+9i$. **C.** $-3-3i$. **D.** $-3+9i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} = -2 \Leftrightarrow z_2 = -2 - z_1 = -2+1-3i = -1-3i$.

Vậy $z_1 + 2z_2 = -3-3i$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm số thực m sao cho $m^2-1+(m+1)i$ là số ảo.

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = \pm 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

$m^2-1+(m+1)i$ là số ảo khi $m^2-1 = 0$ hay $m = \pm 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hai số phức $z_1 = m+3i$, $z_2 = 2-(m+1)i$, với $m \in \mathbb{R}$. Tìm các giá trị của m để $w = z_1 \cdot z_2$ là số thực.

A. $m = 1$ hoặc $m = -2$. **B.** $m = 2$ hoặc $m = -1$.

C. $m = 2$ hoặc $m = -3$. **D.** $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 \cdot z_2 = (m+3i)\,(2-(m+1)i) = 5m+3+(6-m-m^2)\,i$.

Để w là số thực thì $6-m-m^2 = 0 \Leftrightarrow \hoice{m=-3 \\ m=2.}$

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hai số phức $z = m+3i$ và $z' = 2-(m+1)i$. Tích các giá trị của m để zz' là số thực là

A. 6. **B.** -6. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có $zz' = (m+3i)\,(2-(m+1)i) = 5m+3+i(-m^2-m+6)$.

Do đó zz' là số thực khi và chỉ khi $-m^2-m+6 = 0 \Leftrightarrow \hoice{m=2 \\ m=-3.}$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i| = 5$ và $z-4$ là số thuần ảo khác 0?

A. 2. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ (với $x,y\in\mathbb{R}$). Ta có $z-4=(x-4)+yi$ là số thuần ảo khác 0 nên $\begin{cases}y\neq 0\\ x=4.\end{cases}$

Khi đó $|z-3i|=5\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=25\Leftrightarrow (y-3)^2=9\Leftrightarrow y=6$ (vì $y\neq 0$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=3$.

A. Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $r=3$. **B**. Đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $r=3$.

C. Đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $r=9$. **D**. Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $r=9$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$, ta có $M(x;y)$ biểu diễn số phức z.

Do $|z+1-2i|=3\Rightarrow|(x+1)+(y-2)i|=3\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=3\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Suy ra tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn z là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $r=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Gọi x,y là hai số thực thỏa $x(3-5i)-y(2-i)^2=4-2i$. Tính $M=2x-y$.

A. $M=1$. **B**. $M=2$. **C**. $M=-2$. **D**. $M=0$.

Lời giải.

Ta có $x(3-5i)-y(2-i)^2=4-2i\Leftrightarrow x(3-5i)-y(4-4i+i^2)=4-2i\Leftrightarrow(3x-3y)-(5x-4y)i=4-2i$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}3x-3y=4\\5x-4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{10}{3}\\y=-\dfrac{14}{3}\end{cases}.$$

Suy ra $M=2x-y=2\cdot\left(-\dfrac{10}{3}\right)+\dfrac{14}{3}=-2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x+6y-3=0$. **B**. $4x-6y+3=0$. **C**. $4x-6y-3=0$. **D**. $4x+6y+3=0$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó

$$|z+1-i|=|z-1+2i|$$

$$\Leftrightarrow\ |x+yi+1-i|=|x+yi-1+2i|$$

$$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow\ 4x-6y-3=0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho số phức $z=2-3i$. Tìm mô-đun của số phức $w=2z+(1+i)\overline{z}$.

A. $|w|=\sqrt{10}$. **B.** $|w|=4$. **C.** $|w|=\sqrt{15}$. **D.** $|w|=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$w=2z+(1+i)\overline{z} \Leftrightarrow w=2(2-3i)+(1+i)(2+3i)=4-6i+2+2i+3i-3=3-i$.
Khi đó $|w|=\sqrt{10}$.
Chọn đáp án A □

Câu 51. Cho hai số thực x, y thỏa phương trình $2x+3+(1-2y)i=2(2-i)-3yi+x$. Tính giá trị biểu thức $P=x^2-3xy-y$.

A. $P=-12$. **B.** $P=13$. **C.** $P=11$. **D.** $P=-3$.

Lời giải.

Ta có

$$2x+3+(1-2y)i=2(2-i)-3yi+x \Leftrightarrow 2x+3+(1-2y)i=4+x+(-3y-2)i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+3=4+x\\1-2y=-3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-3.\end{cases}$$

Suy ra $P=x^2-3xy-y=1^2-3\cdot(-3)-(-3)=13$.
Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho số phức $z=a+bi$ (a, b là số thực) thỏa mãn $z+|z|-\overline{z}=5-8i$. Giá trị của biểu thức a^2+b bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -7. **D.** 12.

Lời giải.

Thay $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\overline{z}=a-bi$ vào phương trình đã cho, ta được

$$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}-a+bi=5-8i \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=5\\2b=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=9\\b=-4\end{cases}$$

Vậy $a^2+b=5$.
Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho số phức $z=a+bi$ (a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\overline{z}-2+5i|=1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=a-bi$ và $(1-3i)z=(1-3i)(a+bi)=a-3b+(-3a+b)i$.

$$\begin{cases}(1-3i)z=\text{ là số thực}\\|\overline{z}-2+5i|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a+b=0\\(a-2)^2+(5-b)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,\ b=6\ \text{(nhận)}\\a=\dfrac{7}{5},\ b=\dfrac{21}{5}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Vậy $a+b=8$.
Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 4 - 3i$. Khi đó $z_1 \cdot z_2$ có phần ảo bằng

A. 11. **B.** 2. **C.** -11. **D.** -2.

Lời giải.

$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(4 - 3i) = 11 - 2i$.

Vậy số phức $z_1 \cdot z_2$ có phần ảo bằng -2.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho số phức thỏa mãn $\overline{z} = \dfrac{1 + 3i}{1 - i}$.Tìm mô-đun của $w = i\overline{z} + z$.

A. $|w| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|w| = 4\sqrt{2}$. **C.** $|w| = \sqrt{2}$. **D.** $|w| = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z} = \dfrac{1 + 3i}{1 - i} \Rightarrow \overline{z} = -1 + 2i \Rightarrow z = -1 - 2i \Rightarrow w = -3 - 3i \Rightarrow |w| = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $3z - 2\overline{z} - 6 + 10i = 0$. Tính $a - b$.

A. 8. **B.** -8. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3z - 2\overline{z} - 6 + 10i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3(a + bi) - 2(a - bi) - 6 + 10i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a - 6 + (5b + 10)i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra $a - b = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $(1 - i)z + 2i\overline{z} = 5 + 3i$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (1 - i)z + 2i\overline{z} = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & (1 - i)(a + bi) + 2i(a - bi) = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & a + 3b + (a + b)i = 5 + 3i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a + 3b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = -i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z_1 z_2$.

A. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng 3. **B.** Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng -3.

C. Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng $3i$. **D.** Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $-3i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 z_2 = (3-4i)(-i) = -4-3i$ có phần thực là -4 và phần ảo là -3.
Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $2(z-1)(2-i) = (3+i)(\overline{z}+2i)$. Tìm phần thực của số phức z^9.
A. -1. **B.** 1. **C.** -16. **D.** 16.

Lời giải.

Đặt $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.
Khi đó

$$\begin{aligned} & 2(z-1)(2-i) = (3+i)(\overline{z}+2i) \\ \Leftrightarrow\ & (a-1+bi)(4-2i) = (3+i)(a-bi+2i) \\ \Leftrightarrow\ & 4a+2b-4+(-2a+4b+2)i = 3a+b-2+(a-3b+6)i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+b=2 \\ -3a+7b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 1+i \Rightarrow z^9 = (1+i)^9 = (1+i)^8(1+i) = 2^4(1+i) = 16+16i$.
Phần thực của z^9 là 16.
Chọn đáp án D □

Câu 60. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để số phức $w = (2+i)(3-2xi)$ là số thuần ảo.
A. $x = 0$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $w = (2+i)(3-2xi) = (6+2x)+(-4x+3)i$ là số thuần ảo khi $6+2x = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| = 3$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-2i)z+1-5i$ là một đường tròn tâm I bán kính R. Tìm tọa độ của I.
A. $I(-1;5)$. **B.** $I(1;-5)$. **C.** $I(5;1)$. **D.** $I(-3;2)$.

Lời giải.

Từ $w = (3-2i)z+1-5i$ suy ra $z = \dfrac{w-1+5i}{3-2i}$. Thay vào $|z-2i| = 3$ ta được

$$\left|\frac{w-1+5i}{3-2i} - 2i\right| = 3 \Leftrightarrow |w-1+5i-2i(3-2i)| = 3|3-2i| \Leftrightarrow |w-5-i| = 3\sqrt{13}.$$

Từ đó suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(5;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 62. Tìm số phức z biết $|z-2-3i| = \sqrt{10}$ và phần ảo của z gấp đôi phần thực.
A. $z = 6+3i; z = 2+i$. **B.** $z = 3+6i; z = \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$.
C. $z = 3+6i; z = 1+2i$. **D.** $z = 3-6i; z = \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$.

Lời giải.

Đặt $z = x+2xi$ với $x \in \mathbb{R}$ ta có $(x-2)^2+(2x-3)^2 = 10 \Leftrightarrow x = 3; x = \dfrac{1}{5}$.
Vậy $z = 3+6i; z = \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$.
Chọn đáp án B □

Câu 63. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$, biết $z = -i(4i + 3)$.

A. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng 3. **B**. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng -3.

C. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng $3i$. **D**. Phần thực bằng 4, phần ảo bằng $-3i$.

Lời giải.

$z = 4 - 3i$ nên $\bar{z} = 4 + 3i$. Vậy $\bar{z}$ có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 3.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z - 5 = 3i$. Tìm số phức liên hợp của số phức z.

A. $\bar{z} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{7}{5}i$. **B**. $\bar{z} = \dfrac{11}{5} + \dfrac{7}{5}i$. **C**. $\bar{z} = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{7}{5}i$. **D**. $\bar{z} = -\dfrac{11}{5} + \dfrac{7}{5}i$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $z = \dfrac{5 + 3i}{1 + 2i} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{7}{5}i$. Suy ra $\bar{z} = \dfrac{11}{5} + \dfrac{7}{5}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Trong mặt phẳng phức, biết số phức z có điểm biểu diễn nằm trong góc phần tư (I). Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{1}{iz}$ nằm trong góc phần tư nào?

A. (I). **B**. (II). **C**. (III). **D**. (IV).

Lời giải.

Điểm biểu diễn của iz chính là ảnh của điểm biểu diễn của z qua phép quay tâm O, góc quay $90°$. Trong khi điểm biểu diễn của $\dfrac{1}{z}$ và điểm biểu diễn của z khác phía đối với trục hoành và cùng phía đối với trục tung. Vậy điểm biểu diễn của w thuộc góc phần tư (III).

Chọn đáp án C □

Câu 66. Nếu môđun của số phức z bằng r $(r > 0)$ thì môđun của số phức $(1 - \mathrm{i})^2 z$ bằng

A. $2r$. **B**. $4r$. **C**. r. **D**. $r\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$|(1 - \mathrm{i})^2 z| = |(1 - \mathrm{i})^2| \cdot |z| = 2|z| = 2r.$$

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$. Môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B**. $\sqrt{15}$. **C**. 17. **D**. 15.

Lời giải.

Ta có $w = 4 - \mathrm{i}$. Suy ra $|w| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Môđun của số phức $z = (2 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})^4$ là

A. $|z| = -8 + 12\mathrm{i}$. **B**. $|z| = \sqrt{13}$. **C**. $|z| = 4\sqrt{13}$. **D**. $|z| = \sqrt{31}$.

Lời giải.

Ta có $(1 + \mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i} \Rightarrow (1 + \mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$ nên

$$z = (2 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})^4 = (2 - 3\mathrm{i})(-4) = -8 + 12\mathrm{i}.$$

Từ đó $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho số phức z thỏa mãn $z+2\overline{z}=12-2\text{i}$. Phần thực a và phần ảo b của z là

A. $a=4,\ b=2\text{i}$. **B.** $a=4,\ b=2$. **C.** $a=4,\ b=-2$. **D.** $a=4,\ b=-2\text{i}$.

Lời giải.

Ta có $z=a+b\text{i}$. Từ giả thiết suy ra

$$a+b\text{i}+2(a-b\text{i})=12-2i \Leftrightarrow 3a-b\text{i}=12-2\text{i}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a=12 \\ -b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy $a=4,\ b=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho số phức $z=\left(\sqrt{2}+3i\right)^2$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2}+3$. **B.** $6\sqrt{2}+11$. **C.** $6\sqrt{2}-7$. **D.** 11.

Lời giải.

Ta có

$$z=\left(\sqrt{2}+3i\right)^2=-7+6\sqrt{2}i.$$

Vậy số z có phần thực bằng -7 và phần ảo bằng $6\sqrt{2}$.

Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng $6\sqrt{2}-7$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, số phức $z=(2-3i)-(3+i)$ được biểu diễn bởi điểm nào sau đây?

A. $M(-1;-4)$. **B.** $N(1;-4)$. **C.** $P(1;4)$. **D.** $Q(-1;4)$.

Lời giải.

Ta có

$$z=(2-3i)-(3+i)=-1-4i.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(-1;-4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x(3+2i)+y(1-4i)=1+24i$. Tính giá trị $x+y$.

A. $x+y=4$. **B.** $x+y=3$. **C.** $x+y=2$. **D.** $x+y=-3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & x(3+2i)+y(1-4i)=1+24i \\ \Leftrightarrow\ & 3x+2xi+y-4yi=1+24i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-4y=24 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x=2 \\ y=-5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x+y=2+(-5)=-3$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Tìm mô-đun của số phức z thỏa mãn điều kiện $z-2\overline{z}=3+4i$.

A. $|z|=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$. **B.** $|z|=\dfrac{\sqrt{95}}{3}$. **C.** $|z|=\dfrac{\sqrt{91}}{3}$. **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, thay vào phương trình ta có

$$\begin{aligned} & a+bi-2a+2bi=3+4i \\ \Leftrightarrow\ & -a+3bi=3+4i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=-3 \\ b=\dfrac{4}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Mô đun của z là $|z|=\sqrt{9+\dfrac{16}{9}}=\dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2+(\overline{z})^2=0$ là

A. Trục hoành và trục tung.

B. Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

C. Trục hoành.

D. Các đường phân giác của góc tạo bởi hai trục tọa độ.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$$\begin{aligned} & z^2+(\overline{z})^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+yi)^2+(x-yi)^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2=y^2 \\ \Leftrightarrow\ & y=\pm x. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các đường phân giác của góc tạo bởi hai trục tọa độ.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho số phức z có điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(1;-2)$. Tính mô-đun của số phức $w=i\overline{z}-z^2$.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $z=1-2i\Rightarrow w=i(1+2i)-(1-2i)^2=i-2-(-3-4i)=1+5i$.

Vậy $|w|=\sqrt{26}$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|\overline{z}+2-i|=4$ là đường tròn tâm I có bán kính R lần lượt là

A. $I(-2;-1);R=4$. **B.** $I(-2;-1);R=2$. **C.** $I(2;-1);R=4$. **D.** $I(2;-1);R=2$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra $\overline{z} = a - bi$.

Ta có $|\overline{z} + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow (a+2)^2 + (-b-1)^2 = 16 \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b+1)^2 = 16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phần ảo của z là bi. **B.** Mô-đun của z^2 bằng $a^2 + b^2$.

C. $z - \overline{z}$ không phải là số thực. **D.** Số z và $\overline{z}$ có mô-đun khác nhau.

Lời giải.

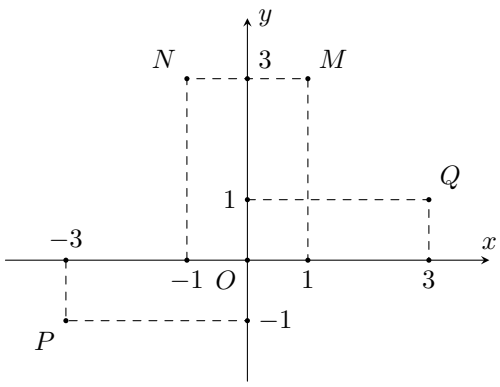
Ta có $|z^2| = |z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 78.

Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = (1+i)(2-i)$?

A. Q. **B.** M. **C.** N. **D.** P.



Lời giải.

Ta có $z = (1+i)(2-i) = 3 + i$. Điểm biểu diễn của số phức z là $Q(3;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Xét các số phức z thỏa điều kiện $|z - 3 + 2i| = 5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z + 1 - i$ là?

A. Đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R = 5$. **B.** Đường tròn tâm $I(-2;1)$, bán kính $R = 5$.

C. Đường tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R = 5$. **D.** Đường tròn tâm $I(-4;3)$, bán kính $R = 5$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z - 3 + 2i| = 5 \Leftrightarrow |w - 1 + i - 3 + 2i| = 5 \Leftrightarrow |x + yi - 4 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho số phức $z = a + bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. **B.** $\overline{z} = a - bi$. **C.** z^2 là số thực. **D.** $z \cdot \overline{z}$ là số thực.

Lời giải.

Ta có $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow z^2$ **không** phải là số thực khi $ab \neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho hai số phức z và z'. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $|z + z'| = |z| + |z'|$. **B.** $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$. **C.** $\overline{z} \cdot \overline{z'} = \overline{z \cdot z'}$. **D.** $\overline{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'}$.

Lời giải.

Mệnh đề $|z+z'|=|z|+|z'|$ **sai** vì với $z=1+i$ và $z'=1-i$ thì

$$\begin{aligned}&|z+z'|=|(1+i)+(1-i)|=|2|=2\\&|z|+|z'|=|1+i|+|1-i|=2\sqrt{2}\\\Rightarrow&|z+z'|\neq|z|+|z'|.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=3z_1-2z_2$ là

A. 12. **B.** 1. **C.** 11. **D.** $12i$.

Lời giải.

$w=3z_1-2z_2=-1+12i$. Vậy w có phần ảo là 12.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x$. Khi đó giá trị của $x^2-3xy-y$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x\\\Leftrightarrow\ &2x+1+(1-2y)i=4-x+(y-2)i\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}2x+1=4-x\\1-2y=y-2\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $x^2-3xy-y=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho các số phức z thỏa mãn $|zi-(2+i)|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là

A. $I(1;-2)$. **B.** $I(-1;2)$. **C.** $I(-1;-2)$. **D.** $I(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $|i(z-1+2i)|=2\Rightarrow|z-1+2i|=2\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=2$.
Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)\cdot\overline{z}+\overline{(1+2i)}\cdot(1-2z)=10+7i$. Tính mô đun của z.

A. 3 . **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 5 . **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(1-i)\cdot\overline{z}+\overline{(1+2i)}\cdot(1-2z)=10+7i\\
\Leftrightarrow\ &(1-i)(a-bi)+(1-2i)(1-2(a+bi))=10+7i\\
\Leftrightarrow\ &a-b-ai-bi+(1-2i)(1-2a-2bi)=10+7i\\
\Leftrightarrow\ &a-b-ai-bi+1-2a-2(1-2a)i-2bi-4b=10+7i\\
\Leftrightarrow\ &-3a-5b+1+3ai-3bi-2i=10+7i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-3a-5b+1=10\\3a-3b-2=7\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=1\\b=-2.\end{cases}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |z|=|1-2i|=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Số phức $z=(1-i)^{2018}$ có phần thực bằng

A. 1. **B**. 2^{1009}. **C**. -2^{1009}. **D**. 0.

Lời giải.

$z=(1-i)^{2018}=[(1-i)^2]^{1009}=(-2i)^{1009}=(-2)^{1009}i=-2^{1009}i$.

Suy ra phần thực của số phức z bằng 0.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Cho số phức $z=a+bi$ (trong đó a, b là các số thực) thỏa mãn $3z-(4+5i)\overline{z}=-17+11i$. Tính ab.

A. $ab=6$. **B**. $ab=-3$. **C**. $ab=3$. **D**. $ab=-6$.

Lời giải.

Ta có $3z-(4+5i)\overline{z}=-17+11i\Leftrightarrow 3(a+bi)-(4+5i)(a-bi)=-17+11i$

$\Leftrightarrow -a-5b+(-5a+7b)i=-17+11i\Leftrightarrow\begin{cases}-a-5b=-17\\-5a+7b=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow ab=6.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn cho số z thỏa mãn $|(1+2i)z-10|=|(2+i)\overline{z}+5|$ là

A. hai đường thẳng cắt nhau. **B**. hai đường thẳng song song.

C. một đường thẳng. **D**. một đường tròn.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&|(1+2i)z-10|=|(2+i)\overline{z}+5|\\
\Leftrightarrow\ &|(1+2i)(x+yi)-10|=|(2+i)(x-yi)+5|\\
\Leftrightarrow\ &|x-2y-10+(2x+y)i|=|(2x+y)+(x-2y+5)i|\\
\Leftrightarrow\ &(x-2y-10)^2+(2x+y)^2=(2x+y)^2+(x-2y+5)^2\\
\Leftrightarrow\ &2x-4y-5=0.
\end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số z là đường thẳng $2x-4y-5=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Tìm phần ảo của số phức z biết $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$.

A. 1. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} z-(2+3i)\overline{z}=1-9i &\Leftrightarrow x+yi-(2+3i)(x-yi)=1-9i\\ &\Leftrightarrow x+yi-[2x+3y+(3x-2y)i]=1-9i\\ &\Leftrightarrow -x-3y-3(x-y)i=1-9i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x-3y=1\\ -3(x-y)=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\\ y=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức z là $y=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho số phức $w=(2+i)^2-3(2-i)$. Giá trị của $|w|$ là

A. $\sqrt{54}$. **B.** $\sqrt{58}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{43}$.

Lời giải.

Ta có $w=-3+7i$ nên $|w|=\sqrt{58}$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Cho số phức $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $z+\overline{z}=2bi$. **B.** $z-\overline{z}=2a$. **C.** $z\cdot\overline{z}=a^2-b^2$. **D.** $|z^2|=|z|^2$.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=a-bi$, do đó

- ☑ $z+\overline{z}=2a$.
- ☑ $z-\overline{z}=2bi$.
- ☑ $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$.
- ☑ $|z^2|=|z\cdot z|=|z|\cdot|z|=|z|^2$.

Vậy chỉ có mệnh đề $|z^2|=|z|^2$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Cho số phức z thỏa mãn $2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i$. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Theo bài ra

$$\begin{aligned}&2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i\\ \Leftrightarrow&5x-3y-(3x+y)i=1-9i\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}5x-y=1\\3x+y=9\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}x=2\\y=3.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng -3.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Tính mô-đun của số phức $z=(1+2i)(2-i)$.

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=\sqrt{5}$. **C.** $|z|=10$. **D.** $|z|=6$.

Lời giải.

Ta có $|z|=|1+2i|\cdot|2-i|=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho số phức z thỏa mãn $(2-3i)z+6=5i-1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{z}=\dfrac{29}{13}+\dfrac{11}{13}i$. **B.** $\overline{z}=\dfrac{29}{13}-\dfrac{11}{13}i$. **C.** $\overline{z}=-\dfrac{29}{13}-\dfrac{11}{13}i$. **D.** $\overline{z}=-\dfrac{29}{13}+\dfrac{11}{13}i$.

Lời giải.

$z=\dfrac{5i-7}{2-3i}=-\dfrac{29}{13}-\dfrac{11}{13}i\Rightarrow\overline{z}=-\dfrac{29}{13}+\dfrac{11}{13}i$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho số phức thỏa $|z|=3$. Biết rằng tập hợp số phức $w=\bar{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải.

Đặt $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $w=\bar{z}+i\Leftrightarrow x+yi=\bar{z}+i\Leftrightarrow\bar{z}=x+(y-1)i\Leftrightarrow z=x+(1-y)i$.

Theo đề $|z|=3\Leftrightarrow x^2+(1-y)^2=9\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=9$.

Vậy tập hợp số phức $w=\bar{z}+i$ là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Mô-đun của số phức $w=\dfrac{\bar{z}-2z+1}{z^2}$ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $-\sqrt{10}$. **D.** $-\sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)(z-i)+2z=2i\Leftrightarrow(3+i)z=-1+3i\Leftrightarrow z=i$.

Suy ra $w=\dfrac{\bar{z}-2z+1}{z^2}=\dfrac{-i-2i+1}{i^2}=-1+3i$.

Vậy $|w|=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i+1|=4$ là

A. đường tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2$. **B.** hình tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=4$.

C. đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=2$. **D.** đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=4$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-i+1|=4\Leftrightarrow|(x+1)+(y-1)i|=4\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i+1|=4$ là đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Mô-đun của số phức $z=\left(\cos\dfrac{11\pi}{24}+\cos\dfrac{5\pi}{24}\right)-\left(\sin\dfrac{11\pi}{24}-\sin\dfrac{5\pi}{24}\right)i$ bằng

A. $\cos\dfrac{\pi}{8}+\sin\dfrac{\pi}{8}$. **B.** 2. **C.** $2\cos\dfrac{\pi}{8}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}|z|^2&=\left(\cos\frac{11\pi}{24}+\cos\frac{5\pi}{24}\right)^2+\left(\sin\frac{11\pi}{24}-\sin\frac{5\pi}{24}\right)^2\\&=\cos^2\frac{11\pi}{24}+\cos^2\frac{5\pi}{24}+2\cos\frac{11\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}+\sin^2\frac{11\pi}{24}+\sin^2\frac{5\pi}{24}-2\sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\\&=2+2\left(\cos\frac{11\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}-\sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\right)=2+2\cos\frac{16\pi}{24}=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 99. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-1|=|\overline{z}-i|$ là đường thẳng

A. $x-y=0$. **B.** $x-y+1=0$. **C.** $x+y+1=0$. **D.** $x+y=0$.

Lời giải.

Gọi $z=x+iy$. Khi đó

$$\begin{aligned}|z-1|=|\overline{z}-i|&\Leftrightarrow|(x-1)+iy|=|x-(y+1)i|\\&\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2\\&\Leftrightarrow x+y=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho số phức z thỏa mãn $z(1-2i)+\overline{z}\cdot i=15+i$. Mô-đun của z bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}&(x+yi)(1-2i)+(x-yi)i=15+i\\\Leftrightarrow\ &x+2y+yi-2xi+xi+y=15+i\\\Leftrightarrow\ &x+3y+(y-x)i=15+i\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x+3y=15\\-x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\Leftrightarrow z=3+4i\Rightarrow|z|=5.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. D	4. A	5. D	6. C	7. A	8. D	9. D	10. D
11. A	12. A	13. D	14. B	15. D	16. B	17. A	18. C	19. A	20. D
21. B	22. C	23. A	24. C	25. D	26. B	27. D	28. B	29. D	30. C
31. C	32. B	33. D	34. A	35. B	36. C	37. A	38. D	39. D	40. C
41. B	42. C	43. C	44. C	45. B	46. D	47. A	48. C	49. C	50. A
51. B	52. B	53. D	54. D	55. D	56. A	57. A	58. B	59. D	60. B
61. C	62. B	63. A	64. B	65. C	66. A	67. A	68. C	69. B	70. C
71. A	72. D	73. D	74. D	75. B	76. A	77. B	78. A	79. C	80. C
81. A	82. A	83. A	84. A	85. D	86. D	87. A	88. C	89. C	90. B
91. D	92. D	93. A	94. D	95. A	96. A	97. C	98. D	99. D	100. C

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính giá trị $P=a+b$

A. $P=\dfrac{5}{2}$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Ta có $z+7+i-|z|(2+i)=0\Leftrightarrow a+bi+7+i-\sqrt{a^2+b^2}(2+i)=0$.

$\Leftrightarrow \left(a+7-2\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+7-2\sqrt{a^2+b^2}=0 \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b-5 \\ \sqrt{a^2+b^2}=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b-5 \\ 4b^2-22b+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b-5 \\ b=4 \text{ hay } b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Với $b=4\Rightarrow a=3\Rightarrow |z|=5$ (vô lý).

Với $b=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=-2\Rightarrow |z|=\dfrac{5}{2}<3$.

Suy ra $P=a+b=-2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{10}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+iy$ (với x, $y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$). Khi đó,

$$\begin{aligned} & |z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \\ \Leftrightarrow\ & |(x-1)+i(y+1)|=|(x+1)-i(y+2)| \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y+1)^2=(x+1)^2+(y+2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+2y+3=0 \\ \Leftrightarrow\ & y=-2x-\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ta có

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\geq\sqrt{\frac{9}{20}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=-2x-\dfrac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{3}{10}. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 x.f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 13.

Lời giải.

Đặt $t = 2x$, ta có $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: + Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

+ Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó, ta có

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 t f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} & I = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot f(2) - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)dt \\ \Leftrightarrow\ & I = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4}\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & I = 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho khai triển $\left(\sqrt{3}+x\right)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{2019}x^{2019}$.
Hãy tính tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots + a_{2016} - a_{2018}$.

A. $\left(\sqrt{3}\right)^{1009}$. **B.** 0. **C.** 2^{2019}. **D.** 2^{1009}.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức khai triển của nhị thức: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3}+x\right)^{2019} &= \sum_{k=0}^{2019} \mathrm{C}_{2019}^k \left(\sqrt{3}\right)^k x^{2019-k} \\ &= \mathrm{C}_{2019}^0 \left(\sqrt{3}\right)^{2019} + \mathrm{C}_{2019}^1 \left(\sqrt{3}\right)^{2018} x + \ldots + \mathrm{C}_{2019}^{2018}\cdot\sqrt{3}x^{2018} + \mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019} \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{2019}x^{2019}. \end{aligned}$$

Ta có: $i^m = \begin{cases} 1 & \text{khi } m = 4l \\ i & \text{khi } m = 4l+1 \\ -1 & \text{khi } m = 4l+2 \\ -i & \text{khi } m = 4l+3 \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$.

Chọn $x = i$ ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3}+i\right)^{2019} &= \sum_{k=0}^{2019} \mathrm{C}_{2019}^k \left(\sqrt{3}\right)^k i^{2019-k} \ \left(i^2 = -1\right) \\ &= \mathrm{C}_{2019}^0 \left(\sqrt{3}\right)^{2019} + \mathrm{C}_{2019}^1 \left(\sqrt{3}\right)^{2018} i + \ldots + \mathrm{C}_{2019}^{2018}\cdot\sqrt{3}\cdot i^{2018} + \mathrm{C}_{2019}^{2019}i^{2019} \\ &= a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + \ldots + a_{2018}i^{2018} + a_{2019}i^{2019} \\ &= a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + \ldots - a_{2018} - a_{2019}i. \end{aligned}$$

Chọn $x = -i$ ta có:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^{2019} &= \sum_{k=0}^{2019} \mathrm{C}_{2019}^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{k}(-i)^{2019-k}\\ &= \mathrm{C}_{2019}^{0}\left(\sqrt{3}\right)^{2019} - \mathrm{C}_{2019}^{1}\left(\sqrt{3}\right)^{2018} i - \ldots + \mathrm{C}_{2019}^{2018}\cdot\sqrt{3}\cdot i^{2018} - \mathrm{C}_{2019}^{2019} i^{2019}\\ &= a_0 - a_1 i + a_2 i^2 - a_3 i^3 + \ldots + a_{2018} i^{2018} - a_{2019} i^{2019}\\ &= a_0 - a_1 i - a_2 + a_3 i + \ldots - a_{2018} + a_{2019} i.\\ &\Rightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)^{2019} + \left(\sqrt{3}-1\right)^{2019} = 2\left(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots + a_{2016} - a_{2018}\right).\\ &\Leftrightarrow 2S = \left[\left(\sqrt{3}+1\right)^3\right]^{673} + \left[\left(\sqrt{3}-1\right)^3\right]^{673} = (8i)^{673} + (-8i)^{673} = 0\\ &\Leftrightarrow 2S = 8^{673}\cdot i^{673} - 8^{673}\cdot i^{673} = 0 \Leftrightarrow S = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\overline{z}|\, i + (z+\overline{z})\, i^{2019} = 1$?

A. 4. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi;\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Ta có: $|z-1|^2 = |a+bi-1|^2 = (a-1)^2 + b^2$,

$|z-\overline{z}|\, i = |a+bi-a+bi|\, i = \sqrt{(2b)^2} i = 2\,|b|\, i$,

$i^{2019} = i^{4.504+3} = (i^4)^{504}.i^3 = i.i^2 = -i$,

$(z+\overline{z})\, i^{2019} = -i\,(a+bi+a-bi) = -2ai$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với:

$(a-1)^2 + b^2 + 2\,|b|\, i - 2ai = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=1\\ 2|b|-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-2a+b^2=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|b|^2-2|b|=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}|b|=0\\ |b|=1\end{array}\right.\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Xét số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B**. $\sqrt{2}$. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi$ ta có:

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{z-2i} &= \frac{(a+2)+bi}{a+(b-2i)i} = \frac{[(a+2)+bi]\,[a-(b-2)i]}{[a+(b-2)i]\,[a-(b-2)i]}\\ &= \frac{(a+2)a-(a+2)(b-2)i+abi+b(b-2)}{a^2+(b-2)^2}\\ &= \frac{a^2+2a+b^2-2b}{a^2+(b-2)^2} - \frac{(a+2)(b-2)-ab}{a^2+(b-2)^2}i.\end{aligned}$$

Để số trên là số thuần ảo $\Rightarrow$ có phần thực bằng $0 \Rightarrow a^2+2a+b^2-2b=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+1^2-0}=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $|z-\overline{z}-2i|=|z+\overline{z}-6|$ và $|z-6-2i|=2\sqrt{2}$.

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}|z-\overline{z}-2i|=|z+\overline{z}-6|\\|z-6-2i|=2\sqrt{2}\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}|x+yi-(x-yi)-2i|=|x+yi+(x-yi)-6|\\|x+yi-6-2i|=2\sqrt{2}\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}|(2y-2)i|=|2x-6|\\|(x-6)+(y-2)i|=2\sqrt{2}\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}\sqrt{(2y-2)^2}=\sqrt{(2x-6)^2}\\(x-6)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=x-2\\y=-x+4\end{array}\right.\\(x-6)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x-2\\(x-6)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\\\begin{cases}y=-x+4\\(x-6)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=5+\sqrt{3};y=3+\sqrt{3}\\x=5-\sqrt{3};y=3-\sqrt{3}\\x=4;y=0.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn bán kính r. Tính r.

A. $r=7$. **B**. $r=20$. **C**. $r=2\sqrt{5}$. **D**. $r=\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $w=3-2i+(2-i)z\Leftrightarrow z=\dfrac{w-3+2i}{2-i}$.

Suy ra $\Rightarrow |z|=\dfrac{|w-3+2i|}{|2-i|}\Rightarrow 2=\dfrac{|w-3+2i|}{\sqrt{5}}\Rightarrow |w-3+2i|=2\sqrt{5}$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $r=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Tính môđun của số phức z thoả mãn $3z\cdot\bar{z}+2017\,(z-\bar{z})=48-2016i$

A. $|z|=4$. **B.** $|z|=\sqrt{2016}$. **C.** $|z|=\sqrt{2017}$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2=48-2016i-2b\cdot 2017i=48$ (vì $|z|^2\in\mathbb{R}$), suy ra $|z|=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả $1\le|z-1|\le 2$ trong mặt phẳng phức. Tính diện tích hình (H).

A. 2π. **B.** 3π. **C.** 4π. **D.** 5π.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, khi đó: $1\le|z-1|\le 2\Leftrightarrow 1\le(x-1)^2+y^2\le 4$, suy ra điểm biểu diễn số phức z nằm trong hình vành khuyên giới hạn bởi 2 hình tròn đồng tâm $I(1;0)$ có bán kính lần lượt là $R_1=1$ và $R_2=2$. Từ đó suy ra diện tích hình (H) là: $S=\pi R_2^2-\pi R_1^2=3\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho số phức $z=a+bi$ (a,b là các số thực) thỏa mãn $z\cdot|z|+2z+i=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b^2$

A. $T=4\sqrt{3}-2$. **B.** $T=3+2\sqrt{2}$. **C.** $T=3-2\sqrt{2}$. **D.** $T=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $(a+bi)\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2(a+bi)+i=0$

Suy ra $\begin{cases}a\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2a=0\\ b\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b\cdot|b|+2b+1=0(*)\end{cases}$

Với $b\ge 0$ thì $(*)\Leftrightarrow b^2+2b+1=0\Leftrightarrow b=-1$ (loại)

Với $b<0$ thì $(*)\Leftrightarrow -b^2+2b+1=0\Leftrightarrow b=1\pm\sqrt{2}$. Nhận giá trị $b=1-\sqrt{2}$.

Vậy $T=a+b^2=3-2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=3\sqrt{2}$ và $(z+2i)^2$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-1-3i|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-3)^2=18$. (1)

Mặt khác $(z+2i)^2=(a+(b+2)i)^2=a^2-(b+2)^2+2a(b+2)i$ là số thuần ảo nên $\left[\begin{array}{l}a=b+2\\ a=-b-2\end{array}\right.$.

+ Nếu $a=b+2$ thế vào phương trình (1) ta có $(b+1)^2+(b-3)^2=18\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1+\sqrt{5}\Rightarrow a=3+\sqrt{5}\\ b=1-\sqrt{5}\Rightarrow a=3-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

+ Nếu $a=-b-2$ thế vào phương trình (1) ta có $(b+3)^2+(b-3)^2=18\Leftrightarrow b=0\Rightarrow a=-2$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1-i)\overline{z}+2i$ là

A. một đường tròn. **B.** một đường thẳng.

C. một elip. **D**. một hypebol hoặc parabol.

Lời giải.

Ta có $(1-i)\overline{z} = w - 2i \Rightarrow |w-2i| = |(1-i)\overline{z}| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp biểu diễn các số phức w là một đường tròn.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. một giá trị khác.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 4 \end{cases}$$

Suy ra $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho số phức $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \dfrac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2 < |z| < 3$. **B**. $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{4}$. **D**. $0 < |z| < \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (2+i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i \\ \Leftrightarrow\ & (2|z| - 1) + (|z| + 3)i = \frac{\sqrt{17}}{z} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 3)^2} = \frac{\sqrt{17}}{|z|} \\ \Leftrightarrow\ & (2|z| - 1)^2 + (|z| + 3)^2 = \frac{17}{|z|^2} \\ \Leftrightarrow\ & 5|z|^4 + 2|z|^3 + 10|z|^2 - 17 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & |z| = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2\mathrm{i}| \leq 2$. Trong hệ tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 3z - 2 + \mathrm{i}$ là hình tròn có diện tích bằng

A. 25π. **B**. 16π. **C**. 36π. **D**. 9π.

Lời giải.

Giả sử số phức $w = x + y\mathrm{i}$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức w suy ra điểm $M(x; y)$. Do giả thiết ta có

$$w = 3z - 2 + \mathrm{i} \Leftrightarrow x + y\mathrm{i} = 3z - 2 + \mathrm{i} \Leftrightarrow 3z = x + 2 + (y-1)\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{x+2}{3} + \left(\frac{y-1}{3}\right)\mathrm{i}$$

Khi đó $z-1+2\mathrm{i}=\dfrac{x+2}{3}+\left(\dfrac{y-1}{3}\right)\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}=\dfrac{x-1}{3}+\left(\dfrac{y+5}{3}\right)\mathrm{i}$ suy ra

$$|z-1+2\mathrm{i}|\le 2\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{y+5}{3}\right)^2}\le 2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+5)^2\le 36$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w nằm trong đường tròn $(C):\ (x-1)^2+(y+5)^2=36$. Gọi R là bán kính đường tròn (C) suy ra $R=6$ nên diện tích hình tròn bằng 36π.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho số phức $z=1+(1+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})^2+\cdots+(1+\mathrm{i})^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $z=-2^{1009}$. **B.** $z=-2^{1009}+(2^{1009}+1)\,\mathrm{i}$.

C. $z=2^{1009}+(2^{1009}+1)\,\mathrm{i}$. **D.** $z=2^{1009}+2^{1009}\mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có

$$1+(1+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})^2+\cdots+(1+\mathrm{i})^{2018}=\frac{1-(1+\mathrm{i})^{2019}}{1-(1+\mathrm{i})}=\frac{1-(1+\mathrm{i})^{2019}}{-\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})^{2019}$$

Vì $(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2\mathrm{i}$ suy ra $(1+\mathrm{i})^8=2^4$.
Mà $(1+\mathrm{i})^{2019}=\left[(1+\mathrm{i})^8\right]^{252}\cdot(1+\mathrm{i})^3$ suy ra $\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})^{2019}=(2^4)^{252}\cdot 2\mathrm{i}^2\cdot(1+\mathrm{i})=-2^{1009}(1+\mathrm{i})$. Do đó $z=\mathrm{i}+2^{1009}(1+\mathrm{i})=2^{1009}+(1+2^{1009})\,\mathrm{i}$.

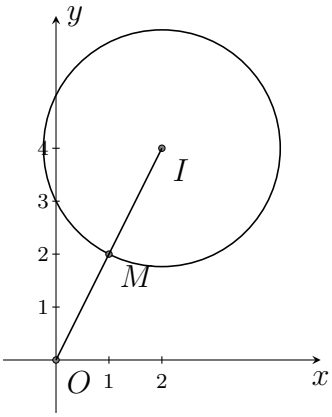
Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=\sqrt{5}$.

A. $z=-1-2i$. **B.** $z=1-2i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=1+2i$.

Lời giải.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$. Đường thẳng qua gốc tọa độ và tâm I cắt đường tròn tại hai điểm, trong đó điểm $M(1;2)$ nằm giữa O và I nên số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài là $z=1+2i$.



Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn $z(1+2i)^2+\overline{z}=-20+4i$. Giá trị của a^2-b^2 bằng

A. 16. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& z(1+2i)^2+\overline{z}=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & (a+bi)(-3+4i)+(a-bi)=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & (-3a-4b)+(4a-3b)i+(a-bi)=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & (-2a-4b)+(4a-4b)i=-20+4i \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -2a-4b=-20 \\ 4a-4b=4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=4 \\ b=3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $a^2-b^2=16-9=7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$ và $\overline{z}_1+\overline{z}_2=\overline{z}_3$. Biết z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Tính góc $\widehat{ACB}$.

A. $150°$. **B.** $90°$. **C.** $120°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Viết $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i, z_3=a_3+b_3i$, $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$. Khi đó, ta có hệ:

$$\begin{cases} a_1^2+b_1^2=9 & (1) \\ a_2^2+b_2^2=9 & (2) \\ a_3^2+b_3^2=9 & (3) \\ a_1+a_2=a_3 & (4) \\ -b_1-b_2=-b_3 & (5). \end{cases}$$

Thế (4) và (5) vào (3), ta có $(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=9$ (6).

Thế (1) và (2) vào (6), ta có $2a_1a_2+2b_1b_2=-9$.

$\overrightarrow{CA}=(a_1-a_3;b_1-b_3)$, $\overrightarrow{CB}=(a_2-a_3;b_2-b_3)$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{ACB} &= \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{(a_1-a_3)(a_2-a_3)+(b_1-b_3)(b_2-b_3)}{\sqrt{(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2}\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}} \\
&= \frac{-a_2(-a_1)+(-b_2)(-b_1)}{\sqrt{(-a_2)^2+(-b_2)^2}\sqrt{(-a_1)^2+(-b_1)^2}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \\
&= \frac{-\frac{9}{2}}{\sqrt{9}\sqrt{9}}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{ACB}=120°$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiên $|z+2|=|i-z|$ là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $4x-2y+3=0$. **B.** $4x+2y-3=0$. **C.** $4x-2y-3=0$. **D.** $4x+2y+3=0$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta được

$$(a+2)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\Leftrightarrow 4a+2b+3=0.$$

Vậy các điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng có phương trình

$$4x+2y+3=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tính $S=1+i+i^2+\cdots+i^{2017}+i^{2018}$.

A. $S=-i$. **B.** $S=1+i$. **C.** $S=1-i$. **D.** $S=i$.

Lời giải.

Ta có $(i)^{4n}=1$, $(i)^{4n+1}=i$, $(i)^{4n+2}=-1$, $(i)^{4n+3}=-i$. Do đó

$S=1+i+i^2+\cdots+i^{2017}+i^{2018}=\dfrac{1-i^{2019}}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}=i.$

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa $z+2i+1=|z|(1+i)$ và $|z|>1$. Tính $P=a-b$.

A. $P=-3$. **B.** $P=3$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=1$.

Lời giải.

Từ giả thiết $z+2i+1=|z|(1+i)$ suy ra

$$(a+1)+(b+2)i=\sqrt{a^2+b^2}+i\cdot\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=\sqrt{a^2+b^2}\\ b+2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq -1\\ a=b+1\\ (b+2)^2=(b+1)^2+b^2\end{cases}(1).$$

Từ $(1)\Leftrightarrow b^2-2b-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1\\ b=3\end{array}\right.$

Khi $b=-1\Rightarrow a=0\Rightarrow|z|=1$. Trường hợp này loại vì $|z|>1$.

Khi $b=3\Rightarrow a=4\Rightarrow|z|=5>1$. Trường hợp này nhận, vậy $P=a-b=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Tìm các số phức z thỏa $2iz+3\overline{z}=5$.

A. $z=-3-2i$. **B.** $z=3-2i$. **C.** $z=-3+2i$. **D.** $z=3+2i$.

Lời giải.

Gọi số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết, ta có

$$2i(a+bi)+3(a-bi)=5\Leftrightarrow(3a-2b)+(2a-3b)i=5\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=5\\ 2a-3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\Leftrightarrow z=3+2i.$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|+|\overline{z}-3|=\left|\sqrt{7}+3i\right|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-i|$.

A. $P=2$. **B.** $P=\sqrt{2}$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=3$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
4=\left|\sqrt{7}+3i\right| &= |z-1-2i|+|\overline{z}-3| \\
&= \sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}+\sqrt{(a-3)^2+b^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{(a-3)^2+b^2}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{4+(a-1)^2+(b-2)^2}{2}+\frac{4+(a-3)^2+b^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[(a-2)^2+(b-1)^2+6\right]=\frac{1}{2}\left(P^2+6\right) \\
&\Rightarrow P\ge\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}\\ 2=\sqrt{(a-3)^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=(a-1)^2+(b-2)^2\\ (a-1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+b^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\end{array}\right..$$

Ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của P. Ta có

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2\ge 0\Rightarrow\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge ac+bd.$$

Ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
\Leftrightarrow&a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge(a+c)^2+(b+d)^2 \\
\Leftrightarrow&\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge ac+bd(\text{luôn đúng, xem chứng minh trên}).
\end{aligned}$$

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
4=\left|\sqrt{7}+3i\right| &= |z-1-2i|+|\overline{z}-3| \\
&= |z-1-2i|+|z-3| \\
&\ge \sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}+\sqrt{(a-3)^2+b^2} \\
&\ge \sqrt{(a-1+a-3)^2+(b-2+b)^2} \\
&= 2\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=2\,|z-2-i|=2P.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $P\le 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 12$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (8-6i)z + 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 120$. **B.** $r = 122$. **C.** $r = 12$. **D.** $r = 24\sqrt{7}$.

Lời giải.

Có $w = (8-6i)z + 2i \Leftrightarrow w - 2i = (8-6i)z \Rightarrow |w-2i| = |8-6i| \cdot |z| = 10 \cdot 12 = 120$.

Từ đó ta suy ra tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R = 120$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Với x, y là hai số thực thỏa mãn $x(3+5i) + y(1-2i)^3 = 9+14i$. Giá trị của $2x-3y$ bằng

A. $\dfrac{205}{109}$. **B.** $\dfrac{172}{61}$. **C.** $\dfrac{353}{61}$. **D.** $\dfrac{94}{109}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} x(3+5i) + y(1-2i)^3 = 9+14i &\Leftrightarrow x(3+5i) + y(-11+2i) = 9+14i \\ &\Leftrightarrow (3x-11y) + i(5x+2y) = 9+14i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11y = 9 \\ 5x+2y = 14 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{172}{61} \\ y = -\dfrac{3}{61}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $2x - 3y = 2 \cdot \dfrac{172}{61} - 3 \cdot \dfrac{-3}{61} = \dfrac{353}{61}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Phương trình $z^2 + |z| = 0$ có mấy nghiệm trong tập số phức?

A. Có 2 nghiệm. **B.** Có 3 nghiệm. **C.** Có 1 nghiệm. **D.** Có 4 nghiệm.

Lời giải.

Giả sử số phức z cần tìm có dạng $a+bi$, khi đó phương trình đã cho trở thành $a^2+2abi-b^2+\sqrt{a^2+b^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2}\right) + 2abi = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được tập nghiệm là $(a;b) = \{(0;0), (0;1), (0;-1)\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2+i)z - 3i$ là một đường tròn có bán kính bằng r. Tìm bán kính r.

A. $r = \sqrt{5}$. **B.** $r = 5$. **C.** $r = \sqrt{10}$. **D.** $r = 25$.

Lời giải.

Biến đổi $w = (2+i)z - 3i \Leftrightarrow w + 3i = (2+i)z$.

Lấy mô-đun 2 vế, ta được $|w+3i| = |(2+i)z| = |2+i| \cdot |z| = 5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;-3)$ và bán kính $r = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa $|z+3-i| = 2\sqrt{2}$ và z^2 thuần ảo?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.
$z^2=x^2-y^2+2xyi$ thuần ảo $\Rightarrow x^2-y^2=0\Leftrightarrow x=y$ hay $x=-y$.
Với $y=x\Rightarrow |z+3-i|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow |x+xi+3-i|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow (x+3)^2+(x-1)^2=8\Leftrightarrow x=-1$.
Với $y=-x$

$$\Rightarrow |z+3-i|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow |x-xi+3-i|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow (x+3)^2+(x+1)^2=8\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{3}\\ x=-2+\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Vậy có ba số phức z thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(2-z)(\overline{z}+2i)$ là số thuần ảo.

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$. **B**. $4-2x-2y=0$.
C. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. **D**. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Lời giải.

Ta có $(2-z)(\overline{z}+2i)=2\overline{z}+4i-|z|^2-2zi=2(x-yi)+4i-(x^2+y^2)-2(x+yi)i$
$=(2x+2y-x^2-y^2)+(4-2x-2y)i$.
Để $(2-z)(\overline{z}+2i)$ là số thuần ảo thì $2x+2y-x^2-y^2=0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn các điều kiện $|z-2|=|\overline{z}|$ và $(z-3)(\overline{z}+1-4i)\in\mathbb{R}$. Tìm phần ảo của số phức z.

A. -2. **B**. -1. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Từ $|z-2|=|\overline{z}|$ ta suy ra $(x-2)^2+y^2=x^2+y^2$, hay $x=1$. Khi đó, $(z-3)(\overline{z}+1-4i)=(-2+yi)(2-(y+4)i)=y^2+4y-4+4(y+2)i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow y=-2$. Vậy, phần ảo của z bằng -2.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=(1-\sqrt{3}i)z+1-2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B**. $r=1$. **C**. $r=4$. **D**. $r=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $\dfrac{w-1+2i}{1-\sqrt{3}i}-3=z-3$, hay $w-1+2i-3(1-\sqrt{3}i)=(z-3)(1-\sqrt{3}i)$. Lấy mô-đun hai vế, ta suy ra $\left|w-4+(2+3\sqrt{3})i\right|=\left|(z-3)(1-\sqrt{3}i)\right|=2$. Vậy, $r=2$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $4-3\mathrm{i}$, $(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}$ và $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$. Số phức có điểm biểu diễn D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $-6-4\mathrm{i}$. **B**. $-6+3\mathrm{i}$. **C**. $6-5\mathrm{i}$. **D**. $4-2\mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có $(1+2\mathrm{i})\mathrm{i} = -2+\mathrm{i}$, $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i}$.
Tọa độ của các điểm A, B, C là $A(4;-3)$, $B(-2;1)$, $C(0;-1)$.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{D}} - 4 = 0 + 2 \\ y_{\mathrm{D}} + 3 = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{D}} = 6 \\ y_{\mathrm{D}} = -5. \end{cases}$$

Vậy D là điểm biểu diễn của số phức $z = 6 - 5\mathrm{i}$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Rút gọn biểu thức $M = (1-\mathrm{i})^{2018}$ ta được
A. $M = 2^{1009}$. **B**. $M = -2^{1009}$. **C**. $M = 2^{1009}\mathrm{i}$. **D**. $M = -2^{1009}\mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có $(1-\mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -2\mathrm{i} \Rightarrow (1-\mathrm{i})^4 = (-2\mathrm{i})^2 = 2^2$. Từ đó

$$M = (1-\mathrm{i})^{2018} = (1-\mathrm{i})^{4\cdot 504+2} = \left[(1-\mathrm{i})^4\right]^{504} \cdot (1-\mathrm{i})^2 = (2^2)^{504} \cdot (-2\mathrm{i}) = -2^{1009}\mathrm{i}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-\mathrm{i}| = |z - \overline{z} + 2\mathrm{i}|$ là
A. Một đường thẳng. **B**. Một đường tròn. **C**. Một parabol. **D**. Một điểm.

Lời giải.

Gọi $z = x + y\mathrm{i}$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} & 2|z-\mathrm{i}| = |z - \overline{z} + 2\mathrm{i}| \\ \Leftrightarrow\ & 2|x + (y-1)\mathrm{i}| = |(2y+2)\mathrm{i}| \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một parabol.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+1-2i| = |z|$. Biết rằng tập hợp các điểm M là một đường thẳng, tìm phương trình đường thẳng đó.
A. $2x + 4y + 5 = 0$. **B**. $2x - 4y + 5 = 0$. **C**. $2x - 4y + 3 = 0$. **D**. $2x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & |z + 1 - 2i| = |z| \\ \Leftrightarrow\ & |x + yi + 1 - 2i| = |x + yi| \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 4y + 5 = 0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x-4y+5=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2i\,(\bar{z})=3(1+i)$. Tính giá trị của biểu thức $P=4x+5y$.

A. $P=12$. **B.** $P=8$. **C.** $P=9$. **D.** $P=21$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& z+2i\,(\bar{z})=3(1+i)\\
\Leftrightarrow\ & x+yi+2i(x-yi)=3(1+i)\\
\Leftrightarrow\ & x+yi+2xi+2y=3+3i\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x+2y=3\\2x+y=3\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $P=4x+5y=4\cdot 1+5\cdot 1=9$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

Thay $z=a+bi$ vào phương trình ta có

$$\begin{aligned}
& z+2+i-|z|(1+i)=0\\
\Leftrightarrow\ & a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(a+2-\sqrt{a^2+b^2}\right)+i\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+b^2}\\b+1=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-1\\b+1=\sqrt{2b^2-2b+1}\end{cases}\\
\Rightarrow\ & b^2-4b=0\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\Rightarrow a=-1\ (\text{loại})\\b=4\Rightarrow a=3\ (\text{thỏa mãn})\end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy $P=3+4=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tìm số các số phức thỏa mãn điều kiện $z^2+2\overline{z}=0$.

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$$z^2+2\overline{z}=0\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi+2(x-yi)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2x=0\\2xy-2y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2x=0\\2y(x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2x=0\\\left[\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\x^2+2x=0\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y^2=3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases};\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases};\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}\end{cases};\begin{cases}x=1\\y=-\sqrt{3}.\end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là các nghiệm phức của phương trình $z^4+z^2-6=0$. Tính $T=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$.

A. $T=2$. **B.** $T=14$. **C.** $T=4$. **D.** $T=-2$.

Lời giải.

Ta có $z^4+z^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2=2\\z^2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\sqrt{2}\\z=\sqrt{2}\\z=-\sqrt{3}i\\z=\sqrt{3}i.\end{array}\right.$

Do đó, phương trình đã cho có 4 nghệm phức là $z_1=-\sqrt{2},z_2=\sqrt{2},\ z_3=-\sqrt{3}i,\ z_4=\sqrt{3}i$.

Vậy $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=-2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z\cdot\bar{z}+3\,(z-\bar{z})=5+12i$ thuộc đường nào trong các đường cho bởi phương trình sau đây?

A. $y=2x^2$. **B.** $(x-1)^2+y^2=5$. **C.** $y=2x$. **D.** $y=-2x$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Ta được

$$\begin{aligned}&z\cdot\bar{z}+3\,(z-\bar{z})=5+12i\\\Leftrightarrow\ &x^2+y^2+6yi=5+12i\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x^2+y^2=5\\6y=12\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x^2=1\\y=2.\end{cases}\end{aligned}$$

Do đó, có hai điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A(1;2)$ và $B(-1;2)$.

Dễ thấy A, B chỉ thuộc đường $y=2x^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{2}$. **B.** $P=\sqrt{3}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & |2z-i|=|2+iz| \\ \Leftrightarrow\ & |2x+(2y-1)i|=|2-y+xi| \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2=1. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C) có tâm O và bán kính $R=1$.
Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2. Ta có A, B thuộc (C) và $|z_1-z_2|=1\Leftrightarrow AB=1$. Suy ra $\triangle OAB$ đều nên $P=|z_1+z_2|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OH}\right|=\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+\bar{z}$ là số thuần ảo và $|z-2i|=1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$, ta có $\bar{z}=a-bi$.
Số phức $(1+i)z+\bar{z}=(1+i)(a+bi)+(a-bi)=2a-b+ai$ là số thuần ảo khi chỉ khi $2a-b=0\Leftrightarrow b=2a$.
Mặt khác

$$\begin{aligned} |z-2i|=1\Leftrightarrow |a+bi-2i|=1 \ &\Leftrightarrow\ a^2+(2a-2)^2=1 \\ &\Leftrightarrow\ 5a^2-8a+3=0 \\ &\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow b=2\Rightarrow z=1+2i \\ a=\dfrac{3}{5}\Rightarrow b=\dfrac{6}{5}\Rightarrow z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho số phức w thỏa mãn $|w+2|\le 1$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\overline{z}=2w+1-i$ là một hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

A. $S=2\pi$. **B.** $S=4\pi$. **C.** 9π. **D.** π.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\overline{z}=2w+1-i\Leftrightarrow x-yi=2w+1-i\Leftrightarrow w=\frac{x-1}{2}-\frac{y-1}{2}i.$$

Lại có $|w+2|\le 1$ nên

$$\left(\frac{x-1}{2}+2\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\le 1\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=4.$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn z là hình tròn bán kính $R=2$ có diện tích $S=4\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+3+2i=(|z|+1)(1+i)$ và $|z|>1$. Tính $P=a-b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & z+3+2i=(|z|+1)(1+i)\Leftrightarrow a+bi+3+2i=\left(\sqrt{a^2+b^2}+1\right)(1+i)\\ \Leftrightarrow\ & a+bi+3+2i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}\cdot i+1+i\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+3=\sqrt{a^2+b^2}+1\\ b+2=\sqrt{a^2+b^2}+1 \end{cases}\Rightarrow a-b=-1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho số phức $z=a+bi$ (a,b là các số thực) thỏa mãn $z\cdot|z|+2z+i=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b^3+5\sqrt{2}$.

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=7$. **D.** $T=6$.

Lời giải.

Ta có $(a+bi)\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2(a+bi)+i=0$.

Suy ra $\begin{cases} a\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2a=0\\ b\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0\\ b\cdot|b|+2b+1=0 \end{cases}\quad(*)$

Với $b\geq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow b^2+2b+1=0\Leftrightarrow b=-1$ (loại)

Với $b<0$ thì $(*)\Leftrightarrow -b^2+2b+1=0\Leftrightarrow b=1\pm\sqrt{2}$. Nhận giá trị $b=1-\sqrt{2}$.

Vậy $T=a+b^2=3-2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=|z+\bar{z}|=1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$, ta có $\bar{z}=a-bi$. Từ đó:

$$|z|=|z+\bar{z}|=1\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+b^2=1\\ |2a|=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a=\pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Do đó có 4 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng. **B.** đường tròn. **C.** parabol. **D.** hypebol.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$, ta có $\bar{z}=x-yi$. Từ đó:

$$\begin{aligned} & 2|z-1|=|z+\bar{z}+2|\Leftrightarrow 2|(x-1)+yi|=|2x+2|\\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+1|\Leftrightarrow y^2=4x. \end{aligned}$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+2i|=5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=z+1-i$ là

A. Đường tròn tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=5$. **B**. Đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R=5$.

C. Đường tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=5$. **D**. Đường tròn tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=5$.

Lời giải.

Ta có

$$w-4+3i=z-3+2i$$
$$\Rightarrow |w-4+3i|=|z-3+2i|=5.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho các số phức z thoả mãn $|z-i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz+1-i$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $r=20$. **B**. $r=22$. **C**. $r=4$. **D**. $r=5$.

Lời giải.

Ta có $w=iz+1-i \Leftrightarrow w+i=i(z-i)$. Lấy module hai vế ta được

$$|w+i|=|i(z-i)| \Leftrightarrow |w+i|=5.$$

Đặt $w=x+yi$, ta có $x^2+(y+1)^2=25$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính $r=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z sao cho $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ là số thực?

A. Hai trục Ox, Oy. **B**. Trục Ox.

C. Hai trục Ox, Oy bỏ đi điểm $(0;1)$. **D**. Trục Oy.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}=\dfrac{x+(y+1)i}{x+(1-y)i}=\dfrac{[x+(y+1)i][x-(1-y)i]}{x^2+(1-y)^2}=\dfrac{x^2+(y+1)(1-y)+[x(y+1)-x(1-y)]i}{x^2+(1-y)^2}$.

Để $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ là số thực thì $\begin{cases} x(y+1)-x(1-y)=0 \\ x^2+(1-y)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x\neq 0 \\ y\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ x\neq 0, y\neq 1. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz+1-i$ là đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=22$. **B**. $r=20$. **C**. $r=4$. **D**. $r=5$.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
Ta có $w = x + yi \Leftrightarrow x + yi = iz + 1 - i \Leftrightarrow z = (y + 1) + (1 - x)i$.
Lại có $|z - i| = 5 \Leftrightarrow |y + 1 - xi| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 5^2$.
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $(0; 1)$ bán kính $r = 5$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính mô-đun của số phức $w = M + mi$.
A. $|w| = \sqrt{2315}$. **B.** $|w| = \sqrt{1258}$. **C.** $|w| = 3\sqrt{137}$. **D.** $|w| = 2\sqrt{309}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
Ta có $P = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3$.
Mặt khác $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.
Đặt $x = 3 + \sqrt{5}\sin t$ và $y = 4 + \sqrt{5}\cos t$ thỏa $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.
Suy ra $P = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t + 23$.
Xét hàm số $f(t) = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t$.
Chia cả hai vế cho $\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 10$ ta có

$$f(t) = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin t + \frac{\sqrt{5}}{5}\cos t.$$

Đặt $\begin{cases} \cos u = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin u = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ ta có

$$\frac{f(t)}{10} = \cos u \sin t + \sin u \cos t \Leftrightarrow \frac{f(t)}{10} = \sin(t + u)$$

Suy ra

$$-1 \le \frac{f(t)}{10} \le 1 \Rightarrow -10 \le f(t) \le 10 \Rightarrow 13 \le P \le 33.$$

Vậy $M = \max P = 33$ và $m = \min P = 13$.
Khi đó $w = 33 + 13i$. Do đó $|w| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.
A. $S = \dfrac{7}{3}$. **B.** $S = -5$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - i\sqrt{a^2 + b^2} = 0$
$\Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \begin{cases} b \ge -3 \\ (b + 3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = -5.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2-6z+m=0$, $m\in\mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0\in\mathbb{N}$?

A. 10. **B**. 11. **C**. 12. **D**. 13.

Lời giải.

Đề bài yêu cầu ta tìm các giá trị nguyên của m trong khoảng $(0;20)$, sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$, hay $|z_1|=|z_2|$ (*).

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta'>0$ hoặc $\Delta'<0$.

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0.$$

Điều này không thể xảy ra do theo Định lý Vi-ét, $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=6\neq 0$. Vậy nếu $\Delta'>0$ ta không tìm được m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 là hai số phức liên hợp. Khi đó hiển nhiêu ta sẽ có $|z_1|=|z_2|$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa (*) $\Leftrightarrow\Delta'<0\Leftrightarrow 9-m<0\Leftrightarrow m>9$.

Suy ra trong khoảng $(0;20)$ có 10 giá trị $m_0\in\mathbb{N}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Số phức z thõa mãn điều kiện: $z+|z|=8+4i$. Tổng phần thực và ảo của số phức z là

A. 4. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

$z+|z|=8+4i\Leftrightarrow z=8-|z|+4i$.

Lấy mô-đun hai vế ta được: $|z|=\sqrt{(8-|z|)^2+16}\Leftrightarrow|z|^2=|z|^2-16|z|+80\Leftrightarrow|z|=5$

nên $z+|z|=8+4i\Leftrightarrow z+5=8+4i\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow a+b=7.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Gọi A, B theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số z khác 0 và $z'=\dfrac{1+i}{2}z$. Lúc đó, tam giác OAB là tam giác gì

A. Tam giác cân. **B**. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông. **D**. Tam giác vuông cân.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thì ta có $A(x;y)$. Vì $z\neq 0$ nên $x^2+y^2>0$.

Ta có $z'=\dfrac{1+i}{2}z=\dfrac{1}{2}(1+i)(x+yi)=\dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x+y}{2}i$.

Vậy B có tọa độ $B\left(\dfrac{x-y}{2};\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Ta lại có $OA^2=x^2+y^2$; $OB^2=\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{2}$;

$AB^2=\left(x-\dfrac{x-y}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases}OB=AB\\OA^2=OB^2+AB^2.\end{cases}$

Vậy tam giác OAB vuông cân tại B.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho hai số phức $z=(a-2b)-(a-b)i$ và $w=1-2i$. Biết $z=w\cdot i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-7$. **B.** $S=-4$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=7$.

Lời giải.

Ta có $z=(a-2b)-(a-b)i=(1-2i)\cdot i=2+i$.

Suy ra $\begin{cases}a-2b=2\\-a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-3\end{cases}$.

Vậy $S=a+b=(-3)+(-4)=-7$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x+6y-3=0$. **B.** $4x-6y+3=0$. **C.** $4x+6y+3=0$. **D.** $4x-6y-3=0$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|z+1-i|=|z-1+2i|&\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2\\&\Leftrightarrow 2x+1-2y+1=-2x+1+4y+4\\&\Leftrightarrow 4x-6y-3=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=7$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\Leftrightarrow|z-1|=|z-i|\Leftrightarrow|a-1+bi|=|a+(b-1)i|\Leftrightarrow 2a-2b=0$ (1).

$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow|z-3i|=|z+i|\Leftrightarrow|a+(b-3)i|=|a+(b+1)i|\Leftrightarrow b=1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$. Vậy $P=2$.

Chọn đáp án D □

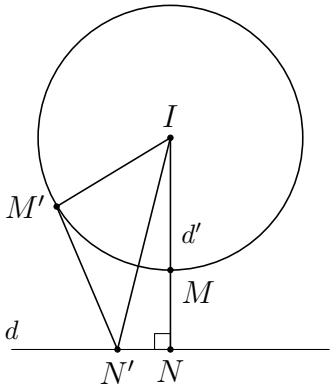
Câu 62. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn đẳng thức $|z_1+5|=5$; $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1-z_2|$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

- Từ $|z_1+5|=5\Leftrightarrow(x_1+5)^2+y_1^2=25$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C) có tâm $I(-5;0)$, bán kính $r=5$.
- Từ $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|\Leftrightarrow(x_2+1)^2+(y_2-3)^2=(x_2-3)^2+(y_2-6)^2\Leftrightarrow 8x_2+6y_2-35=0$ nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng d: $8x+6y-35=0$.
- Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2. Khi đó $|z_1-z_2|=MN$.

- Bài toán trở thành: "Tìm điểm M trên đường tròn (C) và điểm N trên đường thẳng d sao cho MN ngắn nhất".
- Dựng đường thẳng d' đi qua I và vuông góc với d và cắt d tại N, đoạn thẳng IN cắt (C) tại M. Khi đó MN ngắn nhất.



Thật vậy: với M' bất kì thuộc (C), N' bất kì thuộc d ta có
$M'N' + M'I \geqslant IN' \geqslant IN = IM + MN \Rightarrow M'N' \geqslant MN$.
- Ta có $IN = \mathrm{d}(I;d) = \dfrac{15}{2}$;

Lại có $IM = r = 5$ và M nằm giữa I và $N \Rightarrow MN = \dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng $\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \overline{z}$?

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 + \overline{z} &\Leftrightarrow (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow 2abi - b^2 = b^2 + a - bi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -b \\ -b^2 = b^2 + a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ hoặc } a = -\dfrac{1}{2} \\ 2b^2 + a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

☑ $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0$.
☑ $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức: $\mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 - \mathrm{C}_{2n}^6 + \mathrm{C}_{2n}^8 - \mathrm{C}_{2n}^{10} + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 2^{1008}$ là

A. 2018. **B**. 2016. **C**. 1009. **D**. 1008.

Lời giải.

Xét khai triển

$$(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \mathrm{C}_{2n}^3 x^3 + \mathrm{C}_{2n}^4 x^4 + \mathrm{C}_{2n}^5 x^5 + \cdots \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Cho $x = i$ ta có

$$\begin{aligned} (1+i)^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 i + \mathrm{C}_{2n}^2 i^2 + \mathrm{C}_{2n}^3 i^3 + \mathrm{C}_{2n}^4 i^4 + \mathrm{C}_{2n}^5 i^5 + \mathrm{C}_{2n}^6 i^6 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} i^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} i^{2n} \\ &= \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 i - \mathrm{C}_{2n}^2 - \mathrm{C}_{2n}^3 i + \mathrm{C}_{2n}^4 + \mathrm{C}_{2n}^5 i - \mathrm{C}_{2n}^6 + \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} i + (-1)^n \mathrm{C}_{2n}^{2n} \\ &= \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 - \mathrm{C}_{2n}^6 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_{2n}^{2n} + i\left(\mathrm{C}_{2n}^1 - \mathrm{C}_{2n}^3 + \mathrm{C}_{2n}^5 - \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}\right) \\ &= \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 - \mathrm{C}_{2n}^6 + \mathrm{C}_{2n}^8 - \mathrm{C}_{2n}^{10} + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_{2n}^{2n}. \end{aligned}$$

Khi đó $(1+i)^{2n}=2^{1008}\Leftrightarrow[(1+i)^2]^n=2^{1008}\Leftrightarrow(2i)^n=2^{1008}\Leftrightarrow 2^n i^n=2^{1008}\Leftrightarrow n=1008$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ và $z\cdot\overline{z}=10$. Tính $P=a-b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

$$\begin{cases}|z-1-2i|=5\\ z\cdot\overline{z}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+(b+2)^2=25\\ a^2+b^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+4b=10\\ a^2+b^2=10\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-5\\ 5b^2-20b+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\text{ (loại)}\\ b=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow P=1-3=-2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{|z-2|+2}{4|z-2|-1}>1$. Khi đó $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $(x+2)^2+y^2>49$. **B.** $(x+2)^2+y^2<49$. **C.** $(x-2)^2+y^2<49$. **D.** $(x-2)^2+y^2>49$.

Lời giải.

Điều kiện $4|z-2|-1>0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2>\dfrac{1}{16}$.
Ta có

$$\frac{1}{3}\frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1}>1\Leftrightarrow\frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1}<\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3|z-2|+6<4|z-2|-1\Leftrightarrow|z-2|>7$$
$$\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2>49.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Cho z_1,z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$ và $|z_1-2z_2|=\sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P=|2z_1+z_2|$.

A. $P=2$. **B.** $P=\sqrt{3}$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

Lời giải.

Đặt $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. Theo đề ta có $\begin{cases}a_1^2+b_1^2=1\\ a_2^2+b_2^2=1\\ (a_1-2a_2)^2+(b_1-2b_2)^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1^2+b_1^2=1\\ a_2^2+b_2^2=1\\ 4(a_1a_2+b_1b_2)=-1\end{cases}$.

$P=|2z_1+z_2|=\sqrt{(2a_1+a_2)^2+(2b_1+b_2)^2}=\sqrt{4(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)+4(a_1a_2+b_1b_2)}=2$
Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Cho số phức z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính $|z|$.

A. 3. **B.** 5. **C.** $\dfrac{25}{4}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết ta có

$$\sqrt{a^2+b^2}-2(a-bi)=-7+3i+a+bi \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}-3a+7+(b-3)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-3a+7=0\\ b-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+9}=3a-7\\ b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+9=(3a-7)^2\\ 3a-7\geq 0\\ b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{5}{4}\ (\text{loại})\\ a=4\\ b=3\end{cases}$$

Vậy $|z|=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\dfrac{26iz}{9}$ có môđun bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 5.

Lời giải.

Gọi số phức z có dạng : $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Do $z\neq 0$ nên $a^2+b^2>0$. Ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2\\ \Leftrightarrow&iz-(3i+1)\overline{z}=(1+i)|z|^2\\ \Leftrightarrow&i(a+bi)-(3i+1)(a-bi)=(1+i)(a^2+b^2)\\ \Leftrightarrow&ia-b-3ai-3b-a+bi=a^2+b^2+i(a^2+b^2)\\ \Leftrightarrow&(-a-4b)+(b-2a)i=a^2+b^2+i(a^2+b^2)\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}-a-4b=a^2+b^2\\ b-2a=a^2+b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-4b=b-2a\\ -a-4b=a^2+b^2\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a=5b\\ -9b=26b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5b\\ \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=-\dfrac{9}{26}\end{array}\right.\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}a=b=0\ (\text{loại})\\ a=-\dfrac{45}{26},b=-\dfrac{9}{26}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy : $w=\dfrac{26}{9}i\left(-\dfrac{45}{26}-\dfrac{9}{26}i\right)=1-5i\Rightarrow|w|=\sqrt{26}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Đặt $P=8(b^2-a^2)-12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=(|z|-2)^2$. **B.** $P=\left(|z|^2-4\right)^2$. **C.** $P=(|z|-4)^2$. **D.** $P=\left(|z|^2-2\right)^2$.

Lời giải.

Ta có

$$|z^2+4|=2|z|$$

$$\Leftrightarrow \left|a^2-b^2+4-2abi\right| = 2\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2+4\right)^2 + 4a^2b^2 = 4\left(a^2+b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2 + 4a^2b^2 + 8\left(a^2-b^2\right) + 16 = 4\left(a^2+b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2 + 8\left(a^2-b^2\right) + 16 - 4\left(a^2+b^2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2 - 4\left(a^2+b^2\right) + 4 = 8\left(b^2-a^2\right) - 12$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-2\right)^2 = 8\left(b^2-a^2\right) - 12$$
$$\Leftrightarrow \left(|z|^2-2\right)^2 = 8\left(b^2-a^2\right) - 12.$$

Vậy $P = \left(|z|^2-2\right)^2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Cho số phức $u = 3+4i$. Nếu $z^2 = u$ thì ta có
A. $\left[\begin{array}{l} z = 4+i \\ z = -4-i \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} z = 1+2i \\ z = 2-i \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} z = 2+i \\ z = -2-i \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} z = 1+i \\ z = 1-i \end{array}\right.$.

Lời giải.

Với $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $z^2 = u \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = iz+1-i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.
A. $r = 20$. **B.** $r = 5$. **C.** $r = 22$. **D.** $r = 4$.

Lời giải.

Ta có $w = iz+1-i \Leftrightarrow w+i = i(z-i)$. Suy ra $|w+i| = |i||z-i| = 5$.
Vậy tập hợp những điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $r = 5$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z-i| = |iz+2|$, biết $|z_1-z_2| = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1-2z_2|$.
A. $A = \sqrt{5}$. **B.** $A = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $A = \sqrt{3}$. **D.** $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = x_1+y_1i$, $z_2 = x_2+y_2i$ với $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} |2x_1+(2y_1-1)i| = |2-y_1+x_1i| \\ |2x_2+(2y_2-1)i| = |2-y_2+x_2i| \\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+y_1^2 = 1 \\ x_2^2+y_2^2 = 1 \\ x_1x_2+y_1y_2 = 0 \end{cases}$$

Do đó, $A^2 = |z_1-2z_2|^2 = (x_1-2x_2)^2+(y_1-2y_2)^2 = (x_1^2+y_1^2)+4(x_2^2+y_2^2)-4(x_1x_2+y_1y_2) = 5$. Khi đó $A = \sqrt{5}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathrm{R})$ thỏa mãn $z - (2 + 3i)\overline{z} = -1 - 3i$. Tính giá trị của biểu thức $S = ab + 1$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & z - (2 + 3i)\overline{z} = -1 - 3i \\ \Leftrightarrow & (a + bi) - (2 + 3i)(a - bi) = -1 - 3i \\ \Leftrightarrow & a + bi - 2a + 2bi - 3ai - 3b = -1 - 3i \\ \Leftrightarrow & (-a - 3b) + (3b - 3a) = -1 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S = ab + 1 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

A. $|w| = 13$. **B.** $|w| = 10$. **C.** $|w| = 16$. **D.** $|w| = 6$.

Lời giải.

Gọi $I(1; -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$ và A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.
Vì $|z - 1 + 2i| = 5$ nên A, B thuộc $(I; 5)$ và $|z_1 - z_2| = 8$ nên $AB = 8$.
Ta có $|w| = |\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}| = 2IH$ với H là trung điểm AB.
Mà $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Vậy $|w| = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \dfrac{1}{\overline{z}}} = i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 1 - \sqrt{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 1 + \sqrt{2}$. **D.** $P = 0$.

Lời giải.

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i \Leftrightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{z\overline{z}-1}=i \quad (|z|\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2-1}=i \Leftrightarrow \frac{(1+iz)\overline{z}}{|z|+1}=i$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}+i|z|^2=i(|z|+1) \Leftrightarrow a-bi+(a^2+b^2)i=i(\sqrt{a^2+b^2}+1)$$

$$\Leftrightarrow a+(-b+a^2+b^2)i=i(\sqrt{a^2+b^2}+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2-b=|b|+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b<0 \\ b=\pm 1 \end{cases} \quad \text{(loại)} \\ \begin{cases} b>0 \\ b^2-2b-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \left[\begin{array}{ll} b=1+\sqrt{2} & \text{(nhận)} \\ b=1-\sqrt{2} & \text{(loại).} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $P=a+b=1+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=(2+3i)\cdot\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $R=5\sqrt{17}$. **B.** $R=5\sqrt{10}$. **C.** $R=5\sqrt{5}$. **D.** $R=5\sqrt{13}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $|z-1|=5 \Rightarrow |\overline{z}-1|=5$.

Lại có

$$\begin{aligned} & w=(2+3i)\cdot\overline{z}+3+4i \\ \Leftrightarrow\ & \overline{z}=\frac{w-3-4i}{2+3i} \\ \Leftrightarrow\ & \overline{z}-1=\frac{w-5-7i}{2+3i} \\ \Rightarrow\ & |\overline{z}-1|=\left|\frac{w-5-7i}{2+3i}\right|=5 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|w-5-7i|}{\sqrt{13}}=5 \\ \Leftrightarrow\ & |w-5-7i|=5\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $I(5;7), R=5\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức thỏa mãn $\begin{cases} |\overline{z}-2+5i|=2 \\ |z-5-i|=3 \end{cases}$. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(a-2)^2+(5-b)^2=4\\(a-5)^2+(b-1)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{16}{5}\\b=\dfrac{17}{5}\end{cases}.$$

Như vậy tập S chỉ có một phần tử là $z=\dfrac{16}{5}+\dfrac{17}{5}i$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+2i-(1+i)|z|=0$ và $|z|>1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=3$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

Ta có $z+1+2i-(1+i)|z|=0\Leftrightarrow a+1-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+2-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\\b+2-\sqrt{a^2+b^2}=0.\end{cases}$$

Suy ra $a+1=b+2\Leftrightarrow a=b+1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$b+2-\sqrt{2b^2+2b+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}b+2\geq 0\\2b^2+2b+1=b^2+4b+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq -2\\\left[\begin{array}{l}b=-1\\b=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1\Rightarrow a=0\\b=3\Rightarrow a=4.\end{array}\right.$$

☑ Với $a=0$, $b=-1$ ta có $|z|=1$ (không thỏa mãn).

☑ Với $a=4$, $b=3$ ta có $|z|=5$ (thỏa mãn).

Vậy $P=a+b=3+4=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho số phức z. Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

A. $|z|=4$. **B.** $|z|=2\sqrt{2}$. **C.** $|z|=4\sqrt{2}$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $z\neq 0$.

$(1+i)z=(1+i)(a+bi)=a-b+(a+b)i$.

Suy ra $A(a;b)$, $B(a-b;a+b)$, $\overrightarrow{AB}=(-b;a)$, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$

Đường thẳng $AB: a(x-a)+b(y-b)=0\Leftrightarrow ax+by-a^2-b^2=0$.

Chiều cao hạ từ O của tam giác OAB là $h=\mathrm{d}(O,AB)=\dfrac{|-a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Diện tích tam giác OAB bằng 8 nên

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=8\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=4\Leftrightarrow|z|=4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 81. Giá trị của biểu thức $\mathrm{C}_{100}^0-\mathrm{C}_{100}^2+\mathrm{C}_{100}^4-\mathrm{C}_{100}^6+\cdots-\mathrm{C}_{100}^{98}+\mathrm{C}_{100}^{100}$ bằng

A. -2^{100}. **B.** -2^{50}. **C.** 2^{100}. **D.** 2^{50}.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)^{100} &= \mathrm{C}_{100}^{0} + i\mathrm{C}_{100}^{1} + i^2\mathrm{C}_{100}^{2} + \cdots + i^{100}\mathrm{C}_{100}^{100}\\ &= (\mathrm{C}_{100}^{0} - \mathrm{C}_{100}^{2} + \mathrm{C}_{100}^{4} - \cdots + \mathrm{C}_{100}^{100}) + (\mathrm{C}_{100}^{1} - \mathrm{C}_{100}^{3} + \mathrm{C}_{100}^{5} - \mathrm{C}_{100}^{99})i\end{aligned}$$

Mặt khác $(1+i)^{100} = [(1+i)^2]^{50} = (2i)^{50} = -2^{50}$.
Vậy $\mathrm{C}_{100}^{0} - \mathrm{C}_{100}^{2} + \mathrm{C}_{100}^{4} - \mathrm{C}_{100}^{6} + \cdots - \mathrm{C}_{100}^{98} + \mathrm{C}_{100}^{100} = -2^{50}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A. $P = 8$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 7$.

Lời giải.

Ta có

$$z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = 4a + 3b + (-3a+4b)i. \qquad (1)$$

Do $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực nên từ (1) suy ra $-3a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{3}{4}a$. (2)
Mặt khác $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$. (3)
Thế (2) vào (3) ta được phương trình

$$a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4.$$

Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$ và $a = -4 \Rightarrow b = -3$.
Vậy $P = |a| + |b| = 3 + 4 = 7$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Số phức z có phần ảo lớn nhất thoả mãn $|z - 1 - i| = 1$ là

A. $z = 2 + 2i$. **B.** $z = 1 + 2i$. **C.** $z = 2i$. **D.** $z = -1 + 3i$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, theo bài ra ta có

$$|(x-1) + (y-1)i| = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

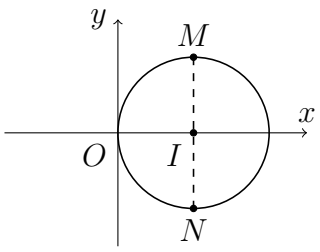
Mà $(x-1)^2 \geq 0$ nên $(y-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$.
Vậy phần ảo của z có giá trị lớn nhất bằng 2.
Dấu bằng xảy ra khi $x = 1; y = 2$, hay $z = 1 + 2i$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Gọi (C) là tập hợp các điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $|z - 1| = 1$ và N là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 1 - i$. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho MN có độ dài lớn nhất

A. $M(1;1)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **C.** $M(1;0)$. **D.** $M(0;0)$.

Lời giải.

Ta có $|z-1|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ nên tập hợp điểm (C) biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.
Điểm N có toạ độ là $N(1;-1)$ cũng thuộc (C) nên MN có độ dài lớn nhất khi MN là đường kính của đường tròn (C) hay I là trung điểm của MN nên toạ độ M là $M(1;1)$.



Chọn đáp án A □

Câu 85. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z-2i|=\sqrt{5}$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$. Khoảng cách từ I đến Δ là $d=\dfrac{1}{\sqrt{10}}<R$ nên đường thẳng Δ cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt. Từ đó suy ra có 2 số phức thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho số phức z có điểm biểu diễn là $M(x;y)$ và thỏa mãn $|z-2+3i|=|z-2-3i|$. Biết $|z-1-2i|+|z-7+4i|=6\sqrt{2}$, khi đó x thuộc khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(4;8)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z-2+3i|=|z-2-3i| &\Leftrightarrow |x-2+(y+3)i|=|x-2+(y-3)i| \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=(x-2)^2+(y-3)^2 \\ &\Leftrightarrow y=0. \end{aligned}$$

Mặt khác, gọi $A(1;2)$, $B(7;-4) \Rightarrow AB=6\sqrt{2}$. Ta có

$$|z-1-2i|+|z-7+4i|=MA+MB \leqslant AB=6\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi M nằm trên đoạn AB. Khi đó,

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}, \text{ với } k\in[0;1] \Rightarrow \begin{cases} x-1=6k \\ 0-2=-6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ k=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 87. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-3|=|z-1|$ và $(z+2)(\overline{z}-i)$ là số thực.

A. $z=2$. **B.** $z=-2+2i$. **C.** $z=2-2i$. **D.** Không có z.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, khi đó ta có

$$\begin{cases}|z-3|=|z-1|\\ \text{Im}[(z+2)(\overline{z}-i)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z-3|^2=|z-1|^2\\ \text{Im}[(z+2)(\overline{z}-i)]=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|(a+bi)-3|^2=|a+bi-1|^2\\ \text{Im}[(a+bi+2)(\overline{a+bi}-i)]=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|(a+bi)-3|^2=|a-1+bi|^2\\ \text{Im}[(a+2+bi)(a-(b+1)i)]=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+b^2\\ \text{Im}[((a+2)a+b(b+1))-i((a+2)(b+1)-ab)]=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-6a+9=a^2-2a+1\\ a+2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-2.\end{cases}$$

Vậy $z=a+bi=2-2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=4$ và $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 0 . **B.** 12 . **C.** 6 . **D.** 14.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R}),z\neq 6$. $M(a;b)$ là điểm biểu diễn z. Khi đó ta có

$$\frac{z}{z-6}=\frac{a+bi}{(a+bi)-6}=\frac{(a+bi)(a-6-bi)}{(a-6+bi)(a-6-bi)}=\frac{a(a-6)+b^2+i(b(a-6)-ab)}{(a-6)^2+b^2}.$$

Để $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo thì ta phải có $\begin{cases}a(a-6)+b^2=0 \quad (1)\\ (a-6)^2+b^2\neq 0\end{cases}$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm $I(3;0)$, bán kính $R=3$.

Từ $|z-m|=4\Leftrightarrow|(a+bi)-m|=4\Leftrightarrow(a-m)^2+b^2=16$ (2) suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm $I'(m;0)$, bán kính $R'=4$.

Để có đúng 1 điểm M thỏa mãn thì 2 đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$ phải có 1 điểm chung duy nhất

$$\Leftrightarrow\begin{cases}II'=R+R'\\ II'=|R-R'|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-3|=7\\ |m-3|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=10\\ m=-4\\ m=4\\ m=2\end{cases}.$$

Khi $m=10,m=2$ thì hai đường tròn tiếp xúc tại điểm$(6;0)$, do vậy các trường hợp này bị loại.

Vậy tổng các phần tử của S là $4-4=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính mô-đun của số phức $w=1-z+z^2$.

A. $|w|=\sqrt{37}$. **B.** $|w|=\sqrt{457}$. **C.** $|w|=\sqrt{425}$. **D.** $|w|=\sqrt{445}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$, với $a\in\mathbb{Z}$.
Theo đề bài ta có

$$\sqrt{a^2+b^2}=2(a-bi)-7+3i+a+bi\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=(3a-7)+(3-b)i. \quad (*)$$

Suy ra $3-b=0$ hay $b=3$. Khi đó $(*)$ trở thành

$$\sqrt{a^2+9}=3a-7\Leftrightarrow\begin{cases}3a-7\geq 0\\ 8a^2-42a+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq\dfrac{7}{3}\\ \left[\begin{array}{l}a=4\\ a=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow a=4.$$

Vậy $z=4+3i$. Khi đó $w=1-(4+3i)+(4+3i^2)=1-4-3i+16+24i-9=4+21i$.
Do đó $|w|=\sqrt{4^2+21^2}=\sqrt{457}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4\mathrm{i})z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. **B.** $r=5$. **C.** $r=20$. **D.** $r=22$.

Lời giải.

Ta có $|w-i|=|(3+4\mathrm{i})z|=|3+4\mathrm{i}||z|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot 4=20$.
Suy ra tập hợp điểm biểu diễn cho các số phức w là đường tròng tâm $I(0;1)$, bán kính $r=20$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 91. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+3+i-|z|i=0$. Tính $S=a+b$.

A. 0. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải.

$$z+3+i-|z|i=0\Leftrightarrow a+bi+3+i-\sqrt{a^2+b^2}\cdot i=0\Leftrightarrow(a+3)+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+3=0\\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ \sqrt{9+b^2}=b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b+1\geqslant 0\\ 9+b^2=(b+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b\geqslant -1\\ 9=2b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b\geqslant 1\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=4.\end{cases}$$

Vậy $S=a+b=-3+4=1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\overline{z}|\,i+(z+\overline{z})\,i^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Ta có

- ☑ $|z-1|^2=|a+bi-1|^2=(a-1)^2+b^2$.
- ☑ $|z-\overline{z}|\,i=|a+bi-a+bi|\,i=\sqrt{(2b)^2}i=2|b|i$.
- ☑ $i^{2019}=i^{4\cdot 504+3}=(i^4)^{504}\cdot i^3=i\cdot i^2=-i$.

☑ $(z+\overline{z})\,i^{2019} = -i\,(a+bi+a-bi) = -2ai.$

Khi đó ta suy ra $(a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1.$

$$\begin{cases} (a-1)^2+b^2=1 \\ 2|b|-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ a=|b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2-2|b|=0 \\ a=|b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |b|=0 \\ |b|=1 \end{array}\right. \\ a=|b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i\sqrt{5}\right| + \left|z-i\sqrt{5}\right| = 6$, biết z có mô đun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Đặt $z = x+yi$ với $x,\, y \in \mathbb{R}$.

Có $|z| = \sqrt{5} \Rightarrow z$ thuộc đường tròn (C) tâm $O(0;0)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi $M(x;y)$, $E(0;\sqrt{5})$, $F(0;-\sqrt{5})$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, $i\sqrt{5}$ và $-i\sqrt{5}$.

Ta có $c = EF = 2\sqrt{5}$ và $\left|z+i\sqrt{5}\right| + \left|z-i\sqrt{5}\right| = 6 \Leftrightarrow ME + MF = 6$.

Suy ra M thuộc elip (E) có hai tiêu điểm là E, $F \in Oy$ độ dài trục lớn $a = 3$ nằm trên Oy và trục bé $b = \sqrt{a^2-c^2} = 2$ nằm trên Ox.

Suy ra $b < R$ do đó elip (E) có phần nằm trong đường tròn (C) do đó (E) và (C) có bốn điểm chung.

Mặt khác z là giao điểm của (C) và (E) nên có 4 số phức z thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án (B) □

Câu 94. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|z_1+2z_2| = 4$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = a+bi$, $(a,\, b \in \mathbb{R})$; $z_2 = c+di$, $(c,\, d \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} |z_1| = 2 \\ |z_2| = 2 \\ |z_1+2z_2| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4 \\ c^2+d^2=4 \\ (a+2c)^2+(b+2d)^2=16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4 & (1) \\ c^2+d^2=4 & (2) \\ a^2+b^2+4\left(c^2+d^2\right)+4\,(ac+bd)=16 & (3). \end{cases}$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ac+bd = -1$. (4)

Ta có $|2z_1 - z_2| = \sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2} = \sqrt{4(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-4(ac+bd)}$. (5)

Thay (1), (2), (4) vào (5) ta có $|2z_1 - z_2| = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95. Cho hai số phức z, w thay đổi thoả mãn $|z|=3$, $|z-w|=1$. Biết tập hợp điểm của số phức w là hình phẳng H. Tính diện tích S của hình H.

A. $S=20\pi$. **B.** $S=16\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=12\pi$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z, w. Suy ra M nằm trên đường tròn tâm O, bán kính bằng 3.

Vì $|z-w|=1$ nên $MN=1$, do đó N nằm trên đường tròn tâm O bán kính bằng 4 hoặc bằng 2. Suy ra $S=4^2\cdot\pi-2^2\cdot\pi=12\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(4-3i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=20$. **B.** $r=5$. **C.** $r=10$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$w=3-2i+(4-3i)z\Leftrightarrow w-(3-2i)=(4-3i)z\Leftrightarrow |w-(3-2i)|=|(4-3i)z|\Leftrightarrow |w-(3-2i)|=10.$$

Vậy $r=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Tính môđun của số phức z thoả mãn $3z\cdot\bar{z}+2017\,(z-\bar{z})=48-2016i$

A. $|z|=4$. **B.** $|z|=\sqrt{2016}$. **C.** $|z|=\sqrt{2017}$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, từ giả thiết ta có $3|z|^2=48-2016i-2b\cdot 2017i=48$ (vì $|z|^2\in\mathbb{R}$), suy ra $|z|=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

Ta có $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)\,i$.

Lấy mô-đun hai vế, ta được $|z|=\sqrt{(|z|-2)^2+(|z|-1)^2}$

$$\Rightarrow |z|^2=2|z|^2-6|z|^2+5\Rightarrow \left[\begin{array}{ll}|z|=1 & \text{loại do } |z|>1\\ |z|=5 & \text{thỏa } |z|>1\end{array}\right..$$

Với $|z|=5\Rightarrow z=(|z|-2)+(|z|-1)\,i=3+4i$.

Suy ra $a=3$, $b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(i+1)|z|-(3z+4)i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z|\in(6;9)$. **B.** $|z|\in(4;6)$. **C.** $|z|\in(1;4)$. **D.** $|z|\in(0;1)$.

Lời giải.

Ta có

$$z-4=(i+1)|z|-(3z+4)i$$
$$\Leftrightarrow (1+3i)z=(4+|z|)+(|z|-4)\,i.$$

Lấy mô-đun hai vế, ta được

$$|1+3i|\cdot|z|=\sqrt{(4+|z|)^2+(|z|-4)^2}$$
$$\Leftrightarrow 10|z|^2=2|z|^2+32\Leftrightarrow |z|^2=4\Leftrightarrow |z|=2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 100. Tìm số phức $z=a+bi$ (với a, b là các số thực và $a^2+b^2\neq 0$) thỏa mãn điều kiện $\overline{z}(2+i-z)=|z|^2$. Tính $S=a^2+2b^2-ab$

A. $S=3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

$$\overline{z}(2+i-z)=|z|^2\Leftrightarrow (a-bi)(2+i)=2(a^2+b^2)\Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=2(a^2+b^2)\\ a-2b=0.\end{cases}$$

Thay $a=2b$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$5b=2\cdot 5b^2\Leftrightarrow 5b=10b^2\Leftrightarrow \begin{bmatrix}b=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=1\\ b=0\Rightarrow a=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1}{2}\\ a=1\end{cases}(\text{Do } a^2+b^2\neq 0).$$

Vậy $S=a^2+2b^2-ab=1$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. D	6. B	7. D	8. C	9. A	10. B
11. C	12. C	13. A	14. B	15. B	16. C	17. C	18. D	19. D	20. C
21. D	22. D	23. D	24. D	25. B	26. A	27. C	28. B	29. B	30. C
31. D	32. A	33. A	34. C	35. D	36. C	37. B	38. C	39. D	40. B
41. D	42. A	43. B	44. A	45. B	46. A	47. C	48. C	49. C	50. C
51. D	52. C	53. D	54. B	55. B	56. A	57. D	58. D	59. A	60. D
61. D	62. C	63. D	64. D	65. C	66. D	67. A	68. B	69. B	70. D
71. C	72. B	73. A	74. A	75. D	76. C	77. D	78. D	79. D	80. A
81. B	82. D	83. B	84. A	85. A	86. D	87. C	88. A	89. B	90. C
91. D	92. D	93. B	94. A	95. D	96. C	97. A	98. D	99. C	100. D

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Gọi S là tập hợp các số phức thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, trong đó $m\in\mathbb{R}$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{130}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi, (x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z-1|=\sqrt{34}\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=34$.

Mặt khác $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+y^2=34$ và đường thẳng $d\colon 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1, z_2. Suy ra $(C)\cap d=\{A,B\}$.

Mặt khác $|z_1-z_2|=AB\le 2R=2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1-z_2|=2\sqrt{34}\Leftrightarrow AB=2\sqrt{34}\Leftrightarrow I(1;0)\in d$.

Từ đó $m=-\dfrac{1}{2}$ nên ta có $d\colon 3x-5y-3=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=6+3i \\ z_2=-4-3i. \end{array}\right.$

Vậy $z_1+z_2=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ và $z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_1z_2z_3=0$. Đặt $z=z_1+z_2+z_3$, giá trị của $|z|^3-3|z|^2$ bằng

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Do các giả thiết đã cho đúng với mọi cặp số phức z_1, z_2, z_3 nên ta chọn $z_1=z_2=1$, kết hợp giả thiết ta có:

$z_1^3+z_2^3+z_2^3+z_1z_2z_3=0\Leftrightarrow 1+1+z_3^3+z_3=0\Leftrightarrow z_3^3+z_3+2=0\Leftrightarrow z_3=-1$, thỏa mãn $|z_3|=1$.

Khi đó ta có 1 cặp $(z_1,z_2,z_2)=(1;1;-1)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi đó $z=z_1+z_2+z_3=1+1-1=1.\Rightarrow |z|^3-3|x|^2=1-3.1=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=6, |z_2|=2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, iz_2. Biết rằng $\widehat{MON}=60^\circ$. Tính $T=|z_1^2+9z_2^2|$.

A. $T=36\sqrt{2}$. **B.** $T=24\sqrt{3}$. **C.** $T=36\sqrt{3}$. **D.** $T=18$.

Lời giải.

Cách 1: P là điểm biểu diễn của số phức $3iz_1$.

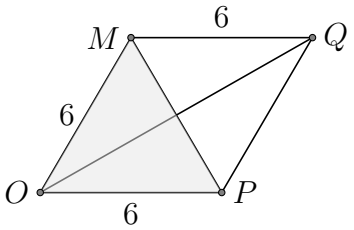
Q là điểm biểu diễn của số phức z_1+3iz_2.

Ta có $|z_1^2+9z_2^2|=|z_1-3iz_2|\,|z_1+3iz_2|=MP\cdot OQ$.

Theo giả thiết $\widehat{MON}=60^\circ\Rightarrow MOP$ là tam giác đều, do đó $MP=6$.

Ta có $OQ^2=OM^2+MP^2-2OM\cdot MQ\cdot\cos 120^\circ=6^2+6^2+6^2=108$.

$\Rightarrow OQ=6\sqrt{3}.\Rightarrow |z_1^2+9z_2^2|=36\sqrt{3}$.



Cách 2: *(Cách này về ý tưởng giống với phương pháp tọa độ hóa mà ta sử dụng trong các bài toán Hình học)*

Ta có thể chọn $z_1=6i$ và từ đây suy ra một số phức $z_2=1+\sqrt{3}i$ (khi đó z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện đề bài).

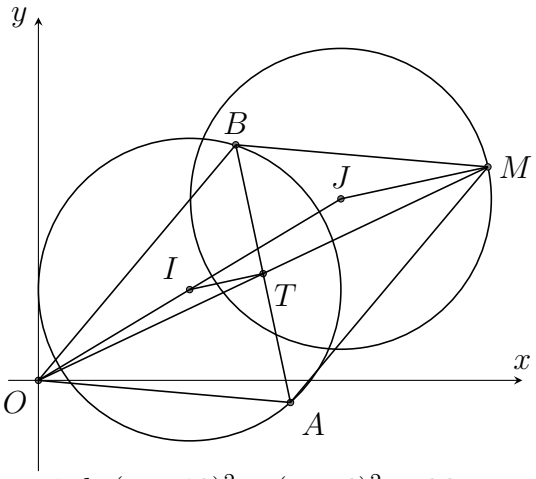
$\Rightarrow z_1^2 = -36$ và $z_2^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$.
Suy ra $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = \left|-54 + 18\sqrt{3}i\right| = \sqrt{54^2 + 3 \cdot 18^2} = 36\sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.
B. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.
C. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$.
D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Lời giải.

Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w. Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C) : (x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ và $AB = |z_1 - z_2| = 8$.
(C) có tâm $I(5;3)$ và bán kính $R = 5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT = \sqrt{IA^2 - TA^2} = 3$.
Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10;6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM, do đó $JM = 2IT = 6$.



Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.
Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với a, b là số thực. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z + iz$. Khi đó $M(a;b); N(-b;a); P(a-b; a+b)$. Suy ra $MN = \sqrt{2(a^2+b^2)}; NP = PM = \sqrt{a^2+b^2}$.
Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P.
Ta có $S_{\Delta MNP} = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 36 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = 6$.
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho khai triển $(2018x^2 + x + 2018)^{2018} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{4036}x^{4036}$. Tính tổng $S = a_1 - a_3 + a_5 - \cdots + a_{4035}$.

A. $S = 0$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 2^{2018}$. **D.** $S = 1$.

Lời giải.

Cho $x = i$ $(i^2 = -1)$ trong khai triển $(2018x^2 + x + 2018)^{2018} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{4036}x^{4036}$ ta được

$$\begin{aligned} & i^{2018} = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_{4036} i^{4036} \\ \Leftrightarrow \quad & -1 = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots + a_{4036}) + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots + a_{4035})\, i \end{aligned}$$

Vậy $S = a_1 - a_3 + \cdots + a_{4035} = 0$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 7. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$. **B.** $P = \sqrt{3}$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$. Suy ra $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$.

Và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z - (2m-1) - i| = 10$ và $|z - 1 + i| = |\overline{z} - 2 + 3i|$.

A. 41. **B.** 40. **C.** 165. **D.** 164.

Lời giải.

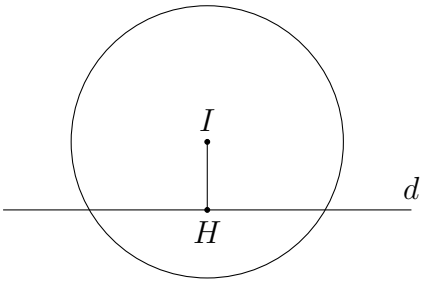
Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là M. Ta có

$|z - 1 + i| = |\overline{z} - 2 + 3i|$

$\Leftrightarrow |(a-1) + (b+1)i| = |(a-2) + (3-b)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (3-b)^2}$

$\Leftrightarrow 2a + 8b - 11 = 0$.



Suy ra điểm M thuộc đường thẳng d: $2x + 8y - 11 = 0$.

Mặt khác, từ $|z - (2m-1) - i| = 10$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C) tâm $I(2m-1; 1)$, bán kính bằng 10. Vậy M là giao điểm của d và (C).

Để tồn tại đúng hai số phức z, điều kiện là d phải cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt. Điều này xảy ra khi

$$\mathrm{d}(I, d) < 10 \Leftrightarrow \frac{|2(2m-1) + 8 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} < 10 \Leftrightarrow \frac{5 - 10\sqrt{68}}{4} < m < \frac{5 + 10\sqrt{68}}{4}.$$

Vậy có $21 - (-19) + 1 = 41$ giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A ☐

Câu 9. Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đầy đủ nhất.

A. Cân tại O. **B.** Vuông cân tại O. **C.** Đều. **D.** Vuông tại O.

Lời giải.

Ta có $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Leftrightarrow \dfrac{z_0}{z_1} + \dfrac{z_1}{z_0} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z_0}{z_1} + \dfrac{1}{\frac{z_0}{z_1}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{z_0}{z_1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \dfrac{z_0}{z_1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left|\dfrac{z_0}{z_1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_0| = |z_1|$ hay $OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O.

Chọn đáp án A ☐

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\dfrac{z + 4i}{z - 4i}$ là một số thực dương.

A. Trục Ox bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn 4, J là điểm biểu diễn -4).

B. Trục Oy bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

C. Trục Ox bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn $2i$, J là điểm biểu diễn $-2i$).

D. Đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\dfrac{z+4i}{z-4i} = \dfrac{x+(y+4)i}{x+(y-4)i} = \dfrac{[x+(y+4)i][x-(y-4)i]}{x^2+(y-4)^2} = \dfrac{x^2+y^2-16+8xi}{x^2+(y-4)^2}$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} x^2+y^2-16>0 \\ 8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2>16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} y<-4 \\ y>4 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là trục Oy bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2017}^0 + \mathrm{C}_{2017}^4 + \mathrm{C}_{2017}^8 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2016}$.

A. $S = 2^{2016} + 2^{1008}$. **B**. $S = 2^{2015} + 2^{1007}$. **C**. $S = 2^{2016} + 2^{1008}$. **D**. $S = 2^{2016} + 2^{1008}$.

Lời giải.

$2S = 2\mathrm{C}_{2017}^0 + 2\mathrm{C}_{2017}^4 + 2\mathrm{C}_{2017}^8 + \cdots + 2\mathrm{C}_{2017}^{2016}$

$= (\mathrm{C}_{2017}^0 + \mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^4 + \mathrm{C}_{2017}^6 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2014} + \mathrm{C}_{2017}^{2016}) + (\mathrm{C}_{2017}^0 - \mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^4 - \mathrm{C}_{2017}^6 + \cdots - \mathrm{C}_{2017}^{2014} + \mathrm{C}_{2017}^{2016}) = A + B$.

Tính $A = \mathrm{C}_{2017}^0 + \mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^4 + \mathrm{C}_{2017}^6 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2014} + \mathrm{C}_{2017}^{2016}$

Xét hai khai triển

$(1+1)^{2017} = \mathrm{C}_{2017}^0 + \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2016} + \mathrm{C}_{2017}^{2017}$ (1)

$(1-1)^{2017} = \mathrm{C}_{2017}^0 - \mathrm{C}_{2017}^1 + \mathrm{C}_{2017}^2 - \mathrm{C}_{2017}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2016} - \mathrm{C}_{2017}^{2017}$ (2)

(1) + (2) $\Leftrightarrow 2^{2017} = 2A \Leftrightarrow A = 2^{2016}$.

$(1+i)^{2017} = \mathrm{C}_{2017}^0 + \mathrm{C}_{2017}^1 i + \mathrm{C}_{2017}^2 i^2 + \mathrm{C}_{2017}^3 i^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2016} i^{2016} + \mathrm{C}_{2017}^{2017} i^{2017}$

$= (\mathrm{C}_{2017}^0 - \mathrm{C}_{2017}^2 + \mathrm{C}_{2017}^4 - \mathrm{C}_{2017}^6 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2016}) + (\mathrm{C}_{2017}^1 - \mathrm{C}_{2017}^3 + \mathrm{C}_{2017}^5 - \mathrm{C}_{2017}^7 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2017})i$ (3)

Lại có $(1+i)^{2017} = ((1+i)^2)^{1008}(1+i) = (2i)^{1008}(1+i) = 2^{1008}(i^2)^{504}(1+i) = 2^{1008} + 2^{1008}i$. (4) Từ (3) và (4) đồng nhất phần thực ta được $B = 2^{1008}$. Suy ra $S = \dfrac{A+B}{2} = 2^{2015} + 2^{1007}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Rút gọn tổng sau $S = \mathrm{C}_{2018}^0 - 3\mathrm{C}_{2018}^2 + 3^2\mathrm{C}_{2018}^4 - 3^3\mathrm{C}_{2018}^6 + \cdots - 3^{1009}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$

A. $S = 2^{2017}$. **B**. $S = 2^{2018}$. **C**. $S = -2^{2017}$. **D**. $S = -2^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2018} = \mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^1 x + \mathrm{C}_{2018}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} x^{2018}$ (1).

Mặt khác $(1-x)^{2018} = \mathrm{C}_{2018}^0 - \mathrm{C}_{2018}^1 x + \mathrm{C}_{2018}^2 x^2 - \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} x^{2018}$ (2).

Cộng (1) và (2) ta được:

$$(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018} = 2\left(\mathrm{C}_{2018}^0 + \mathrm{C}_{2018}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2018}^{2018} x^{2018}\right) \quad (3).$$

Thay $x = i\sqrt{3}$ vào (3) ta được:

$$(1+i\sqrt{3})^{2018} + (1-i\sqrt{3})^{2018} = 2S \quad (4).$$

Cách 1:

Mà $(1+i\sqrt{3})^3 = (1-i\sqrt{3})^3 = -8 \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^{2016} = (1-i\sqrt{3})^{2016} = (-8)^{672}$.

Suy ra, $(1+i\sqrt{3})^{2018}+(1-i\sqrt{3})^{2018}$

$=(-8)^{672}\left((1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2\right)$

$=(-8)^{672}\times(-4)=-2^{2018}$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra: $S=-2^{2017}$.

Cách 2:

Ta có $\begin{cases}(1+i\sqrt{3})=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\\(1-i\sqrt{3})=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1+i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(\cos\dfrac{2018\cdot\pi}{3}+i\sin\dfrac{2018\cdot\pi}{3}\right)\\(1-i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(\cos\dfrac{2018\cdot\pi}{3}-i\sin\dfrac{2018\cdot\pi}{3}\right)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(1+i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\(1-i\sqrt{3})^{2018}=2^{2018}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\end{cases}$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra: $S=-\dfrac{2^{2018}}{2}=-2^{2017}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó

A. $m_0\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $m_0\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq0)$. Ta có $\dfrac{1+i}{z}=\dfrac{(1+i)(a-bi)}{a^2+b^2}=\dfrac{a+b+(a-b)i}{a^2+b^2}$.

Do $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực nên $a-b=0\Leftrightarrow a=b$. Khi đó $z=a+ai,\ a\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-2|=m\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant0\\(a-2)^2+a^2=m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant0\\2a^2-4a+4-m^2=0\end{cases}$ (1).

Để tồn tại duy nhất số phức thỏa mãn bài toán thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tương đương $\Delta'=0\Leftrightarrow2m^2-4=0\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$ (do $m\geqslant0$).

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho các số phức z,w khác 0 và thỏa mãn: $|z-w|=2|z|=|w|$. Tìm phần thực của số phức $u=\dfrac{z}{w}$.

A. $-\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\left|\dfrac{z}{w}-1\right|=1$ và $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{1}{2}$. (∗)

Đặt $\dfrac{z}{w}=x+yi$, ta có (∗) tương đương với $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\x^2+y^2=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Trừ phương trình dưới cho phương trình trên ta được $x=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=4$. **B.** $R=16$. **C.** $R=8$. **D.** $R=2$.

Lời giải.

Ta có $w-2=(1+\sqrt{3}i)z \Leftrightarrow \dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i}=z \Leftrightarrow \dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i}-1=z-1 \Rightarrow \left|\dfrac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right|=|z-1|$
$\Leftrightarrow |w-3-\sqrt{3}i|=|z-1|\cdot|1+\sqrt{3}i|=4$.
Từ đó suy ra bán kính $R=4$.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Khai triển của biểu thức $(x^2+x+1)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. -2^{1009}. **B.** 0. **C.** 2^{1009}. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $i^2=-1,\ i^4=1\Rightarrow i^{4m+2}=-1,\ i^{4m}=1$ với mọi m nguyên dương.
Theo giả thiết thì $(x^2+x+1)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{4036}x^{4036}$.
Cho $x=i$, thu được
$$\left[(i)^2+i+1\right]^{2018}=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+a_4i^4+\cdots+a_{4034}i^{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}i^{4036}$$
$$\Leftrightarrow i^{2018}=a_0+a_1i-a_2+a_3i^3+a_4+\cdots-a_{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}$$
$$\Leftrightarrow -1=(a_0-a_2+a_4+\cdots-a_{4034}+a_{4036})+\left(a_1i+a_3i^3+\cdots+a_{4035}i^{4035}\right). \quad (1)$$
Chú ý rằng với mọi $n=2m+1$ lẻ thì $i^n=i^{2m+1}=i^{2m}i=(-1)^mi$ là số thuần ảo, nên
$(1)\Leftrightarrow -1=a_0-a_2+a_4-\cdots-a_{4034}+a_{4036}$.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ thỏa mãn điều kiện $|z_1|=4$, $|z_2|=3$, $|z_3|=2$ và $|4z_1\cdot z_2+16z_2\cdot z_3+9z_1\cdot z_3|=48$. Giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2+z_3|$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $z_1=4w_1,\ z_2=3w_2,\ z_3=2w_3$ với $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$. Thu được
$$|4\cdot 4w_1\cdot 3w_2+16\cdot 3w_2\cdot 2w_3+9\cdot 4w_1\cdot 2w_3|=48\Leftrightarrow|2w_1w_2+4w_2w_3+3w_1w_3|=2. \quad (1)$$
Nhân vào hai vế của (1) với $|\overline{w}_1\overline{w}_2\overline{w}_3|$, với chú ý rằng $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$, $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, $|w_i|=1$, $w_i\cdot\overline{w}_i=|\overline{w}_i|^2=1$ $(i=1,2,3)$, $|z|=|\overline{z}|$, ta được
$$|2\overline{w}_3+4\overline{w}_1+3\overline{w}_2|=2\Leftrightarrow|\overline{2w_3+4w_1+3w_2}|=2$$
$$\Leftrightarrow|2w_3+4w_1+3w_2|=2\Leftrightarrow|z_1+z_2+z_3|=2.$$
Vậy $P=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+i)|z|z-(1-2i)z\right|=|1+3i|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính $M=|2z_1+3z_2|$.

A. $M=19$. **B.** $M=25$. **C.** $M=19$. **D.** $M=\sqrt{19}$.

Lời giải.

Ta có $\left|(2+i)|z|z-(1-2i)z\right|=|1+3i|\Leftrightarrow\left|z\left[(2+i)|z|-1+2i\right]\right|=|1+3i|$
$\Leftrightarrow|z|\sqrt{(2|z|-1)^2+(|z|+2)^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow|z|^2\left(5|z|^2+5\right)=10\Leftrightarrow|z|^4+|z|^2-2=0\Leftrightarrow|z|=1$.

Suy ra $|z_1| = |z_2| = 1$.
Mặt khác $|2z_1 + 3z_2|^2 = (2z_1 + 3z_2)\left(2\overline{z_1} + 3\overline{z_2}\right) = 13 + 6\left(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right)$
và $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = 2 - \left(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right)$.
Do đó $M^2 + 6|z_1 - z_2|^2 = 25 \Rightarrow M = \sqrt{19}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Biết số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức z trên?

A. $P(4;-3)$. **B.** $N(3;-4)$. **C.** $M(3;4)$. **D.** $Q(4;3)$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$.
Ta có

$$\begin{cases} |z-(2+i)| = \sqrt{10} \\ z \cdot \bar{z} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10} \\ (x+yi)(x-yi) = 25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 25 \quad (2). \end{cases}$$

Từ (1) ta có $y = 10 - 2x$, thay vào (2) ta được

$$x^2 + (10-2x)^2 = 25 \Leftrightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4. \end{array}\right.$$

Như vậy $z = 3 + 4i$, nên điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(3;4)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 18. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 17.

Lời giải.

Ta có $(z-2+i)(\bar{z}-2-i) = \overline{z-2-i} \cdot (\bar{z}-2-i) = |\bar{z}-2-i|^2 = 25 \Rightarrow |\bar{z}-2-i| = 5$.
Ta có $w - 2 - 5i = 2(\bar{z}-2-i) \Rightarrow |w-2-5i| = 2|\bar{z}-2-i| = 10$.
Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R = 10$.
Vậy $a+b+c = 17$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho số phức $z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}i\right)^{2018}$. Biết phần ảo của z có dạng $z = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$, trong các số a, b, c, d có đúng bao nhiêu số bằng 0?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

$z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}i\right)^{2018} = \left(-2 + 2\sqrt{15}i\right)^{1009} = 2^{1009} \sum_{k=0}^{1009} \mathrm{C}_{1009}^{k} (-1)^{1009-k} \sqrt{15^k} i^k$.
Phần ảo của z ứng với giá trị k là số lẻ nên $a = b = c = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Biết $2^n\left(\mathrm{C}_n^0+i\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^2-i\mathrm{C}_n^3+\cdots+i^k\mathrm{C}_n^k+\cdots+i^n\mathrm{C}_n^n\right)=32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2=-1$. Đặt $T_{k+1}=i^k\mathrm{C}_n^k$, giá trị của T_8 bằng

A. $-330i$. **B.** $-8i$. **C.** $-36i$. **D.** $-120i$.

Lời giải.

Ta có $2^n\left(\mathrm{C}_n^0+i\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^2-i\mathrm{C}_n^3+\cdots+i^k\mathrm{C}_n^k+\cdots+i^n\mathrm{C}_n^n\right)=32768i$

$\Leftrightarrow 2^n\left(\mathrm{C}_n^0+i\mathrm{C}_n^1+i^2\mathrm{C}_n^2+i^3\mathrm{C}_n^3+\cdots+i^k\mathrm{C}_n^k+\cdots+i^n\mathrm{C}_n^n\right)=32768i$

$\Leftrightarrow 2^n(1+i)^n=2^{15}i\Leftrightarrow(1+i)^n=2^{15-n}i$: là số thuần ảo (*)

Nếu $n=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$ thì $(1+i)^n=(1+i)^{2m+1}=2^mi^m(1+i)$: không thuần ảo, sai so với (*).

Như vậy $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow(1+i)^{2m}=2^{15-2m}i\Leftrightarrow 2^mi^m=2^{15-2m}i\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $n=10$, từ đó ta có $T_8=i^7\mathrm{C}_8^7=-8i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-i|+|z+i|=6$. Gọi S là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z-i)(i+1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong S.

A. 12π. **B.** $12\sqrt{2}\pi$. **C.** $9\sqrt{2}\pi$. **D.** 9π.

Lời giải.

Giả sử điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=(z-i)(i+1)$.

Khi đó $(z-i)(i+1)=x+yi$ nên

$$\begin{cases}z-i=\dfrac{x+yi}{1+i}\\ z+i=\dfrac{x+yi}{1+i}+2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z-i=\dfrac{(x+yi)(1-i)}{2}\\ z+i=\dfrac{(x-2)+(y+2)i}{1+i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z-i=\dfrac{(x+yi)(1-i)}{2}\\ z+i=\dfrac{[(x-2)+(y+2)i](1-i)}{2}\end{cases}.$$

Ta suy ra $|z-i|=|x+yi|\cdot\left|\dfrac{1-i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}$.

Tương tự $|z+i|=|(x-2)+(y+2)i|\cdot\left|\dfrac{1-i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$.

Do giả thiết $|z-i|+|z+i|=6$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}=6\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}=6\sqrt{2}.$$

Giả sử $F_2(0;0)$ và $F_1(2;-2)$, khi đó $MF_1+MF_2=6\sqrt{2}$. Do đó tập hợp điểm M chuyển động trên elip nhận F_1, F_2 là tiêu điểm và có độ dài trục lớn là $6\sqrt{2}$.

Ta có $a=3\sqrt{2}$ và $c=\dfrac{F_1F_2}{2}=\sqrt{2}$ nên $b=\sqrt{a^2-c^2}=4$. Khi đó $S=\pi ab=12\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z+1|+2|z-1|+|z-\overline{z}-4i|$ bằng

A. $4+2\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $4+\dfrac{14}{\sqrt{15}}$. **D.** $2+\dfrac{7}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$, $(x;y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có $|z|\le 2\Leftrightarrow x^2+y^2\le 4\Rightarrow -2\le x;y\le 2$.

$$P=2|z+1|+2|z-1|+|z-\overline{z}-4i|$$

$$\begin{aligned}&= 2|z+1| + 2|\overline{z-1}| + |2yi - 4i| \\ &= 2\left(|z+1| + |1-\overline{z}| + |y-2|\right) \\ &\geq 2\left(|z-\overline{z}+2| + |y-2|\right) \\ &\geq 2\left(2\sqrt{1+y^2} + 2 - y\right).\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y$ trên đoạn $[-2;2]$, ta có

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}-1}, f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mà $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2+\sqrt{3}$, $f(-2) = 4+2\sqrt{5}$, $f(2) = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $\min\limits_{[-2;2]} f(y) = 2+\sqrt{3}$ khi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $P \geq 2\left(2+\sqrt{3}\right) = 4+2\sqrt{3}$.

Vậy $\min P = 4+2\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \overline{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}i.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hai số phức z_1, z_2 biết $|z_1+z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1| = |z_2| = 1$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. $|z_1-z_2| = 1$. **B.** $|z_1-z_2| = \sqrt{3}$. **C.** $|z_1-z_2| = \sqrt{2}$. **D.** $|z_1-z_2| = 3$.

Lời giải.

Gọi $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z_1+z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)} = \sqrt{3}$.

$|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} = 1$.

Suy ra $ac+bd = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có $|z_1-z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-2(ac+bd)} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-i| = 10$.

A. 15π. **B.** 20π. **C.** 12π. **D.** Đáp án khác.

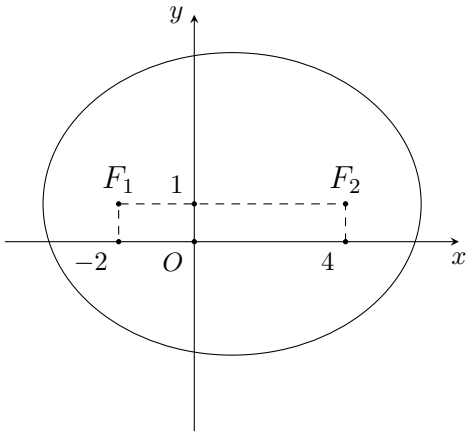
Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z, $F_1(-2;1)$, $F_2(4;1)$, ta có: $F_1F_2 = 6$.

Điều kiện đã cho tương đương $MF_1 + MF_2 = 10$. Do đó tập hợp các điểm M là elip có $2c = F_1F_2 = 6 \Rightarrow c = 3$, $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Suy ra $b = 4$.

Vậy diện tích elip là $S = \pi ab = 20\pi$.



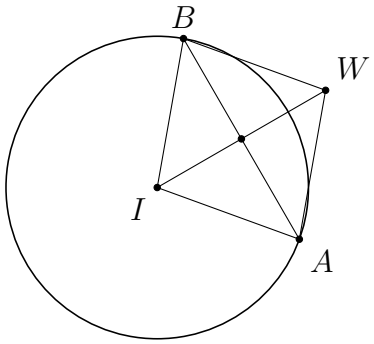
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. 8. **B**. 4. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2. Từ các giả thiết z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$ suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$ (là điểm biểu diễn của số phức $z_0=2+3i$) bán kính $R=5$ đồng thời thỏa mãn $AB=6$.



Ta có

$$(w-z_0)-z_0=(z_1-z_0)+(z_2-z_0)$$

nên $w-z_0$ có điểm biểu diễn W chính là đỉnh thứ tư của hình thoi $IAWB$. Do đó

$$\begin{aligned}&|w-2z_0|^2=IW^2=4IA^2-AB^2=4\cdot 5^2-6^2=64\\ \Rightarrow\ &|w-2z_0|=8.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $J(4;6)$, bán kính $r=8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho hai điểm A và B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì? (O là gốc tọa độ). Chọn phương án đúng nhất

A. Vuông cân tại O. **B**. Cân tại O. **C**. Đều. **D**. Vuông tại O.

Lời giải.

- ☑ $z_1^2+z_2^2=z_1z_2\Rightarrow(z_1-z_2)^2=-z_1z_2\Rightarrow|z_1-z_2|^2=|z_1||z_2|$. (1)
- ☑ $z_1^2+z_2^2=z_1z_2\Rightarrow z_1(z_1-z_2)=-z_2^2\Rightarrow|z_1||z_1-z_2|=|z_2|^2\Rightarrow|z_1-z_2|^2=\dfrac{|z_2|^4}{|z_1|^2}$. (2)
- ☑ Từ (1) và (2) $\Rightarrow|z_1|^3=|z_2|^3\Rightarrow|z_1|=|z_2|$. (3)
- ☑ Từ (1) và (3), suy ra $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$, hay $OA=OB=AB\Rightarrow\triangle OAB$ đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2+3|=2|z+\overline{z}|$ và $|z-4+3i|=3$?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

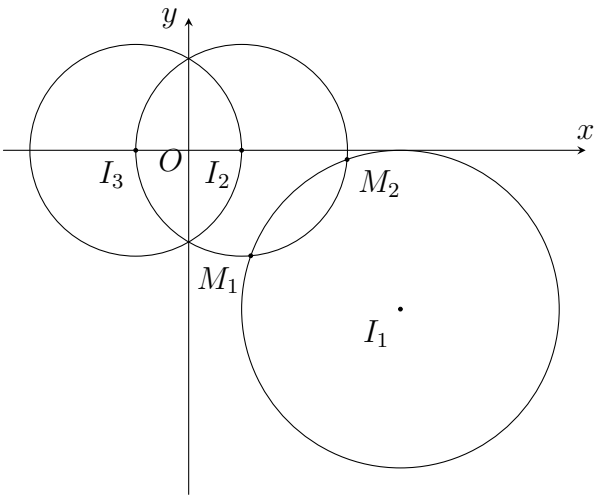
Lời giải.

Đặt $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$. Gọi M là điểm biểu diễn của z.

Ta có $|z-4+3i|=3$ nên M thuộc đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1(4;-3)$ và bán kính $R_1=3$. (1)

Ta thấy

$$\begin{aligned}
&|z^2+3| = 2|z+\overline{z}| \\
\Leftrightarrow\ &(x^2-y^2+3)^2+(2xy)^2 = 16x^2 \\
\Leftrightarrow\ &(x^2-y^2)^2+9+6(x^2-y^2)+4x^2y^2 = 16x^2 \\
\Leftrightarrow\ &(x^2+y^2)^2+9-6(x^2+y^2) = 4x^2 \\
\Leftrightarrow\ &(x^2+y^2-3)^2 = 4x^2 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned} &x^2+y^2-3 = -2x \\ &x^2+y^2-3 = 2x \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned} &(x-1)^2+y^2 = 4 \qquad (2) \\ &(x+1)^2+y^2 = 4. \qquad (3) \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$



Hình 1

Đặt $\begin{cases} (\mathscr{C}_2)\colon (x-1)^2+y^2 = 4 \\ (\mathscr{C}_3)\colon (x+1)^2+y^2 = 4. \end{cases}$

Từ (1), (2) và (3), ta thấy M là điểm chung của $\begin{cases} (\mathscr{C}_1) \\ (\mathscr{C}_2) \end{cases}$ hay $\begin{cases} (\mathscr{C}_1) \\ (\mathscr{C}_3). \end{cases}$

Từ hình 1, ta thấy có hai điểm M thỏa mãn, tức có hai số phức thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z$?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z \Leftrightarrow z(4-|z|-i) = -3|z|+(2-|z|)i$.

Đặt $t = |z|$, điều kiện $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned}
t|4-t-i| = |-3t+(2-t)i| \ &\Leftrightarrow\ t\sqrt{(4-t)^2+1} = \sqrt{9t^2+(2-t)^2} \\
&\Leftrightarrow\ t^4-8t^3+6t^2+4t-3 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (t-1)(t^3-7t^2-t+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{aligned} &t = 1 \\ &t \approx 7{,}081 \\ &t \approx 0{,}61146 \\ &t \approx -0{,}6928. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Do đó, có 3 giá trị t thỏa mãn.

Mặt khác, với mỗi $t \geq 0$, ta có $z = \dfrac{-3t+(2-t)i}{4-t-i}$ nên có duy nhất một số phức z thỏa mãn.

Vậy có 3 số phức thõa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Xét các số phức $z = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1+2i| = \sqrt{5}$. Tìm $P = 16a+8b$ biết $|z+1+i|+|z-1+4i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. -36. **B**. $\sqrt{58}$. **C**. 58. **D**. 40.

Lời giải.

Ta có $|z-1+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+2)^2=5 \Leftrightarrow a^2+b^2=2a-4b$.
$M=|z+1+i|+|z-1+4i|=\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+4)^2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} M^2 &\le 2\left[(a+1)^2+(b+1)^2+(a-1)^2+(b+4)^2\right] \\ &\le 2\left[2\left(a^2+b^2\right)+10b+19\right] \\ &\le 2\left[2\left(2a-4b\right)+10b+19\right] \\ &\le 2\left[4a+2b+19\right] \\ &\le 2\left[4(a-1)+2(b+2)+19\right]. \end{aligned}$$

Mặt khác $4(a-1)+2(b+2)+19 \le \sqrt{(4^2+2^2)\left[(a-1)^2+(b+2)^2\right]}+19=29$ nên $M^2 \le 58$.
Do đó M đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{58}$ khi $\begin{cases} 4a+b=10 \\ \sqrt{58}=\sqrt{4a-2b+2}+\sqrt{4b+17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{45}{16} \\ b=-\dfrac{5}{8} \end{cases}$.
Suy ra $P=16a+8b=40$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 không phải là số thuần thực, thỏa mãn điều kiện $z_1+z_2=4$ và $|z_1-2|=|z_2-2|=|z_3-2|=1$. Tính giá trị biểu thức $T=|z_3-z_1|^2+|z_3-z_2|^2$.

A. $T=12$. **B**. $T=1$. **C**. $T=4$. **D**. $T=8$.

Lời giải.

- ☑ Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ.
- ☑ Từ giả thiết $|z_1-2|=|z_2-2|=|z_3-2|=1$ suy ra A, B, C thuộc đường tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R=1$.
- ☑ Từ giả thiết $z_1+z_2=4$ suy ra I là trung điểm của AB nên $AB=2R=2$.
- ☑ $T=|z_2-z_1|^2+|z_3-z_2|^2=AC^2+BC^2=AB^2=4R^2=4$.

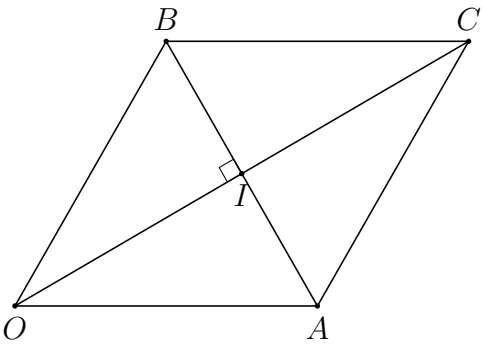
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2$, $|z_1+z_2|=2\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$.

A. $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. **B**. $|z_1-z_2|=2$. **C**. $|z_1-z_2|=3$. **D**. $|z_1-z_2|=0$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn sác số phức z_1, z_2. Khi đó $OA=|z_1|=2$, $OB=|z_2|=2$.
Dựng hình thoi $OACB$, khi đó C là điểm biểu diễn số phức z_1+z_2. Do đó $OC=|z_1+z_2|=2\sqrt{3}$.
Gọi I là tâm hình thoi $OACB$, ta có $OI=\dfrac{OC}{2}=\sqrt{3}$.
Từ đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=1$. Suy ra $AB=2IA=2$.
Bởi vậy $|z_1-z_2|=AB=2$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn ba điều kiện $|z_1-4-3i|=5$; $|z_2-4-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=5$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các số kiểu $|z_1+3z_2|$. Có bao nhiêu số nguyên trong tập S?

A. 40. **B**. 38. **C**. 39. **D**. 37.

Lời giải.

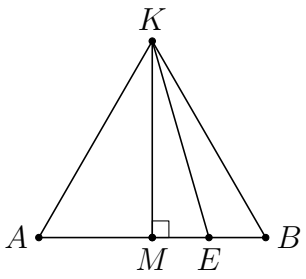
Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1; z_2$ và $K(4;3)$.

Từ giả thiết ta có $AK=BK=5$ và $AB=5$.

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Ta có $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{OE}+3\overrightarrow{EB}|=4OE$.

ΔKAB đều cạnh bằng 5 có M là trung điểm AB và E là trung điểm MB.



Ta có

$$KE=\sqrt{KM^2-ME^2}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{13}}{4}.$$

Suy ra E di động trên đường tròn tâm $K(4;3)$ bán kính $r=\dfrac{5\sqrt{13}}{4}$. Ta có

$$OK-r\le OE\le OK+r \Leftrightarrow 4(OK-r)\le 4OE\le 4(OK+r) \Leftrightarrow 20-5\sqrt{13}\le 4OE\le 20+5\sqrt{13}.$$

Trong đoạn $[20-5\sqrt{13}; \le 20+5\sqrt{13}]$ có 37 số nguyên.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho $S=|-\mathrm{C}_{2018}^0+3\mathrm{C}_{2018}^2-3^2\mathrm{C}_{2018}^4+\cdots-3^{1008}\mathrm{C}_{2018}^{2016}+3^{1019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}|$. Hỏi S có bao nhiêu chữ số.

A. 607. **B**. 608. **C**. 609. **D**. 610.

Lời giải.

Đặt $f(x)=(1+x)^{2018}$, ta có

$$f(x)=\mathrm{C}_{2018}^0+\mathrm{C}_{2018}^1x+\mathrm{C}_{2018}^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2018}x^{2018}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{3}i\right)&=\mathrm{C}_{2018}^0+\sqrt{3}i\mathrm{C}_{2018}^1+3i^2\mathrm{C}_{2018}^2+\cdots+3^{1009}i^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}\\
&=\mathrm{C}_{2018}^0+\sqrt{3}i\mathrm{C}_{2018}^1-3\mathrm{C}_{2018}^2+\cdots-3^{1009}\mathrm{C}_{2018}^{2018},\\
f\left(-\sqrt{3}i\right)&=\mathrm{C}_{2018}^0-\sqrt{3}i\mathrm{C}_{2018}^1+3i^2\mathrm{C}_{2018}^2+\cdots+3^{1009}i^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}\\
&=\mathrm{C}_{2018}^0-\sqrt{3}i\mathrm{C}_{2018}^1-3\mathrm{C}_{2018}^2+\cdots-3^{1009}\mathrm{C}_{2018}^{2018}.
\end{aligned}$$

Suy ra $S=\dfrac{\left|f\left(\sqrt{3}i\right)+f\left(-\sqrt{3}i\right)\right|}{2}$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{3}i\right)&=\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2018}=2^{2018}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2018}\\
&=2^{2018}\left(\cos\frac{2018\pi}{3}+i\sin\frac{2018\pi}{3}\right)=2^{2018}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\\
f\left(-\sqrt{3}i\right)&=\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2018}=2^{2018}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2018}\\
&=2^{2018}\left[\cos\left(-\frac{2018\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2018\pi}{3}\right)\right]=2^{2018}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),
\end{aligned}$$

Suy ra $S = 2^{2018}$. Ta có

$$\log S = \log\left(2^{2018}\right) \approx 607{,}4785.$$

Vậy S có 608 chữ số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn: $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1^2 = z_2 \cdot z_3 \\ |z_1 - z_2| = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức $M = |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1|$.

A. $-\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Theo giả thiết ta có:

- ☑ $|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$.
- ☑ $|z_1 - z_2| = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

  $\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$

  $\Leftrightarrow 2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) = 2 + \sqrt{3}$

  $\Leftrightarrow 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) = -\sqrt{3}$.

  Suy ra $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1| = \left|z_2 - \frac{z_1^2}{z_2}\right| - \left|\frac{z_1^2}{z_2} - z_1\right| \\ &= \frac{|z_2 - z_1| \cdot |z_2 + z_1|}{|z_2|} - \frac{|z_1||z_1 - z_2|}{|z_2|} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}. \end{aligned}$$

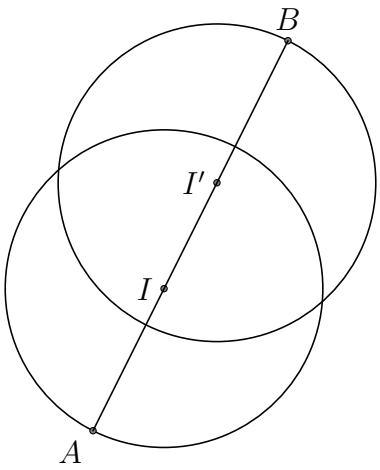
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$. Phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến tập hợp biểu diễn số phức z thành tập hợp biểu diễn số phức z'. Tìm $P = \max|z - z'|$.

A. $P = 15$. **B.** $P = 12$. **C.** $P = 20 - \sqrt{5}$. **D.** $P = 10 + \sqrt{5}$.

Lời giải.

Xét hai đường tròn $(I;5);(I';5)$ với $I(1;-2), I'(2;0)$.
Khi đó $\max|z-z'| = AB$ với A, B là các giao điểm của đường thẳng II' với các đường tròn $(I;5);(I';5)$ (A không nằm trong $(I';5)$ và B không nằm trong $(I;5)$).
Khi đó $AB = 2R + II' = 10 + \sqrt{5}$



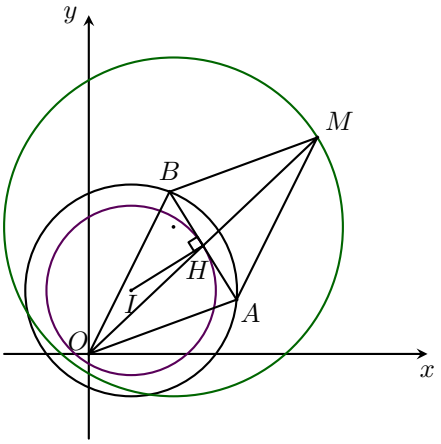
Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $\omega = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó

A. $R = 8$. **B.** $R = 4$. **C.** $R = 2\sqrt{2}$. **D.** $R = 2$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2
$\Rightarrow A, B \in (C)$ có tâm $I(2;3)$ và $R = 5$.
Ta có $\left|\overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IB}\right| = 5; \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| = |z_1 - z_2| = 6$
Gọi H là trung điểm AB ta có $IH = \sqrt{IA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = 4$.
Vậy H thuộc đường tròn I bán kính $R_1 = 4$.
Ta có $\omega = z_1 + z_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OH}$.
Vậy M là ảnh của H qua phép vị tự tâm O tỷ số $k = 2$.
Vậy tập hợp M là đường tròn bán kính $R = kR_1 = 8$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 2i - (1+1)|z| = 0$ và $|z| > 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 3$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -5$.

Lời giải.

Với $z = a + bi$ ta có:

$$z + 1 + 2i - (1+1)|z| = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 2i = (1+i)\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = \sqrt{a^2+b^2} \\ b + 2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 = a^2 + b^2 \\ b^2 + 2b + 1 = a^2 + b^2 \end{cases} (a \geq -1, b \geq -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b^2 - 1 & (1) \\ 16b + 16 = (b^2-1)^2 & (2) \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow b^4 - 2b^2 - 16b - 15 = 0 \Leftrightarrow (b+1)(b-3)(b^2+2b+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = 3. \end{array}\right.$

Với $b = -1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = -i$ (không thỏa mãn $|z| > 1$).
Với $b = 3 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow z = 3 + 4i$ (thỏa mãn).
Vậy $P = a + b = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=|\overline{z}-i|$. Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức $w=(3-4i)z+i$ là đường thẳng có phương trình

A. $7x-y-1=0$. **B.** $x-7y+1=0$. **C.** $7x-y+1=0$. **D.** $7x+y+1=0$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi \Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có

$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

$|\overline{z}-i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$.

Theo giả thiết thì $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow y=-x$.

Xét số phức $w=(3-4i)(x+yi)=(3x+4y)+(3y-4x+1)i$.

Gọi $M'(x';y')$ là điểm biểu diễn số phức w.

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=-7x+1 \end{cases} \Leftrightarrow y'=7x'+1 \Leftrightarrow 7x-y+1=0$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho số phức $z=a+bi$ (a,b là các số thực) thỏa mãn $z\cdot|z|+2z+i=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b^2$.

A. $T=4\sqrt{3}-2$. **B.** $T=3+2\sqrt{2}$. **C.** $T=3-2\sqrt{2}$. **D.** $T=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $z\cdot|z|+2z+i=0 \Leftrightarrow z\cdot(|z|+2)=-i$. Lấy mô-đun hai vế, ta được

$$|z|(|z|+2)=1 \Leftrightarrow |z|^2+2|z|-1=0 \Leftrightarrow |z|=-1+\sqrt{2}.$$

Do đó $z=\dfrac{-i}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow a+b^2=0+\left(\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^2=3-2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=1;|z_2|=2$ và $z_1\cdot\overline{z_2}$ là số thuần ảo, tính $|z_1-z_2|$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Vì $z_1\overline{z_2}$ là số thuần ảo nên $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=0$.

Ta có $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})=5-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}})=5$.

Vậy $|z_1-z_2|=\sqrt{5}$.

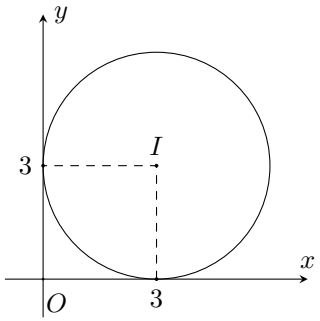
Chọn đáp án D □

Câu 43.

Đường tròn ở hình bên là tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn đẳng thức nào dưới đây?

A. $|z-3|=3$. **B.** $|z|=3$.

C. $|z-3-3i|=3$. **D.** $|z-3i|=3$.



Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Dựa vào hình vẽ ta thấy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn tâm $I(3;3)$, có bán kính $R=3$.

Suy ra

$$(x-3)^2+(y-3)^2=3^2\Leftrightarrow|z-3-3i|=3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho biết có hai số phức z thỏa mãn $z^2=119-120i$, ký hiện là z_1 và z_2. Tính $|z_1-z_2|^2$.

A. 169. **B.** 114244. **C.** 338. **D.** 676.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}a^2-b^2=119\\2ab=-120\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-12\\b=5\end{cases}\\\begin{cases}a=12\\b=-5\end{cases}\end{array}\right.$.

Do đó $z_1=-12+5i;z_2=12-5i$.

Suy ra $|z_1-z_2|^2=|-24+10i|^2=676$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho w là số phức thay đổi thỏa mãn $|w|=2$. Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn số phức $z=3w+1-2i$ chạy trên đường nào?

A. Đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=6$. **B.** Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=2$.

C. Đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$. **D.** Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=6$.

Lời giải.

Ta có: $z=3w+1-2i\Leftrightarrow z-1+2i=3w$.

$\Rightarrow|z-1+2i|=|3w|=6$.

$\Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức z chạy trên đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R},a<0)$ thỏa mãn $1+\overline{z}=|\overline{z}-i|^2+(iz-1)^2$. Tính $|z|$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$1+\overline{z}=|\overline{z}-i|^2+(iz-1)^2\Leftrightarrow1+a-bi=a^2+(b+1)^2-a^2+(b+1)^2-2a(b+1)i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+a=2(b+1)^2\\-b=-2a(b+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2(b+1)^2-1\\1-(b+1)=-2a(b+1).\end{cases}$$

Thế $a=2(b+1)^2-1$ vào phương trình dưới ta được

$$4(b+1)^3-3(b+1)+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b+1=-1\\b+1=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-2\Rightarrow a=1\text{ (loại)}\\b=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho số phức $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 2 - i - |z|(1 - i) = 0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x - y + 5 = 0$. **B.** $x - y + 2 = 0$. **C.** $x + y - 2 = 0$. **D.** $x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $z + 2 - i - |z|(1 - i) = 0 \Leftrightarrow x + yi + 2 - i - (1 - i)\sqrt{x^2 + y^2} = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 - \sqrt{x^2 + y^2} + \left(y - 1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ y - 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2 - \sqrt{x^2 + y^2} + y - 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0.$

Do đó M thuộc đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Phương trình $z^2 + |z| = 0$ có mấy nghiệm trong tập số phức?

A. Có 2 nghiệm. **B.** Có 3 nghiệm. **C.** Có 1 nghiệm. **D.** Có 4 nghiệm.

Lời giải.

Giả sử số phức z cần tìm có dạng $a + bi$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$a^2 + 2abi - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2}\right) + 2abi = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta thu được tập nghiệm là $(a; b) = \{(0; 0), (0; 1), (0; -1)\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{|z - 2| + 2}{4|z - 2| - 1} > 1$. Khi đó $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $(x + 2)^2 + y^2 > 49$. **B.** $(x + 2)^2 + y^2 < 49$. **C.** $(x - 2)^2 + y^2 < 49$. **D.** $(x - 2)^2 + y^2 > 49$.

Lời giải.

Điều kiện $4|z - 2| - 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 > \dfrac{1}{16}$.

Ta có

$$\frac{1}{3}\frac{|z - 2| + 2}{4|z - 2| - 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{|z - 2| + 2}{4|z - 2| - 1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3|z - 2| + 6 < 4|z - 2| - 1 \Leftrightarrow |z - 2| > 7$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 > 49.$$

Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|iz - 2i + 1| = 2$ là đường tròn có tọa độ tâm là

A. $(2; 1)$. **B.** $(2; -1)$. **C.** $(-2; -1)$. **D.** $(-2; 1)$.

Lời giải.

Gọi số phức $z = x + yi;\ (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|iz - 2i + 1| = 2 \Leftrightarrow |(1 - y) + (x - 2)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tọa độ tâm là $(2; 1)$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. B	5. C	6. A	7. A	8. A	9. A	10. B
11. B	12. C	13. C	14. D	15. A	16. D	17. C	18. D	19. C	20. D
21. D	22. B	23. B	24. A	25. A	26. B	27. A	28. C	29. B	30. B
31. D	32. C	33. B	34. D	35. B	36. D	37. D	38. A	39. C	40. C
41. C	42. D	43. C	44. D	45. A	46. A	47. D	48. B	49. D	50. A

BÀI 3 PHÉP CHIA SỐ PHỨC

A LÝ THUYẾT CƠ BẢN

Tính chất 1. Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.

Tính chất 2. Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng bình phương môđun của số phức đó.

Định nghĩa 1. Nếu $c+di=(a+bi)z$ thì số phức z được gọi là thương của phép chia $c+di$ cho $a+bi$ khác 0.

⚠ *Để tính thương $c+di=(a+bi)z$ ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a+bi$.*

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. Phép chia số phức đơn giản

Phương pháp giải. Cho hai số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di$ trong đó $z_2\neq 0$. Khi đó thương của phép chia z_1 cho z_2 được xác định như sau:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)-(ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

Ví dụ 1. Tìm nghịch đảo $\dfrac{1}{z}$ của số phức $z=2-3i$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2-3i}=\dfrac{2+3i}{2^2+(-3)^2}=\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i.$ □

Ví dụ 2. Thực hiện phép chia $2+i$ cho $1+2i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{2+i}{1+2i}=\dfrac{(2+i)(1-2i)}{1^2+(-2)^2}=\dfrac{4-i}{5}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5}i.$ □

Ví dụ 3. Thực hiện phép chia $\sqrt{2}+2i$ cho $\sqrt{2}-2i$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\dfrac{(\sqrt{2}+2i)(\sqrt{2}+2i)}{(\sqrt{2^2})+2^2}=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i.$ □

Ví dụ 4. Tìm số phức z thỏa mãn $(2-i)z=4+3i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{4+3i}{2-i}=\dfrac{(4+3i)(2+i)}{2^2+1^2}=1+\dfrac{9}{5}i.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm nghịch đảo $\dfrac{1}{z}$ của số phức z biết:

① $z=2-4i.$ ② $z=3i.$ ③ $z=-3+5i.$ ④ $z=-3-2i.$

Lời giải.

① $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5}i.$ ② $\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{3}i.$ ③ $\dfrac{1}{z}=-\dfrac{3}{34}-\dfrac{5}{34}i.$ ④ $\dfrac{1}{z}=-\dfrac{2}{13}+\dfrac{2}{13}i.$

□

Bài 2. Thực hiện phép chia sau:

① $\dfrac{3-2i}{2-3i}.$ ② $\dfrac{2-5i}{i}.$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i}.$ ④ $\dfrac{2+6i}{-1-i}.$

Lời giải.

① $\dfrac{3-2i}{2-3i}=\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}i.$

② $\dfrac{2-5i}{i}=-5-2i.$

③ $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i}=\dfrac{1+\sqrt{6}}{3}+\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}i.$

④ $\dfrac{2+6i}{-1-i}=-4-2i.$

□

Bài 3. Tìm số phức z thỏa mãn:

① $iz=1+i.$
② $(2-i)z=-2-i.$
③ $(-2+i)z=3+2i.$
④ $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)z=1-i.$

Lời giải.

① $z=\dfrac{1+i}{i}=1-i.$

② $z=\dfrac{-2-i}{2-i}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i.$

③ $z=\dfrac{3+2i}{-2+i}=-\dfrac{4}{5}-\dfrac{7}{5}i.$

④ $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i.$

□

DẠNG 2. Các bài toán tìm phần thực và phần ảo của số phức

Phương pháp giải. Để tìm phần thực và phần ảo của số phức z, ta cần đưa z về dạng $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó phần thực của z là x và phần ảo của z là y. Để thực hiện được ta cần nắm vững một số kiến thức cơ bản đã học:

1) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ với $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

2) $(1+i)^2=2i$ và $(1-i)^2=-2i$ với i là đơn vị ảo.

3) Công thức Nhị thức Newton: Cho $z=a+bi\in\mathbb{C}$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $n\in\mathbb{N}$. Khi đó ta có:

$$z^n=(a+bi)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}(bi)^k=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k i^k$$

Để viết được kết quả dưới dạng đại số thông thường, chỉ còn phải áp dụng các công thức: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Từ đó, một cách tổng quát ta có:

$$i^n=\begin{cases}1 \text{ nếu } n=4k\\ i \text{ nếu } n=4k+1\\ -1 \text{ nếu } n=4k+2\\ -i \text{ nếu } n=4k+3\end{cases}\quad(k\in\mathbb{N})$$

Ví dụ 5. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}-\dfrac{\sqrt{2}-i}{i}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}z&=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}-\frac{\sqrt{2}-i}{i}=\frac{(\sqrt{3}-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}-\frac{(\sqrt{2}-i)2i}{2i^2}\\&=\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}-i+i^2}{2}+\frac{2+2i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1+i(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy số phức z có phần thực là $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ và phần ảo là $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}$. □

Ví dụ 6. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z nếu như ta có

$$(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$$

Lời giải.

Ta có

$$(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow 2i(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$$
$$\Leftrightarrow 2(1+2i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow (1+2i)z = 8+i$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{8+i}{1+2i} = \frac{(8+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10-15i}{5} = 2-3i.$$

Vậy số phức z có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng -3. □

Ví dụ 7. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$.

Lời giải.

Ta có

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{3}i+3(\sqrt{3}i)^2+(\sqrt{3}i)^3}{2i(1+i)}$$
$$= \frac{1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i}{-2+2i} = \frac{-8}{-2+2i} = \frac{-8(-2-2i)}{8} = 2+2i.$$

Vậy số phức z có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 2. □

Ví dụ 8. Tính tổng của phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$.

Lời giải.

Vì $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018} = \left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right]^{1009} = \left[\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\right]^{1009} = \left(\frac{-2i}{2i}\right)^{1009} = (-1)^{1009} = -1$ nên tổng của phần thực và phần ảo của z bằng -1. □

Ví dụ 9. Cho số phức z thỏa $\overline{z} = \frac{(1-2i)^5}{2+i}$. Viết z dưới dạng $z = a+ib$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $S = a+2b$.

Lời giải.

Ta có

$$\overline{z} = \frac{1+5\cdot(-2i)+10\cdot(-2i)^2+10\cdot(-2i)^3+5\cdot(-2i)^4+(-2i)^5}{2+i}$$
$$= \frac{1-10i+40i^2-80i^3+80i^4-32i^5}{2+i} = \frac{1-10i-40+80i+80-32i}{2+i}$$
$$= \frac{41+38i}{2+i} = \frac{(41+38i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{120+35i}{5} = 24+7i.$$
$$\Rightarrow z = 24-7i \Rightarrow S = a+2b = 24+2\cdot(-7) = 24-14 = 10.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4.

a) Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết $\overline{z} = \dfrac{5}{1-2i} - 3i$.

b) Tìm số phức z biết $\overline{z} - \dfrac{5+i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $\overline{z} = \dfrac{5}{1-2i} - 3i = \dfrac{5(1+2i)}{5} - 3i = 1 + 2i - 3i = 1 - i$. Vậy z có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -1.

b) Giả sử $z = z + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\overline{z} - \frac{5+i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 - 5 + i\sqrt{3} - z = 0\\
\Leftrightarrow &x^2 + y^2 - 5 + i\sqrt{3} - x - iy = 0\\
\Leftrightarrow &\left(x^2 + y^2 - x - 5\right) + i\left(\sqrt{3} - y\right) = 0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 5 = 0 \\ \sqrt{3} - y = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa yêu cầu bài toán là $z = -1 + i\sqrt{3}$ hoặc $z = 2 + i\sqrt{3}$.

□

Bài 5. Chứng tỏ $z = -\dfrac{3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i} + \dfrac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}$ là một số thực.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
z &= -\frac{3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i} + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i} = \frac{-(3+2i\sqrt{3})(\sqrt{2}-3i)}{(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)} + \frac{(-3+2i\sqrt{3})(\sqrt{2}+3i)}{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}+3i)}\\
&= \frac{-3\sqrt{2} + 9i - 2\sqrt{6}i - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 9i + 2\sqrt{6}i - 6\sqrt{3}}{11}\\
&= \frac{-6\sqrt{2} - 12\sqrt{3}}{11} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Bài 6. Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{67} + (1-i)^{21} + (3+2i)(3-2i) + \frac{1}{i}$$

Lời giải.

Ta có:

- ☑ $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{67} = \left[\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{67} = \left(\dfrac{2i}{2}\right)^{67} = i^{67} = (i^4)^{16} \cdot i^2 \cdot i = -i.$
- ☑ $(1-i)^{21} = [(1-i)^2]^{10} \cdot i = (-2i)^{20} \cdot i = (-2)^{20} \cdot i^{20} \cdot i = 2^{20} \cdot (i^4)^5 \cdot i = 2^{20}i.$
- ☑ $(3+2i)(3-2i) = 11.$
- ☑ $\dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{i \cdot (-i)} = -i.$

$\Rightarrow z = -i + 2^{20}i + 11 - i = 11 + (2^{20} - 2)\, i.$

Vậy số phức z có phần thực bằng 11 và phần ảo bằng $2^{20} - 2$. □

Bài 7. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{5\,(\overline{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = z^2+z+1$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{5\,(\overline{z}+i)}{z+1} = 2 - i \\
\Leftrightarrow &5(x - iy + i) = (x + 1 + iy)(2 - i) \\
\Leftrightarrow &5x + i(5 - 5y) = (2x + 2 + y) + i(2y - x - 1) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 2x + 2 + y = 5x \\ 2y - x - 1 = 5 - 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 7y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow w = z^2 + z + 1 = (1+i)^2 + (1+i) + 1 = 2i + 1 + i + 1 = 2 + 3i$. Vậy số phức w có phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 3. □

Bài 8. Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$z = \frac{i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}}{i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}$$

Lời giải.

Ta có

$$z = \frac{i^{2009}\,(1 + i + i^2 + i^3 + i^4)}{i^{2014}\,(1 + i + i^2 + i^3 + i^4)} = \frac{i^{2009}}{i^{2014}} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i^4 \cdot i} = \frac{1}{i} = -i.$$

Vậy số phức z có phần thực bằng 0 và phần ảo bằng -1. □

DẠNG 3. Một số bài toán xác định môđun của số phức

Phương pháp giải. Môđun số phức z được kí hiệu là $|z|$

1) Môđun số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

2) $|z|\geq 0$, $|z|=0\Leftrightarrow z=0$

3) $|z|=|\overline{z}|$

4) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ với $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

Ví dụ 10. Tìm môđun của số phức z biết $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}\right|=\dfrac{|1|}{\left|\sqrt{3}+i\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{1}{2}$ □

Ví dụ 11. Tìm môđun của số phức z biết $z=\dfrac{2+i}{3-5i}$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\left|\dfrac{2+i}{3-5i}\right|=\dfrac{|2+i|}{|3-5i|}=\dfrac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{9+25}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{34}}$ □

Ví dụ 12. Tìm môđun của số phức z biết $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|=\dfrac{|1+i|}{|1-i|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$. Vậy $\left|\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}\right|=\left(\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|\right)^{2018}=1$ □

Ví dụ 13. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\overline{z}+iz$.

Lời giải.

Ta có $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3=1-3\sqrt{3}i+3\left(\sqrt{3}i\right)^2-\left(\sqrt{3}i\right)^3=-8$

do đó $\overline{z}=\dfrac{-8}{1-i}=\dfrac{-8\,(1+i)}{1-i^2}=-4-4i$

$\Rightarrow \overline{z}+iz=(-4-4i)+i\,(-4+4i)=-8-8i.$

Vậy $|\overline{z}+iz|=8\sqrt{2}$. □

Ví dụ 14. Tìm môđun của số phức z biết $(2z-1)\,(1+i)+(\overline{z}+1)\,(1-i)=2-2i$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$, ta có $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$

$$\Leftrightarrow [(2a-1)+2bi](1+i)+[(a+1)-bi](1-i)=2-2i$$
$$\Leftrightarrow (2a-2b-1)+(2a+2b-1)i+(a-b+1)-(a+b+1)i=2-2i$$
$$\Leftrightarrow (3-3b)+(a+b-2)i=2-2i \Leftrightarrow \begin{cases}3a-3b=2\\a+b-2=-2\end{cases} \Leftrightarrow (a;b)=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\overline{z}+i)}{z+i}=2-i$. Tính môđun của số phức $w=1+z+z^2$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ thì $\frac{5(\overline{z}+i)}{z+i}=2-i \Leftrightarrow \frac{5(x-yi+i)}{x+yi+1}=2-i \Leftrightarrow \frac{5[x-(y-1)i]}{(x+1)+yi}=2-i$

$\Leftrightarrow 5x-5(y-1)i=(2x+2+y)-(x+1-2y)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2+y=5x\\x+1-2y=5(y-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=2\\x-7y=-6\end{cases} \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$. Vậy $z=1+i$

$w=1+z+z^2=1+(1+i)+(1+i)^2=1+1+i+1+2i+(-1)=2+3i$

$\Rightarrow |w|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

□

Bài 10. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$.

Tìm môđun của số phức $w=z+1+i$.

Lời giải.

$$(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i \Leftrightarrow (2+i)z+\frac{(1+i)(1-i)(1+2i)}{1+i}=7+8i$$
$$\Leftrightarrow (2+i)z+(1+2i)(1-i)=7+8i \Leftrightarrow (2+i)z+1+i-2i^2=7+8i$$
$$\Leftrightarrow (2+i)=7i+4 \Leftrightarrow z=\frac{(7i+4)(4-2i)}{(2+i)(2+i)}=3+2i$$

Suy ra $w=z+1+i=4+3i \Rightarrow |w|=\sqrt{9+16}=5$

□

Bài 11. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)(z-i)+2z=2i$.

Tìm môđun của số phức $w=\frac{\overline{z}+2z+1}{z^2}$.

Lời giải.

Ta có: $(1+i)(z-i)+2z=2i \Leftrightarrow (3+i)z=-1+3i \Leftrightarrow z=i$

$\Rightarrow w=-1+3i \Rightarrow |w|=\sqrt{10}$

□

Bài 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$.

Lời giải.

Ta có $|z-3+4i|=4 \Rightarrow z \in (I(3;-4), R=4)$

Tính $IO=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Vậy $\begin{cases} \min|z| = OI-R=1 \\ \max|z| = OI+R=5+4=9 \end{cases}$ □

Bài 13. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|2z-i|=|2+iz|$, $|z_1-z_2|=1$. Tính $P_1=|z_1+z_2|$

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$, ta có $|2z-i|=|2+iz|$

$\Leftrightarrow |2a+(2b-1)i|=|2-b+ai|$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2-4b+1=4-4b+b^2+a^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=1 \Rightarrow z_1, z_2 \in (O;R=1)$

Gọi điểm M_1, M_2 lần lượt là biểu diễn của z_1, z_2.

Suy ra $|z_1-z_2|=\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=1 \Rightarrow \Delta OM_1M_2$ đều cạnh bằng 1.

Vậy $|z_1+z_2|=\left|\overrightarrow{OA}\right|=OA=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (với OM_1AM_2 là hình bình hành). □

DẠNG 4. Tìm tập hợp điểm-GTNN-GTLN

Phương pháp giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Bước 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức: $z=x+yi, (x,y\in\mathbb{R})$.

Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Khi thực hiện bước 2 ta cần lưu ý các tính chất sau:

1. $z=\overline{\overline{z}}$.
2. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.
3. $\overline{z^{-1}}=(\overline{z})^{-1}, \forall z\neq 0$.
4. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
5. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
6. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2\neq 0$.

Ví dụ 15. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức $z=\dfrac{5}{3-4\mathrm{i}}$.

Lời giải.

$z=\dfrac{5}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{5(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\dfrac{15+20\mathrm{i}}{25}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

Do đó tọa độ điểm $M\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$. □

Ví dụ 16. Tìm tập hợp các điểm nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức z thoả mãn $\left|\dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}\overline{z}}\right|=1$.

Lời giải.

$\left|\dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}\overline{z}}\right|=1 \Leftrightarrow |z+1-2\mathrm{i}|=|5-\overline{z}\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z+1-2\mathrm{i}|^2=|5-\overline{z}\mathrm{i}|^2$

$\Leftrightarrow (z+1-2\mathrm{i})(\bar{z}++1+2\mathrm{i}) = (5-\bar{z}\mathrm{i})(5+z\mathrm{i}) \Leftrightarrow z\bar{z}++z+\bar{z}+2(z-\bar{z})\mathrm{i}+5 = 25+5(z-\bar{z})\mathrm{i}+z\bar{z}$
$\Leftrightarrow z+\bar{z}-3(z-\bar{z})\mathrm{i}-20=0.$ (1)
Đặt $z=x+y\mathrm{i}; x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow \bar{z}=x-y\mathrm{i}$.
Do đó (1) $\Leftrightarrow 2x-3(2y\mathrm{i})\mathrm{i}-20=0 \Leftrightarrow x+3y-10=0$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}\bar{z}}\right|=1$ là đường thẳng $x+3y-10=0$. □

Ví dụ 17. Cho số phức z thỏa mãn $(2+\mathrm{i})|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{z}+1-2\mathrm{i}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=(3-4\mathrm{i})z-1+2\mathrm{i}$ là đường tròn tâm I, bán kính R. Tìm tọa độ điểm I và bán kính R.

Lời giải.

$w=(3-4\mathrm{i})z-1+2\mathrm{i} \Leftrightarrow w+1-2\mathrm{i}=(3-4\mathrm{i})z \Rightarrow |w+1-2\mathrm{i}|=5|z|$.
Mặt khác, từ điều kiện giả thiết suy ra
$(2|z|+1)+(|z|+2)\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow |(2|z|+1)+(|z|+2)\mathrm{i}| = \dfrac{\sqrt{10}}{|z|} \Leftrightarrow (2|z|-1)^2+(|z|+2)^2 = \dfrac{10}{|z|^2}$
$\Leftrightarrow |z|^2+1 = \dfrac{2}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^4+|z|^2-2=0 \Leftrightarrow (|z|^2-1)(|z|^2+2)=0 \Rightarrow |z|=1$.
Do đó $|w+1-2\mathrm{i}|=5$, có nghĩa tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=(3-4\mathrm{i})z-1+2\mathrm{i}$ là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Cho các số phức z thoả mãn $|(1-\mathrm{i})z-4+2\mathrm{i}|=2$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng toạ độ là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn đó.

Lời giải.

Đặt $z=x+y\mathrm{i}$ với $x,y\in\mathbb{R}$.
Ta có: $|(1-\mathrm{i})z-4+2\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow \left|(1-\mathrm{i})\left(z-\dfrac{4-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)\right|=2 \Leftrightarrow |1-\mathrm{i}|\,|z-3-\mathrm{i}|=2$
$\sqrt{2}|z-3-\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow |z-3-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.
Vậy tọa độ tâm $I(3;1)$ bán kính $R=\sqrt{2}$. □

Bài 15. Tập hợp các số phức $w=(1+\mathrm{i})\,z+1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1|\le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

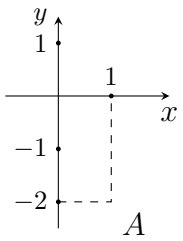
Lời giải.

Ta có $w=(1+\mathrm{i})z-(1+\mathrm{i})+2+\mathrm{i} \Leftrightarrow w-2-\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(z-1)$
$\Rightarrow |w-2-\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}||z-1| \Leftrightarrow |w-2-\mathrm{i}|=\sqrt{2}|z-1|\le\sqrt{2}$.
Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.
Suy ra diện tích hình tròn là $S=\pi R^2=2\pi$. □

Bài 16. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z-(2+3\mathrm{i})\bar{z}=1-9\mathrm{i}$. Hãy biểu diễn số phức $w=\dfrac{5}{\mathrm{i}z}$ trên hệ trục tọa độ Oxy.

Lời giải.

Đặt $z = x + y\mathrm{i}, x, y \in \mathbb{R}$.



Theo đề, ta có:

$x + y\mathrm{i} - (2 + 3\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = 1 - 9\mathrm{i} \Leftrightarrow -x - 3y + (-3x + 3y)\mathrm{i} = 1 - 9\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y = 1 \\ -3x + 3y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Do đó $z = 2 - \mathrm{i} \Rightarrow w = \dfrac{5}{\mathrm{i}(2 - \mathrm{i})} = 1 - 2\mathrm{i}$.

Do đó số phức w được biểu diễn trên hệ trục Oxy là điểm $A(1; -2)$. □

Bài 17. Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $\dfrac{4\mathrm{i}}{\mathrm{i} - 1}$, $(1 - \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$, $-2\mathrm{i}^3$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải.

Ta có $\dfrac{4\mathrm{i}}{\mathrm{i} - 1} = 2 - 2\mathrm{i}$, nên A là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 - 2\mathrm{i}$.

$(1 - \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i}$, nên B là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 3 + \mathrm{i}$.

$-2\mathrm{i}^3 = 2\mathrm{i}$, nên C là điểm biểu diễn số phức $z_3 = 2\mathrm{i}$.

Ta có $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{10}; AC = |z_1 - z_3| = \sqrt{20}; BC = |z_2 - z_3| = \sqrt{10}$.

Dễ thấy $AC^2 = AB^2 + BC^2$, nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B. □

Bài 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \mathrm{i}| = 3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

Lời giải.

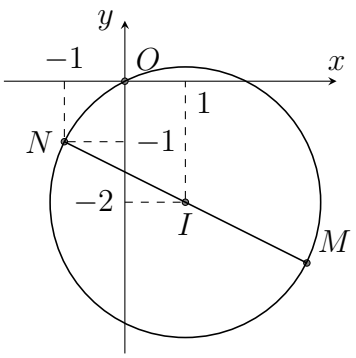
$w = (3 + 4\mathrm{i})z - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow w = (3 + 4\mathrm{i})z + (3 + 4\mathrm{i})\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - (3 + 4\mathrm{i})\mathrm{i} \Leftrightarrow w = (3 + 4\mathrm{i})(z + \mathrm{i}) + 4 - 5\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow w - 4 + 5\mathrm{i} = (3 + 4\mathrm{i})(z + \mathrm{i}) \Rightarrow |w - 4 + 5\mathrm{i}| = |(3 + 4\mathrm{i})(z + \mathrm{i})| \Leftrightarrow |w - 4 + 5\mathrm{i}| = 5|z + \mathrm{i}| = 15$.

Vậy bán kính đường tròn đó là $R = 15$. □

Bài 19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có mô-đun lớn nhất. Tìm mô-đun số phức z.

Lời giải.



Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z - 1 + 2i = (x - 1) + (y + 2)i$.

Ta có $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ như hình vẽ:

Dễ thấy $O \in (C), N(-1; -1) \in (C)$.

Theo đề ta có: $M(x; y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x + 1) + (y + 1)i$

$\Rightarrow |z + 1 + i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} = \left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Suy ra $|z+1+i|$ đạt giá trị lớn nhất khi $|\overrightarrow{MN}|$ lớn nhất.
Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C). Nên I là trung điểm $MN \Rightarrow M(3;-3) \Rightarrow z = 3-3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$.
□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Cho số phức z thay đổi, thỏa mãn $|z-1| = |z+2\mathrm{i}|$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức z.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $z = x+y\mathrm{i}; x, y \in \mathbb{R}$, ta có $\overline{z} = x-y\mathrm{i}$.
Từ $|z-1| = |z+2\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-1|^2 = |z+2\mathrm{i}|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) = (z+2\mathrm{i})(\overline{z}-2\mathrm{i})$
$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\cdot\overline{z} + 2\mathrm{i}(\overline{z}-z) + 4 \Leftrightarrow (z+\overline{z}) + 2\mathrm{i}(\overline{z}-z) + 3 = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 2\mathrm{i}(-2y\mathrm{i}) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + 3 = 0$.
Vậy Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức thỏa mãn điều kiện đã cho là đường thẳng.
Cách 2. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z, $A(1;0)$ và $B(0;-2)$.
Khi đó $|z-1| = MA, |z-2i| = MB$, bài toán trở thành tìm M thỏa mãn $MA = MB$. Do đó M nằm trên đươngf trung trực đoạn thẳng AB có phương trình $-(x-\dfrac{1}{2}) - 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - \dfrac{1}{2} = 0$. □

Bài 21. Gọi (H) là hình gồm các điểm M là biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+3|^2 + |z-3|^2 = 50$. Tính diện tích S của hình (H).

Lời giải.

Cách 1. Gọi $z = x+y\mathrm{i}$ với $x, y \in \mathbb{R}$ có điểm biểu diễn là $M(x,y)$.
Khi đó $|z+3|^2 + |z-3|^2 = 50 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$ hay M thuộc đường tròn (H) tâm $I(0;0)$ bán kính $R = 4$.
Diện tích $S_{(H)} = \pi R^2 = 16\pi$.
Cách 2. Ta có
$|z+3|^2 + |z-3|^2 = 50 \Leftrightarrow (z+3)(\overline{z}+3) + (z-3)(\overline{z}-3) = 50 \Leftrightarrow 2z\overline{z} + 18 = 50 \Leftrightarrow z\overline{z} = 16 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$.
Do đó M thuộc đường tròn (H) tâm $I(0;0)$, bán kính $R = 4$.
Diện tích $S_{(H)} = \pi R^2 = 16\pi$. □

Bài 22. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Gọi A, B, C là ba điểm biểu diễn lần lượt cho ba số phức z_1, z_2, z_3. Tính diện tích S của tam giác ABC.

Lời giải.

Từ giả thiết $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ta suy ra $\triangle ABC$ là tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm và từ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, bán kính $R = 1$.

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Có $R = 1 = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow AB = \sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. □

Bài 23. Cho z là số phức thay đổi và luôn thỏa mãn $|z-2| + |z+2| = 4\sqrt{2}$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z và $\overline{z}$. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác OMN.

Lời giải.

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức $x = x + y\mathrm{i}$ với $x, y \in \mathbb{R}$, $F_1(2;0), F_2(-2;0)$.

Khi đó $MF_1 = |z-2|$ và $MF_2 = |z+2|$ và $F_1F_2 = 4$.

Theo đề ta có $MF_1 + MF_2 = 4\sqrt{2}$, suy ra tập hợp các điểm M là đường Elip (E) có trục lớn $2a = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ và tiêu cự $2c = F_1F_2 = 4 \Rightarrow c = 2$.

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow b = 2$.

Vậy phương trình $(E): \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Ta có $S_{OMN} = |x| \cdot |y|$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $\dfrac{x^2}{8}$ và $\dfrac{y^2}{4}$ ta được:

$1 = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\dfrac{x^2y^2}{32}} \Rightarrow |x| \cdot |y| \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{OMN} \leq 2\sqrt{2}$.

Vậy $\max S_{OMN} = 2\sqrt{2}$. □

Bài 24. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \dfrac{5}{2} - 2\mathrm{i}\right| = \left|z + \dfrac{3}{2} + 2\mathrm{i}\right|$. Hãy tính $P = a - 4b$, biết rằng biểu thức $Q = |z - 2 - 4\mathrm{i}| + |z - 4 - 6\mathrm{i}|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z = a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

- Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z, suy ra M thuộc đường thẳng $d: x - 4y + 2 = 0$.
- Gọi $A(2;4), B(4;6)$, suy ra $Q = MA + MB$. Do A và B nằm cùng phía so với d nên ta đi tìm điểm $A'\left(\dfrac{78}{17}; \dfrac{52}{17}\right)$ đối xứng với A qua d.

Từ đó suy ra $Q = MA' + MB \geq A'B$, suy ra Q đạt giá trị nhỏ nhất khi M là giao điểm của $A'B$ và d.

Giải ra ta được $M\left(\dfrac{34}{7}; \dfrac{12}{7}\right)$ và suy ra $P = -2$. □

Bài 25. Cho A, B, C tương ứng là các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -2 + 5i, z_3 = 2 + 4i$. Tìm số phức z biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $A\,(1;2)$, $B\,(-2;5)$,$C\,(2;4)$.

Gọi $D\,(x;y)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;3)\,, \overrightarrow{DC} = (2-x; 4-y)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $z = 5 + i$. □

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4\mathrm{i}$; M' là điểm biểu diễn cho số phức $z' = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM'.

Lời giải.

Ta có: $z' = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{2} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Do đó $M(3;-4)$ và $M'\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OM} = (3;-4) \Rightarrow OM = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ và $\overrightarrow{OM'} = \left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow OM' = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = \dfrac{25}{2}$.

Suy ra: $S_{OMM'} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OM}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{OM'}\right|^2 - \left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(5\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{25}{2}\right)^2} = \dfrac{25}{4}$. □

Bài 27. Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3. Biết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $z_1 + z_2 = 0$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải.

Vì $z_1 + z_2 = 0$ nên z_1, z_2 là hai số phức đối nhau, do đó hai điểm A, B đối xứng qua gốc O (tức O là trung điểm của đoạn thẳng AB).

Lại có $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow CO = \dfrac{AB}{2}$.

Vậy $\triangle ABC$ có độ dài đường trung tuyến bằng một nửa cạnh huyền nên vuông tại C. □

Bài 28. Cho số phức $z = m - 2 + (m^2-1)\,\mathrm{i}$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox.

Lời giải.

Gọi $M(x;y), (x;y \in \mathbb{R})$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $\begin{cases} x = m-2 \\ y = m^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x+2 \\ y = (x+2)^2 - 1 \end{cases}$.

$(C) \cap Ox \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm: $S = \displaystyle\int_{-3}^{-1} |x^2+4x+3|\,\mathrm{d}x$.

Kết luận: $S = \dfrac{3}{4}$ □

Bài 29. Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho $|2z - \overline{z}| \le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

Lời giải.

Gọi $z = x + y\mathrm{i}, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|2(x+y\mathrm{i}) - (x-y\mathrm{i})| \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9y^2} \le 3 \Leftrightarrow x^2+9y^2 \le 9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} \le 1$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền trong của Elip $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}\le 1$.

Ta có $a=3, b=1$, nên diện tích hình H cần tìm bằng $\dfrac{1}{2}$ diện tích Elip.

Vậy $S=\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot a\cdot b=\dfrac{3\pi}{2}$. □

Bài 30. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2+3\mathrm{i}|=\dfrac{3}{2}$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $z=x+\mathrm{i}y, (x;y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z-2+3\mathrm{i}|=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow|(x-2)+\mathrm{i}\,(y+3)|=\dfrac{3}{2}\Rightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=\dfrac{9}{4}$.

Khi đó tập hợp hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2+3\mathrm{i}|=\dfrac{3}{2}$ là đường tròn tâm $I\,(2;-3)$, bán kính $R=\dfrac{3}{2}$.

Do mô-đun của một số phức được biểu diễn bởi điểm M là khoảng cách từ M đến gốc tọa độ O nên số phức có mô-đun nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là số phức được biểu diễn bởi điểm M cách gốc O khoảng ngắn nhất.

Suy ra M là giao điểm gần gốc O nhất của đường tròn trên với đường thẳng đi qua O và I.

Ta có $\overrightarrow{OI}=(2;-3)\Rightarrow d\colon\begin{cases}x=2t\\y=-3t\end{cases}$

$M\in d\Rightarrow M(2t;-3t)\Rightarrow(2t-2)^2+(-3t+3)^2=\dfrac{9}{4}\Rightarrow t=\dfrac{26+3\sqrt{13}}{26}$ hoặc $t=\dfrac{26-3\sqrt{13}}{26}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{26-3\sqrt{13}}{13};\dfrac{-78+9\sqrt{13}}{26}\right)\Rightarrow z=\dfrac{26-3\sqrt{13}}{13}+\dfrac{-78+9\sqrt{13}}{26}\mathrm{i}$. □

Bài 31. Cho số phức z thoả $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Tìm $|w|$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Đặt $w=x+yi\Rightarrow z=\dfrac{w-1+i}{2}=\dfrac{x-1+(y+1)i}{2}$.

$|z-3+4i|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{(x-7)+(y+9)i}{2}\right|=2\Leftrightarrow\sqrt{(x-7)^2+(y+9)^2}=4$

$\Leftrightarrow(x-7)^2+(y+9)^2=16$.

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(7;-9)$ bán kính $R=4$.

Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là $OI+R=\sqrt{130}+4$. □

Bài 32. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z\,(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+b\mathrm{i}, (a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$.

Số phức $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$ được biểu diễn bởi điểm $M'(a;-b)$.

$z(4+3\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})=(4a-3b)+(3a+4b)\mathrm{i}\Rightarrow N(4a-3b;3a+4b)$.

$\overline{z(4+3\text{i})} = (4a-3b)-(3a+4b)\text{i} \Rightarrow N'(4a-3b;-3a-4b)$
$\overrightarrow{MM'} = (0;-2b), \overrightarrow{NN'} = (0;-6a-8b), \overrightarrow{MN} = (3a-4b;3a+3b).$
Vì $MM'N'N$ là hình chữ nhật nên ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = -6a-8b \\ -2b(3a+3b) = 0 \Leftrightarrow a = -b \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

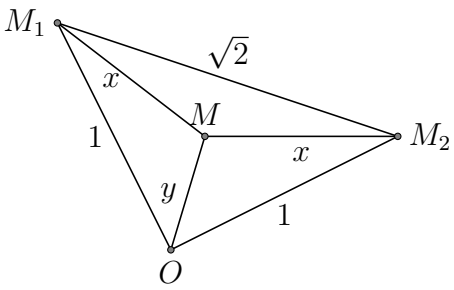
Do đó: $|z+4i-5| = \sqrt{(-b-5)^2+(b+4)^2} = \sqrt{2\left(b+\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
Vậy $|z+4i-5|_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ □

Bài 33. Cho các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $\sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}|z_2| = |z_1-z_2| = 6\sqrt{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z-z_1| + |z-z_2|$.

Lời giải.

$$\begin{cases} |z_1| = 6 \Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{6}\right| = 1 \Rightarrow OM_1 = 1 \\ |z_2| = 6 \Rightarrow \left|\dfrac{z_2}{6}\right| = 1 \Rightarrow OM_2 = 1 \\ |z_1-z_2| = 6\sqrt{2} \Rightarrow \left|\dfrac{z_1-z_2}{6}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow M_1M_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{P}{6} = OM+MM_1+MM_2$ nhỏ nhất khi M là điểm Fermat.



Khi đó $\widehat{M_1MM_2} = \widehat{M_1MO} = \widehat{OMM_2} = 120^\circ$ và $MM_1 = MM_2$ (vì tam giác M_1OM_2 vuông cân tại O).
Ta có: $2 = x^2+x^2-2x\cdot x\cos 120^\circ \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $1 = x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}.$
Suy ra $\left(\dfrac{P}{6}\right)_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} + \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow P_{\min} = 3\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) = 6\sqrt{2+\sqrt{3}}.$ □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = 6-3i$. Phần thực của số phức z là:

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $-3i$.

Lời giải.

Phương pháp: Giải phương trình phức cơ bản tìm số phức z.

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned}(1+2i)\,z &= 6-3i\\ \Leftrightarrow z &= \frac{6-3i}{1+2i}\\ \Leftrightarrow z &= \frac{(6-3i)\,(1-2i)}{(1+2i)\,(1-2i)}\\ \Leftrightarrow z &= \frac{6-12i-3i-6}{1+4} = -3i.\end{aligned}$$

Phần thực của số phức z là 0.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 3-i$. Tìm số phức $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

A. $z = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$. **B.** $z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i$. **C.** $z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$. **D.** $z = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \dfrac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{1-7i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tính mô-đun của số phức z biết $z = \dfrac{1+7i}{3-4i}$.

A. $|z| = 25\sqrt{2}$. **B.** $|z| = 0$. **C.** $|z| = \sqrt{2}$. **D.** $|z| = 2$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{1+7i}{3-4i} = -1+i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = 6-3i$. Tìm phần thực của z.

A. 3. **B.** $-3i$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{9}{5}$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{6-3i}{1+2i} = -3i$. Vậy phần thực của z bằng 0.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho số phức $z = 1+i$. Tính mô-đun của số phức $w = \dfrac{\overline{z}+2i}{z-1}$.

A. $|w| = \sqrt{2}$. **B.** $|w| = \sqrt{3}$. **C.** $|w| = 1$. **D.** $|w| = 2$.

Lời giải.

$w = \dfrac{1-i+2i}{1+i-i} = 1+i \Rightarrow |w| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z = 9-8i$. Mô-đun của số phức $w = z+1+i$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $(2+i)z = 9-8i \Leftrightarrow z = \dfrac{9-8i}{2+i} = 2-5i$.

Do đó $w = z+1+i = 3-4i$.

Vậy $|w| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 11-3i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ là

A. $M(4;-7)$. **B.** $M(14;-14)$. **C.** $M(8;-14)$. **D.** $M(7;-7)$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z = 11-3i \Leftrightarrow z = \dfrac{11-3i}{1+i} = 4-7i$.

Do đó điểm M biểu diễn z có tọa độ là $(4;-7)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho số phức $z = a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(-2+2i)z = 10+6i$. Tính $P = a+b$.

A. $P = 3$. **B.** $P = 5$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = -5$.

Lời giải.

Ta có $(-2+2i)z = 10+6i \Leftrightarrow z = \dfrac{10+6i}{-2+2i} = -1-4i$. Do đó $a = -1$ và $b = -4$ nên $P = -5$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Số phức $z = \dfrac{4-3i}{i}$ có phần thực là

A. 3. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{4-3i}{i} = \dfrac{-i(4-3i)}{-i^2} = \dfrac{-4i+3i^2}{1} = -3-4i$. Vậy phần thực của số phức z là -3.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa $(-7+6i)z = 1-2i$.

A. $\overline{z} = -\dfrac{19}{85}+\dfrac{8}{85}i$. **B.** $\overline{z} = -\dfrac{19}{85}-\dfrac{8}{85}i$. **C.** $\overline{z} = \dfrac{19}{85}-\dfrac{8}{85}i$. **D.** $\overline{z} = \dfrac{19}{85}+\dfrac{8}{85}i$.

Lời giải.

Ta có $(-7+6i)z = 1-2i \Leftrightarrow z = \dfrac{1-2i}{-7+6i} = \dfrac{-19+8i}{85} = \dfrac{-19}{85}+\dfrac{8}{85}i$. Vậy $\overline{z} = \dfrac{-19}{85}-\dfrac{8}{85}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho $z = 1+3i$. Tính $\dfrac{1}{z}$.

A. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}i$. **B.** $\dfrac{1}{10}i-\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$. **D.** $-\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$.

Lời giải.

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10}-\frac{3}{10}i.$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Số phức $z=\dfrac{2+i}{4+3i}$ bằng

A. $\dfrac{11}{25}-\dfrac{2}{25}i$. **B.** $\dfrac{11}{5}+\dfrac{2}{5}i$. **C.** $\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$. **D.** $\dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{5}i$.

Lời giải.

Có $z=\dfrac{2+i}{4+3i}=\dfrac{(2+i)(4-3i)}{4^2+3^2}=\dfrac{11-2i}{25}=\dfrac{11}{25}-\dfrac{2}{25}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$ ($z'\neq 0$, a, a', b, $b'\in\mathbb{R}$). Số phức $\dfrac{z}{z'}$ có phần thực là

A. $\dfrac{aa'+bb'}{a^2+b^2}$. **B.** $\dfrac{2bb'}{a'^2+b'^2}$. **C.** $\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$. **D.** $\dfrac{a+a'}{a^2+b^2}$.

Lời giải.

$\dfrac{z}{z'}=\dfrac{a+bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}=\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $iz=7+4i$. Mô-đun của z bằng

A. 65. **B.** $\dfrac{\sqrt{65}}{3}$. **C.** $\sqrt{65}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{65}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{7+4i}{i}=4-7i\Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+(-7)^2}=\sqrt{65}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm phần ảo của số phức $z=\dfrac{3}{i}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{3}{i}\Leftrightarrow z=\dfrac{-3i}{-i^2}=-3i$. Phần ảo của z bằng -3.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Số phức liên hợp của số phức $z=\dfrac{2}{1+i}$ là số phức nào trong các số phức dưới đây?

A. $\dfrac{-2}{1-i}$. **B.** $1-i$. **C.** $\dfrac{-2}{1+i}$. **D.** $1+i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$. Suy ra $\bar{z}=1+i$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z=\dfrac{1+5i}{2i}$ bằng

A. 3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $z=\dfrac{1+5i}{2i}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Suy ra $a=\dfrac{5}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a+b=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M biểu diễn cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z+(2-i)^2=5-4i$ là

A. $M(1;1)$. **B.** $M(1;2)$. **C.** $M(1;-1)$. **D.** $M(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{5-4i-(2-i)^2}{1-i}=1+i\Rightarrow M=(1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tìm phần ảo của số phức $z=2017-2018i$.

A. -2018. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** $-2018i$.

Lời giải.

Phần ảo của $z=2017-2018i$ là -2008.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Tìm phần ảo của số phức $z=\dfrac{1+2i}{3-4i}$.

A. $\dfrac{2}{5}i$. **B.** $-\dfrac{10}{7}$. **C.** $-\dfrac{10}{7}i$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{1+2i}{3-4i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{-5+10i}{25}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$. Suy ra phần ảo của số phức z là $\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm số phức z thỏa mãn $i\left(\overline{z}-2+3i\right)=1+2i$.

A. $z=-4+4i$. **B.** $z=-4-4i$. **C.** $z=4-4i$. **D.** $z=4+4i$.

Lời giải.

$i(\overline{z}-2+3i)=1+2i\Leftrightarrow\overline{z}-2+3i=\dfrac{1+2i}{i}\Leftrightarrow\overline{z}-2+3i=2-i\Leftrightarrow\overline{z}=4-4i\Leftrightarrow z=4+4i$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Biết $\dfrac{1}{3+4i}=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Tính ab.

A. $\dfrac{12}{625}$. **B.** $-\dfrac{12}{625}$. **C.** $-\dfrac{12}{25}$. **D.** $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{3+4i}=\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}i$. Suy ra $ab=\dfrac{3}{25}\cdot\left(-\dfrac{4}{25}\right)=-\dfrac{12}{625}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hai số phức $z_1=1+2i$, $z_2=3-i$. Tìm số phức $z=\dfrac{z_2}{z_1}$.

A. $z=\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$. **B.** $z=\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$. **C.** $z=\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}i$. **D.** $z=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$.

Lời giải.

Ta có: $z=\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1+2i}{3-i}=\dfrac{(1+2i)(3+i)}{10}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho số phức $z=1+i$. Số phức nghịch đảo của z là

A. $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. **B.** $1-i$. **C.** $\dfrac{1-i}{2}$. **D.** $\dfrac{-1+i}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z=1+i\Rightarrow\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

A. $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. **B.** $1 - i$. **C.** $\dfrac{1-i}{2}$. **D.** $\dfrac{-1+i}{2}$.

Lời giải.

Số phức nghịch đảo của z là $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1-i}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = \dfrac{3-i}{1+i} + \dfrac{2+i}{i}$.

A. Phần thực là 2, phần ảo là -4. **B.** Phần thực là 2, phần ảo là $4i$.

C. Phần thực là 2, phần ảo là 4. **D.** Phần thực là 2, phần ảo là $-4i$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(3-i)(1-i)}{2} + \dfrac{(2+i)(-i)}{1} = 2 - 4i$. Vậy số phức z có phần thực là 2, phần ảo là -4.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Phần ảo của số phức $\dfrac{1}{1+i}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}i$. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ nên phần ảo của số phức $\dfrac{1}{1+i}$ là $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$, biết $z = \dfrac{(1+i)3i}{1-i}$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(1+i)3i}{1-i} = \dfrac{3(-1+i)}{1-i} = -3 \Rightarrow \bar{z} = -3 + 0i$. Vậy phần ảo của $\bar{z}$ bằng 0.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\bar{z} = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$. **B.** $\bar{z} = -\dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i$. **C.** $\bar{z} = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$. **D.** $\bar{z} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $(1+3i)z - 5 = 7i \Leftrightarrow z = \dfrac{5+7i}{1+3i} = \dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4 + i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(-1;1)$. **B.** $M(-1;-1)$. **C.** $M(1;1)$. **D.** $M(1;-1)$.

Lời giải.

Ta có: $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{4+i-(2-i)^2}{(3+2i)} \Leftrightarrow z = 1 + i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức z là $M(1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Tìm phần thực của số phức z thỏa mãn $(5-i)z = 7-17i$.

A. -2. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{7-17i}{5-i} = \dfrac{(7-17i)(5+i)}{26} = 2-3i$.

Phần thực của z là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Số phức liên hợp của số phức z biết $z = (1+i)(3-2i) + \dfrac{1}{3+i}$ là

A. $\dfrac{53}{10} - \dfrac{9}{10}i$. **B.** $\dfrac{13}{10} - \dfrac{9}{10}i$. **C.** $\dfrac{13}{10} + \dfrac{9}{10}i$. **D.** $\dfrac{53}{10} + \dfrac{9}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $z = 5 + i + \dfrac{3-i}{10} = \dfrac{53}{10} + \dfrac{9}{10}i$ nên $\overline{z} = \dfrac{53}{10} - \dfrac{9}{10}i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Tìm phần ảo của số phức z, biết $(1-i)z = 3+i$.

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $(1-i)z = 3+i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{1-i} = \dfrac{(3+i)(1+i)}{2} = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i$.

Vậy phần ảo của số phức là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z là

A. $M(-1;1)$. **B.** $M(-1;-1)$. **C.** $M(1;1)$. **D.** $M(1;-1)$.

Lời giải.

Ta có

$(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)z = 4+i-(2-i)^2 \Leftrightarrow z = \dfrac{1+5i}{3+2i} = \dfrac{(1+5i)(3-2i)}{13} = 1+i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $M(1;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z| = 34$. **B.** $|z| = \sqrt{34}$. **C.** $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1-13i}{2-i} = 3-5i$.

Khi đó $|z| = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Tìm phần ảo của số phức z biết $z(2-i) + 13i = 1$.

A. $-5i$. **B.** $5i$. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1-13i}{2-i} = 3-5i$.

Vậy phần ảo của z bằng -5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho số phức $z=\dfrac{2-6i}{(1+i)^2}$, khi đó số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=-3+i$. **B.** $\bar{z}=3-i$. **C.** $\bar{z}=-3-i$. **D.** $\bar{z}=3+i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{2-6i}{2i}=-i-3\Rightarrow \bar{z}=-3+i$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $z\,(2-i)+13i=1$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z|=34$. **B.** $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **C.** $|z|=\sqrt{34}$. **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z\,(2-i)+13i=1 &\Leftrightarrow z=\frac{1-13i}{2-i}\Leftrightarrow z=\frac{(1-13i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{1}{5}\,(2-26i+i+13)\Leftrightarrow z=3-5i. \end{aligned}$$

Suy ra $|z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}\Leftrightarrow |z|=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Tìm số phức z thỏa mãn $z+4-2i=\dfrac{10+20i}{3-i}$.

A. $z=-3+9i$. **B.** $z=1-3i$. **C.** $z=46-52i$. **D.** $z=5+5i$.

Lời giải.

Ta có $z+4-2i=\dfrac{10+20i}{3-i}\Leftrightarrow z+4-2i=1+7i\Leftrightarrow z=-3+9i$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z=3-4i$. Tìm phần thực của z.

A. $\dfrac{2}{25}$. **B.** $-\dfrac{11}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$(2+i)z=3-4i\Leftrightarrow z=\frac{3-4i}{2+i}=\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i.$$

Suy ra phần thực của z bằng $\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+3i)z-3+2i=2+7i$. Giá trị của $a+b$ là

A. $\dfrac{11}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{19}{5}$. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có phương trình ban đầu tương đương với

$$(1+3i)z=5+5i\Leftrightarrow z=\frac{5+5i}{1+3i}\Leftrightarrow z=2-i.$$

Suy ra $a=2,b=-1$ nên $a+b=2-1=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$. Tính môđun của số phức z.

A. $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **B.** $|z|=34$. **C.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z|=\sqrt{34}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=3-5i \Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2i|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Phương pháp: Gọi số phức đó là $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Tìm điều kiện của a,b.

Cách giải: Gọi số phức đó là $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có:

$|z-2i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |a+bi-2i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=2 \quad (1)$

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$ là số thuần ảo $\Rightarrow a^2-b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b. \end{array}\right.$

☑ $a=b$. Thay vào (1): $a^2+(a-2)^2=2 \Leftrightarrow 2a^2-4a+2=0 \Leftrightarrow a=1=b \Rightarrow z=1+i$.

☑ $a=-b$. Thay vào (1): $a^2+(-a-2)^2=2 \Leftrightarrow 2a^2+4a+2=0 \Leftrightarrow a=-1,b=1 \Rightarrow z=-1+i$.

Vậy, có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho số phức $z=(1-2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\dfrac{1}{z}$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có $z=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{-3-4i}=-\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$.

Do đó $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{25}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Tìm số phức z thỏa mãn $(1-2\mathrm{i})\,z=3+\mathrm{i}$.

A. $z=1-\mathrm{i}$. **B.** $z=1+\mathrm{i}$. **C.** $z=\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$. **D.** $z=\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có $(1-2\mathrm{i})\,z=3+\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\dfrac{(3+\mathrm{i})\,(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})\,(1+2\mathrm{i})} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{5}\,(1+7\mathrm{i})\,.$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\bar{z}=3-5i$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;4)$. **D.** $M(1;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z}=\dfrac{3-5i}{1+i}=-1-4i \Rightarrow z=-1+4i \Rightarrow M(-1;4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Tìm tất cả các số phức z thỏa $2z-3(1+i)=iz+7-3i$.

A. $z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}i$. **B.** $z=4-2i$. **C.** $z=\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}i$. **D.** $z=4+2i$.

Lời giải.

Ta có $2z-3(1+i)=iz+7-3i \Leftrightarrow (2-i)z=10 \Leftrightarrow z=\dfrac{10}{2-i} \Leftrightarrow z=4+2i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho số phức $z=2+3\mathrm{i}$, khi đó $\dfrac{z}{\overline{z}}$ bằng

A. $\dfrac{5-12\mathrm{i}}{13}$. **B.** $\dfrac{-5-12\mathrm{i}}{13}$. **C.** $\dfrac{-5+12\mathrm{i}}{13}$. **D.** $\dfrac{5-6\mathrm{i}}{11}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\dfrac{(2+3\mathrm{i})^2}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\dfrac{4+12\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2}{4-9\mathrm{i}^2}=\dfrac{-5+12\mathrm{i}}{13}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Tìm số phức z thỏa mãn $(2+3i)(z-2)+13-13i=0$.

A. $z=3-5i$. **B.** $z=5+3i$. **C.** $z=3+5i$. **D.** $z=5-3i$.

Lời giải.

Ta có $(2+3i)(z-2)+13-13i=0 \Leftrightarrow z-2=\dfrac{-13+13i}{2+3i} \Leftrightarrow z-2=1+5i \Leftrightarrow z=3+5i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho số phức $z=\dfrac{3+i}{x+i}$ với $x\in\mathbb{R}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

A. $\dfrac{2x-4}{2}$. **B.** $\dfrac{4x+2}{2}$. **C.** $\dfrac{4x-2}{x^2+1}$. **D.** $\dfrac{2x+6}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{(3+i)(x-i)}{x^2+1}=\dfrac{3x+1+(x-3)i}{x^2+1}=\dfrac{3x+1}{x^2+1}+\dfrac{x-3}{x^2+1}i$.

Từ đó tổng phần thực và phần ảo của z là $\dfrac{3x+1}{x^2+1}+\dfrac{x-3}{x^2+1}=\dfrac{4x-2}{x^2+1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Tính mô-đun của số phức thoả mãn: $z\,(2-i)+13i=1$.

A. $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **B.** $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{2}$. **C.** $|z|=34$. **D.** $|z|=\sqrt{34}$.

Lời giải.

Ta có: $z\,(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=3-5i$.

Khi đó $|z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Số phức $z=\dfrac{2-3i}{1+i}$ có mô-đun bằng

A. $|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. **B.** $|z|=3\sqrt{26}$. **C.** $|z|=2\sqrt{26}$. **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{2-3i}{1+i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$. Khi đó, $|z|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Tìm phần thực và ảo của số phức $z=\dfrac{3-i}{1+i}+\dfrac{2+i}{i}$.

A. Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $-4i$.
B. Phần thực bằng 2; phần ảo bằng -4.
C. Phần thực bằng 2; phần ảo bằng $4i$.
D. Phần thực bằng -2; phần ảo bằng 4.

Lời giải.

$z=\dfrac{(3-i)i+(2+i)(1+i)}{(1+i)i}=\dfrac{2+6i}{-1+i}=2-4i.$

Chọn đáp án B □

Câu 54. Tìm số phức z thỏa mãn $(3+i)\overline{z}+(1+2i)z=3-4i$.

A. $z=2+5i$. **B**. $z=2+3i$. **C**. $z=-1+5i$. **D**. $z=-2+3i$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&(3+i)\overline{z}+(1+2i)z=3-4i\\
\Leftrightarrow\ &(3+i)(x-yi)+(1+2i)(x+yi)=3-4i\\
\Leftrightarrow\ &4x-y+(3x-2y)i=3-4i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}4x-y=3\\3x-2y=-4\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}\\
\Rightarrow\ &z=2+5i.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Tập nghiệm S của phương trình $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})z+i\sqrt{2}=\sqrt{3}+2i\sqrt{2}$ trên tập số phức là

A. $S=\{i\}$. **B**. $S=\{-5i\}$. **C**. $S=\{5i\}$. **D**. $S=\{-12-5i\}$.

Lời giải.

$$(\sqrt{2}-i\sqrt{3})z+i\sqrt{2}=\sqrt{3}+2i\sqrt{2}\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}\Leftrightarrow z=i.$$

Chọn đáp án A □

Câu 56. Cho số phức z thỏa $(3+2i)z=7+5i$. Số phức liên hợp $\overline{z}$ của số phức z là

A. $\overline{z}=-\dfrac{31}{5}+\dfrac{1}{5}i$. **B**. $\overline{z}=\dfrac{31}{5}-\dfrac{1}{5}i$. **C**. $\overline{z}=\dfrac{31}{13}-\dfrac{1}{13}i$. **D**. $\overline{z}=-\dfrac{31}{13}+\dfrac{1}{13}i$.

Lời giải.

Ta có $(3+2i)z=7+5i\Leftrightarrow z=\dfrac{7+5i}{3+2i}=\dfrac{31}{13}+\dfrac{1}{13}i.$

Suy ra $\overline{z}=\dfrac{31}{13}-\dfrac{1}{13}i.$

Chọn đáp án C □

Câu 57. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $(1+i)z+3=-2i$.

A. $|z|=\dfrac{5}{2}$. **B**. $|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$. **C**. $|z|=\sqrt{26}$. **D**. $|z|=\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z=-3-2i$, suy ra $|(1+i)z|=|-3-2i|$, hay $|z|=\dfrac{|-3-2i|}{|1+i|}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+2i)z+i\overline{z}=7+5i$. Tính $S=4a+3b$.

A. $S=7$. **B.** $S=24$. **C.** $S=-7$. **D.** $S=0$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$.Ta có:
$(1+2i)(a+bi)+i(a-bi)=7+5i\Leftrightarrow a+bi+2ai+2bi^2+ai-bi^2=0$

$\Leftrightarrow a+bi+2ai-2b+ai+b=7+5i$

$\Leftrightarrow (a-b)+(3a+b)i=7+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ 3a+b=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4. \end{cases}$

Vậy $S=4a+3b=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho số phức z thỏa $2z+3\overline{z}=10+i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=1$. **B.** $|z|=3$. **C.** $|z|=\sqrt{3}$. **D.** $|z|=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.
Khi đó từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} & 2(a+bi)+3(a-bi)=10+i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2a+3a=10 \\ 2b-3b=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Do đó $|z|=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\dfrac{1}{2}$. **D.** $S=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)z+2\overline{z}=3+2i &\Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i\\ &\Leftrightarrow (a-b)+(a+b)i+2a-2bi=3+2i\\ &\Leftrightarrow 3a-b+(a-b)i=3+2i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}3a-b=3\\ a-b=2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $T=a+b=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i$.

A. $w=-1+7i$. **B.** $w=-3+8i$. **C.** $w=1+3i$. **D.** $w=-4+8i$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Từ $|z|=5\Leftrightarrow|a+bi|=5\Leftrightarrow a^2+b^2=25$

$$\begin{aligned}|z+3|=|z+3-10i| &\Leftrightarrow |a+bi+3|=|a+bi+3-10i|\\ &\Leftrightarrow (a+3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-10)^2\\ &\Leftrightarrow b=5.\end{aligned}$$

Từ $\begin{cases}a^2+b^2=25\\ b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=5.\end{cases}$

Vậy $w=5i-4+3i=5i-4+3i=-4+8i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho số phức $z_1=a-2i$, $z_2=1+bi$. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$, biết $z_1z+z_2z=1+i$.

A. $\dfrac{a+b-1}{(a+1)^2+(b-2)^2}$. **B.** $\dfrac{a-b+3}{(a+1)^2+(b-2)^2}$. **C.** $\dfrac{b-a-3}{(a+1)^2+(b-2)^2}$. **D.** $\dfrac{1-a-b}{(a+1)^2+(b-2)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}z &= \frac{1+i}{z_1+z_2}=\frac{1+i}{a+1+(b-2)i}\\ &= \frac{(1+i)\left[a+1-(b-2)i\right]}{(a+1)^2+(b-2)^2}\\ &= \frac{a+1+b-2+(a+1-b+2)i}{(a+1)^2+(b-2)^2}\\ &= \frac{a+b-1+(a-b+3)i}{(a+1)^2+(b-2)^2}\\ \Rightarrow \overline{z} &= \frac{a+b-1-(a-b+3)i}{(a+1)^2+(b-2)^2}.\end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức $\overline{z}$ là $\dfrac{b-a-3}{(a+1)^2+(b-2)^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $z+2\overline{z}=(2-i)^3(1-i)$.

A. -9. **B.** 9. **C.** 13. **D.** -13.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, với $x,\, y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z+2\overline{z}=(2-i)^3(1-i) &\Leftrightarrow x+yi+2(x-yi)=(2-11i)(1-i)\\ &\Leftrightarrow 3x-yi=-9-13i \Leftrightarrow \begin{cases}3x=-9\\ -y=-13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=13.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy phần ảo của số phức z là 13.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Số phức z thỏa $\dfrac{\overline{z}}{4-3i}+(2-3i)=5-2i$. Mô-đun của z bằng

A. $|z|=10\sqrt{2}$. **B.** $|z|=\sqrt{10}$. **C.** $|z|=250$. **D.** $|z|=5\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{4-3i}+(2-3i)=5-2i &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{4-3i}=3+i\\ &\Leftrightarrow \overline{z}=(3+i)(4-3i)\\ &\Leftrightarrow \overline{z}=15-5i \Leftrightarrow z=15+5i.\end{aligned}$$

Vậy mô-đun của số phức z là $|z|=\sqrt{15^2+5^2}=5\sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\overline{z}=2+11i$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z|+|\overline{z}|$.

A. 5. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$(2+i)\overline{z}=2+11i \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{2+11i}{2+i}=3+4i \Rightarrow z=3-4i$.

Giá trị biểu thức $A=|z|+|\overline{z}|=5+5=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Tìm số phức z thỏa mãn $(3-2i)z-2=z+18i$.

A. $z=-4+5i$. **B.** $z=4+5i$. **C.** $z=4-5i$. **D.** $z=-4-5i$.

Lời giải.

Ta có $(3-2i)z-2=z+18i \Leftrightarrow z=\dfrac{2+18i}{2-2i}=-4+5i$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho số phức $z=2-3i$. Tìm mô-đun của số phức $w=\overline{z}+\dfrac{13}{z}$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có: $w=2+3i+\dfrac{13}{2-3i}=4+6i$. Vậy $|z|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=\dfrac{13}{12+5i}$.

A. $\overline{z}=\dfrac{13}{12-5i}$. **B.** $\overline{z}=\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}i$. **C.** $\overline{z}=\dfrac{13}{12}+\dfrac{13}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\dfrac{13}{12}-\dfrac{13}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{13}{12+5i}=\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}i\Rightarrow\overline{z}=\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Tính tổng các giá trị của tham số thực m để số phức $z=\dfrac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}$ là số thực.

A. $S=2\sqrt{3}$. **B.** $S=15$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=-1$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}=\dfrac{(1+mi)\left[m-1+2(m-1)i\right]}{1+m^2}=\dfrac{-2m^2+3m-1}{1+m^2}+\dfrac{m^2+m-2}{1+m^2}i$.

Để z là số thực thì phần ảo $\dfrac{m^2+m-2}{1+m^2}=0\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m-2\end{array}\right.\Rightarrow S=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=1-2i$. Tìm số phức $w=\dfrac{z_1}{z_2}$.

A. $w=5+5i$. **B.** $w=\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}i$. **C.** $w=1+i$. **D.** $w=1-7i$.

Lời giải.

$w=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3-i}{1-2i}=\dfrac{(3-i)(1+2i)}{5}=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho số phức $z=2+i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=\dfrac{\overline{z}+1}{3i+z}$.

A. Phần thực của w bằng $-\dfrac{7}{10}$; phần ảo của w bằng $\dfrac{1}{10}$.

B. Phần thực của w bằng $\dfrac{1}{10}$; phần ảo của w bằng $-\dfrac{7}{10}i$.

C. Phần thực của w bằng $\dfrac{1}{10}$; phần ảo của w bằng $\dfrac{7}{10}$.

D. Phần thực của w bằng $\dfrac{1}{10}$; phần ảo của w bằng $-\dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Ta có $w=\dfrac{2-i+1}{3i+2+i}=\dfrac{3-i}{2+4i}=\dfrac{(3-i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\dfrac{2-14i}{20}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{10}i$.

Vậy phần thực của w bằng $\dfrac{1}{10}$; phần ảo của w bằng $-\dfrac{7}{10}$

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3-2i$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z|=\dfrac{1}{2}\sqrt{106}$. **B.** $|z|=\dfrac{53}{2}$. **C.** $|z|=\dfrac{41}{8}$. **D.** $|z|=\dfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

Lời giải.

Bằng cách lấy liên hợp 2 vế đối với phương trình đã cho, ta thu được thêm một phương trình. Kết hợp chúng lại, ta giải được $2z=5+9i$. Suy ra $|z|=\dfrac{1}{2}\sqrt{106}$.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho số thực $x,\ y$ thỏa mãn $2x+y+(2y-x)\mathrm{i}=x-2y+3+(y+2x+1)\mathrm{i}$. Khi đó giá trị của $M=x^2+4xy-y^2$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có

$$2x+y+(2y-x)\mathrm{i}=x-2y+3+(y+2x+1)\mathrm{i}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=x-2y+3\\2y-x=y+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x+3y=3\\3x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$$

Vậy $M=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Số phức liên hợp của số phức $z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3}{1-\mathrm{i}}$ là

A. $4+4\mathrm{i}$. **B.** $4-4\mathrm{i}$. **C.** $-4-4\mathrm{i}$. **D.** $-4+4\mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có

$$z=\frac{\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3}{1-\mathrm{i}}=\frac{1-3\sqrt{3}\mathrm{i}+3(\sqrt{3}\mathrm{i})^2-(\sqrt{3}\mathrm{i})^3}{1-\mathrm{i}}=\frac{-8}{1-\mathrm{i}}=\frac{-8(1+\mathrm{i})}{2}=-4-4\mathrm{i}.$$

Suy ra $\overline{z}=-4+4\mathrm{i}$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho số phức z, biết $\overline{z}=2-\mathrm{i}+\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$. Phần ảo của số phức z^2 là

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

Lời giải.

$$\overline{z}=2-\mathrm{i}+\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Rightarrow z=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Phần ảo của z^2 là $2\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Phần thực và phần ảo của số phức $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ lần lượt bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{3}-1$ và $\sqrt{3}+1$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $\sqrt{3}+1$. **D.** $\sqrt{3}-1$ và $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$z=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

Dó đó phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt bằng $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{z}{z-1}\right|=3$ là

A. Đường tròn $x^2+y^2-\dfrac{9}{4}x-\dfrac{9}{8}=0$.

B. Đường tròn $x^2+y^2-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{9}{8}=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2+\dfrac{9}{4}x+\dfrac{9}{8}=0$.

D. Đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{9}{8}\right)$ và bán kính $R=\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\left|\frac{z}{z-1}\right|=3\\ \Leftrightarrow\ &|z|=3|z-1|\\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2=9(x-1)^2+9y^2\\ \Leftrightarrow\ &8x^2+8y^2-18x+9=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2-\frac{9}{4}x+\frac{9}{8}=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z+\dfrac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Tính mô-đun của số phức $w=z+1-2i$.

A. 7. **B**. $\sqrt{7}$. **C**. 25. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i &\Leftrightarrow (2+i)z+3+i=7+8i\\ &\Leftrightarrow (2+i)z=4+7i\\ &\Leftrightarrow z=\frac{4+7i}{2+i}=3+2i.\end{aligned}$$

Suy ra $w=z+1-2i=3+2i+1-2i=4\Rightarrow |w|=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z=8+i$. Số phức liên hợp $\bar{z}$ của z là

A. $\bar{z}=-2-3i$. **B**. $\bar{z}=-2+3i$. **C**. $\bar{z}=2+3i$. **D**. $\bar{z}=2-3i$.

Lời giải.

Ta có $(1+2i)z=8+i\Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{1+2i}=2-3i\Rightarrow \bar{z}=2+3i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Cho số phức z biết $\bar{z}=2-i+\dfrac{i}{1+i}$. Phần ảo của số phức z^2 là

A. $\dfrac{5}{2}$. **B**. $\dfrac{5}{2}i$. **C**. $-\dfrac{5}{2}$. **D**. $-\dfrac{5}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z}=2-i+\dfrac{i}{1+i}=2-i+\dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-i+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Suy ra $z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}i\Rightarrow z^2=6+\dfrac{5}{2}i$.

Vậy phần ảo của số phức z^2 là $\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Điểm biểu diễn của số phức $z=\dfrac{1}{2-3i}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ là

A. $(3;-3)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{13};\dfrac{3}{13}\right)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(2;-3)$.

Lời giải.

$z=\dfrac{1}{2-3i}=\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Tính tổng $S=1+i^3+i^6+\cdots+i^{2016}$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=i$. **D.** $S=-i$.

Lời giải.

Ta có $1,i^3,i^6,\ldots,i^{2016}$ là một cấp số nhân có 673 số hạng với $u_1=1$ và $q=i^3$ nên

$$S=\frac{1-(i^3)^{673}}{1-i^3}=\frac{1-i^3\cdot(-i)^{672}}{1+i}=\frac{1-i^3}{1+i}=1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $(2-i)z=1-2i$.

A. $-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{i}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{-3i}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(2-i)z=1-2i\Rightarrow z=\dfrac{1-2i}{2-i}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Phần ảo của số phức $z=\dfrac{1-(1-i)^{33}}{1-i}+\overline{(1-2i)}$ là

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}i$. **C.** $-\dfrac{3}{2}i$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$z=\dfrac{1}{1-i}-(1-i)^{32}+1+2i=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i-(1-i)^{32}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i-(-2i)^{16}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i-(-4)^8.$

Vậy phần ảo của số phức z là $\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ thỏa mãn $|z-1|\le 2$. Tính diện tích của hình (H).

A. 8π. **B.** 18π. **C.** 16π. **D.** 4π.

Lời giải.

Ta có $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)+3+\sqrt{3}i\Leftrightarrow w-3-\sqrt{3}i=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)$,
Lấy mô-đun 2 vế, ta được $|w-3-\sqrt{3}i|=|1+\sqrt{3}i|\cdot|z-1|\le 2\cdot 2=4$.
Do đó, (H) là hình tròn bán kính 4 nên diện tích hình (H) bằng 16π.

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Tính mô-đun số phức nghịch đảo của số phức $z=(1-2i)^2$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{25}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{(1-2i)^2}=\dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)^2\cdot(1+2i)^2}=\dfrac{-3+4i}{25}$.
Nên $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\left|\dfrac{-3+4i}{25}\right|=\dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1+i}$. Tính mô-đun của số phức $\overline{z}-iz$.

A. $8\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** 16. **D.** -8.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=-4+4i$, suy ra $z=-4-4i$. Vậy $|\overline{z}-iz|=|-8+8i|=8\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $(1-3i)z+(2+3i)\overline{z}=12-i$. Tính $P=a^2-b^3$.

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}12-i&=(1-3i)z+(2+3i)\overline{z}=(1-3i)(a+bi)+(2+3i)(a-bi)\\&=(3a+6b)-bi.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases}3a+6b=12\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1.\end{cases}$$

Vậy $P=a^2-b^3=3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Cho số phức $z=1+3i$. Điểm biểu diễn số phức $\dfrac{1}{z}$ trong mặt phẳng Oxy là

A. $M\left(\dfrac{1}{10};-\dfrac{3}{10}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{3}{10}\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{1}{10};-\dfrac{3}{10}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{3}{10}\right)$.

Lời giải.

Ta có $z=1+3i\Rightarrow\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+3i}=\dfrac{1-3i}{10}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{10};-\dfrac{3}{10}\right)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của $\overline{z}+iz$.

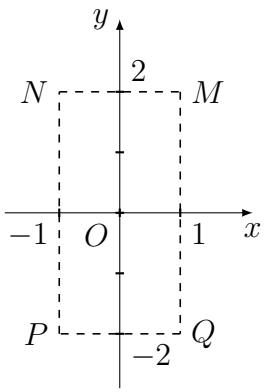
A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=-4-4i\Rightarrow z=-4+4i\Rightarrow\overline{z}+iz=-8-8i$.
Suy ra $|\overline{z}+iz|=|-8-8i|=8\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 91.

Cho số phức z thoả mãn $(1+i)\,z=-1+3i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình dưới đây?



A. Điểm Q.
B. Điểm P.
C. Điểm M.
D. Điểm N.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{-1+3i}{1+i}=\dfrac{(-1+3i)\,(1-i)}{2}=\dfrac{-1+3+3i+i}{2}=1+2i$.
Do đó điểm biểu diễn số phức z là điểm $M\,(1;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 92. Số phức z thỏa mãn: $\overline{z}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của $\overline{z}+iz$.

A. $4\sqrt{2}$. **B**. 4. **C**. $8\sqrt{2}$. **D**. 8.

Lời giải.

Ta có
- ☑ $\overline{z}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}\Leftrightarrow\overline{z}=-4-4i\Rightarrow z=-4+4i$.
- ☑ $iz=i(-4+4i)=-4-4i$.
- ☑ $\overline{z}+iz=-4-4i+(-4-4i)=-8-8i$.

Vậy $|\overline{z}+iz|=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=8\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có

$$(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z=4+i-(2-i)^2\Leftrightarrow(3+2i)z=1+5i\Leftrightarrow z=\frac{1+5i}{3+2i}$$
$$\Leftrightarrow z=1+i.$$

Vậy phần thực của số phức z là 1, phần ảo của số phức z là 1.
Do đó, hiệu phần thực và phần ảo của số phức z bằng 0.
Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1$.
Tính $P=a+b$.

A. $P=7$. **B**. $P=-1$. **C**. $P=1$. **D**. $P=2$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z-3i| = |z+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 8b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Phần ảo của z bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $(1+i)z = 3-i \Leftrightarrow z = \dfrac{3-i}{1+i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = 1-2i.$

Vậy phần ảo của số phức z bằng -2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$.
Tính $w = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + iz_1z_2$.

A. $w = -\dfrac{3}{4} + 2i$. **B.** $w = \dfrac{3}{4} + 2i$. **C.** $w = 2 + \dfrac{3}{2}i$. **D.** $w = \dfrac{3}{2} + 2i$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$ có 2 nghiệm phức $z_1 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{23}}{4}i$, $z_2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{23}}{4}i$

Khi đó $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2} \\ z_1z_2 = 2 \end{cases}$. Suy ra $w = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + iz_1z_2 = \dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2} + iz_1z_2 = \dfrac{3}{4} + 2i.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Cho số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \dfrac{1}{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$(1+i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i \cdot (1)$. Ta có: $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Thay vào (1) ta được $(1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i$

$\Leftrightarrow (a-b)i + (3a-b) = 3 + 2i \Leftrightarrow (a-b)i + (3a-b) = 3 + 2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 3a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P = -1.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn $|z-2+3i| = |\overline{z} - i + 1|$ là phương trình:

A. $6x - 8y - 11 = 0$. **B.** $6x - 4y - 11 = 0$. **C.** $2x - 8y - 11 = 0$. **D.** $2x - 4y - 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & |z - 2 + 3i| = |\overline{z} - i + 1| \\ \Leftrightarrow\ & |x + yi - 2 + 3i| = |x - yi - i + 1| \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y+3)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad -4x+4+6y+9=2x+1+2y+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x-4y-11=0$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là phương trình đường thẳng $6x-4y-11=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$, biết $z=\dfrac{(1+i)3i}{1-i}$.
A. 3. **B**. -3. **C**. 0. **D**. -1.

Lời giải.

Ta có: $z=\dfrac{(1+i)3i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2 3i}{1-i^2}=\dfrac{2i\cdot 3i}{2}=-3\Rightarrow \overline{z}=-3$. Vậy phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 0.
Chọn đáp án (C) □

Câu 100. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+2i)=4-3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.
A. $\overline{z}=\dfrac{-2}{5}-\dfrac{11}{5}i$. **B**. $\overline{z}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{11}{5}i$. **C**. $\overline{z}=\dfrac{-2}{5}+\dfrac{11}{5}i$. **D**. $\overline{z}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{5}i$.

Lời giải.

Vì $z(1+2i)=4-3i$ nên $z=\dfrac{4-3i}{1+2i}=\dfrac{(4-3i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\dfrac{-2-11i}{5}=\dfrac{-2}{5}-\dfrac{11}{5}i$.
Vậy nên $\overline{z}=\dfrac{-2}{5}+\dfrac{11}{5}i$.
Chọn đáp án (C) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. C	4. C	5. A	6. B	7. A	8. D	9. B	10. B
11. C	12. A	13. C	14. C	15. C	16. D	17. C	18. A	19. A	20. D
21. D	22. B	23. B	24. C	25. C	26. A	27. B	28. C	29. D	30. C
31. D	32. A	33. D	34. C	35. B	36. C	37. A	38. C	39. A	40. C
41. B	42. D	43. C	44. A	45. C	46. A	47. D	48. C	49. C	50. C
51. D	52. D	53. B	54. A	55. A	56. C	57. B	58. D	59. D	60. D
61. D	62. C	63. C	64. D	65. C	66. A	67. D	68. A	69. D	70. C
71. D	72. A	73. A	74. D	75. A	76. B	77. B	78. D	79. C	80. A
81. B	82. A	83. A	84. A	85. C	86. D	87. A	88. D	89. A	90. C
91. C	92. C	93. D	94. D	95. B	96. B	97. C	98. B	99. C	100. C

❷ Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\overline{z}+3-2i=0$. Tìm mô-đun của số phức $w=2z-(2+i)$.

A. $|w|=2\sqrt{30}$. **B.** $|w|=\sqrt{47}$. **C.** $|w|=3\sqrt{5}$. **D.** $|w|=\sqrt{17}$.

Lời giải.

Ta có $(1+i)\overline{z}+3-2i=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{-3+2i}{1+i}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i \Rightarrow z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i.$

$$\Rightarrow w=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)-(2+i)=-3-6i \Rightarrow |w|=3\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z-5=7i$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\overline{z}=-\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i$. **B.** $\overline{z}=\dfrac{13}{5}-\dfrac{4}{5}i$. **C.** $\overline{z}=-\dfrac{13}{5}-\dfrac{4}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{5+7i}{1+3i}=\dfrac{13}{5}-\dfrac{4}{5}i \Rightarrow \overline{z}=\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i.$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho số phức $z=mi$ với $m\neq 0$ là tham số thực. Tìm phần ảo của số phức $\dfrac{1}{z}$.

A. $-\dfrac{1}{m}$. **B.** $\dfrac{1}{m}$. **C.** $-\dfrac{1}{m}i$. **D.** $\dfrac{1}{m}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{mi}=-\dfrac{i}{m} \Rightarrow$ phần ảo của $\dfrac{1}{z}$ là $-\dfrac{1}{m}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho số phức $(1-i)z=4+2i$. Tìm mô-đun của số phức $w=z+3$.

A. 5. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 25. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $a,\, b\in\mathbb{R}$.

Khi đó

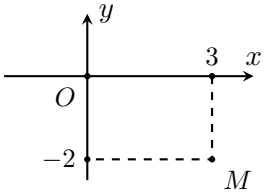
$$\begin{aligned}
&(1-i)z=4+2i \Leftrightarrow (1-i)(a+bi)=4+2i\\
\Leftrightarrow\ & a+b+(b-a)i=4+2i\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+b=4\\ -a+b=2 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=1\\ b=3 \end{cases} \Rightarrow z=1+3i \Rightarrow \omega=4+3i\\
\Rightarrow\ & |\omega|=5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 5.

Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $z=-3+2i$. **B.** $z=3+2i$. **C.** $z=-3-2i$. **D.** $z=3-2i$.



Lời giải.

Ta thấy điểm $M(3;-2)$ do đó $z=3-2i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hai số phức $z_1=2+i$, $z_2=1-3i$. Tính $T=|(1+i)z_1+2z_2|$.

A. $T=18$. **B.** $T=3\sqrt{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=3$.

Lời giải.

$(1+i)z_1+2z_2=(1+i)(2+i)+2(1-3i)=3-3i \Rightarrow |(1+i)z_1+2z_2|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong tập hợp số phức, phương trình $\dfrac{4}{z+1}=1-i$ có nghiệm là

A. $z=2-i$. **B.** $z=5-3i$. **C.** $z=1+2i$. **D.** $z=3+2i$.

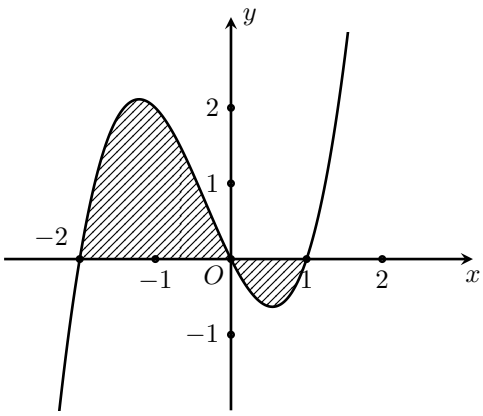
Lời giải.

Điều kiện $z\neq -1$.

Phương trình $\dfrac{4}{z+1}=1-i \Leftrightarrow z+1=\dfrac{4}{1-i} \Leftrightarrow z=\dfrac{4}{1-i}-1=1+2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, diện tích hình phẳng phần tô đậm được tính theo công thức



A. $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x)\geq 0, \forall x\in[-2;0]$ và $f(x)\leq 0, \forall x\in[0;1]$.

Suy ra $S=\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Tìm phần ảo của số phức $z=\dfrac{2-9i}{1+6i}$.

A. $-\dfrac{52}{37}$. **B.** $\dfrac{52}{37}$. **C.** $-\dfrac{21}{37}$. **D.** $\dfrac{21}{37}$.

Lời giải.

$$z=\frac{2-9i}{1+6i}=\frac{(2-9i)(1-6i)}{(1+6i)(1-6i)}=-\frac{52}{37}-\frac{21}{37}i.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Cho số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $S = a + b$.

A. $S = \dfrac{1}{2}$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i \\
\Leftrightarrow\ &(1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i \\
\Leftrightarrow\ &(3a-b) + (a-b)i = 3 + 2i \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 3a - b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Do đó $S = a + b = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = (1+2i) - (-2+i)$. Mô-đun của z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $(1+2i)z = (1+2i) - (-2+i) \Leftrightarrow (1+2i)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{1+2i} = 1 - i$.

Vậy $|z| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tính số phức $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$ có kết quả là

A. 2. **B.** -2. **C.** $2i$. **D.** $1 + i$.

Lời giải.

$z = i^{2018} + (-i)^{2018} = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính mô-đun số phức nghịch đảo của số phức $z = (1-2i)^2$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{25}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{|(1-2i)^2|} = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|\, i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = -5$. **B.** $S = \dfrac{7}{3}$. **C.** $S = -\dfrac{7}{3}$. **D.** $S = 5$.

Lời giải.

Ta có $z=a+bi \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & z+1+3i-|z|\,i=0 \Leftrightarrow a+bi+1+3i-\sqrt{a^2+b^2}i=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{b^2+1}=b+3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow S=a+3b=-1-4=-5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Giả sử $\dfrac{1}{(1-i)^9}=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó

A. $a=\dfrac{1}{32}; b=\dfrac{-1}{32}$. **B.** $a=0; b=\dfrac{1}{32}$. **C.** $a=\dfrac{1}{32}; b=0$. **D.** $a=b=\dfrac{1}{32}$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i \Rightarrow (1-i)^4=4 \Rightarrow (1-i)^8=16$.

Khi đó

$$\frac{1}{(1-i)^9}=\frac{1}{16(1-i)}=\frac{1+i}{32}.$$

Vậy $a=b=\dfrac{1}{32}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=4$. **B.** $R=16$. **C.** $R=8$. **D.** $R=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & w-2=(1+\sqrt{3}i)z \\ \Leftrightarrow & \frac{w-2}{1+\sqrt{3}i}=z \\ \Leftrightarrow & \frac{w-2}{1+\sqrt{3}i}-1=z-1 \\ \Rightarrow & \left|\frac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right|=|z-1| \\ \Leftrightarrow & |w-3-\sqrt{3}i|=|z-1|\cdot|1+\sqrt{3}i|=4. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra bán kính $R=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2-4z+(m-2)^2=0, m\in\mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$. Hỏi trong đoạn $[0;2018]$ có bao nhiêu giá trị nguyên của m_0?

A. 2019. **B**. 2015. **C**. 2014. **D**. 2018.

Lời giải.

$\Delta' = 4 - (m-2)^2 = 4m - m^2$.

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$ thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Khi đó $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0. \end{cases}$ (Điều này không xảy ra).

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phức phân biệt z_1, z_2.

$z_1 = 2 + \sqrt{m^2 - 4m}.i$ và $z_2 = 2 - \sqrt{m^2 - 4m}.i$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{4 + m^2 - 4m} = |m - 2|$.

Vậy $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn điều kiên bài toán.

Kết hợp điều kiện suy ra $4 < m \leq 2018$, suy ra có 2014 số m_0 nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $a + (b-1)i = \dfrac{1+3i}{1-2i}$. Giá trị nào dưới đây là mô-đun của z?

A. 5. **B**. 1. **C**. $\sqrt{10}$. **D**. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $a + (b-1)i = \dfrac{1+3i}{1-2i} \Leftrightarrow a + (b-1)i = -1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$

Vậy mô-đun của z là $\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tính môđun của số phức z biết $\overline{z} + 1 = \dfrac{2-3i}{1+i}$.

A. $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$. **B**. $|z| = \sqrt{34}$. **C**. $|z| = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$. **D**. $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{4}$.

Lời giải.

$\overline{z} + 1 = \dfrac{2-3i}{1+i} \Leftrightarrow \overline{z} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i \Rightarrow |z| = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\overline{z} = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$. **B**. $\overline{z} = +\dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i$. **C**. $\overline{z} = -\dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i$. **D**. $\overline{z} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{5+7i}{1+3i} = \dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z| = 34$. **B**. $|z| = \sqrt{34}$. **C**. $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **D**. $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}$.

Suy ra $|z|=\dfrac{|1-13i|}{|2-i|}=\dfrac{\sqrt{1+(-13)^2}}{\sqrt{2^+(-1)^2}}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$. Số phức $\dfrac{z}{z'}$ có phần thực là

A. $\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$. **B.** $\dfrac{aa'+bb'}{a^2+b^2}$. **C.** $\dfrac{a+a'}{a^2+b^2}$. **D.** $\dfrac{2bb'}{a'^2+b'^2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{a+bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}=\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\dfrac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$.

Do đó phần thực của $\dfrac{z}{z'}$ bằng $\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2-i)z=(4+i)z+3-2i$. Giá trị của $|4\overline{z}+i|$ là

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{30}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải.

Ta có $(2-i)z=(4+i)z+3-2i \Leftrightarrow z(-2-2i)=3-2i \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$.

Do đó $|4\overline{z}+i|=\left|4\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}i\right)+i\right|=|-1-4i|=\sqrt{17}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Dưới đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?

I. Mô-đun của z là một số thực dương.

II. $z^2=|z|^2$.

III. $|\overline{z}|=|iz|=|z|$.

IV. Điểm $M(-a;b)$ biểu diễn số phức $\overline{z}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Mệnh đề I sai, cụ thể mô-đun của số 0 bằng 0 chứ không phải là số thực dương.

Mệnh đề II sai vì $|z|^2$ là số thực, z^2 có thể không là số thực, chẳng hạn $(1+i)^2\neq|1+i|^2$.

Mệnh đề III đúng vì $|iz|=|i|\cdot|z|=|z|=|\overline{z}|$.

Mệnh đề IV sai và điểm biểu diễn của $\overline{z}$ là $(a;-b)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho số phức z thoả mãn $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 z=3-4i$. Mô-đun của z bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 z=3-4i \Leftrightarrow z=\frac{3-4i}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}=\frac{-3+4\sqrt{3}}{8}+\frac{4+3\sqrt{3}}{8}i.$$

Vậy mô-đun của z là

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{-3+4\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{z}{\overline{z}}$ là số thuần ảo. **B.** $z-\overline{z}$ là số ảo. **C.** $z\cdot\overline{z}$ là số thực. **D.** $z+\overline{z}$ là số thực.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{z^2}{|z|^2}=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i,\ (a^2+b^2\neq 0)$.

☑ $\begin{cases}a^2-b^2=0\\ a^2+b^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{z}{\overline{z}}$ là số thuần ảo.

☑ $\begin{cases}a^2-b^2\neq 0\\ a^2+b^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{z}{\overline{z}}$ không là số thuần ảo.

Do đó nhận định $\dfrac{z}{\overline{z}}$ là số thuần ảo là sai.

Ta có: $z\cdot\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2$ là một số thực nên nên nhận định $z\cdot\overline{z}$ là số thực là đúng.

Ta có: $z+\overline{z}=2a$ là số thực nên nhận định $z+\overline{z}$ là số thực là đúng.

Ta có: $z-\overline{z}=2bi$ là số ảo nên nhận định $z-\overline{z}$ là số ảo là đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-3z+4=0$. Tính $w=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+iz_1z_2$.

A. $w=-\dfrac{3}{4}+2i$. **B.** $w=\dfrac{3}{4}+2i$. **C.** $w=2+\dfrac{3}{2}i$. **D.** $w=\dfrac{3}{2}+2i$.

Lời giải.

Theo định lí Viète, ta có Khi đó $\begin{cases}z_1+z_2=\dfrac{3}{2}\\ z_1z_2=2\end{cases}$. Suy ra

$$w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+iz_1z_2=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}+iz_1z_2=\frac{3}{4}+2i.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Trong mặt phẳng Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{2z+\overline{z}+1-i}{z^2+i}$ trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z-i)=2-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON})=2\varphi$, trong đó $\varphi=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (IV). **B.** Góc phần tư thứ (I).

C. Góc phần tư thứ (II). **D.** Góc phần tư thứ (III).

Lời giải.

Ta có $(1-i)(z-i)=2-i+z\Rightarrow z=3i\Rightarrow w=-\dfrac{7}{82}-\dfrac{19}{82}i\Rightarrow M\left(-\dfrac{7}{82};-\dfrac{19}{82}\right)\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{19}{7}$.

Suy ra $\sin 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{133}{205}$ và $\cos 2\varphi=\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=-\dfrac{156}{205}$.

Vậy N thuộc góc phần tư thứ (II).

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z=z-1$. Mô-đun của $\overline{z}$ bằng

A. $\dfrac{1}{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$(2+3i)z = z-1 \Leftrightarrow (1+3i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+3i} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i}.$$

Suy ra

$$|\overline{z}| = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Viết số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$ dưới dạng $z = a+bi$ với a, b là các số thực. Tìm a, b.

A. $a=-1; b=-4$. **B.** $a=1; b=-4$. **C.** $a=-1; b=4$. **D.** $a=1; b=4$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} = \dfrac{5-14i}{3+2i} = \dfrac{(5-14i)(3-2i)}{13} = \dfrac{-13-52i}{13} = -1-4i$.

Do đó điểm biểu diễn cho số phức z có tọa độ $(-1;-4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w = (1+\sqrt{3}i)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i}$.

Suy ra

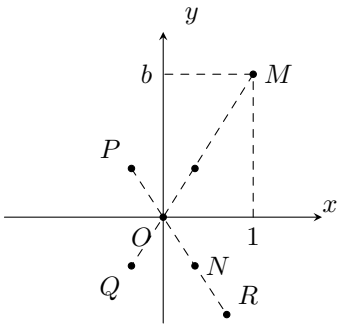
$$|z-1| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{w-2}{1+\sqrt{3}i} - 1\right| = 2 \Leftrightarrow \left|w-3-\sqrt{3}i\right| = 4.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức w là đường tròn tâm $I(3;\sqrt{3})$, bán kính $R=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 32.

Trong mặt phẳng phức, cho số phức z có điểm biểu diễn là M. Biết rằng số phức $w = \dfrac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm N, P, Q, R như hình vẽ bên. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?



A. N. **B.** P. **C.** Q. **D.** R.

Lời giải.

Viết $z = 1+bi$, với $b \in \mathbb{R}, b>0$.

Suy ra $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+bi} = \dfrac{1-bi}{1^2+b^2} = \dfrac{1}{1+b^2} - \dfrac{b}{1+b^2}i$.

Suy ra điểm biểu diễn cho w là điểm có tọa độ $\left(\dfrac{1}{1+b^2}; \dfrac{-b}{1+b^2}\right)$.

Do $\left(\dfrac{1}{1+b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{-b}{1+b^2}\right)^2 = 1$ và $b>0$ nên điểm biểu diễn cho w thuộc góc phần tư thứ IV của mặt phẳng tọa độ và nằm trên đường tròn tâm O, bán kính bằng 1.

Vậy điểm biểu diễn cho w là N.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$

Tính $A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_1+z_3=-z_2 \\ z_2=z_3=-z_1 \end{cases} \Rightarrow A=|-z_1|^2+|-z_2|^2+|-z_3|^2=\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$. Tính mô-đun của số phức z.

A. $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **B.** $|z|=34$. **C.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z|=\sqrt{34}$.

Lời giải.

Ta có $z(2-i)+13i=1 \Rightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=3-5i$. Do đó $|z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $z+(2+i)\overline{z}=3+5i$. Tính môđun cùa số phức z.

A. $|z|=13$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=\sqrt{13}$. **D.** $|z|=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó

$$z+(2+i)\overline{z}=3+5i \Leftrightarrow a+bi+(2+i)(a-bi)=3+5i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2a+b=3 \\ b+a-2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=5 \\ 3a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3. \end{cases}$$

Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tìm phần ảo của số phức z, biết $(2-i)z=1+3i$.

A. 3. **B.** $\dfrac{7}{5}i$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $(2-i)z=1+3i \Leftrightarrow z=\dfrac{1+3i}{2-i}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$. Vậy z có phần ảo là $\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z|(2+i)=z-1+i(2z+3)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=7$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |z|(2+i)=z-1+i(2z+3) &\Leftrightarrow (2|z|+1)+(|z|-3)\,i=(1+2i)z \quad (1)\\ &\Rightarrow |(2|z|+1)+(|z|-3)\,i|^2=|(1+2i)z|^2\\ &\Leftrightarrow (2|z|+1)^2+(|z|-3)^2=5|z|^2\\ &\Leftrightarrow |z|=5. \end{aligned}$$

Thay $|z|=5$ vào (1), ta được $z=3-4i$.
Vậy $S=a+b=-1$.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2019}$. Tính z^4.

A. -1. **B.** i. **C.** $-i$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=\dfrac{2i}{2}=i\Rightarrow z=i^{2019}=(i^4)^{504}\cdot i^3=-i\Rightarrow z^4=(-i)^4=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Nghịch đảo $\dfrac{1}{z}$ của số phức $z=1+3i$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}i$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{3}{\sqrt{10}}i$. **C.** $\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}i$. **D.** $\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{1-3i}{1+9}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Môđun của số phức $w=(z+1)\overline{z}$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i\Leftrightarrow z=\dfrac{4+i-(2-i)^2}{3+2i}=1+i$.
Suy ra $|w|=|(z+1)\overline{z}|=|z+1|\cdot|\overline{z}|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}+2z=3+i$. Giá trị của biểu thức $z+\dfrac{1}{z}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$. **B.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$. **C.** $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$. **D.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.
Ta có $\overline{z}+2z=3+i\Leftrightarrow\begin{cases}3x=3\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow z=1+i$.
Do đó $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.
Vậy ta có $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Tính mô-đun của số phức z, biết $(1-2i)z+2-i=-12i$.

A. 5. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1-2i)z+2-i=-12i \Leftrightarrow z=\dfrac{-2-11i}{1-2i}=4-3i$.

Vậy $|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho số phức $z=\dfrac{3i}{3+i}-i$. Mô-đun của số phức $\overline{z}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{370}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{-3}{10}+\dfrac{1}{10}i$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{3i}{3+i}-i \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{3+i}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}i \Rightarrow \overline{z}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}i$.

Vậy $|\overline{z}|=\sqrt{\dfrac{9}{100}+\dfrac{1}{100}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z, biết $(4+3i)z-(3+4i)(2+i)=9-9i$.

A. $(2;-1)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $(4+3i)z-(3+4i)(2+i)=9-9i \Rightarrow z=\dfrac{9-9i+(3+4i)(2+i)}{4+3i}=2-i \Rightarrow \overline{z}=2+i$.

Vậy điểm biểu diễn của $\overline{z}$ là $(2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Tìm số phức $\overline{z}$, biết $(2-5i)z-3+2i=5+7i$.

A. $\overline{z}=-\dfrac{9}{29}+\dfrac{50}{29}i$. **B.** $\overline{z}=-\dfrac{9}{29}-\dfrac{50}{29}i$. **C.** $\overline{z}=\dfrac{9}{29}-\dfrac{50}{29}i$. **D.** $\overline{z}=\dfrac{9}{29}+\dfrac{50}{29}i$.

Lời giải.

Ta có $(2-5i)z-3+2i=5+7i \Rightarrow z=\dfrac{5i+8}{2-5i}=\dfrac{(5i+8)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=-\dfrac{9}{29}+\dfrac{50}{29}i \Rightarrow \overline{z}=-\dfrac{9}{29}-\dfrac{50}{29}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm tọa độ của điểm biểu diễn số phức $z=\dfrac{3+4i}{1-i}$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $Q\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. **C.** $P\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $z=\dfrac{3+4i}{1-i}=\dfrac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}i$ nên tọa độ của điểm biểu diễn số phức z là $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho số phức $z=7-i$. Tìm số phức $w=\dfrac{1}{z}$.

A. $w=\dfrac{7}{50}-\dfrac{1}{50}i$. **B.** $w=-\dfrac{1}{50}+\dfrac{7}{50}i$. **C.** $w=\dfrac{1}{50}+\dfrac{7}{50}i$. **D.** $w=\dfrac{7}{50}+\dfrac{1}{50}i$.

Lời giải.

Ta có $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{7-i}=\dfrac{7+i}{(7-i)(7+i)}=\dfrac{7}{50}+\dfrac{1}{50}i$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z-4+2i|=4\sqrt{2}$ là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(1;-3)$, $R=4$. **B.** $I(4;-2)$, $R=4\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-3)$, $R=2$. **D.** $I(-1;3)$, $R=4$.

Lời giải.

Gọi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z.

$$|(1+i)z-4+2i|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|(1+i)z-4+2i|}{|1+i|}=\frac{4\sqrt{2}}{|1+i|}$$
$$\Leftrightarrow \quad |z-1+3i|=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=4^2.$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-3)$, bán kính $R=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{2-i}+i\right|=\sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp biểu diễn số phức $w=(1-i)z+2i$ có dạng $(x+2)^2+y^2=m$. Tìm m.

A. $m=96$. **B.** $m=92$. **C.** $m=50$. **D.** $m=100$.

Lời giải.

Ta có $w=(1-i)z+2i \Rightarrow z=\dfrac{w-2i}{1-i}$. Do đó, ta có

$$\left|\frac{z-1}{2-i}+i\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\frac{z+2i}{2-i}\right|=\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow |z+2i|=5$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{w-2i}{1-i}+2i\right|=5$$
$$\Leftrightarrow |w+2|=5\sqrt{2}.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $(x+2)^2+y^2=50$.

Vậy $m=50$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i+3)z+\dfrac{2+i}{i}=(2-i)\bar{z}$. Tính mô-đun của số phức $w=z-i$.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{26}}{25}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có

$$(i+3)z+\frac{2+i}{i}=(2-i)\bar{z} \Leftrightarrow (i+3)(x+yi)-2i+1=(2-i)(x-yi)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)+(2x+5y-2)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 2x+5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Do đó $z=-1+\dfrac{4}{5}i \Rightarrow w=z-i=-1-\dfrac{1}{5}i$.

Bởi vậy $|w|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. A	5. D	6. B	7. C	8. D	9. C	10. B
11. C	12. B	13. D	14. A	15. D	16. A	17. C	18. D	19. A	20. D
21. B	22. A	23. C	24. C	25. A	26. A	27. B	28. C	29. D	30. A
31. D	32. A	33. C	34. D	35. C	36. C	37. C	38. D	39. D	40. B
41. A	42. A	43. B	44. B	45. B	46. C	47. D	48. A	49. C	50. B

BÀI 4 PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1 Mức độ vd-vdc

Câu 1. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 5$. **B.** $r = 2\sqrt{5}$. **C.** $r = 10$. **D.** $r = 20$.

Lời giải.

Cách 1:

Giả sử $w = x + yi \Rightarrow z = \dfrac{x + yi - 3 + 2i}{4 - 3i} = \dfrac{4x - 3y - 18}{25} + \dfrac{3x + 4y - 1}{25}i.$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} |z| = 2 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(4x - 3y - 18)^2 + (3x + 4y - 1)^2}}{25} = 2 \\ &\Leftrightarrow (4x - 3y - 18)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 2500 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 100 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w theo yêu cầu là đường tròn có tâm $I(3, -2)$ và bán kính $r = 10$.

Cách 2:

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$\begin{aligned} w = 3 - 2i + (4 - 3i)z &\Leftrightarrow w - (3 - 2i) = (4 - 3i)z \\ &\Leftrightarrow |w - (3 - 2i)| = |(4 - 3i)z| \\ &\Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 2)i| = |4 - 3i||z| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot 2 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100 \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn có tâm $I(3, -2)$, bán kính $r = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 5 = 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{z} = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i.$ **B.** $\overline{z} = \dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i.$ **C.** $\overline{z} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i.$ **D.** $\overline{z} = -\dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i.$

Lời giải.

Ta có $z = \dfrac{5 + 7i}{1 + 3i} = \dfrac{13}{5} - \dfrac{4}{5}i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{4}{5}i$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Số phức nào dưới đây thỏa mãn phương trình $(1 - 2i)z = 3z - 2i$?

A. $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i.$ **B.** $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i.$ **C.** $z = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i.$ **D.** $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1-2i)z=3z-2i &\Leftrightarrow (1-2i)z-3z=-2i\\ &\Leftrightarrow (-2-2i)z=-2i\\ &\Leftrightarrow z=\frac{-2i}{-2-2i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=1$ và $z\notin\mathbb{R}$ thì $\dfrac{z^2-1}{z}$

A. Lấy mọi giá trị phức. **B**. Lấy mọi giá trị thực.

C. Bằng 0. **D**. Là số thuần ảo.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi\Rightarrow z-\overline{z}=2bi$.

Ta có $z\cdot\overline{z}=|z|^2=1$.

Ta lại có $\dfrac{z^2-1}{z}=\dfrac{z^2\overline{z}-\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{z-\overline{z}}{1}=z-\overline{z}=2bi$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình $(1+2i)z-8-i=0$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-1$. **B**. $S=1$. **C**. $S=-5$. **D**. $S=5$.

Lời giải.

Vì $(1+2i)z-8-i=0\Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{1+2i}=\dfrac{(8+i)(1-2i)}{1+4}=\dfrac{10-15i}{5}=2-3i$ nên $\begin{cases}a=2\\ b=-3.\end{cases}$

Vậy $S=a+b=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-4+2i|=2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(3;-1), R=\sqrt{2}$. **B**. $I(3;-1), R=2$. **C**. $I(3;1), R=\sqrt{2}$. **D**. $I(3;1), R=2$.

Lời giải.

Chia hay vế của đẳng thức $|(1-i)z-4+2i|=2$ cho $|1-i|$ ta được $|z-(3+i)=\sqrt{2}|$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tìm số phức z thỏa mãn $(1-i)(z+1-2i)-3+2i=0$.

A. $z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **B**. $z=4-3i$. **C**. $z=4+3i$. **D**. $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $(1-i)(z+1-2i)-3+2i=0\Leftrightarrow z+1-2i=\dfrac{3-2i}{1-i}\Leftrightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho số phức z thỏa: $\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 z=3-4i$. Mô-đun của z bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B**. $\dfrac{4}{5}$. **C**. $\dfrac{5}{4}$. **D**. $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 z = 3-4i \Leftrightarrow (-2+2\sqrt{3}i)z = 3-4i \Leftrightarrow z = \dfrac{3-4i}{-2+2\sqrt{3}i} = -\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8} + \dfrac{4-3\sqrt{3}}{8}i.$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \dfrac{5}{4}.$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{41}$. Xét số phức $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $|b|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

☑ Biểu diễn lượng giác của số phức.

☑ $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|, z_2 \neq 0.$

Cách giải:

Cách 1: Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2.

Theo đề bài, ta có $OA = 3, OB = 4, AB = \sqrt{41}$. $\Rightarrow \cos\widehat{AOB} = \dfrac{3^2+4^2-41}{2\cdot 3\cdot 4} = -\dfrac{2}{3}$.

Đặt

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3(\cos\varphi + i\sin\varphi).\\
\Rightarrow z_2 &= 4(\cos(\varphi \pm AOB))\\
&= 4(\cos(\varphi\pm\alpha) + i\sin(\varphi\pm\alpha)) \quad \left(\alpha = \widehat{AOB}\right).\\
\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{4(\cos(\varphi\pm\alpha) + i\sin(\varphi\pm\alpha))}\\
&= \frac{3}{4}\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos(\varphi\pm\alpha) - i\sin(\varphi\pm\alpha))\\
&= \frac{3}{4}[(\cos\varphi\cdot\cos(\varphi\pm\alpha) + \sin\varphi\cdot\sin(\varphi\pm\alpha)) + i(\sin\varphi\cdot\cos(\varphi\pm\alpha) - \cos\varphi\cdot\sin(\varphi\pm\alpha)]\\
&= \frac{3}{4}[\cos(\pm\alpha) + i\cdot\sin(\pm\alpha)] = \frac{3}{4}\cdot(\cos\alpha \pm i\sin\alpha).\\
\Rightarrow b &= \pm\frac{3}{4}\sin\alpha \Rightarrow |b| = \frac{3}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}.
\end{aligned}$$

Cách 2: Ta có

$$|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{41} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{41}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{3}{4} \\ \left|\dfrac{z_1}{z_2} - 1\right| = \dfrac{\sqrt{41}}{4} \end{cases}.$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi, (a, b \in R) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \\ (a-1)^2 + b^2 = \left(\dfrac{\sqrt{41}}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{9}{16} \\ (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{41}{16} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{9}{16} - a^2 \\ (a-1)^2 + \dfrac{9}{16} - a^2 = \dfrac{41}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{5}{16} \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \dfrac{\sqrt{5}}{4} \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $|b| = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\overline{z}|\,i + (z+\overline{z})\,i^{2019} = 1$?

A. 4. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi;\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Ta có:

$$|z-1|^2 = |a+bi-1|^2 = (a-1)^2 + b^2.$$
$$|z-\overline{z}|\,i = |a+bi-a+bi|\,i = \sqrt{(2b)^2}i = 2\,|b|\,i.$$
$$(z+\overline{z})\,i^{2019} = -i\,(a+bi+a-bi) = -2ai.$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với:

$$(a-1)^2 + b^2 + 2\,|b|\,i - 2ai = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2\,|b| - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2\,|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |b| = 0 \\ |b| = 1 \end{array}\right. \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho số phức z thỏa $|z-1+2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 2z + i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I\,(2;-3)$. **B**. $I(1;1)$. **C**. $I(0;1)$. **D**. $I(1;0)$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w.

Ta có $w = 2z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w-i}{2}$.

Do đó $|z-1+2i| = 3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-i}{2} - 1 + 2i\right| = 3 \Leftrightarrow |w-2+3i| = 6 \Leftrightarrow MI = 6$, với $I\,(2;-3)$.

Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I\,(2;-3)$ và bán kính $R = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2\,|z+\overline{z}| + 4$ và $|z-1-i| = |z-3+3i|$?

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

$$|z|^2 = 2|z + \overline{z}| + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4|x| + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0,\ x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0,\ x < 0 \quad (2). \end{cases}$$

Theo đề ta có

$$\begin{aligned} |z - 1 - i| = |z - 3 + 3i| &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x = 8y + 16 \\ &\Leftrightarrow x = 2y + 4 \quad (3). \end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (1) ta được

$$(2y+4)^2 + y^2 - 4(2y+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \dfrac{24}{5} \text{ (nhận)} \\ y = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ (nhận).} \end{cases}$$

+ Thay (3) vào (2) ta được

$$(2y+4)^2 + y^2 + 4(2y+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 24y + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ (loại)} \\ y = -\dfrac{14}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{8}{5} \text{ (nhận).} \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

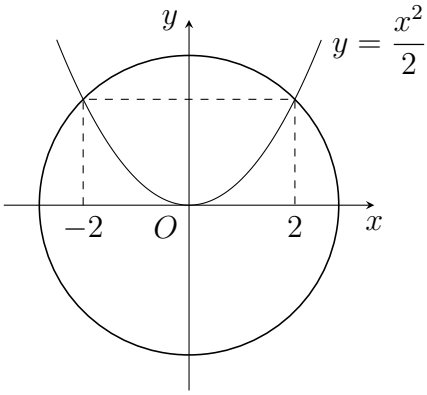
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình tròn $(C)\colon x^2 + y^2 = 8$ và parabol $(P)\colon y = \dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$?

A. $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$. **B.** $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3\pi + 2}{9\pi + 2}$. **C.** $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3\pi - 2}{9\pi + 2}$. **D.** $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3\pi + 1}{9\pi - 1}$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.



Phương trình nửa đường tròn phía trên Ox là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Khi đó $S_1 = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$.

Trong đó

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8(1 - \sin^2 t)} \cdot 2\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 2\pi + 4. \end{aligned}$$

Khi đó $S_1 = 2\pi + 4 - \dfrac{8}{3} = 2\pi + \dfrac{4}{3}$. Hình tròn có bán kính $R = \sqrt{8}$ nên có diện tích là 8π.

Do đó $S_2 = 8\pi - \left(2\pi + \dfrac{4}{3}\right) = 6\pi - \dfrac{4}{3}$. Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của đường tròn (C).

A. $R=\dfrac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\dfrac{7}{3}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Gọi số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

$|x+yi+1|=|1-i-2(x+yi)| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(1-2x)^2+(-1-2y)^2} \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=1-4x+4x^2+1+4y+4y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{1}{3}=0$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(1;-\dfrac{2}{3}\right)$, bán kính $R=\sqrt{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z=\dfrac{m+2i}{m-2i}$ có phần thực dương.

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải.

Có $z=\dfrac{(m+2i)(m+2i)}{m^2+4}=\dfrac{m^2-4}{m^2+4}+\dfrac{4mi}{m^2+4}$.

Phần thực của z dương nên $m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho số phức z có $|z|=9$. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $w=\bar{z}+5i$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. 9. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** 3. **D.** $9\sqrt{2}$.

Lời giải.

Có $w-5i=\bar{z} \Rightarrow |w-5i|=|\bar{z}| \Rightarrow |w-5i|=|z|=9$.

Giả sử $w=x+yi \Rightarrow |(x+(y-5)i|=9 \Leftrightarrow x^2+(y-5)^2=81$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính bằng 9.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tìm môđun của số phức $w=(1+z)\bar{z}$ biết rằng số phức z thỏa mãn biểu thức $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$.

A. $|w|=2$. **B.** $|w|=\sqrt{10}$. **C.** $|w|=\sqrt{8}$. **D.** $|w|=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow z=1+i$.

Từ đó có $w=(2+i)(1-i)=3-i$ nên $|w|=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tìm số phức z biết $z=\dfrac{3+4i}{i^{2019}}$

A. $z=4-3i$. **B.** $z=-4+3i$. **C.** $z=3-4i$. **D.** $z=3+4i$.

Lời giải.

Ta có: $i^{2019} = i \cdot i^{2018} = i \cdot (i^2)^{1009} = i \cdot (-1)^{1009} = -i$.

KHi đó: $z = \dfrac{3+4i}{i^{2019}} = \dfrac{3+4i}{-i} = -4+3i$.

Chọn đáp án (B) □

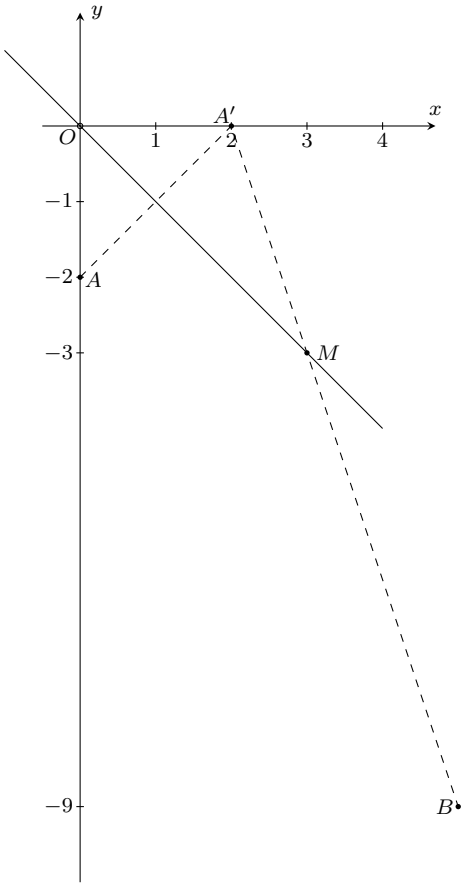
Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| = |z+2|$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2i| + |z-5+9i|$.

A. $\sqrt{70}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{74}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $z = x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & |z-2i| = |z+2| \\ \Leftrightarrow\ & |(x+yi)-2i| = |x+yi+2| \\ \Leftrightarrow\ & x^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x+y = 0. \end{aligned}$$



$P = |z+2i| + |z-5+9i| = |z-(-2i)| + |z-(5-9i)|$.

Xét $A(0;-2), B(5;-9)$. Bài toán trở thành cho điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng $x+y=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA+MB$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $x+y=0 \Rightarrow A'(2;0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (3;-9) \Rightarrow A'B = 3\sqrt{10}$.

$MA+MB = MA'+MB \geq A'B$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i| = \sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

☑ $|z+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2+(b+3)^2 = 13 \quad (1)$.

☑ $w = \dfrac{z}{z+2} = \dfrac{a+bi}{a+2+bi} = \dfrac{(a+bi)(a+2-bi)}{(a+2)^2+b^2} = \dfrac{a^2+2a+b^2+2bi}{(a+2)^2+b^2} \quad (z \neq -2)$.

☑ w là số thuần ảo $\Leftrightarrow a^2+2a+b^2 = 0 \quad (2)$.

Lấy $(1)-(2)$ ta được $6a-2b = 4 \Leftrightarrow a = 3b-2$.

Thay $a = 3b-2$ vào (1) ta được $10b^2-6b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$

☑ $b = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow z = -2$ (loại).

☑ $b=\dfrac{3}{5}\Rightarrow a=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$ (nhận).

Vậy có 1 số phức thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1$ và $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=7$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases}|z-1|=|z-i|\\|z-3i|=|z+i|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\\a^2+(b-3)^2=a^2+(b+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1.$$

Vậy $P=1+1=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|\dfrac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$ có phương trình nào sau đây?

A. $(d)\colon 6x+4y-3=0$. **B.** $(d)\colon x+2y-1=0$.

C. $(C)\colon x^2+y^2-2x+2y+1=0$. **D.** $(C)\colon x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13\\\Leftrightarrow\ &|12-5i||z+1+i|=13|z-2-i|\\\Leftrightarrow\ &|z+1+i|=|z-2-i|\\\Leftrightarrow\ &6x+4y-3=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\dfrac{|z|^2}{z}+2iz+\dfrac{2(z+i)}{1-i}=0$. Khi đó $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. 5. **B.** $-\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** -5.

Lời giải.

Thay $|z|^2 = z\overline{z}$ vào biểu thức ở đề bài ta có

$$\begin{aligned}
\frac{z\overline{z}}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0 &\Leftrightarrow \overline{z} + 2iz + \frac{2(z+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{z} + 2iz + (1+i)z + i - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{z} + z + 3iz + i - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2a + 3i(a+bi) + i - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2a - 3b - 1 + i(3a+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0 \\ 3a + 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{5}{9}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{9}} = \dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án C □

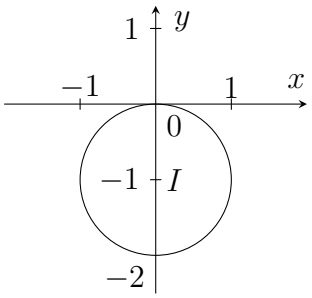
Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 1$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có
$\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 1 \Leftrightarrow |-iz+1| = 1 \Leftrightarrow |-i| \cdot \left|z - \dfrac{1}{i}\right| = 1$
$\Leftrightarrow |z+i| = 1$.

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính bằng 1 $\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của $|z|$ là 2.



Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z| + z + 5i = 25$. Khi đó mô-đun z bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

$|z| + z + 5i = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x + yi + 5i = 25$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x = 25 \\ y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+25} = 25 - x \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 25 = (25-x)^2 \\ x \le 25 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -5. \end{cases}$$

Vậy $z = 12 - 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 5$. Khi đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có

A. tâm $I(1;-3)$, bán kính $R=25$.
B. tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=25$.
C. tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=5$.
D. tâm $I(1;-3)$, bán kính $R=5$.

Lời giải.

Gọi $M(x;\,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x;\,y\in\mathbb{R})$.
$|z+1-3i|=5\Leftrightarrow|(x+1)+(y-3)i|=5\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-3)^2=5^2$.
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 27 (Đề ôn 10 - Mức 7-8). [Phan Anh][2D4K3-3] Cho số phức z thỏa $\left(1-\sqrt{5}i\right)|z|=\dfrac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{5}{2}<|z|<4$. **B.** $\dfrac{3}{2}<|z|<3$. **C.** $3<|z|<5$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<2$.

Lời giải.

Ta có $(1-\sqrt{5}i)|z|=\dfrac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}\Leftrightarrow(1-\sqrt{5}i)|z|-\sqrt{3}i(1-\sqrt{5}i)=\dfrac{2\sqrt{42}}{z}$
$\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{5}i\right)\left(|z|-\sqrt{3}i\right)=\dfrac{2\sqrt{42}}{z}\Leftrightarrow\left|1-\sqrt{5}i\right|\cdot\left|z-\sqrt{3}i\right|=\left|\dfrac{2\sqrt{42}}{z}\right|\Leftrightarrow\sqrt{6}\cdot\sqrt{|z|^2+3}=\dfrac{2\sqrt{42}}{|z|}$.
Đặt $t=|z|>0$, khi đó, ta có
$(*)\Leftrightarrow\sqrt{6}\cdot\sqrt{t^2+3}=\dfrac{2\sqrt{42}}{t}\Leftrightarrow t^4+3t^2-28=0\Leftrightarrow(t^2-4)(t^2+7)=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow|z|=2\in\left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Mặt phẳng có phương trình nào sau đây song song với trục Ox?

A. $y-2z+1=0$. **B.** $2y+z=0$. **C.** $2x+y+1=0$. **D.** $3x+1=0$.

Lời giải.

Ta có trục Ox có véc-tơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.
Gọi $(P_1)\colon y-2z+1=0$, $(P_2)\colon 2y+z=0$, $(P_3)\colon 2x+y+1=0$, $(P_4)\colon 3x+1=0$.
Khi đó, (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n}_1=(0;1;-2),\ \vec{n}_2=(0;2;1),\ \vec{n}_3=(2;1;0),\ \vec{n}_4=(3;0;0).$$

Ta thấy $\vec{n}_1\cdot\vec{i}=0$ và $O(0;0;0)\notin(P_1)\Rightarrow(P_1)\parallel Ox$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tìm mô-đun của số phức z biết $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$.

A. $|z|=\dfrac{1}{2}$. **B.** $|z|=2$. **C.** $|z|=4$. **D.** $|z|=1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&z-4=(1+i)\,|z|-(4+3z)\,i\\
\Leftrightarrow&z-4=|z|+i|z|-4i-3iz\\
\Leftrightarrow&z(1+3i)=|z|+4+(|z|-4)\,i\\
\Rightarrow&|z(1+3i)|=||z|+4+(|z|-4)\,i|\ \text{(lấy mô-đun hai vế)}\\
\Leftrightarrow&|z|\cdot\sqrt{10}=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}\\
\Leftrightarrow&10|z|^2=2|z|^2+32\\
\Leftrightarrow&|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=z(1+i)$ là đường tròn nào dưới đây?

A. Tâm $I(3;-1)$, $R=3\sqrt{2}$. **B**. Tâm $I(-3;1)$, $R=3$.

C. Tâm $I(-3;1)$, $R=3\sqrt{2}$. **D**. Tâm $I(3;-1)$, $R=3$.

Lời giải.

Ta có $w=z(1+i)\Leftrightarrow z=\dfrac{w}{1+i}$. Thay z vào điều kiện $|z-1+2i|=3$, ta được

$$\begin{aligned}
\left|\frac{w}{1+i}-1+2i\right|=3&\Leftrightarrow\left|\frac{1}{1+i}\right|\cdot|w-3+i|=3\\
&\Leftrightarrow|w-3+i|=3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Giả sử số phức $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ta được

$$(x-3)^2+(y+1)^2=(3\sqrt{2})^2.$$

Vậy tập hợp của số phức w là đường tròn tâm $I(3;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho $i+2i^2+3i^3+\cdots+2018i^{2018}=a+bi$ với a, $b\in\mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a=-1010$. **B**. $a=-1009$. **C**. $a=1010$. **D**. $a=1009$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2018}$.

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+2018x^{2017}$.

$\Rightarrow xf'(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+2018x^{2018}$ (1)

Mặt khác: $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2018}=\dfrac{x^{2019}-1}{x-1}$.

$f'(x)=\left(\dfrac{x^{2019}-1}{x-1}\right)'=\dfrac{2019x^{2018}(x-1)-(x^{2019}-1)}{(x-1)^2}$.

$\Rightarrow xf'(x)=x\dfrac{2019x^{2018}(x-1)-(x^{2019}-1)}{(x-1)^2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x+2x^2+3x^3+\cdots+2018x^{2018}=x\dfrac{2019x^{2018}(x-1)-(x^{2019}-1)}{(x-1)^2}$ (3)

Thay $x = i$ vào (3) ta được

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 2018i^{2018} = i.\frac{2019i^{2018}(i-1) - (i^{2019}-1)}{(i-1)^2} = -1010 + 1009i.$$

Vậy $a = -1010$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i| = |z-i|$.

A. Trục Oy. **B**. Trục Ox. **C**. $y = x$. **D**. $y = -x$.

Lời giải.

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ trong mặt phẳng phức (x, $y \in \mathbb{R}$).

Theo đề bài ta có

$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow |x + (y+1)i| = |x + (y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow y = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = 0$ hay trục Ox.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1$?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có:

$\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b.$

$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy có duy nhất một số phức z thỏa yêu cầu là $z = 1 + i$.

Chọn đáp án B □

Câu 34 (Thi thử L5, Toán học tuổi trẻ, 2018). [Phan Quốc Trí, dự án 12-EX6][2D4K3-4] Cho các số phức z_1, z_2 với $z_1 \neq 0$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 z + z_2$ là đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường nào sau đây?

A. Đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $|z_1|$.

B. Đường tròn tâm là điểm biểu diễn số phức $-\dfrac{z_2}{z_1}$, bán kính bằng $\dfrac{1}{|z_1|}$.

C. Đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $\dfrac{1}{|z_1|}$.

D. Đường tròn tâm là điểm biểu diễn số phức $\dfrac{z_2}{z_1}$, bán kính bằng $\dfrac{1}{|z_1|}$.

Lời giải.

Ta có $w = z \cdot z_1 + z_2 \Leftrightarrow z + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{w}{z_1}$. Khi đó

$$\left|z + \frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|w|}{|z_1|} \Leftrightarrow \left|z - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\right| = \frac{1}{|z_1|} \quad (*)$$

Chú ý rằng: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z - (a+bi)| = r$ là đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính r.

Áp dụng vào biểu thức $(*)$, suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số phức $-\dfrac{z_2}{z_1}$, bán kính bằng $\dfrac{1}{|z_1|}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn z_1, $z_2 \neq 0$; $z_1 + z_2 \neq 0$ và $\dfrac{1}{z_1+z_2} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{2}{z_2}$.Tính $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} &\Leftrightarrow \frac{1}{z_1+z_2} = \frac{z_2+2z_1}{z_1z_2}\\ &\Leftrightarrow z_1z_2 = (z_1+z_2)(z_2+2z_1)\\ &\Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0\\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Suy ra $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

A. Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0;-1)$.

B. Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm 1, y = \pm 1$.

C. Đường tròn $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

D. Trục Ox.

Lời giải.

☑ Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z + i \neq 0 \Leftrightarrow a + (b+1)\,i \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 \neq 0$.

☑ Ta có $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = \dfrac{|z-i|}{|z+i|}$ nên

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1 &\Leftrightarrow |z-i| = |z+i|\\ &\Leftrightarrow |a+(b-1)i| = |a+(b+1)i|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2} = \sqrt{a^2+(b+1)^2}\\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện } a^2+(b+1)^2 \neq 0).\end{aligned}$$

☑ Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng $y = 0$, chính là trục Ox.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2| = 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{1}{2}(1+i)z$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là một đường cong có độ dài bằng

A. 4. **B**. $2\sqrt{2}$. **C**. $2\sqrt{2}\pi$. **D**. 4π.

Lời giải.

Ta có $w=\dfrac{1}{2}(1+i)z \Rightarrow z=\dfrac{2w}{1+i}$. Ta có $|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2w}{1+i}-2\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2w-2(1+i)}{1+i}\right|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2w-2(1+i)|}{|1+i|}=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2|\cdot|w-(1+i)|}{|1+i|}=2 \Leftrightarrow |w-1-i|=\sqrt{2}$.

Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. Chu vi đường tròn $P=2\pi R=2\sqrt{2}\pi$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned} & w=\frac{1}{2}(1+i)(z-2)+(1+i) \\ \Leftrightarrow\ & w-1-i=\frac{1}{2}(1+i)(z-2) \\ \Rightarrow\ & |w-1-i|=\frac{1}{2}\cdot|1+i|\cdot|z-2|=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. Chu vi đường tròn $P=2\pi R=2\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3+3i|=\sqrt{2}$. Tính $P=a+b$ khi $|z-1+3i|+|z-3+5i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=-2$. **B**. $P=-8$. **C**. $P=8$. **D**. $P=2$.

Lời giải.

Ta có $|z-3+3i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-3)^2+(b+3)^2=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của $|z-1+3i|+|z-3+5i|=\sqrt{(a-1)^2+(b+3)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+5)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwars ta có

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{(a-1)^2+(b+3)^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+5)^2}\right]^2 &\le 2\left[(a-1)^2+(b+3)^2+(a-3)^2+(b+5)^2\right] \\ &\le 4(a^2-4a+b^2+8b+22). \end{aligned}$$

Ta đổi biến $a-3=u, b+3=v$. Từ đó điều kiện là $u^2+v^2=2$ và ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$u^2+v^2+2(u+v)+4 \le 2+2\sqrt{2(u^2+v^2)}+4=10.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u=v=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$. Vậy $P=a+b=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+2i-(1+i)|z|=0$ và $|z|>1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=3$. **B**. $P=-5$. **C**. $P=-1$. **D**. $P=7$.

Lời giải.

$z=a+bi \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$ và $|z|=\sqrt{a^2+b^2}>1$.

Khi đó $z+1+2i-(1+i)|z|=0$

$\Rightarrow a+bi+1+2i-(1+i)\sqrt{a^2+b^2}=0$

$\Leftrightarrow a-\sqrt{a^2+b^2}+1+i\cdot(b-\sqrt{a^2+b^2}+2)=0+0i$

$\Rightarrow \begin{cases} a-\sqrt{a^2+b^2}+1=0 \\ b-\sqrt{a^2+b^2}+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=a+1 \\ \sqrt{a^2+b^2}=b+2 \end{cases} \Rightarrow a+1=b+2 \Rightarrow b=a-1.$

Thay $b=a-1$ vào phương trình $a-\sqrt{a^2+b^2}+1=0$ ta được

$a-\sqrt{a^2+(a-1)^2}+1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2-2a+1}=a+1$

$\begin{cases} a+1\geq 0 \\ 2a^2-2a+1=a^2+2a+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ a^2-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right..$

Với $a=0 \Rightarrow b=0-1=-1$. Khi đó $\sqrt{a^2+b^2}=1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Với $a=4 \Rightarrow b=4-1=3$. Khi đó $\sqrt{a^2+b^2}=5>1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Suy ra $P=a+b=4+3=7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho z là số phức thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{z+3}{1-2i}+2\right|=1$ và w là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z-w|$ bằng

A. $5-\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Lời giải.

☑ Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $\left|\dfrac{z+3}{1-2i}+2\right|=1 \Leftrightarrow |z+5-4i|=|1-2i| \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=5$.

Do đó tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn z là đường tròn (C) tâm $I(-5;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

☑ Đặt $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có w là số thuần sảo $\Leftrightarrow x=0$.

Do đó tập hợp điểm $N(x;y)$ biểu diễn w là trục Oy: $x=0$.

☑ Ta có $|z-w|=MN$; $MN_{\min}=d(I,Oy)-R=5-\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Số phức $z=(1+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})^2+\cdots+(1+\mathrm{i})^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}-1$. **B.** $2^{1009}+1$. **C.** $1-2^{1009}$. **D.** $-2^{1009}-1$.

Lời giải.

Ta có

$z=(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{2018}=(1+i)\dfrac{(1+i)^{2018}-1}{(1+i)-1}=\dfrac{(1+i)^{2019}-1-i}{i}.$

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i \Rightarrow (1+i)^4=(2i)^2=-2^2$

$\Rightarrow (1+i)^{2019}=(1+i)^{4\cdot 504+3}=(1+i)^{4\cdot 504}\times(1+i)^2\times(1+i)=2^{1009}\cdot i\cdot(1+i).$

$\Rightarrow z=2^{1009}(1+i)-\dfrac{1}{i}-1=2^{1009}(1+i)+i-1=(2^{1009}-1)+(2^{1009}+1)i.$

Vậy phần ảo của z bằng $2^{1009}+1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho số phức $|z-1+2i|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=20$. **B.** $R=\sqrt{7}$. **C.** $R=2\sqrt{5}$. **D.** $R=7$.

Lời giải.

Ta gọi $w=x+yi$ khi đó $z=\dfrac{w-3+2i}{2-i}=\dfrac{2x-y-8}{5}+\dfrac{x+2y+1}{5}i$ từ đó

$$\begin{aligned}&|z-1+2i|=2\Rightarrow|2x-y-13+(x+2y+11)i|=10\\ \Rightarrow\ &(2x-y-13)^2+(x+2y+11)^2=100\\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2-6x+14y+38=0.\end{aligned}$$

Đây là phương trình đường tròn có $R=\sqrt{3^2+7^2-38}=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|(2+i)=z-1+i(2z+3)$. Tính $S=3a+5b$.

A. $S=-11$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

ta có

$$\begin{aligned}|z|(2+i)=z-1+i(2z+3)&\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}(2+i)=a+bi-1+(2a+2bi+3)i\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i=a-2b-1+(2a+b+3)i.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases}a-2b-1=2\sqrt{a^2+b^2}\\ 2a+b+3=\sqrt{a^2+b^2}.\end{cases}$

Giải hệ ta được $a=3$ và $b=-4$, từ đó suy ra $S=3a+5b=-11$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}\cdot[(3+4i)|z|-4+3i]-5\sqrt{2}=0$. Tính giá trị của $|\overline{z}|$.

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có, giả thiết $\Leftrightarrow(3+4i)|z|-4+3i=\dfrac{5\sqrt{2}}{\overline{z}}\Leftrightarrow(3|z|-4)+(4|z|+3)i=\dfrac{5\sqrt{2}}{\overline{z}}$

Lấy mô-đun hai vế, ta được $\sqrt{(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{|z|}$ mà $|z|=|\overline{z}|$, khi đó

$(3|z|-4)^2+(4|z|+3)^2=\dfrac{50}{|z|^2}$ đến đây có thể giải trực tiếp bằng cách đặt $t=|z|$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho số phức z thoả mãn $\left|z-|z|\right|=\sqrt{2}$. Biết rằng phần thực của z bằng a. Tính $|z|$ theo a.

A. $|z|=\dfrac{1}{a-1}$. **B.** $|z|=\dfrac{a-\sqrt{a^2+1}}{2}$. **C.** $|z|=\dfrac{a+\sqrt{a^2+1}}{2}$. **D.** $|z|=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned}
&\left|z-|z|\right| = \sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ &\left|z-|z|\right|^2 = 2\\
\Leftrightarrow\ &(z-|z|)\cdot\left(\overline{z-|z|}\right) = 2\\
\Leftrightarrow\ &(z-|z|)\cdot(\overline{z}-|z|) = 2\\
\Leftrightarrow\ &|z|^2 - a\cdot|z| - 1 = 0\\
\Rightarrow\ &|z| = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{\overline{z}+i}{z-1} = 2-i$. Tìm số phức $w = 1+z+z^2$.

A. $w = 5+2i$. **B.** $w = 5-2i$. **C.** $w = \dfrac{9}{2}+2i$. **D.** $w = \dfrac{9}{2}-2i$.

Lời giải.

Điều kiện $z \neq 1$.

Ta có $\dfrac{\overline{z}+i}{z-1} = 2-i \Leftrightarrow \overline{z}+i = (2-i)(z-1)$. (1)

Gọi $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow a-bi+i = (2-i)(a+bi-1)\\
&\Leftrightarrow a-bi+i = 2a+2bi-2-ai-bi^2+i\\
&\Leftrightarrow 2-a-b+(a-3b)i = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2-a-b=0\\ a-3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i.
\end{aligned}$$

Suy ra $w = 1+z+z^2 = 1+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^2 = \dfrac{9}{2}+2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{z-i}\right| = 3$ là đường nào?

A. Một đường thẳng. **B.** Một đường parabol.

C. Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Lời giải.

Cách 1: Giả sử $z = a+bi$ trong đó $(a, b \in \mathbb{R}, z \neq i)$.

Từ giả thiết ta có:

$$|z| = 3|z-i| \Leftrightarrow a^2+b^2 = 9a^2+9(b-1)^2 \Leftrightarrow 8a^2+8b^2-18b+9 = 0 \Leftrightarrow a^2+\left(b-\frac{9}{8}\right) = \frac{9}{64}.$$

Do đó tập hợp biểu diễn điểm z là một đường tròn.

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z, i trong mặt phẳng phức.

Khi đó $AO = |z|$ và $AB = |z-i|$.

Từ đề bài ta có $\dfrac{AO}{AB}=3$.

Như vậy, tập hợp điểm A là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng OB với tỉ số 3.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=|z_1|=|z_2|>0$. Tính $A=\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^4+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^4$.

A. 1. **B.** $1-i$. **C.** -1. **D.** $1+i$.

Lời giải.

Cách 1: Do $|z_1|=|z_2|>0$ nên $z_2, z_1\neq 0$.

Từ đẳng thức $|z_1-z_2|=|z_1|=|z_2|$, ta có $\left|\dfrac{z_1}{z_2}-1\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=1$.

Đặt $w=\dfrac{z_1}{z_2}$. Bài toán trở thành: Cho số phức w thỏa mãn $|w-1|=|w|=1$. Tính $A=w^4+\dfrac{1}{w^4}$.

Trong mặt phẳng phức, ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức w, 1.

Khi đó $|w|=OA, 1=OB, |w-1|=AB$. Suy ra $\triangle OAB$ là tam giác đều.

Do đó, w chỉ có thể là $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, ta luôn có $w\overline{w}=1$, $w+\overline{w}=1$ và $(w-\overline{w})^2=-3$.

Ta có

$$A=\left(w^2-\frac{1}{w^2}\right)^2+2=\left(w^2-\overline{w}^2\right)^2+2=(w-\overline{w})^2(w+\overline{w})^2+2=1^2\cdot(-3)+2=-1.$$

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng phức.

Khi đó $|z_1|=OA$, $|z_2|=OB$ và $|z_1-z_2|=AB$. Suy ra $\triangle OAB$ là tam giác đều.

Không mất tổng quát ta có thể giả sử $z_1=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ và $z_2=r(\cos\psi+i\sin\psi)$ trong đó $r>0$ và $\varphi-\psi=\dfrac{\pi}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}.\\ \frac{z_2}{z_1}&=\cos(\psi-\varphi)+i\sin(\psi-\varphi)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Vậy $A=\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^4+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^4=\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)+\left(\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong mặt phẳng phức, cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|\leq\sqrt{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|z+1|\leq\sqrt{2}$. **B.** $|z+i|\leq\sqrt{2}$. **C.** $|2z+1-i|\leq 2$. **D.** $|2z-1+i|\leq 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z-1+i|\leq\sqrt{2}$ là hình tròn (1) tâm $I(1;-2)$ bán kính $r=\sqrt{2}$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $|2z-1+i|\leq 3\sqrt{2}$ là hình tròn (2) có tâm $I_1\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $r_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Nhận thấy hình tròn (1) nằm trong hình tròn (2).

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0$ và $z_2^2 - 2z_1z_2 + 2z_1^2 = 0$. Tính $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$.

A. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{3}$. **B.** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 2\sqrt{2}$. **C.** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

$z_2^2 - 2z_1z_2 + 2z_1^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2 - 2\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1} = 1 \pm i \Rightarrow \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\left|\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}\right| = 1$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải.

- Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
- $\left|\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z^2 + \overline{z}^2|}{|z| \cdot |\overline{z}|} = 1 \Leftrightarrow |z^2 + \overline{z}^2| = 1 \Leftrightarrow |2(x^2 - y^2)| = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \pm\dfrac{1}{2}$.
- Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{3}{4}, y^2 = \dfrac{1}{2} \\ x^2 = \dfrac{1}{4}, y^2 = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, y = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{1}{2}, y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2}, y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$
- Vậy có 8 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho số phức z, biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z; iz$ và $z + iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Tính mô-đun của số phức z.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải.

Giả sử $z = a + bi$, với a, b là số thực. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, iz và $z + iz$.
Khi đó $M(a; b); N(-b; a); P(a - b; a + b)$.
Suy ra $MN = \sqrt{2\,(a^2 + b^2)}; NP = PM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Suy ra tam giác MNP vuông cân tại P.
Ta có $S_{\Delta MNP} = 18 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot NP \cdot PM = 18 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 36 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\overline{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 9. **B**. 8. **C**. 7. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có $(1-3i)z=(a+3b)+(b-3a)i$, $\overline{z}-2+5i=(a-2)+(5-b)i$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b-3a=0 \\ (a-2)^2+(5-b)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ 5a^2-17a+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{7}{5}\ (\text{loại}) \\ a=2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6. \end{cases}$$

Vậy $a+b=8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z-i|=4$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B**. $4\sqrt{2}$. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ với $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Khi đó $|2z-i|=4 \Leftrightarrow |2x+2yi-i|=4 \Leftrightarrow 4x^2+(2y-1)^2=16 \Leftrightarrow x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=4$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là một đường tròn có bán kính $R=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B**. $1-2\sqrt{3}i$. **C**. $-3-2\sqrt{3}i$. **D**. $1-\sqrt{3}i$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ và $a^2+b^2\neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \overline{z}-\frac{5-i\sqrt{3}}{z}-1=0 &\Leftrightarrow a-bi-\frac{5+i\sqrt{3}}{a+bi}-1=0 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2-5-i\sqrt{3}-a-bi=0 \\ &\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-a-5\right)-\left(b+\sqrt{3}\right)i=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a-5=0 \\ b+\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \\ b=-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=-\sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} z=-1-i\sqrt{3} \\ z=2-i\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1-i\sqrt{3};2-i\sqrt{3}\right\}$.

Khi đó tổng giá trị các phần tử của S là $1-2\sqrt{3}i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2+3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

A. 0. **B**. Vô số. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Đặt $z=x+iy,(x,y\in\mathbb{R})$. Điều kiện $z\neq 2$

Ta có $|z+2+3i|=5\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=25\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+6y=12.$ (1)

$\dfrac{z}{z-2}=\dfrac{x+yi}{x-2+yi}=\dfrac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}+\dfrac{-2yi}{(x-2)^2+y^2}.$

Vì z là số thuần ảo nên $\dfrac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x+y=2\Rightarrow y=2-x$. Thay vào (1) ta được $x^2-6x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$

Với $x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow z=1+i$.

Với $x=2\Rightarrow y=0\Rightarrow z=2$ (loại).

Vậy có một số phức z thỏa mãn đề.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2+3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo.

A. 0. **B**. vô số. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Xét số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Điều kiện $z\neq 2$.

Ta có $|z+2+3i|=5\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=25\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+6y=12.$ (1)

Ta có $\dfrac{z}{z-2}=\dfrac{x+yi}{x-2+yi}=\dfrac{(x+yi)(x-2-yi)}{(x-2)^2+y^2}=\dfrac{x^2-2x+y^2-2yi}{(x-2)^2+y^2}.$

Vì $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo nên $x^2-2x+y^2=0$ (2)

Từ (1) và (2) có $x+y=2\Rightarrow y=2-x$. Thay vào (1) được $2x^2-6x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Với $x=1$ ta có $y=1$, từ đó có $z=1+i$.

Với $x=2$ ta có $y=0$, từ đó có $z=2$ (loại).

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$. Tính tổng tất cả các phần tử của S

A. $1-2\sqrt{3}i$. **B**. $-3-2\sqrt{3}i$. **C**. 1. **D**. $1-i\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\quad(a,b\in\mathbb{R})$.

$\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0\Leftrightarrow a^2+b^2-a-bi=5+i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2-a=5\\b=-\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-a-2=0\\b=-\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right.\\b=-\sqrt{3}\end{cases}$

Vậy $z_1=-1-i\sqrt{3}$ và $z_2=2-i\sqrt{3}$.

Suy ra $z_1+z_2=1-2\sqrt{3}i$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $|z+i|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(3+4i)z+2+i$ là một đường tròn tâm I. Điểm I có tọa độ là

A. $(6;-2)$. **B.** $(6;2)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có

$$w=(3+4i)z+2+i \Leftrightarrow z=\frac{w-2-i}{3+4i} \Leftrightarrow z+i=\frac{w-2-i}{3+4i}+i=\frac{w-6+2i}{3+4i}.$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|z+i|=\left|\frac{w-6+2i}{3+4i}\right| \Leftrightarrow 1=\frac{|w-6+2i|}{|3+4i|} \Leftrightarrow |w-6+2i|=5.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(6;-2)$, bán kính $r=5$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 60. Cho số phức z thỏa điều kiện $|z|=10$ và $w=(6+8i)\cdot\overline{z}+(1-2i)^2$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm là

A. $I(-3;-4)$. **B.** $I(3;4)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(6;8)$.

Lời giải.

Chú ý: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa $|z-(a+bi)|=R$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R.

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$w+3+4i=(6+8i)\cdot\overline{z} \Rightarrow |w-(-3-4i)|=|6+8i|\cdot|\overline{z}|=10\cdot 10=100.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm là $I(-3;-4)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 61. Cho số thực $a>2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+a=0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. z_1+z_2 là số thực. **B.** z_1-z_2 là số ảo. **C.** $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ là số ảo. **D.** $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ là số thực.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2-2z+a=0$ có $\Delta'=1-a<0$, $\forall a>2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là: $z_1=1+\sqrt{a-1}i$, $z_2=1-\sqrt{a-1}i$. Khi đó ta có

- ☑ $z_1+z_2=1+\sqrt{a-1}i+1-\sqrt{a-1}i=2$ là số thực.
- ☑ $z_1-z_2=1+\sqrt{a-1}i-1+\sqrt{a-1}i=2\sqrt{a-1}i$ là số ảo $\forall a>2$.
- ☑ $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+\sqrt{a-1}i}{1-\sqrt{a-1}i}+\frac{1-\sqrt{a-1}i}{1+\sqrt{a-1}i}=\frac{4-2a}{a}$ là một số thực, $\forall a>2$.

Vậy mệnh đề "$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ là số ảo" là **sai**.

Chọn đáp án C ☐

Câu 62. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$ và $|z_1-z_2|=2$. Tính $|z_1+z_2|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 4 \Rightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2.$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 8.$$

Vậy $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \left(1 + i\sqrt{8}\right) z + i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 3. **B**. 6. **C**. 9. **D**. 36.

Lời giải.

Ta có $w = \left(1 + i\sqrt{8}\right) z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w - i}{1 + i\sqrt{8}} \Leftrightarrow z + 1 = \dfrac{w + 1 + \left(\sqrt{8} - 1\right) i}{1 + i\sqrt{8}}$.

Vì $|z + 1| = 2$ nên $\left|\dfrac{w + 1 + \left(\sqrt{8} - 1\right) i}{1 + i\sqrt{8}}\right| = |z + 1| \Leftrightarrow \left|w + 1 + \left(\sqrt{8} - 1\right) i\right| = 6.$ $(*)$

Đặt $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Thay vào $(*)$ ta được

$$\left|x + yi + 1 + \left(\sqrt{8} - 1\right) i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|(x + 1) + \left(y + \sqrt{8} - 1\right) i\right| = 6 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + \left(y + \sqrt{8} - 1\right)^2 = 36.$$

Vậy $r = 6$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\overline{z} + 3i + 1)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B**. 0. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

- ☑ Đặt $z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy$.
- ☑ Số phức $(z + 3 - i)(\overline{z} + 3i + 1) = [x + 3 + (y - 1)i]\,[x + 1 + (3 - y)i]$ có phần ảo là $(x + 3)(3 - y) + (y - 1)(x + 1)$.
- ☑ Theo đề $(z + 3 - i)(\overline{z} + 3i + 1)$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$$(x + 3)(3 - y) + (y - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$$

- ☑ Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $(\Delta)\colon x - y - 4 = 0$.
- ☑ Vậy $d[O; \Delta] = \dfrac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình có diện tích.

A. $S = 25\pi$. **B**. $S = 16\pi$. **C**. $S = 9\pi$. **D**. $S = 36\pi$.

Lời giải.

Giả sử $w = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.
$w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \dfrac{x - 1 + (y + 1)i}{2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} |z - 2 + 3i| \le 3 &\Leftrightarrow \left|\frac{x - 1 + (y + 1)i}{2} - 2 + 3i\right| \le 3 \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{x - 5 + (y + 7)i}{2}\right| \le 3 \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 7)^2 \le 36. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn có bán kính $R = 6$.
Diện tích hình tròn $S = 36\pi$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\dfrac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo.

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $z \ne 4$.
Vì $\dfrac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo nên $\dfrac{z}{z - 4} = ai$ với $a \in \mathbb{R}$, suy ra $z = \dfrac{4ai}{-1 + ai}$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z - 3i| = 5 &\Leftrightarrow \left|\frac{4ai}{-1 + ai} - 3i\right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{3a + (3 + 4a)i}{-1 + ai}\right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{9a^2 + (3 + 4a)^2}{1 + a^2} = 25 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất số phức z thỏa mãn bài ra.
Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, $z_1 + z_2$. Xét các mệnh đề sau

a) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{array}\right.$;

b) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

c) Nếu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ thì $z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} = 0$;

d) $OC^2 + AB^2 = 2\,(OA^2 + OB^2)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Gọi $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$, ta có

☑ $|z_1| = |z_2| = r \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = r^2 \Rightarrow A, B$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính r, do đó mệnh đề 1) sai.

☑ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2;y_1+y_2)=\overrightarrow{OC}$, suy ra $OACB$ là hình bình hành, khi đó $|z_1+z_2|\le |z_1|+|z_2|=OC\le OA+AC=OA+OB=|z_1|+|z_2|$, do đó mệnh đề 2) đúng.

☑ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$, khi đó $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)+(x_1-y_1i)(x_2+y_2i)=2(x_1x_2+y_1y_2)=0$, suy ra mệnh đề 3) đúng.

☑ $OC^2+AB^2=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y$ $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=2(OA^2+OB^2)$, do đó mệnh đề 4) đúng.

Vậy có 3 mệnh đề đúng trong các mệnh đề đã cho.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Cho số phức z có mô-đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

☑ Ta có $z=\dfrac{w+i}{1-i}-1=\dfrac{w-1+2i}{1-i}$.

☑ Mà $|z|=2\sqrt{2}\Rightarrow\left|\dfrac{w-1+2i}{1-i}\right|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|w-1+2i|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

☑ Ta có

$$\begin{aligned}|w-1+2i|=4 &\Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=4\ (w=x+yi,x,y\in\mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=4\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=16.\end{aligned}$$

☑ Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=4$. Suy ra $a+b+R=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau đồng thời thỏa mãn $\dfrac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Tính mô đun của số phức z_1.

A. $|z_1|=3$. **B.** $|z_1|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $|z_1|=2$. **D.** $|z_1|=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z_1=a+bi$, với $(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow z_2=a-bi$.

Ta có $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}\Rightarrow|b|=\sqrt{3}$.

Ta có $\dfrac{z_1}{z_2^2}=\dfrac{a+bi}{a^2-b^2-2abi}=\dfrac{(a+bi)(a^2-b^2+2abi)}{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}\in\mathbb{R}$.

Suy ra $2a^2b+b(a^2-b^2)=0\Leftrightarrow 3a^2=b^2\Rightarrow a^2=1$.

Vậy $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và $y>0$.

Từ

$$|z-1|=5\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=25\Leftrightarrow x^2+y^2-2x=24. \qquad (1)$$

Từ
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{5}{17}\Leftrightarrow\frac{\overline{z}}{|z|^2}+\frac{z}{|z|^2}=\frac{5}{17}\Leftrightarrow 2x=\frac{5}{17}\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{34}{5}x=0. \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được $x=5,\ y=3$. Vậy $x+y=8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Tìm phần thực của số phức z, biết $z+\dfrac{|z|^2}{z}=10$.

A. 20. **B**. 10. **C**. 5. **D**. 15.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\neq 0\ (a,b\in\mathbb{R})$, ta có

$$\begin{aligned} z+\frac{|z|^2}{z}=10 &\Leftrightarrow z^2+|z|^2=10z\\ &\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi+a^2+b^2=10a+10bi\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-10a=0\\2ab=10b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy z có phần thực bằng 5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Cho số phức z thỏa $\dfrac{z}{\overline{z^2}}$ là số thực, $|z-\bar{z}|=3\sqrt{2}$. Tính $|z|$.

A. $|z|=3\sqrt{2}$. **B**. $|z|=\sqrt{6}$. **C**. $|z|=2\sqrt{3}$. **D**. $|z|=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi,\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-\bar{z}|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow|2yi|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow|y|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Khi đó, $\dfrac{z}{\overline{z^2}}=\dfrac{x+yi}{x^2-y^2-2xyi}=\dfrac{(x+yi)(x^2-y^2+2xyi)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\dfrac{x^3-3xy^2-(y^3-3x^2y)i}{(x^2+y^2)^2}$.

Vì $\dfrac{z}{\overline{z^2}}$ là số thực nên

$$y^3-3x^2y=0\Rightarrow y^2-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{y^2}{3}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}}=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+4i}{z-4i}$ là một số thực dương.

A. Trục Oy bỏ đi đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

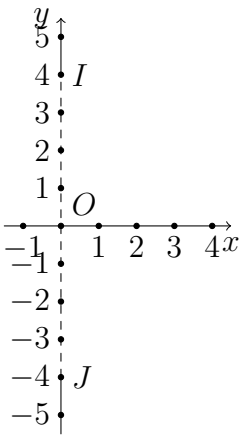
B. Trục Oy bỏ đi đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $2i$, J là điểm biểu diễn $-2i$).

C. Đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

D. Trục Ox bỏ đi đoạn nối IJ (với I là điểm biểu diễn 4, J là điểm biểu diễn -4).

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta có



$$\begin{aligned}\frac{z+4i}{z-4i}&=\frac{x+yi+4i}{x+iy-4i}=\frac{x+(y+4)i}{x+(y-4)i}\\&=\frac{[x+(y+4)i]\,[x-(y-4)i]}{[x+(y-4)i]\,[x-(y-4)i]}\\&=\frac{x^2-x(y-4)i+x(y+4)i+(y+4)(y-4)}{x^2+(y-4)^2}\\&=\frac{x^2+y^2-16}{x^2+(y-4)^2}+\frac{8x}{x^2+(y-4)^2}i.\end{aligned}$$

Để $\dfrac{z+4i}{z-4i}$ là một số thực dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=0\\x^2+y^2-16>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y^2-16>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\\left[\begin{aligned}&y<-4\\&y>4\end{aligned}\right.\end{cases}.$$

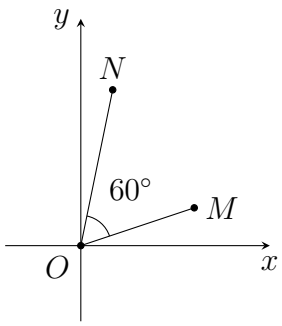
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là trục Oy bỏ đi đoạn IJ (với I là điểm biểu diễn $4i$, J là điểm biểu diễn $-4i$).

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$ và chúng được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M,N. Biết góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ bằng 60°. Tìm môđun của số phức $z=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$.

A. $|z|=\sqrt{3}$. **B.** $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $|z|=\dfrac{\sqrt{481}}{13}$. **D.** $|z|=4\sqrt{3}$.

Lời giải.



Đặt $z_1=3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_2=4(\cos(\varphi\pm60^\circ)+i\sin(\varphi\pm60^\circ))$, ta có

$$z=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\frac{1+\dfrac{z_2}{z_1}}{1-\dfrac{z_2}{z_1}}=\frac{1+\dfrac{4}{3}(\cos60^\circ\pm i\sin60^\circ)}{1-\dfrac{4}{3}(\cos60^\circ\pm i\sin60^\circ)}=\frac{1+\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{5\pm2i\sqrt{3}}{1\mp2i\sqrt{3}}$$

Suy ra $|z|=\dfrac{\sqrt{481}}{13}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1+z_2+z_3|<|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$. **B.** $|z_1+z_2+z_3|\neq|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

C. $|z_1+z_2+z_3|>|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$. **D.** $|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| &= |z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3\left|\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}+\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}+\frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}\right| \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3\left|\frac{\overline{z_1}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\frac{\overline{z_2}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\frac{\overline{z_3}}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}\right| \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}|\overline{z_1+z_2+z_3}| \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}|z_1+z_2+z_3| = 0 = |z_1+z_2+z_3|.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{2\overline{z}-z+3i}{z+i}\right|=3$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là

A. Một Parabol. **B.** Một đường thẳng. **C.** Một đường tròn. **D.** Một Elip.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi\in\mathbb{C}$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2\overline{z}-z+3i}{z+i}\right|=3 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{|2\overline{z}-z+3i|}{|z+i|}=3 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{|2(a-bi)-(a+bi)+3i|}{|a+bi+i|}=3 \\
\Leftrightarrow\ &|2(a-bi)-(a+bi)+3i|=3|a+bi+i| \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{a^2+(3-3b)^2}=3\sqrt{a^2+(b+1)^2} \\
\Leftrightarrow\ &8a^2-36b=0 \\
\Leftrightarrow\ &b=\frac{2}{9}a^2
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là một Parabol.

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Cho số phức $z=\dfrac{m+1}{1+m(2i-1)}, (m\in\mathbb{R})$. Tìm các giá trị nguyên của m để $|z-i|<1$ là

A. 0. **B**. 1. **C**. 4. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $z-i=\dfrac{m+1}{1+m(2i-1)}-i=\dfrac{3m+1+(m-1)i}{1+2mi-m}$.

Theo giả thiết có

$$\begin{aligned}|z-i|<1 &\Leftrightarrow \frac{3m+1+(m-1)i}{1+2mi-m}<1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(3m+1)^2+(m-1)^2}<\sqrt{(1-m)^2+(2m)^2}\\ &\Leftrightarrow 5m^2+6m+1<0\\ &\Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho số phức $z=1-i$ và $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $|\overline{z}|<2$. **B**. $\dfrac{z^3}{\overline{z}^3}=i$. **C**. z^2 là số thuần ảo. **D**. $\overline{z}^4$ là số thuần ảo.

Lời giải.

Ta có $\overline{z}^4=(1+i)^4=((1+i)^2)^2=(2i)^2=-4$ không phải số thuần ảo. Do đó mệnh đề $\overline{z}^4$ *là số thuần ảo* sai.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\dfrac{|z|^2}{z}+2iz+\dfrac{2(z+i)}{1-i}=0$. Tính $P=\dfrac{a}{b}$.

A. $P=\dfrac{3}{5}$. **B**. $P=\dfrac{1}{5}$. **C**. $P=5$. **D**. $P=-\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Vì $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ nên

$$\begin{aligned}&\frac{|z|^2}{z}+2iz+\frac{2(z+i)}{1-i}=0\\ \Leftrightarrow\ &\bar{z}+2iz+\frac{2(z+i)}{1-i}=0\\ \Leftrightarrow\ &a-bi+2i(a+bi)+\frac{2(a+bi+i)(1+i)}{2}=0\\ \Leftrightarrow\ &(2a-3b-1)+(3a+1)i=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}2a-3b-1=0\\ 3a+1=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{5}{9}.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $P=\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $az^2+z+\dfrac{1}{a}=0$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$. Biết $|z_1|+|z_2|=2$, khi đó a nhận giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
&az^2+z+\frac{1}{a}=0\Leftrightarrow a^2z^2+az+1=0\\
\Leftrightarrow&\left(az+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&az+\frac{1}{2}=\frac{i\sqrt{3}}{2}\\&az+\frac{1}{2}=-\frac{i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=\frac{1}{2a}\left(-1+i\sqrt{3}\right).\\&z=-\frac{1}{2a}\left(1+i\sqrt{3}\right).\end{aligned}\right.\quad(1)
\end{aligned}$$

Vì $|z_1|+|z_2|=2$ nên từ (1) suy ra $\dfrac{1}{2a}(2+2)=2\Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó, từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned}
&z+2+i-|z|(1+i)=0\\
\Leftrightarrow\ &a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\\b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\\b=a+1\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+(a+1)^2}\\b=a+1\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a\geq-2\\(a+2)^2=a^2+(a+1)^2\\b=a+1\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a\geq-2\\a^2-2a-3=0\\b=a+1\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=-1,b=0\\a=3,b=4.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)|z| = \dfrac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn tâm I, bán kính R. Khi đó

A. $I(-1;-2), R = \sqrt{5}$. **B**. $I(1;2), R = \sqrt{5}$. **C**. $I(-1;2), R = 5$. **D**. $I(1;-2), R = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2+i)|z| = \frac{\sqrt{17}}{z} + 1 - 3i &\Leftrightarrow (2|z|-1) + (|z|+3)i = \frac{\sqrt{17}}{z}\\ &\Rightarrow |(2|z|-1) + (|z|+3)i| = \left|\frac{\sqrt{17}}{z}\right|\\ &\Rightarrow \sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+3)^2} = \frac{\sqrt{17}}{|z|}\\ &\Rightarrow 5|z|^2 + 2|z| + 10 = \frac{17}{|z|^2}\\ &\Rightarrow 5|z|^4 + 2|z|^3 + 10|z|^2 - 17 = 0 \quad (*).\end{aligned}$$

Đặt $x = |z|, x > 0$. Xét hàm số $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 17$ với $x > 0$.
Có $f'(x) = 20x^3 + 6x^2 + 20x > 0, \forall x > 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, mà $f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$ trên khoảng $(0;+\infty)$.
Do vậy phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $|z| = 1$.

$$\begin{aligned}w = (3-4i)z - 1 + 2i &\Leftrightarrow w + 1 - 2i = (3-4i)z\\ &\Rightarrow |w + 1 - 2i| = |(3-4i)z| = 5\end{aligned}$$

Do đó, tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = 5$.
Chọn đáp án C □

Câu 83. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

A. Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = \pm 1, y = \pm 1$.
B. Trục Ox.
C. Đường tròn $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
D. Hai đường thẳng $y = \pm 1$, trừ điểm $(0;-1)$.

Lời giải.

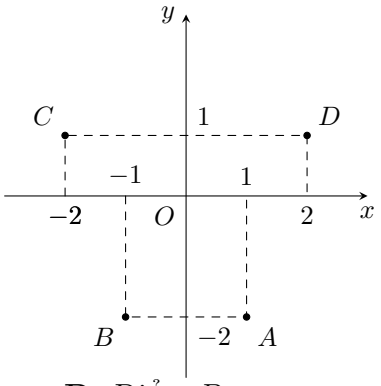
Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn bài toán.
Khi đó, điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng Oxy.
Điều kiện $z \neq -i$ suy ra $M(x;y) \neq (0;-1)$.
Khi đó,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{|z-i|}{|z+i|} = 1\\ \Leftrightarrow\ &|z-i| = |z+i|\\ \Leftrightarrow\ &|x + yi - i| = |x + yi + i|\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Vì điểm $(0;-1) \notin Ox$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục Ox.
Chọn đáp án B □

Câu 84.
Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z-(2+3i)\overline{z} = 1-9i$. Số phức $w = \dfrac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm A, B, C, D ở hình bên?



A. Điểm C. **B**. Điểm A. **C**. Điểm D. **D**. Điểm B.

Lời giải.

Giả sử $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Theo đề bài ta có

$$a+bi-(2+3i)(a-bi) = 1-9i \Leftrightarrow -a-3b+(3b-3a)i = 1-9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a-3b = 1 \\ 3b-3a = -9. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 2, b = -1$. Suy ra $w = \dfrac{5}{i(2-i)} = 1-2i$.
Vậy điểm biểu diễn số phức w là điểm $A(1;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho số phức $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực dương và thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i) = 0$. Tính $P = a+b$.

A. $P = 7$. **B**. $P = -1$. **C**. $P = -5$. **D**. $P = 3$.

Lời giải.

Đặt $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a > 0)$. Theo đề ta có

$$a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = b+1 \\ b+1 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b-1 > 0 \\ (b+1)^2 = (b-1)^2+b^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ b > 1 \\ b^2-4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 4, a = 3.$$

Vậy $P = 7$.
Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)z-\dfrac{4}{|z|}=8$. Tính $|z|$.

A. $|z|=2\sqrt{2}$. **B.** $|z|=\dfrac{1}{2}$. **C.** $|z|=\sqrt{2}$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải.

Ta biến đổi giả thiết về $(3-4i)z=8+\dfrac{4}{|z|}$.

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} & |(3-4i)z|=\left|8+\frac{4}{|z|}\right| \\ \Leftrightarrow\ & |3-4i|\cdot|z|=8+\frac{4}{|z|} \\ \Leftrightarrow\ & 5|z|=8+\frac{4}{|z|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z|=2 & \text{(Thỏa mãn)} \\ |z|=-\dfrac{2}{5} & \text{(Loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

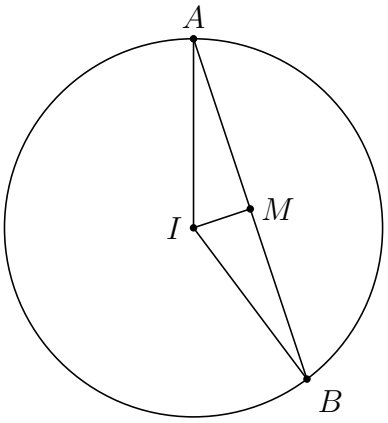
Câu 87. Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

C. $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{16}{9}$. **D.** $(x+10)^2+(y-6)^2=16$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2, I là điểm biểu diễn số phức $5+3i$.



Từ giả thiết ta có $IA=IB=5$ và $AB=8$. Vậy AB là một dây cung có độ dài bằng 8 của đường tròn tâm I, bán kính $R=5$.

Ta có

$$w=z_1+z_2 \Leftrightarrow w-10-6i=(z_1-5-3i)+(z_2-5-3i).$$

Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|w-10-6i|=|(z_1-5-3i)+(z_2-5-3i)|=|\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}|.$$

Ta gọi M là trung điểm của AB, khi đó $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{MI}$.

Vậy

$$|w-10-6i|=2MI=2\sqrt{IA^2-AM^2}=2\sqrt{5^2-4^2}=6.$$

Từ đó suy ra quỹ tích điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $(10;6)$ và bán kính bằng 6.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\dfrac{|z|^2}{z}+2iz+\dfrac{2(z+i)}{1-i}=0$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$.

A. 5. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** -5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{|z|^2}{z}+2iz+\frac{2(z+i)}{1-i}=0 &\Leftrightarrow \frac{z\cdot\overline{z}}{z}+2iz+\frac{2(z+i)(1+i)}{2}\\ &\Leftrightarrow \overline{z}+2iz+z+iz+i-1=0\\ &\Leftrightarrow (\overline{z}+z)+3iz+i-1=0\\ &\Leftrightarrow (2a-3b-1)+(3a+1)i=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2a-3b=1\\ 3a+1=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{5}{9}.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tỉ số $\dfrac{a}{b}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{9}}=\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=1$, $|z_1-z_2|=2$ và $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<|z_1|<3$. **B.** $3<|z_1|<4$. **C.** $4<|z_1|<6$. **D.** $1<|z_1|<2$.

Lời giải.

Ta có $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=5\Rightarrow |z_1|^2+|z_2|^2=\dfrac{5}{2}$.

Mà $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=4\Leftrightarrow |z_1|=4\,|z_2|\Leftrightarrow |z_1|^2=16\,|z_2|^2$.

Vậy ta có $\begin{cases}|z_1|^2+|z_2|^2=\dfrac{5}{2}\\ |z_1|^2=16\,|z_2|^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}|z_1|^2=\dfrac{40}{17}\\ |z_2|^2=\dfrac{5}{34}\end{cases}\Rightarrow |z_1|=2\sqrt{\dfrac{10}{17}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Cho số phức z có môđun bằng 1 và có phần thực bằng a.
Tính biểu thức $z^3+\dfrac{1}{z^3}$ theo a.

A. $8a^3-3a$. **B.** $8a^3-6a$. **C.** a^3+6a. **D.** a^3+3a.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi$, ta có $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=1\Leftrightarrow a^2+b^2=1\Leftrightarrow b^2=1-a^2$.

Ta có

$$\begin{aligned}z^3+\frac{1}{z^3} &= z^3+\frac{\overline{z}^3}{z^3\cdot\overline{z}^3}=z^3+\overline{z}^3\\ &= (a+bi)^3+(a-bi)^3=8a^3-6a.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 91. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2+3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

A. 2. **B**. vô số. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Điều kiện $z\neq 2$.

Ta có $|z+2+3i|=5\Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2=25$ (1)

Và $\dfrac{z}{z-2}=\dfrac{a+bi}{a-2+bi}=\dfrac{(a+bi)(a-2-bi)}{(a-2)^2+b^2}=\dfrac{a^2-2a+b^2+2bi}{(a-2)^2+b^2}=\dfrac{a^2-2a+b^2}{(a-2)^2+b^2}+\dfrac{2bi}{(a-2)^2+b^2}$ là số thuần ảo nên có $a^2-2a+b^2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2=25\\ a^2-2a+b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+4a+6b-12=0\\ a^2+b^2-2a=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-2a=0\\ 6a+6b-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(2-a)^2-2a=0\\ b=2-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=2\end{array}\right.\\ b=2-a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=2\\ b=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$ ta được $z=1+i$ thỏa mãn.

Với $\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$ ta được $z=2$ không thỏa mãn điều kiện, loại.

Vậy có 1 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 92. Tích phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $\dfrac{2|z|^2}{\overline{z}}+iz+\dfrac{z-i}{1-i}=-1+2i$ là

A. 1. **B**. 0. **C**. $-\sqrt{3}$. **D**. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$\begin{aligned}&2z+iz+\frac{z}{1-i}=\frac{i}{1-i}-1+2i\\ \Leftrightarrow\ &z\left(2+i+\frac{1}{1-i}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\Leftrightarrow z\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i\right)i\Leftrightarrow z=i.\end{aligned}$$

Vậy $z=i$, suy ra tích phần thực và phần ảo bằng $0\cdot 1=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng

A. 5. **B**. 7. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $w=(1-i)(z+1)-i\Leftrightarrow w+i=(1-i)z+1-i\Leftrightarrow w-(1-2i)=(1-i)z$.

Do đó

$$|w-(1-2i)|=|(1-i)z|=|1-i|\cdot|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot 2\sqrt{2}=4.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức w là đường tròn có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=4$. Do đó $a+b+R=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{5}{17}$ và z có phần ảo dương. Tìm tổng phần thực và phần ảo của z là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R};b>0)$. Từ giả thiết ta có

$$|z-1|=5\Leftrightarrow|a-1+bi|=5\Leftrightarrow(a-1)^2+b^2=25\Leftrightarrow a^2+b^2-2a=24\Leftrightarrow 5a^2+5b^2-10a=120 \quad (1)$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{5}{17}\Leftrightarrow 17\left(z+\overline{z}\right)=5z\cdot\overline{z}\Leftrightarrow 17(2a)=5(a^2+b^2)\Leftrightarrow 5a^2+5b^2-34a=0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $24a=120\Leftrightarrow a=5$.

Thay vào phương trình (2) ta được $125+5b^2-170=0\Leftrightarrow b^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\b=-3.\end{array}\right.$

Vì z có phần ảo dương nên $b=3$. Vậy $a+b=8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau đồng thời thỏa mãn $\dfrac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Tính mô-đun của số phức z_1.

A. $|z_1|=3$. **B.** $|z_1|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $|z_1|=2$. **D.** $|z_1|=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z_1=a+bi$ trong đó $a,\,b\in\mathbb{R}$.

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_2=a-bi$.

Ta có $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow|2bi|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow b^2=3$.

Lại có $\dfrac{z_1}{z_2^2}=\dfrac{a+bi}{(a-bi)^2}=\dfrac{(a+bi)^3}{(a-bi)^2(a+bi)^2}=\dfrac{a^3-3ab^2}{(a^2+b^2)^2}+\dfrac{b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}i$

do $\dfrac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ nên $\left\{\begin{array}{l}b(3a^2-b^2)=0\\a\neq 0,\ b\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}b=0\\b^2=3a^2\end{array}\right.\\a\neq 0,\ b\neq 0\end{array}\right.$ mà theo trên ta có $b^2=3\Rightarrow a^2=1$.

Khi đó $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính mô-đun của số phức $z+i$.

A. $|z+i|=\sqrt{61}$. **B.** $|z+i|=5\sqrt{2}$. **C.** $|z+i|=3\sqrt{5}$. **D.** $|z+i|=2\sqrt{41}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Tập hợp điểm P biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $(3;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Theo giả thiết ta có

$M=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-[x^2+(y-1)^2]=4x+2y+3\Rightarrow 4x+2y+3-M=0(d)$

Cần tìm điều kiện của M để đường thẳng (d) và (C) có điểm chung, tức là

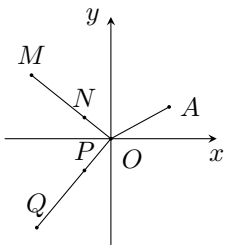
$\mathrm{d}(I,(P)) \leqslant R \Leftrightarrow \dfrac{|4\cdot 3+2\cdot 4+3-M|}{\sqrt{4^2+2^2}} \leqslant \sqrt{5} \Leftrightarrow |23-M| \leqslant 10 \Rightarrow -10 \leqslant 23-M \leqslant 10 \Rightarrow 13 \leqslant M \leqslant 33$.

M đạt max khi $\begin{cases} 4x+2y-30=0 \\ (x-3)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Rightarrow x=5; y=-5 \Rightarrow |z+i|=|5-5i+i|=\sqrt{61}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 97. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Biết điểm A trong hình dưới đây biểu diễn số phức z. Hỏi điểm nào trong hình bên biểu diễn số phức $w=\dfrac{1}{iz}$.

A. Điểm M. **B**. Điểm N. **C**. Điểm P. **D**. Điểm Q.



Lời giải.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Dựa vào điểm A ta có $x>y>0$.

$|w|=\left|\dfrac{1}{iz}\right|=\dfrac{1}{1\cdot|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<OA \Rightarrow$ chỉ có thể nhận hai điểm N, P.

$w=\dfrac{1}{iz}=\dfrac{1}{i(x+yi)}=\dfrac{1}{-(y-xi)}=\dfrac{-(y+xi)}{y^2+x^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}+\dfrac{-x}{x^2+y^2}i$.

Phần thực và phần ảo của w đều âm nên điểm P thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi\,(\forall a,b\in\mathbb{R})$ thỏa điều kiện đề bài

$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=(a^2-b^2)+(2ab)i$.

z^2 là số thuần ảo $\Leftrightarrow a^2-b^2=0 \Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow |a|=|b|$.

$$\begin{aligned} & |z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}| \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=|(a+bi)+(a-bi)|+|(a+bi)-(a-bi)| \\ \Leftrightarrow\ & a^2+b^2=2|a|+2|b|. \end{aligned}$$

Mà $|a|=|b| \Rightarrow a^2+a^2=2|a|+2|a| \Leftrightarrow a^2=2|a|$. (1)

Trường hợp 1: $a\geqslant 0$.

$(1) \Leftrightarrow a^2=2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\Rightarrow b^2=0\Rightarrow b=0 \\ a=2\Rightarrow b^2=4\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-2. \end{array}\right. \end{array}\right.$ (*)

Trường hợp 2: $a\leqslant 0$.

$(1) \Leftrightarrow a^2=-2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\Rightarrow b^2=0\Rightarrow b=0 \\ a=-2\Rightarrow b^2=4\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-2. \end{array}\right. \end{array}\right.$ (**)

Từ $(*)$ và $(**) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2+2i \\ z=2-2i \\ z=-2+2i \\ z=-2-2i \end{array}\right.$. Vậy có 5 số phức z thỏa mãn điều kiện đề bài.

Chọn đáp án D ☐

Câu 99. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{16}$ và $\dfrac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H).

A. $S=256$. **B.** $S=64\pi$. **C.** $S=16(4-\pi)$. **D.** $S=32(6-\pi)$.

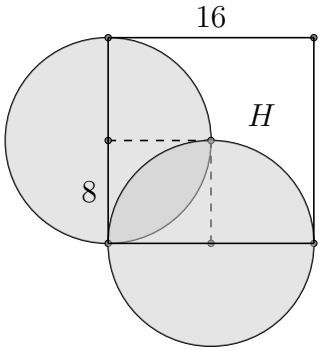
Lời giải.

Giả sử số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Vì $\dfrac{z}{16}$ có phần thực và phần ảo thuộc $[0;1]$ nên $0\le a;b\le 16$.

Vì $\dfrac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo thuộc $[0;1]$ nên $0\le \dfrac{16a}{a^2+b^2};\dfrac{16b}{a^2+b^2}\le 1$.

Từ đây ta rút ra hệ thức: $\begin{cases} 16a\le a^2+b^2 \\ 16b\le a^2+b^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} (a-4)^2+b^2\ge 0 \\ a^2+(b-4)^2\ge 0 \end{cases}$.



Suy ra, miền (H), miền biểu diễn số phức z là miền mà sau khi lấy hình vuông bỏ đi hai nửa hình tròn như hình vẽ bên.

Ta có $S_H=16\cdot 16-8\cdot 8-\dfrac{1}{2}\cdot 64\pi=192-32\pi=32(6-\pi)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 100. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải.

Từ $z\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$ lấy liên hợp hai vế ta được $z\overline{z}-12|z|+(\overline{z}-z)=13+10i$ $(*)$.

Khi đó $2|z|^2-24|z|-26=0\Rightarrow |z|=13$.

Từ (*) ta có $z-\overline{z}=-10i\Rightarrow b=-5\Rightarrow a=12\Rightarrow S=7$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 101. Cho z và w là hai số phức liên hợp thỏa mãn $\dfrac{z}{w^2}$ là số thực và $|z-w|=2\sqrt{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|z|<1$. **B.** $3<|z|<4$. **C.** $|z|>4$. **D.** $1<|z|<3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $z=\overline{w},\overline{z}=w$ và $|z|=|w|$.

Từ $|z-w|=2\Leftrightarrow (z-w)(\overline{z}-\overline{w})=4\Leftrightarrow |z|^2+|w|^2-z\overline{w}-\overline{z}w=4\Leftrightarrow 2|z|^2-z^2-\overline{z}^2=4$ $(*)$.

Do $\dfrac{z}{w^2}$ là số thực nên $\dfrac{z}{w^2}=\overline{\dfrac{z}{w^2}}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}^2}$. Từ đó suy ra $\dfrac{z}{w^2}=\dfrac{w}{z^2}$, hay

$$z^3=w^3\Leftrightarrow (z-w)(z^2-zw+w^2)=0.$$

Vậy $z^2+w^2=zw=|z|^2$. Thay vào $(*)$ ta có

$$|z|^2=4\Leftrightarrow |z|=2.$$

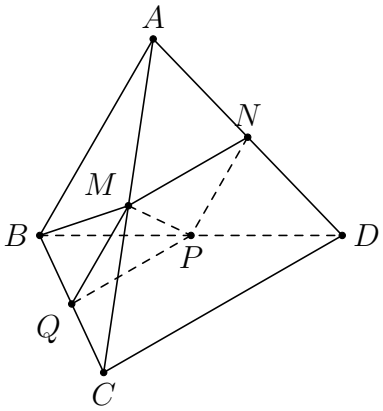
Chọn đáp án D □

Câu 102. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

A. $\dfrac{V}{6}$. **B.** $\dfrac{V}{3}$. **C.** $\dfrac{V}{4}$. **D.** $\dfrac{V\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{AMNPQ}=2V_{APMQ}$ (do $MNPQ$ là hình thoi), $AB\parallel MQ$
$\Rightarrow V_{APMQ}=V_{BPMQ}$.
Mặt khác do P là trung điểm của BD nên $\mathrm{d}(P,(ABC))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D,(ABC))$, đồng thời $S_{BQM}=\dfrac{1}{4}S_{ABC}$.



$$\begin{aligned}\Rightarrow V_{BPMQ} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(P,(ABC))\cdot S_{BQM}=\frac{1}{6}\mathrm{d}(D,(ABC))\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}(D,(ABC))\cdot S_{ABC}=\frac{V}{8}\\ \Rightarrow V_{AMNPQ} &= \frac{V}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 103. Tìm phần ảo của số phức z biết z thỏa mãn $|z-2i|=|\overline{z}+2+4i|$ và $\dfrac{z-i}{\overline{z}+i}$ là số thuần ảo.

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{17}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.
Ta có $|z-2i|=|\overline{z}+2+4i|\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(4-b)^2\Leftrightarrow b-a=4\Leftrightarrow b=a+4$.
Đồng thời $\dfrac{z-i}{\overline{z}+i}=\dfrac{a+(b-1)i}{a+(1-b)i}=\dfrac{[a+(b-1)i]^2}{a^2+(b-1)^2}=\dfrac{a^2-(b-1)^2+2a(b-1)^2}{a^2+(b-1)^2i}$
Khi đó số phức $\dfrac{z-i}{\overline{z}+i}$ là số thuần ảo khi $a^2-(b-1)^2=0$, thay $b=a+4$ vào ta được
$a^2-(a+3)^2=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow b=\dfrac{5}{2}$.

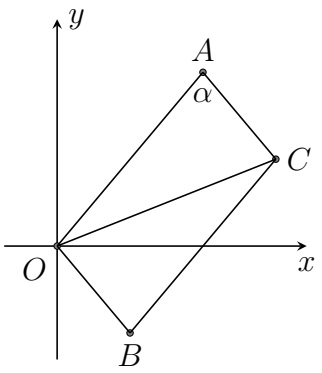
Chọn đáp án B □

Câu 104. Trong mặt phẳng phức, xét hình bình hành tạo bởi các điểm $0,z,\dfrac{1}{z}$ và $z+\dfrac{1}{z}$. Biết z có phần thực dương và diện tích hình bình hành bằng $\dfrac{35}{37}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2$.

A. $\dfrac{53}{20}$. **B.** $\dfrac{60}{37}$. **C.** $\dfrac{22}{9}$. **D.** $\dfrac{50}{27}$.

Lời giải.

Gọi O, A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $0, z, \dfrac{1}{z}, z+\dfrac{1}{z}$. Khi đó, diện tích hình bình hành $OACB$ là



$$S = OA \cdot OB \sin\alpha = |z| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| \sin\alpha = \frac{35}{37} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{35}{37}.$$

Suy ra, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\dfrac{12}{37}$.

Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác OAC, ta có

$$\begin{aligned}\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 = OC^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha \\ &= |z|^2 + \left|\frac{1}{z}\right|^2 - 2|z|\left|\frac{1}{z}\right|\cos\alpha \geqslant 2 - 2\cos\alpha.\end{aligned}$$

- ☑ Nếu $\cos\alpha = \dfrac{12}{37}$ thì $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2 \geqslant 2 - 2\cdot\dfrac{12}{37} = \dfrac{50}{37}$.
- ☑ Nếu $\cos\alpha = -\dfrac{12}{37}$ thì $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2 \geqslant 2 + 2\cdot\dfrac{12}{37} = \dfrac{98}{37}$.

Suy ra, $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{50}{37}$ khi $|z|=1$ và $\cos\alpha = \dfrac{12}{37}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Cho số phức $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + 2018i^{2017}$ có phần thực là a và phần ảo là b. Tính $b - a$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 1010. **D.** -2017.

Lời giải.

Với $x \neq 1$ ta có $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2018} = \dfrac{x^{2019}-1}{x-1}$, suy ra

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 2018x^{2017} = \frac{2018x^{2019} - 2019x^{2018} + 1}{(x-1)^2}.$$

Do đó $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + 2018i^{2017} = \dfrac{2018i^{2019} - 2019i^{2018} + 1}{(x-1)^2} = 1009 + 1010i$.

Vậy $b - a = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 106. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$ đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$. **B.** $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2 = 9$.

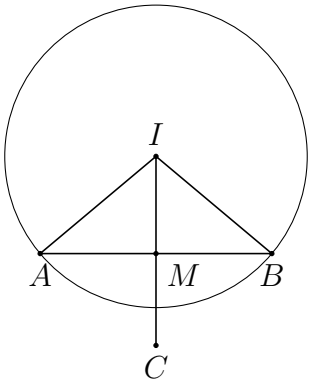
C. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$. **D.** $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Thay vào $|z - 5 - 3i| = 5$ ta được

$$|x + yi - 5 - 3i| = 5 \Leftrightarrow |(x-5) + (y-3)i| = 5 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1 i$ có điểm biểu diễn là A và $z_2 = x_2 + y_2 i$ có điểm biểu diễn là B suy ra A và B thuộc đường tròn (C) tâm $I(5;3)$ bán kính $R = 5$.



Mà

$$\begin{aligned} & |z_1 - z_2| = 8 \Leftrightarrow |(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)| = 8 \\ \Leftrightarrow\ & |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 8 \\ \Leftrightarrow\ & AB = 8. \end{aligned}$$

Gọi M là trung điểm của AB và C là điểm đối xứng của I qua M.
Vì $IACB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right| = \left|\overrightarrow{IC}\right| = IC$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (x_1 - 5; y_1 - 3) \\ \overrightarrow{IB} = (x_2 - 5; y_2 - 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = (x_1 + x_2 - 10; y_1 + y_2 - 6).$$

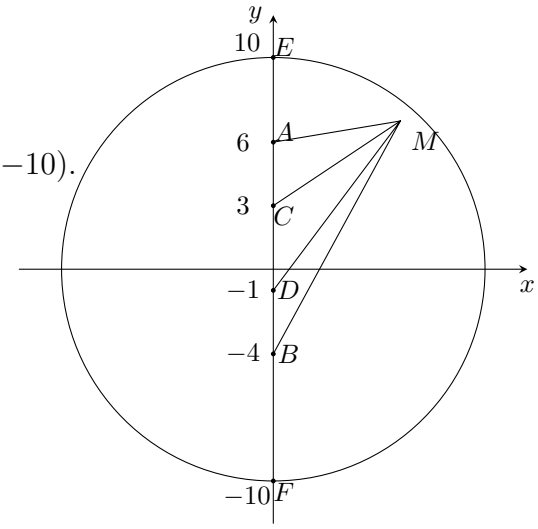
Do đó $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right| = \sqrt{(x_1 + x_2 - 10)^2 + (y_1 + y_2 - 6)^2}$,
$IC = 2IM = 2\sqrt{IA^2 - AM^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$.
Suy ra $\sqrt{(x_1 + x_2 - 10)^2 + (y_1 + y_2 - 6)^2} = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 10)^2 + (y_1 + y_2 - 6)^2 = 36$.
Vậy điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ thuộc đường tròn $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 107. Có bao nhiêu số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z + i| + |z - 3i| = |z + 4i| + |z - 6i|$ và $|z| \le 10$.

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi, (a; b \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ điểm biểu diễn của z là $M(a; b)$.
Các điểm M cần tìm thuộc hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 10$.
Xét các điểm $A(0;6), B(0;-4), C(0;3), D(0;-1), E(0;10), F(0;-10)$.



Ta có $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{10}, \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{7}{10}$.
Do đó ta có $\overrightarrow{MC} = \dfrac{3}{10}\overrightarrow{MA} + \dfrac{7}{10}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD} = \dfrac{7}{10}\overrightarrow{MA} + \dfrac{3}{10}\overrightarrow{MB}$.
Ta có

$$\begin{cases} MC = \left|\dfrac{3}{10}\overrightarrow{MA} + \dfrac{7}{10}\overrightarrow{MB}\right| \\ MD = \left|\dfrac{7}{10}\overrightarrow{MA} + \dfrac{3}{10}\overrightarrow{MB}\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MC \le \dfrac{3}{10}MA + \dfrac{7}{10}MB \\ MD \le \dfrac{7}{10}MA + \dfrac{3}{10}MB. \end{cases}$$

Suy ra ta có $MC + MD \le MA + MB$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng $\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn AE hoặc đoạn BF.
Do $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; ; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy có tât cả 12 điểm M cần tìm, với $M(a;0)$ và $a \in \{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;6;7;8;9;10\}$.

• **Lưu ý:** *Theo cách giải trên, điểm mấu chốt giải được bài toán là A,B,C,D thẳng hàng và tỉ lệ $\dfrac{AC}{AB}=k, \dfrac{AD}{AB}=1-k$. Như thế có thể tạo ra một lớp bài toán dạng $MA+MB=MC+MD$.*

Chọn đáp án A □

Câu 108. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có

$|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i)=4|z|+(|z|-2)i.$

Lấy môđun 2 vế ta được

$|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1}=\sqrt{(4|z|)^2+(|z|-2)^2}.$

Đặt $t=|z|, t\geqslant 0$ ta được

$t\sqrt{(t-5)^2+1}=\sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4)=0.$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t\geqslant 0$ vậy có 3 số phức z thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 109. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i \quad (1).$

Lấy mô-đun hai vế của (1) ta có $\sqrt{(|z|-6)^2+1}\cdot|z|=\sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}.$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-11|z|^2+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|^3-11|z|^2+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|\approx 10{,}967\\ |z|\approx 0{,}62\\ |z|\approx -0{,}587.\end{array}\right.$$

Mà $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow z=\dfrac{(5+i)|z|+2i}{|z|-6+i}.$

Do $|z|\geq 0$ nên ta có ba số phức thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Cho số phức $z=\left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m$ (m nguyên dương). Có bao nhiêu giá trị $m\in[1;50]$ để z là số thuần ảo?

A. 25. **B**. 24. **C**. 26. **D**. 50.

Lời giải.

$\dfrac{2+6i}{3-i}=\dfrac{(2+6i)(3+i)}{10}=2i$, $(2i)^m$ là số thuần ảo khi m là số lẻ.

Số số nguyên dương lẻ $\in[1;50]$ là 25.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+2z+2|=|z+1-i|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}+2$. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+2=(z+1)^2+1=(z+1)^2-i^2=(z+1+i)(z+1-i)$. Do đó

$$\begin{aligned}|z^2+2z+2|=|z+1-i| &\Leftrightarrow \left|\frac{z^2+2z+2}{z+1-i}\right|=1\\ &\Leftrightarrow \left|\frac{(z+1+i)(z+1-i)}{z+1-i}\right|=1\\ &\Leftrightarrow |z+1+i|=1.\end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $r=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $OI+r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}+1=\sqrt{2}+1$.

Chọn đáp án A □

Câu 112. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định $z\neq 4$. Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết ta có

$$|z-3i|=5\Rightarrow |a+(b-3)|=5\Leftrightarrow a^2+(b-3)^2=25.$$

Lại có: $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{a+bi}{(a-4)+bi}=\dfrac{(a+bi)(a-4-bi)}{(a-4)^2+b^2}=\dfrac{a^2-4a+b^2}{(a-4)^2+b^2}+\dfrac{-4b}{(a-4)^2+b^2}i$.

Theo giả thiết, suy ra $a^2-4a+b^2=0$.

Ta có hệ

$$\begin{cases}a^2+(b-3)^2 &=25\\ a^2-4a+b^2 &=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4+\dfrac{3}{2}b\\ 13b^2+24b=0.\end{cases}$$

Giải hệ ta được $a=4,b=0$ và $a=\dfrac{16}{13},b=-\dfrac{24}{13}$. Vì $z\neq 4$ là số thuần ảo nên $a=\dfrac{16}{13};b=-\dfrac{24}{13}$.

Vậy $z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$.

Chọn đáp án C □

Câu 113. Cho z và w là hai số phức liên hợp thỏa mãn $\dfrac{z}{w^2}$ là số thực và $|z-w|=2\sqrt{3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $3<|z|<4$. **B.** $|z|<1$. **C.** $1<|z|<3$. **D.** $|z|>4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $z=\overline{w},w=\overline{z},|z|=|w|$.

Từ $|z-w|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow (z-w)(\overline{z}-\overline{w})=12\Leftrightarrow |z|^2+|w|^2-z\overline{w}-\overline{z}w=12\Leftrightarrow 2|z|^2-z^2-w^2=12$ $(*)$.

Do $\dfrac{z}{w^2}$ là số thực nên $\dfrac{z}{w^2}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}^2}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w^2}}$. Từ đó suy ra $\dfrac{z}{w^2}=\dfrac{w}{z^2}$ hay

$z^3=w^3\Leftrightarrow (z-w)(z^2+zw+w^2)=0$.

Vậy $z^2+w^2=-zw=-|z|^2$. Thay vào $(*)$ ta được $|z|^2=4\Leftrightarrow |z|=2$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. A	6. C	7. D	8. C	9. D	10. D
11. A	12. B	13. A	14. D	15. B	16. A	17. B	18. B	19. D	20. B
21. D	22. A	23. C	24. A	25. D	26. C	27. B	28. A	29. B	30. A
31. A	32. B	33. B	34. B	35. A	36. D	37. C	38. D	39. D	40. A
41. B	42. C	43. A	44. D	45. D	46. C	47. C	48. C	49. D	50. D
51. D	52. C	53. B	54. D	55. B	56. D	57. D	58. A	59. A	60. A
61. C	62. D	63. B	64. C	65. D	66. C	67. B	68. D	69. C	70. D
71. C	72. B	73. A	74. C	75. D	76. A	77. A	78. D	79. A	80. D
81. B	82. C	83. B	84. B	85. A	86. D	87. A	88. B	89. D	90. B
91. C	92. B	93. D	94. D	95. C	96. A	97. C	98. D	99. D	100. C
101. D	102. C	103. B	104. D	105. A	106. C	107. A	108. B	109. B	110. A
111. A	112. C	113. C							

BÀI 5 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Căn bậc hai của số thực âm

Các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

2 Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Xét biệt thức $\Delta=b^2-4ac$ của phương trình. Khi đó:

- ☑ Khi $\Delta=0$, phương trình có một nghiệm thực $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta>0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ☑ Khi $\Delta<0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Định lí 1 (Định lý Vi-et). *Cho x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$ thì* $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

DẠNG 1. Giải phương trình bậc hai hệ số thực

Phương pháp giải. Áp dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai đã biết.

⚠ *Với phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0, a\neq 0$ ta có thể đặt $t=x^2$ để đưa về phương trình bậc hai và lưu ý rằng trong tập số phức thì **không** cần điều kiện $t\geq 0$.*

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2+4x+5=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Biệt thức thu gọn của phương trình là $\Delta'=2^2-1\times 5=-1=i^2$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức: $x_1=-2-i$ và $x_2=-2+i$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình $z^2-3z+10=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Ta có $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 10=-31=31i^2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phức $z_1=\dfrac{3-i\sqrt{31}}{2}$ và $z_2=\dfrac{3+i\sqrt{31}}{2}$. □

Ví dụ 3. Giải phương trình $z^4+5z^2+4=0$ $(\star)$ trên tập số phức.

Lời giải.

Đặt $t=z^2$ thì phương trình $(\star)$ thành $t^2+5t+4=0 \Leftrightarrow \hoac{t=-1\\t=-4}$.

Với $t=-1$ thì $z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm i$.

Với $t=-4$ thì $z^2=-4 \Leftrightarrow z=\pm 2i$.

Vậy phương trình $(\star)$ có bốn nghiệm là $z=\pm i$ và $z=\pm 2i$. □

Ví dụ 4. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Tính $F=|z_1|+|z_2|$.

Lời giải.

Giải phương trình $z^2-2z+5=0$ ta được hai nghiệm là $z_1=1+2i$ và $z_2=1-2i$.

Khi đó $F=|z_1|+|z_2|=|1+2i|+|1-2i|=2\sqrt{5}$. □

Ví dụ 5. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4-3z^2-2=0$. Tính tổng $T=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_4\right|^2$.

Lời giải.

Đặt $t=z^2$ thì phương trình $2z^4-3z^2-2=0$ thành $2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow \hoac{t=2\\t=-\dfrac{1}{2}}$.

Với $t=2$ thì $z^2=2$ cho ta $z_1=-\sqrt{2}$ và $z=\sqrt{2}$.

Với $t=-\dfrac{1}{2}$ thì $z^2=-\dfrac{1}{2}$ cho ta $z_3=-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$ và $z_4=\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $T=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_4\right|^2=5$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $z^2-z+\dfrac{5}{4}=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2}=\dfrac{1\pm 2i}{2}$. □

Bài 2. Giải phương trình $2z^4+3z^2-5=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $z_1=-1, z_2=1, z_3=-i\sqrt{\dfrac{5}{2}}, z_4=i\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. □

Bài 3. Biết rằng phương trình $z^2+az+b=0$ (trong đó $a,b\in\mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $1+2i$. Tính tích ab.

Lời giải.

Do $z=1+2i$ là một nghiệm của phương trình nên $(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0 \Leftrightarrow (a+b-3)+(4+2a)i=0 \Leftrightarrow \heva{a+b-3=0\\4+2a=0} \Leftrightarrow \heva{a=-2\\b=5}$. Vậy $ab=-10$. □

Bài 4. Cho phương trình $z^4+2z^2-8=0$ có các nghiệm trên tập số phức là z_1, z_2, z_3, z_4. Tính giá trị biểu thức $F=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$.

Lời giải.

Đặt $t=z^2$ ta được phương trình $t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \hoac{t=2\\t=-4}$.

Từ đó ta tìm được $z_1=-\sqrt{2}, z_2=\sqrt{2}, z_3=-2i, z_4=2i$. Suy ra $F=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=-4$. □

Bài 5. Giải phương trình $3z^2+\left(3+2i\sqrt{2}\right)z-\dfrac{(1+i)^3}{1-i}=i\sqrt{8}z$ trên tập số phức.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $3z^2+3z+2=0$.

Do đó ta tìm được các nghiệm $z_1=\dfrac{-3-i\sqrt{15}}{6}$ và $z_2=\dfrac{-3+i\sqrt{15}}{6}$. □

DẠNG 2. Phương trình bậc cao với hệ số thực.

Phương pháp giải. ***Phương pháp giải:***

- ☑ Phân tích thành nhân tử để đưa về phương trình tích.
- ☑ Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $z^4-2z^2-8=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Đặt $t=z^2$, phương trình đã cho trở thành

$t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow t=-2$ hoặc $t=4$.

- ☑ Với $t=4$ suy ra $z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm 2$.
- ☑ Với $t=-2$ suy ra $z^2=-2 \Leftrightarrow z=\pm i\sqrt{2}$.

Ta có thể trình bày theo cách sau:

$$z^4-2z^2-8=0 \Leftrightarrow \hoac{z^2=-2\\z^2=4} \Leftrightarrow \hoac{z=\pm i\sqrt{2}\\z=\pm 2}.$$

□

Ví dụ 2. Giải phương trình $z^3-27=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Ta có:

$$z^3-27=0 \Leftrightarrow (z-3)\left(z^2+3z+9\right)=0 \Leftrightarrow \hoac{z=3\\z^2+3z+9=0} \Leftrightarrow \hoac{z=3\\z=\dfrac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}}.$$

□

Ví dụ 3. Giải phương trình $z^3+4z^2+6z+3=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Ta có:

$$z^3+4z^2+6z+3=0 \Leftrightarrow (z+1)\left(z^2+3z+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z^2+3z+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=-\dfrac{3}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. .$$

□

Ví dụ 4. Giải phương trình sau trên tập số phức

$$z^4+2z^3-z^2+2z+1=0.$$

Lời giải.

Vì $z=0$ không là nghiệm của phương trình, nên chia cả 2 vế phương trình đã cho với z^2, ta được phương trình:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+2\left(z+\frac{1}{z}\right)-3=0\,(*).$$

Đặt $t=z+\dfrac{1}{z}$, phương trình $(*)$ trở thành:

$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-3$.

Với $t=1$ tức là $z+\dfrac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Với $t=-3$ tức là $z+\dfrac{1}{z}=-3 \Leftrightarrow z^2+3z+1=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình cho có 4 nghiệm là: $z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, z=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. □

Ví dụ 5. Giải phương trình sau trên tập số phức $2z^4-7z^3+9z^2-7z+2=0$

Lời giải.

Nhận thấy $z=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế phương trình cho z^2 ta được:

$2\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)-7\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+9=0$

$\Rightarrow 2t^2-7t+5=0, \left(t=z+\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, z=2, z=\dfrac{1}{2}$. □

Ví dụ 6. Giải phương trình sau trên tập số phức

$$25\left(5z^2+2\right)^2+4\left(25z+6\right)^2=0.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&25\left(5z^2+2\right)^2+4\left(25z+6\right)^2=0\\
\Leftrightarrow&\left(25z^2+10\right)^2-\left(50iz+12i\right)^2=0\\
\Leftrightarrow&\left(25z^2+50iz+10+12i\right)\left(25z^2-50iz+10-12i\right)=0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&25z^2+50iz+10+12i=0\\&25z^2-50iz+10-12i=0\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&(5z+5i)^2=-35-12i=(1-6i)^2\\&(5z-5i)^2=-35+12i=(1+6i)^2\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình có các nghiệm là:

$$\left[\begin{aligned}&z_1=\frac{1-11i}{5};z_2=\frac{-1+i}{5}\\&z_3=\frac{1+11i}{5};z_4=\frac{-1-i}{5}\end{aligned}\right..$$

□

Ví dụ 7. Kí hiệu z_1,z_2,z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4+z^2-12=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$.

Lời giải.

Ta có $z^4+z^2-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z^2=-4\\&z^2=3\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=\pm 2i\\&z=\pm\sqrt{3}\end{aligned}\right.$.

Do đó $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{3}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $(z+4)^4+(z+6)^4=82$ trên tập số phức.

Lời giải.

Đặt $t=z+\dfrac{4+6}{2}=z+5$, phương trình đã cho trở thành

$t^4+6t^2-40=0\Leftrightarrow t^2=4$ hoặc $t^2=-10$.

- ☑ Với $t^2=4$ ta suy ra $z=-3,z=-7$.
- ☑ Với $t^2=-10$ ta suy ra $z=-5\pm i\sqrt{10}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $z=-3,z=-7,z=-5\pm i\sqrt{10}$. □

Bài 2. Giải phương trình $z^4+2z^3-z^2+2z+1=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Ta có:

$$z^4+2z^3-z^2+2z+1=0\Leftrightarrow\left(z^2+3z+1\right)\left(z^2-z+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\\&z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right..$$

□

Bài 3. Giải phương trình $z^4-\left(1+\sqrt{2}\right)z^3+\left(2+\sqrt{2}\right)z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+1=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&z^4-\left(1+\sqrt{2}\right)z^3+\left(2+\sqrt{2}\right)z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+1=0\\ \Leftrightarrow&(z^2-z+1)(z^2-z\sqrt{2}+1)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\\ z=\dfrac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}\end{array}\right..\end{aligned}$$

□

Bài 4. Phương trình $z^6+z^5-13z^4-14z^3-13z^2+z+1=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

Lời giải.

Ta có:

$z^6+z^5-13z^4-14z^3-13z^2+z+1=0$

$$\Leftrightarrow\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-4z+1\right)\left(z^2+4z+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\\ z=2\pm\sqrt{3}\\ z=-2\pm\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm thực. □

Bài 5. Giải phương trình sau trên tập số phức

$$(z^2+3z+6)^2+2z(z^2+3z+6)-3z^2=0$$

.

Lời giải.

Ta có:

$(z^2+3z+6)^2+2z(z^2+3z+6)-3z^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+3z+6=z\\ z^2+3z+6=-3z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+2z+6=0\\ z^2+6z+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\pm i\sqrt{5}\\ z=-3\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

□

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HỆ SỐ PHỨC

Phương pháp giải. Để giải các phương trình dạng $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ $(a_k\in\mathbb{C})$ ta tìm cách chuyển phương trình về dạng $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=0$. Trong trường hợp biết

trước một nghiệm thì lược đồ Horner cũng đúng trong trường hợp số phức. Khi giải phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ với hệ số phức ta có thể dùng phương pháp sau.
Gọi w là số phức thỏa mãn $w^2=\Delta$.

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow a\left(z^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-\frac{b^2}{4a}=0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{w}{2a}\right)^2\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{-b+w}{2a}\\ z=\dfrac{-b-w}{2a}\end{array}\right. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Tìm số phức z thỏa mãn $z^2+2iz-1-2i=0$.

Lời giải.

$z^2+2iz-1-2i=0\Leftrightarrow (z^2-1)+2i(z-1)=0\Leftrightarrow (z-1)(z+1+2i)=0\Leftrightarrow z=1, z=-1-2i.$ □

Ví dụ 2. Tìm số phức z thỏa mãn $z^2+3iz-(6+2i)=0$.

Lời giải.

Gọi $w=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $w^2=(3i)^2+4(6+2i)=15+8i$. Ta có hệ

$$\begin{cases} a^2-b^2=15\\ ab=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4\\ b=1\end{cases}\Rightarrow w=4+i$$

Các số phức cần tìm $z=\dfrac{-3i+4+i}{2}=2-i$; $z=\dfrac{-3i-4-i}{2}=-2-2i$. □

Ví dụ 3. Biết các số phức $z_1=2, z_2, z_3$ là các nghiệm của phương trình $z^3+2iz^2-(3+2i)z-2-4i=0$, tính giá trị của biểu thức $P=|z_1^2|+|z_2^2|+|z_3^2|$.

Lời giải.

Sử dụng lược đồ Horner

2	1	$2i$	$-3-2i$	$-2-4i$
	1	$2+2i$	$1+2i$	0

$z^3+2iz^2-(3+2i)z-(2+4i)=0\Leftrightarrow (z-2)[z^2+(2+2i)z+1+2i]=0\Leftrightarrow (z-2)[(z+1)^2+2i(z+1)]=0\Leftrightarrow (z-2)(z+1)(z+1+2i)=0.$
Ta có $P=|2^2|+|(-1)^2|+|(-1-2i)^2|=10.$ □

Ví dụ 4. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2z^2-(1+i)z+m+2i=0$ có ít nhất một nghiệm thuần ảo.

Lời giải.

Gọi nghiệm thuần ảo là $z=ai, a\in\mathbb{R}$. Ta có $2z^2-(1+i)z+m+2i=0 \Leftrightarrow 2(ai)^2-(1+i)ai+m+2i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2+a+m=0 \\ -a+2=0 \end{cases} \Rightarrow m=6.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm số phức z thỏa mãn $4z^2-4z+1-2i=0$

Lời giải.

$4z^2-4z+1-2i=0 \Leftrightarrow (2z-1)^2=(1+i)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+\dfrac{1}{2}i \\ z=-\dfrac{1}{2}i \end{array}\right.$ □

Bài 2. Tìm số phức z thỏa mãn $2z^2+(4+7i)z-1+7i=0$

Lời giải.

Gọi $w=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $w^2=(4+7i)^2-8(-1+7i)=-25=(5i)^2 \Rightarrow w=5i$.
Các số phức cần tìm $z=\dfrac{-4-7i+5i}{4}=-1-\dfrac{1}{2}i$; $z=\dfrac{-4-7i-5i}{4}=-1-3i$. □

Bài 3. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $(1+i)z^2-(4-5i)z-5(1+i)=0$ Tính giá trị của biểu thức $S=|z_1|^2+|z_2|^2$.

Lời giải.

Gọi $w=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $w^2=(4-5i)^2+20(1+i)^2=-9 \Rightarrow w=3i$. Các nghiệm của phương trình là $z_1=\dfrac{4-5i+3i}{2(1+i)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$; $z_2=\dfrac{4-5i-3i}{2(1+i)}=-1-3i$ suy ra $P=\dfrac{5}{2}+10=\dfrac{25}{2}$.
□

Bài 4. Tìm số phức z thỏa mãn $z^2-2(1+2i)z+(2-i)=0$

Lời giải.

Gọi $w=a+bi$ là số phức thỏa mãn $w^2=\Delta'=(1+2i)^2-2+i=-5+5i$, ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=-5 \\ 2ab=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-5+5\sqrt{2}}{2} \\ b=1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy các số phức thỏa mãn $z=1+\dfrac{-5+5\sqrt{2}}{2}+(3+\sqrt{2})i$; $z=1-\dfrac{-5+5\sqrt{2}}{2}+(1-\sqrt{2})i$ □

Bài 5. Tìm số phức z thỏa mãn $z^3-3z^2+3z-1+8i=0$

Lời giải.

$z^3-3z^2+3z-1+8i=0 \Leftrightarrow (z-1)^3=(2i)^3$

$\Leftrightarrow (z-1-2i)\left[(z-1)^2+2i(z-1)+(2i)^2\right]=0.$

$(z-1)^2+2i(z-1)+(2i)^2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2+2i(z-1)+i^2=3$

$\Leftrightarrow (z-1+i)^2=(\sqrt{3})^2.$

Ta nhận được các số phức thỏa mãn $z=1+2i$; $z=1+\sqrt{3}-i$; $z=1-\sqrt{3}-i$. □

Bài 6. Cho phương trình $z^3+(3-i)z^2+(5+2i)z-3+11i=0$ có ba nghiệm phức z_1, z_2, z_3. Biết rằng một trong các nghiệm của phương trình là $1-i$. Tính giá trị $P=|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

Lời giải.

Sử dụng lược đồ Horner

$1-i$	1	$3-i$	$5+2i$	$-3+11i$
	1	$4-2i$	$7-4i$	0

Ta có $z^3+(3-i)z^2+(5+2i)z-3+11i=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1-i \\ z^2+(4-2i)z+7-4i=0 \ (1)\end{array}\right.$

Giải (1): Gọi w là số phức thỏa mãn $w^2=\Delta=(4-2i)^2-4(7-4i)=-16 \Rightarrow w=4i$. Các nghiệm của (1) là $z=\dfrac{-4+2i+4i}{2}=-2+3i$; $z=\dfrac{-4+2i-4i}{2}=-2-i$. Vậy $P=\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Chứng minh rằng hai số phức liên hợp z và $\overline{z}$ là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số là các số thực.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thì $\overline{z}=a-bi$. Khi đó $z+\overline{z}=2a\in\mathbb{R}, z\overline{z}=a^2+b^2\in\mathbb{R}$.

Ta có z và $\overline{z}$ là hai nghiệm của phương trình $(x-z)(x-\overline{z})=0 \Leftrightarrow x^2-(z+\overline{z})x+z\overline{z}=0$.

Hay $x^2-2ax+a^2+b^2=0$. □

Bài 2. Giải phương trình $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2-6\dfrac{z-i}{z+i}+13=0$ trên tập số phức.

Lời giải.

Điều kiện: $z\neq -i$.

Đặt $w=\dfrac{z-i}{z+i}$, phương trình thành $w^2-6w+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=3+2i \\ w=3-2i\end{array}\right.$.

Với $w=3+2i$ thì $\dfrac{z-i}{z+i}=3+2i \Leftrightarrow z=-\dfrac{1+3i}{2}$.

Với $w=3-2i$ thì $\dfrac{z-i}{z+i}=3-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{1-3i}{2}$. □

Bài 3. Cho phương trình $(z^2-4z)^2-3(z^2-4z)-40=0$. Gọi z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình đã cho. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$.

Lời giải.

Xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai ẩn (z^2-4z)

Ta có $\Delta=9+140=169=13^2$.

Suy ra phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} z^2-4z=\dfrac{3-13}{3}=-5 \\ z^2-4z=\dfrac{3+13}{3}=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2-4z+5=0 \\ z^2-4z-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z-2)^2=-1 \\ (z-2)^2=12 \end{array}\right..$$

$$(z-2)^2=-1 \Leftrightarrow (z-2)^2=i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-2=i \\ z-2=-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2+i \\ z_2=2-i \end{array}\right..$$

$$(z-2)^2=12 \Leftrightarrow z-2=\pm 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2-2\sqrt{2} \\ z=2+2\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Khi đó $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2=34$. □

Bài 4. Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để

$$\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324.$$

Lời giải.

Đặt $t=z^2$, phương trình trở thành $4t^2+mt+4=0$.

Theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{m}{4} \\ t_1\cdot t_2=1 \end{cases}.$$

Giả sử ta có $z_1^2=z_2^2=t_1, z_3^2=z_4^2=t_2$.

Yêu cầu bài toán trở thành

$$(-m+17)^2=18^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m+17=18 \\ -m+17=-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=35 \end{array}\right..$$ □

Bài 5. Tìm số phức z thỏa mãn $z^5+2z^3+iz^2+2i=0$.

Lời giải.

$$z^5+2z^3+iz^2+2i=0 \Leftrightarrow (z^2+2)(z^3+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=-2 \\ z^3=i^3 \end{array}\right.$$

- $z^2=-2 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}i$.
- $z^3=i^3 \Leftrightarrow (z-i)(z^2+iz+i^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z=\dfrac{-i\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

□

Bài 6. Tìm số phức z thỏa mãn $z^4 - 2iz^3 + 4iz^2 - 8iz - 16(1-i) = 0$.

Lời giải.

$z^4 - 2iz^3 + 4iz^2 - 8iz - 16(1-i) = 0 \Leftrightarrow (z^4 - 16) - 2i(z^3 - 2z^2 + 4z - 8) = 0$

$\Leftrightarrow (z^2+4)(z^2 - 2iz - 4 + 4i) = 0.$

- $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 2i.$
- $z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow (z-i)^2 = (2-i)^2$

  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = -2 + 2i \end{array}\right.$

□

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 10.

Lời giải.

Phương trình $z^2-3z+5=0$ có hai nghiệm là $z_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$; $z_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$.

Do đó $|z_1|+|z_2|=2\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Kí hiệu $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2-z+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=\dfrac{1-i\sqrt{11}}{6}\\ z_2=\dfrac{1+i\sqrt{11}}{6}\end{array}\right.$.

Do đó $P=|z_1|+|z_2|=2\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=2\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+2018=0$. Khi đó giá trị biểu thức $A=|z_1+z_2-z_1z_2|$ bằng

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2016.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng định lý Vi-ét.

Cách giải: z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+2018=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_1+z_2=2\\ z_1z_2=2018.\end{array}\right.$

$A=|z_1+z_2-z_1z_2|=|2-2018|=2016$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+2=0$. Tính $T=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $T=\dfrac{2}{3}$. **B.** $T=\dfrac{8}{3}$. **C.** $T=\dfrac{4}{3}$. **D.** $T=-\dfrac{11}{9}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2-z+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=\dfrac{1+\sqrt{23}i}{6}\Rightarrow|z_1|^2=\dfrac{2}{3}\\ z_2=\dfrac{1-\sqrt{23}i}{6}\Rightarrow|z_2|^2=\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

Vậy $T=|z_1|^2+|z_2|^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $z^2+2z+5=0$.

A. $1+2i;1-2i$. **B.** $1+i;1-i$. **C.** $-1+2i;-1-2i$. **D.** $-1+i;-1-i$.

Lời giải.

Có $\Delta=-16=(4i)^2$, suy ra nghiệm pt là $z_1=-1+2i;z_2=-1-2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho m là số thực, biết phương trình $z^2+mz+5=0$ có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo bằng 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải.

Giả sử phương trình có nghiệm $z_1=a+i, a\in\mathbb{R}$, khi đó $z_2=a-i$ cũng là nghiệm của phương trình.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $5=x_1x_2=(a+i)(a-i)=a^2+1$, nên ta có: $a^2=4$.

Khi đó: $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $M_1\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $M_3\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **D.** $M_4\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Lời giải.

• Phương trình đã cho có 2 nghiệm $2+\frac{1}{2}i$ và $2-\frac{1}{2}i$. Do đó $z_0=2+\frac{1}{2}i$.

• $w=iz_0=-\frac{1}{2}+2i\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tìm số phức z có phần ảo dương thỏa $z^2-2z+10=0$.

A. $z=1+3i$. **B.** $z=-1+3i$. **C.** $z=2+6i$. **D.** $z=-2+6i$.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=-9$. Phương trình đã cho có các nghiệm phức là $z=1\pm3i$. Do đó, nghiệm phức có phần ảo dương là $z=1+3i$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Tính $|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. 4. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $z^2-z+2=0\Leftrightarrow z=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\Rightarrow|z_1|^2+|z_2|^2=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Giải phương trình $z^2-4z+5=0$ trên tập số phức ta được các nghiệm

A. $-2+\mathrm{i}$, $-2-\mathrm{i}$. **B.** $2+\mathrm{i}$, $2-\mathrm{i}$. **C.** $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$. **D.** $-4+\mathrm{i}$, $-4-\mathrm{i}$.

Lời giải.

Ta có biệt thức $\delta=4^2-4\cdot5=-4$, có hai căn bậc hai là $\pm2\mathrm{i}$.

Phương trình có hai nghiệm là $z=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{2}=2+\mathrm{i}$ và $z=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$ trên tập số phức. Số tập con của S là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải.

$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$.

Do đó tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Vậy số tập con của S là $2^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Giải phương trình $z^2+2z+2=0$ trên tập hợp số phức, ta có tập nghiệm S là

A. $S=\{1-i;1+i\}$. **B.** $S=\{1-i;-1+i\}$.

C. $S=\{-1-i;-1+i\}$. **D.** $S=\{-1-i;1+i\}$.

Lời giải.

$z^2+2z+2=0$ có $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$ nên phương tình có hai nghiệm phức

$$z_1=-1+i \text{ và } -1-i.$$

Vậy $S=\{-1-i;-1+i\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $x^2+9=0$ trên tập hợp số phức là tập hợp nào sau đây?

A. $\varnothing$. **B.** $\{-3;3\}$. **C.** $\{0;3\}$. **D.** $\{-3i,3i\}$.

Lời giải.

Ta có $x^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3i \\ x=-3i. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S=\{-3i;3i\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có nghiệm $z=-2+i$. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** 9. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0 \Leftrightarrow (a-4)i+(b+3-2a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a+b=9.$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+3=0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là

A. $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$. **B.** $M\left(-1;2\right)$. **C.** $M\left(-1;-2\right)$. **D.** $M\left(-1;-\sqrt{2}i\right)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2z+3=0$ có hai nghiệm là $z_1=-1-\sqrt{2}i$ và $z_2=-1+\sqrt{2}i$ nên $M\left(-1;-\sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+7=0$. Khi đó $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 21.

Lời giải.

Ta có$z^2+4z+7=0 \Leftrightarrow z=-2+i\sqrt{3} \vee z=-2-i\sqrt{3}$ nên $|z_1|^2+|z_2|^2=14$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-z+1=0$ là $z=a+bi$ với $a,\ b\in\mathbb{R}$. Tính $a+\sqrt{3}b$.

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải.

$$z^2-z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow a=\frac{1}{2}; b=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a+\sqrt{3}b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho phương trình $z^2-6z+10=0$. Một nghiệm phức của phương trình đã cho là

A. $z=2+3i$. **B.** $z=5-4i$. **C.** $z=1+i$. **D.** $z=3-i$.

Lời giải.

$$z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+i \\ z=3-i. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2-6z+5=0$. Số phức iz_0 bằng

A. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **B.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **C.** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$. **D.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$.

Lời giải.

Ta có $2z^2-6z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{3\pm i}{2}$.

Do đó $z_0=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i \Rightarrow iz_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2+2z+5=0$. Tính $M=|z_1^2|+|z_2^2|$.

A. $M=2\sqrt{34}$. **B.** $M=4\sqrt{5}$. **C.** $M=12$. **D.** $M=10$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2z+5=0$ có hai nghiệm $z_1=-1-2i$ và $z_2=-1+2i$. Do đó

$$M=\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|=|-1-2i|^2+|-1+2i|^2=5+5=10.$$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$. Tính $M=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $M=2\sqrt{34}$. **B.** $M=4\sqrt{5}$. **C.** $M=12$. **D.** $M=10$.

Lời giải.

Ta có z_1 và z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và $z_1z_2=5$ nên

$$M=|z_1|^2+|z_2|^2=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=z_1z_2+z_2z_1=2z_1z_2=2\cdot 5=10.$$

Vậy $M = 10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 10. **B.** 5. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1 + 2\mathrm{i} \\ z_2 = 1 - 2\mathrm{i}. \end{array}\right.$

Vậy $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |1 + 2\mathrm{i}|^2 + |1 - 2\mathrm{i}|^2 = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ trên tập số phức là

A. $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i;\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i.$ **B.** $z_1 = \sqrt{3} + i;\ z_2 = \sqrt{3} - i.$

C. $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$ **D.** $z_1 = 1 + \sqrt{3}i;\ z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có $\Delta = -3 < 0$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Hai số phức $\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$ và $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $z^2 - 3z - 4 = 0$. **B.** $z^2 + 3z + 4 = 0$. **C.** $z^2 - 3z + 4 = 0$. **D.** $z^2 + 3z - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right) + \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right) = 3 \\ \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right) \cdot \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right) = \dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{4} = 4. \end{cases}$$

Do đó 2 số phức đã cho là nghiệm phương trình $z^2 - 3z + 4 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm số phức liên hợp của $w = \dfrac{z_1}{2 - i}$.

A. $\overline{w} = 1 - 3i$. **B.** $\overline{w} = i$. **C.** $\overline{w} = -3 + i$. **D.** $\overline{w} = -i$.

Lời giải.

Ta có

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 - 2i \\ z = 1 + 2i. \end{array}\right.$$

Suy ra $z_1 = 1 + 2i \Rightarrow w = \dfrac{1 + 2i}{2 - i} = \dfrac{(1 + 2i)(2 + i)}{5} = i.$

Vậy $\overline{w} = -i$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 5z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $A=10$. **B**. $A=50$. **C**. $A=20$. **D**. $A=40$.

Lời giải.

z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2+5z+10=0 \Leftrightarrow \hoac{z=z_1=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i \Rightarrow |z_1|=\sqrt{10} \\ z=z_2=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i \Rightarrow |z_2|=\sqrt{10}.}$

Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=20$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong tập hợp số phức, tìm một căn bậc hai của -5.

A. $i\sqrt{5}$. **B**. $i\sqrt{-5}$. **C**. $\sqrt{5i}$. **D**. $-\sqrt{5i}$.

Lời giải.

Trong tập hợp số phức $\mathbb{C}$, có hai căn bậc hai của -5 là $\pm i\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Phương trình $(z^2-1)(z^3+8)=0$ có bao nhiêu nghiệm phức?

A. 5. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&(z^2-1)(z^3+8)=0\\
\Leftrightarrow\ &(z-1)(z+1)(z+2)(z^2-2z+4)=0\\
\Leftrightarrow\ &(z-1)(z+1)(z+2)[(z-1)^2+3]=0\\
\Leftrightarrow\ &(z-1)(z+1)(z+2)(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})=0\\
\Leftrightarrow\ &\hoac{z=1\pm i\sqrt{3}\\ z=\pm 1\\ z=-2.}
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2+3z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B**. $2\sqrt{5}$. **C**. 5. **D**. $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

$$4z^2+3z+5=0 \Leftrightarrow \hoac{z_1=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{\sqrt{71}}{8}i\\ z_2=-\dfrac{3}{8}-\dfrac{\sqrt{71}}{8}i} \Rightarrow |z_1|+|z_2|=\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+2=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2|+|z_2^2|$ bằng

A. 8. **B**. 0. **C**. 4. **D**. $8i$.

Lời giải.

$z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=1+i \\ z_2=1-i. \end{array}\right.$

Vậy $|z_1^2|+|z_2^2|=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+1=0$ (trong đó số phức z_1 có phần ảo âm). Tính z_1+3z_2.

A. $z_1+3z_2=\sqrt{2}i$. **B.** $z_1+3z_2=-\sqrt{2}$. **C.** $z_1+3z_2=-\sqrt{2}i$. **D.** $z_1+3z_2=\sqrt{2}$.

Lời giải.

$2z^2+1=0 \Leftrightarrow z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Do z_1 có phần ảo âm nên $z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ và $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

$\Rightarrow z_1+3z_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i+3\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=\sqrt{2}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Giả sử z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2+(1-2i)z-1-i=0$. Khi đó $|z_1-z_2|$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2+(1-2i)z-1-i=0$, có biệt thức $\Delta=(1-2i)^2-4(-1-i)=1$. Dó đó phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$z_1=\frac{-(1-2i)+1}{2}=i, \quad z_2=\frac{-(1-2i)-1}{2}=-1+i.$$

Vậy $|z_1-z_2|=|i-(-1+i)|=|1|=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Gọi z_1, z_2 (z_1 có phần ảo lớn hơn z_2) là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+6=0$. Phần ảo của $(z_2+z_2z_1)$ là

A. $-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}i$. **D.** $\sqrt{2}i$.

Lời giải.

Ta có $z^2-4z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2-i\sqrt{2} \\ z=2+i\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Theo giả thiết, z_1, z_2 (z_1 có phần ảo lớn hơn z_2) là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+6=0$ nên $\begin{cases} z_1=2+i\sqrt{2} \\ z_2=2+i\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (z_2+z_2z_1)=8+i\sqrt{2}$.

Vậy phần ảo của $z_2+z_2z_1$ bằng $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Ký hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+6=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $z^2-4z+6=0 \Leftrightarrow z=2\pm i\sqrt{2}$.

Suy ra: $\left|2+i\sqrt{2}\right|+\left|2-i\sqrt{2}\right|=2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tìm x và y thỏa mãn $x+(y+2i)i=2+i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=4;y=1$. **B.** $x=3;y=2$. **C.** $x=-1;y=2$. **D.** $x=0;y=1$.

Lời giải.

Ta có : $x+(y+2i)i=2+i$.

$\Leftrightarrow x-2+yi=2+i\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-5z+7=0$. Tính $P=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $4\sqrt{7}$. **B.** 56. **C.** 14. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có: $z^2-5z+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$. Suy ra $P=|z_1|^2+|z_2|^2=14$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2+4z+3=0$. Tính giá trị biểu thức $P=|z_1z_2+i(z_1+z_2)|$.

A. $P=1$. **B.** $P=\dfrac{7}{2}$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} S=z_1+z_2=-2 \\ P=z_1z_2=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Suy ra $P=\left|\dfrac{3}{2}-2i\right|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+9=0$. Số phức $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** $2i$. **D.** $10i$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta'=(-2)^2-1\cdot 9=-5=\left(\sqrt{5}i\right)^2$.

Khi đó phương trình $z^2-4z+9=0$ có hai nghiệm phức $z_1=2-\sqrt{5}i, z_2=2+\sqrt{5}i$.

Suy ra $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=\left(2-\sqrt{5}i\right)\left(2-\sqrt{5}i\right)+\left(2+\sqrt{5}i\right)\left(2+\sqrt{5}i\right)=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2-6z+10=0$ biểu thức $|z_1-z_2|$ có giá trị là

A. 6. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $6i$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} z=z_1=3-i \\ z=z_2=3+i. \end{array}\right.$

Do đó $|z_1-z_2|^2=|2i|^2=4\Rightarrow |z_1-z_2|=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+5=0$. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của z_1 có tọa độ là

A. $(-1;2)$. **B**. $(2;1)$. **C**. $(-2;1)$. **D**. $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có: $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i. \end{array}\right.$

Do z_1 có phần ảo dương $\Rightarrow z_1=1+2i$.

Do đó điểm biểu diễn của z_1 có tọa độ là $(1;2)$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. D	4. C	5. C	6. C	7. A	8. A	9. A	10. B
11. D	12. C	13. D	14. B	15. A	16. C	17. C	18. D	19. B	20. D
21. D	22. A	23. C	24. C	25. D	26. C	27. A	28. A	29. A	30. C
31. A	32. B	33. B	34. B	35. A	36. C	37. D	38. B	39. C	40. D

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 10.

Lời giải.

$$z^2-3z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{3+\sqrt{11}i}{2} \\ z=\dfrac{3-\sqrt{11}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{5} \Rightarrow |z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương pháp $z^2+4z+7=0$. Số $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** $2i$. **D.** $10i$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $z^2+4z+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2-\sqrt{5}i \\ z_2=-2+\sqrt{5}i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=(-2-\sqrt{5}i)^2+(-2+\sqrt{5}i)^2=2$.

Cách 2. Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-4 \\ z_1z_2=7. \end{cases}$

Dễ thấy $z_1=\overline{z_2}$ và $z_2=\overline{z_1}$, nên

$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=(-4)^2-14=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho số thực $a>2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+a=0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. z_1+z_2 là số thực. **B.** z_1-z_2 là số ảo. **C.** $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là số ảo. **D.** $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là số thực.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2-2z+a=0$. Ta có $\Delta'=1-a<0$ $(\forall a>2)$.

Nên phương trình có 2 nghiệm phức là: $z_1=1+\sqrt{a-1}i; z_2=1-\sqrt{a-1}i$ (không làm mất tính tổng quát).

Ta có

- ☑ $z_1+z_2=1+\sqrt{a}-1i+1-\sqrt{a}-1i=2$ là một số thực nên A đúng.
- ☑ $z_1-z_2=(1+\sqrt{a-1}i)-(1-\sqrt{a-1}i)=2\sqrt{a-1}$ là một số ảo (với $\forall a>2$) nên B đúng.
- ☑ $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1+\sqrt{a-1}i}{1-\sqrt{a-1}i}+\dfrac{1-\sqrt{a-1}}{1+\sqrt{a-1}i}=\dfrac{4-2a}{a}$ là một số ảo (với $\forall a>2$) nên C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính $w=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+i\left(z_1^2z_2+z_2^2z_1\right)$.

A. $w=-\dfrac{4}{5}+20i$. **B.** $w=\dfrac{4}{5}+20i$. **C.** $w=4+20i$. **D.** $w=20+\dfrac{4}{5}i$.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} z_1+z_2=4 \\ z_1z_2=5. \end{cases}$

Suy ra $w=\dfrac{z_2+z_1}{z_1z_2}+i\left(z_1+z_2\right)z_1z_2=\dfrac{4}{5}+20i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 10.

Lời giải.

$$z^2-3z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{3+\sqrt{11}i}{2}\\ z=\dfrac{3-\sqrt{11}i}{2}\end{array}\right.\Rightarrow|z_1|=|z_2|=\sqrt{5}\Rightarrow|z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Trên tập số phức, hai số phức $z_1=a-3i$ và $z_2=a+3i$, $a\in\mathbb{R}$ là hai nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $z^2+2az+a^2-9=0$. **B.** $z^2+2az+a^2+9=0$.

C. $z^2-2az+a^2-9=0$. **D.** $z^2-2az+a^2+9=0$.

Lời giải.

$z_1+z_2=(a-3i)+(a+3i)=2a$; $z_1z_2=(a-3i)(a+3i)=a^2+9$.

Suy ra z_1,z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2az+a^2+9=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tìm nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-z+1=0$.

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **B.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **C.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **D.** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải.

Vì phương trình $z^2-z+1=0$ có hai nghiệm phức là $\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ nên nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình là $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Tìm phần thực của số phức $z_1^2+z_2^2$, biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải.

$$z^2-4z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2+i\\ z=2-i\end{array}\right..$$

Vậy $z_1^2+z_2^2=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-z+1=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{array}\right.$.

Khi đó, $|z_1|+|z_2|=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có một nghiệm $z=-2+i$. Tính $T=a+b$.

A. $T=9$. **B.** $T=1$. **C.** $T=4$. **D.** $T=-1$.

Lời giải.

Theo đề bài phương trình đã cho có 2 nghiệm là $z_1=-2-i$ và $z_2=-2+i$.

Ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-4=\dfrac{-a}{1}=-a \\ z_1\cdot z_2=5=\dfrac{b}{1}=b. \end{cases}$

Vậy $T=a+b=4+5=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trong đó z_1 là số phức có phần ảo âm. Tìm số phức $w=z_1+2z_2$.

A. $w=9+2i$. **B.** $w=-9+2i$. **C.** $w=-9-2i$. **D.** $w=9-2i$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+6z+13=0$ có nghiệm là $z_1=-3-2i, z_2=-3+2i$

Suy ra $w=z_1+2z_2=-9+2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z_0=1+2i$, tìm a,b.

A. $\left[\begin{array}{l} a=-2 \\ b=5 \end{array}\right.$. **B.** $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a=5 \\ b=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét: Phương trình bậc 2 luôn có 2 nghiệm phức liên hợp.

Do đó, 2 nghiệm của phương trình đã cho là $z_1=1+2i$ và $z_2=1-2i$.

Ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1.z_2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4+z^2+1=0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$z^4+z^2+1=0 \Leftrightarrow \left(z^2+1\right)^2-z^2=0 \Leftrightarrow (z^2-z+1)(z^2+z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2-z+1=0 \\ z^2+z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i. \end{array}\right.$$

Do đó $P = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{z_1^2}{z_2} + \dfrac{z_2^2}{z_1}$.

A. $\dfrac{22}{5}$. **B.** $-\dfrac{38}{5}$. **C.** $-\dfrac{22}{5}$. **D.** -12.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{z_1^2}{z_2} + \dfrac{z_2^2}{z_1} = \dfrac{(z_1+z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1+z_2)}{z_1z_2} = \dfrac{2^3 - 3\cdot 5\cdot 2}{5} = -\dfrac{22}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $5z^2-8z+5=0$. Tính $S = |z_1|+|z_2|+z_1z_2$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 15$. **C.** $S = \dfrac{13}{5}$. **D.** $S = -\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có phương trình $5z^2-8z+5=0$ có hai nghiệm là $z_1 = \dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$ và $z_2 = \dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i \Rightarrow S = |z_1|+|z_2|+z_1z_2 = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$.

A. $P = -\dfrac{4}{9}$. **B.** $P = \dfrac{4}{9}$. **C.** $P = \dfrac{9}{4}$. **D.** $P = -\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$ có hai nghiệm $z_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}i$, $z_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}i$.

Vậy $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}i} + \dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}i} = \dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$. Biết $z_1 - z_2$ có phần ảo là số thực âm. Tìm phần thực của số phức $w = 2z_1^2 - z_2^2$.

A. $6\sqrt{6}$. **B.** $-6\sqrt{6}$. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$ có nghiệm là $1 + \sqrt{6}i$ và $1 - \sqrt{6}i$. Do $z_1 - z_2$ có phần ảo là số thực âm nên $z_1 = 1 - \sqrt{6}i$ và $z_2 = 1 + \sqrt{6}i$. Suy ra $w = 2(1 - \sqrt{6}i)^2 - (1 + \sqrt{6}i)^2 = -5 - 6\sqrt{6}i$.

Vậy phần thực của w bằng -5.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$ (z_1 có phần ảo là số âm). Tìm số phức liên hợp của số phức $w = 3z_1^2 - 2z_2^2 + 1$.

A. $\overline{w} = 9 + 30i$. **B.** $\overline{w} = 9 - 30i$. **C.** $\overline{w} = 9 - 10i$. **D.** $\overline{w} = 30 - 9i$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$ có các nghiệm $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 3 + i$.

Ta có $w = 3z_1^2 - 2z_2^2 + 1 = 3(3-i)^2 - 2(3+i)^2 + 1 = 9 - 30i$. Từ đó có $\overline{w} = 9 + 30i$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho phương trình $z^2+bz+c=0$ với $b,c\in\mathbb{R}$. Xác định b và c nếu phương trình nhận $z=1-3i$ làm một nghiệm.

A. $b=-2,c=10$. **B.** $b=6,c=10$. **C.** $b=-6,c=-10$. **D.** $b=-6,c=10$.

Lời giải.

Thay $z=1-3i$ vào phương trình, ta có

$$(1-3i)^2+b(1-3i)+c=0\Leftrightarrow\begin{cases}3b+6=0\\b+c-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\c=10\end{cases}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-2z+5=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có: $z^2-2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1+2i\\z_2=1-2i.\end{array}\right.$

Khi đó $P=|z_1|+|z_2|=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phươngtrình: $z^2-2z+5=0$. Tính $P=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $P=2\sqrt{5}$. **B.** $P=20$. **C.** $P=10$. **D.** $P=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1-2i\\z=1+2i\end{array}\right.$. Khi đó, $P=|z_1|^2+|z_2|^2=2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho $z=2+3i$ là một số phức. Hãy tìm một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm.

A. $z^2+4z+13=0$. **B.** $z^2-4z+12=0$. **C.** $z^2+4z+12=0$. **D.** $z^2-4z+13=0$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai nhận $z=2+3i$ và $\overline{z}=2-3i$ làm nghiệm có dạng

$$(z-2-3i)(z-2+3i)=0\Leftrightarrow z^2-4z+13=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 23. Tìm tất cả các nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $(z^2+9)(z^2-z+1)=0$.

A. $z=-3i$. **B.** $z=-3i;z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

C. $z=-3i;z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **D.** $z=-2i;z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải.

$(z^2+9)(z^2-z+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\pm3i\\z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.\end{array}\right.$

Các nghiệm phức có phần ảo âm là $z=-3i;z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $2z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $A = |z_1| + |z_2|$.

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$\Delta' = 1 - 10 = -9$. Phương trình có hai nghiệm phức $z_1 = \frac{1+3i}{2}$, $z_2 = \frac{1-3i}{2}$.

$A = \left|\frac{1+3i}{2}\right| + \left|\frac{1-3i}{2}\right| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Phương trình bậc hai nào dưới đây nhận hai số phức $2 - 3i$ và $2 + 3i$ làm nghiệm ?

A. $z^2 + 4z + 13 = 0$. **B.** $z^2 + 4z + 3 = 0$. **C.** $z^2 - 4z + 13 = 0$. **D.** $z^2 - 4z + 3 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 2 + 3i$. Khi đó

$S = z_1 + z_2 = 4$; $P = z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(2 + 3i) = 4 + 9 = 13$.

Do đó z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình: $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Vậy $z^2 - 4z + 13 = 0$ là phương trình cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 3 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

A. $P = \frac{1}{6}$. **B.** $P = \frac{1}{3}$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = -\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i. \end{array}\right.$

Vậy $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{3}$.

Cách khác: Ta có $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 1$, $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = 3$. Khi đó $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Tính giá trị $P = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

Giải phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ được hai nghiệm là $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Do đó $|z_1| = |z_2| = 1$. Vậy $P = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào sau đây là điểm biểu diễn số phức z_1?

A. $P(-1; -\sqrt{2}i)$. **B.** $Q(-1; \sqrt{2}i)$. **C.** $N(-1; \sqrt{2})$. **D.** $M(-1; -\sqrt{2})$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i \end{array}\right.$. Vì z_1 có phần ảo âm nên $z_1 = -1 - \sqrt{2}i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z_1 là điểm $M(-1; -\sqrt{2})$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Phương trình $z^2+3z+9=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2. Tính $S=z_1z_2+z_1+z_2$.

A. -6. **B**. 6. **C**. 12. **D**. -12.

Lời giải.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{-b}{a}=-3 \\ z_1z_2=\dfrac{c}{a}=9. \end{cases}$

Do đó ta có $S=9-3=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho a, b là các số thực thỏa phương trình $z^2+az+b=0$ có nghiệm $3-2i$, tính $S=a+b$.

A. $S=19$. **B**. $S=-7$. **C**. $S=7$. **D**. $S=-19$.

Lời giải.

Thay $z=3-2i$ vào phương trình $z^2+az+b=0$ ta được phương trình

$$\begin{aligned} &(3-2i)^2+a(3-2i)+b=0 \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} 9-4+3a+b=0 \\ -12-2a=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} a=-6 \\ b=13 \end{cases}. \end{aligned}$$

Khi đó $S=a+b=-6+13=7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+3z+3=0$ trên tập $\mathbb{C}$. Tính $T=|z_1|+|z_2|$.

A. $2\sqrt{3}$. **B**. $2\sqrt{5}$. **C**. 6. **D**. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

$\Delta=3^2-4\cdot 3=-3=\left(\pm\sqrt{3}i\right)^2$.

Phương trình $z^2+3z+3=0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2} \\ z_2=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}. \end{array}\right.$

$$T=|z_1|+|z_2|=\left|\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right|+\left|\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trên tập số phức, tích 4 nghiệm của phương trình $x\left(x^2-1\right)(x+2)=24$ bằng

A. -24. **B**. -12. **C**. 12. **D**. 24.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 nghiệm của phương trình $x\left(x^2-1\right)(x+2)=24$.

Như vậy ta có $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=x(x^2-1)(x+2)-24=x^4+2x^3-x^2-2x-24$.

Đồng nhất hệ số tự do của hai vế suy ra $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=-24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2+4z+5=0$. Đặt $w=(1+z_1)^{100}+(1+z_2)^{100}$. Khi đó

A. $w=2^{50}i$. **B.** $w=-2^{51}$. **C.** $w=2^{51}$. **D.** $w=-2^{50}i$.

Lời giải.

Có $z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-2+i \\ z_2=-2-i. \end{cases}$

$$\begin{aligned} w &= (1+z_1)^{100}+(1+z_2)^{100}=(-1+i)^{100}=(1+i)^{100} \\ &= \left((1-i)^2\right)^{50}+\left((1+i)^2\right)^{50} \\ &= (-2i)^{50}+(2i)^{50}=-2^{50}-2^{50}=-2^{51}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Khi đó, phần thực của $w=z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 0.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=4 \\ z_1z_2=5. \end{cases}$

Ta có $w=z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=4^2-2\cdot 5=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+3z+5=0$. Tính $|z_1+z_2|$.

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=-3 \Rightarrow |z_1+z_2|=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+29=0$. Tính giá trị biểu thức $|z_1|^4+|z_2|^4$.

A. 1682. **B.** 58. **C.** 841. **D.** 1282.

Lời giải.

Ta có $\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 29=-112$.

Suy ra 2 nghiệm của phương trình là $z_1=-2+5i$ và $z_2=-2-5i$ nên $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Khi đó $|z_1|^4+|z_2|^4=1682$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+z+i=0$, giá trị của $\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right|$ bằng

A. $-i$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** i.

Lời giải.

Theo Vi-ét, ta có $z_1+z_2=-1$, $z_1z_2=i$. Vậy $\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right|=\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}\right|=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Biết $z_1 = -1 + \sqrt{2}i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + m = 0$ (m là tham số thực) và z_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình bậc 2 hệ số thực nếu có hai nghiệm phức thì hai nghiệm đó là hai số phức liên hợp với nhau, nghĩa là: $z_2 = \overline{z}_1 = -1 - \sqrt{2}i \Rightarrow |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hai số phức z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 3 + 2i \\ z_2 = 3 - 2i \end{array}\right.$.

$|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trên tập hợp số phức, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Phương trình $z^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

B. Phương trình $z^3 + 8 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

D. $z^2 = -4 \Leftrightarrow z = 2i$ hoặc $z = -2i$.

Lời giải.

Xét phương trình: $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 = i^2 \Leftrightarrow z = \pm i$.

Vậy khẳng định "Phương trình $z^2 + 1 = 0$ vô nghiệm" là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 2z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

A. $M\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$. **B.** $N\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. **C.** $P\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình $2z^2 - 2z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ (loại) hay $z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ (nhận).

Nên ta có $w = iz_0 = i\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$. Vậy điểm biểu diễn của w là $Q\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Phương trình nào sau đây nhận hai số phức $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$ làm nghiệm?

A. $z^2 - 2z + 3 = 0$. **B.** $z^2 - 2z - 3 = 0$. **C.** $z^2 + 2z + 3 = 0$. **D.** $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Lời giải.

Dễ thấy $z_1 + z_2 = 2, z_1 z_2 = 3$ nên theo định lí Vi-et đảo, z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $F = |z_1| + |z_2|$.

A. $F = 2\sqrt{5}$. **B**. $F = 6$. **C**. $F = 10$. **D**. $F = 3$.

Lời giải.

$z_{1,2} = 1 \pm 2i$ nên $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$. Suy ra $F = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong mặt phẳng phức, gọi M, N là điểm biểu diễn của các số phức là nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN = 4$. **B**. $MN = 5$. **C**. $MN = 20$. **D**. $MN = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$MN^2 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z_1} - \bar{z_2}) = (z_1 - z_2)(z_2 - z_1) = -(z_1 - z_2)^2 = -(z_1 + z_2)^2 + 4z_1z_2 = 20.$$

Suy ra $MN = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Giả sử phương trình $z^2 + az + b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) nhận $z_1 = 1 - i$ làm nghiệm. Tìm nghiệm z_2 còn lại.

A. $z_2 = -1 - i$. **B**. $z_2 = 1 - i$. **C**. $z_2 = -1 + i$. **D**. $z_2 = 1 + i$.

Lời giải.

Do $a, b \in \mathbb{R}$ và phương trình có một nghiệm phức là z_1, nên nghiệm phức còn lại là số phức liên hợp của z_1. Vậy, $z_2 = \bar{z_1} = 1 + i$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 3z + 5 = 0$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w = z_1z_2 + (z_1 + z_2)i$.

A. Phần thực bằng 5, phần ảo bằng 3. **B**. Phần thực bằng 3, phần ảo bằng 5.

C. Phần thực bằng -5, phần ảo bằng 3. **D**. Phần thực bằng 5, phần ảo bằng -3.

Lời giải.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 3z + 5 = 0$ nên ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -3 \\ z_1z_2 = 5. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} w &= z_1z_2 + (z_1 + z_2)i \\ &= 5 - 3i. \end{aligned}$$

Do đó số phức w có phần thực bằng 5, phần ảo bằng -3.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong tập số phức $\mathbb{C}$, biết z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $(z_1 + z_2)^2$.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $z_1 + z_2 = 2 \Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 10 = 0$. Khi đó giá trị của $P = z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2$ là

A. $P = 14$. **B.** $P = -14$. **C.** $P = -6$. **D.** $P = 6$.

Lời giải.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 \cdot z_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow P = z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 = -6.$

Chọn đáp án C □

Câu 49. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính giá trị của $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $P = 5$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 9$. **D.** $P = 10$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 - i = z_1 \\ z = 2 + i = z_2. \end{array}\right.$

Do đó $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |2 - i|^2 + |2 + i|^2 = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $5z^2 - 7z + 11 = 0$. Tính $T = |z_1 - z_2|$.

A. $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}$. **B.** $\dfrac{171}{25}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có $5z^2 - 7z + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{7 + i\sqrt{171}}{10} \\ z = \dfrac{7 - i\sqrt{171}}{10}. \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = \left|\dfrac{i\sqrt{171}}{5}\right| = \dfrac{\sqrt{171}}{5}.$

Vậy $T = \dfrac{\sqrt{171}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ có một nghiệm $z = -2 + i$. Giá trị $a - b$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải.

Phương trình $z^2 + az + b = 0$ có một nghiệm $z = -2 + i$ nên ta có $(-2 + i)^2 + a(-2 + i) + b = 0$

$\Leftrightarrow (-2a + b + 3) + (a - 4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5. \end{cases}$

Vậy $a - b = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức $w = (i + 1)\, z_1$.

A. $M\,(-5; -1)$. **B.** $M\,(5; 1)$. **C.** $M\,(-1; -5)$. **D.** $M\,(1; 5)$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3 + 2i \\ z = -3 - 2i. \end{array}\right.$

Vì z_1 là nghiệm có phần ảo dương nên $z_1 = -3 + 2i$.

Ta có $w=(i+1)(-3+2i)=-5-i \Rightarrow M(-5;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $z^2-4z+5=0$. Biểu thức $P=(z_1-1)^{2018}+(z_2-1)^{2018}$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 2^{2018}. **C.** 2^{1009}. **D.** 2.

Lời giải.

Ta thấy P là biểu thức có tính đối xứng với z_1 và z_2.

Ta có $\Delta'=-1=i^2$. Do đó phương trình có hai nghiệm phức $z_1=2-i$ và $z_2=2+i$.

Khi đó

$$\begin{aligned}P&=(1-i)^{2018}+(1+i)^{2018}=\left[(1-i)^2\right]^{1009}+\left[(1+i)^2\right]^{1009}\\&=(-2i)^{1009}+(2i)^{1009}=-2^{1009}i+2^{1009}i=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Tổng các nghiệm phức của phương trình $z^3+z^2-2=0$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $1-i$. **D.** $1+i$.

Lời giải.

Ta có $z^3+z^2-2=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+2z+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_1=-1+i\\z_2=-1-i\\z_3=1\end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm phức là $z_1+z_2+z_3=-1+i-1-i+1=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho phương trình $x^2-2x+c=0, (c\in\mathbb{R}, c>1)$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2. Biết rằng z_1 là số phức có phần ảo dương và $|z_1|=5\sqrt{2}$. Tính $|z_1-z_2|$.

A. 14. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{46}$. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=1-c=\left(\sqrt{c-1}i\right)^2 \Rightarrow z_1=1+\sqrt{c-1}i$.

Vì $|z_1|=5\sqrt{2} \Rightarrow c=50$. Do vậy ta có $\begin{cases}z_1=1+7i\\z_2=1-7i\end{cases} \Rightarrow |z_1-z_2|=14$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Biết z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị biểu thức $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là

A. $\dfrac{16}{5}$. **B.** $\dfrac{-4}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=4, z_1\cdot z_2=5$. Vậy

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}=\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}=\frac{6}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 57. Gọi z_1 và z_2 (z_2 có phần ảo âm) là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-3z+3=z$. Giá trị của biểu thức $2018\,|2z_1|-2017\,|2z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

☑ Ta có $4z^2-3z+3=z \Leftrightarrow 4z^2-4z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=z_1 \\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=z_2 \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

☑ Vậy $2018\,|2z_1|-2017\,|2z_2|=2018\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2017\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+6=0$. Tính $P=z_1+z_2$.

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-et, ta có $P=z_1+z_2=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=\sqrt{2}$. **B.** $T=2$. **C.** $T=8$. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $z^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2i \\ z_2=2i. \end{array}\right.$

Suy ra $M(0;-2)$; $N(0;2)$ nên $T=OM+ON=\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_o$?

A. $M_1\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **B.** $M_2\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $M_3\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. **D.** $M_4\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4z^2-16z+17=0$ có $\Delta'=64-4\cdot 17=-4=(2i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1=\dfrac{8-2i}{4}=2-\dfrac{1}{2}i, z_2=\dfrac{8+2i}{4}=2+\dfrac{1}{2}i$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0=2+\dfrac{1}{2}i$.

Ta có $w=iz_o=-\dfrac{1}{2}+2i$.

Vậy điểm biểu diễn $w=iz_o$ là $M_2\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2|+|z_2^2|$ bằng

A. 10. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $6-8i$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-ét ta có $z_1+z_2=4$, $z_1z_2=5$.
Chú ý rằng $|z_1^2|=|z_1|\cdot|z_1|=|z_1|\cdot|z_2|=|z_1z_2|=5$, tương tự $|z_2^2|=5$.
Vậy ta có $|z_1^2|+|z_2^2|=10$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$.

A. $T=\dfrac{3}{2}i$. **B.** $T=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **C.** $T=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $T=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}=\dfrac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}=\dfrac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3}{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+3=0$. Tính $P=2|z_1|+5|z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=7\sqrt{3}$. **C.** $P=5\sqrt{3}$. **D.** $P=3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $z^2+2z+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1+\sqrt{2}i\\z=-1-\sqrt{2}i\end{array}\right.\Rightarrow|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$.

Do đó $P=7\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=2$. **B.** $T=8$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $z^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-2i\\z_2=2i.\end{array}\right.$

Suy ra $M(0;-2)$; $N(0;2)$ nên $T=OM+ON=\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Số nghiệm của phương trình $x^4-2x^2-3=0$ trên tập số phức là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Trên tập số phức phương trình bậc n có n nghiệm (kể cả nghiệm phức) nên phương trình đã cho có 4 nghiệm trên tập số phức.
Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho phương trình $z^2-2z+3=0$ trên tập số phức, có hai nghiệm là z_1, z_2. Khi đó $|z_1|^2+|z_2|^2$ có giá trị là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-2z+3=0$ có hai nghiệm là z_1, z_2.

Do đó $\begin{cases} z_1=1+i\sqrt{2} \\ z_2=1-i\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3} \\ |z_2|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1|^2=3 \\ |z_2|^2=3. \end{cases}$

Vậy $|z_1|^2+|z_2|^2=3+3=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+11=0$. Giá trị của biểu thức $|3z_1|-|z_2|$ bằng

A. 11. **B**. 22. **C**. $\sqrt{11}$. **D**. $2\sqrt{11}$.

Lời giải.

Có $z^2-3z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{35}}{2}i \\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{35}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{11}$.

Vậy $|3z_1|-|z_2|=3|z_1|-|z_2|=2\sqrt{11}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2-8z+25=0$. Giá trị $|z_1-z_2|$ bằng

A. 8. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có: $z^2-8z+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=4+3i \\ z=4-3i \end{array}\right.$. Do đó phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} z_1=4+3i \\ z_2=4-3i \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow |z_1-z_2|=|(4+3i)-(4-3i)|=|6i|=6.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 69. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-6z+13=0$. Tính $|z_0+1-i|$.

A. $\sqrt{13}$. **B**. 13. **C**. 5. **D**. 25.

Lời giải.

Ta có: $z_0=3-2i$. Khi đó $|z_0+1-i|=|3-2i+1-i|=|4-3i|=\sqrt{16+9}=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+6z+5=0$ trong đó z_2 có phần ảo âm. Phần thực vào phần ảo của số phức z_1+3z_2 lần lượt là

A. $-6;1$. **B**. $-1;-6$. **C**. $-6;-1$. **D**. $6;1$.

Lời giải.

Ta có $2z^2+6z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i \\ z_2=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_1+3z_2=-6-i$, do đó phần thực và phần ảo của số phức z_1+3z_2 lần lượt là $-6;-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-z+1=0$ là $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Tính $a+\sqrt{3}b$.

A. -2. **B**. 1. **C**. 2. **D**. -1.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương $\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$.

Do phần ảo của z dương nên $a=\dfrac{1}{2}$ và $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó $a+\sqrt{3}b=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho số phức $z=a+bi$. Phương trình nào dưới đây nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm?

A. $z^2-2az+a^2b^2=0$. **B.** $z^2-2az+a^2+b^2=0$.

C. $z^2-2az-a^2-b^2=0$. **D.** $z^2+2az+a^2+b^2=0$.

Lời giải.

Ta có $z=a+bi$ và $\overline{z}=a-bi$ là nghiệm của phương trình

$$(z-a-bi)(z-a+bi)=0\Leftrightarrow(z-a)^2+b^2=0\Leftrightarrow z^2-2az+a^2+b^2=0.$$

Vậy z và $\overline{z}$ là nghiệm của phương trình $z^2-2az+a^2+b^2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+10=0$. Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn z_1,z_2 trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=6$. **B.** $AB=\sqrt{10}$. **C.** $AB=2\sqrt{10}$. **D.** $AB=2$.

Lời giải.

Ta có $z_1=1+3i$ và $z_2=1-3i\Rightarrow A(1;3)$ và $B(1;-3)\Rightarrow AB=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-2z+5=0$. Mô-đun của số phức $w=4-z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 25.

Lời giải.

Phương trình $2z^2-2z+5=0$ có hai nghiệm phức $z_{1,2}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{3}{2}i$. Ta xét 2 trường hợp

☑ TH1. $z_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$, $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\Rightarrow w=4-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)^2=4+3i\Rightarrow|w|=5$.

☑ TH2. $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$, $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\Rightarrow w=4-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right)^2=4-3i\Rightarrow|w|=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Khi đó, giá trị của $z_1^2+z_2^2$ là

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $-\dfrac{9}{4}$. **C.** 9. **D.** 4.

Lời giải.

$2z^2+\sqrt{3}z+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}z=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{21}}{4}i & (=z_1)\\z=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{21}}{4}i & (=z_2)\end{array}\right.$. Khi đó $z_1^2+z_2^2=-\dfrac{9}{4}$.

Cách khác: $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z_1-\dfrac{3}{2}i$?

A. $M(-2;1)$. **B.** $M(3;-2)$. **C.** $M(3;2)$. **D.** $M(2;1)$.

Lời giải.

Ta có $z_1=2-\dfrac{1}{2}i \Rightarrow w=(1+2i)\left(2-\dfrac{1}{2}i\right)-\dfrac{3}{2}i=3+2i \Rightarrow M(3;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $P=(z_1-2z_2)\,\overline{z}_2-4z_1$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -5. **D.** -15.

Lời giải.

Ta có $P=z_1\cdot\overline{z}_2-2z_2\cdot\overline{z}_2-4z_1=(z_1)^2-2|z_2|^2-4z_1=(z_1)^2-2|z_1|^2-4z_1$.

Giải phương trình đã cho, thu được hai nghiệm là $2\pm\mathrm{i}$.

- Nếu $z_1=2-\mathrm{i}$ thì $P=(2-\mathrm{i})^2-2(2^2+1^2)-4(2-\mathrm{i})=4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-10-8+4\mathrm{i}=-15$.
- Nếu $z_1=2+\mathrm{i}$ thì $P=(2+\mathrm{i})^2-2(2^2+1^2)-4(2+\mathrm{i})=4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-10-8-4\mathrm{i}=-15$.

Vậy $P=-15$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Trên tập số phức, biết phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có một nghiệm là $z=-2+i$. Tính giá trị của $T=a-b$.

A. $T=4$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=9$. **D.** $T=1$.

Lời giải.

$z=-2+i$ là một nghiệm của phương trình khi và chỉ khi

$$(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0 \Leftrightarrow 4-4i-1-2a+ai+b=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-2a+b=0\\-4+a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\b=5.\end{cases}$$

Suy ra $T=a-b=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$ trên mặt phẳng phức. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=4i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=-1+2i\\z=-1-2i\end{array}\right.$.

Đặt $A(-1;2), B(-1;-2)$, suy ra $\overrightarrow{AB}=(0;-4) \Rightarrow AB=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-7z+51i^{2008}=0$. Tính giá trị biểu thức $P=2z_1-z_1z_2+2z_2$.

A. $P=-37$. **B.** $P=58$. **C.** $P=-65$. **D.** $P=-44$.

Lời giải.

Ta có $z^2-7z+51i^{2008}=0 \Leftrightarrow z^2-7z+51=0$.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=7 \\ z_1\cdot z_2=51. \end{cases}$

Từ đó suy ra $P=2z_1-z_1z_2+2z_2=2(z_1+z_2)-z_1z_2=14-51=-37$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Tìm số phức liên hợp của số phức z_1+2z_2.

A. $-3+2i$. **B.** $3-2i$. **C.** $2+i$. **D.** $2-i$.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+2i \\ z_2=-1-2i \end{array}\right.$

Khi đó $w=z_1+2z_2=-3-2i \Rightarrow$ số phức liên hợp là $\overline{w}=-3+2i$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình $(1+2i)z-8-i=0$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-1$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Lời giải.

Vì $(1+2i)z-8-i=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{8+i}{1+2i}=\dfrac{(8+i)(1-2i)}{1+4}=\dfrac{10-15i}{5}=2-3i$ nên $\begin{cases} a=2 \\ b=-3. \end{cases}$.

Vậy $S=a+b=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Tìm các số thực b, c để phương trình $z^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ làm một nghiệm.

A. $b=2, c=-2$. **B.** $b=2, c=2$. **C.** $b=-2, c=2$. **D.** $b=-2, c=-2$.

Lời giải.

Ta có phương trình $z^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ làm một nghiệm.

$\Rightarrow (1+i)^2+b(1+i)+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 84. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$ với a, b là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=2a-b$?

A. 9. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$ nên ta có $(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0$

$\Leftrightarrow (-2a+b+3)+(a-4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5. \end{cases}$

Vậy $T=2a-b=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính iz_0.

A. $iz_0=3-i$. **B.** $iz_0=-3i+1$. **C.** $iz_0=-3-i$. **D.** $iz_0=3i-1$.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+3i \\ z=-1-3i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_0=-1+3i$. Do đó $iz_0=i(-1+3i)=-3-i$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4+z^2-6=0$. Tính $S=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$.

A. $S=2\sqrt{3}$. **B.** $S=2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. **C.** $S=2\sqrt{2}$. **D.** $S=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $z^4+z^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=-3 \\ z^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm i\sqrt{3} \\ z=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Do đó $S=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=\left|-i\sqrt{3}\right|+\left|i\sqrt{3}\right|+\left|-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}\right|=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm là $1+2i$?

A. $z^2-2z+3=0$. **B.** $z^2+2z+5=0$. **C.** $z^2-2z+5=0$. **D.** $z^2+2z+3=0$.

Lời giải.

$$z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 88. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Số phức liên hợp của số phức z_1+2z_2 là

A. $-3+2i$. **B.** $3-2i$. **C.** $2+i$. **D.** $2-i$.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1-2i \\ z=-1+2i \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1=-1+2i \\ z_2=-1-2i \end{array}\right. \Rightarrow \overline{z_1+2z_2}=-3+2i.$

Chọn đáp án A □

Câu 89. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+3=0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình nên theo định lý Viet Ta có $\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=2 \\ z_1\cdot z_2=3. \end{array}\right.$

Do đó $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1\cdot z_2}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Gọi A và B là hai điểm trong mặt phẳng biểu diễn hai nghiệm phức phân biệt của phương trình $z^2+6z+12=0$. Tính độ dài của đoạn thẳng AB.

A. $AB = 2\sqrt{3}$. **B.** $AB = \sqrt{3}$. **C.** $AB = 3$. **D.** $AB = 12$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 6z + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -3 - \sqrt{3}i \\ z_2 = -3 + \sqrt{3}i \end{array}\right.$. Do đó, $A\left(-3; -\sqrt{3}\right)$ và $B\left(-3; \sqrt{3}\right)$.

Ta tính được $AB = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}i$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 z_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ta có

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 92. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $A = 2\sqrt{10}$. **B.** $A = 20$. **C.** $A = 10$. **D.** $A = \sqrt{10}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm là $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = -1 + 3i$.

Suy ra $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $(z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ bằng

A. $-2^{1010}i$. **B.** $2^{1009}i$. **C.** 0. **D.** 2^{2018}.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 2 + i$.

Ta có

$$\begin{aligned} (z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018} &= (1 - i)^{2018} + (1 + i)^{2018} \\ &= \left[(1 - i)^2\right]^{1009} + \left[(1 + i)^2\right]^{1009} \\ &= (-2i)^{1009} + (2i)^{1009} \\ &= -(2i)^{1009} + (2i)^{1009} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z-i=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2-2i|$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 9. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=2$ nên $P=|2-2i|=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho các số phức $z_1=3+2i$, $z_2=3-2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

A. $z^2+6z-13=0$. **B.** $z^2+6z+13=0$. **C.** $z^2-6z+13=0$. **D.** $z^2-6z-13=0$.

Lời giải.

Ta có: $z_1+z_2=6$, $z_1\cdot z_2=13$

Suy ra phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là $z^2-6z+13=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+1=0$, trong đó số phức z_1 có phần ảo âm. Tính z_1+3z_2.

A. $z_1+3z_2=\sqrt{2}i$. **B.** $z_1+3z_2=-\sqrt{2}$. **C.** $z_1+3z_2=-\sqrt{2}i$. **D.** $z_1+3z_2=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $z^2=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{i^2}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\\&z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\end{aligned}\right.$.

Từ giả thiết ta có $z_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

Suy ra $z_1+3z_2=\sqrt{2}i$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm phức của phương trình $z^3+8=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|+|z_3|$ bằng

A. $2+2\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** $2+\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $z^3+8=0\Leftrightarrow(z+2)(z^2-2z+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=-2\\&z^2-2z+4=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=-2\\&z=1-\sqrt{3}i\\&z=1+\sqrt{3}i\end{aligned}\right.$.

Do đó $|z_1|+|z_2|+|z_3|=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Phương trình $z^2+z+3=0$ có hai nghiệm z_1, z_2 trên tập hợp số phức. Tính giá trị của biểu thức $P=z_1^2+z_2^2$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-\dfrac{21}{2}$. **C.** $P=6$. **D.** $P=7$.

Lời giải.

Có $z^2+z+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\\&z=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{11}}{2}.\end{aligned}\right.$

Vậy $P=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2=-5.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho phương trình $z^2-2z+2=0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phương trình đã cho không có nghiệm nào là số thuần ảo.

B. Phương trình đã cho có hai nghiệm phức.

C. Phương trình đã cho không có nghiệm phức.

D. Phương trình đã cho không có nghiệm thực.

Lời giải.

Ta có: $z^2-2z+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1-i\\z_2=1+i.\end{array}\right.$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phức không phải là số thuần ảo.

Vậy mệnh đề: " Phương trình đã cho không có nghiệm phức" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 100. Cho các số phức $z_1=3+2i$, $z_2=3-2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là

A. $z^2-6z+13=0$. **B**. $z^2+6z+13=0$. **C**. $z^2+6z-13=0$. **D**. $z^2-6z-13=0$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có: $S=z_1+z_2=6$, $P=z_1z_2=|z_1|^2=9+4=13$ nên z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-Sz+P=0\Leftrightarrow z^2-9z+13=0$.

Cách 2: Do $z_1=3+2i$, $z_2=3-2i$ là hai nghiệm của phương trình nên

$(z-z_1)(z-z_2)=0\Leftrightarrow(z-3-2i)(z-3+2i)=0\Leftrightarrow(z-3)^2+4=0\Leftrightarrow z^2-6z+13=0.$

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. B	5. A	6. D	7. A	8. B	9. B	10. A
11. B	12. B	13. D	14. C	15. A	16. B	17. D	18. A	19. A	20. A
21. A	22. D	23. C	24. D	25. C	26. B	27. C	28. D	29. B	30. C
31. A	32. A	33. B	34. A	35. A	36. A	37. B	38. A	39. D	40. A
41. D	42. A	43. A	44. D	45. D	46. D	47. D	48. C	49. D	50. A
51. A	52. A	53. A	54. B	55. A	56. D	57. D	58. B	59. D	60. B
61. A	62. D	63. B	64. C	65. D	66. B	67. D	68. C	69. C	70. C
71. C	72. B	73. A	74. B	75. B	76. C	77. D	78. B	79. C	80. A
81. A	82. A	83. C	84. D	85. C	86. D	87. C	88. A	89. A	90. A
91. D	92. B	93. C	94. C	95. C	96. A	97. D	98. A	99. C	100. A

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|\,i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-6$. **D.** $S=6$.

Lời giải.

Ta có $z+1+3i-|z|\,i=0\Leftrightarrow (a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b+3-\sqrt{1+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=\dfrac{-4}{3}\end{cases}$$

Suy ra $S=2a+3b=-6$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Gọi z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình $iz^3-2z^2+(1-i)\,z+i=0$. Biết z_1 là số thuần ảo. Đặt $P=|z_2-z_3|$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $4<P<5$. **B.** $2<P<3$. **C.** $3<P<4$. **D.** $1<P<2$.

Lời giải.

$$iz^3-2z^2+(1-i)\,z+i=0\Leftrightarrow (z+i)\,(iz^2-z+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=-i\\ iz^2-z+1=0\ (1).\end{cases}$$

Vì z_1 là số thuần ảo nên z_2, z_3 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có $(z_2-z_3)^2=(z_2+z_3)^2-4z_2z_3=-1+4i$.

$\Rightarrow\left|(z_2-z_3)^2\right|=|-1+4i|=\sqrt{17}\Rightarrow P=|z_2-z_3|=\sqrt[4]{17}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Kí hiệu z_1,z_2,z_3,z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4-5z^2-36=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$.

A. $T=6$. **B.** $T=-4$. **C.** $T=10$. **D.** $T=6+2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $z^4-5z^2-36=0\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=9\\ z^2=-4\end{cases}$.

Từ đó, phương trình đã cho có các nghiệm $z_1=-3, z_2=3, z_3=2i, z_4=-2i$, do đó $T=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^4+z_2^4$ bằng

A. 14. **B.** -7. **C.** -14. **D.** 7.

Lời giải.

$z^2-2z+5=0\quad(1)$.

$\Delta'_{(1)}=-4=4i^2$.

Vậy 2 nghiệm phức của (1) là $\begin{cases}z_1=1+2i\\ z_2=1-2i.\end{cases}$

$z_1^4+z_2^4=(1+2i)^4+(1-2i)^4=-14$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Biết phương trình $z^2+2017\cdot 2018z+2^{2018}=0$ có hai nghiệm z_1, z_2. Tính $S=|z_1|+|z_2|$

A. 2^{2018}. **B.** 2^{2019}. **C.** 2^{1009}. **D.** 2^{1010}.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2017\cdot 2018z+2^{2018}=0 \quad (1)$

(1) có $\Delta=(2017\cdot 2018)^2-4\cdot 2^{2018}<0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phức z_1, z_2.

Khi đó $z_1=\overline{z_2} \Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{z_1\cdot z_2}=\sqrt{2^{2018}}=2^{1009} \Rightarrow S=2^{1010}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Biết rằng phương trình $z^2+bz+c=0$ $(b,c\in\mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z_1=1+2i$. Khi đó

A. $b+c=2$. **B.** $b+c=3$. **C.** $b+c=0$. **D.** $b+c=7$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai hệ số thực có nghiệm phức thì hai nghiệm đó là liên hợp của nhau.

Phương trình đã cho có nghiệm còn lại là $z_2=1-2i$.

Khi đó, theo Vi-et ta có $z_1+z_2=-b \Rightarrow b=-2$.

Và $z_1\cdot z_2=c \Rightarrow c=5$. Suy ra $b+c=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_1, z_2\neq 0$; $z_1+z_2\neq 0$ và $\dfrac{1}{z_1+z_2}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{2}{z_2}$. Tính $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z_1+z_2}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{2}{z_2} \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1+z_2}=\dfrac{z_2}{z_1}+\dfrac{2z_2}{z_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\dfrac{z_1}{z_2}+1}=\dfrac{z_2}{z_1}+2.$ $(\star)$

Đặt $t=\dfrac{z_1}{z_2}$, khi đó

$(\star) \Leftrightarrow \dfrac{1}{t+1}=\dfrac{1}{t}+2 \Leftrightarrow 2t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i.$

Suy ra $|t|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho phương trình $z^2+mz+n=0$ với $m,\ n\in\mathbb{R}$ có một nghiệm là $z=1+i$. Tìm mô-đun của số phức $w=m+ni$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải.

Đặt $z_1=1+i$, phương trình $z^2+mz+n=0$ có thêm một nghiệm là $z_2=1-i$.

Ta có

$$\begin{cases} z_1+z_2=2=-m \\ z_1z_2=2=n. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} m=-2 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow w=m+ni=-2+2i.$$

Vậy $|w| = |-2+2i| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Gọi z_1, z_2, z_3 và z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4 = \dfrac{2018}{2019}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$.

A. $\dfrac{(81\cdot 2018 - 2019\cdot 16)(2018 - 2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16 - 2019)^2}$.

B. $\dfrac{(81\cdot 2018 + 2019\cdot 16)(2018 - 2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16 - 2019)^2}$.

C. $\dfrac{(81\cdot 2018 - 2019\cdot 16)(2018 + 2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16 - 2019)^2}$.

D. $\dfrac{(81\cdot 2019 - 2018\cdot 16)(2019 - 2018\cdot 16)}{(2018\cdot 16 - 2019)^2}$.

Lời giải.

Đặt $f(z) = 2018(2z-i)^4 - 2019(z-1)^4 = (2018\cdot 16 - 2019)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.

Ta lại có $z_k^2 + 1 = (z_k+i)(z_k-i)$, với $k = 1,2,3,4$. Do đó

$$P = \frac{f(i)\cdot f(-i)}{(2018\cdot 16 - 2019)^2} = \frac{(81\cdot 2018 - 2019\cdot 16)(2018 - 2019\cdot 16)}{(2018\cdot 16 - 2019)^2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm phức là z_1, z_2. Tính $A = |z_1| + |z_2| + z_1\cdot z_2$.

A. $A = 25 + 2\sqrt{5}$. **B.** $A = 0$. **C.** $A = 5 - 2\sqrt{5}$. **D.** $A = 5 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1\cdot z_2 = 5$.

Suy ra $A = 5 + 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Gọi d là giá trị nhỏ nhất của mô-đun số phức z thỏa mãn $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$. Khẳng định nào sao đây là đúng?

A. $d \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $d \in (1;2)$. **C.** $d \in \left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$. **D.** $d \in (0;1)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = 4\\
\Leftrightarrow\ &\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 4\\
\Leftrightarrow\ &|z|^2 + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{|z|^2} = 4\\
\Leftrightarrow\ &|z|^2 + \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} = 4\\
\Leftrightarrow\ &|z|^2 + \frac{(z+\bar{z})^2 - 2|z|^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} = 4\\
\Leftrightarrow\ &|z|^4 - 6|z|^2 + 1 = -(z+\bar{z})^2 \le 0\\
\Rightarrow\ &3 - 2\sqrt{2} \le |z|^2 \le 3 + 2\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{2} - 1 \le |z| \le \sqrt{2} + 1.
\end{aligned}$$

$|z| = \sqrt{2} - 1$ khi $\begin{cases} z = -\bar{z} \\ |z| = \sqrt{2} - 1. \end{cases}$

Vậy $d = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow d \in (0;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = [(i - z_1)(i - z_2)]^{2018}$.

A. 2^{1009}. **B.** -2^{1009}. **C.** 2^{2018}. **D.** -2^{2018}.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 \cdot z_2 = 2. \end{cases}$

Mặt khác, ta có

$$w = \left[i^2 - i(z_1 + z_2) + z_1 z_2\right]^{2018} = (1-i)^{2018} = \left[(1-i)^2\right]^{1009} = (-2i)^{1009} = -2^{1009} \cdot i \cdot (i^2)^{504} = -2^{1009} \cdot i.$$

Vậy phần ảo của w là -2^{1009}.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho z là số phức có mô-đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+w}$. Mô-đun của số phức w là

A. 2015. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2017.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+w} \Rightarrow (z+w)^2 = w^2 + wz + z^2 \Leftrightarrow w^2 + wz + z^2 = 0 \Leftrightarrow w = \dfrac{-z \pm z\sqrt{3}i}{2}$.

Với $w = \dfrac{-z - z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \dfrac{\left|-z - z\sqrt{3}i\right|}{2} = |-z| \cdot \dfrac{\left|1 + i\sqrt{3}\right|}{2} = |z| = 2017.$

Với $w = \dfrac{-z + z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \dfrac{\left|-z + z\sqrt{3}i\right|}{2} = |-z| \cdot \dfrac{\left|1 - i\sqrt{3}\right|}{2} = |z| = 2017.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 - 3z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}$.

A. $P = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $P = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$. **C.** $P = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $P = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Theo Vi-ét, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2} \\ z_1 z_2 = 1. \end{cases}$

Khi đó $P = \sqrt{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2} = \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - z_1 z_2} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và $|z| \geq 2$. Tính $2M - m$.

A. $2M - m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $2M - m = \dfrac{5}{2}$. **C.** $2M - m = 10$. **D.** $2M - m = 6$.

Lời giải.

Đặt $w=\dfrac{i}{z}$, $|z|\geq 2\Rightarrow |w|\leq \dfrac{1}{2}$. $P=\left|\dfrac{i}{z}+1\right|=|w+1|$.

Ta có $1-|w|\leq |w+1|\leq 1+|w|\Rightarrow \dfrac{1}{2}\leq P\leq \dfrac{3}{2}\Rightarrow 2M-m=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Biết số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $T=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{33}$. **B.** $|z|=50$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, theo giả thiết $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$ (C).

Ngoài ra $T=|z+2|^2-|z-i|^2\Leftrightarrow 4x+2y+3-T=0$ (Δ) đạt giá trị lớn nhất.

Rõ ràng (C) và (Δ) có điểm chung do đó $\dfrac{|23+T|}{2\sqrt{5}}\leq\sqrt{5}\Leftrightarrow 13\leq T\leq 33$.

Vì T đạt giá trị lớn nhất nên $T=33$ suy ra $4x+2y-30=0\Leftrightarrow y=15-2x$ thay vào (C) ta được $5x^2-50x+125=0\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=5$. Vậy $|z|=5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Nếu $z=i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$ với $(a,b\in\mathbb{R})$ thì $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải.

$z=i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có:

$$i^2+a.i+b=0\Leftrightarrow ai+b=1\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a+b=1$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hai số thực b, c với $c>0$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2+2bz+c=0$. Tìm điều kiện của b và c sao cho tam giác OAB là tam giác vuông (với O là gốc tọa độ).

A. $b=c$. **B.** $b^2=c$. **C.** $2b^2=c$. **D.** $b^2=2c$.

Lời giải.

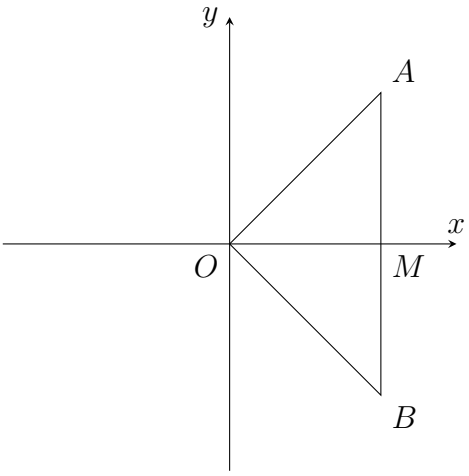
Theo bài ra ta giả sử A, B là điểm biểu diễn lần lượt của $z_1=x+yi$, $z_2=x-yi$, suy ra A và B đối xứng nhau qua trục hoành.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$$z_1+z_2=2x=-2b \text{ và } z_1z_2=x^2+y^2=c.$$

Để tam giác OAB vuông khi và chỉ khi $OM=MA=MB\Leftrightarrow |x|=|y|\Leftrightarrow x^2=y^2=b^2$.

Từ đó suy ra $2b^2=c$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4+3z^2+4=0$ trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức $T=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$.

A. $T=8$. **B.** $T=6$. **C.** $T=4$. **D.** $T=2$.

Lời giải.

$z^4+3z^2+4=0$.

Đặt $X=z^2$. Khi đó phương trình trở thành $X^2+3X+4=0$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} S=X_1+X_2=-3 \\ P=X_1\cdot X_2=4 \end{cases}$

Ta có: $\overline{X_1}=X_2$.

$P=X_1\cdot X_2=X_1\cdot\overline{X_1}=|X_1|^2=|z^2|^2=4\Rightarrow|z^2|=2$.

Do đó $T=4\cdot|z^2|=4\cdot2=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2+bz+c=0$ với $b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $3w-8i+13$ với w là một số phức. Tính $S=b^2-c^3$.

A. $S=-496$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-26$. **D.** $S=8$.

Lời giải.

Gọi $z_1=w+3=m+ni$ và $z_2=3w-8i+13=m-ni$, với $m,n\in\mathbb{R}$ là hai nghiệm phức của phương trình.

Vậy ta có $w=m-3+ni=\dfrac{m-13}{3}+\dfrac{8-n}{3}i\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-13}{3}=m-3\\ \dfrac{8-n}{3}=n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\ n=2.\end{cases}$

Mặt khác ta có $\begin{cases}z_1+z_2=-b=2m\\ z_1z_2=c=m^2+n^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\ c=8\end{cases}$, vậy ta suy ra $S=b^2-c^3=-496$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Có bao nhiêu số thực m sao cho phương trình bậc hai $2z^2+2(m-1)z+2m+1=0$ có 2 nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 đều không phải là số thực và thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{10}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Do z_1, z_2 không phải số thực nên z_1, z_2 là các số phức liên hợp. Suy ra $z_1z_2=|z_1|^2=|z_2|^2$.

$$\begin{aligned}
&|z_1|+|z_2|=\sqrt{10}\\
\Leftrightarrow\ &|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=10\\
\Leftrightarrow\ &2z_1z_2+2|z_1z_2|=10\\
\Leftrightarrow\ &2\frac{2m+1}{2}+2\left|\frac{2m+1}{2}\right|=10\\
\Leftrightarrow\ &|2m+1|=9-2m\\
\Leftrightarrow\ &m=2.
\end{aligned}$$

Với $m=2$, phương trình có 2 nghiệm $z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$ và $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Gọi S là tổng tất cả các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=7$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $(z-1)^2=m$.

☑ **Trường hợp 1**: $m\geq 0$, phương trình tương đương với $\hoac{z=\sqrt{m}+1\\z=-\sqrt{m}+1}$.

Mà $|z|=2$ nên $\hoac{m=1\\m=9}$.

☑ **Trường hợp 2**: $m<0$, phương trình tương đương với $\hoac{z=i\sqrt{-m}+1\\z=-i\sqrt{-m}+1}$.

Mà $|z|=2$ nên $-m+1=2\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy $S=1+9-3=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $T=2\sqrt{10}$. **B.** $T=\sqrt{10}$. **C.** $T=10$. **D.** $T=20$.

Lời giải.

Ta có

$$z^2+2z+10=0\Leftrightarrow (z+1)^2+9=0\Leftrightarrow (z+1)^2=(3i)^2\Leftrightarrow \hoac{z+1=3i\\z+1=-3i}\Leftrightarrow \hoac{z=-1+3i\\z=-1-3i.}$$

Do đó $T=|z_1|^2+|z_2|^2=20$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Biết $z=1-2i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ (với $a,b\in\mathbb{R}$). Khi đó $a+b$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải.

Vì $z=1-2i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có

$$(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0\Leftrightarrow a+b-3+(-4-2a)i=0\Leftrightarrow \heva{a+b-3=0\\-4-2a=0}\Leftrightarrow \heva{a=-2\\b=5.}$$

Vậy $a+b=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=z(1+i)$ là đường tròn

A. Tâm $I(3;-1)$, $R=3\sqrt{2}$. **B.** Tâm $I(-3;-1)$, $R=3$.

C. Tâm $I(-3;1)$, $R=3\sqrt{2}$. **D.** Tâm $I(-3;1)$, $R=3$.

Lời giải.

Ta có $|z-1+2i|=3 \Leftrightarrow |z(1+i)+(-1+2i)(1+i)|=3|1+i| \Leftrightarrow |w-3+i|=3\sqrt{2}$.
Giả sử $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow |x-3+(y+1)i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=18$.
$\Rightarrow I(3;-1)$, $R=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\dfrac{|z|^4}{z^2}+\overline{z}=-4$ (z_2 là số phức có phần ảo âm). Khi đó $|z_1+z_2|$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{|z|^4}{z^2}+\overline{z}=-4 \Leftrightarrow \frac{(z\cdot\overline{z})^2}{z^2}+\overline{z}=-4\\ \Leftrightarrow\ &\overline{z}^2+\overline{z}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\\ \overline{z}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $|z_1+z_2|=\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right|=1$.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho các số phức z, ω khác 0 thỏa mãn $z+\omega\neq 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{\omega}=\dfrac{6}{z+\omega}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{\omega}\right|$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}+\frac{3}{\omega}=\frac{6}{z+\omega} &\Leftrightarrow \omega(z+\omega)+3z(z+\omega)=6z\omega\\ &\Leftrightarrow 3z^2-2\omega z+\omega^2=0\\ &\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{\omega}\right)^2-2\cdot\frac{z}{\omega}+1=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{z}{\omega}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}i\\ \dfrac{z}{\omega}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}i\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{z}{\omega}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \left|\dfrac{z}{\omega}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $\left|\dfrac{z}{\omega}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+5=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=i^{2019}z_0$?

A. $M(-2;1)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(-2;-1)$. **D.** $M(2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+2i \\ z=-1-2i. \end{array}\right.$

z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+5=0$ nên $z_0=-1-2i$.

Khi đó

$$w=i^{2019}z_0=\left(i^2\right)^{1009}i(-1-2i)=(-1)^{1009}i(-1-2i)=-i(-1-2i)=i+2i^2=-2+i.$$

Điểm biểu diễn số phức $w=i^{2019}z_0$ là $M(-2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ có nghiệm phức mà môđun của nghiệm đó bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập hợp S bằng

A. 6. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

- **Trường hợp 1**: Phương trình có nghiệm thực $z=2$.
  Ta có $4-4m+2m^2-2m=0 \Leftrightarrow 2m^2-6m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2. \end{array}\right.$
- **Trường hợp 2**: Phương trình có nghiệm thực $z=-2$.
  Khi đó ta có $4+4m+2m^2-2m=0 \Leftrightarrow 2m^2+2m+4=0$ (vô nghiệm).
- **Trường hợp 3**: Phương trình không có nghiệm thực. Khi đó để phương trình có nghiệm phức với mô đun bằng 2 thì

$$\begin{cases} \Delta'<0 \\ \sqrt{m^2+\left(\sqrt{-\Delta'}\right)^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+2m<0 \\ 2m^2-2m=4 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy $S=\{-1;1;2\}$ có tổng bình phương các phần tử là 6.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình

$$\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0.$$

Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. $2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$. **B**. 2. **C**. $2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$. **D**. $2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & \left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & z^2-\left[\left(z^2-3z+6\right)+\left(z^2+3z+3\right)\right]z+\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} z=z^2-3z+6 \\ z=z^2+3z+3 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} z^2-4z+6=0 \\ z^2+2z+3=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z = 2 \pm \sqrt{2}i \\ z = -1 \pm \sqrt{2}i. \end{bmatrix}$$

Khi đó, ta được $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 2\left(\left|2 + \sqrt{2}i\right| + \left|-1 + \sqrt{2}i\right|\right) = 2\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 31. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$. Tính biểu thức $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$.

A. $T = 2i$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = -2i$. **D.** $T = 0$.

Lời giải.

Ta có $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z-3)(z^2+4) = 0$.

Do z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình nên tồn tại z_i với $i = 1, 2, 3, 4$ thỏa mãn $z_i^2 + 4 = 0$.

Vậy $T = 0$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 32. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$, trong đó z_2 có phần ảo âm. Tìm phần ảo b của số phức $w = [(z_1 - i)(z_2 + 2i)]^{2018}$.

A. $b = 2^{1009}$. **B.** $b = 2^{2017}$. **C.** $b = -2^{2018}$. **D.** $b = 2^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = 1 - 2i \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad w = [(1 + 2i - i)(1 - 2i + 2i)]^{2018} = (1+i)^{2018} \\ &= \quad \left[(1+i)^2\right]^{1009} = (2i)^{1009} = 2^{1009} \cdot i^{4 \cdot 252 + 1} = 2^{1009} i \\ &\Rightarrow \quad b = 2^{1009}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 33. Biết $z_1 = 2 - i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ $(b, c \in \mathbb{R})$, gọi nghiệm còn lại là z_2. Tìm số phức $w = bz_1 + cz_2$.

A. $w = 18 - i$. **B.** $w = 18 + i$. **C.** $w = 2 - 9i$. **D.** $w = 2 + 9i$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai với hệ số thực. Do đó $z_2 = \overline{z_1} = 2 + i$. Áp dụng định lý Vi-ét ta được

$$\begin{cases} S = -\dfrac{b}{1} = z_1 + z_2 = 4 \\ P = \dfrac{c}{1} = z_1 z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 5. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$w = bz_1 + cz_2 = -4(2 - i) + 5(2 + i) = 2 + 9i.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 34. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $z^2 - (m+4)z + m^2 + 3 = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0| = 2$. Số phần tử của tập hợp S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$: $|z|^2=a^2+b^2=4$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}&a^2-b^2+2abi-a(m+4)-b(m+4)i+m^2+3=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}a^2-b^2-a(m+4)+m^2+3=0\\ 2ab-b(m+4)=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}a^2-b^2-a(m+4)+m^2+3=0 \quad (*)\\ b=0\vee a=\dfrac{m+4}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Với $b=0\Rightarrow a=\pm 2$.
Với $a=\dfrac{m+4}{2}\Rightarrow 4a^2=(m+4)^2\Rightarrow 4b^2=16-(m+4)^2$.
Ta xét các trường hợp sau

- ☑ $\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$ thế vào $(*)$ ta có $m^2-2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\sqrt{2}+1\\ m=-\sqrt{2}+1.\end{array}\right.$
- ☑ $\begin{cases}a=-2\\ b=0\end{cases}$ thế vào $(*)$ ta có $m^2+2m+15=0\Leftrightarrow m\in\varnothing$.
- ☑ $\begin{cases}a=\dfrac{m+4}{2}\\ 4b^2=16-(m+4)^2\end{cases}$ thế vào $(*)$ ta có

$$\begin{aligned}&4a^2-4b^2-4a(m+4)+4m^2+12=0\\ \Leftrightarrow\ &2(m+4)^2-16-2(m+4)^2+4m^2+12=0\\ \Leftrightarrow\ &4m^2-4=0\\ \Leftrightarrow\ &m=\pm 1.\end{aligned}$$

Với $m=1\Rightarrow 4b^2=16-5^2<0$ nên $m=1$ không thỏa.
Với $m=-1\Rightarrow 4b^2=16-3^2\Rightarrow b=\dfrac{\pm\sqrt{7}}{2}$, nhận $m=-1$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa đề bài.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w-2-3i$ và $z_2=2w-5$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính $T=|z_1^2|+|z_2^2|$.

A. $T=4\sqrt{13}$. **B.** $T=10$. **C.** $T=5$. **D.** $T=25$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-ét $\begin{cases}z_1+z_2=-a \quad (1)\\ z_1\cdot z_2=b \quad (2).\end{cases}$

Theo giả thiết $\Rightarrow 2z_1-z_2=1-6i$ (3). Từ (1) và (3) $\Rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{1-a}{3}-2i\\ z_2=-\dfrac{1+2a}{3}+2i\end{cases}$.

Thay vào (2) $\Rightarrow\left(\dfrac{1-a}{3}-2i\right)\left(-\dfrac{1+2a}{3}+2i\right)=b\Leftrightarrow\dfrac{(a-1)(1+2a)}{9}+4+\dfrac{4+2a}{3}i=b.$

Vì $a, b \in \mathbb{R}$ nên $\begin{cases} \dfrac{(a-1)(1+2a)}{9} + 4 = b \\ \dfrac{4+2a}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$.

Khi đó $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i \Rightarrow T = |z_1^2| + |z_2^2| = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là

A. 9. **B.** 4. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $-\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trên tập số phức $\mathbb{C}$, gọi z_1, z_2 và z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 - 8z^2 + 37z - 50 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

A. $P = 10$. **B.** $P = 9$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = 12$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & z^3 - 8z^2 + 37z - 50 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (z-2)(z^2 - 6z + 25) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = 3 + 4i \\ z = 3 - 4i. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì trong $P = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ thì z_1, z_2, z_3 có vai trò như nhau nên

$$P = |z_1| + |z_2| + |z_3| = |2| + |3 + 4i| + |3 - 4i| = 12.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Biết rằng phương trình $z^2 + bz + c = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $b + c = 0$. **B.** $b + c = 2$. **C.** $b + c = 3$. **D.** $b + c = 7$.

Lời giải.

z_1 là một nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên

$$\begin{aligned} z_1^2 + bz_1 + c = 0 \ &\Leftrightarrow\ (1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow\ b + c - 3 + (4 + 2b)i = 0 \\ &\Rightarrow\ b + c = 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $z^2+|z|=0$?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & z^2+|z|=0 \qquad (1)\\ \Rightarrow\ & z^2=-|z|\\ \Rightarrow\ & |z^2|=|-|z||\\ \Rightarrow\ & |z|^2=|z|\\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l}|z|=0\\|z|=1\end{array}\right.\\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l}z=0\\z=\pm i\\z=\pm 1\end{array}\right.\\ \overset{(1)}{\Rightarrow}\ & \left[\begin{array}{l}z=0\\z=\pm i.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Biết z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị biểu thức $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là

A. $\dfrac{3}{5}$. **B**. $\dfrac{-4}{5}$. **C**. $\dfrac{16}{5}$. **D**. $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=4, z_1\cdot z_2=5$. Vậy

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1\cdot z_2}=\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1\cdot z_2}{z_1\cdot z_2}=\frac{4^2-2\cdot 5}{5}=\frac{6}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 41. Có hai số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+1}{z+2}-z-4=0$ là z_1, z_2. Tính $T=|z_1-i|^2+|z_2-i|^2$.

A. $T=10$. **B**. $T=8$. **C**. $T=5$. **D**. $T=16$.

Lời giải.

$$\frac{z+1}{z+2}-z-4=0\Leftrightarrow z+1-(z+4)(z+2)=0\Leftrightarrow -z^2-5z-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_1=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\z_2=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.\end{array}\right.$$

$$T=\left|-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-i\right|^2+\left|-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-i\right|^2=\frac{1}{4}\left[25+(\sqrt{3}-2)^2+25+(\sqrt{3}+2)^2\right]=16.$$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+10=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B**. 2. **C**. $\sqrt{10}$. **D**. 20.

Lời giải.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+10=0$ nên $|z_1|=|z_2|$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

Ta có

$$|z_1|=\sqrt{|z_1|^2}=\sqrt{|z_1|\cdot|z_2|}=\sqrt{|z_1z_2|}=\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}=\sqrt{10}.$$

Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Kí hiệu $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3z^2-z+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{11}}{6}i\\ z=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{11}}{6}i.\end{array}\right.$

Suy ra $P=|z_1|+|z_2|=\left|\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{11}}{6}i\right|+\left|\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{11}}{6}i\right|=2\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong tập số phức, phương trình $z^2+3iz+4=0$ có hai nghiệm là z_1, z_2. Đặt $S=|z_1|-|z_2|$. Tìm S.

A. $S\in\{3\}$. **B.** $S\in\{3;-3\}$. **C.** $S\in\{-3\}$. **D.** $S\in\{0\}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta=b^2-4ac=(3i)^2-4\cdot1\cdot4=-25<0$.

Nên phương trình có hai nghiệm phức là $z=\dfrac{-3i+5i}{2}=i$ và $z=\dfrac{-3i-5i}{2}=-4i$.

TH1. Nếu $z_1=i$, $z_2=-4i$ thì $S=-3$.

TH2. Nếu $z_1=-4i$, $z_2=i$ thì $S=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Biết phương trình $z^2+bz+c=0,(b,c\in\mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z_1=1+2i$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $b+c=2$. **B.** $b+c=3$. **C.** $b+c=1$. **D.** $b+c=7$.

Lời giải.

Ta thấy phương trình có hai nghiệm $\begin{cases}z_1=1+2i\\ z_2=1-2i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1+z_2=2\\ z_1z_2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\ c=5\end{cases}\Rightarrow b+c=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Tính $|z_1|^2+z_1z_2$.

A. 5. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 0.

Lời giải.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$ nên $z_1z_2=5$ và $\overline{z_1}=z_2$. Khi đó

$$|z_1|^2+z_1z_2=z_1\cdot\overline{z_1}+z_1z_2=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_2=2\cdot z_1\cdot z_2=10.$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của $|z_1|\cdot|z_2|$ bằng

A. 5. **B**. $\frac{5}{2}$. **C**. 10. **D**. 20.

Lời giải.

Ta có $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|=\left|\frac{10}{1}\right|=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Số phức nào dưới đây là một căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$?

A. $2+i$. **B**. $2-i$. **C**. $1+2i$. **D**. $1-2i$.

Lời giải.

Gọi $w=x+yi$ với $x,\,y\in\mathbb{R}$ là một căn bậc hai của z. Khi đó $w^2=z$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ (x+yi)^2=-3+4i\\
&\Leftrightarrow\ x^2-y^2+2xyi=-3+4i\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-y^2=-3\\2xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\dfrac{4}{x^2}=-3\\y=\dfrac{2}{x}\ (\text{vì } x=0 \text{ không phải là nghiệm})\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^4+3x^2-4=0\\y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-1)(x^2+4)=0\\y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-4\ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\\y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\\y=\dfrac{2}{x}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Với $x=1\Rightarrow y=2\Rightarrow w=1+2i$.

Với $x=-1\Rightarrow y=-2\Rightarrow w=-1-2i$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $2z^2+z+1=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $\Delta=1^2-4\cdot2\cdot1=-7=7i^2$.

Nghiệm của phương trình là $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{4}$, $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{7}i}{4}$.

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $A=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị $T=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 4. **B**. 6. **C**. 10. **D**. 20.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+3i \\ z=-1-3i. \end{array}\right.$

Từ đó suy ra $T=\left(\sqrt{(-1)^2+3^2}\right)^2+\left(\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}\right)^2=20$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=2\left|z_1+z_2\right|+\left|z_1-z_2\right|$.

A. $P=6$. **B.** $P=3$. **C.** $P=2\sqrt{2}+2$. **D.** $P=\sqrt{2}+4$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét, ta có $z_1+z_2=2$, $z_1z_2=2$.

Mặt khác, $\left|z_1-z_2\right|^2=\left|\left(z_1+z_2\right)^2-4z_1z_2\right|=\left|2^2-4\cdot 2\right|=4$.

Vậy $P=2\left|z_1+z_2\right|+\left|z_1-z_2\right|=2\cdot 2+2=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2=-1$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm i$. Suy ra $|z_1|+|z_2|=|i|+|-i|=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=2-i. \end{array}\right.$

Khi đó $z_1=2+i$, $z_2=2-i$ và $|z_1|^2=|z_2|^2=5$.

Vậy $|z_1|^2+|z_2|^2=5+5=10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Giá trị của biểu thức $T=z_1^2+z_2^2$ bằng

A. $T=\dfrac{3}{18}$. **B.** $T=-\dfrac{9}{8}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $z^2+\sqrt{3}z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{21}}{4}i \\ z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{21}}{4}i. \end{array}\right.$

Suy ra $T=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2=-\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+7=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $z^2-3z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+\sqrt{6}i \\ z=1-\sqrt{6}i. \end{array}\right.$

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{7}$. Do đó $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2+2z+10=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=i^{2019}z_0$?

A. $M(3;-1)$. **B.** $M(-3;1)$. **C.** $M(3;1)$. **D.** $M(-3;-1)$.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+3i \\ z=-1-3i \end{array}\right.$ nên $z_0=-1+3i$.

Khi đó $w=i^{2019}z_0=i\cdot(-1)^{1009}\cdot(-1+3i)=-i\cdot(-1+3i)=3+i$ nên điểm biểu diễn số phức w là $M(3;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Phương trình $z^2+2z+10=0$ có hai nghiệm là z_1; z_2. Giá trị của $|z_1-z_2|$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=-9=9i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+1=3i \\ z+1=-3i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+3i \\ z=-1-3i. \end{array}\right.$

Do vai trò của z_1, z_2 như nhau nên ta giả sử $z_1=-1+3i$, $z_2=-1-3i$.

Vậy $|z_1-z_2|=|6i|=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-z+7=0$. Tính $S=|z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-z+7=0$ nên $z_1=\overline{z_2}$ và $z_2=\overline{z_1}$.

Do đó $S=|z_1^2+z_2^2|=\left|(z_1+z_2)^2-2z_1z_2\right|$. (1)

Theo định lý Vi-ét, có $z_1+z_2=\frac{1}{2}$, $z_1z_2=\frac{7}{2}$. (2)

Thay (2) vào (1) được $S=\left|\frac{1}{4}-2\cdot\frac{7}{2}\right|=\frac{27}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $P=40$. **B.** $P=\sqrt{10}$. **C.** $P=20$. **D.** $P=2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$z^2-2z+10=0 \Leftrightarrow z^2-2z+1=-9 \Leftrightarrow (z-1)^2=(3i)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+3i \\ z=1-3i. \end{array}\right.$$

Vậy $P=|z_1|^2+|z_2|^2=|1+3i|^2+|1-3i|^2=\left(\sqrt{1^2+3^2}\right)^2+\left(\sqrt{1^2+(-3)^2}\right)^2=20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$. Biểu thức $|z_1-z_2|$ có giá trị là

A. $6i$. **B.** $2i$. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=3+i \\ z_2=3-i \end{array}\right.$. Khi đó $|z_1-z_2|=|3+i-3+i|=|2i|=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+2z+5=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn cho số phức z_1 có tọa độ là

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(-1;-2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+2z+5=0$ có các nghiệm là $z=-1\pm 2i$, suy ra $z_1=-1-2i$. Vậy điểm biểu diễn cho số phức z_1 có tọa độ là $(-1;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2+4z+3=0$. Tính giá trị biểu thức $P=|z_1z_2+i(z_1+z_2)|$.

A. $P=1$. **B.** $P=\dfrac{7}{2}$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2+4z+3=0$.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1z_2=\dfrac{3}{2} \\ z_1+z_2=-\dfrac{4}{2}=-2 \end{cases}$, suy ra $P=|z_1z_2+i(z_1+z_2)|=\left|\dfrac{3}{2}-2i\right|=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-5z+7=0$. Tính $P=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $4\sqrt{7}$. **B.** 56. **C.** 14. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Do z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-5z+7=0$ nên chúng liên hợp với nhau, và

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{|z_1|\cdot|z_2|}=\sqrt{|z_1z_2|}=\sqrt{7} \Rightarrow P=7+7=14.$$

Chọn đáp án C □

Câu 64. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+6=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $z^2-4z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+\sqrt{2}i \\ z=2-\sqrt{2}i. \end{array}\right.$

Do đó $|z_1|+|z_2|=\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ với a,b là các số thực, có một nghiệm phức là $z=1-i$, giá trị của biểu thức $a^{10}+b$ bằng

A. 1026. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 1024.

Lời giải.

Vì $a,b\in\mathbb{R}$ nên phương trình ban đầu có hai nghiệm z và $\overline{z}$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}-a=2\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a^{10}+b=1026.$

Chọn đáp án A □

Câu 66. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+1=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình $z^2-z+1=0$ có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.\end{array}\right.$

Vậy $|z_1|=|z_2|=1\Rightarrow|z_1|+|z_2|=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2|+|z_2^2|$ bằng

A. $6-8i$. **B**. 20. **C**. 6. **D**. 10.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=4-5=-1=i^2$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_1=2+i, z_2=2-i$.

Vậy $|z_1^2|+|z_2^2|=10$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Cho phương trình $z^2+az+b=0$ với a,b là các tham số thực nhận số phức $1+i$ là một nghiệm. Tính $a-b$.

A. -2. **B**. -4. **C**. 4. **D**. 0.

Lời giải.

Vì $1+i$ là nghiệm của phương trình nên

$$(1+i)^2+a(1+i)+b=0\Leftrightarrow a+b+i(a+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a-b=-4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 69. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2+2|z|=0$?

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Trước hết ta có $|z^2|=|z\cdot z|=|z|\cdot|z|=|z|^2$.

Từ phương trình $z^2+2|z|=0$ ta suy ra $z^2=-2|z|$ $(*)$. Lấy mô đun hai vế phương trình $(*)$ ta được

$$|z^2|=2|z|\Leftrightarrow|z|^2=2|z|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=0\\ |z|=2.\end{array}\right.$$

Với $|z|=0$. Từ $(*)$ suy ra $z^2=0 \Rightarrow z=0$.
Với $|z|=2$. Từ $(*)$ suy ra $z^2=-4 \Rightarrow z=\pm 2i$.
Vậy có ba số phức z thỏa mãn.
Chọn đáp án D □

Câu 70. Biết phương trình $z^2+az+b=0$ với $a,\, b\in\mathbb{R}$ có một nghiệm $z=1-2i$. Tính $a+b$

A. 1. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải.

Vì $z=1-2i$ là nghiệm của phương trình nên

$$\begin{aligned} & (1-2i)^2+a(1-2i)+b=0 \\ \Leftrightarrow\ & a+b-3-(2a+4)i=0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a+b-3=0 \\ 2a+4=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=-2 \\ b=5. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $a+b=-2+5=3$.
Chọn đáp án D □

Câu 71. Gọi $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-5z+7=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1-z_2|$ là

A. $\sqrt{3}i$. **B.** $-\sqrt{3}i$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z^2-5z+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i. \end{array}\right.$

Không mất tính tổng quát, giả sử $z_1=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ khi đó $|z_1-z_2|=\left|\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 72. Kí hiệu $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+4=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải.

Ta thấy

$$z^2+z+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i \\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|=|z_2|=2 \Rightarrow |z_1|+|z_2|=4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 73. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+mz+m=0$ với m là số thực. Tìm giá trị của tham số m để biểu thức $P=z_1^2+z_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1x_2=m. \end{cases}$

Khi đó ta có $P=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2m=(m-1)^2-1\geq -1$.

Vậy $\min P=-1$ khi và chỉ khi $m=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+3=0$. Giá trị của $|2z_1|+|z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3=-8$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_1=\dfrac{2-2\sqrt{2}i}{2}=1-\sqrt{2}i$ và $z_2=\dfrac{2+2\sqrt{2}i}{2}=1+\sqrt{2}i$.

Vậy $|2z_1|+|z_2|=|2-2\sqrt{2}i|+|1+\sqrt{2}i|=3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+3=0$.
Tính $P=2\,|z_1|+5\,|z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=5\sqrt{3}$. **C.** $P=3\sqrt{3}$. **D.** $P=7\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai $z^2+2z+3=0$ có hai nghiệm là $z_1=-1+\sqrt{2}i$ và $z_2=-1-\sqrt{2}i$. Ta có $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$. Khi đó $P=2\,|z_1|+5\,|z_2|=7\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-8z+17=0$. Tìm giá trị $T=|z_1|+|z_2|$?

A. $T=34$. **B.** $T=\sqrt{17}$. **C.** $T=2\sqrt{17}$. **D.** $T=17$.

Lời giải.

$z^2-8z+17=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=4-i \\ z_2=4+i. \end{array}\right.$

Vậy $T=|z_1|+|z_2|=2\sqrt{4^2+1^2}=2\sqrt{17}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Gọi z_1 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2-4z+20=0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z_1.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M(-4;-2)$. **C.** $M(2;-4)$. **D.** $M(4;-2)$.

Lời giải.

$z^2-4z+20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+4i \\ z=2-4i. \end{array}\right.$

Suy ra $z_1=2-4i\Rightarrow M(2;-4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Gọi z_1 và $z_2=3+4i$ là hai nghiệm của phương trình $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$. Tính $T=2|z_1|-|z_2|$.

A. $T=0$. **B**. $T=5$. **C**. $T=10$. **D**. $T=7$.

Lời giải.

Do phương trình có hai nghiệm phức không thực nên $|z_1|=|z_2| \Rightarrow T=|z_2|=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2+bz+c=0, (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0, b^2-4ac<0)$. Đặt $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2-2|z_1|^2-3|z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\sqrt{a^2+b^2}$. **B**. $P=-\dfrac{c}{a}$. **C**. $P=\dfrac{a}{3c}$. **D**. $P=-\dfrac{2b}{3a}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phức không thực và là liên hợp của nhau.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2-2|z_1|^2-3|z_2|^2 \\ &= 2|z_1|^2+2|z_2|^2-2|z_1|^2-3|z_2|^2 \\ &= -|z_2|^2=-(z_1\cdot z_2)=-\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 80. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-8z+25=0$. Khi đó, giả sử $z_1^2=a+bi$ thì $a+b$ là

A. 7. **B**. -7. **C**. 24. **D**. 31.

Lời giải.

Phương trình $z^2-8z+25=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=4+3i \\ z_2=4-3i \end{array}\right.$.

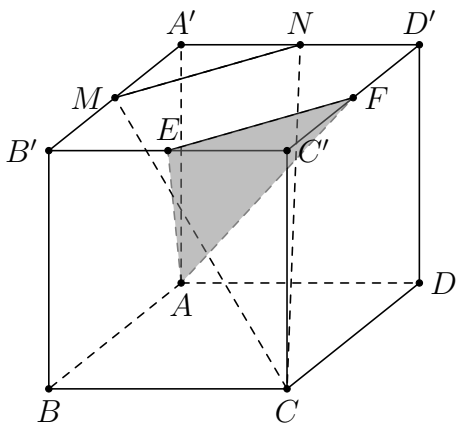
Ta có $z_1^2=7+24i \Rightarrow a=7; b=24 \Rightarrow a+b=31$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, E, F lần lượt là trung điểm của cạnh $A'B', A'D', B'C', C'D'$ như hình vẽ. Cô-sin của góc tạo bởi 2 mặt phẳng (CMN) và (AEF) bằng

A. $\dfrac{2}{17}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. 0. **D**. $\dfrac{1}{17}$.

Lời giải.



- ☑ Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$. Ta có $C(2;2;0)$, $B'(2;0;2)$, $C'(2;2;2)$, $D'(0;2;2)$.
- ☑ Do M, N, E, F lần lượt là các trung điểm của $A'B', A'D', B'C', C'D'$ nên $M(1;0;2)$, $N(0;1;2)$, $E(2;1;2)$, $F(1;2;2)$.
- ☑ Ta có $\overrightarrow{CM} = (-1;-2;2)$, $\overrightarrow{CN} = (-2;-1;2)$ nên $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CN} = (-2;-2;-3)$.
- ☑ Ta có $\overrightarrow{AE} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{AF} = (1;2;2)$ nên $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AF} = (-2;-2;3)$.
- ☑ Suy ra

$$\cos((CMN),(AEF)) = |\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})| = \frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}|\cdot|\overrightarrow{u_2}|} = \frac{1}{17}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 82. Biết rằng phương trình $z^4+z^3+2z^2+3z-3=0$ có hai nghiệm thuần ảo. Tích của hai nghiệm đó bằng

A. $3i$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $-3i$.

Lời giải.

- ☑ Ta có

$$z^4+z^3+2z^2+3z-3=0 \Leftrightarrow (z^2+3)(z^2+z-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm\sqrt{3}i \\ z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

- ☑ Suy ra 2 nghiệm ảo của phương trình đã cho là $-\sqrt{3}i$ và $\sqrt{3}i$.
- ☑ Vậy tích 2 nghiệm ảo của phương trình đã cho là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $5z^2-4z+2=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2z_2+z_2^2z_1$ bằng

A. $\dfrac{-8}{25}$. **B.** $\dfrac{2}{25}$. **C.** $\dfrac{-2}{25}$. **D.** $\dfrac{8}{25}$.

Lời giải.

- ☑ Theo định lý Vi-et $\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{4}{5}. \\ z_1z_2=\dfrac{2}{5} \end{cases}$
- ☑ Ta có $z_1^2z_2+z_2^2z_1=z_1z_2(z_1+z_2)=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{25}$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Giả sử z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2+4z+13=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. 22. **B.** 20. **C.** 26. **D.** 18.

Lời giải.

$$z^2+4z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2+3i \\ z_2=-2-3i \end{array}\right.$$

Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=26$.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Biết rằng phương trình $z^4+z^3+2z^2+3z-3=0$ có hai nghiệm thuần ảo. Tích phần ảo của hai nghiệm đó bằng

A. $-3i$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $3i$.

Lời giải.

☑ Ta có

$$z^4+z^3+2z^2+3z-3=0 \Leftrightarrow (z^2+3)(z^2+z-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm\sqrt{3}i \\ z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

☑ Suy ra 2 nghiệm ảo của phương trình đã cho là $-\sqrt{3}i$ và $\sqrt{3}i$.

☑ Vậy tích phần ảo của 2 nghiệm ảo là $-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $5z^2-4z+2=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2z_2+z_2^2z_1$ bằng

A. $\dfrac{2}{25}$. **B.** $\dfrac{-8}{25}$. **C.** $\dfrac{8}{25}$. **D.** $\dfrac{-2}{25}$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức Vi-ét trên tập số phức ta có

$$\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{4}{5} \\ z_1z_2=\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Vậy $z_1^2z_2+z_2^2z_1=z_1z_2(z_1+z_2)=\dfrac{8}{25}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm tham số m để phương trình $z^2+(2-m)z+2=0$ có một nghiệm là $1-i$.

A. $m=-2$. **B.** $m=6$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Ta có $1-i$ là nghiệm của phương trình $z^2+(2-m)z+2=0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (1-i)^2+(2-m)(1-i)+2=0 \\ &\Leftrightarrow (m-4)i+4-m=0 \\ &\Leftrightarrow m=4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 88. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của biểu thức $T=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. $T=2\sqrt{10}$. **B.** $T=10$. **C.** $T=\sqrt{10}$. **D.** $T=20$.

Lời giải.

Ta có $z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+3i \\ z_2=-1-3i. \end{array}\right.$

Vậy $T=|z_1|^2+|z_2|^2=(-1)^2+3^2+(-1)^2+(-3)^2=20$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+2=0$. Tính $M=z_1^4+z_2^4$.

A. $M=-8i$. **B.** $M=8$. **C.** $M=-8$. **D.** $M=8i$.

Lời giải.

Ta có $z_2-2z+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1-i \\ z=1+i \end{array}\right.$.

Gọi $z_1=1-i, z_2=1+i$. Khi đó $M=z_1^4+z_2^4=(1-i)^4+(1+i)^4=-8$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$ và A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2. Khi đó tọa độ trung điểm I của AB là

A. $I(0;1)$. **B.** $I(-1;0)$. **C.** $I(1;1)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải.

Phương trình $z^2-2z+5=0$ có hai nghiệm phức là $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$.

Điểm A, B biểu diễn số phức z_1, z_2 nên có tọa độ $A(1;2)$, $B(1;-2)$.

Suy ra trung điểm I của đoạn AB có tọa độ là $I(1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Tính giá trị biểu thức $|z_1|+|z_2|$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình $z^2-z+3=0$ có $\Delta=1-3\cdot 4=-11=11i^2$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức là $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1-\sqrt{11}i}{2} \\ z_2=\dfrac{1+\sqrt{11}i}{2} \end{array}\right.$.

Do đó $|z_1|+|z_2|=\left|\dfrac{1-\sqrt{11}i}{2}\right|+\left|\dfrac{1+\sqrt{11}i}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{12}}{2}+\dfrac{\sqrt{12}}{2}=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+1=0$. Tính giá trị biểu thức $S=|z_1|+|z_2|$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow S=|z_1|+|z_2|=1+1=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+9=0$. Giá trị của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 10.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2-4z+9=0 \Leftrightarrow (z-2)^2=-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2-i\sqrt{5} \\ z_2=2+i\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Khi đó $P=|z_1|^2+|z_2|^2=\left|2-i\sqrt{5}\right|^2+\left|2+i\sqrt{5}\right|^2=18$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$.

A. $P = \dfrac{1}{12}$. **B.** $P = \dfrac{1}{6}$. **C.** $P = -\dfrac{1}{6}$. **D.** $P = 6$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - z + 6 = 0$ có nghiệm là $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{2}i$ và $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{23}}{2}i$.

Suy ra $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có 2 nghiệm phức là z_1, z_2 trong đó z_1 là nghiệm có phần ảo âm. Tính giá trị của biểu thức $P = 2|z_1 - i| + |z_2|$.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** 15. **C.** $2\sqrt{10} + \sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $1 \pm 2i$. Theo giả thiết suy ra $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 1 + 2i$.

Vậy $P = 2|1 - 2i - i| + |1 + 2i| = 2\sqrt{1^2 + (-3)^2} + \sqrt{1^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} + \sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $2 + i$. Tính giá trị của ab^2.

A. -20. **B.** -100. **C.** 100. **D.** -36.

Lời giải.

Phương trình có một nghiệm phức $z_1 = 2 + i$, vậy nghiệm phức còn lại là $z_2 = 2 - i$. Theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 = -a \\ z_1 \cdot z_2 = 5 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5. \end{cases}$$

Vậy $ab^2 = -100$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Gọi z_1 là số phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tìm số phức liên hợp của $w = (1 + 2i)\, z_1$.

A. $\overline{w} = 1 - 3i$. **B.** $\overline{w} = 1 + 3i$. **C.** $\overline{w} = -3 + i$. **D.** $\overline{w} = -3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 - i \\ z = -1 + i. \end{array}\right.$

Do đó $z_1 = -1 - i$. Suy ra $w = (1 + 2i)\, z_1 = 1 - 3i$ và $\overline{w} = 1 + 3i$.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Cho b, c là các số thực. Biết $z_1 = 1 + i$ là một nghiệm của phương trình bậc hai ẩn phức $2018z^2 + bz + c = 0$. Nghiệm z_2 còn lại của phương trình là

A. $z_2 = 1 - i$. **B.** $z_2 = 2018(1 - i)$. **C.** $z_2 = -1 + i$. **D.** $z_2 = 2018 - i$.

Lời giải.

Do phương trình đã cho có hệ số thực nên $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^3+1=0$ có nghiệm là

A. $-1;\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}i.$ **B.** $-1;1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$ **C.** $-1;\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$ **D.** $-1;\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{4}i.$

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & z^3+1=0 \\ \Leftrightarrow\ & (z+1)(z^2-z+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & z=-1 \\ & z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ & z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 100. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2+4z+37=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức iz_0?

A. $M_2\left(-3;\dfrac{1}{2}\right).$ **B.** $M_3\left(3;\dfrac{1}{2}\right).$ **C.** $M_4\left(3;-\dfrac{1}{2}\right).$ **D.** $M_1\left(-3;-\dfrac{1}{2}\right).$

Lời giải.

$4z^2+4z+37=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned} & z=-\frac{1}{2}+3i \\ & z=-\frac{1}{2}-3i \end{aligned}\right.$.

Suy ra $z_0=-\dfrac{1}{2}+3i\Rightarrow iz_0=-3-\dfrac{1}{2}i$. Do đó iz_0 có điểm biểu diễn là $M_1\left(-3;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. C	5. D	6. B	7. A	8. A	9. A	10. D
11. D	12. B	13. D	14. D	15. B	16. D	17. D	18. C	19. A	20. A
21. A	22. D	23. D	24. A	25. A	26. A	27. D	28. A	29. A	30. A
31. D	32. A	33. D	34. B	35. C	36. D	37. D	38. C	39. C	40. D
41. D	42. A	43. D	44. B	45. B	46. B	47. C	48. C	49. B	50. D
51. A	52. A	53. B	54. D	55. A	56. C	57. C	58. B	59. C	60. D
61. C	62. D	63. C	64. B	65. A	66. C	67. D	68. B	69. D	70. D
71. C	72. B	73. B	74. A	75. D	76. C	77. C	78. B	79. B	80. D
81. D	82. C	83. D	84. C	85. C	86. C	87. D	88. D	89. C	90. D
91. B	92. C	93. C	94. B	95. C	96. B	97. B	98. A	99. C	100. D

4 Mức độ vận dụng cao

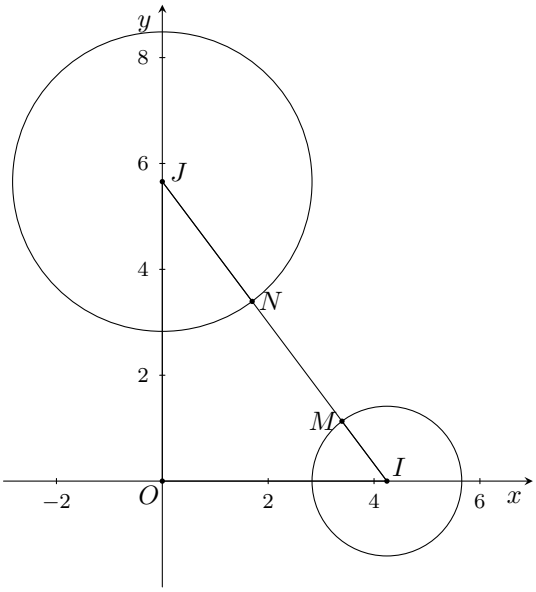
Câu 1. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có:

- ☑ $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2};0)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
- ☑ $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0;4\sqrt{2})$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.



Suy ra $|z-w|=MN$.

Mặt khác $IM+MN+NJ\geq IJ$

$\Rightarrow MN\geq IJ-IM-NJ$.

Hay $MN\geq 5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN=2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

Khi đó ta có:

$|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|$, $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM}=3(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM})=3(\overrightarrow{OI}+\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ})=3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=|3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}-(\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ})|=|2\overrightarrow{OI}|=6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Định tất cả các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z|=2$.

A. $m=-3$. **B.** $m=-3;m=9$.

C. $m=1;m=9$. **D.** $m=-3;m=1;m=9$.

Lời giải.

Nếu $m\geq 0$ thì $\Delta'\geq 0$ nên phương trình có nghiệm $z=1\pm\sqrt{m}$. Khi đó

$$|z|=2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1+\sqrt{m}=2\\1+\sqrt{m}=-2\\1-\sqrt{m}=2\\1-\sqrt{m}=-2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{m}=1\\\sqrt{m}=3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=1\\m=9\end{bmatrix}$$

Nếu $m<0$ thì $\Delta'<0$ nên phương trình có nghiệm $z=1\pm\sqrt{-m}.i$. Khi đó

$|z|=2\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$?

A. $M=\dfrac{10}{3}$. **B**. $M=1+\sqrt{13}$. **C**. $M=4\sqrt{5}$. **D**. $M=9$.

Lời giải.

Gọi $A\left(0;1\right)$, $B\left(-1;3\right),C\left(1;-1\right)$. Ta thấy A là trung điểm của BC nên suy ra

$$MA^2=\frac{MB^2+MC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}\Leftrightarrow MB^2+MC^2=2MA^2+\frac{BC^2}{2}=2MA^2+10.$$

Ta lại có $5\left|z-i\right|=\left|z+1-3i\right|+3\left|z-1+i\right|\Leftrightarrow 5MA=MB+3MC\le\sqrt{10}.\sqrt{MB^2+MC^2}$.
Do đó $25MA^2\le 10\left(2MA^2+10\right)\Rightarrow MC\le 2\sqrt{5}$.
Mà $\left|z-2+3i\right|=\left|\left(z-i\right)+\left(-2+4i\right)\right|\le\left|z-i\right|+\left|2-4i\right|\le\left|z-i\right|+2\sqrt{5}\le 4\sqrt{5}$.
Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}\left|z-i\right|=2\sqrt{5}\\ \dfrac{a}{-2}=\dfrac{b-1}{4}\end{cases}\text{ với }\ z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2-3i\text{ (loại)}\\ z=-2+5i.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018}+10iz^{2017}+10iz-11=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left|z\right|\in[2;3)$. **B**. $\left|z\right|\in[0;1)$. **C**. $\left|z\right|\in(1;2)$. **D**. $\left|z\right|\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}&11z^{2018}+10iz^{2017}+10iz-11=0\\ \Leftrightarrow\ &z^{2017}(11z+10i)=11-10iz\Leftrightarrow z^{2017}=\frac{11-10iz}{11z+10i}\\ \Rightarrow\ &\left|z\right|^{2017}=\sqrt{\frac{(11+10b)^2+(10a)^2}{(11a)^2+(11b+10)^2}}=\sqrt{\frac{100(a^2+b^2)+220b+121}{121(a^2+b^2)+220b+100}}=k.\end{aligned}$$

Xét hiệu

$$H=121(a^2+b^2)+220b+100-\left[100(a^2+b^2)+220b+121\right]=21\left(a^2+b^2-1\right).$$

☑ Nếu $\left|z\right|>1\Rightarrow a^2+b^2>1\Rightarrow H>0\Leftrightarrow k<1$ (vô lý).
☑ Nếu $\left|z\right|<1\Rightarrow a^2+b^2<1\Rightarrow H<0\Leftrightarrow k>1$ (vô lý).
$\Rightarrow\left|z\right|=1\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tìm tổng các giá trị số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $\left|z_0\right|=2$.

A. 0. **B**. 2. **C**. 6. **D**. 4.

Lời giải.

Có 3 trường hợp sau:
Trường hợp 1. $z_0=2$ là nghiệm phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ nên $a^2-2a+10=0$ vô nghiệm.
Trường hợp 2. $z_0=-2$ là nghiệm phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ nên $a^2-2a-2=0\Rightarrow a_1+a_2=2$.
Trường hợp 3. $z_0\notin\mathbb{R}$ là nghiệm phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ nên $a^2-2a=4\Rightarrow a_3+a_4=2$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của số thực a để phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$ là 4.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Biết phương trình $z^2+mz+n=0$ (với m,n là tham số thực) có một nghiệm là $z=1+i$. Mô-đun của số phức $w=m+ni$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình $z^2+mz+n=0$ có nghiệm $z=1+i$ thì cũng có nghiệm $z=1-i$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} -m=(1+i)+(1-i) \\ n=(1+i)(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=2. \end{cases}$

Do đó $w=-2+2i$. Suy ra $|w|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho phương trình $z^4-2z^3+6z^2-8z+9=0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1,z_2,z_3,z_4. Tính giá trị của biểu thức $T=(z_1^2+4)(z_2^2+4)(z_3^2+4)(z_4^2+4)$.

A. $T=1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2i$. **D.** $T=-2i$.

Lời giải.

Đặt $f(z)=z^4-2z^3+6z^2-8z+9$. Do phương trình $f(z)=0$ có bốn nghiệm phức phân biệt z_1,z_2,z_3,z_4, suy ra $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= (z_1^2+4)(z_2^2+4)(z_3^2+4)(z_4^2+4) \\ &= (z_1-2i)(z_1+2i)\cdot(z_2-2i)(z_2+2i)\cdot(z_3-2i)(z_3+2i)\cdot(z_4-2i)(z_4+2i) \\ &= (2i-z_1)(2i-z_2)(2i-z_3)(2i-z_4)\cdot(-2i-z_1)(-2i-z_2)(-2i-z_3)(-2i-z_4) \\ &= f(2i)\cdot f(-2i)=1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2z+3=0$. Tính $|w|$ biết $w=z^{2018}-z^{2017}+z^{2016}+3z^{2015}+3z^2-z+9$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2018\sqrt{3}$. **C.** $9\sqrt{3}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $w=z^{2016}(z^2-2z+3)+z^{2015}(z^2-2z+3)+3(z^2-2z+3)+5z=5z$.

Vậy $|w|=5|z|$.

Từ phương trình ta tìm được $z=1\pm i\sqrt{2}$, từ đó dễ dàng tìm được $|z|=\sqrt{3}$. Vậy $|w|=5\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong tập các số phức, gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-z+\dfrac{2017}{4}=0$ với z_2 có phần ảo dương. Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$ là

A. $\sqrt{2016}-1$. **B.** $\sqrt{2017}-1$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2017}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2016}-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $z^2 - z + \dfrac{2017}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} - 6i\sqrt{14} \\ z_2 = \dfrac{1}{2} + 6i\sqrt{14} \end{array}\right.$.

Gọi I, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z trong mặt phẳng phức.

Ta có $IA = |z_1 - z_2| = 12\sqrt{14}$.

Khi đó $\min P = 12\sqrt{14} - 1 = \sqrt{2016} - 1$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2| = |z-2i|$. Tìm số phức z biết $\left|z + \dfrac{3}{2} - 5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = \sqrt{\dfrac{331}{8}}$. **B.** $z = 1 + i$. **C.** $z = \dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{4}i$. **D.** $z = -\dfrac{3}{2} + 5i$.

Lời giải.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $|z-2| = z - 2i \Leftrightarrow |x - 2 + yi| = |x + (y-2)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow x = y$.

Tập hợp $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $y = x$.

Ta có $\left|z + \dfrac{3}{2} - 5i\right| = \left|x + \dfrac{3}{2} + (y-5)i\right|$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-5)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (x-5)^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{169}{8}} \geq \sqrt{\frac{169}{8}}.$$

Suy ra $z + \dfrac{3}{2} - 5i$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = y = \dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z - 4 + 4i|$.

A. $\max P = 4\sqrt{5}$. **B.** $\max P = 7\sqrt{5}$. **C.** $\max P = 5\sqrt{5}$. **D.** $\max P = 6\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có bất đẳng thức mô-đun số phức sau:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Đặt $w = z - 4 + 4i \Rightarrow P = |w|$.

Ta có $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow |w + 2 - i| + |w + 6 - 3i| = 4\sqrt{5}$.

Mà $\begin{cases} ||w + 2 - i| \geq |w| - |2 - i| = |w| - \sqrt{5} \\ |w + 6 - 3i| \geq |w| - |6 - 3i| = |w| - 3\sqrt{5} \end{cases}$,

suy ra $4\sqrt{5} \geq \left(|w| - \sqrt{5}\right) + \left(|w| - 3\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow |w| \leq 4\sqrt{5}$.

Vậy $\max P = 4\sqrt{5}$ khi $w = k(2 - i) = -4(2 - i)$ hay $z = -4$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2+z_1^2=z_0z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Đều. **B**. Cân tại O. **C**. Vuông tại O. **D**. Vuông cân tại O.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} z_0^2+z_1^2=z_0z_1 &\Leftrightarrow \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2-\frac{z_0}{z_1}+1=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\frac{z_0}{z_1}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\\&\frac{z_0}{z_1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&z_0=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\\&z_0=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

☑ Xét trường hợp $z_0=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1$.

$OA=|z_0|=\left|\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=\left|\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|\cdot|z_1|=|z_1|=OB.$

$AB=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|=|z_1-z_0|=\left|z_1-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=|z_1|=OB.$

Như vậy: $OA=OB=AB\Rightarrow\triangle OAB$ là tam giác đều.

☑ Xét trường hợp $z_0=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1$.

$OA=|z_0|=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|\cdot|z_1|=|z_1|=OB.$

$AB=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|=|z_1-z_0|=\left|z_1-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=\left|\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z_1\right|=|z_1|=OB.$

Như vậy: $OA=OB=AB\Rightarrow\triangle OAB$ là tam giác đều.

Tóm lại, ba điểm O, A, B tạo thành tam giác đều (O là gốc tọa độ).

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho số phức z_0 có $|z_0|=2018$. Diện tích của đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn của z_0 và các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{z+z_0}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z_0}$ được viết dạng $n\sqrt{3}$, $n\in\mathrm{N}$. Chữ số hàng đơn vị của n là

A. 9. **B**. 8. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}z\neq 0\\ z+z_0\neq 0.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+z_0}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z_0} &\Leftrightarrow zz_0=(z+z_0)z+(z+z_0)z_0\\ &\Leftrightarrow z^2+z_0z+z_0^2=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0\\ z=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Như vậy, phương trình $\dfrac{1}{z+z_0}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z_0}$ có hai nghiệm là $z_1=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0$ và $z_2=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0$.

Gọi M_0, M_1, M_2 lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_0, z_1, z_2.

$M_0M_1=|z_1-z_0|=\left|\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0\right|=\left|-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|\cdot|z_0|=2018\sqrt{3}.$

$M_0M_2=|z_2-z_0|=\left|\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0\right|=\left|-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|\cdot|z_0|=2018\sqrt{3}.$

$M_1M_2=|z_2-z_1|=\left|\left(\sqrt{3}i\right)z_0\right|=2018\sqrt{3}.$

Như vậy, tam giác $M_0M_1M_2$ là tam giác đều cạnh bằng $2018\sqrt{3}$. Diện tích của tam giác $M_0M_1M_2$ là

$$S=\frac{\left(2018\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=3054243\sqrt{3}.$$

Do đó $n=3054243$, chữ số hàng đơn vị của n là 3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$ và bán kính $R=3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F=4a+3b-1$. Tính giá trị $M+m$.

A. $M+m=63$. **B.** $M+m=48$. **C.** $M+m=50$. **D.** $M+m=41$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-3)^2=9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2+(b-3)^2=9$.

Ta có $F=4a+3b-1\Rightarrow a=\dfrac{F+1-3b}{4}$

$$(a-4)^2+(b-3)^2=9\Rightarrow\left(\frac{F+1-3b}{4}-4\right)^2+b^2-6b+9=9\Leftrightarrow 25b^2-2(3F+3)b+F^2+225=0$$

$$\Delta'=(3F+3)^2-25F^2-5625\geq 0\Leftrightarrow -16F^2+18F-5625\geq 0\Leftrightarrow 9\leq F\leq 39$$

Khi đó $M=39, m=9$. Vậy $M+m=48$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1^{2019}+z_2^{2019}|$.

A. $P=2$. **B.** $P=3$. **C.** $P=2\sqrt{3}$. **D.** $P=4038$.

Lời giải.

Ta có $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}. \end{array}\right.$

Ta có $z_1^3=\dfrac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)^3=\dfrac{1}{8}\left(1-3\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i\right)=-1; z_2^3=\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}i\right)^3=\dfrac{1}{8}\left(1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i\right)=-1$.

Mặt khác $z_1^{2019}=\left(z_1^3\right)^{673}=-1, z_2^{2019}=\left(z_2^3\right)^{673}=-1 \Rightarrow |z_1^{2019}+z_2^{2019}|=|-1-1|=2$.

Vậy $|z_1^{2019}+z_2^{2019}|=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực sao cho phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1=\omega+3i,\ z_2=\omega+9i,\ z_3=2\omega-4$, trong đó ω là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P=|a+b+c|$.

A. $P=84$. **B.** $P=36$. **C.** $P=136$. **D.** $P=208$.

Lời giải.

Giả sử $\omega=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{aligned} z_1+z_2+z_3=-a &\Leftrightarrow 4\omega+12i-4=-a \\ &\Leftrightarrow (4x-4)+(4y+12)i=-a \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=-a \\ 4y+12=0 \end{cases} \Rightarrow y=-3. \end{aligned}$$

Suy ra $z_1=x,\ z_2=x+6i,\ z_3=2x-4-6i$.

Lại có:

$$\begin{aligned} & z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=b \\ \Leftrightarrow\ & (x^2+6xi)+(2x^2-4x+36)+(6x-24)i+(2x^2-4x)-6xi=b \\ \Leftrightarrow\ & (5x^2-8x+36)+(6x-24)i=b \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5x^2-8x+36=b \\ 6x-24=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x=4 \\ b=84 \end{cases} \Rightarrow a=-12. \end{aligned}$$

Thay $z_1=4$ vào phương trình, ta có: $64-12\cdot 16+84\cdot 4+c=0 \Leftrightarrow c=-208$.

Vậy $P=|a+b+c|=136$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hai số thực $b,c\ (c>0)$. Kí hiệu A,B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2+2bz+c=0$. Tìm điều kiện của b và c sao cho tam giác OAB là tam giác vuông (với O là gốc tọa độ).

A. $c=2b^2$. **B.** $c=b$. **C.** $c=b^2$. **D.** $b^2=2c$.

Lời giải.

Từ yêu cầu bài toán ta có phương trình $z^2+2bz+c=0$ có hai nghiệm phức

$$z_1=-b-i\sqrt{c-b^2}, z_2=-b+i\sqrt{c-b^2}.$$

Chú ý $\Delta'=b^2-c<0$.
Gọi $A(-b;-\sqrt{c-b^2}), B(-b;\sqrt{c-b^2})$. Ta được $\overrightarrow{OA}(-b;-\sqrt{c-b^2}), \overrightarrow{OB}(-b;\sqrt{c-b^2})$.
Ta có tam giác OAB cân tại O, A và B đối xứng qua trục hoành.
Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow b^2-(c-b^2)=0 \Leftrightarrow b^2=c-b^2 \Leftrightarrow c=2b^2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2z+3=0$. Tính $|w|$ biết $w=z^{2018}-z^{2017}+z^{2016}+3z^{2015}+3z^2-z+9$

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $2018\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $w=z^{2016}(z^2-2z+3)+z^{2015}(z^2-2z+3)+3(z^2-2z+3)+5z=5z$. Vậy $|w|=5|z|$.
Từ phương trình dễ dàng tìm được $|z|=\sqrt{3}$. Vậy $|w|=5\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hai số thực b, c với $c>0$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình $z^2+2bz+c=0$. Tìm điều kiện của b và c sao cho tam giác OAB là tam giác vuông (với O là gốc tọa độ).

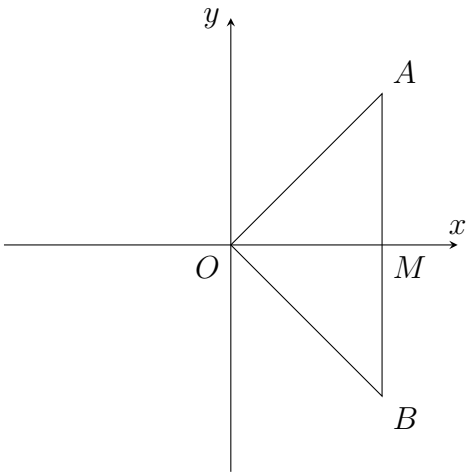
A. $b=c$. **B.** $b^2=c$. **C.** $2b^2=c$. **D.** $b^2=2c$.

Lời giải.

Theo bài ra ta giả sử A, B là điểm biểu diễn lần lượt của $z_1=x+yi$, $z_2=x-yi$, suy ra A và B đối xứng nhau qua trục hoành.
Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$$z_1+z_2=2x=-2b \text{ và } z_1z_2=x^2+y^2=c.$$

Để tam giác OAB vuông khi và chỉ khi $OM=MA=MB \Leftrightarrow |x|=|y| \Leftrightarrow x^2=y^2=b^2$.
Từ đó suy ra $2b^2=c$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ có nghiệm phức mà mô-đun của nghiệm đó bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập hợp S bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm thực z thỏa mãn $|z|=2$. Suy ra $z=2$ hoặc $z=-2$.
Thay $z=2$ vào phương trình ta được $2m^2-6m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2. \end{array}\right.$
Thử lại ta nhận thấy $m=1; m=2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $m=1; m=2$ nhận.

Thay $z=-2$ vào phương trình ta được $2m^2+2m+4=0$ (phương trình vô nghiệm).

Trường hợp 2: Phương trình có nghiệm phức $z\,(z\notin\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z|=2$.

Suy ra $\overline{z}$ cũng là nghiệm của phương trình trên.

Do đó $|z|^2=z\cdot\overline{z}=\dfrac{c}{a}=2m^2-2m=4\Leftrightarrow 2m^2-2m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=2.\end{array}\right.$

Thử lại với $m=-1$ ta nhận thấy thỏa yêu cầu bài toán.

Tổng hai trường hợp ta suy ra $S=\{1;-1;2\}$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của tập hợp S là $1^2+(-1)^2+2^2=6$.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. D	5. D	6. D	7. A	8. D	9. A	10. C
11. A	12. A	13. C	14. B	15. A	16. C	17. A	18. C	19. C	20. A

PHẦN

II

HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1

KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1 KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

Định nghĩa 1. Hình $\mathscr{H}$ gồm các đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện sau đây được gọi là một hình đa diện

- ☑ Hai đa giác bất kỳ hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.
- ☑ Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

⚠ *Mỗi hình đa diện $\mathscr{H}$ chia các điểm trong không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của khối đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.*

Định nghĩa 2. Hình $\mathscr{H}$ và các điểm nằm trong hình $\mathscr{H}$ được gọi là khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathscr{H}$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu một khối đa diện có các mặt đều là tam giác thì số mặt của nó là một số chẵn.

Lời giải.

Gọi n là số mặt của đa diện đó, p là số cạnh của đa diện đó

Do các mặt của khối đa diện là tam giác nên số cạnh của n tam giác đó là $3n$

Nhưng mỗi cạnh của đa diện là cạnh chung của đúng hai mặt nên $2p = 3n$, vậy n phải là số chẵn. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu một khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của một số lẻ các mặt, thì tổng số đỉnh của nó là một số chẵn.

Lời giải.

Gọi k là số đỉnh và p là số cạnh của khối đa diện

Gọi $A_1; A_2; ..A_k$ là các đỉnh và $c_1; c_2; ...; c_k$ là số cạnh qua các đỉnh tương ứng.

Vậy số cạnh qua k đỉnh là: $c_1 + c_2 + .. + c_k$ với $c_1; ... : c_k$ là các số lẻ

Nhưng mỗi cạnh lại đi qua hai đỉnh nên $2p = c_1 + c_2 + .. + c_k$ vì vậy nên k là số chẵn □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng một đa diện có ít nhất 4 mặt

Lời giải.

Gọi M_1 là một mặt của khối đa diện, do M_1 là đa giác nên M_1 có ít nhất 3 cạnh là $c_1; c_2; c_3$
Gọi M_2 có cạnh chung c_1 với M_1, $M_2 \neq M_1$
Gọi M_3 có cạnh chung c_2 với M_1, $M_3 \neq M_1$, vì c_1 không thuộc M_3 nên $M_2 \neq M_3$
Gọi M_4 có cạnh chung c_3 với M_1, $M_4 \neq M_1$, vì c_1, c_2 không thuộc M_4 nên $M_4 \neq M_2 \neq M_3$
Vậy đa diện có ít nhất 4 mặt. □

Bài 2. Chứng minh rằng không tồn tại hình đa diện có số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh .

Lời giải.

Gọi d và c lần lượt là số đỉnh và số cạnh.
Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh và qua 2 đỉnh có đúng một cạnh nên $2c \geq 3d \Rightarrow c > d$
□

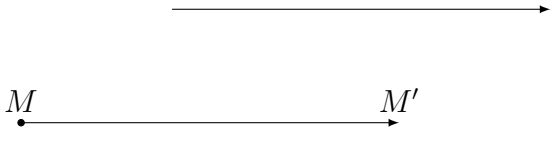
B HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1 Phép dời hình trong không gian

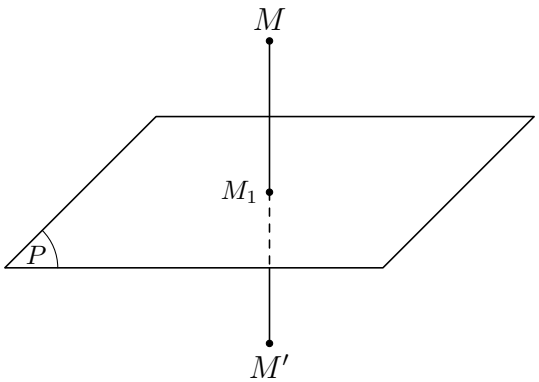
Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.
Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

2 Một số phép dời hình thường gặp

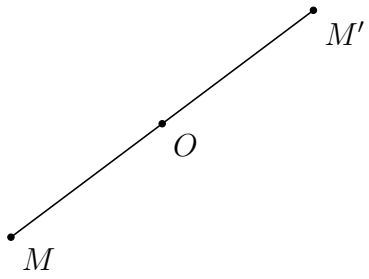
a) **Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$**
là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$



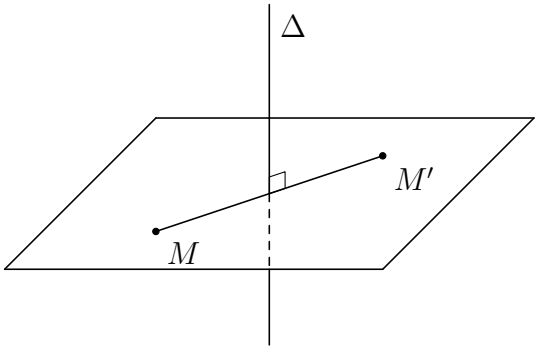
b) **Phép đối xứng qua mặt phẳng (P).**
là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).



c) **Phép đối xứng tâm** O.
là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'.
Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H).



d) **Phép đối xứng qua đường thẳng** Δ (phép đối xứng trục qua trục Δ)
là phép phép biến hình biến mọi điểm M thuộc Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ gọi là trục đối xứng của (H).



Nhận xét

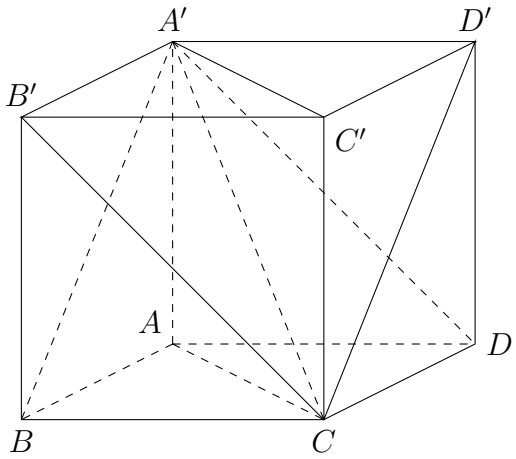
- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').

3 Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai tứ diện $A'B'BC$ và $A'D'DC$ bằng nhau.

Lời giải.



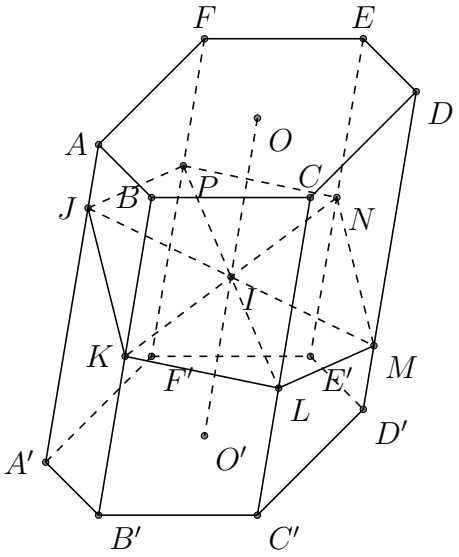
Phép đối xứng qua mặt phẳng $(AA'C'C)$ biến các điểm A', C thành chính nó, biến B' thành D', biến B thành D suy ra hai tứ diện $A'B'BC$ và $A'D'DC$ đối xứng qua mặt phẳng $(AA'C'C)$, cho nên hai tứ diện bằng nhau. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho lăng trụ $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có đáy là những lục giác đều. Gọi I là trung điểm nối hai tâm của đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua I và cắt tất cả các cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh (α) chia lăng trụ thành hai đa diện bằng nhau.

Lời giải.

Giả sử mp(α) cắt $AA', BB', CC', DD', EE', FF'$ lần lượt tại J, K, L, M, N, P. Dễ thấy phép đối xứng tâm I biến $A, B, C, D, E, F, J, K, L, M, N, P$ lần lượt biến thành các điểm $D', E', F', A', B', C', M, N, P, J, K, L$. Do đó , hai đa diện $ABCDEF.JKLMNP$ và $D'E'F'A'B'C'.MNPJKL$ bằng nhau vì có phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.



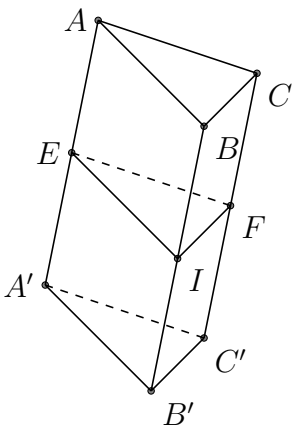
□

Bài 2.

Cho $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ, E, I, F lần lượt là trung điểm của $AA'; BB'; CC'$. Chứng minh rằng mặt phẳng IEF chia lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai hình bằng nhau.

Lời giải.

Dễ thấy rằng phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AE}$ biến hình lăng trụ $ABC.EIF$ thành lăng trụ $A'B'C'.EIF$. Vậy mặt phẳng IEF chia lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai hình bằng nhau.



□

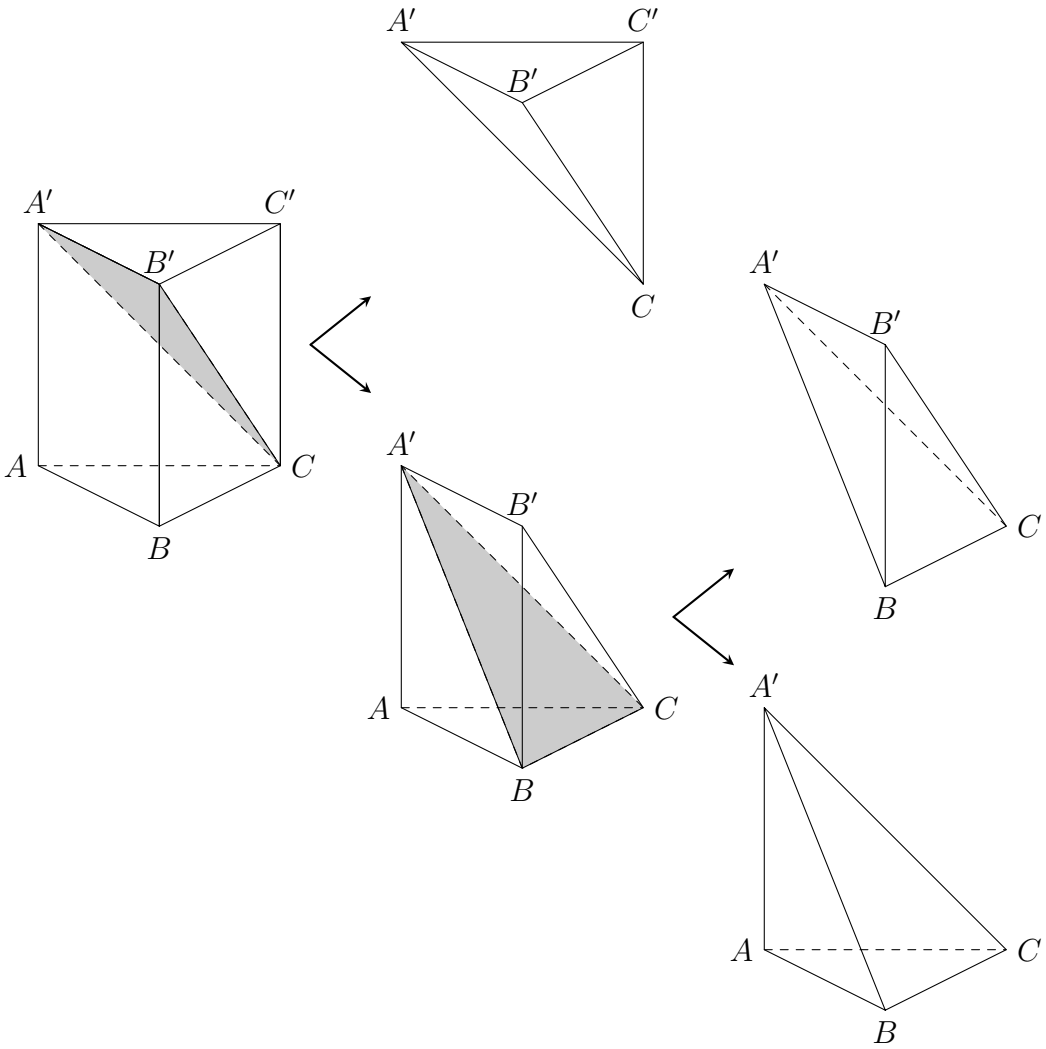
C PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP KHỐI ĐA DIỆN

Ta nói khối đa diện (H) có thể được chia thành n khối đa diện $(H_1), (H_2), \ldots, (H_n)$ hay có thể lắp ghép n khối đa diện $(H_1), (H_2), \ldots, (H_n)$ thành khối đa diện (H) nếu là (H) hợp của n khối đa diện $(H_1), (H_2), \ldots, (H_n)$ và hai khối đa diện bất kì (H_i) và (H_j) $(i \neq j)$ không có điểm chung trong.
Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành những khối tứ diện.

Ví dụ 1. Chia khối lăng trụ tam giác thành ba khối tứ diện.

Lời giải.

Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được phân chia thành các khối tứ diện $A'B'C'C$, $A'B'BC$ và $A'ABC$.

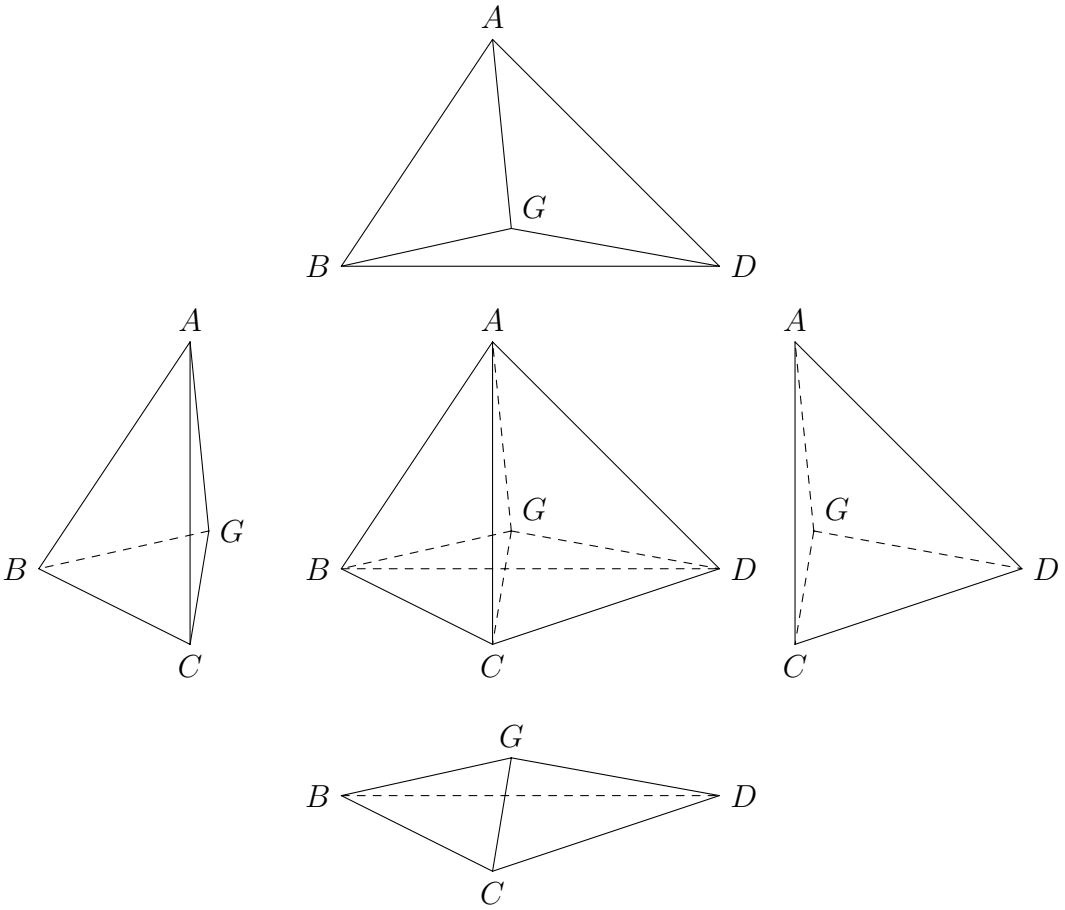


□

Ví dụ 2. Chia một khối tứ diện đều thành bốn khối tứ diện bằng nhau.

Lời giải.

Cho tứ diện đều $ABCD$, gọi A', B', C', D' là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy tại điểm G, G được trọng tâm của tứ diện. Tứ diện $ABCD$ đều nên C đối xứng với D qua mặt phẳng (ABA') cho nên hai tứ diện $GABD$ và $GABC$ đối xứng với nhau qua mặt phẳng (ABA'), suy ra hai khối tứ diện bằng nhau, chứng minh tương tự ta suy ra bốn khối tứ diện $GABD$, $GABC$, $GBCD$ và $GACD$ bằng nhau. Vậy khối tứ diện đều $ABCD$ được chia thành bốn khối tứ diện bằng nhau.

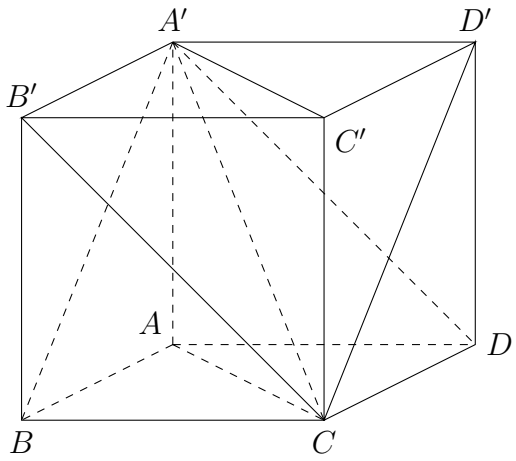


□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chia một khối lập phương thành sáu khối tứ diện bằng nhau.

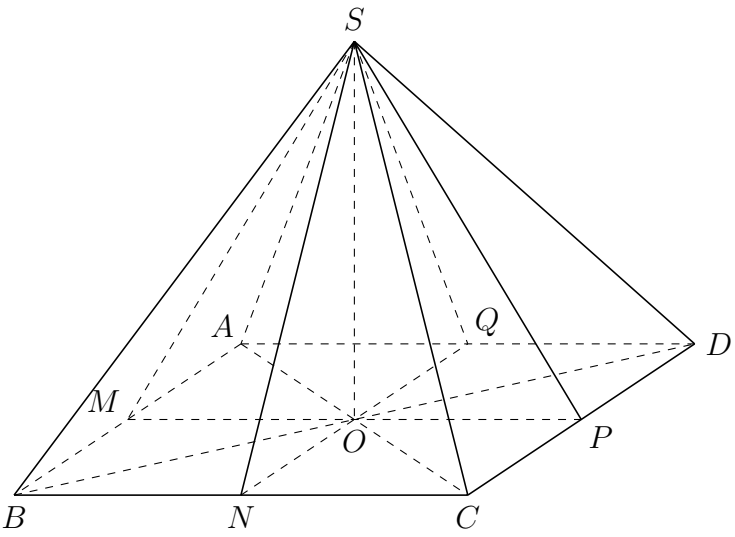
Lời giải.



Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ được phân chia thành sáu khối tứ diện bằng nhau $A'B'BC$, $A'B'C'C$, $A'ABC$, $A'ACD$, $A'CC'D'$ và $A'CDD'$. □

Bài 2. Chia khối chóp tứ giác đều thành tám khối tứ diện bằng nhau.

Lời giải.



Khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ được phân chia thành tám khối tứ diện bằng nhau $SOAM$, $SOBM$, $SOBN$, $SOCN$, $SOCP$, $SODP$, $SODQ$ và $SOAQ$. □

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A. 3000. **B**. 3001. **C**. 3005. **D**. 3007.

Lời giải.

Hình lăng trụ có đáy là đa giác n cạnh thì sẽ có số cạnh là $3n$. Vậy số cạnh của hình lăng trụ phải là một số chia hết cho 3.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Khối bát diện đều là khối đa diện loại nào?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{3;5\}$. **C**. $\{5;3\}$. **D**. $\{4;3\}$.

Lời giải.

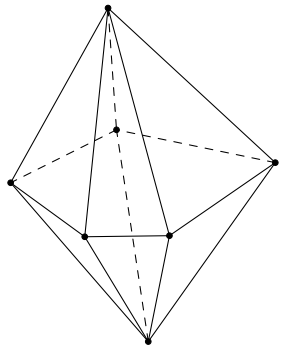
Khối bát diện đều là khối đa diện loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3.

Hình đa diện ở hình bên có bao nhiêu mặt?

A. 8. **B**. 12. **C**. 10. **D**. 11.



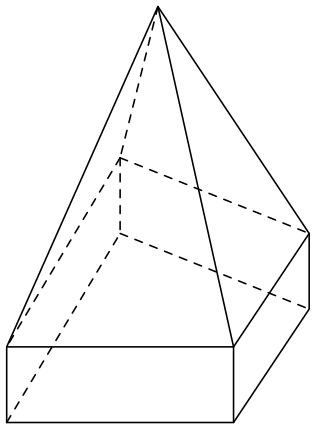
Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 4.

Hình đa diện bên có bao nhiêu cạnh?

A. 15. **B**. 12. **C**. 20. **D**. 16.



Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Mỗi cạnh của một khối đa diện là cạnh chung của bao nhiêu mặt của khối đa diện?

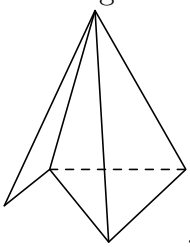
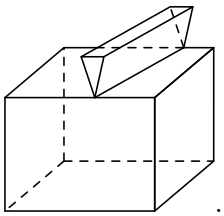
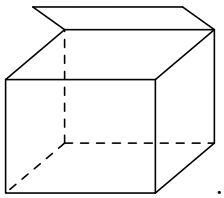
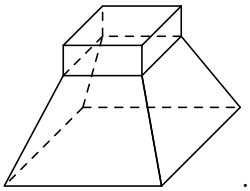
A. Bốn mặt. **B**. Hai mặt. **C**. Ba mặt. **D**. Năm mặt.

Lời giải.

Hình đa diện phải thỏa mãn tính chất: mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt.

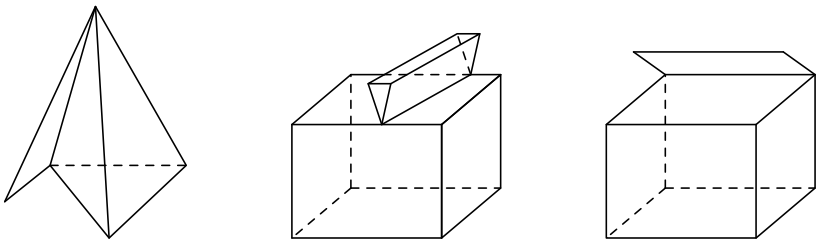
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong các vật thể sau đây, vật thể nào là hình đa diện?

A.  . **B**.  . **C**.  . **D**.  .

Lời giải.

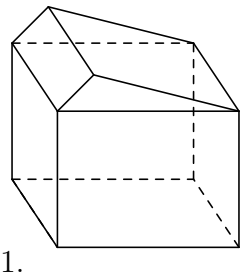
Các hình vi phạm khái niệm hình đa diện là



Chọn đáp án (D) □

Câu 7.

Số đỉnh của hình đa diện dưới đây là



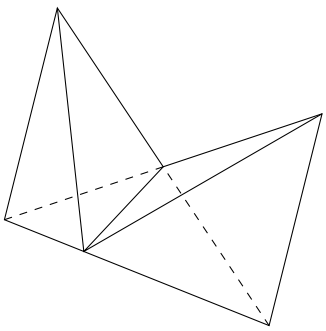
A. 8. **B**. 9. **C**. 10. **D**. 11.

Lời giải.

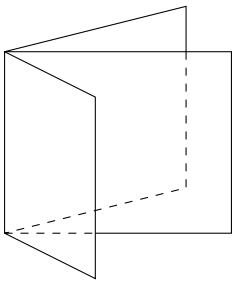
Hình đa diện đã cho có số đỉnh là 10.

Chọn đáp án (C) □

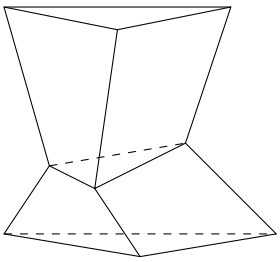
Câu 8. Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?



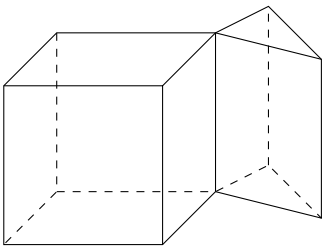
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 4. **B**. Hình 2. **C**. Hình 1. **D**. Hình 3.

Lời giải.

Hình 3 là hình đa diện.
Hình 2 có 1 cạnh là cạnh chung của 3 mặt nên không phải là hình đa diện.
Hình 1, Hình 4 có 1 cạnh là cạnh chung của 4 mặt nên không phải là hình đa diện.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất

A. Bốn cạnh. **B**. Năm cạnh. **C**. Hai cạnh. **D**. Ba cạnh.

Lời giải.

Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.
Chọn đáp án D □

Câu 10. Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống của mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng.

"Số cạnh của một hình đa diện luôn .....số mặt của hình đa diện ấy."

A. bằng. **B**. nhỏ hơn hoặc bằng. **C**. nhỏ hơn. **D**. lớn hơn.

Lời giải.

Số cạnh của một hình đa diện luôn **lớn hơn** số mặt của hình đa diện ấy.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Khối tám mặt đều có tất cả bao nhiêu đỉnh?

A. 12. **B**. 10. **C**. 6. **D**. 8.

Lời giải.

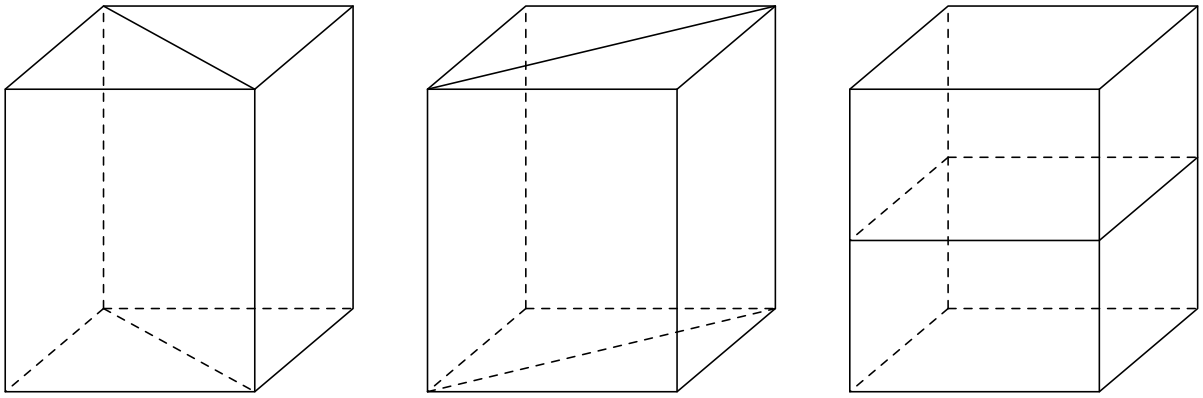
Số cạnh C của khối bát diện là $C = \dfrac{8 \cdot 3}{2} = 12$.
Số mặt M của khối bát diện đều là 8 .
Theo công thức Ơ-le : $D + M = C + 2 \Rightarrow D = C + 2 - M = 12 + 2 - 8 = 6$.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Hình hộp chữ nhật đứng đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Phương pháp:
Dựa vào lý thuyết các khối đa diện đều.
Cách giải:
Có 3 mặt phẳng đối xứng như trong hình vẽ dưới đây:



Chọn đáp án C ☐

Câu 13. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải.

Chọn đáp án A ☐

Câu 14. Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng mấy mặt?

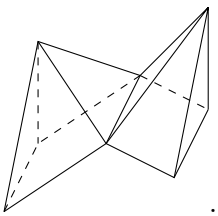
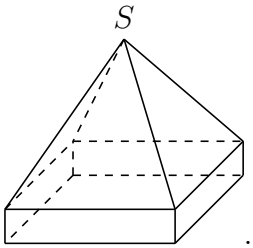
A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 5.

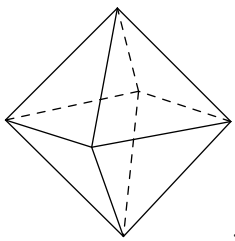
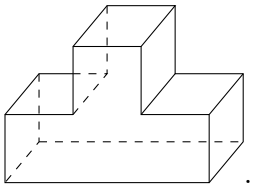
Lời giải.

Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng 3 mặt.

Chọn đáp án A ☐

Câu 15. Hình vẽ nào sau đây không phải là khối đa diện?

A.  . **B**. 

. **C**.  . **D**.  .

Lời giải.

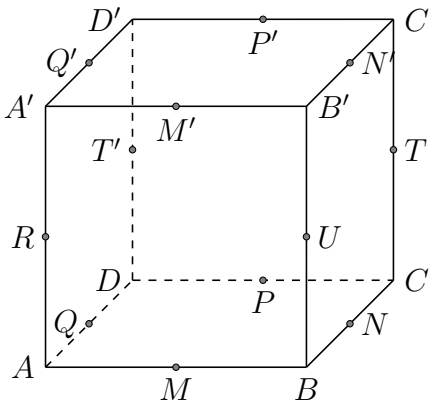
Chọn đáp án A ☐

Câu 16. Hình lập phương có bao nhiêu mặt đối xứng?

A. 9. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 2.

Lời giải.

Có 3 mặt phẳng đối xứng chia nó thành 2 khối hộp chữ nhật:
$(MPP'M')$, $(NQQ'N')$, $(RUTT')$).
Có 6 mặt phẳng đối xứng chia nó thành 2 khối lăng trụ đáy tam giác:
$(ACC'A')$, $(BDD'B')$, $(AB'C'D)$, $(A'BCD')$, $(ABC'D')$, $(A'B'CD)$.



Chọn đáp án A □

Câu 17. Trong hình đa diện, mỗi cạnh của đa giác là cạnh chung của đúng mấy đa giác?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 18. Khối lăng trụ có chiều cao bằng 20 cm và diện tích đáy bằng 125 cm^2 thì thể tích của nó bằng

A. 2500 cm^2. **B**. $\dfrac{2500}{3}$ cm^3. **C**. 2500 cm^3. **D**. 5000 cm^3.

Lời giải.

Thể tích $V = B \cdot h = 125 \cdot 20 = 2500$ cm^3.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Thể tích của khối hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt là a, $2a$, $3a$ bằng

A. $6a^3$. **B**. $6a^2$. **C**. $2a^3$. **D**. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Thể tích $V = a \cdot 2a \cdot 3a = 6a^3$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu cạnh?

A. 5 cạnh. **B**. 4 cạnh. **C**. 3 cạnh. **D**. 2 cạnh.

Câu 21. Số các đỉnh hoặc số các mặt của hình đa diện bất kỳ đều thỏa mãn tính chất nào sau đây?

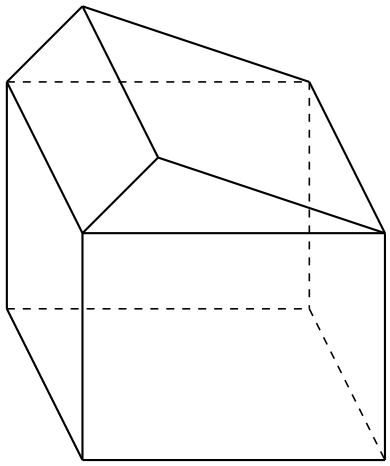
A. Lớn hơn hoặc bằng 4. **B**. Lớn hơn 4.

C. Lớn hơn hoặc bằng 5. **D**. Lớn hơn 6.

Câu 22. Nếu ba kích thước của một khối hộp chữ nhật tăng lên k lần thì thể tích tăng lên bao nhiêu lần?

A. k lần. **B**. k^2 lần. **C**. k^3 lần. **D**. $3k^3$ lần.

Câu 23. Cho khối đa diện như hình vẽ. Số mặt của khối đa diện là:



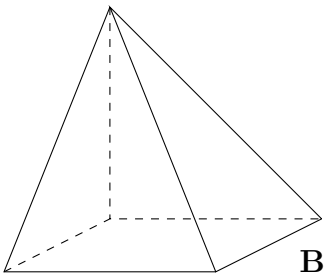
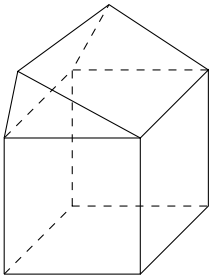
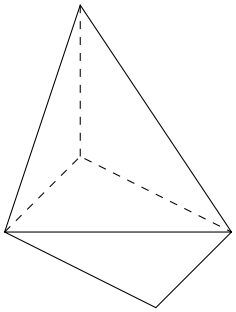
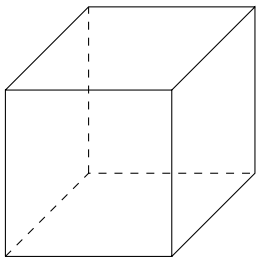
A. 9. **B**. 10. **C**. 8. **D**. 7.

Câu 24. Cho khối chóp có đáy là đa giác n cạnh. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

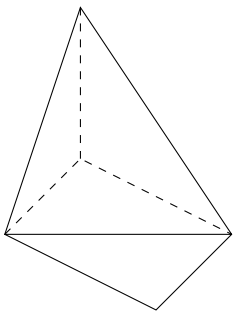
A. Số mặt của khối chóp bằng $2n$. **B**. Số đỉnh của khối chóp $2n+1$.

C. Số cạnh của khối chóp bằng $n+1$. **D**. Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

Câu 25. Hình nào dưới đây **không** phải là hình đa diện?

A.  **B**.  **C**.  **D**. 

Lời giải.



Hình không phải hình đa diện vì có cạnh không phải cạnh chung của đúng 2 mặt.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn

A. lớn hơn hoặc bằng 6. **B**. lớn hơn 6.

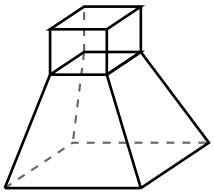
C. lớn hơn 7. **D**. lớn hơn hoặc bằng 8.

Lời giải.

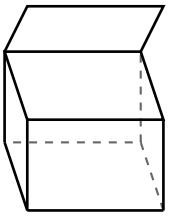
Tương ứng với hình tứ diện có 6 cạnh.

Chọn đáp án A □

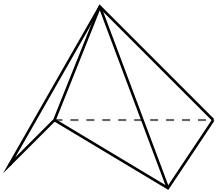
Câu 27. Cho các hình khối sau:



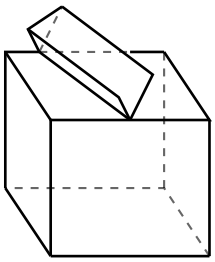
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Hỏi hình nào là hình đa diện ?

A. Hình 3. **B**. Hình 4. **C**. Hình 1. **D**. Hình 2.

Câu 28. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

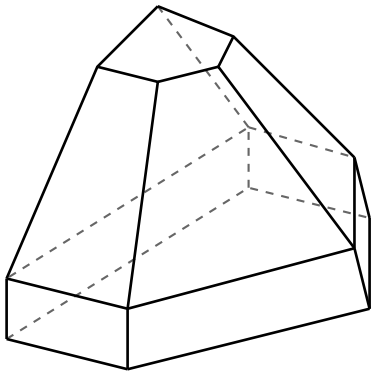
A. Tồn tại khối lăng trụ đều là khối đa diện đều.

B. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

C. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.

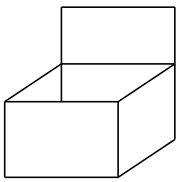
D. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.

Câu 29. Hình đa diện trong hình vẽ bên dưới có bao nhiêu mặt?

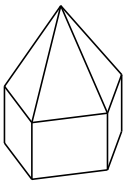


A. 11. **B**. 14. **C**. 12. **D**. 13.

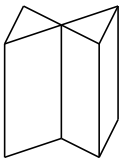
Câu 30. Những hình nào sau đây không phải khối đa diện?



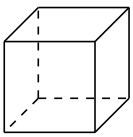
Hình 1



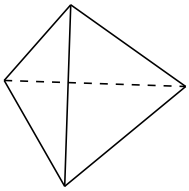
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

A. Hình 2 và hình 4. **B**. Hình 1 và hình 3. **C**. Hình 1 và hình 2. **D**. Hình 3 và hình 5.

Câu 31. Đáy của hình chóp $S.ABCD$ là một hình vuông cạnh a, cạnh bện SA vuông góc với mặt phẳng đáy có độ dài bằng a, thể tích khối tứ diện $S.BCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B**. $\dfrac{a^3}{6}$. **C**. $\dfrac{a^3}{3}$. **D**. a^3.

Câu 32. Mỗi đỉnh của một hình đa diện có đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

A. Bốn mặt. **B**. Năm mặt. **C**. Ba mặt. **D**. Hai mặt.

Câu 33. Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt. **B**. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

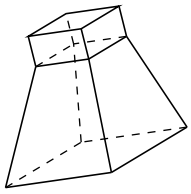
C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh. **D**. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

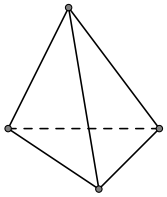
Khẳng định sai là "Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt" vì theo định nghĩa hình đa diện "Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt".

Chọn đáp án A □

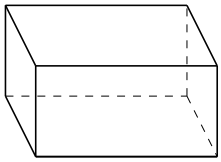
Câu 34. Mỗi hình sau đây gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình sao sau đây **không** phải là hình đa diện?



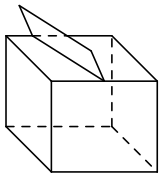
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 4. **B**. Hình 3. **C**. Hình 2. **D**. Hình 1.

Lời giải.

Quan sát ta thấy hình (4) không phải là hình đa diện do có cạnh là cạnh chung của 1 đa giác.

Các hình còn lại đều thỏa mãn khái niệm hình đa diện.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tổng số đỉnh, cạnh, mặt của hình lập phương là

A. 26. **B**. 14. **C**. 24. **D**. 28.

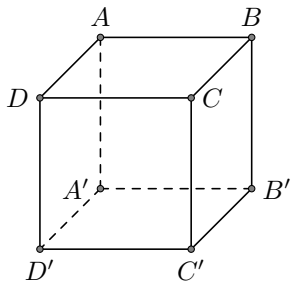
Lời giải.

Số mặt của hình lập phương là 6.

Số cạnh của hình lập phương là 12.

Số đỉnh của hình lập phương là 8.

Do đó tổng số đỉnh, cạnh, mặt của hình lập phương là 26.



Chọn đáp án A □

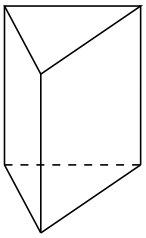
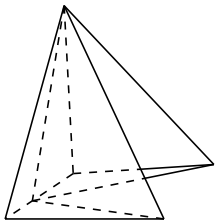
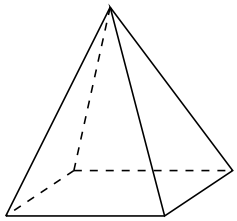
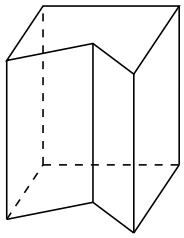
Câu 36. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong các hình dưới đây, hình nào **không phải** là hình đa diện ?

A.  . **B**.  . **C**.  . **D**.  .

Lời giải.

Áp dụng tính chất b) mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

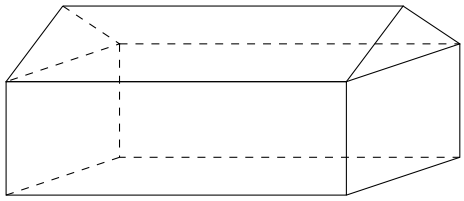
Không phải hình đa diện : vì có cạnh là cạnh chung của 2 đa giác.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38.

Số đỉnh của đa diện trong hình vẽ là

A. 8. **B**. 9. **C**. 10. **D**. 11.



Lời giải.

Bằng cách đếm ta có số đỉnh của đa diện là 10.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn 7.

B. Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 8.

C. Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn 6.

D. Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

Lời giải.

Với ví dụ tứ diện là một hình đa diện thì chỉ có mệnh đề "Số cạnh của một hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 6" là đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Trong các khẳng định sau về một hình đa diện bất kì, khẳng định nào đúng?

A. Số các đỉnh hoặc số các mặt lớn hơn 5.

B. Số các đỉnh hoặc số các mặt lớn hơn 4.

C. Số các đỉnh hoặc số các mặt lớn hơn hoặc bằng 5.

D. Số các đỉnh hoặc số các mặt lớn hơn hoặc bằng 4.

Lời giải.

Xét hình đa diện là tứ diện thì chỉ có mệnh đề "Số các đỉnh hoặc số các mặt lớn hơn hoặc bằng 4" là đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

B. Tồn tại hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

C. Tồn tại hình đa diện có số cạnh và số đỉnh bằng nhau.

D. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

Lời giải.

Tứ diện là hình đa diện có số mặt và số đỉnh bằng nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Tìm số mặt, số cạnh và số đỉnh của một hình lập phương.

A. 26. **B**. 24. **C**. 8. **D**. 6.

Lời giải.

Hình lập phương có 8 đỉnh, 6 mặt và 12 cạnh. Suy ra tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh của hình lập phương là $8+6+12=26$.

Chọn đáp án A □

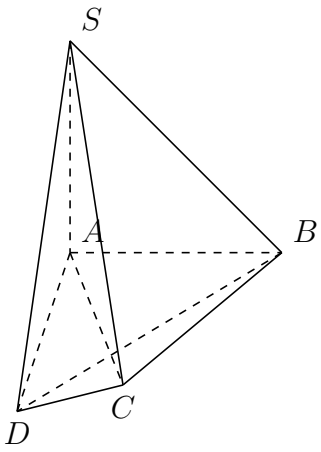
Câu 43. Số cạnh của một khối chóp hình tam giác là

A. 6. **B**. 4. **C**. 7. **D**. 5.

Câu 44. Có thể chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối tứ diện là

A. $SBCD$ và $SACD$. **B**. $SACD$ và $SABD$. **C**. $SABC$ và $SABD$. **D**. $SABC$ và $SACD$.

Lời giải.



Chọn đáp án D □

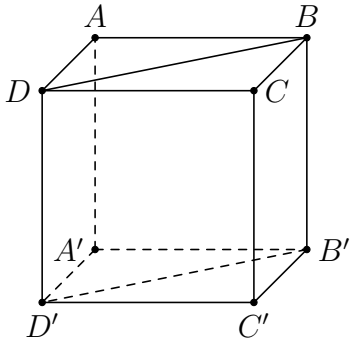
Câu 45. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(BDD'B')$ chi khối lập phương thành

A. Hai khối lăng trụ tam giác. **B**. Hai khối tứ diện.

C. Hai khối lăng trụ tứ giác. **D**. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.

Mặt phẳng $(BDD'B')$ chia khối lập phương thành hai khối lăng trụ tam giác lần lượt là $ABD.A'B'D'$ và $CBD.C'B'D'$.



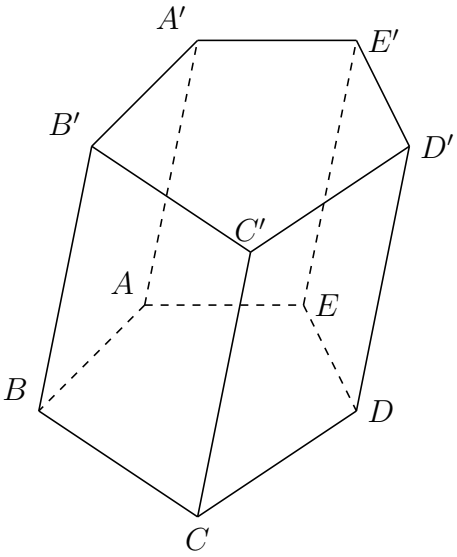
Chọn đáp án A □

Câu 46. Hình lăng trụ ngũ giác có bao nhiêu mặt?

A. 9. **B**. 5. **C**. 7. **D**. 2.

Lời giải.

Hình lăng trụ ngũ giác có tất cả: 5 mặt bên và 2 mặt đáy.



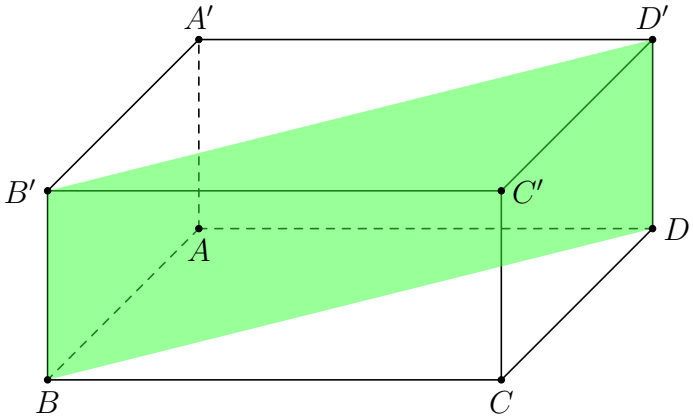
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(BDD'B')$ chia khối lập phương thành

A. Hai khối lăng trụ tam giác. **B**. Hai khối tứ diện.

C. Hai khối lăng trụ tứ giác. **D**. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.



Chọn đáp án A □

Câu 48. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Mỗi đỉnh của một khối đa diện đương nhiên không thể là đỉnh của chỉ một mặt hay hai mặt, vì như thế không tạo ra được khối đa diện. Mỗi đỉnh của hình đa diện có thể là đỉnh chung của 3 mặt, chẳng hạn là khối tứ diện. Như vậy, mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tứ giác.

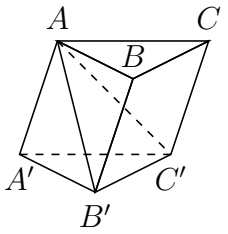
B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

C. Hai khối chóp tam giác.

D. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

Lời giải.

Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ đã cho thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.



Chọn đáp án D □

Câu 50. Mỗi cạnh của khối đa diện là cạnh chung của bao nhiêu mặt của khối đa diện?

A. Không có mặt nào. **B**. Ba mặt. **C**. Bốn mặt. **D**. Hai mặt.

Lời giải.

Theo khái niệm của khối đa diện ta có mỗi cạnh của khối đa diện là cạnh chung của **đúng hai mặt**.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho một hình đa diện. Chọn khẳng định **sai**.

A. Mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh.

B. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

D. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất 3 mặt.

Lời giải.

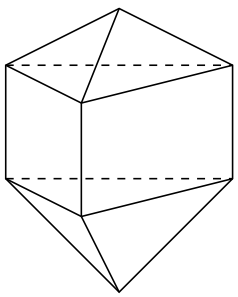
Theo định nghĩa khối đa diện thì mỗi cạnh của nó là cạnh chung của đúng 2 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 52.

Tìm số mặt của hình đa diện ở hình vẽ bên.

A. 11. **B**. 10. **C**. 12. **D**. 9.

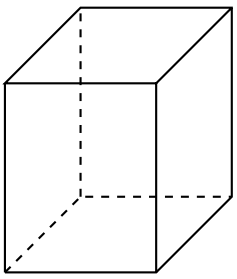


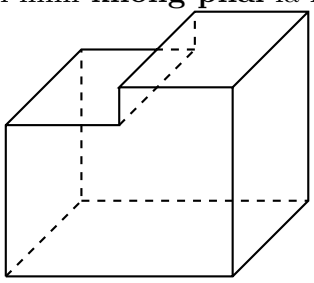
Lời giải.

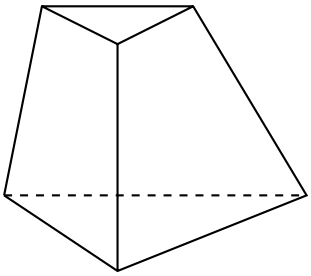
Quan sát và đếm được số mặt là 9.

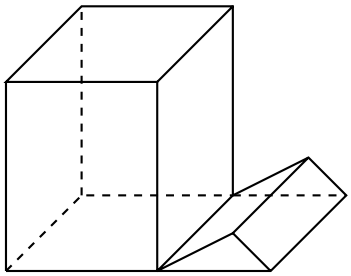
Chọn đáp án D □

Câu 53. Mỗi hình sau gồm một số hữu hạn đa giác, tìm hình **không phải** là hình đa diện.

A. 

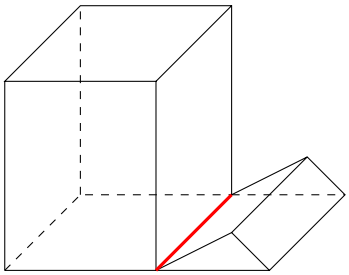
B. 

C. 

D. 

Lời giải.

Hình D không là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh của nhiều hơn 2 mặt (xem hình bên).



Chọn đáp án D ☐

Câu 54. Khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $3a$ có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải.

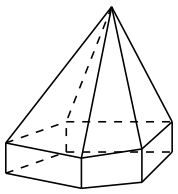
Khối chóp tam giác đều có 3 mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng chứa 1 cạnh bên của hình chóp và đi qua trung điểm của cạnh đáy đối diện.

Chọn đáp án A ☐

Câu 55.

Hình đa diện bên có tất cả bao nhiêu mặt?

A. 11. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 10.



Lời giải.

Hình đa diện đã cho có 5 mặt là hình tam giác, 5 mặt hình tứ giác và 1 mặt là ngũ giác. Nó có tất cả 11 mặt.

Chọn đáp án A ☐

Câu 56. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Sai**?

A. Hình lập phương là một hình đa diện lồi. **B.** Hình hộp là hình đa diện lồi.

C. Tứ diện đều là đa diện lồi. **D.** Hình lăng trụ tứ giác là hình tứ diện lồi.

Câu 57. Số cạnh của một hình bát diện đều là

A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 58. Cho khối đa diện, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Sai**?

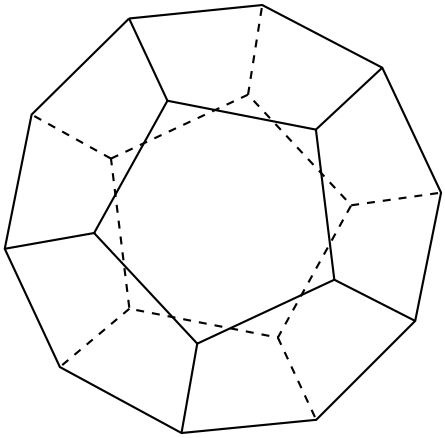
A. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh. **B.** Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh. **D.** Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

Câu 59. Số đỉnh của hình hai mươi mặt đều là

A. 12. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 16.

Lời giải.



Chọn đáp án A ☐

Câu 60. Khẳng định nào sau đây đúng? Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mp$(A'BC)$ ta được

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

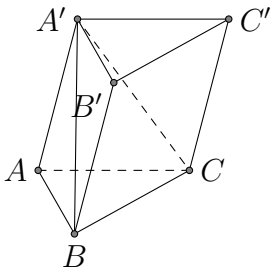
B. Hai khối chóp tứ giác.

C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

D. Hai khối chóp tam giác.

Lời giải.

Mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ thành một khối chóp tam giác $A'.ABC$ và một khối chóp tứ giác $A'.BCC'B'$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 61. Tổng số mặt, số cạnh và số đỉnh của một hình lập phương là

A. 26. **B**. 30. **C**. 22. **D**. 24.

Lời giải.

Hình lập phương có 6 mặt, 12 cạnh và 8 đỉnh. Suy ra tổng số mặt, số cạnh và số đỉnh của một hình lập phương là 26.

Chọn đáp án A ☐

Câu 62. Khối lăng trụ ngũ giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

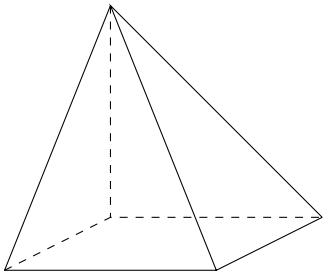
A. 20. **B**. 25. **C**. 10. **D**. 15.

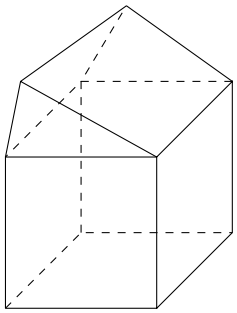
Lời giải.

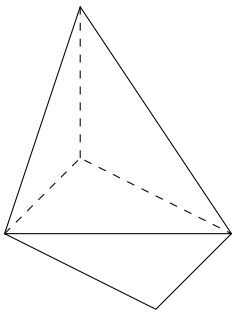
Khối lăng trụ ngũ giác có 2 đáy, mỗi đáy 5 cạnh và 5 cạnh bên. Vậy nó có tất cả 15 cạnh.

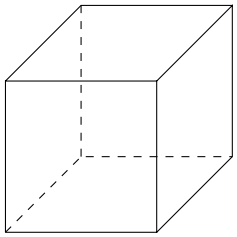
Chọn đáp án D ☐

Câu 63. Hình nào dưới đây **không** phải là hình đa diện?

A.  .

B.  .

C.  .

D.  .

Câu 64. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

B. Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi.

C. Khối lập phương là khối đa diện lồi.

D. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Lắp ghép hai khối hộp chưa chắc được một khối đa diện lồi.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho hình chóp có 20 cạnh. Tính số mặt của hình chóp đó.

A. 20. **B**. 11. **C**. 12. **D**. 10.

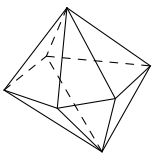
Lời giải.

Trong hình chóp, số cạnh bên bằng số cạnh đáy. Do đó, số cạnh đáy bằng 10. Suy ra số mặt bên bằng 10. Vậy hình chóp có tất cả 11 mặt.

Chọn đáp án B □

Câu 66.

Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?



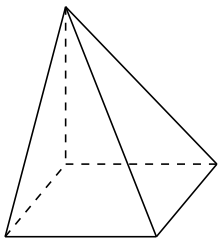
A. 10. **B**. 15. **C**. 8. **D**. 11.

Lời giải.

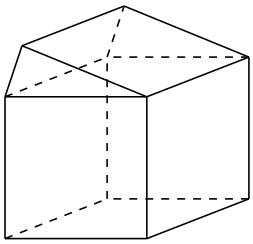
Hình đa diện đã cho có tất cả 10 mặt.

Chọn đáp án A □

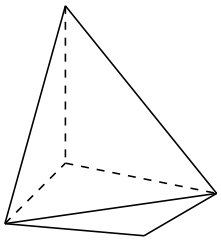
Câu 67. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?



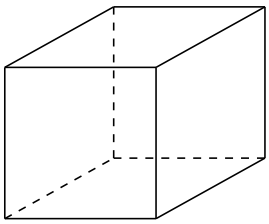
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1. **B**. Hình 2. **C**. Hình 4. **D**. Hình 3.

Lời giải.

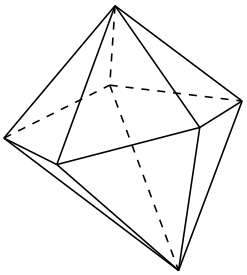
Hình 3 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của ba mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 68.

Hình đa diện bên có bao nhiêu mặt?

A. 11. **B**. 12. **C**. 10. **D**. 7.



Lời giải.

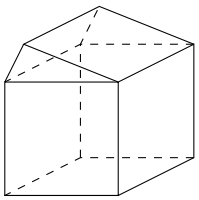
Hình đa diện bên có 10 mặt.

Chọn đáp án C □

Câu 69.

Hình bên có bao nhiêu mặt?

A. 10. **B**. 7. **C**. 9. **D**. 4.



Lời giải.

Hình bên có 9 mặt.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Mỗi đỉnh của đa diện là đỉnh chung của ít nhất

A. bốn cạnh. **B**. năm cạnh. **C**. ba cạnh. **D**. hai cạnh.

Lời giải.

Mỗi đỉnh của đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Khối lăng trụ ngũ giác có bao nhiêu mặt?

A. 7 mặt. **B**. 9 mặt. **C**. 6 mặt. **D**. 5 mặt.

Lời giải.

Khối lăng trụ ngũ giác có 7 mặt trong đó có 5 mặt bên và 2 mặt đáy.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho hình lăng trụ đứng, mỗi mặt bên của nó là một hình vuông có diện tích bằng a^2 $(a > 0)$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đó.

A. a. **B**. $3a$. **C**. a^2. **D**. $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Hình lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Do đó chiều cao của lăng trụ đứng bằng độ dài cạnh bên. Theo giả thiết mỗi mặt bên là hình vuông có diện tích bằng a^2 $(a > 0)$ suy ra cạnh bên và cạnh đáy của lăng trụ bằng nhau và bằng a.

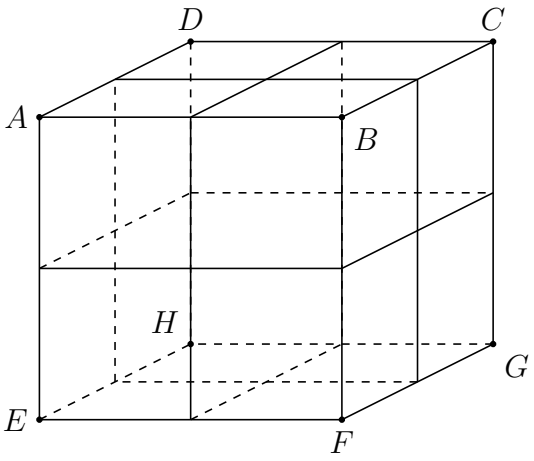
Chọn đáp án A □

Câu 73. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6 mặt phẳng. **B**. 3 mặt phẳng. **C**. 9 mặt phẳng. **D**. 4 mặt phẳng.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật có 3 mặt phẳng đối xứng như hình vẽ.



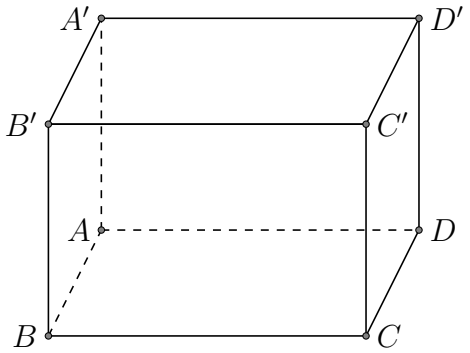
Chọn đáp án B □

Câu 74. Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của hình lập phương là

A. 16. **B**. 26. **C**. 8. **D**. 24.

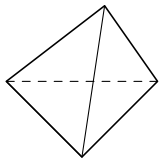
Lời giải.

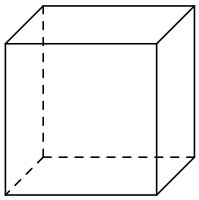
Hình lập phương có 8 đỉnh, 12 cạnh, 6 mặt. Do đó, tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của hình lập phương là $8 + 12 + 6 = 26$.

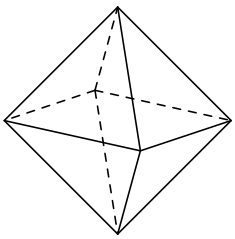


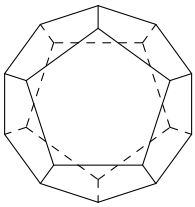
Chọn đáp án B □

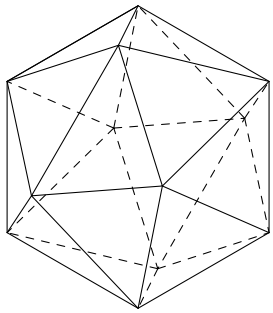
Câu 75. Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều.


Khối tứ diện đều


Khối lập phương


Khối bát diện đều


Khối 12 mặt đều


Khối 20 mặt đều

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.

B. Khối mười hai mặt đều và khối 20 mặt đều có cùng số đỉnh.

C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.

D. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.

Lời giải.

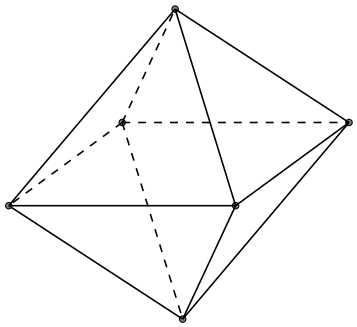
Quan sát hình minh họa các khối đa diện đều ta thấy khối lập phương và khối bát diện đều cùng có 12 cạnh.

Chọn đáp án A □

Câu 76.

Hình bát diện đều (tham khảo hình vẽ bên) có bao nhiêu mặt?

A. 8. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 4.



Lời giải.

Hình bát diện đều có tám mặt.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Khối chóp ngũ giác có bao nhiêu cạnh?

A. 20. **B**. 15. **C**. 5. **D**. 10.

Lời giải.

Khối chóp n giác sẽ có $2n$ cạnh.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Khối đa diện nào sau đây có công thức thể tích là $V = \dfrac{1}{3}Bh$ biết hình đa diện đó có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h?

A. Khối chóp. **B**. Khối hộp chữ nhật. **C**. Khối hộp. **D**. Khối lăng trụ.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích khối chóp có đáy là B, chiều cao là h thì có thể tích là $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Mỗi cạnh của một hình đa diện là cạnh chung của đúng n mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $n = 2$. **B**. $n = 5$. **C**. $n = 3$. **D**. $n = 4$.

Lời giải.

Mỗi cạnh của một hình đa diên là cạnh chung của 2 mặt.

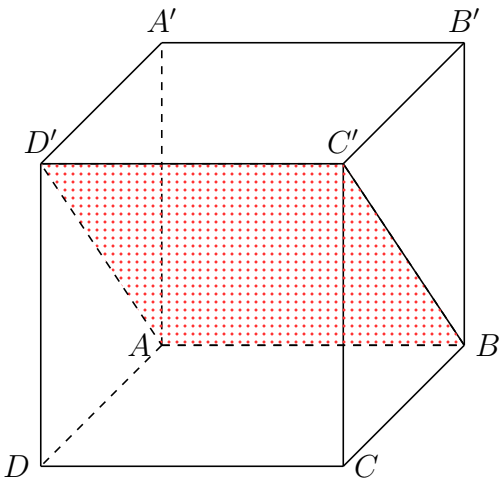
Chọn đáp án A □

Câu 80. Mặt phẳng nào sau đây chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ?

A. $(A'BC')$. **B**. (ABC'). **C**. $(AB'C)$. **D**. $(A'BD)$.

Lời giải.

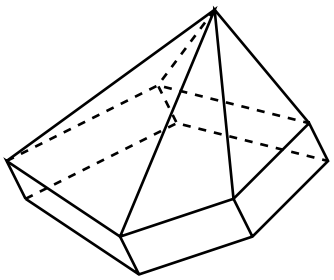
Mặt phẳng (ABC') chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ $BB'C'.AA'D'$ và $BCC'.ADD'$.



Chọn đáp án B □

Câu 81.

Hình đa diện sau có bao nhiêu mặt?



A. 12.

B. 10.

C. 6.

D. 11.

Lời giải.

Hình đa diện đã cho được tạo nên bởi 1 mặt đáy, 5 mặt bên ở giữa, 5 mặt bên ở trên.

Vậy hình đa diện có 11 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai khối chóp có hai đáy là hai đa giác bằng nhau thì thể tích bằng nhau.

B. Hai khối đa diện có thể tích bằng nhau thì bằng nhau.

C. Hai khối lăng trụ có chiều cao bằng nhau thì thể tích bằng nhau.

D. Hai khối đa diện bằng nhau có thể tích bằng nhau.

Câu 83. Số cạnh của hình bát diện đều là

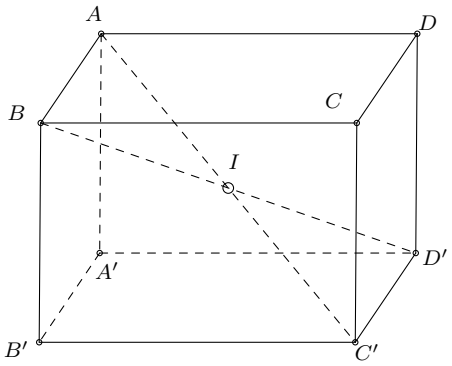
A. 8. **B**. 10. **C**. 12. **D**. 24.

Câu 84. Hình đa diện nào sau đây có tâm đối xứng?

A. Hình hộp chữ nhật. **B**. Hình tứ diện đều.

C. Hình chóp tứ giác đều.

D. Hình lăng trụ tam giác.



Lời giải.

Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm đối xứng là trung điểm của đường chéo chính AC'.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Số đỉnh của hình bát diện đều bằng

A. 6. **B**. 12. **C**. 8. **D**. 5.

Lời giải.

Số đỉnh của hình bát diện đều bằng 6.

Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Gọi D, M, C lần lượt là tổng số đỉnh, tổng số mặt và tổng số cạnh của một hình lăng trụ tam giác. Biểu thức $D+C-3M$ có giá trị bằng

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có hình lăng trụ tam giác có tổng số đỉnh là 6, tổng số mặt là 5 và tổng số cạnh là 9.

Do đó $D+C-3M=6+9-3\cdot 5=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Hình nào **không phải** là hình đa diện đều trong các hình dưới đây?

A. Hình tứ diện đều.

B. Hình hộp chữ nhật có diện tích các mặt bằng nhau.

C. Hình lập phương.

D. Hình chóp tam giác đều.

Lời giải.

Hình chóp tam giác đều chỉ biết mặt đáy là tam giác đều nhưng các mặt bên chưa chắc là tam giác đều.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Trong các mệnh đề sau, hãy chọn mệnh đề **đúng**. Trong một khối đa diện thì

A. hai mặt bất kì có ít nhất một cạnh chung.

B. hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung.

C. hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.

D. mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Trong khối đa diện thì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh nên nó là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của một hình lập phương cạnh a.

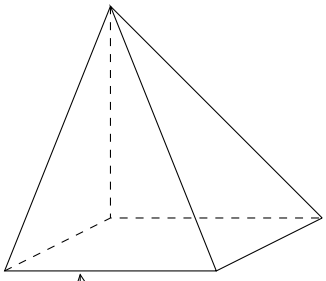
A. $l = 6a$. **B**. $l = 12a$. **C**. $l = 6$. **D**. $l = 12$.

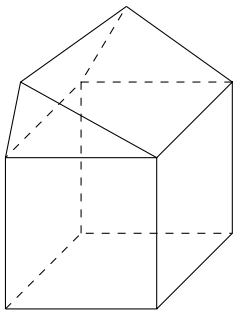
Lời giải.

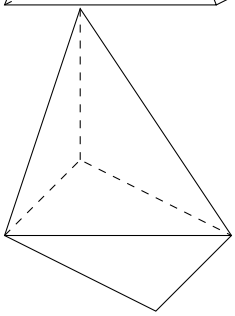
Hình lập phương có tất cả 12 cạnh nên $l = 12a$.

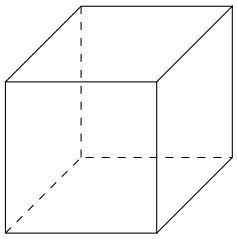
Chọn đáp án B □

Câu 90. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

A.  .

B.  .

C.  .

D.  .

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai cạnh bất kỳ có ít nhất một điểm chung. **B**. Ba mặt bất kì có ít nhất một đỉnh chung.

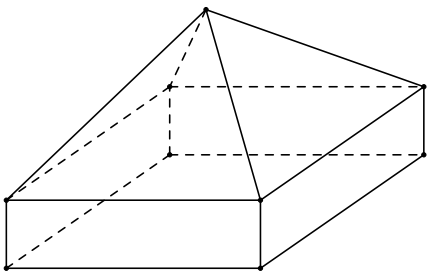
C. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung. **D**. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Theo tính chất khối đa diện sgk hình học 12.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Khối đa diện cho bởi hình vẽ dưới đây có bao nhiêu mặt?



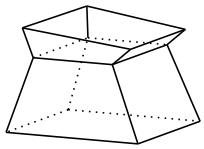
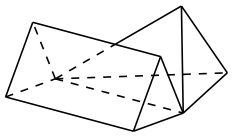
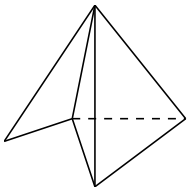
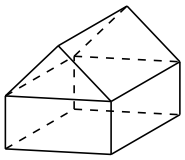
A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Khối đa diện trên có 8 mặt bên và 1 mặt đáy nên có tổng cộng 9 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Cho các hình vẽ sau:

Số các hình đa diện trong các hình trên là

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Dựa vào các hình đã cho ta có số hình đa diện là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Đa diện đều loại $\{3;3\}$ có tên gọi nào dưới đây?

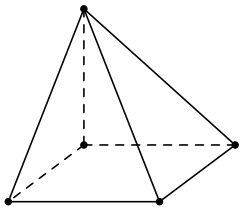
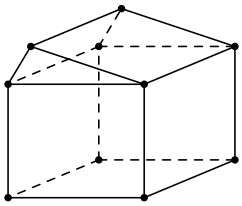
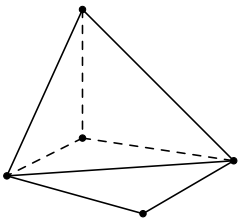
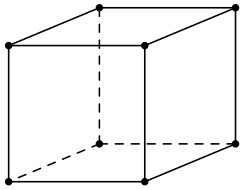
A. Tứ diện đều. **B**. Lập phương. **C**. Bát diện đều. **D**. Hai mươi mặt đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ là tứ diện đều.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Hình nào dưới đây **không phải** là hình đa diện?

Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 1. **B**. Hình 2. **C**. Hình 4. **D**. Hình 3.

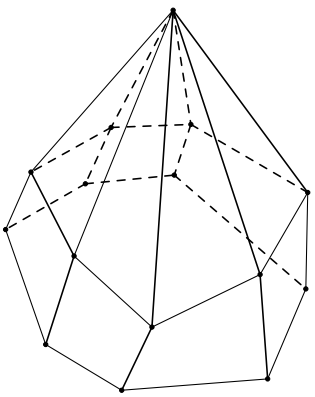
Lời giải.

Hình 3 do có một cạnh chung của ba đa giác nên không phải là hình đa diện.

Chọn đáp án D □

Câu 96.

Khối đa diện sau có bao nhiêu mặt?



A. 7. **B**. 8. **C**. 15. **D**. 16.

Lời giải.

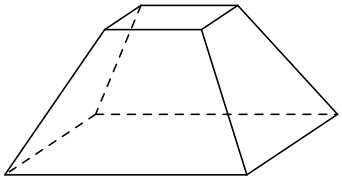
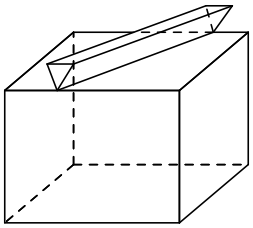
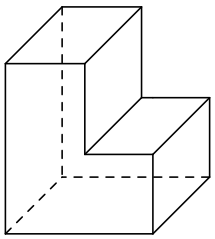
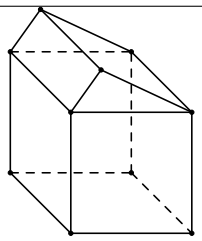
.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

A. Năm mặt. **B**. Ba mặt. **C**. Bốn mặt. **D**. Hai mặt.

Câu 98. Cho các khối hình sau

			
Hình 1	Hình 2	Hình 3	Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Có hai khối đa diện lồi là Hình 1 và Hình 4.

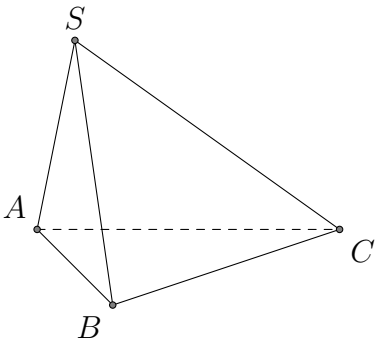
Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Hình tứ diện có bao nhiêu cạnh?

A. 5 cạnh. **B**. 3 cạnh. **C**. 4 cạnh. **D**. 6 cạnh.

Lời giải.

Hình minh họa



Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Gọi n là số cạnh của hình chóp có 101 đỉnh. Tìm n.

A. $n = 202$. **B**. $n = 200$. **C**. $n = 101$. **D**. $n = 203$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. D	5. B	6. D	7. C	8. D	9. D	10. D
11. C	12. C	13. A	14. A	15. A	16. A	17. B	18. C	19. A	20. C
21. A	22. C	23. A	24. D	25. C	26. A	27. C	28. B	29. C	30. B
31. B	32. C	33. A	34. A	35. A	36. D	37. B	38. C	39. D	40. D
41. D	42. A	43. A	44. D	45. A	46. C	47. A	48. A	49. D	50. D
51. D	52. D	53. D	54. A	55. A	56. D	57. B	58. D	59. A	60. C
61. A	62. D	63. C	64. B	65. B	66. A	67. D	68. C	69. C	70. C
71. A	72. A	73. B	74. B	75. A	76. A	77. D	78. A	79. A	80. B
81. D	82. D	83. C	84. A	85. A	86. D	87. D	88. D	89. B	90. C
91. D	92. D	93. C	94. A	95. D	96. C	97. B	98. B	99. D	100. B

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Một hình hộp chữ nhật (không phải hình lập phương) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật (không phải hình lập phương) có 3 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung. **B**. Ba mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.

C. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung. **D**. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Trong một khối đa diện, mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A. 2017. **B**. 2019. **C**. 2018. **D**. 2020.

Lời giải.

Giả sử số đỉnh của đa giác đáy của lăng trụ là n.

Khi đó số cạnh của 2 mặt đáy là $2n$ và số cạnh bên của lăng trụ là n.

Vậy số cạnh của lăng trụ là $3n$. Ta thấy $3 \cdot 673 = 2019$ nên chọn đáp án B.

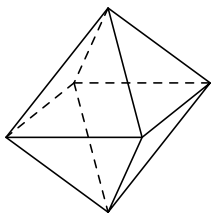
Chọn đáp án B □

Câu 4. Khối bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{3;5\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều là $\{3;4\}$.



Chọn đáp án C □

Câu 5. Hình đa diện sau có bao nhiêu mặt?

A. 11. **B**. 20. **C**. 12. **D**. 10.

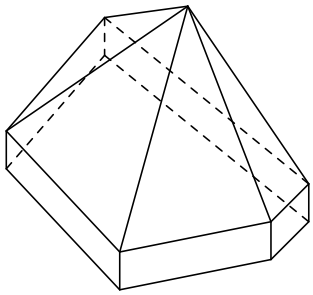
Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào hình vẽ, đếm tổng số mặt bên và mặt đáy của khối đa diện.

Cách giải:

Ta thấy khối đa diện trong hình vẽ có 11 mặt cả mặt đáy.



Chọn đáp án A □

Câu 6. Số đỉnh của một hình bát diện đều là:

A. 21. **B**. 14. **C**. 8. **D**. 6.

Lời giải.

Phương pháp

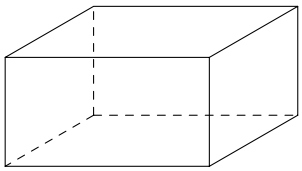
Dựa vào lý thuyết đa diện.

Cách giải:

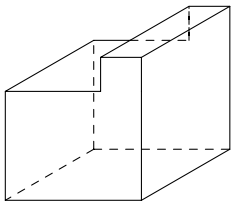
Khối bát diện đều có 6 đỉnh, 12 cạnh và 8 mặt.

Chọn đáp án D □

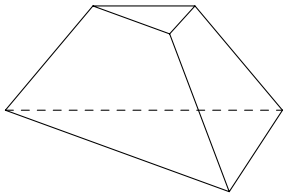
Câu 7. Mỗi hình sau gồm một số hữu hạn đa giác phẳng, tìm hình không là hình đa diện.



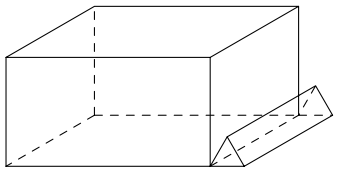
Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.



Hình 4.

A. Hình 4. **B**. Hình 3. **C**. Hình 2. **D**. Hình 1.

Lời giải.

Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thỏa mãn hai điều kiện

① Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

② Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Theo khái niệm trên thì hình 1, hình 2, hình 3 là các hình đa diện; hình 4 không phải hình đa diện (Có cạnh là cạnh chung của 3 đa giác).

Chọn đáp án A □

Câu 8. Một hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 6.

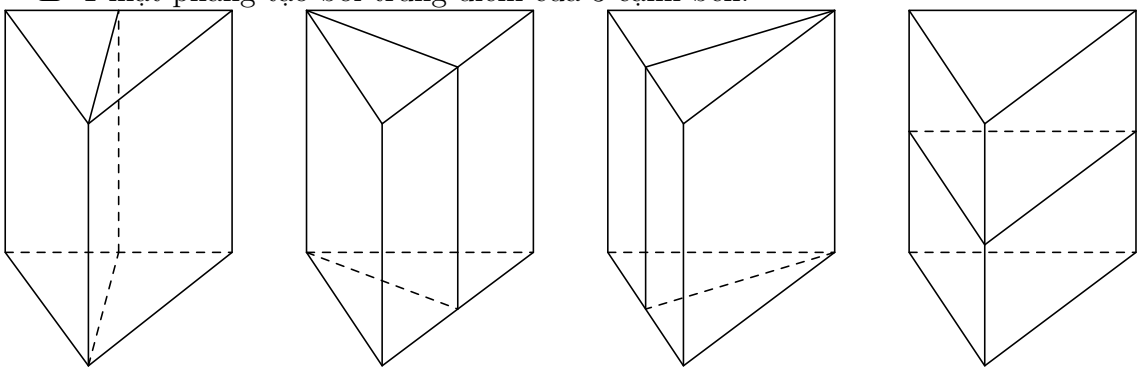
Lời giải.

Phương pháp: Dựa vào lý thuyết các khối đa diện đều.

Cách giải: Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng như hình vẽ bên dưới, trong đó:

☑ 3 mặt phẳng tạo bởi 1 cạnh bên và trung điểm của các cạnh đối diện.

☑ 1 mặt phẳng tạo bởi trung điểm của 3 cạnh bên.



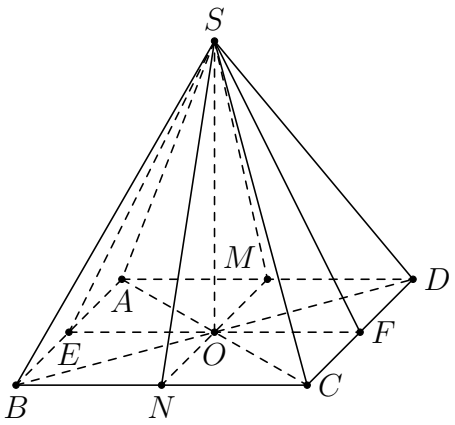
Chọn đáp án C □

Câu 9. Số mặt đối xứng của hình chóp đều $S.ABCD$ là

A. 2. **B**. 4. **C**. 7. **D**. 6.

Lời giải.

Gọi E, F, M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC. Khi đó các mặt đối xứng của hình chóp là (SAC), (SBD), (SEF) và (SMN).



Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình $\mathcal{H}$ có trục đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

B. Nếu hình $\mathcal{H}$ có mặt phẳng đối xứng thì nó có ít nhất một trục đối xứng.

C. Nếu hình $\mathcal{H}$ có mặt phẳng đối xứng và có trục đối xứng thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

D. Nếu hình $\mathcal{H}$ có mặt phẳng đối xứng và có tâm đối xứng nằm trên mặt đó thì nó có ít nhất một tâm đối xứng.

Câu 11. Cho khối chóp có đáy là n giác. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Số mặt của khối chóp bằng $2n$. **B**. Số cạnh của khối chóp bằng $n+2$.

C. Số đỉnh bằng số mặt và bằng $n+1$. **D**. Số đỉnh của khối chóp bằng $2n+1$.

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ biến $\triangle A'IJ$ thành tam giác

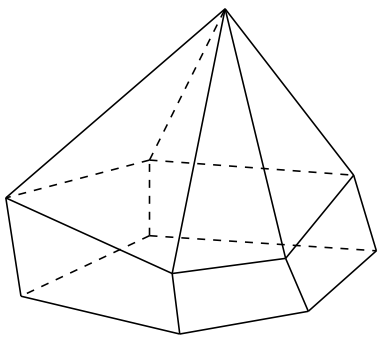
A. $\triangle C'CD$. **B**. $\triangle CD'P$ với P là trung điểm $B'C'$.

C. $\triangle KDC$ với K là trung điểm $A'D'$. **D**. $\triangle DC'D'$.

Câu 13. Hình chóp có 2018 cạnh thì có bao nhiêu đỉnh?

A. 1010. **B**. 2018. **C**. 2017. **D**. 1009.

Câu 14. Hình đa diện sau có bao nhiêu cạnh?

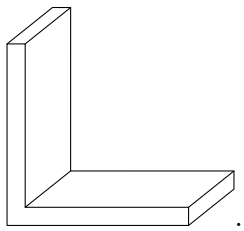
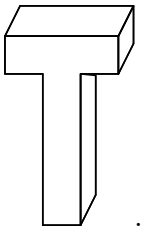
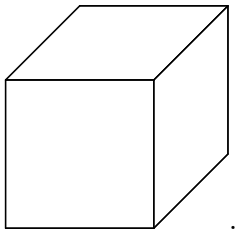
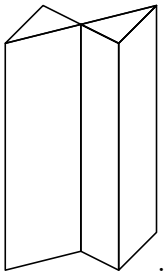


A. 11. **B**. 20. **C**. 12. **D**. 15.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Hình nào sau đây không phải hình đa diện?

A. . **B**. . **C**. . **D**. .

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Số cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 8.

B. Số cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn 6.

C. Số cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn 7.

D. Số cạnh của hình đa diện luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

Câu 17. Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất

A. ba cạnh. **B**. năm cạnh. **C**. bốn cạnh. **D**. hai cạnh.

Câu 18. Tính chất nào sau đây không phải là tính chất của hình hộp chữ nhật?

A. Các mặt là hình chữ nhật. **B**. Có 16 cạnh.

C. Có 8 đỉnh. **D**. Có 6 mặt.

Câu 19. Có tất cả mấy loại khối đa diện đều?

A. 2. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 5.

Câu 20. Điểm trong của khối lăng trụ là điểm

A. Không thuộc khối lăng trụ.

B. Thuộc khối lăng trụ và thuộc hình lăng trụ.

C. Thuộc hình lăng trụ.

D. Thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ.

Câu 21. Trong không gian, phép biến hình nào sao đây không phải là phép dời hình?

A. Phép đối xứng qua đường thẳng Δ. **B**. Phép vị tự tỉ số $k=-3$.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. **D**. Phép đối xứng tâm O.

Câu 22. Trong khối đa diện đều loại $\{5;3\}$. Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của mấy mặt?

A. 3. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Câu 23. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao của khối chóp là $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D**. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 24. Cho một hình đa diện. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh. **B**. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt. **D**. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

Lời giải.

Khẳng định C sai vì mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt.

Chọn đáp án C ☐

Câu 25. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

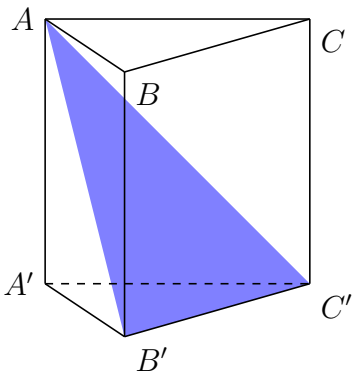
B. Hai khối chóp tam giác.

C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

D. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.

Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BB'C'C$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D**. $V = a^3\sqrt{6}$.

Lời giải.

Diện tích đáy là a^2, chiều cao $SA = a\sqrt{6}$. Thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có $AB = BC = CA = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $V = a^3$. **B**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C**. $V = \dfrac{a^3}{4}$. **D**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Chiều cao $SA = a\sqrt{3}$. Diện tích đáy $S = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$. Thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3$

Chọn đáp án A ☐

Câu 28. Kim tự tháo Kê-ốp ở Ai Cập có dạng một khối chóp tứ giác đều, biết rằng cạnh đáy dài 230m và chiều cao 147m. Thể tích của khối kim tự tháp đó bằng

A. 2592100 m^2. **B**. 7776300 m^3. **C**. 25921000 m^3. **D**. 2592100 m^3.

Lời giải.

Diện tích đáy $B = 230^2$ m^2. Thể tích là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 147 = 2592100$ m^3.

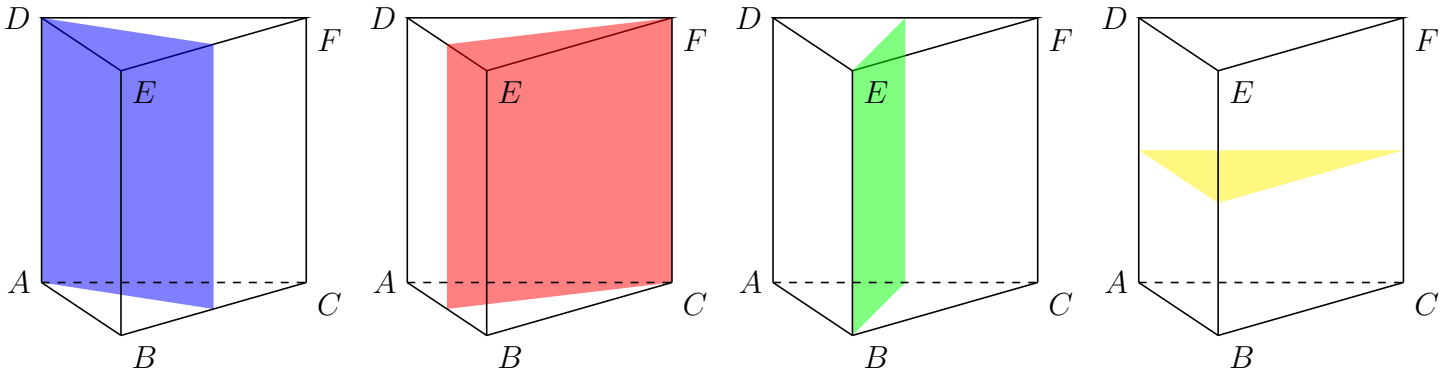
Chọn đáp án D ☐

Câu 29. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 5. **C**. 4. **D**. Vô số.

Lời giải.

Các mặt phẳng đối xứng là



Chọn đáp án C □

Câu 30. Tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình

A. tứ diện đều. **B**. 12 mặt đều. **C**. lập phương. **D**. 20 mặt đều.

Câu 31. Một hình lăng trụ có 2018 mặt. Hỏi hình lăng trụ đó có bao nhiêu cạnh?

A. 6048. **B**. 2018. **C**. 6054. **D**. 4036.

Câu 32. Một hình chóp có tất cả 10 cạnh. Tính số đỉnh của hình chóp đó.

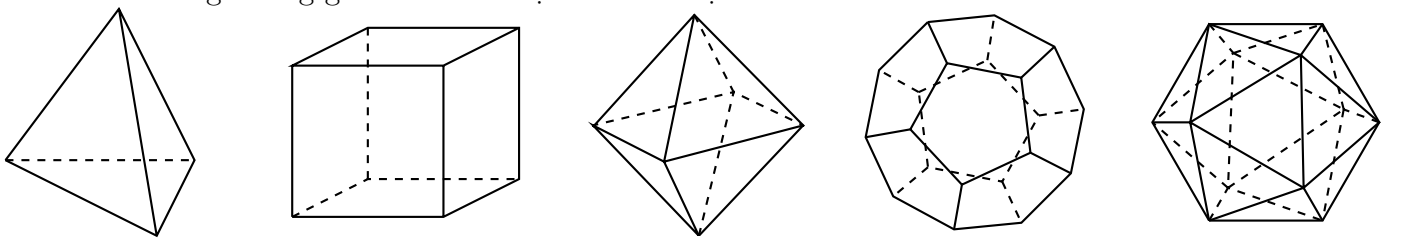
A. 5. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Hình chóp $S.A_1A_2\dots A_n$ có n cạnh bên $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ và n cạnh đáy $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$. Suy ra một hình chóp có 10 cạnh thì số cạnh đáy là 5 và số đỉnh ở đáy là 5. Do đó có số đỉnh là $5+1=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ sau:



Khối tứ diện đều **Khối lập phương** **Khối bát diện đều** **Khối mười hai mặt đều** **Khối hai mươi mặt đều**

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.

B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.

C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.

D. Khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều có cùng số đỉnh.

Lời giải.

Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh là 12.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 9.

Câu 35. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng khi nói về số đỉnh và số mặt của một hình đa diện bất kỳ?

A. Lớn hơn hoặc bằng 5. **B**. Lớn hơn hoặc bằng 4.

C. Lớn hơn 4. **D**. Lớn hơn 5.

Câu 36. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh bằng số cạnh.

B. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số mặt.

C. Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh bằng số mặt.

D. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

Câu 37. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các loại khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tứ giác.

B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

D. Hai khối chóp tam giác.

Câu 38. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{2}, BC = 3a$. Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là 60^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $3a^3\sqrt{3}$. **B**. $a^3\sqrt{3}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D**. $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 39. Cho một hình đa diện. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh. **B**. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt. **D**. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

Câu 40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

B. Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

Câu 41. Khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính chiều cao h khối chóp $S.ABC$ tính theo a.

A. $h = \dfrac{2a}{3}$. **B**. $h = 2a\sqrt{3}$. **C**. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. $h = a\sqrt{3}$.

Câu 42. Khối lập phương là khối đa diện loại nào?

A. $\{4;3\}$. **B**. $\{4;4\}$. **C**. $\{3;3\}$. **D**. $\{3;3\}$.

Câu 43. Số cạnh của một khối chóp bất kỳ luôn là

A. Một số chẵn lớn hơn hoặc bằng 6. **B**. Một số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4.

C. Một số lẻ. **D**. Một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 5.

Lời giải.

Giả sử đa giác đáy của hình chóp có n cạnh ($n \geq 3$) thì cũng có n đỉnh nên có thêm n cạnh bên.

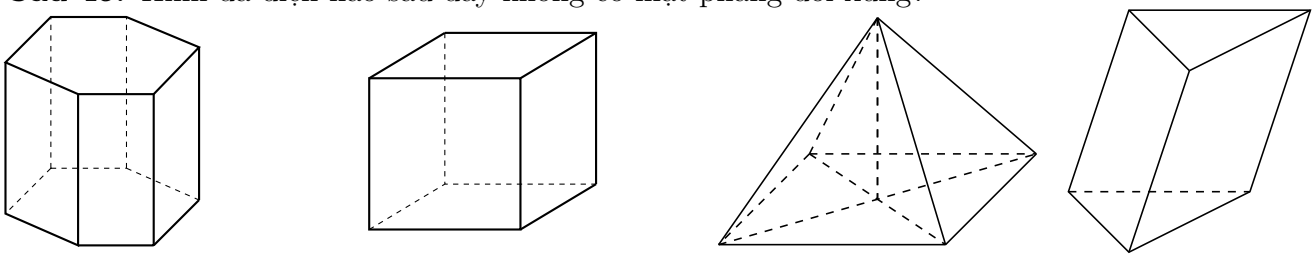
Vậy số cạnh của khối chóp là $2n \geq 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Khối đa diện loại $\{4;3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 4. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 8.

Câu 45. Hình đa diện nào sau đây không có mặt phẳng đối xứng?



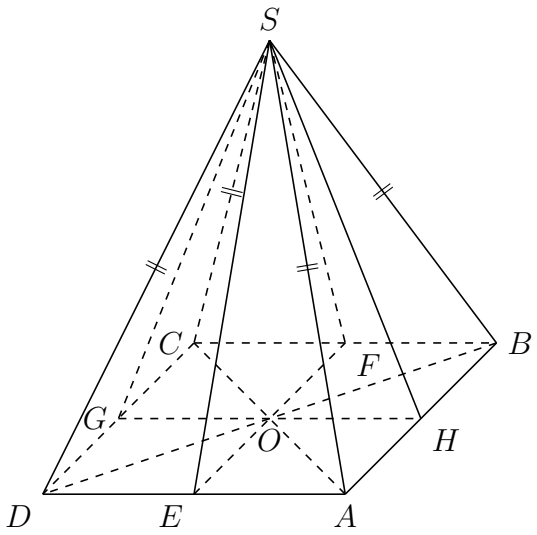
A. Hình lăng trụ lục giác đều. **B**. Hình lăng trụ tam giác.

C. Hình chóp tứ giác đều. **D**. Hình lập phương.

Câu 46. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.



Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có 4 mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng (SAC), (SBD), (SEF), (SGH).

Chọn đáp án C □

Câu 47. Xét một khối đa diện, khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt.

D. Hai mặt bất kì luôn có ít nhất một điểm chung.

Lời giải.

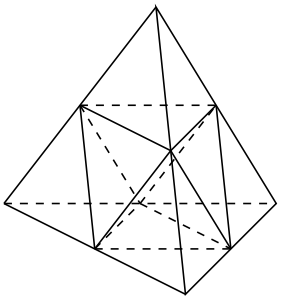
Hai mặt song song nhau không có điểm chung.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Các trung điểm của tất cả các cạnh của hình tứ diện đều là các đỉnh của

A. Hình lập phương. **B**. Hình bát diện đều. **C**. Hình tứ diện đều. **D**. Hình hộp chữ nhật.

Lời giải.



Chọn đáp án B □

Câu 49. Một hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng đó là:

∘ Một mặt phẳng đi qua trung điểm của các cạnh bên.

∘ Ba mặt phẳng trung trực của các cạnh đáy.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Hình chóp có 2020 cạnh thì có bao nhiêu đỉnh?

A. 1010. **B**. 1011. **C**. 2021. **D**. 2020.

Lời giải.

Nhận xét: Hình chóp có $2n$ cạnh thì có $n+1$ đỉnh.

Ta có: $2n = 2020 \Leftrightarrow n = 1010$. Suy ra hình chóp có $n+1 = 1011$ đỉnh.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Trong một hình đa diện, mệnh đề nào dưới đây đúng?

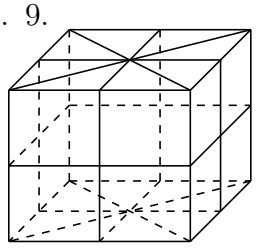
A. Hai mặt bất kỳ có ít nhất một điểm chung. **B**. Hai mặt bất kỳ có ít nhất một cạnh chung.

C. Hai cạnh bất kỳ có ít nhất một điểm chung. **D**. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Câu 52. Hình hộp chữ nhật chỉ có hai đáy là hai hình vuông có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B**. 3. **C**. 9. **D**. 5.

Lời giải.



Chọn đáp án D □

Câu 53. Khối bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{3;5\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều có mỗi mặt là một tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt nên thuộc loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Có bao nhiêu khối đa diện đều.

A. 4. **B**. 5. **C**. 6. **D**. Vô số.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 10. **B**. 12. **C**. 8. **D**. 20.

Lời giải.

Theo sách giáo khoa, hình bát diện đều có 6 đỉnh, 12 cạnh, 8 mặt.

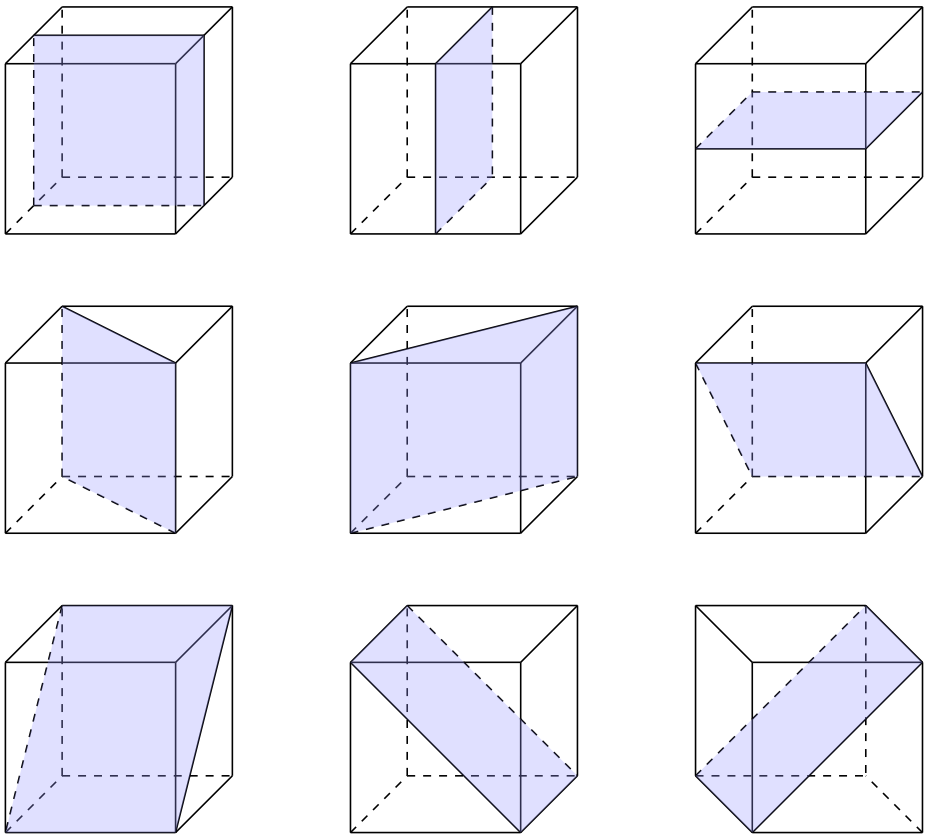
Chọn đáp án B □

Câu 56. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng như hình vẽ



Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách d từ đỉnh B đến mặt phẳng (ACD).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B**. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C**. $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D**. $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác ACD. Ta có $d=BO=\sqrt{BA^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Nếu tăng lần lượt số đo ba cạnh của một khối hộp chữ nhật là a, b, c lên thành $2a$, $3b$, $5c$ thì thể tích của khối hộp chữ nhật mới sẽ tăng lên gấp bao nhiêu lần so với thể tích ban đầu?

A. 15. **B**. 10. **C**. 6. **D**. 30.

Lời giải.

Gọi V là thể tích ban đầu của khối hộp chữ nhật.

Ta có $V = abc$.

Gọi V' là thể tích của khối hộp sau khi tăng số đo ba cạnh của khối hộp.

$V' = 30abc = 30V$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích hình chóp đó là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **D**. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{AB^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích là a^3 và diện tích tam giác SBC là a^2. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $3a$. **B**. $a\sqrt{3}$. **C**. a. **D**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}d(A,(SBC)) \cdot S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{3}d(A,(SBC)) \cdot a^2 = a^3$.

Suy ra $d(A,(SBC)) = 3a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể thể tích bằng 900 cm^3. Khi đó thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ là

A. 500 cm^3. **B**. 300 cm^3. **C**. 400 cm^3. **D**. 600 cm^3.

Lời giải.

Ta có: $V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3} \cdot 900 = 600$ cm ^{3}

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Các đường chéo của khối bát diện đều $ABCDEF$ đôi một vuông góc.

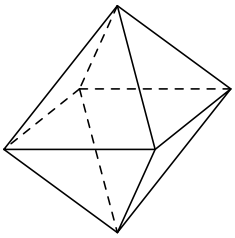
B. Các đường chéo của khối bát diện đều $ABCDEF$ đồng quy tại trung điểm mỗi đường.

C. Các đường chéo của khối bát diện đều $ABCDEF$ luôn bằng nhau.

D. Khối bát diện đều $ABCDEF$ có các mặt là những hình tam giác vuông.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ: mệnh đề "Khối bát diện đều $ABCDEF$ có các mặt là những hình tam giác vuông" là mệnh đề **sai**



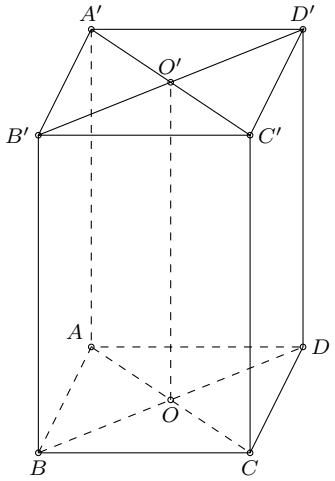
Chọn đáp án D ☐

Câu 63. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Hai lăng trụ nào sau đây **không luôn luôn bằng nhau?**

A. $ABO.A'B'O', ADO.A'D'O'$.
B. $ABD.A'B'D', DCA.D'C'A'$.
C. $ABD.A'B'D', CDB.C'D'B'$.
D. $ABO.A'B'O', CDO.C'D'O'$.

Lời giải.

Ta thấy hai tam giác ABO và ADO luôn không bằng nhau (vì nếu bằng nhau thì $ABCD$ là hình vuông), nên ta có hai khối lăng trụ $ABO.A'B'O', ADO.A'D'O'$ luôn không bằng nhau.



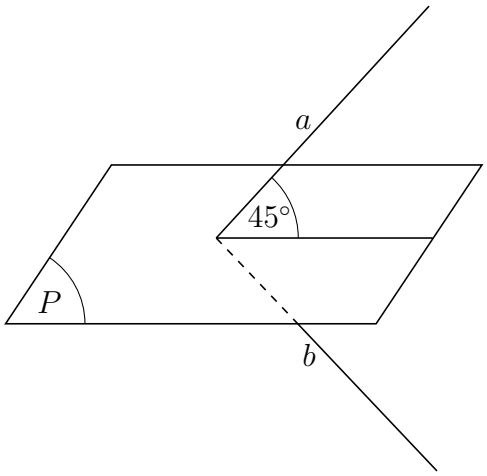
Chọn đáp án A ☐

Câu 64. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P), đường thẳng b đối xứng với đường thẳng a qua mặt phẳng (P). Khi nào thì $b \perp a$?

A. Khi $a \subset (P)$.
B. Khi $\widehat{(a,(P))} = 90^0$.
C. Khi $\widehat{(a,(P))} = 45^0$.
D. Khi $a \| (P)$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{(a,b)} = 2\widehat{(a,(P))} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{(a,(P))} = 45^\circ$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 65. Số mặt phẳng đối xứng của hình chóp tam giác đều là?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Lời giải.

Các mặt phẳng đối xứng đi qua trung điểm cạnh đáy và chứa cạnh bên đối diện cạnh đáy. Có tất cả 3 mặt như vậy.

Chọn đáp án C ☐

Câu 66. Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 33. **B**. 31. **C**. 30. **D**. 22.

Lời giải.

Hình lăng trụ có 11 cạnh bên nên có đáy là đa giác 11 cạnh.

Vậy hình lăng trụ có tất cả 33 cạnh.

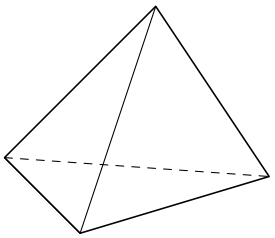
Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho khối tứ diện $ABCD$. Tính tổng các góc của các mặt của khối tứ diện $ABCD$.

A. 8π. **B**. 6π. **C**. 4π. **D**. 10π.

Lời giải.

Vì khối tứ diện $ABCD$ có 4 mặt và các mặt là các tam giác nên mỗi mặt của tứ diện có tổng các góc bằng π. Vậy tổng các góc của tứ diện bằng 4π.



Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho một khối chóp có đáy là đa giác lồi n cạnh. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Số mặt và số đỉnh bằng nhau. **B**. Số đỉnh của khối chóp bằng $2n+1$.

C. Số mặt của khối chóp bằng $2n$. **D**. Số cạnh của khối chóp bằng $n+1$.

Lời giải.

Khối chóp có đáy là đa giác lồi n cạnh có $n+1$ đỉnh, $n+1$ mặt và $2n$ cạnh.

Vậy khối chóp có đáy là đa giác lồi n cạnh có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt. **B**. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt. **D**. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A. 3000. **B**. 3001. **C**. 3005. **D**. 3007.

Lời giải.

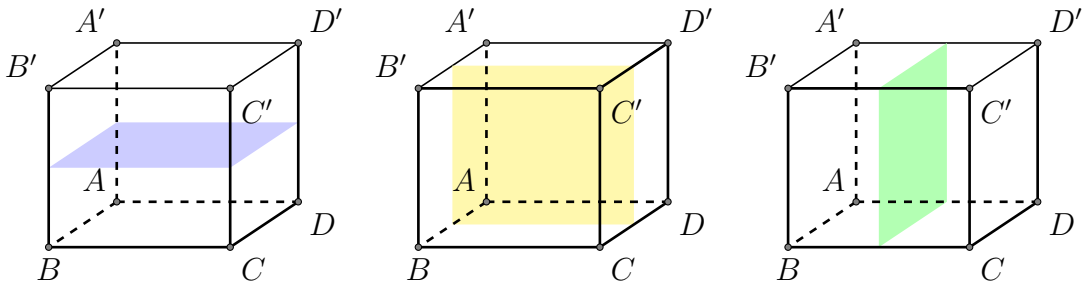
Hình lăng trụ có đáy là đa giác n cạnh có n cạnh bên và $2n$ cạnh ở cả 2 đáy. Suy ra hình lăng trụ có đáy là đa giác n cạnh có tất cả $3n$ cạnh (bội của 3). Vậy đáp án đúng là 3000.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Hình hộp chữ nhật với ba kích thước phân biệt có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

Câu 72. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

A. Năm mặt. **B**. Hai mặt. **C**. Ba mặt. **D**. Bốn mặt.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**? Số các đỉnh hoặc các mặt bất kỳ hình đa diện nào cũng

A. lớn hơn hoặc bằng 4. **B**. lớn hơn 4.

C. lớn hơn hoặc bằng 5. **D**. lớn hơn 5.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Một hình đa diện có tối thiểu bao nhiêu đỉnh?

A. 3. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Câu 75. Cho một đa diện có m đỉnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 3 cạnh. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. m là một số lẻ. **B**. m là số bất kì. **C**. m chia hết cho 3. **D**. m là một số chẵn.

Lời giải.

Nếu mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 3 mặt thì nó cũng là đỉnh chung của đúng 3 cạnh.
Giả sử số đỉnh của đa diện là m thì số cạnh của nó phải là $\dfrac{3m}{2}$ (vì mỗi cạnh được tính 2 lần), $\dfrac{3m}{2}=$ số cạnh là số nguyên do đó m chẵn.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Dựa vào hình vẽ, lăng trụ có bốn mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA, AA'.

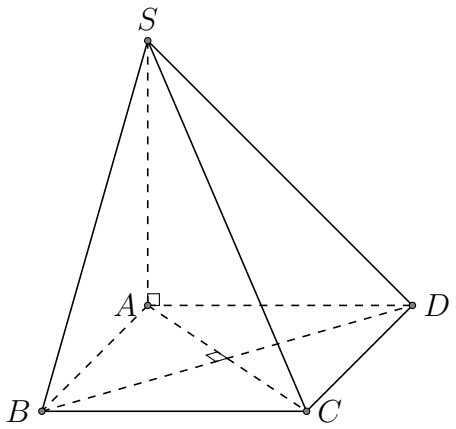
Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Hình chóp này có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Hình chóp $S.ABCD$ có 1 mặt phẳng đối xứng (SAC).



Chọn đáp án B □

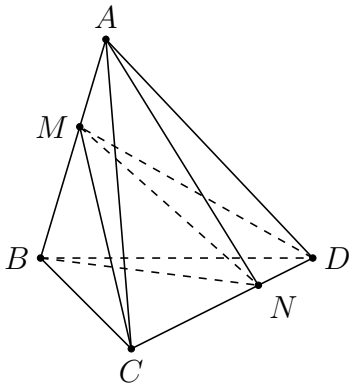
Câu 78. Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây?

A. $MANC, BCDN, AMND, ABND$. **B**. $MANC, BCMN, AMND, MBND$.

C. $ABCN, ABND, AMND, MBND$. **D**. $NACB, BCMN, ABND, MBND$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hai mặt phẳng (CDM) và (ABN) chia khối tứ diện $ABCD$ thành bốn khối tứ diện là $MANC, MBND, BCMN$ và $AMND$.



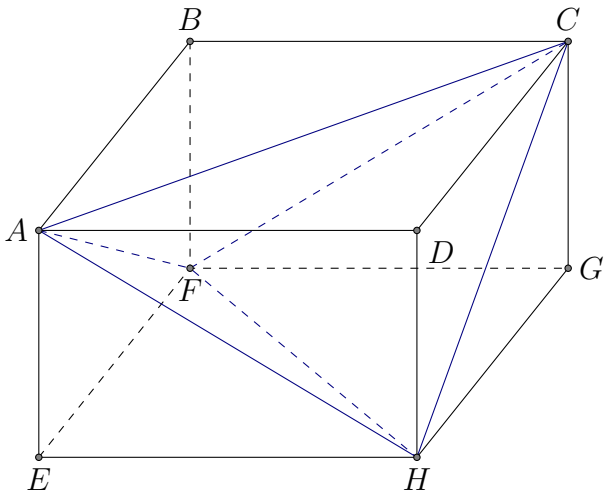
Chọn đáp án B □

Câu 79. Có thể dùng ít nhất bao nhiêu khối tứ diện để ghép thành một hình hộp chữ nhật?

A. 4. **B**. 3. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ được tạo bởi ít nhất 5 khối tứ diện là: $ACFH$, $AEFH$, $FABC$, $CFGH$ và $DACH$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 80. Khối hai mươi mặt đều thuộc khối đa diện loại nào?

A. loại $\{3;5\}$. **B**. loại $\{5;3\}$. **C**. loại $\{3;4\}$. **D**. loại $\{4;3\}$.

Lời giải.

Khối 20 mặt đều có các mặt là những tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 5 cạnh nên nó thuộc loại $\{3;5\}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 81. Trong các loại hình sau: Tứ diện đều, hình chóp tứ giác đều, hình lăng trụ tam giác đều, hình hộp chữ nhật, loại hình nào có ít mặt phẳng đối xứng nhất?

A. Tứ diện đều. **B**. Hình chóp tứ giác đều.

C. Hình lăng trụ tam giác đều. **D**. Hình hộp chữ nhật.

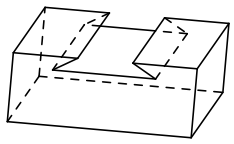
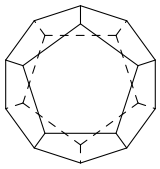
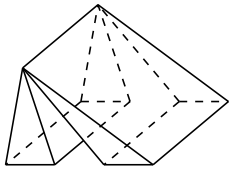
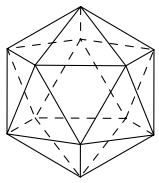
Lời giải.

Ta có:

- ☑ Tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối.
- ☑ Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng, trong đó 2 mặt phẳng đối xứng là những mặt phẳng đi qua đỉnh và đường chéo của mặt đáy, 2 mặt phẳng đối xứng là những mặt phẳng đi qua đỉnh và đường thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy.
- ☑ Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng, trong đó 3 mặt phẳng đối xứng là những mặt phẳng đi qua hai trung điểm của hai cạnh đáy song song và cạnh bên không đồng phẳng với hai cạnh đáy đó, 1 mặt đối xứng đi qua trung điểm của 3 cạnh bên.
- ☑ Hình hộp chữ nhật có 3 mặt đối xứng là các mặt phẳng đi qua các trung điểm của 4 cạnh song song.

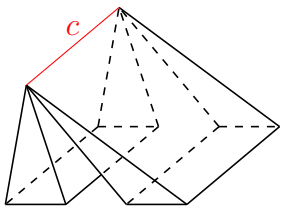
Chọn đáp án D ☐

Câu 82. Vật thể nào trong các hình sau đây **không** phải là khối đa diện?

A.  . **B**.  . **C**.  . **D**.  .

Lời giải.

Cạnh c là cạnh chung của 4 tứ giác, do đó hình này không phải là hình đa diện.



Chọn đáp án C ☐

Câu 83. Cho khối chóp có 2018 cạnh. Hỏi khối chóp đó có bao nhiêu mặt bên?

A. 1011. **B**. 1010. **C**. 1012. **D**. 1009.

Lời giải.

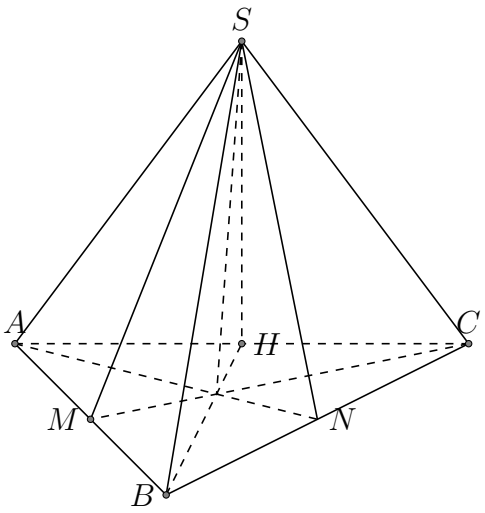
Số cạnh đáy của hình chóp đã cho là $\dfrac{2018}{2} = 1009$, suy ra số mặt bên của hình chóp là 1009

Chọn đáp án D ☐

Câu 84. Số mặt phẳng đối xứng của hình chóp đều $S.ABC$ là bao nhiêu?

A. 4. **B**. 2. **C**. 6. **D**. 3.

Lời giải.



Các mặt phẳng đối xứng là (SAN), (SBH), (SCM).

Chọn đáp án D □

Câu 85. Hỏi khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 4. **B**. 20. **C**. 6. **D**. 12.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ chính là khối lập phương nên có 6 mặt.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Số cạnh của một hình lăng trụ có thể là số nào dưới đây?

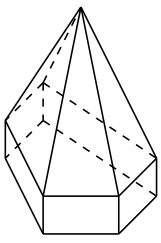
A. 2019. **B**. 2020. **C**. 2017. **D**. 2018.

Lời giải.

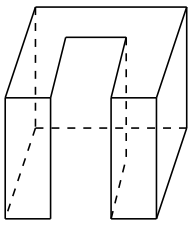
Vì số cạnh của hình lăng trụ phải là một số chia hết cho 3, trong các đáp án chỉ có 2019 chia hết cho 3.

Chọn đáp án A □

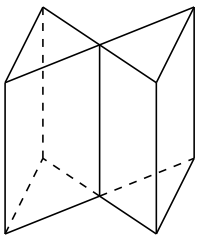
Câu 87. Trong các hình sau, hình nào không là khối đa diện



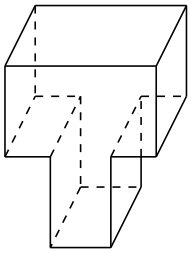
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 2. **B**. Hình 2 và Hình 4. **C**. Hình 4. **D**. Hình 3.

Lời giải.

Hình 3 có một cạnh là cạnh chung của bốn mặt nên hình 3 không phải khối đa diện.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của đúng

A. Bốn mặt. **B**. Năm mặt. **C**. Hai mặt. **D**. Ba mặt.

Lời giải.

Theo lý thuyết hình đa diện, mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của đúng hai mặt.

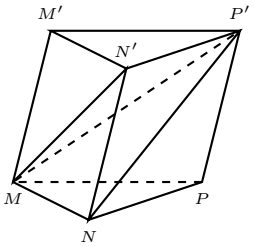
Chọn đáp án C □

Câu 89. Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được những khối đa diện nào?

A. Ba khối tứ diện. **B**. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.

C. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác. **D**. Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Lời giải.



Ta được ba khối tứ diện là $M'MN'P', N'MNP', N'NPP'$ như hình vẽ.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B**. 1 mặt phẳng. **C**. 3 mặt phẳng. **D**. 2 mặt phẳng.

Lời giải.

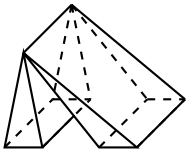
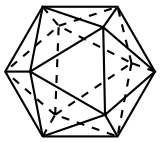
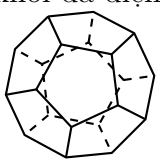
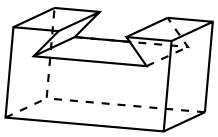
Các mặt phẳng đối xứng của hình lăng trụ tam giác đều được chia thành hai loại:

Loại 1: Mặt phẳng đi qua trung điểm của các cạnh bên, có 1 mặt phẳng.

Loại 2: Mặt phẳng đi qua một đỉnh và trung điểm cạnh đối diện của mặt đáy, có 3 mặt phẳng như vậy.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Vật thể nào trong các vật thể sau không phải khối đa diện?

A.  **B**.  **C**.  **D**. 

Lời giải.

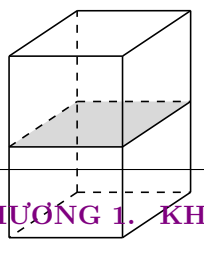
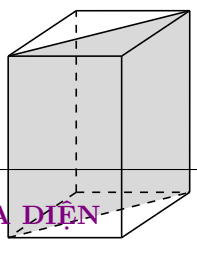
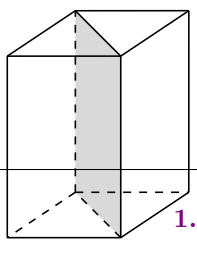
Vì có một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác, điều này trái với khái niệm về hình đa diện, mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác. .

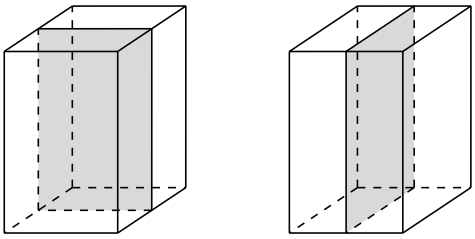
Chọn đáp án A □

Câu 92. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 1. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

Câu 93. Hãy chọn từ (hay cụm từ) sau điền vào chỗ trống để có mệnh đề đúng: "Số cạnh của một đa diện luôn ..... số đỉnh của hình đa diện ấy."

A. lớn hơn. **B**. bằng. **C**. nhỏ hơn. **D**. nhỏ hơn hoặc bằng.

Lời giải.

Số cạnh của một đa diện luôn lớn hơn số đỉnh của đa diện ấy.

Chọn đáp án A □

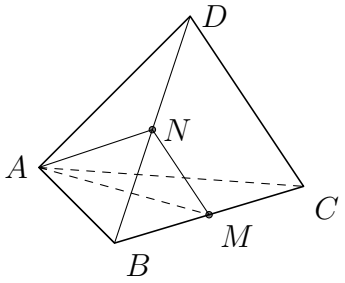
Câu 94. Cho khối tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD. Mặt phẳng (AMN) chia khối tứ diện $ABCD$ thành

A. Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác. **B**. Hai khối tứ diện.

C. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác. **D**. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.

Mặt phẳng (AMN) chia khối tứ diện $ABCD$ thành một khối tứ diện $ABMN$ và một khối chóp tứ giác $A.DCMN$.

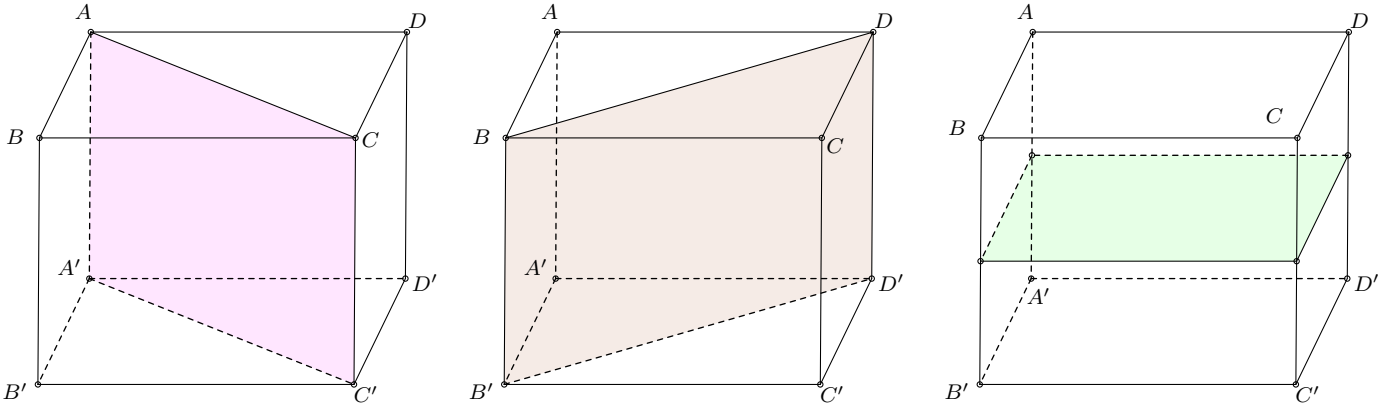


Chọn đáp án A □

Câu 95. Hình hộp đứng có đáy là hình thoi thì có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.



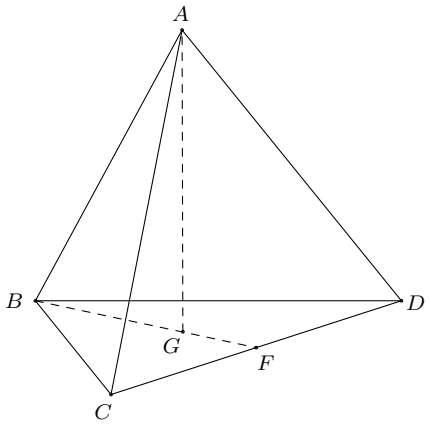
Chọn đáp án B □

Câu 96. Tính thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng 2.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B**. $\sqrt{2}$. **C**. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D**. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và F là trung điểm của cạnh CD. Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD)$



Tam giác BCD đều có cạnh bằng 2 nên

$BG = \frac{2}{3}BF = \frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{\Delta BCD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Tam giác ABG vuông tại G có $AB = 2, BG = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Nên $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AG.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

B. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn luôn bằng nhau.

C. Tồn tại hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

D. Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

Lời giải.

Xét hình tứ diện, có 4 mặt và 4 đỉnh nên nó có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Tìm số cạnh ít nhất của hình đa diện có 5 mặt.

A. 9. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 8.

Lời giải.

Gọi số cạnh của hình đa diện là c. Mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh, mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt nên $c = \frac{5 \cdot 3}{2}$, c là số nguyên dương nên $c = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Tính S.

A. $S = 8a^2$. **B**. $S = 4a^2\sqrt{3}$. **C**. $S = 2a^2\sqrt{3}$. **D**. $S = a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

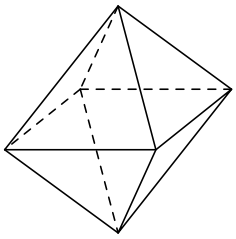
Mỗi mặt của hình bát diện đều cạnh a là một tam giác đều cạnh a, do đó $S = 8\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 10. **B**. 8. **C**. 12. **D**. 20.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. C	5. A	6. D	7. A	8. C	9. B	10. D
11. C	12. C	13. A	14. B	15. D	16. D	17. A	18. B	19. D	20. D
21. B	22. A	23. B	24. C	25. A	26. C	27. A	28. D	29. C	30. C
31. A	32. C	33. B	34. A	35. B	36. C	37. B	38. A	39. C	40. B
41. D	42. A	43. A	44. B	45. B	46. C	47. D	48. B	49. B	50. B
51. D	52. D	53. C	54. B	55. B	56. D	57. C	58. D	59. D	60. A
61. D	62. D	63. A	64. C	65. C	66. A	67. C	68. A	69. B	70. A
71. C	72. C	73. A	74. B	75. D	76. D	77. B	78. B	79. C	80. A
81. D	82. C	83. D	84. D	85. C	86. A	87. D	88. C	89. A	90. A
91. A	92. C	93. A	94. A	95. B	96. C	97. D	98. D	99. C	100. C

❸ Mức độ vd-vdc

Câu 1. Một hình chóp có 100 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

A. 53. **B**. 51. **C**. 50. **D**. 52.

Lời giải.

Gọi n là số cạnh đáy của hình chóp, khi đó, số cạnh của hình chóp là $2n$, số mặt là $m+1$, số đỉnh bằng 1.

Theo giả thuyết, ta có $2n = 100 \Rightarrow n = 50$.

Vậy số mặt của hình hình chóp có 100 cạnh là $n + 1 = 51$.

Chọn đáp án (B) □

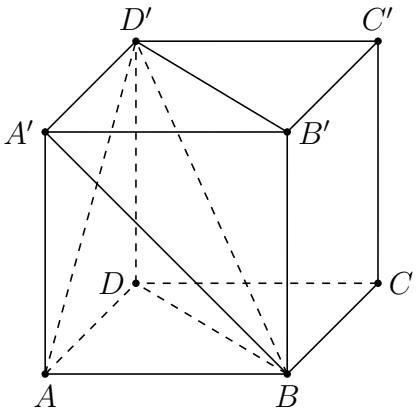
Câu 2. Có thể chia hình lập phương thành bao nhiêu tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B**. Vô số. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Chia lăng trụ $ABD.A'B'D'$ thành ba tứ diện $DABD'$, $A'ABD'$, $A'B'BD'$. Phép đối xứng qua (ABD') biến $DABD'$ thành $A'ABD'$. Phép đối xứng qua $(BA'D')$ biến $A'ABD'$ thành $A'B'BD'$ nên ba tứ diện $DABA'$, $A'ABD'$, $A'B'BD'$ bằng nhau.

Làm tương tự đối với lăng trụ $BCD.B'C'D'$ ta sẽ chia được hình lập phương thành sáu tứ diện bằng nhau.



Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a$, $AD = a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{14}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

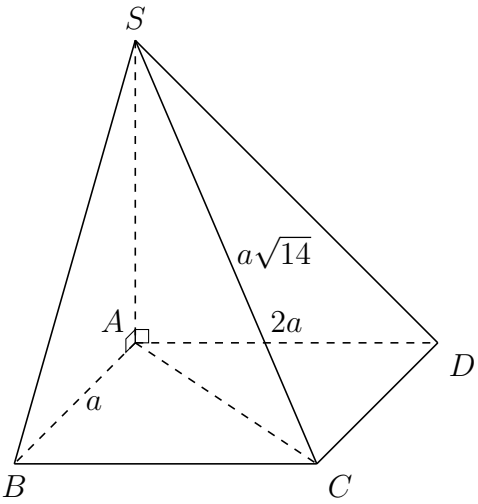
A. $V = 6a^3$. **B**. $V = 3a^3$. **C**. $V = 2a^3$. **D**. $V = a^3$.

Lời giải.

Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABCD)$.

Ta có $AC = a\sqrt{5}, SA = 3a$. Diện tích đáy là $a \cdot 2a = 2a^2$.

Vậy thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 3a = 2a^3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Để ý $(SAB) \perp (SBC)$ và ΔSAB vuông tại A nên ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình chóp $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 1$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC).

A. $d = \dfrac{25}{13}$. **B.** $d = \dfrac{12}{13}$. **C.** $d = \dfrac{14}{13}$. **D.** $d = 5$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} \Rightarrow d = \dfrac{12}{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Số mặt phẳng đối xứng của hình hộp đứng có đáy là hình vuông là

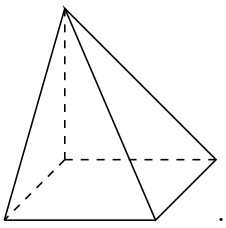
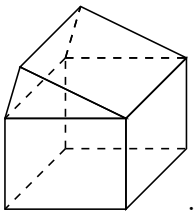
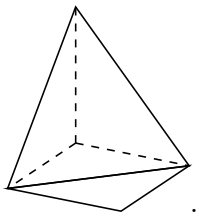
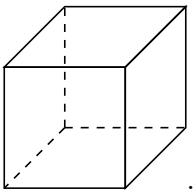
A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng có đáy vuông có các mặt phẳng đối xứng là: $(ACC'A')$, $(BDD'B')$, mặt phẳng trung trực của cạnh AA', AD và DC.

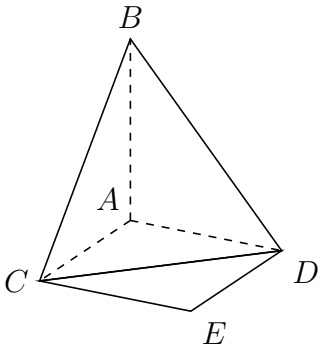
Chọn đáp án D □

Câu 7. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

A.  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

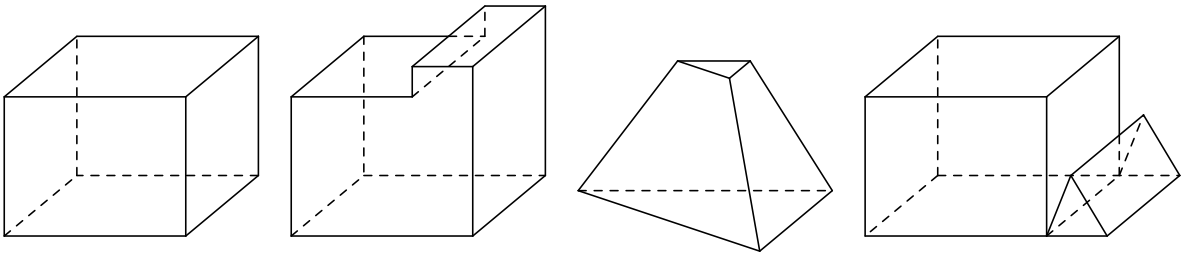
Lời giải.

Đây không là hình đa diện vì tồn tại cạnh không là cạnh chung của hai đa giác, ví dụ CE và ED.



Chọn đáp án C □

Câu 8. Mỗi hình sau gồm một số hữu hạn đa giác phẳng, tìm hình **không** là hình đa diện.



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 1. **B**. Hình 2. **C**. Hình 3. **D**. Hình 4.

Lời giải.

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn 2 tính chất:

① Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
② Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Do đó ta thấy, hình 4 không thỏa mãn tính chất b), hình 4 có 1 cạnh là cạnh chung của 3 đa giác.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Số đo góc tạo bởi mặt phẳng $(A'B'D)$ với mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\arcsin\sqrt{2}$. **B**. $\operatorname{arccot}\sqrt{2}$. **C**. $\arctan\sqrt{2}$. **D**. $\arccos\sqrt{2}$.

Lời giải.

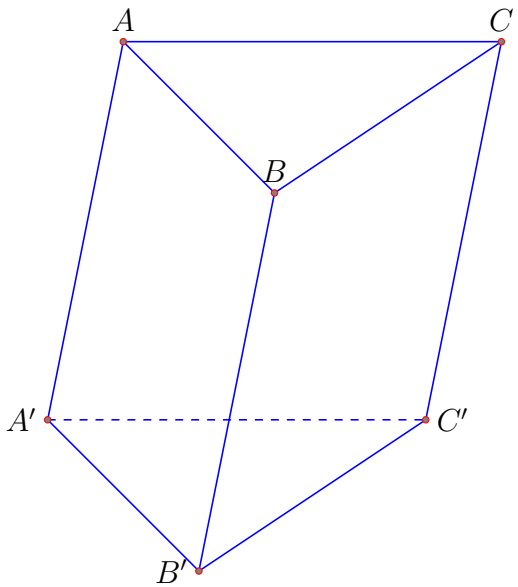
Đặt độ dài cạnh hình lập phương là 1.
Góc giữa mặt phẳng $(A'B'D)$ với mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'DA}$.
Ta có: $A'D=\sqrt{2}$, $\tan\widehat{A'DA}=\sqrt{2}$ nên $\widehat{A'DA}=\arctan\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Số mặt phẳng đối xứng của khối lăng trụ tam giác đều là

A. 3. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

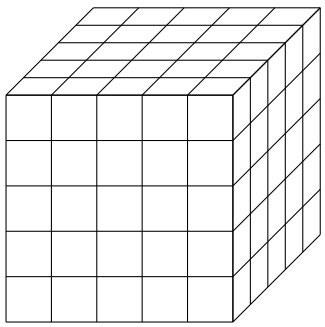


Ta có các mặt phẳng đối xứng của khối lăng trụ tam giác đều là các mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA, AA'.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Người ta dùng 12 mặt phẳng phân biệt (trong đó, 4 mặt song song với $(ABCD)$, 4 mặt song song với $(AA'B'B)$, 4 mặt song song với $(AA'D'D)$), chia khối lập phương thành các khối lập phương nhỏ rời nhau và bằng nhau. Biết rằng tổng diện tích tất cả các mặt của các khối lập phương nhỏ bằng 480. Tính độ dài a của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$



A. $a = 2$. **B**. $a = 2\sqrt{3}$. **C**. $a = 2\sqrt{5}$. **D**. $a = 4$.

Lời giải.

Có tất cả 125 khối lập phương nhỏ, diện tích của mỗi mặt của khối lập phương nhỏ là $\dfrac{480}{6 \times 125} = \dfrac{16}{25} \Longrightarrow$ độ dài cạnh của khối lập phương nhỏ bằng $\dfrac{4}{5} \Longrightarrow a = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A. 2017. **B**. 2019. **C**. 2018. **D**. 2020.

Lời giải.

Giả sử hình lăng trụ có đáy là đa giác n cạnh, khi đó số cạnh bên cũng bằng n nên tổng số cạnh của lăng trụ sẽ là $3n$. Do đó, tổng số cạnh của một hình lăng trụ luôn chia hết cho 3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hình chóp có số cạnh bằng 26. Tính số mặt của hình chóp.

A. 13. **B**. 14. **C**. 26. **D**. 27.

Lời giải.

Giả sử hình chóp là đáy là đa giác n cạnh. Khi đó hình chóp có n mặt bên, 1 mặt đáy và $2n$ cạnh.
Ta có $2n = 26 \Leftrightarrow n = 13$. Vậy hình chóp này có tất cả $13 + 1 = 14$ mặt.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho khối đa diện. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Số cạnh của lăng trụ không thể là 2019.

B. Số cạnh của lăng trụ có thể là 2018.

C. Số cạnh của một khối chóp bất kì có thể là một số lẻ lớn hơn hoặc bằng 5.

D. Số cạnh của một khối chóp bất kì luôn là một số chẵn lớn hơn hoặc bằng 6.

Lời giải.

Gọi n là số cạnh của đa giác đáy.

☑ Hình lăng trụ có số cạnh là $T = 3n$.
Do đó, khi $n = 673 \Rightarrow T = 2019$ và số cạnh của lăng trụ không thể là 2018.

☑ Hình chóp có số cạnh là $C = 2n$.
Do đó, số cạnh của khối chóp bất kì luôn là một số chẵn lớn hơn hoặc bằng 6.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho một hình chóp có số đỉnh là 2018, số cạnh của hình chóp đó là

A. 4036. **B**. 2019. **C**. 1019. **D**. 4034.

Lời giải.

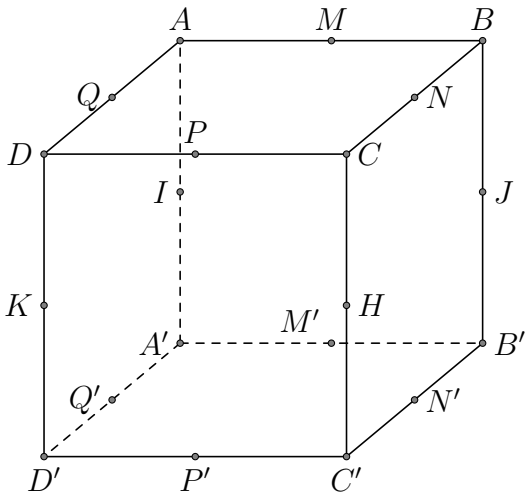
Ta có một hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $n + 1$ đỉnh, $2n$ cạnh.
Do đó hình chóp $S.A_1A_2...A_n$có số đỉnh là 2018 thì $n + 1 = 2018 \Leftrightarrow n = 2017$ nên số cạnh của hình chóp là $2n = 2 \cdot 2017 = 4034$.
Chọn đáp án D □

Câu 16. Hình lập phương có bao nhiêu mặt đối xứng?

A. 7. **B**. 9. **C**. 3. **D**. 6.

Lời giải.

Gọi M, N, P, Q, M', N', P', Q', I, J, H, K là trung điểm các cạnh tương ứng như hình vẽ bên. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả 9 mặt đối xứng là các mặt phẳng sau: $(QNN'Q')$, $(MM'P'P)$, $(IJHK)$, $(ACC'A')$, $(BB'D'D)$, $(ABC'D')$, $(BCD'A')$, $(CDA'B')$, $(DAB'C')$.



Chọn đáp án B □

Câu 17. Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh bằng 30π cm^2. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V = \dfrac{25\pi\sqrt{39}}{3}(\text{cm}^3)$. **B.** $V = \dfrac{25\pi\sqrt{11}}{3}(\text{cm}^3)$. **C.** $V = \dfrac{25\pi\sqrt{61}}{3}(\text{cm}^3)$. **D.** $V = \dfrac{25\pi\sqrt{34}}{3}(\text{cm}^3)$.

Lời giải.

Gọi l (cm) là độ dài đường sinh của hình nón.
Ta có $S_{\text{xq}} = \pi Rl \Rightarrow 30\pi = \pi \cdot 5 \cdot l \Rightarrow l = 6$ (cm).
Khi đó chiều cao h của hình nón là $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$ (cm).
Vậy thể tích của hình nón là $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot \sqrt{11} = \dfrac{25\pi\sqrt{11}}{3}$ (cm^3).

Chọn đáp án B □

Câu 18. Một đa diện đều có số cạnh bằng 30, số mặt bằng 12, đa diện này có số đỉnh là

A. 20. **B.** 18. **C.** 40. **D.** 22.

Lời giải.

Gọi số cạnh, số đỉnh, mặt của khối đa diện lần lượt là D, C, M.
Khi đó áp dụng công thức Euler ta có $D + M = C + 2 \Rightarrow D = 30 + 2 - 12 = 20$ mặt.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong tất cả các loại hình đa diện đều sau, loại nào có số mặt nhiều nhất?

A. Loại $\{3; 5\}$. **B.** Loại $\{5; 3\}$. **C.** Loại $\{4; 3\}$. **D.** Loại $\{3; 4\}$.

Lời giải.

Số mặt của các hình đa diện đều

- Loại $\{3; 5\}$ là khối 20 mặt đều: có 20 mặt.
- Loại $\{5; 3\}$ là khối 12 mặt đều: có 12 mặt.
- Loại $\{3; 4\}$ là khối bát diện đều: có 8 mặt.
- Loại $\{4; 3\}$ là khối lập phương: có 6 mặt.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Khối đa diện nào có số đỉnh nhiều nhất?

A. Khối nhị thập diện đều (20 mặt đều). **B.** Khối bát diện đều (8 mặt đều).

C. Khối thập nhị diện đều (12 mặt đều). **D.** Khối tứ diện đều.

Lời giải.

Bảng tóm tắt các khối đa diện đều.

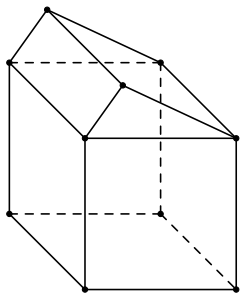
Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạch	Số mặt
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

Vậy khối đa diện đều có nhiều đỉnh nhất là khối mười hai mặt đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21.

Khối đa diện sau có bao nhiêu mặt?



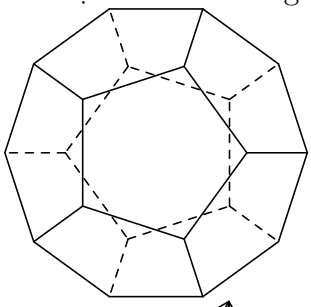
A. 8. **B**. 9. **C**. 7. **D**. 10.

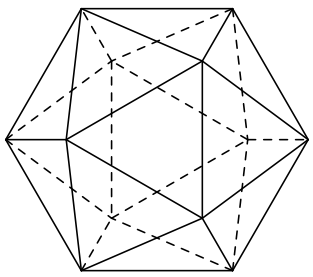
Lời giải.

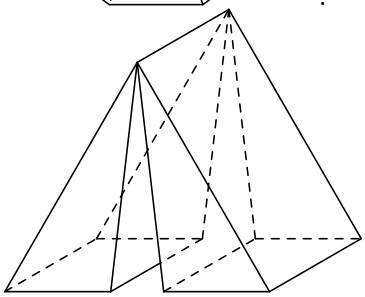
Khối đa diện trên hình vẽ có tất cả 9 mặt.

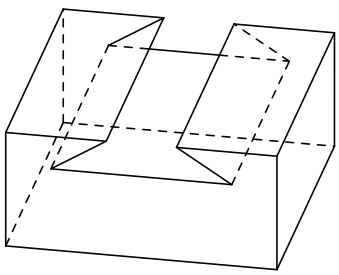
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện?

A.  .

B.  .

C.  .

D.  .

Lời giải.

Hình C có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Số đỉnh của hình hai mươi mặt đều là

A. 20. **B**. 12. **C**. 16. **D**. 30.

Lời giải.

Ta có Đ $-$ C $+$ M $= 2 \Rightarrow$ Đ $= 2 + \dfrac{3 \cdot 20}{2} - 20 = 12$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Hình lăng trụ tứ giác có tối đa bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 9. **B**. 8. **C**. 6. **D**. 10.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Khối 20 mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A. 28. **B**. 40. **C**. 24. **D**. 30.

Lời giải.

Khối 20 mặt đều có 30 cạnh.

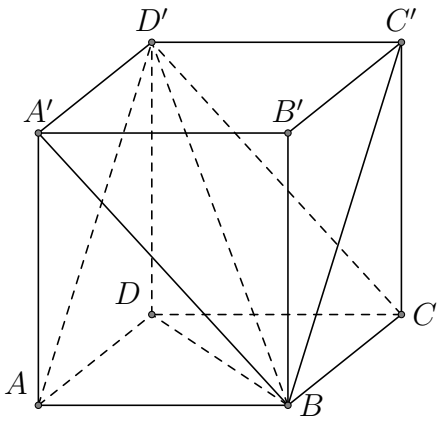
Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện nào sau đây?

A. $BCA'D'$. **B**. $BB'A'D'$. **C**. $B'BC'A'$. **D**. $BC'D'A'$.

Lời giải.

Ta có phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện $BB'A'D'$.



Chọn đáp án B □

Câu 27. Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích 1 m^3. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

A. 5,59 m^2. **B**. 5,54 m^2. **C**. 5,57 m^2. **D**. 5,52 m^2.

Lời giải.

Ta có: $V_{\text{Khối trụ}} = \pi \cdot R^2 \cdot h = 1 \Rightarrow l = h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

Mà $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot \dfrac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \dfrac{2}{R} + 2\pi R^2$.

Xét hàm số: $f(R)=\dfrac{2}{R}+2\pi R^2$ trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f'(R)=-\dfrac{2}{R^2}+4\pi R=\dfrac{-2+4\pi R^3}{R^2}$; $f'(R)=0\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2R}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$+$	0	$-$	
$f(R)$		$\nearrow$	$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2R}}\right)$	$\searrow$	

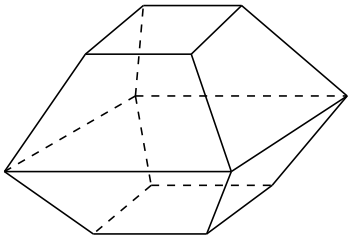
Từ đó ta có: $\max\limits_{(0;+\infty)} f(R)=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}\right)=3\cdot\sqrt[3]{2\pi}\approx 5,54$.

Chọn đáp án B □

Câu 28.

Hình đa diện như hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A. 12. **B**. 8. **C**. 11. **D**. 10.



Lời giải.

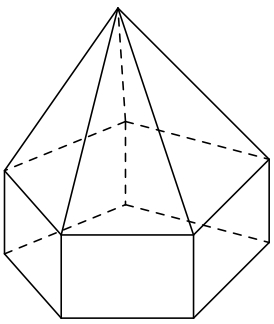
Hình đa diện có 10 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 29.

Khối đa diện ở hình bên có bao nhiêu mặt?

A. 11. **B**. 12. **C**. 9. **D**. 10.



Lời giải.

Nhìn vào hình vẽ bên có tổng cộng 11 mặt.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Một hình chóp có 2018 cạnh. Hỏi hình chóp đó có bao nhiêu mặt?

A. 1010. **B**. 1009. **C**. 2017. **D**. 1011.

Lời giải.

Hình chóp có đáy là n - giác sẽ có số cạnh là $2n$ và số mặt là $n+1$.

Theo giả thiết ta có $2n=2018\Leftrightarrow n=1009$.

Do đó hình chóp đã cho có $n+1=1009+1=1010$ mặt.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

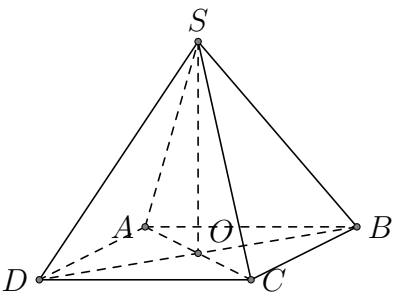
1. B	2. D	3. C	4. A	5. B	6. D	7. C	8. D	9. C	10. B
11. D	12. B	13. B	14. D	15. D	16. B	17. B	18. A	19. A	20. C
21. B	22. C	23. B	24. A	25. D	26. B	27. B	28. D	29. A	30. A

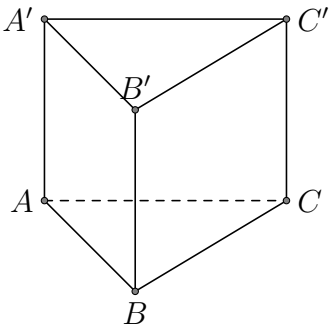
BÀI 2 KHỐI ĐA DIỆN LỒI, KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

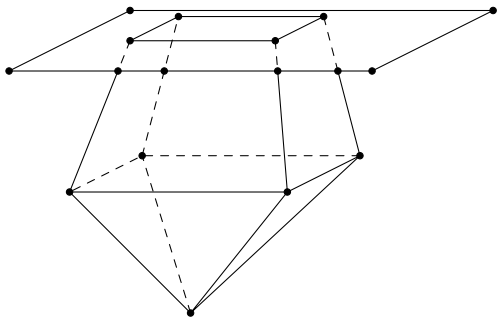
A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 Khối đa diện lồi, Khối đa diện đều

Định nghĩa 1. Khối đa diện $(\mathscr{H})$ được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của $(\mathscr{H})$ luôn nằm trong $(\mathscr{H})$.







⚠ ① *Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.*

② ***Công thức Ơ-le:*** *Trong một khối đa diện lồi nếu gọi D là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt thì ta luôn có $D - C + M = 2$.*

2 Khối đa diện đều

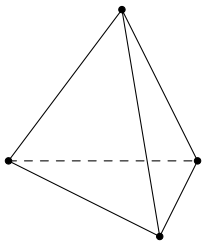
Định nghĩa 2. Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau

- ☑ Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- ☑ Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

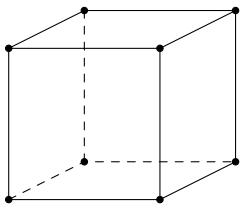
Khối đa diện như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$.

Định lí 1. *Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là các loại $\{3;3\}$, $\{4;3\}$, $\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.*

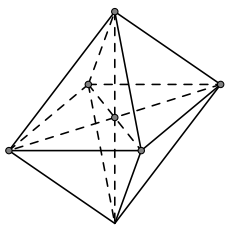
Tham khảo hình biểu diễn của năm loại khối đa diện.



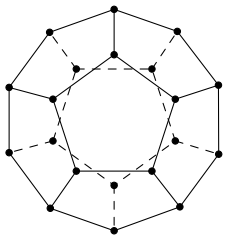
Khối tứ diện đều



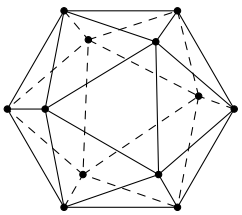
Khối lập phương



Khối bát diện đều



Khối 12 mặt đều



Khối 20 mặt đều

Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi

① Cho một khối tứ diện đều, ta có

+ Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

+ Các trung điểm của các trung điểm của các cạnh của nó là đỉnh của một khối bát diện đều(khối tám mặt đều).

② Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.

③ Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

④ Hai đỉnh của một khối bát diện đều dọi là hai đỉnh đối diện của bát diện khi chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo cuả khối bát diện đều. Khi đó

+ Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

+ Ba đường chéo dôi một vuông góc.

+ Ba đường chéo bằng nhau.

Bảng tóm tắt năm loại khối đa diện đều

Đa diện đều cạnh a	**Đỉnh**	**Cạnh**	**Mặt**	**Thể tích V**	**Bán kính mặt cầu ngoại tiếp**
Tứ diện đều $\{3;3\}$	4	6	4	$V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$R=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$
Lập phương $\{4;3\}$	8	12	6	$V=a^3$	$R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
Bát diện đều $\{3;4\}$	6	12	8	$V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
Mười hai mặt đều $\{5;3\}$	20	30	12	$V=\dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$R=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$
Hai mươi mặt đều $\{3;5\}$	12	30	20	$V=\dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$	$R=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{4}a$

Giả sử khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ có D đỉnh, C cạnh và M mặt thì ta luôn có

$$\boxed{q\cdot D=2C=P\cdot M}$$

B CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong các khối đa diện dưới đây, khối nào có số cạnh có thể là một số lẻ?

A. Khối lăng trụ. **B**. Khối chóp. **C**. Khối hộp. **D**. Khối tứ diện.

Lời giải.

- ☑ Khối chóp $n-$ giác có số cạnh đáy là n và số cạnh bên là n nên tổng số cạnh là $2n$.
- ☑ Khối tứ diện có 6 cạnh.
- ☑ Khối hộp có 12 cạnh.
- ☑ Khối lăng trụ đáy tam giác có 9 cạnh.

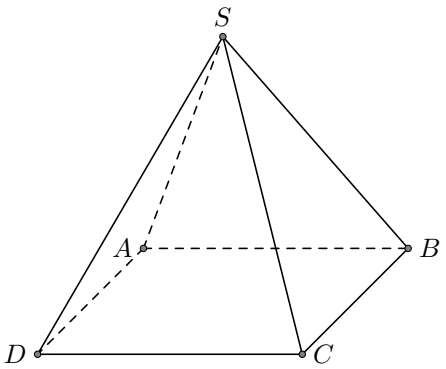
Chọn đáp án A □

Ví dụ 2. Trong các khối đa diện dưới đây, khối nào có số cạnh luôn là một số chẵn?

A. Khối chóp. **B**. Khối đa diện đều. **C**. Khối chóp cụt. **D**. Khối lăng trụ.

Lời giải.

Khối chóp $n-$ giác có số cạnh đáy là n và số cạnh bên là n nên tổng số cạnh là $2n$.



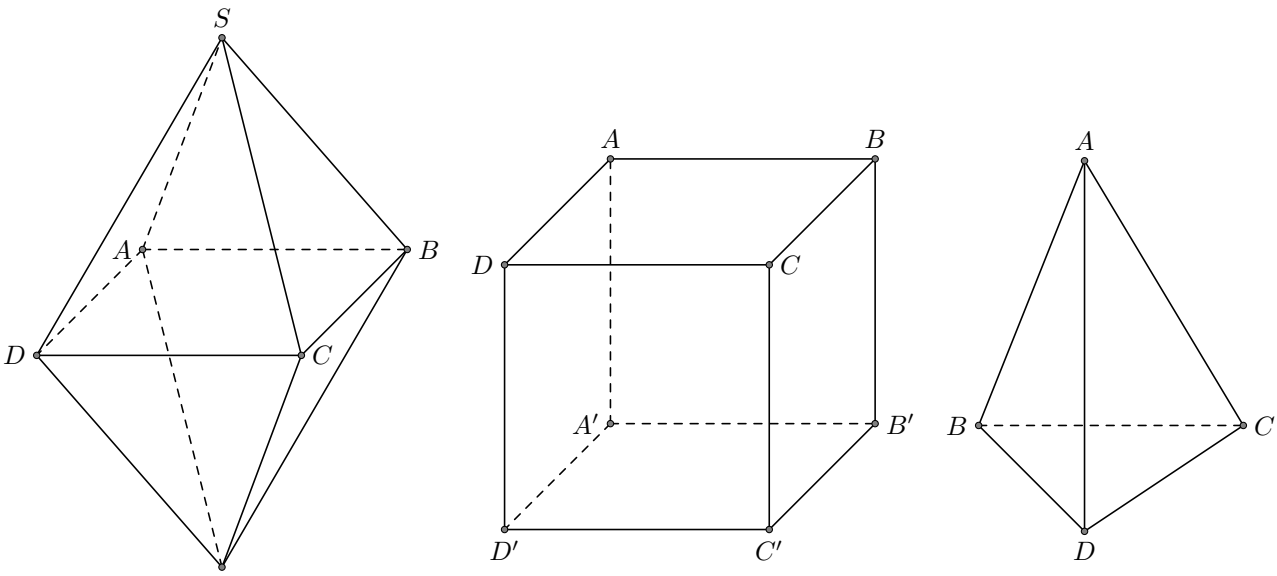
Chọn đáp án A □

Ví dụ 3. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Khối 8 mặt đều có 8 cạnh.
B. Khối tứ diện đều có 6 cạnh.
C. Số cạnh của một khối chóp là chẵn.
D. Khối lập phương có 12 cạnh.

Lời giải.

Khối 8 mặt đều có 12 cạnh.
Khối tứ diện có 6 cạnh gồm 3 cạnh đáy, 3 cạnh bên.
Khối chóp $n-$ giác có số cạnh đáy là n và số cạnh bên là n nên tổng số cạnh là $2n$.
Khối lập phương có 8 cạnh đáy và 4 cạnh bên.



Chọn đáp án A ☐

Ví dụ 4. Trong một khối đa diện lồi với các mặt là các tam giác, nếu gọi C là số cạnh và M là số mặt thì hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $3M = 2C$. **B**. $3M = 5C$. **C**. $2M = 3C$. **D**. $2M = C$.

Lời giải.

Vì mỗi mặt là tam giác và có M mặt nên số cạnh là $3M$. Nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $2C = 3M$.

Chọn đáp án A ☐

Ví dụ 5. Trong một khối đa diện lồi mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh, nếu gọi C là số cạnh và D là số đỉnh thì hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $3D = 2C$. **B**. $3D = 5C$. **C**. $4D = 3C$. **D**. $2D = C$.

Lời giải.

Vì có D đỉnh mà mỗi đỉnh có ba cạnh nên số cạnh là $3D$. Mà cứ một cạnh ta đếm lặp hai lần nên ta có $2C = 3D$.

Chọn đáp án A ☐

Ví dụ 6. Trong một khối đa diện lồi 10 đỉnh, 7 mặt thì có bao nhiêu cạnh?

A. 15. **B**. 12. **C**. 18. **D**. 20.

Lời giải.

Áp dụng định lý Euler về đặc số của một khối đa diện lồi ta có $D - C + M = 2$ suy ra $C = 15$.

Chọn đáp án A ☐

Ví dụ 7. Khối 12 mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A. 30. **B**. 16. **C**. 18. **D**. 20.

Lời giải.

Khối 12 mặt đều có 30 cạnh.

Chọn đáp án (A) □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Hình bát diện đều có số cạnh là

A. 6. **B**. 10. **C**. 12. **D**. 8.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Hình bát diện đều kí hiệu là:

A. $\{3;5\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{4;3\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều hay khối tám mặt đều.

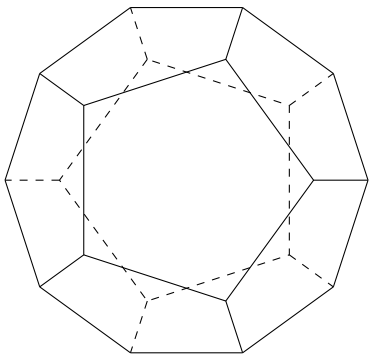
Chọn đáp án C □

Câu 3. Khối đa diện đều có 12 mặt thì có số cạnh là:

A. 30. **B**. 60. **C**. 12. **D**. 24.

Lời giải.

Khối đa diện đều có 12 mặt
là khối đa diện đều loại $\{5;3\}$
thì có số cạnh là 30



Chọn đáp án A □

Câu 4. Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh?

A. 10. **B**. 8. **C**. 6. **D**. 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 6 đỉnh.

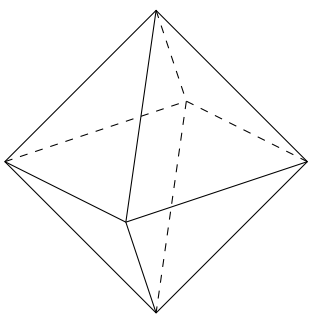
Chọn đáp án C □

Câu 5. Số đỉnh của hình bát diện đều là bao nhiêu?

A. 12. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 10.

Lời giải.

Bát diện đều có 8 đỉnh.



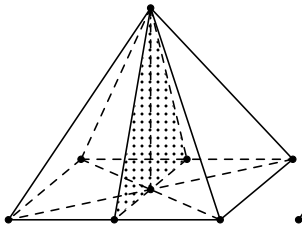
Chọn đáp án C □

Câu 6. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt đối xứng?

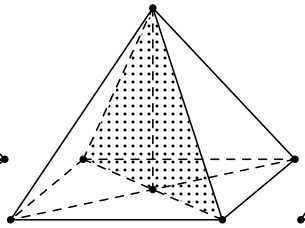
A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

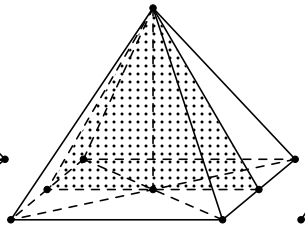
Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.



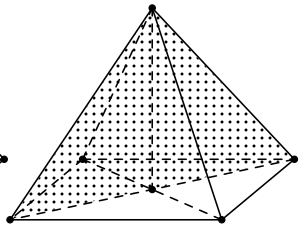
Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.



Hình 4.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

B. Khối hộp là khối đa diện lồi.

C. Lắp ghép hai khối hộp bất kì thì được một khối đa diện lồi.

D. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Theo định nghĩa khối đa diện lồi:

Khối tứ diện là khối đa diện lồi nên đáp án A đúng.

Khối hộp là khối đa diện lồi nên đáp án B đúng.

Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi nên đáp án D đúng.

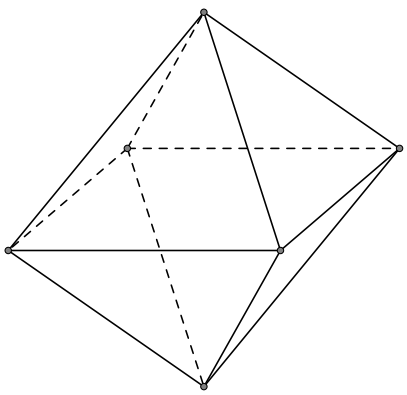
Lắp ghép hai khối hộp bất kì thì không phải lúc nào cũng được một khối đa diện lồi, nên đáp án C là đáp án sai.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Khối đa diện loại $\{3;4\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt tương ứng là

A. 6, 12, 8. **B**. 4, 6, 4. **C**. 8, 12, 6. **D**. 8, 6, 12.

Lời giải.



Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ chính là khối bát diện đều. Do đó có số đỉnh là 6, số cạnh là 12, số mặt là 8.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Khối tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

Mỗi mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng đi qua trung điểm 1 cạnh và chứa cạnh đối diện của tứ diện đều. Tứ diện đều có 6 cạnh nên số mặt phẳng đối xứng là 6.

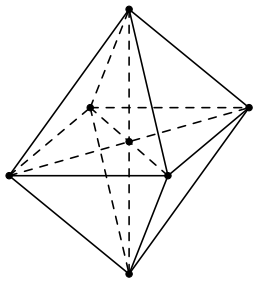
Chọn đáp án C □

Câu 10. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 10. **B**. 12. **C**. 8. **D**. 20.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.



Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tứ diện có bốn cạnh bằng nhau là tứ diện đều.

B. Hình chóp tam giác đều là tứ diện đều.

C. Tứ diện có bốn mặt là bốn tam giác đều là tứ diện đều.

D. Tứ diện có đáy là tam giác đều là tứ diện đều.

Lời giải.

Theo định nghĩa.

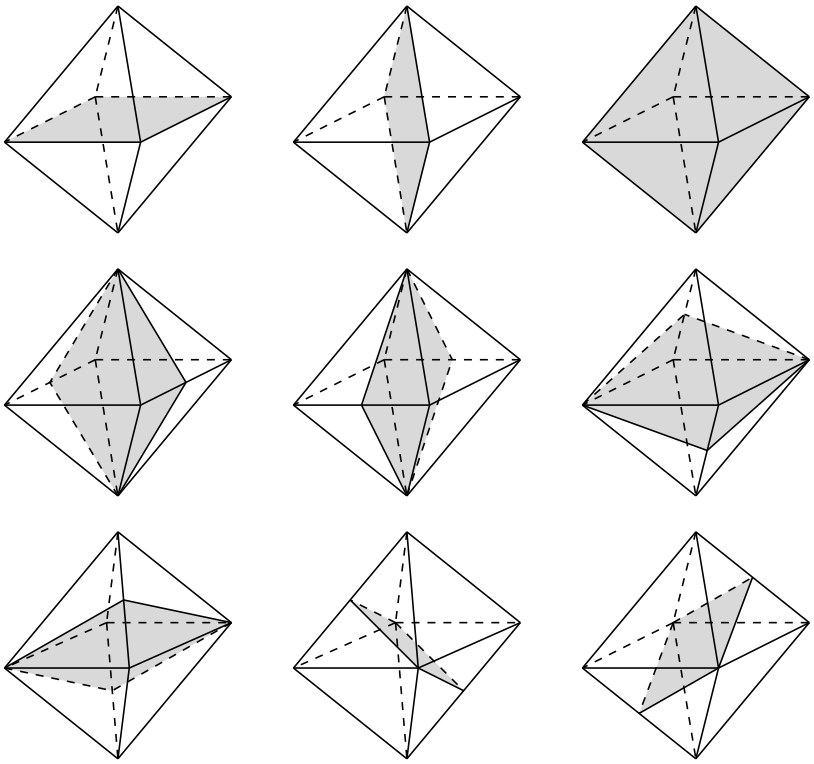
Chọn đáp án C □

Câu 12. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

A. 3. **B**. 5. **C**. 7. **D**. 9.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng lý thuyết khối đa diện để làm bài toán.
Cách giải:



Hình bát diện đều có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Khối đa diện đều nào sau đây có mặt **không** phải tam giác đều?

A. Bát diện đều. **B**. Khối hai mươi mặt đều.

C. Khối mười hai mặt đều. **D**. Tứ diện đều.

Lời giải.

Khối mười hai mặt đều có các mặt là ngũ giác đều, không phải tam giác đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 4. **C**. 9. **D**. 3.

Lời giải.

Dễ thấy rằng mỗi mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều luôn chứa một cạnh của tứ diện và đi qua trung điểm cạnh đối diện.

Suy ra tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

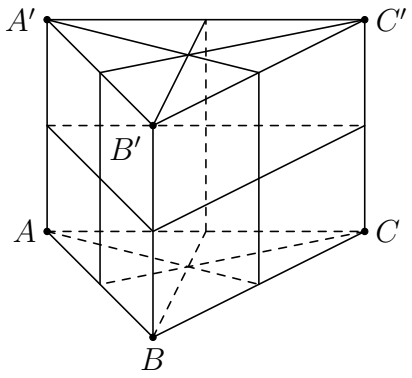
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt đối xứng.



Chọn đáp án D □

Câu 16. Khối đa diện đều loại $\{4,3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 6. **B**. 20. **C**. 12. **D**. 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{4,3\}$ là hình lập phương. Do đó số mặt là 6.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho một khối đa diện lồi có 10 đỉnh, 7 mặt. Hỏi khối đa diện này có mấy cạnh?

A. 20. **B**. 18. **C**. 15. **D**. 12.

Lời giải.

Ta có đ $+ m - c = 2 \Rightarrow c = 15$

Vậy khối đa diện có 15 cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình lập phương là đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình hộp là đa diện lồi.

D. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép với nhau là một đa diện lồi.

Câu 19. Khối tám mặt đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{3;3\}$.

Câu 20. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hình tứ diện đều có 6 đỉnh, 6 cạnh, 4 mặt. **B**. Hình tứ diện đều có 4 đỉnh, 4 cạnh, 4 mặt.

C. Hình tứ diện đều có 6 đỉnh, 4 cạnh, 4 mặt. **D**. Hình tứ diện đều có 4 đỉnh, 6 cạnh, 4 mặt.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Khối mười hai mặt đều là khối đa diện đều loại?

A. $\{4;3\}$. **B**. $\{3;5\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Câu 22. Cho hình đa diện đều 12 mặt thuộc loại $\{p,q\}$. Tính $p-q$.

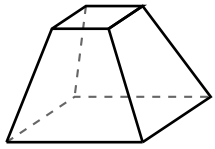
A. -2. **B**. 1. **C**. 2. **D**. -1.

Lời giải.

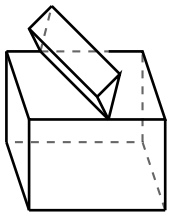
$\{p,q\} = \{5,3\}$

Chọn đáp án C □

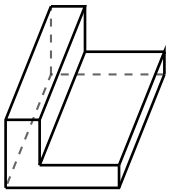
Câu 23. Cho các khối sau



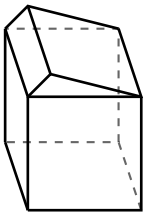
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Hỏi có bao nhiêu khối đa diện lồi?

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 1.

Câu 24. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. Tứ diện là đa diện lồi.

B. Hình hộp là đa diện lồi.

C. Hình tạo bởi hai tứ diện ghép với nhau là đa giác lồi.

D. Hình lập phương là đa diện lồi.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Hình chóp tam giác đều là đa diện đều. **B**. Hình lăng trụ tứ giác đều là đa diện đều.

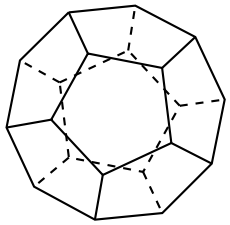
C. Hình lập phương là đa diện đều loại $\{3;4\}$. **D**. Hình lập phương là đa diện đều loại $\{4;3\}$.

Câu 26. Số cạnh của một hình bát diện đều là

A. 12. **B**. 10. **C**. 8. **D**. 16.

Câu 27.

Khối đa diện sau là khối đa diện đều, hỏi khối đa diện này thuộc loại nào sau đây?



A. Loại $\{3;5\}$. **B**. Loại $\{5;5\}$.

C. Loại $\{5;3\}$. **D**. Loại $\{3;3\}$.

Câu 28. Cho lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a, thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C**. $\dfrac{a^3}{3}$. **D**. a^3.

Câu 29. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối đa diện nào sau đây?

A. Khối lập phương. **B**. Khối mười hai mặt đều.

C. Tứ diện đều. **D**. Khối bát diện đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có tên gọi là

A. Khối mười hai mặt đều. **B**. Khối bát diện đều.

C. Khối tứ diện đều. **D**. Khối lập phương.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có tên gọi là khối lập phương.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

A. Hình trụ. **B**. Hình chóp. **C**. Hình lập phương. **D**. Hình bát diện đều.

Lời giải.

Vì các mặt của hình trụ không phải là các đa giác nên hình trụ không phải là hình đa diện.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hình hai mươi mặt đều có 20 đỉnh, 30 cạnh, 12 mặt.

B. Hình hai mươi mặt đều có 30 đỉnh, 12 cạnh, 20 mặt.

C. Hình hai mươi mặt đều có 30 đỉnh, 20 cạnh, 12 mặt.

D. Hình hai mươi mặt đều có 12 đỉnh, 30 cạnh, 20 mặt.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Khối bát diện đều là khối đa diện loại nào?

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;4\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều là khối đa diện loại $\{3;4\}$.

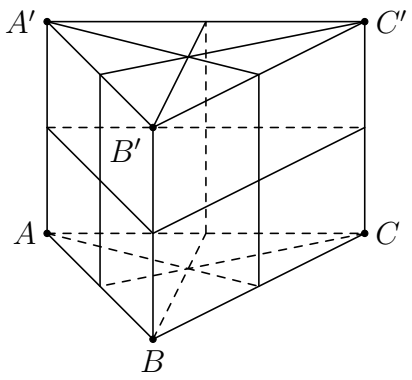
Chọn đáp án B □

Câu 34. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt đối xứng.



Chọn đáp án D □

Câu 35. Khối đa diện đều loại $\{4,3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 6. **B**. 20. **C**. 12. **D**. 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{4,3\}$ là hình lập phương. Do đó số mặt là 6.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho một khối đa diện lồi có 10 đỉnh, 7 mặt. Hỏi khối đa diện này có mấy cạnh?

A. 20. **B**. 18. **C**. 15. **D**. 12.

Lời giải.

Ta có đ $+ m - c = 2 \Rightarrow c = 15$
Vậy khối đa diện có 15 cạnh.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Tính tổng số đỉnh và số mặt của khối đa diện đều loại $\{5;3\}$.

A. 50. **B**. 20. **C**. 32. **D**. 42.

Lời giải.

Đa diện đều loại $\{5;3\}$ là khối 12 mặt đều có tất cả 20 đỉnh và 12 mặt nên tổng số đỉnh và mặt bằng 32.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tổng số cạnh của đa diện đều loại $\{3;3\}$ và $\{3;4\}$ bằng

A. 24. **B**. 30. **C**. 18. **D**. 20.

Lời giải.

Hai đa diện đều đó lần lượt là tứ diện đều có 6 cạnh và bát diện đều có 12 cạnh.
Vậy tổng số cạnh là $12 + 6 = 18$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

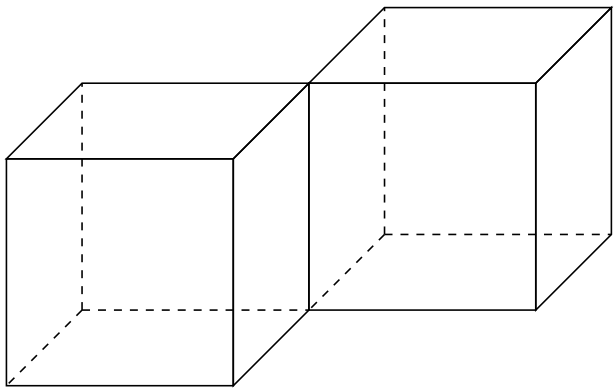
B. Khối hộp là khối đa diện lồi.

C. Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi.

D. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lời giải.

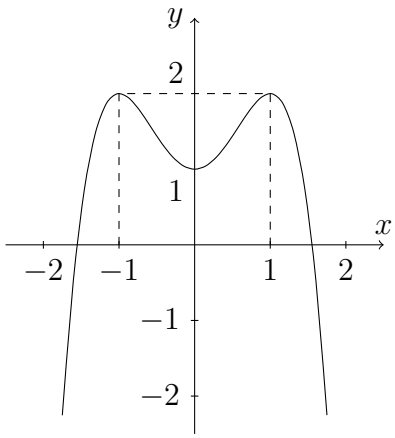
Khối tứ diện, khối hộp, khối lăng trụ tam giác đều là các đa diện lồi. Trong khi đó lắp ghép hai khối hộp ta chưa chắc đã được một khối đa diện lồi, ví dụ:



Chọn đáp án C □

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phát biểu nào sau đây là đúng



A. Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là $(-1;2)$, $(1;2)$ và một điểm cực tiểu là $(0;1)$.

B. Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là $(2;-1)$, $(2;1)$ và một điểm cực tiểu là $(1;0)$.

C. Đồ thị hàm số có một điểm cực đại là $(1;0)$ và hai điểm cực tiểu là $(-1;2)$, $(1;2)$.

D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $(2;-1)$, $(2;1)$ và một điểm cực tiểu là $(0;1)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm có hai điểm cực đại là $(-1;2)$, $(1;2)$ và một điểm cực tiểu là $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 30. **B**. 8. **C**. 12. **D**. 16.

Câu 42. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Chỉ có năm loại khối đa diện đều.

B. Mỗi khối đa diện đều là một khối đa diện lồi.

C. Mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của đúng hai mặt.

D. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có bốn mặt là các tam giác đều.

Lời giải.

Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Hình bát diện đều có số cạnh là bao nhiêu?

A. 12. **B**. 8. **C**. -1. **D**. 10.

Lời giải.

Đây là tính chất của hình bát diện đều.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

B. Khối hộp là khối đa diện lồi.

C. Lắp ghép hai khối hộp bất kì thì được một khối đa diện lồi.

D. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Theo định nghĩa khối đa diện lồi thì:

☑ Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

☑ Khối hộp là khối đa diện lồi.

☑ Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lắp ghép hai khối hộp bất kì thì không phải lúc nào cũng được một khối đa diện lồi, nên mệnh đề này **sai**.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt tương ứng là

A. 6, 12, 8. **B**. 4, 6, 4. **C**. 8, 12, 6. **D**. 8, 12, 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ chính là khối bát diện đều.

Nên có số đỉnh là 6, số cạnh 12, số mặt là 8.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có số đỉnh là.

A. 4. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 10.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có số đỉnh là 8.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Hình bát diện đều có số cạnh là

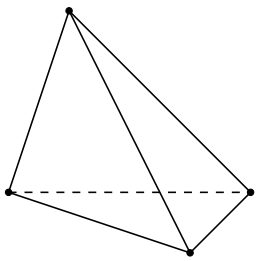
A. 6. **B**. 10. **C**. 12. **D**. 8.

Lời giải.

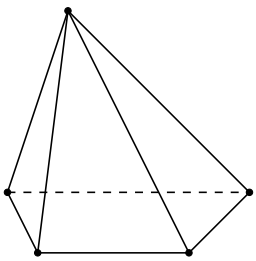
Số cạnh của hình bát diện đều là 12.

Chọn đáp án C □

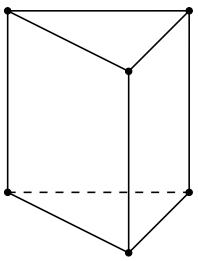
Câu 48. Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?



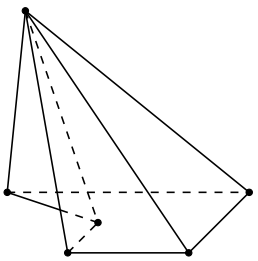
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1. **B**. Hình 2. **C**. Hình 3. **D**. Hình 4.

Lời giải.

Hình số 4 không phải là hình đa diện lồi vì tồn tại hai điểm ở mặt đáy nối lại được đoạn thẳng không thuộc hình đa diện.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Khối bát diện đều là khối đa diện đều loại nào?

A. $\{4;3\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{3;5\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều có mỗi mặt là một tam giác đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 4 mặt nên khối bát diện đều là khối đa diện đều loại $\{3;4\}$.

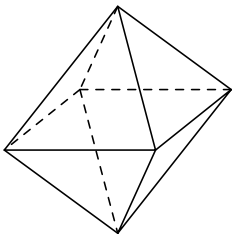
Chọn đáp án D □

Câu 50. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 12. **B**. 30. **C**. 8. **D**. 16.

Lời giải.

Khối bát diện đều ký hiệu $\{3;4\}$ số đỉnh là 6, số cạnh là 12 và số mặt là 8.



Chọn đáp án A □

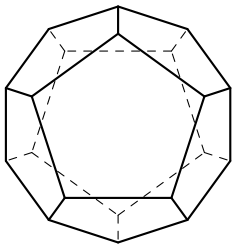
Câu 51. Khối đa diện đều loại $\{5,3\}$ có tên gọi nào dưới đây?

A. Khối mười hai mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối hai mươi mặt đều. **D**. Khối tứ diện đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{5,3\}$ có các mặt là hình ngũ giác đều (5 cạnh) và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 3 mặt. Đó chính là khối mười hai mặt đều.



Chọn đáp án A □

Câu 52. Có bao nhiêu loại khối đa điện đều?

A. Vô số. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 5.

Lời giải.

Có tất cả 5 loại khối đa diện đều, đó là $\{3;3\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{4;3\}$, $\{5;3\}$.

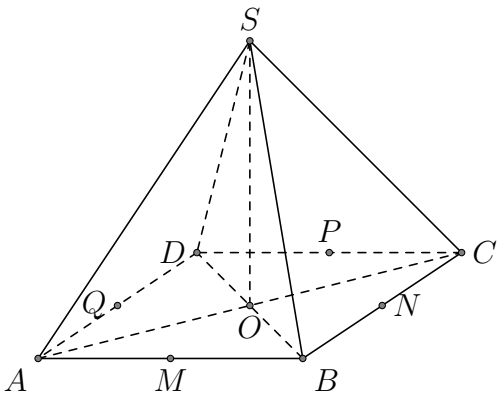
Chọn đáp án D □

Câu 53. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 4.

Lời giải.

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$. Gọi trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. Khi đó các mặt phẳng cần tìm là (SAC), (SBD), (SMP) và (SNQ).



Chọn đáp án D □

Câu 54. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp tam giác đều là tứ diện đều.

C. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao hạ từ đỉnh xuống đa giác đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

D. Tứ diện đều là hình chóp đều.

Lời giải.

Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Nên nói là tứ diện đều là chưa chính xác.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Trung điểm của tất cả các cạnh của hình tứ diện đều là đỉnh khối đa diện nào?

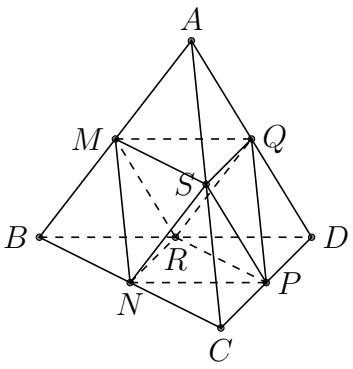
A. Hình hộp chữ nhật. **B**. Hình bát diện đều. **C**. Hình lập phương. **D**. Hình tứ diện đều.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là khối tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, DB, AC.

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, ta suy ra $MN = MS = MQ = MR = PN = PS = PQ = PR = \dfrac{a}{2}$.

Do đó khối đa diện $MNPQRS$ là khối bát diện đều cạnh $\dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 56. Hình lập phương thuộc loại khối đa diện đều nào?

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;4\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Lời giải.

Hình lập phương mỗi mặt của nó là một hình vuông có 4 cạnh và mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng 3 mặt nên thuộc loại $\{4;3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Khối lập phương là khối đa diện đều loại nào trong các loại sau?

A. $\{3;3\}$. **B**. $\{3;4\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Lời giải.

Khối lập phương là khối đa diện đều có 6 mặt, mỗi mặt là tứ giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 mặt.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng nhau. **B**. Hình chóp đều có các cạnh đáy bằng nhau.

C. Hình chóp đều có các cạnh bên bằng nhau. **D**. Tứ diện đều là một hình chóp tam giác đều.

Lời giải.

Khẳng định A sai vì hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác cân.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Khối đa diện có mười hai mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là

A. $30, 20, 12$. **B**. $20, 12, 30$. **C**. $12, 30, 20$. **D**. $20, 30, 12$.

Lời giải.

Khối đa diện có mười hai mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là $20, 30, 12$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Khối đa diện đều có 12 mặt thì có số cạnh là

A. 60. **B**. 30. **C**. 12. **D**. 24.

Lời giải.

Khối đa diện đều có 12 mặt thì có số cạnh là 30.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Khối đa diện đều loại $\{3; 5\}$ là khối

A. tứ diện đều. **B**. hai mươi mặt đều. **C**. tám mặt đều. **D**. lập phương.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3; 5\}$ là khối hai mươi mặt đều.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B**. 6. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Có 6 mặt phẳng đối xứng đối xứng của tứ diện đều, gồm các mặt chứa một cạnh và đi qua trung điểm của cạnh đối diện.

Chọn đáp án B □

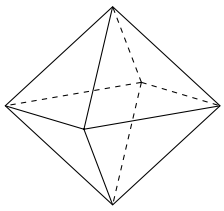
Câu 63. Gọi M, C, D theo thứ tự là số mặt, số cạnh, số đỉnh của hình bát diện đều. Khi đó $S = M + C + D$ bằng

A. $S = 24$. **B**. $S = 26$. **C**. $S = 30$. **D**. $S = 14$.

Lời giải.

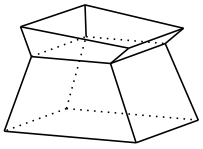
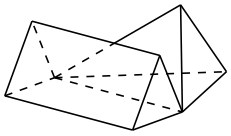
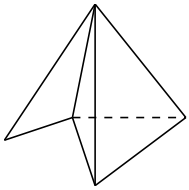
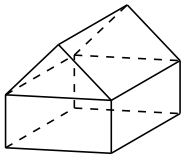
Bát diện đều là khối đa diện đều loại $\{3; 4\}$. Khi đó $C = 12; D = 6; M = 8$.

Vậy $S = 26$.



Chọn đáp án B □

Câu 64. Số hình đa diện lồi trong các hình dưới đây là

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Dựa vào các hình đã cho ta có số hình đa diện lồi là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?

A. Hình lăng trụ tứ giác đều. **B**. Hình bát diện đều.

C. Hình tứ diện đều. **D**. Hình lập phương.

Lời giải.

Trong các hình đa diện đã cho chỉ có tứ diện đều là không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$là khối đa diện nào sau đây?

A. Khối mười hai mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối bát diện đều. **D**. Khối hai mươi mặt đều.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết các khối đa diện đều.

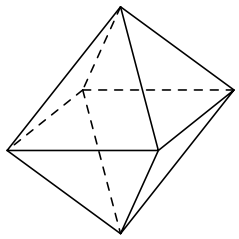
Chọn đáp án C □

Câu 67. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 8. **B**. 12. **C**. 16. **D**. 30.

Lời giải.

Hình bát diện ở bên có 12 cạnh.



Chọn đáp án B □

Câu 68. Trong các khối đa diện đều sau, khối đa diện đều nào là khối đa diện đều loại $\{4;3\}$?

A. Khối lập phương. **B**. Khối hai mươi mặt đều.

C. Khối tứ diện đều. **D**. Khối bát diện đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{p,q\}$ là khối đa diện mà

- ☑ Mỗi mặt của đa diện có p cạnh.
- ☑ Mỗi đỉnh của đa diện là đỉnh chung của q mặt.

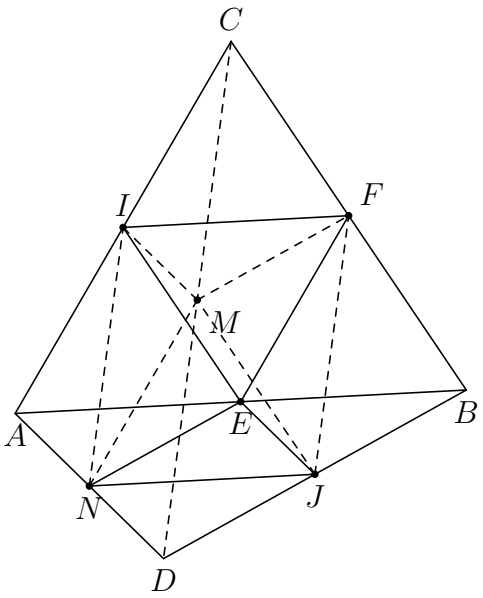
Vậy khối đa diện đều loại $\{4,3\}$ là khối có mặt là tứ giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba mặt, nên là khối lập phương.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Trung điểm của tất cả các cạnh của hình tứ diện đều là các đỉnh của khối đa diện nào?

A. Hình hộp chữ nhật. **B**. Hình bát diện đều. **C**. Hình lập phương. **D**. Hình tứ diện đều.

Lời giải.



Chọn đáp án B □

Câu 70. Khối mười hai mặt đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{3;5\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa khối đa diện đều.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Khối tám mặt đều có tất cả bao nhiêu đỉnh?

A. 8. **B**. 6. **C**. 12. **D**. 10.

Lời giải.

Khối tám mặt đều có 6 đỉnh.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Số cạnh của khối 12 mặt đều là bao nhiêu?

A. 14. **B**. 20. **C**. 30. **D**. 16.

Lời giải.

Số cạnh của khối 12 mặt đều là 30.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Khối đa diện đều nào thuộc loại $\{5;3\}$

A. Khối bát diện đều. **B**. Khối 20 mặt đều. **C**. Khối 12 mặt đều. **D**. Khối lập phương.

Lời giải.

Khối 12 mặt đều có mỗi mặt là ngũ giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba cạnh, nên thuộc loại $\{5;3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Khối mười hai mặt đều là khối đa diện loại nào?

A. $\{4;3\}$. **B**. $\{3;5\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Lời giải.

Khối mười hai mặt đều mỗi mặt có 5 cạnh và mỗi đỉnh là chung của 3 mặt nên là loại $\{5;3\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Khối bát diện đều thuộc loại
A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều thuộc loại $\{3;4\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt bằng.
A. 6, 12, 8. **B**. 8, 12, 6. **C**. 12, 30, 20. **D**. 4, 6, 4.

Câu 77. Hình mười hai mặt đều có tất cả bao nhiêu đỉnh?
A. 12. **B**. 30. **C**. 16. **D**. 20.

Lời giải.

Theo giáo khoa.
Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là
A. 6. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 9.

Lời giải.

Theo giáo khoa.
Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Một hình chóp ngũ giác đều có bao nhiêu mặt và bao nhiêu cạnh?
A. 6 mặt và 8 cạnh. **B**. 5 mặt và 8 cạnh. **C**. 5 mặt và 10 cạnh. **D**. 6 mặt và 10 cạnh.

Lời giải.

Một hình chóp ngũ giác đều có 6 mặt và 10 cạnh.
Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Để vẽ biểu diễn một hình chóp tứ giác đều trên giấy cần tối thiểu bao nhiêu nét khuất?
A. Hai nét khuất. **B**. Ba nét khuất.
C. Không cần nét khuất. **D**. Một nét khuất.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81. Khối mười hai mặt đều là loại khối đa diện đều nào?
A. $\{3;5\}$. **B**. $\{3;4\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Lời giải.

Khối mười hai mặt đều là loại $\{5;3\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 82. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?
A. 5. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 83. Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

A. 5. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Năm loại khối đa diện đều là tứ diện đều, lục diện đều, bát diện đều, thập nhị diện đều, nhị thập diện đều.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 84. Số đỉnh của khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ là

A. 30. **B**. 15. **C**. 12. **D**. 20.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ là khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 85. Khối lập phương là khối đa diện đều loại nào?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{5;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Lời giải.

Khối lập phương là khối đa diện đều loại $\{4;3\}$, trong đó

- ☑ 4 là số cạnh trên một mặt;
- ☑ 3 là số mặt chung của một đỉnh.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 86. Khối lập phương là khối đa diện đều loại nào?

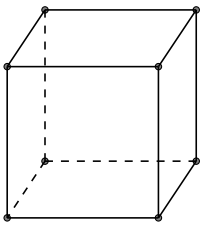
A. $\{3;3\}$. **B**. $\{3;5\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Mỗi mặt của hình lập phương có 4 cạnh.

Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng 3 mặt.

Cho nên hình lập phương là khối đa diện đều loại $\{4;3\}$.



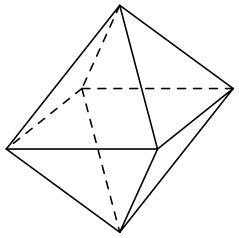
Chọn đáp án (C) ☐

Câu 87. Số cạnh của hình bát diện đều là

A. 12. **B**. 14. **C**. 8. **D**. 16.

Lời giải.

Quan sát hình ta thấy có 12 cạnh.



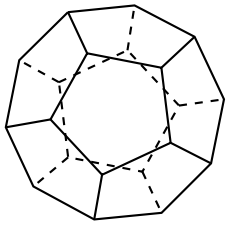
Chọn đáp án (A) ☐

Câu 88. Hình đa diện đều nào dưới đây có tất cả các mặt **không** phải là tam giác đều?

A. Bát diện đều. **B**. Hình 20 mặt đều. **C**. Hình 12 mặt đều. **D**. Tứ diện đều.

Lời giải.

Hình 12 mặt đều có 12 mặt là các ngũ giác đều.



Chọn đáp án C □

Câu 89. Trong các khối đa diện đều sau, khối đa diện đều nào là khối đa diện đều loại $\{3;4\}$?

A. Khối hai mươi mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối tứ diện đều. **D**. Khối bát diện đều.

Lời giải.

Khối đa diện cần tìm có mỗi mặt là một đa giác đều 3 cạnh, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi.

B. Khối hộp là khối đa diện lồi.

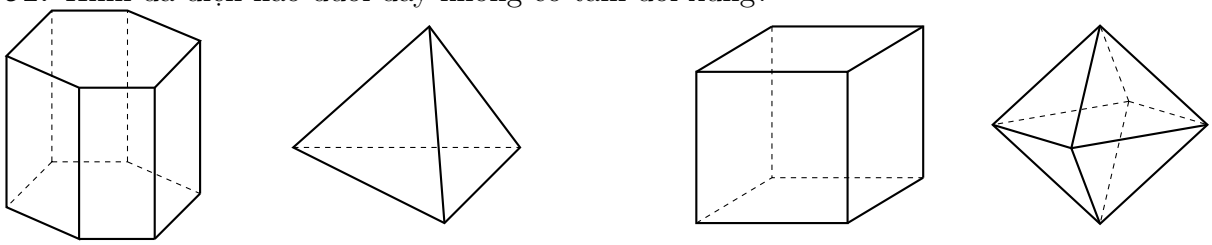
C. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

D. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?



A. Bát diện đều. **B**. Tứ diện đều.

C. Hình lập phương. **D**. Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải.

Hình tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Hình 12 mặt đều có bao nhiêu cạnh?

A. 30 cạnh. **B**. 20 cạnh. **C**. 16 cạnh. **D**. 12 cạnh.

Lời giải.

Vì theo sách sách giáo khoa thì một hình 12 mặt đều có tất cả là 30 cạnh.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Hình bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{3;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Do các mặt của bát diện đều là tam giác và mỗi đỉnh của bát diện đều là đỉnh chung của 4 mặt nên bát diện đều là khối đa diện đều loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Giá trị $|p-q|$ của khối đa diện lồi, đều loại $\{p;q\}$ không thể bằng

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Có 5 loại khối đa diện lồi, đều là $\{3;3\}$, $\{3;4\}$, $\{4;3\}$, $\{3;5\}$, $\{5;3\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Khối mười hai mặt đều là khối đa diện đều loại

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{4;3\}$. **C**. $\{2;4\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Lời giải.

Vì mỗi mặt của khối mười hai mặt đều có 5 cạnh và mỗi đỉnh là giao điểm của 3 cạnh nên khối mười hai mặt đều thuộc loại $\{5;3\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Hình tứ diện đều có tổng số mặt và đỉnh là

A. 8. **B**. 6. **C**. 10. **D**. 14.

Lời giải.

Hình tứ diện có 4 mặt và 4 đỉnh nên có tổng số mặt và đỉnh là 8.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Số đỉnh và số cạnh của hình hai mươi mặt đều là

A. 12 đỉnh và 30 cạnh. **B**. 24 đỉnh và 30 cạnh. **C**. 24 đỉnh và 24 cạnh. **D**. 12 đỉnh và 24 cạnh.

Lời giải.

.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Trong các khối đa diện sau, khối đa diện nào có số đỉnh và số mặt bằng nhau?

A. Khối lập phương. **B**. Khối bát diện đều.

C. Khối mười hai mặt đều. **D**. Khối tứ diện đều.

Lời giải.

Khối tứ diện đều có bốn mặt và bốn đỉnh.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Khối đa diện đều loại $\{5,3\}$ có số mặt là

A. 14. **B**. 8. **C**. 10. **D**. 12.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{5,3\}$ là khối đa diện mười hai mặt đều nên có số mặt là 12.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Trong tất cả các loại hình đa diện đều sau đây, hình nào có số mặt nhiều nhất?

A. Loại $\{3;4\}$. **B**. Loại $\{5;3\}$. **C**. Loại $\{4;3\}$. **D**. Loại $\{3;5\}$.

Lời giải.

Hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ có 20 mặt, là hình đa diện đều có số mặt nhiều nhất.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. C	5. C	6. D	7. C	8. A	9. C	10. B
11. C	12. D	13. C	14. A	15. D	16. A	17. C	18. D	19. C	20. D
21. D	22. C	23. C	24. C	25. D	26. A	27. C	28. D	29. A	30. D
31. A	32. D	33. B	34. D	35. A	36. C	37. C	38. C	39. C	40. A
41. C	42. D	43. A	44. C	45. A	46. C	47. C	48. D	49. D	50. A
51. A	52. D	53. D	54. B	55. B	56. C	57. C	58. A	59. D	60. B
61. B	62. B	63. B	64. C	65. C	66. C	67. B	68. A	69. B	70. D
71. B	72. C	73. C	74. D	75. D	76. B	77. D	78. A	79. D	80. C
81. D	82. D	83. A	84. D	85. B	86. C	87. A	88. C	89. D	90. A
91. B	92. A	93. D	94. D	95. A	96. A	97. A	98. D	99. D	100. D

D MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

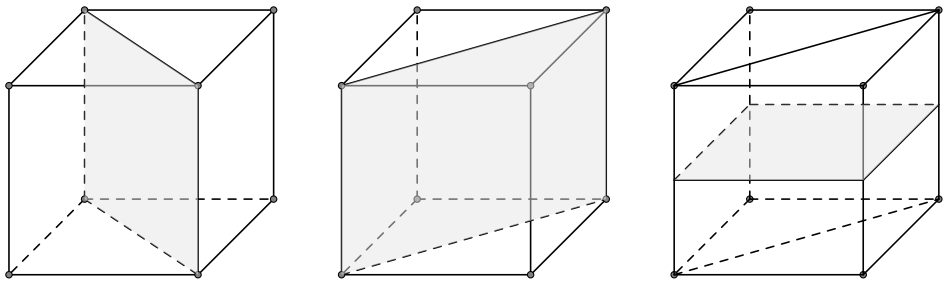
A. 1. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng lý thuyết khối đa diện để là bài toán.

Cách giải:



Hình đã cho có 3 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hai khối lập phương lần lượt có cạnh là 4 cm và 8 cm là hai khối đa diện đồng dạng.

B. Khối chóp tam giác đều là khối chóp có đáy là tam giác đều.

C. Hai khối tứ diện đều có diện tích mỗi mặt là 3 m^2 và 12 m^2 là hai khối đa diện đều.

D. Khối lăng trụ tứ giác đều và khối hộp chữ nhật là hai khối đa diện đồng dạng.

Lời giải.

Khối lăng trụ tứ giác đều có đáy là hình vuông nên không đồng dạng với khối hộp chữ nhật.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trung điểm các cạnh của hình tứ diện đều là đỉnh của hình

A. Hình lập phương. **B**. Hình tứ diện đều.

C. Hình lăng trụ tam giác. **D**. Hình bát diện đều.

Lời giải.

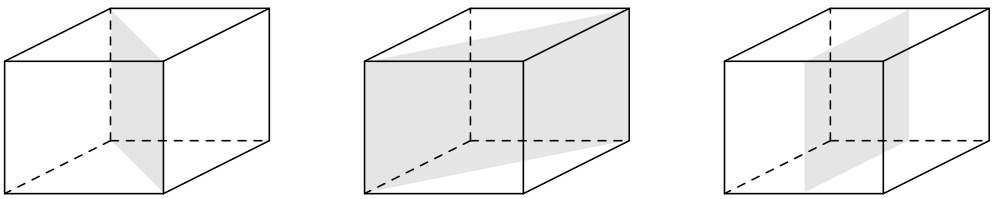
Chọn đáp án D □

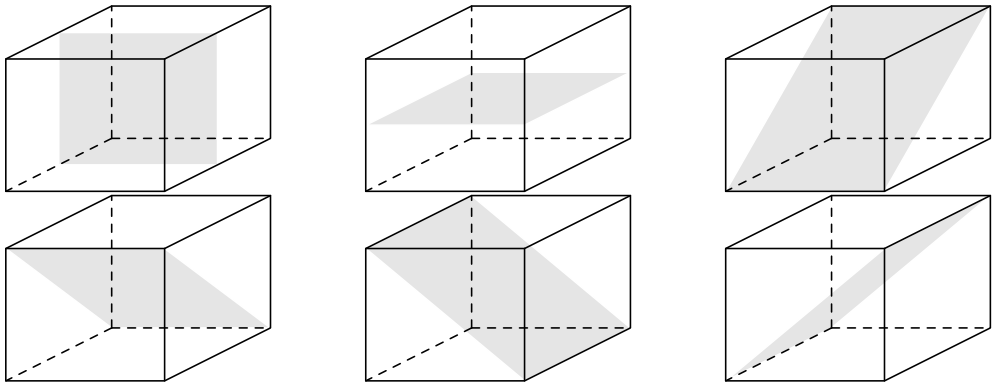
Câu 4. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. 3. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.





Chọn đáp án D □

Câu 5. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là

A. 10. **B**. 12. **C**. 14. **D**. 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là 12.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều?

A. 7. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Có 5 khối đa diện đều là khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

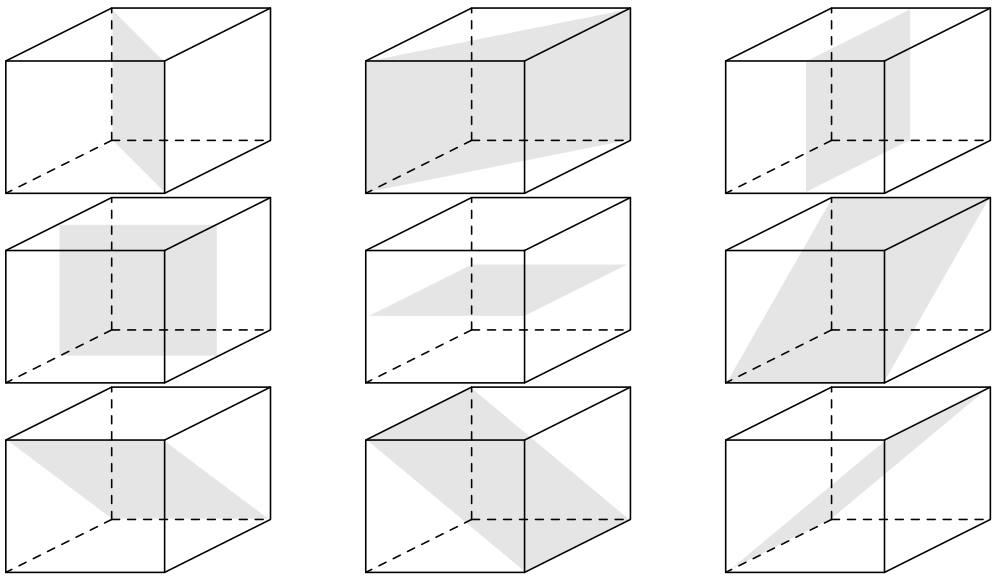
Chọn đáp án C □

Câu 7. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.



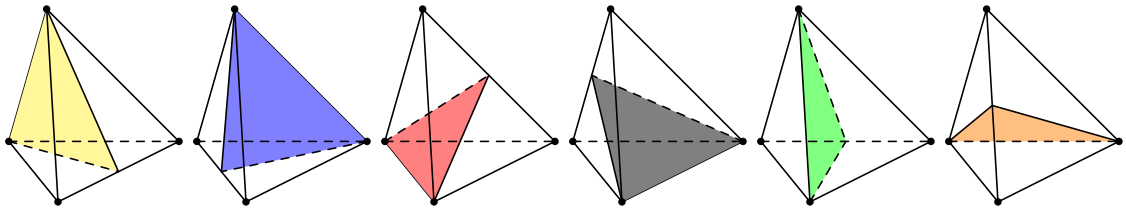
Chọn đáp án D □

Câu 8. Khối tứ diện đều có mấy mặt đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Khối tứ diện đều có 6 mặt đối xứng.



Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau. Biết rằng ABC là tam giác cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Khi đó hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là

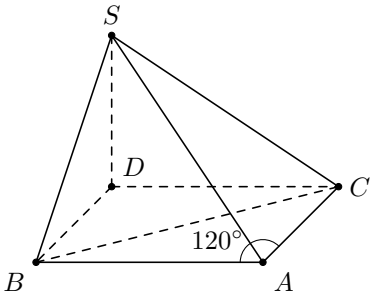
A. trung điểm cạnh BC. **B**. đỉnh A của $\triangle ABC$.

C. đỉnh D của hình thoi $ABDC$. **D**. tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Do tứ diện $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp D tam giác ABC.

Do tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 60^\circ$ (góc ở tâm). Do đó ADB và ADC là các tam giác đều. Vậy $ABDC$ là hình thoi.

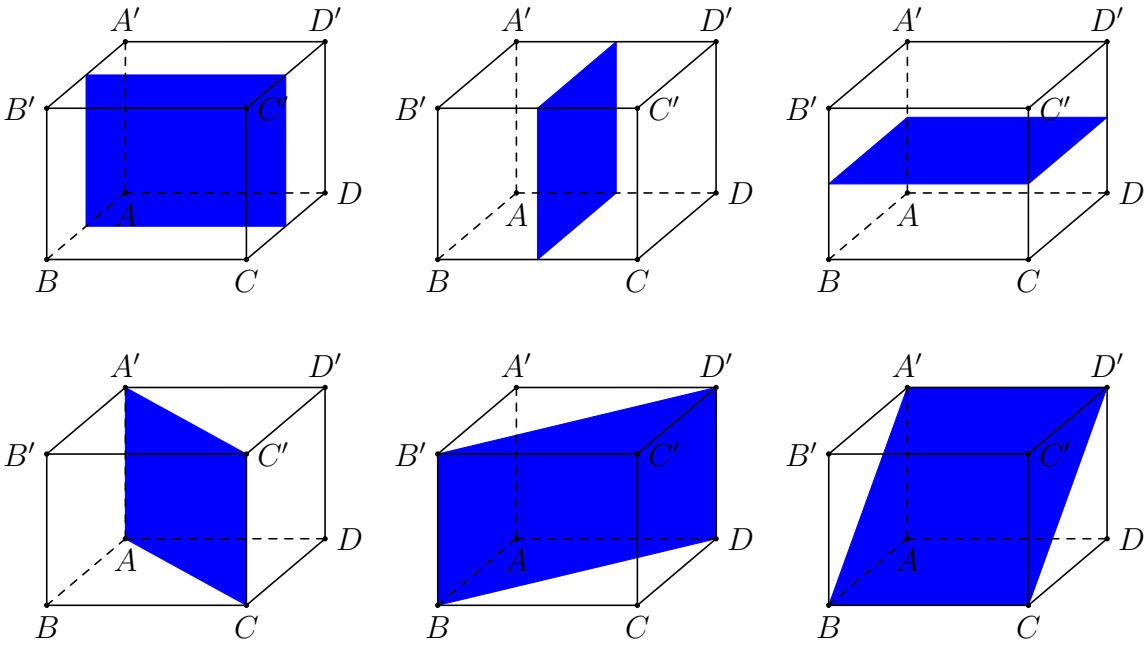


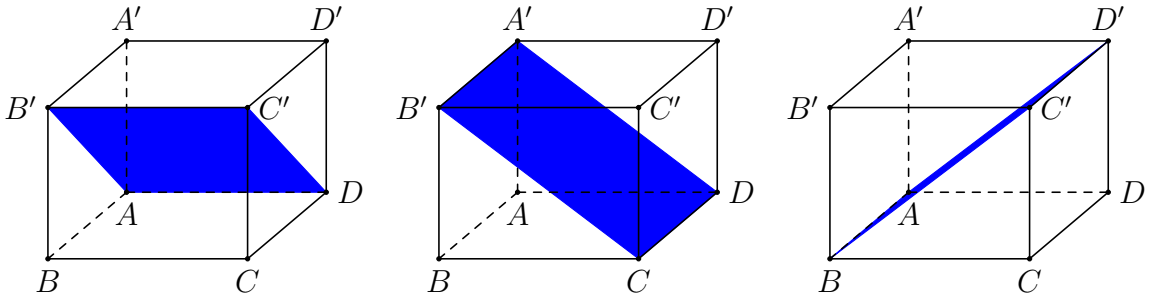
Chọn đáp án C □

Câu 10. Hình lập phương có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 8. **C**. 9. **D**. 7.

Lời giải.





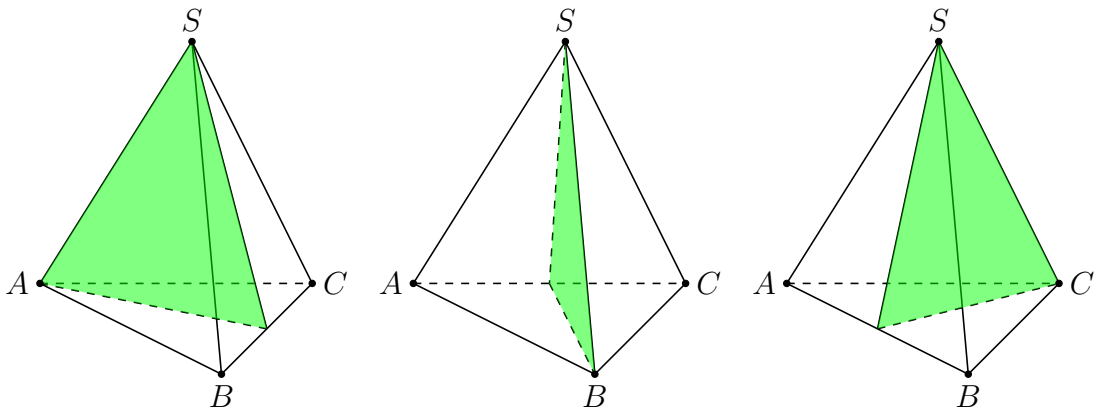
Chọn đáp án C □

Câu 11. Khối chóp tam giác đều có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

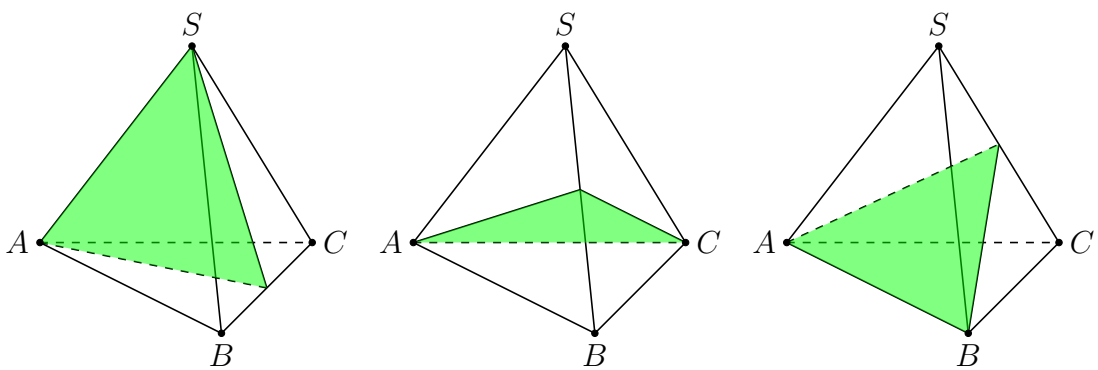
A. 3. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 4.

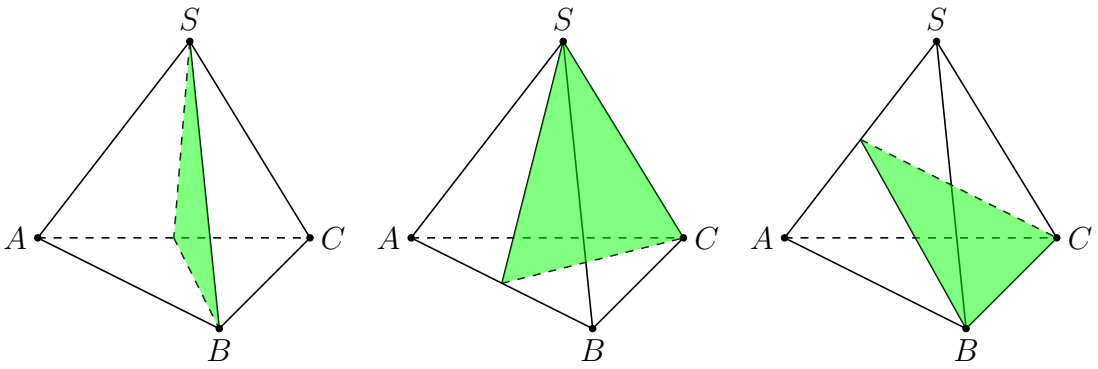
Lời giải.

Trường hợp 1: Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy không bằng cạnh bên. Khi đó khối chóp tam giác đều có tất cả 3 mặt phẳng đối xứng.



Trường hợp 2: Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng cạnh bên. Khi đó khối chóp tam giác đều trở thành khối tứ diện đều $SABC$. Khi đó khối chóp tam giác đều có tất cả 6 mặt phẳng đối xứng.





Vậy khối chóp tam giác đều có nhiều nhất 6 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. sáu. **B**. mười hai. **C**. ba. **D**. chín.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tổng số cạnh của khối lập phương và khối bát diện đều là

A. 24. **B**. 42. **C**. 36. **D**. 18.

Lời giải.

Hình lập phương có 12 cạnh, hình bát diện có 12 cạnh.

Chọn đáp án A □

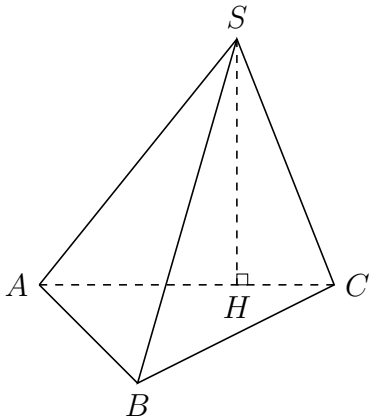
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy là điểm H nằm trên cạnh AC sao cho $AH = \dfrac{2}{3}AC$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $HI \perp BC \Rightarrow (\widehat{SBC};(ABC)) = \widehat{SIH} = 60°$;

$HI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \dfrac{a}{2}$. $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$



Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm số cạnh ít nhất của hình đa diện có 5 mặt

A. 9 cạnh. **B**. 8 cạnh. **C**. 7 cạnh. **D**. 6 cạnh.

Lời giải.

Hình đa diện có 5 mặt mà có số cạnh ít nhất là hình chóp tứ giác, suy ra số cạnh là 8.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho khối đa diện đều loại $\{4;3\}$, tên gọi của nó là

A. Chóp đều. **B**. Tứ diện đều. **C**. Bát diện đều. **D**. Lập phương.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, góc $\widehat{ACB} = 60^0$ và cạnh $BC = a$. Đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng ABC một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{a^3 3\sqrt{3}}{2}$. **D**. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy, biết $AC = 3a\sqrt{2}, SA = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 27a^3$. **B**. $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C**. $V = \dfrac{9a^3}{2}$. **D**. $V = \dfrac{27a^3}{2}$.

Câu 19. Số mặt phẳng đối xứng của khối chóp tam giác đều là

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng đi qua một cạnh bên và trung điểm cạnh đối diện với cạnh bên đó. Ta có 3 mặt phẳng như vậy.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Hình bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{3;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Câu 21. Khối tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 8.

Câu 22. Khối bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 12. **B**. 14. **C**. 10. **D**. 16.

Câu 23. Khối lập phương thuộc loại khối đa diện đều nào?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Câu 24. Khối chóp đều $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là

A. Hình chữ nhật. **B**. Hình bình hành. **C**. Hình vuông. **D**. Hình thoi.

Câu 25. Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ thuộc loại nào?

A. Khối hai mươi mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối bát diện đều. **D**. Khối mười hai mặt đều.

Lời giải.

Khối bát diện đều loại $\{3;4\}$. Khối lập phương loại $\{4;3\}$. Khối hai mươi mặt đều loại $\{3;5\}$

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ biết $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{13}$.

A. 2. **B**. 3. **C**. $\dfrac{650}{6}$. **D**. 1.

Lời giải.

Đặt $SA=a, SB=b, SC=c$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b^2+c^2=10 \\ a^2+c^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=1, c=3$$

Vậy $V=\dfrac{1}{6}abc=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.BCD$ biết $AB=1$, $SA=2$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

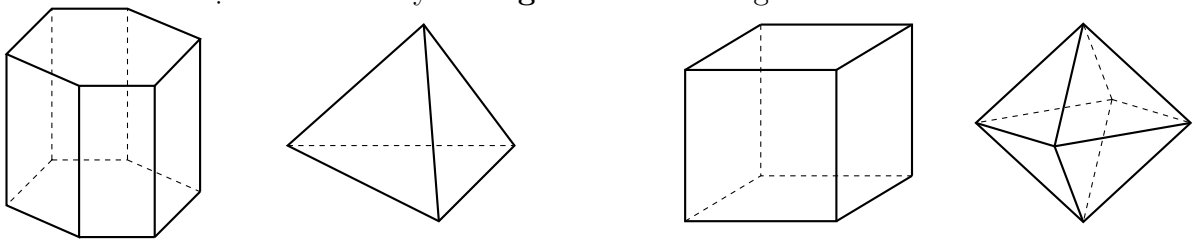
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=120^0$, $SA=SB=SC=2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{4}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{11}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$. **D.** $a^3\sqrt{11}$.

Câu 30. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



A. Lăng trụ lục giác đều. **B.** Tứ diện đều.

C. Hình lập phương. **D.** Bát diện đều.

Lời giải.

Hình tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?** Số đỉnh và số mặt của bất kì hình đa diện nào cũng

A. Lớn hơn hoặc bằng 5. **B.** Lớn hơn 5.

C. Lớn hơn hoặc bằng 4. **D.** Lớn hơn 4.

Câu 32. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt đối xứng?

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 33. Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a=4$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $16\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 45°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ theo a là

A. $a^3\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 35. Hình tứ diện đều có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36. Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh?

A. 6. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều là đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số mặt $M = 8$. Dùng hệ thức $4\cdot Đ = 3\cdot M \Rightarrow Đ = \dfrac{3\cdot 8}{4} = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Số cạnh của một khối đa diện đều loại $\{3,4\}$ là

A. 8. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 20.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3,4\}$ là khối bát diện nên có 12 cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a.

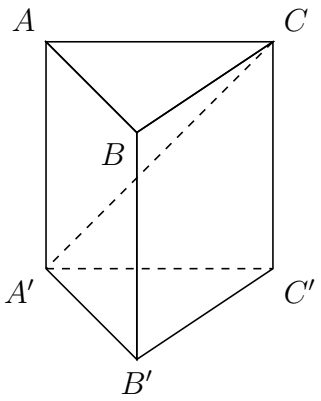
A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{CA'C'} = (A'C,(A'B'C')) = 60^\circ$.

Suy ra $CC' = A'C'\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy $V = CC'\cdot S_{A'B'C'} = a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Đa diện đều loại $\{5;3\}$ có tên gọi nào dưới đây?

A. Tứ diện đều. **B.** Lập phương. **C.** Hai mươi mặt đều. **D.** Mười hai mặt đều.

Lời giải.

Tên gọi là mười hai mặt đều.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải.

Có 6 mặt phẳng đối xứng: Các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm cạnh đối diện.

Chọn đáp án C ☐

Câu 41. Số mặt phẳng đối xứng của một hình bát diện đều bằng

A. 6. **B**. 8. **C**. 5. **D**. 9.

Lời giải.

Có 9 mặt phẳng đối xứng gồm : 3 mặt đi qua 4 đỉnh của bát diện, 6 mặt đi qua 2 đỉnh đối diện và 2 trung điểm của 2 cạnh đối diện.

Chọn đáp án D ☐

Câu 42. Tìm số mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều.

A. 4. **B**. 9. **C**. 3. **D**. 6.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện. Có 6 mặt phẳng như vậy.

Chọn đáp án D ☐

Câu 43. Trong các mặt của khối đa diện, số cạnh cùng một mặt tối thiểu là

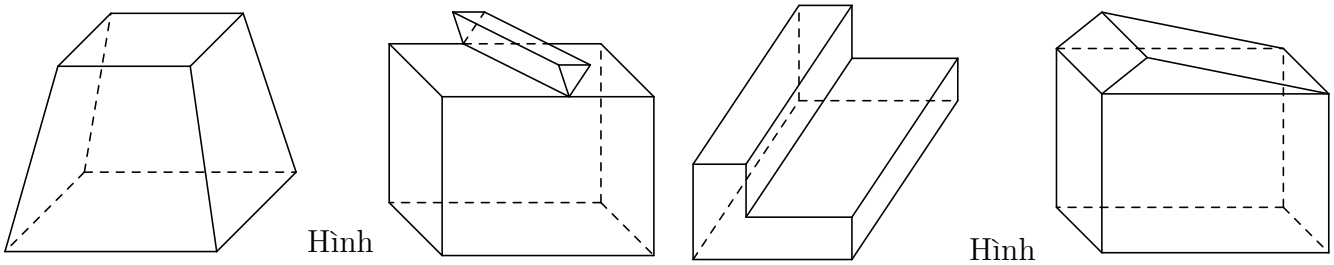
A. 5. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Mỗi mặt của một đa diện là một đa giác. Vậy số cạnh tối thiểu của một mặt là 3.

Chọn đáp án C ☐

Câu 44. Cho các khối hình sau:



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Theo định nghĩa đa diện lồi, chỉ có duy nhất hình 1 là đa diện lồi.

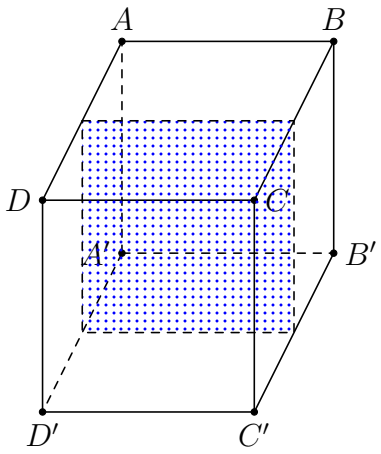
Chọn đáp án D ☐

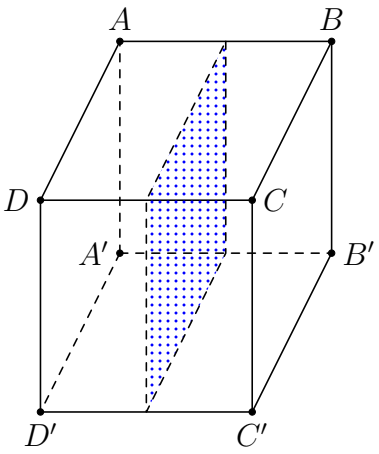
Câu 45. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

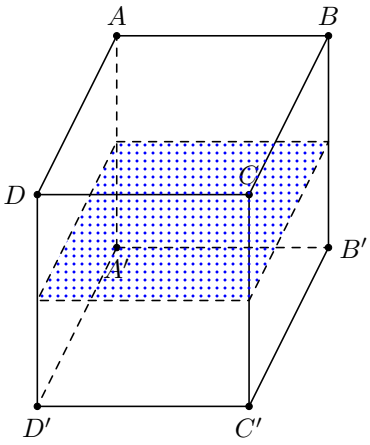
A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Có 3 mặt phẳng đối xứng.







Chọn đáp án C □

Câu 46. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là

A. 10. **B**. 12. **C**. 14. **D**. 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là 12.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều?

A. 7. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Có 5 khối đa diện đều là khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

Chọn đáp án C □

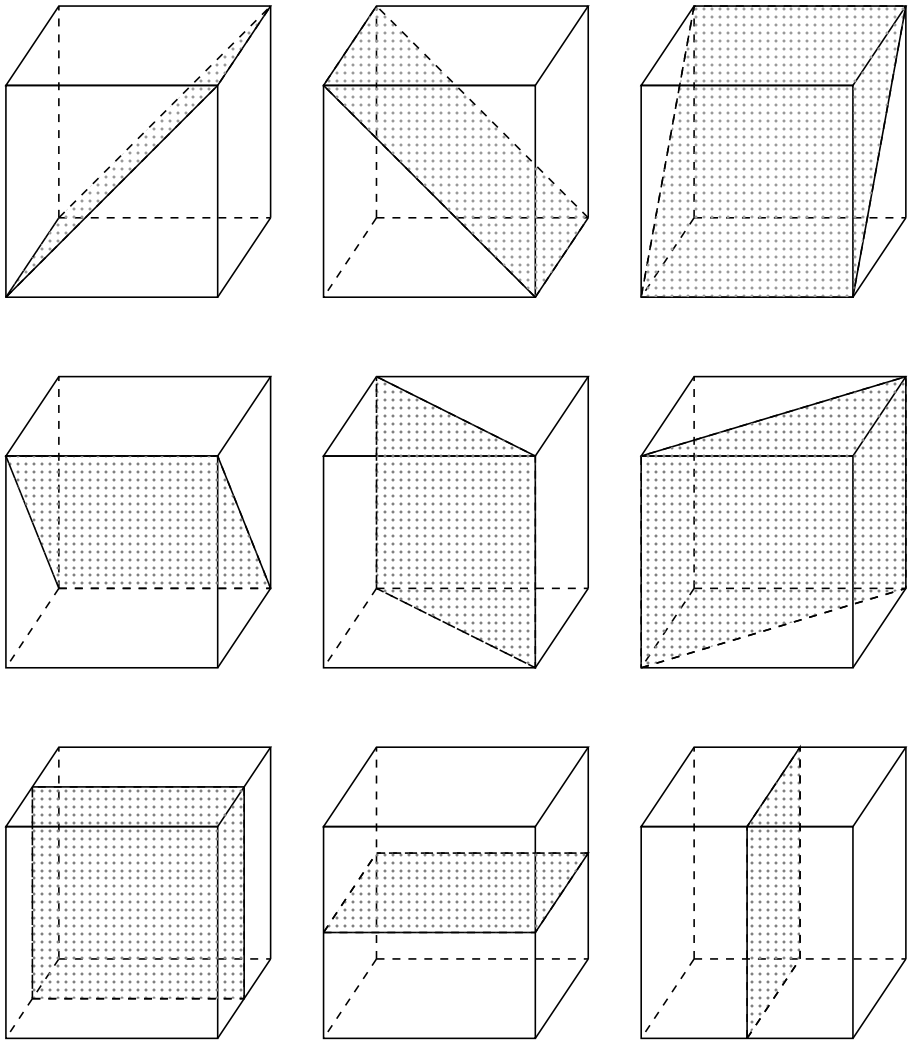
Câu 48. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 15. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 12.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng gồm:
- 3 mặt phẳng đi qua trung điểm của các cạnh đối diện nhau.
- 6 mặt chéo.

Chọn đáp án B □



Câu 49. Gọi x, y, z lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt của một khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng $T = x + y + 2z$ bằng

A. $T = 34$. **B**. $T = 18$. **C**. $T = 16$. **D**. $T = 32$.

Lời giải.

Khối đa diện loại $\{3;4\}$ có $x = 6, y = 12, z = 8$ suy ra $T = 34$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Tâm các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình

A. bát diện đều. **B**. lăng trụ tam giác đều.

C. chóp lục giác đều. **D**. chóp tứ giác đều.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi.

B. Khối hộp là khối đa diện lồi.

C. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

D. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Hình bát diện đều là hình đa diện đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{3;5\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{4;3\}$.

Lời giải.

Hình bát diện đều là hình đa diện đều loại $\{3;4\}$, mỗi mặt là một tam giác có 3 cạnh, và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt.

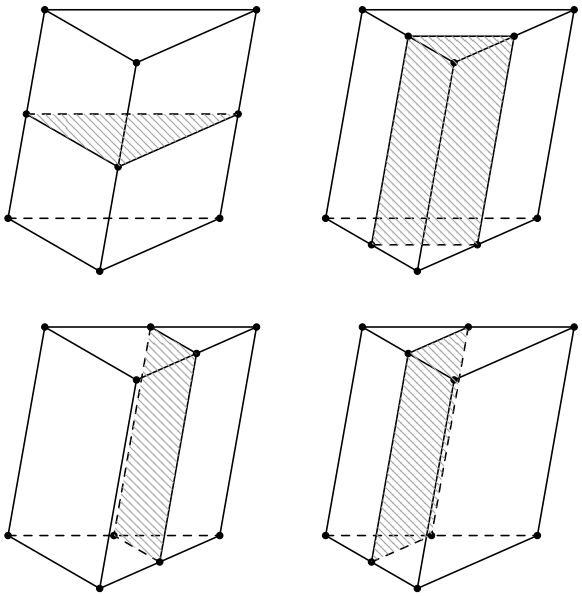
Chọn đáp án C □

Câu 53. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán là mặt phẳng qua các trung điểm của các cặp cạnh như hình vẽ



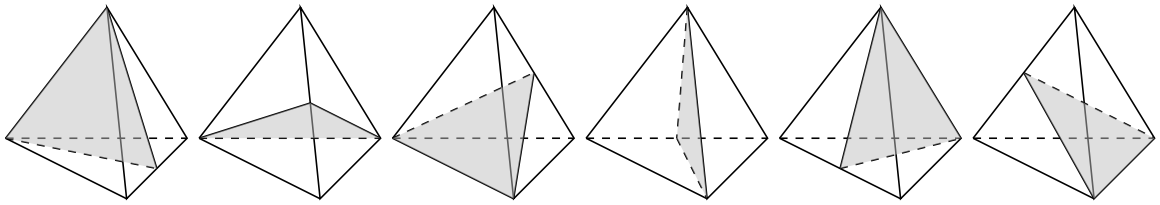
Chọn đáp án C □

Câu 54. Khối tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là mặt phẳng đi qua trung điểm của 1 cạnh và chứa cạnh đối diện. Có 6 mặt phẳng như vậy (Quan sát hình vẽ dưới).

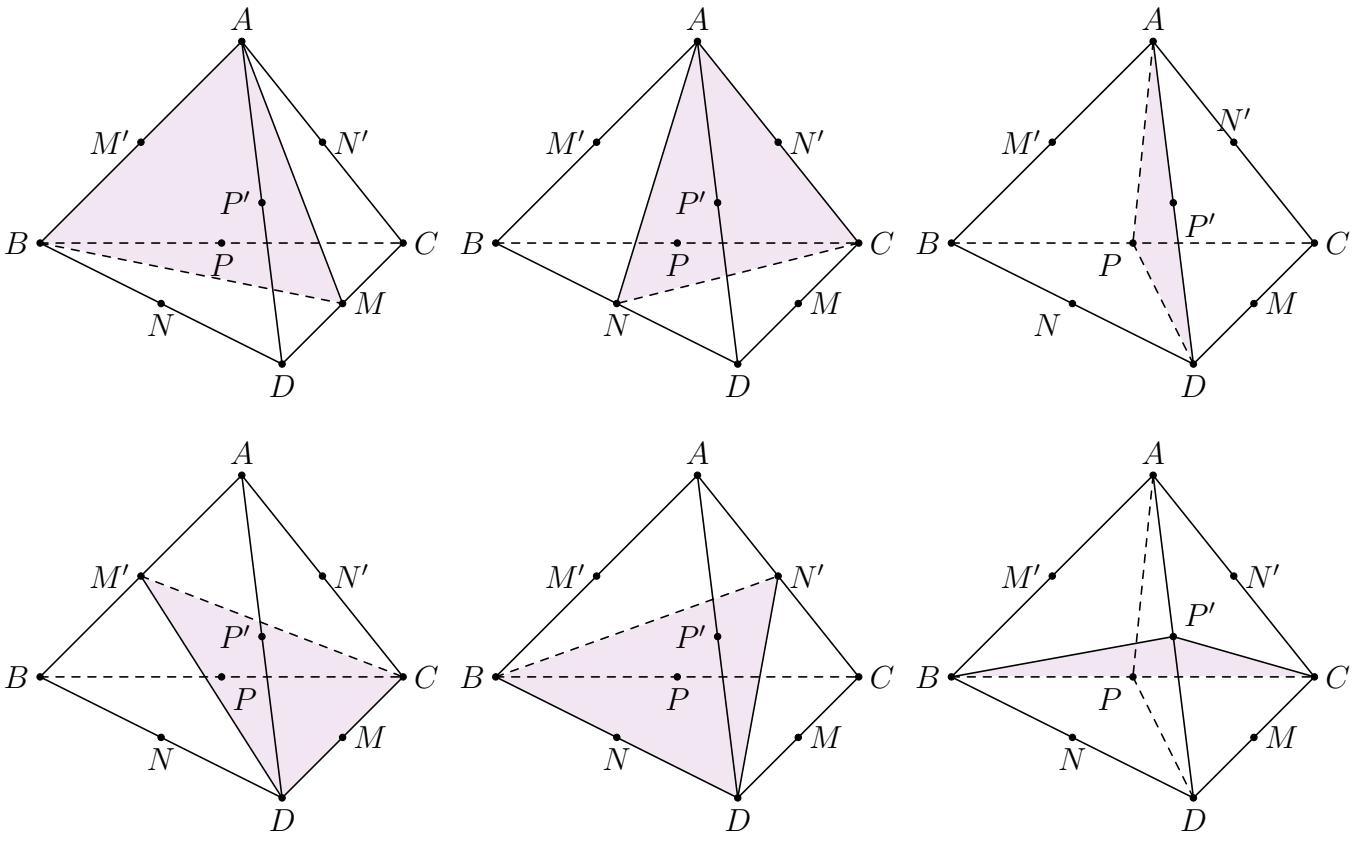


Chọn đáp án C □

Câu 55. Khối tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.



Chọn đáp án B □

Câu 56. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Khối bát diện đều có tổng số đỉnh và số cạnh lần lượt là 8 và 12.

B. Khối tứ diện đều có tổng số đỉnh và tổng số cạnh lần lượt là 4 và 8.

C. Khối mười hai mặt đều có tổng số đỉnh và tổng số cạnh lần lượt là 20 và 30.

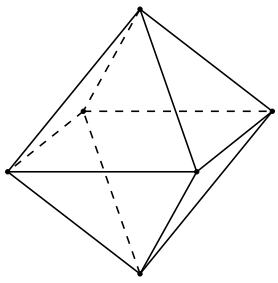
D. Khối lập phương có tổng số đỉnh và tổng số cạnh lần lượt là 6 và 12.

Câu 57. Mỗi đỉnh của một hình bát diện đều là đỉnh chung của bao nhiêu cạnh?

A. Bốn cạnh. **B**. Năm cạnh. **C**. Ba cạnh. **D**. Sáu cạnh.

Lời giải.

Vẽ bát diện đều, ta thấy mỗi đỉnh của một hình bát diện đều là đỉnh chung của bốn cạnh.



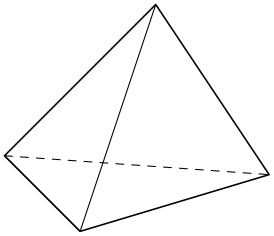
Chọn đáp án A □

Câu 58. Tổng số mặt phẳng đối xứng của khối tứ diện đều bằng bao nhiêu?

A. 4. **B**. 1. **C**. 6. **D**. 8.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng chứa 1 cạnh và đi qua trung điểm của cạnh đối diện.



Chọn đáp án C □

Câu 59. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Dùng một mặt phẳng bất kỳ cắt một khối bát diện đều ta được khối tứ diện đều.

B. Mỗi mặt của một bát diện đều là một tam giác đều.

C. Mỗi đỉnh của hình bát diện đều là đỉnh chung của ba mặt.

D. Mỗi mặt của hình bát diện đều là tứ giác đều.

Lời giải.

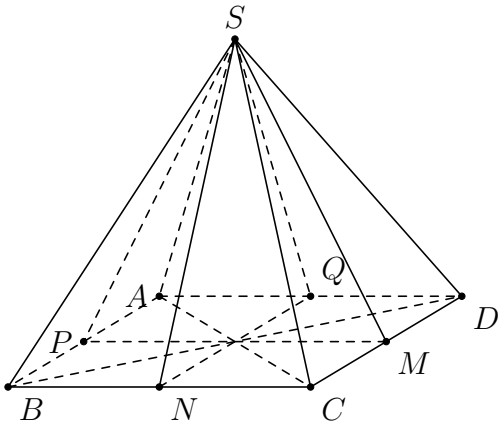
Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA = SB = SC = SD$ thì số mặt phẳng đối xứng của hình chóp đó là

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Hình chóp có 2 mặt phẳng đối xứng gồm: (SMP), (SNQ).



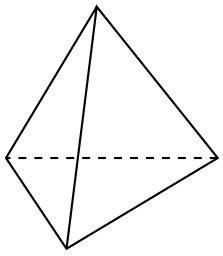
Chọn đáp án C □

Câu 61. Trong các khối đa diện sau, khối đa diện nào có số đỉnh và số mặt bằng nhau?

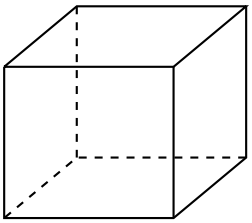
A. Khối lập phương. **B**. Khối bát diện đều.

C. Khối mười hai mặt đều. **D**. Khối tứ diện đều.

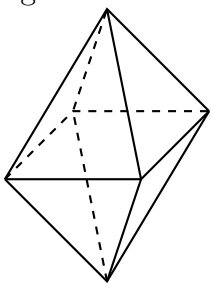
Lời giải.



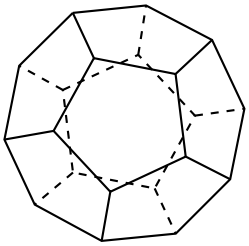
Khối tứ diện đều có 4 đỉnh và 4 mặt.



Khối lập phương có 8 đỉnh và 6 mặt.



Khối bát diện đều có 6 đỉnh và 8 mặt.



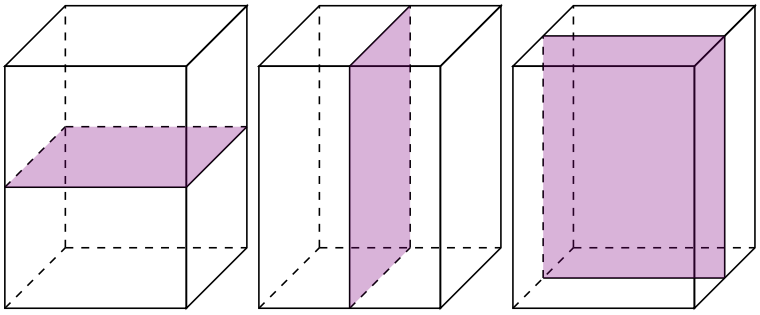
Khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh và 12 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng. **B**. 4 mặt phẳng. **C**. 1 mặt phẳng. **D**. 6 mặt phẳng.

Lời giải.



Chọn đáp án A □

Câu 63. Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a có thể tích là

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B**. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C**. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D**. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

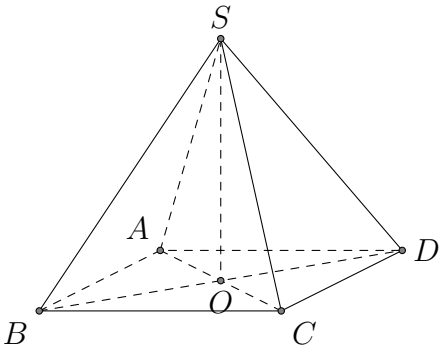
Lời giải.

Ta có $SO\perp(ABCD)$ với O là tâm của $ABCD$.

Xét tam giác SOD vuông tại O:

$$SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 64. Trong các khối đa diện đều sau, khối đa diện nào có số cạnh gấp đôi số đỉnh?

A. Khối hai mươi mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối mười hai mặt đều. **D**. Khối bát diện đều.

Lời giải.

Khối bát diện đều có số đỉnh bằng 6, số cạnh bằng 12.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $6a^3$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = SC = BC = AC = a$. Hai mặt phẳng $(SAC), (BAC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 67. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBC đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp đó?

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

Câu 68. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Xét điểm P, Q, R lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, DB sao cho $PA = 2PB$, $QB = 3QC$, $RB = 4RD$. Tính thể tích khối đa diện $APRQCD$?

A. $\dfrac{4}{5}V$. **B.** $\dfrac{2}{3}V$. **C.** $\dfrac{3}{4}V$. **D.** $\dfrac{5}{6}V$.

Lời giải.

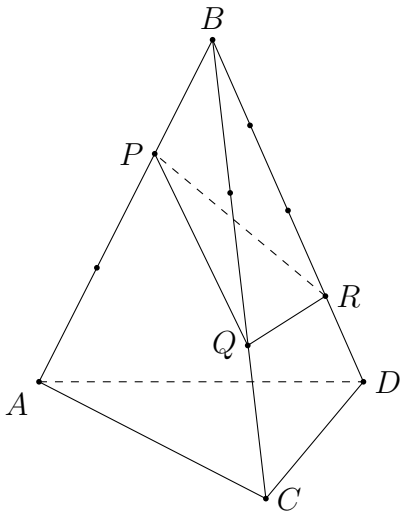
Ta có: $\begin{cases} PA = 2PB \Rightarrow \dfrac{BP}{BA} = \dfrac{1}{3} \\ QB = 3QC \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{3}{4} \\ RB = 4RD \Rightarrow \dfrac{BR}{BD} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Khi đó:
$\dfrac{V_{B.PQR}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{BP}{BA} \cdot \dfrac{BQ}{BC} \cdot \dfrac{BR}{BD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$

Suy ra: $V_{BPQR} = \dfrac{1}{5}V$.

Mặt khác: $V_{BPQR} + V_{APRQCD} = V$.

Vậy: $V_{APRQCD} = \dfrac{4}{5}V$.



Chọn đáp án A □

Câu 69. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Hình chóp đều có các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

B. Hình chóp đều có các cạnh bằng nhau.

C. Một hình chóp có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy thì đó là hình chóp đều.

D. Hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

Lời giải.

Dựa vào tính chất, khẳng định: "Hình chóp đều có các cạnh bằng nhau " là khẳng định **sai**.

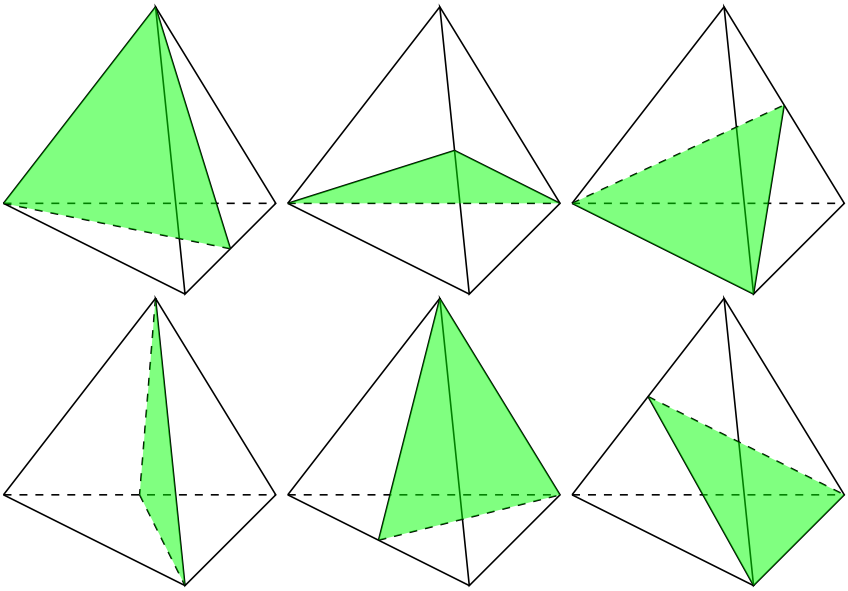
Chọn đáp án B □

Câu 70. Khối tứ diện đều có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 5.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là mặt phẳng đi qua trung điểm của 1 cạnh và chứa cạnh đối diện. Có 6 mặt phẳng như vậy (Quan sát hình vẽ dưới).



Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh của khối đa diện bằng

A. $180°$. **B**. $240°$. **C**. $324°$. **D**. $360°$.

Lời giải.

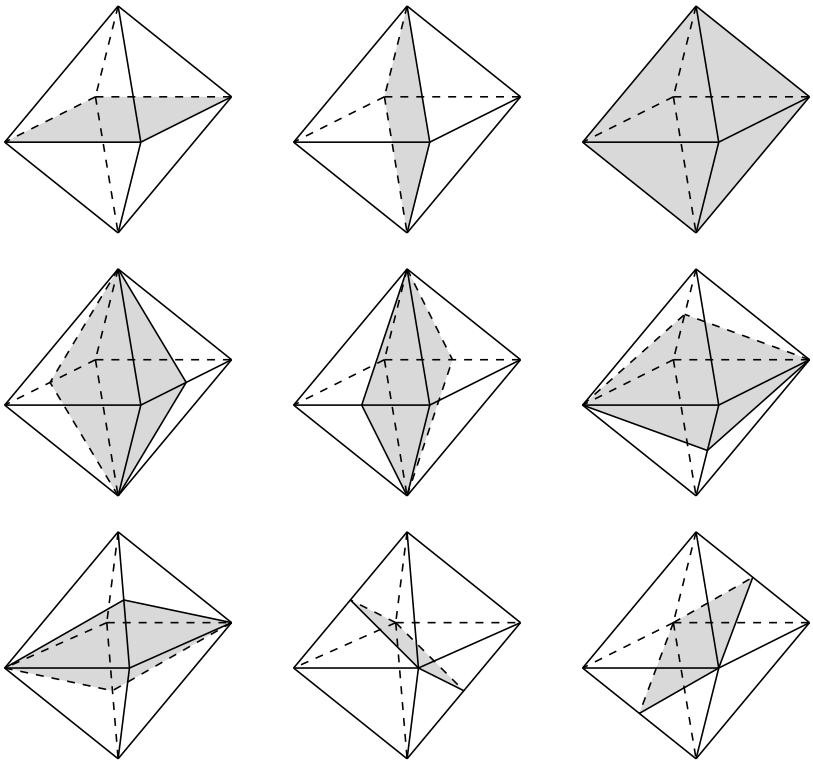
Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối bát diện đều, mỗi mặt là một tam giác đều và tại mỗi đỉnh có 4 tam giác đều nên tổng các góc tại 1 đỉnh bằng $240°$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 9. **D**. 8.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

Câu 73. Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

A. 3. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Có đúng 5 loại khối đa diện đều là: tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện (tám mặt đều), khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

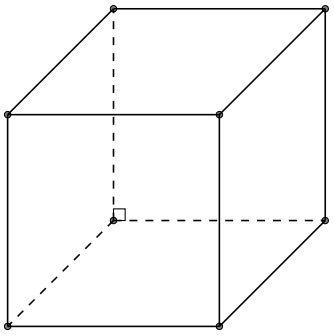
Chọn đáp án B □

Câu 74. Khối lập phương là khối đa diện đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{3;3\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Mỗi một mặt của khối lập phương có 4 cạnh. Mỗi một đỉnh của khối lập phương là đỉnh chung của đúng 3 mặt. Vậy khối lập phương là khối đa diện đều loại $\{4;3\}$.



Chọn đáp án C □

Câu 75. Hình lập phương thuộc loại khối đa diện nào?

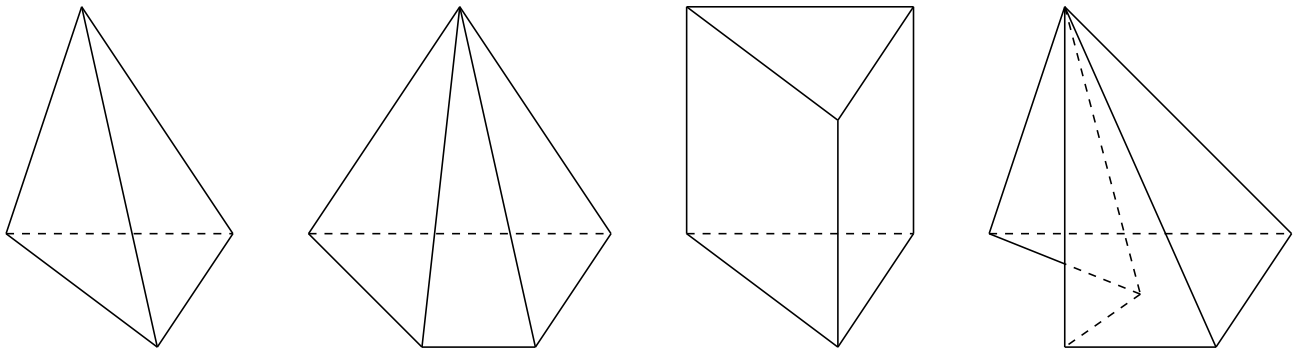
A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;4\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Lời giải.

Hình lập phương là đa diện đều có các mặt là tứ giác đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh nên nó thuộc loại $\{4;3\}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 76. Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?



Hình (I) Hình (II) Hình (III) Hình (IV)

A. Hình (IV). **B**. Hình (III). **C**. Hình (II). **D**. Hình (I).

Lời giải.

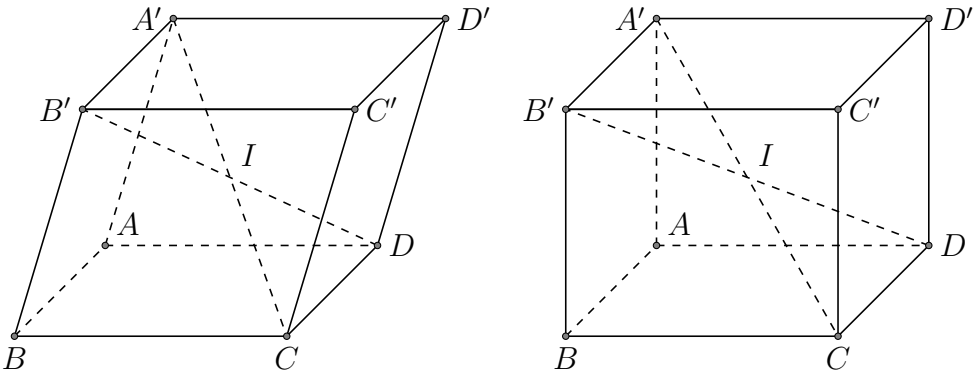
Hình (IV) không phải đa diện lồi vì không thỏa định nghĩa: Khối đa diện H là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối 2 điểm bất kì của H luôn thuộc H.

Chọn đáp án A ☐

Câu 77. Hình nào sau đây **không** có tâm đối xứng?

A. Đường thẳng. **B**. Tam giác đều. **C**. Hình hộp xiên. **D**. Hình lập phương.

Lời giải.



- ☑ Tâm đối xứng của đường thẳng là một điểm bất kì trên đường thẳng đó.
- ☑ Tam giác đều không có tâm đối xứng.
- ☑ Hình hộp xiên có tâm đối xứng là tâm của hình hộp.
- ☑ Hình lập phương có tâm đối xứng là tâm của hình lập phương.

Chọn đáp án B ☐

Câu 78. Số mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là

A. 6. **B**. 9. **C**. 12. **D**. 4.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng chứa một cạnh và đi qua trung điểm cạnh đối diện.

Chọn đáp án A ☐

Câu 79. Khối đa diện đều loại $(3,4)$ có bao nhiêu cạnh?

A. 20. **B**. 6. **C**. 30. **D**. 12.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $(3,4)$ là bát diện đều và có số cạnh bằng 12.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều cả 5 điểm S, A, B, C, D?

A. 5. **B**. 11. **C**. 9. **D**. 3.

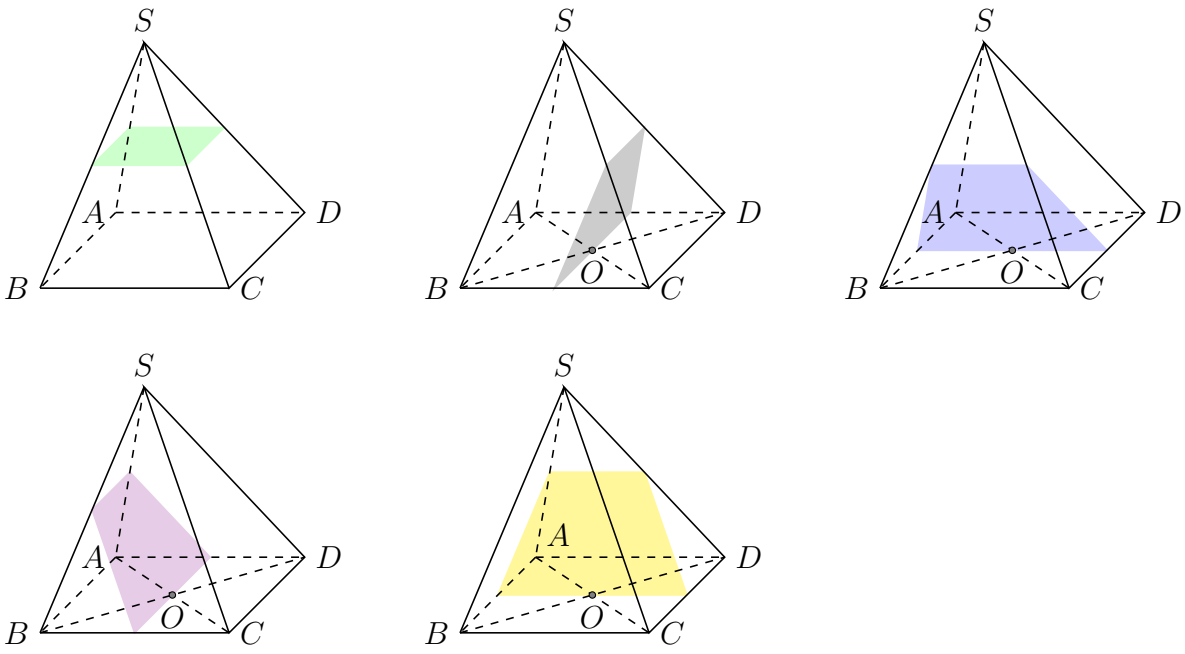
Lời giải.

Có 5 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán:

① Mặt phẳng qua trung điểm của AC và BD đồng thời song song với (SAD) hoặc (SBC).

② Tương tự có 2 mặt phẳng qua trung điểm của AD và BC đồng thời song song với (SAC) hoặc (SBD).

③ Mặt phẳng đi qua trung điểm của SA, SB, SC, SD.



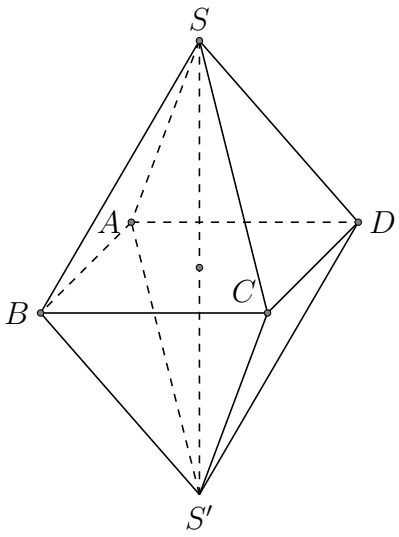
Chọn đáp án A □

Câu 81. Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 8. **C**. 4. **D**. 9.

Lời giải.

Gọi bát diện đều là $SABCDS'$ có S và S' đối xứng qua tâm của hình vuông $ABCD$.



① Từ S kẻ được 4 mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng chứa hai đường thẳng SA, SC; mặt phẳng chứa SB, SD; mặt phẳng chứa hai trung tuyến kẻ từ S xuống AD, BC; mặt phẳng chứa hai trung tuyến kẻ từ S xuống AB, CD

② Tương tự, từ B kẻ được 4 mặt phẳng trùng với 4 mặt phẳng từ D, nhưng có một mặt phẳng trùng với một mặt phẳng chứa S và S' là $SBS'D$. Như vậy từ B có thêm 3 mặt phẳng đối xứng

③ Từ C ta cũng có 4 mặt, nhưng có 2 mặt trùng với 2 trong 7 mặt phẳng nói trên là $SCS'A$ và $ABCD$. Vậy từ C có thêm 2 mặt phẳng đối xứng.

Vậy số mặt phẳng đối xứng của bát diện là $4+3+2=9$.

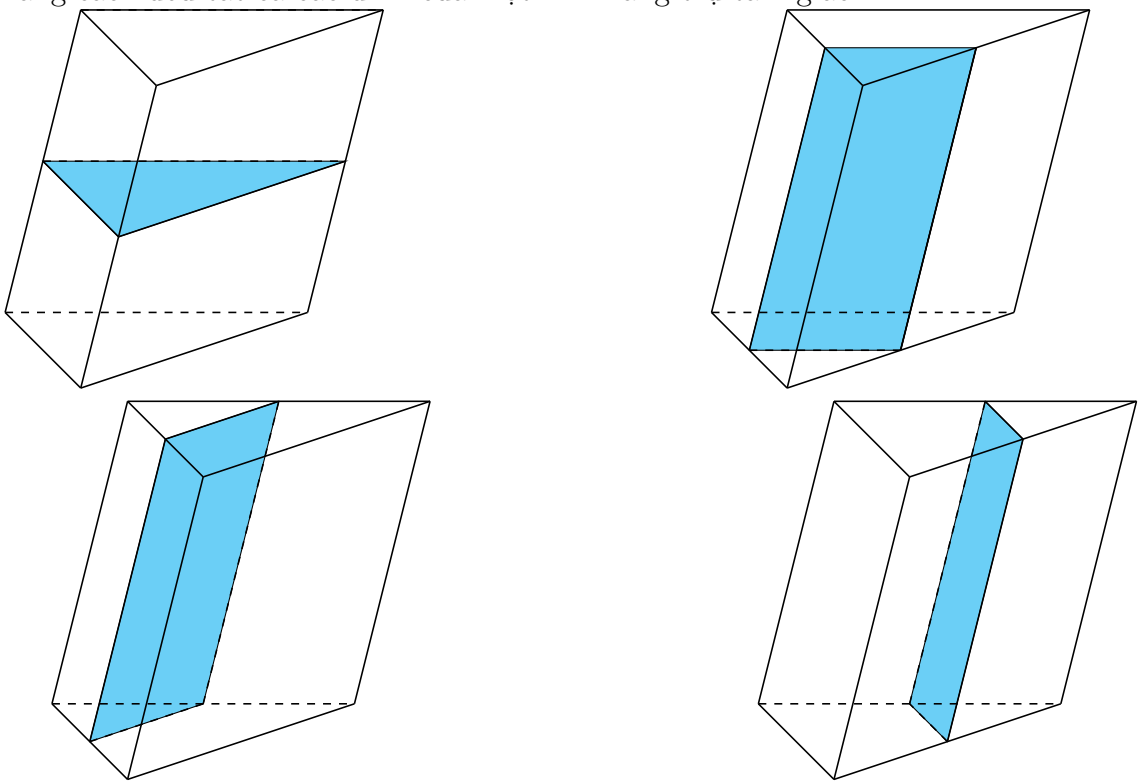
Chọn đáp án D □

Câu 82. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Có 4 mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác.

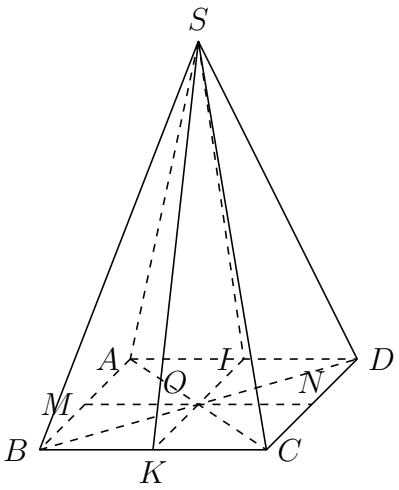


Chọn đáp án D □

Câu 83. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng. **B**. 2 mặt phẳng. **C**. 5 mặt phẳng. **D**. 4 mặt phẳng.

Lời giải.



Các mặt phẳng đối xứng là $(SAC), (SBD), (SIK), (SMN)$.

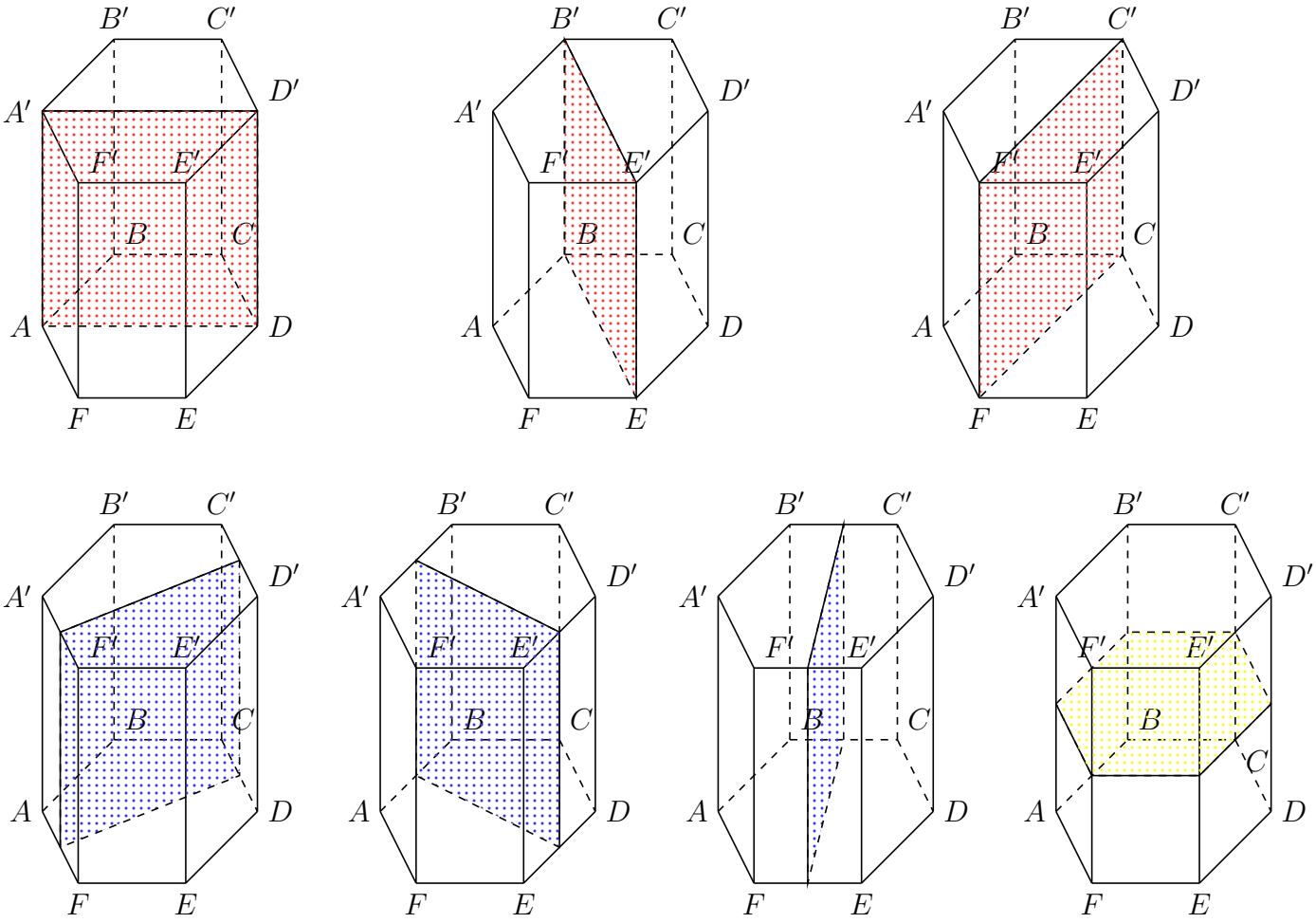
Chọn đáp án D □

Câu 84. Hình lăng trụ lục giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 7.

Lời giải.

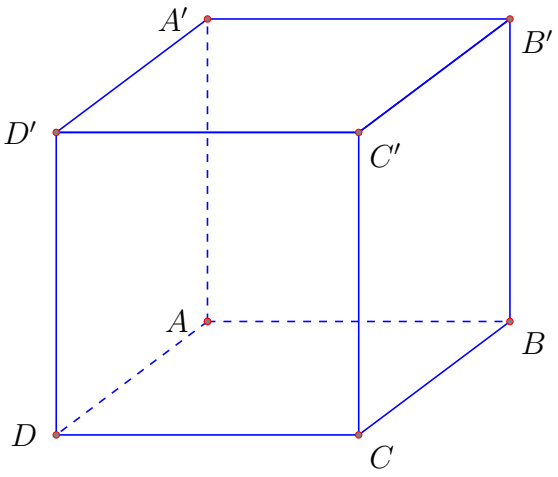
Có tất cả 7 mặt phẳng đối xứng của lăng trụ lục giác đều.



Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Tính chiều cao h của hình hộp đã cho.

A. $h = 2a$. **B**. $h = a$. **C**. $h = 3a$. **D**. $h = 4a$.



Lời giải.

Do đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên diện tích đáy là: $B = 2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

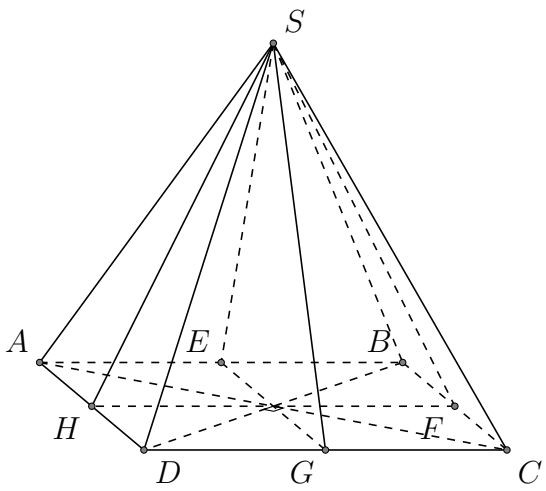
Thể tích của hình hộp là $V = B \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{B} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 2a$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng là $(SAC), (SBD), (SGE), (SHF)$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Có bao nhiêu loại khối đa diện đều có mỗi mặt là một tam giác đều?

A. 5. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

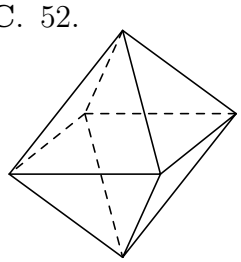
Có ba loại khối đa diện đều mà mỗi mặt là một tam giác đều, đó là loại $\{3;3\}$ (khối tứ diện đều), loại $\{3;4\}$ (khối bát diện đều hay khối tám mặt đều), loại $\{3;5\}$ (khối hai mươi mặt đều).

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của một hình bát diện đều là

A. 24. **B**. 26. **C**. 52. **D**. 20.

Lời giải.



Số cạnh: 12, số đỉnh: 6, số mặt: 8.

Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

B. Khối chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau là khối đa diện đều.

C. Khối chóp tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau là khối đa diện đều.

D. Khối lập phương là khối đa diện đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều có các mặt có cùng số cạnh. Chóp tứ giác có mặt đáy và mặt bên không cùng số cạnh, nên không phải là khối đa diện đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 12 mặt. **B**. 6 mặt. **C**. 10 mặt. **D**. 8 mặt.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có 12 mặt đều.

Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 9. **C**. 8. **D**. 12.

Lời giải.

Hình lập phương là hình có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

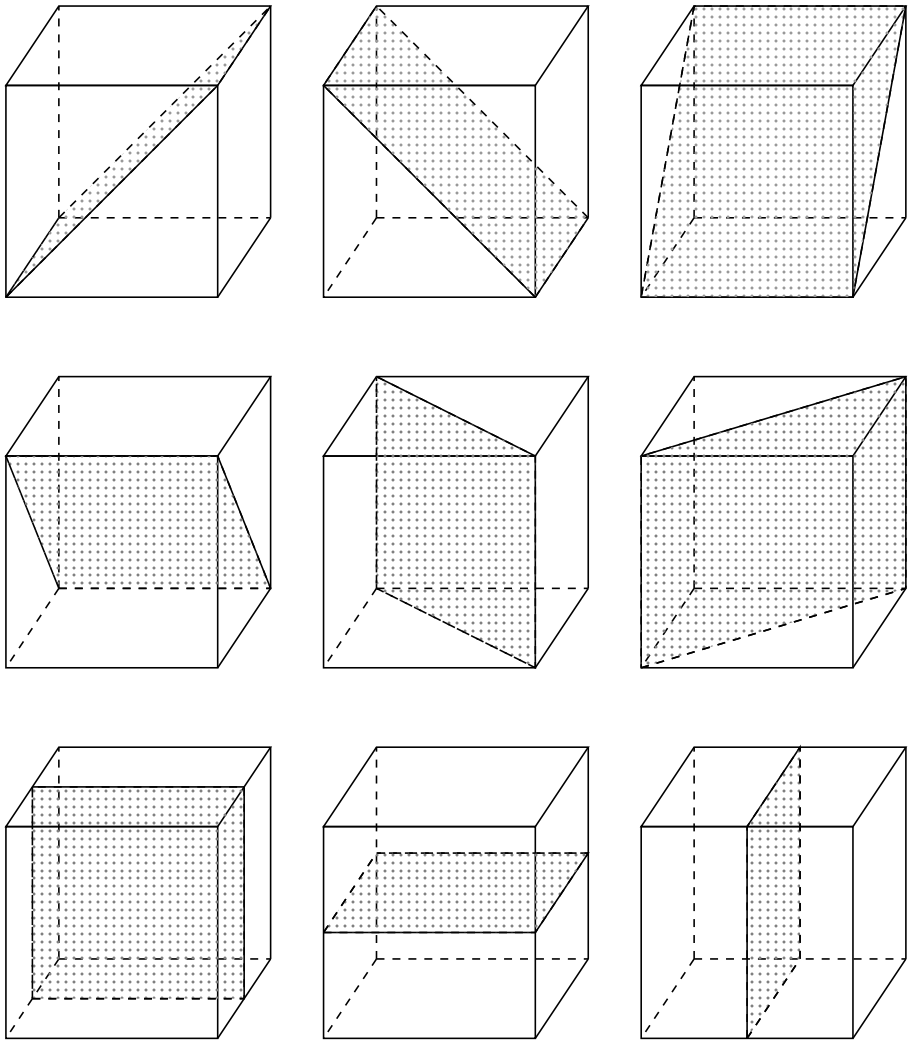
Câu 92. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. 8. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

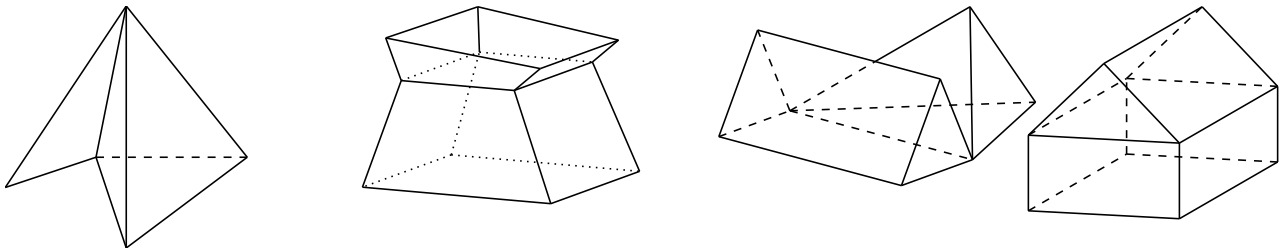
Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là 9 gồm:

- 3 mặt phẳng đi qua trung điểm của các cạnh đối diện nhau.
- 6 mặt chéo.



Chọn đáp án B □

Câu 93. Trong các hình dưới đây, có bao nhiêu hình là đa diện lồi?

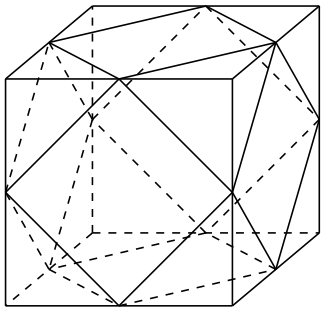


A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Khối đa diện lồi là hình 4.

Chọn đáp án C □

Câu 94. 

A. 12 đỉnh, 24 cạnh. **B**. 10 đỉnh, 24 cạnh. **C**. 10 đỉnh, 48 cạnh. **D**. 12 đỉnh, 20 cạnh.

Lời giải.

☑ Mỗi đỉnh của hình đa diện đó là trung điểm của một cạnh của hình lập phương nên khối đa diện có 12 đỉnh.

☑ Mỗi một hình chóp ở góc bị cắt đi sinh ra 3 cạnh của khối đa diện nên có $3 \times 8 = 24$ cạnh.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đều đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$. **B**. $S = \sqrt{3}a^2$. **C**. $S = 2\sqrt{3}a^2$. **D**. $S = 8a^2$.

Lời giải.

Tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đều bằng $8 \cdot S_{1 \text{ mặt}} = 8 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = 2a^2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho khối đa diện đều (H) loại $\{4;3\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (H) có 3 đỉnh và 4 mặt. **B**. (H) có 6 đỉnh và 6 mặt.

C. (H) có 4 đỉnh và 4 mặt. **D**. (H) có 8 đỉnh và 6 mặt.

Lời giải.

Khối đa diện đều (H) loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, có 8 đỉnh và 6 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Hỏi hình mười hai mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

A. Mười hai. **B**. Mười sáu. **C**. Hai mươi. **D**. Ba mươi.

Lời giải.

Hình mười hai mặt đều có hai mươi đỉnh.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Trong một khối đa diện lồi với các mặt là các tam giác, nếu gọi C là số cạnh và M là số mặt thì hệ thức nào sau đây đúng?

A. $2M = 3C$. **B**. $3M = 2C$. **C**. $3M = 5C$. **D**. $2M = C$.

Lời giải.

Một khối đa diện lồi với có M mặt là các tam giác có 3 cạnh thì số tổng số cạnh của M mặt là $3M$. Mặt khác,mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt.

Vậy số cạnh của khối đa diện là $C = \dfrac{3M}{2} \Leftrightarrow 3M = 2C$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Khối bát diện đều là khối đa diện đều loại nào?

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;5\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều có các mặt là các tam giác đều (3 cạnh), mỗi đỉnh có 4 cạnh đi qua. Do đó khối bát diện đều là khối đa diện đều loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Hình trụ có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. Vô số. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Do các mặt phẳng đi qua trục của hình trụ và mặt phẳng vuông góc với trục của hình trụ tại trung điểm của trục đều là mặt phẳng đối xứng của hình trụ. Do đó hình trụ có vô số mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. D	5. B	6. C	7. D	8. B	9. C	10. C
11. C	12. D	13. A	14. C	15. B	16. D	17. A	18. C	19. A	20. A
21. B	22. A	23. C	24. C	25. D	26. D	27. A	28. D	29. B	30. B
31. C	32. B	33. A	34. D	35. D	36. A	37. C	38. A	39. D	40. C
41. D	42. D	43. C	44. D	45. C	46. B	47. C	48. B	49. A	50. A
51. A	52. C	53. C	54. C	55. B	56. C	57. A	58. C	59. B	60. C
61. D	62. A	63. A	64. D	65. C	66. B	67. D	68. A	69. B	70. C
71. B	72. C	73. B	74. C	75. C	76. A	77. B	78. A	79. D	80. A
81. D	82. D	83. D	84. D	85. A	86. C	87. D	88. B	89. C	90. A
91. B	92. B	93. C	94. A	95. C	96. D	97. C	98. B	99. D	100. A

E MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

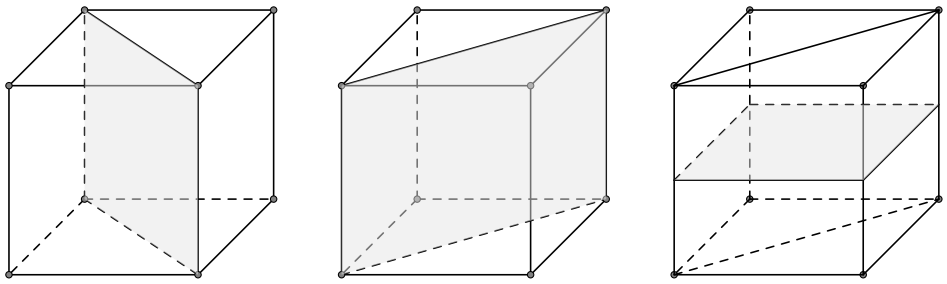
A. 1. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng lý thuyết khối đa diện để là bài toán.

Cách giải:



Hình đã cho có 3 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hai khối lập phương lần lượt có cạnh là 4 cm và 8 cm là hai khối đa diện đồng dạng.

B. Khối chóp tam giác đều là khối chóp có đáy là tam giác đều.

C. Hai khối tứ diện đều có diện tích mỗi mặt là 3 m^2 và 12 m^2 là hai khối đa diện đều.

D. Khối lăng trụ tứ giác đều và khối hộp chữ nhật là hai khối đa diện đồng dạng.

Lời giải.

Khối lăng trụ tứ giác đều có đáy là hình vuông nên không đồng dạng với khối hộp chữ nhật.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trung điểm các cạnh của hình tứ diện đều là đỉnh của hình

A. Hình lập phương. **B**. Hình tứ diện đều.

C. Hình lăng trụ tam giác. **D**. Hình bát diện đều.

Lời giải.

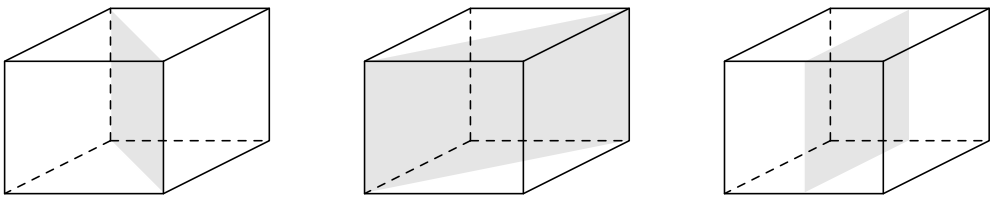
Chọn đáp án D □

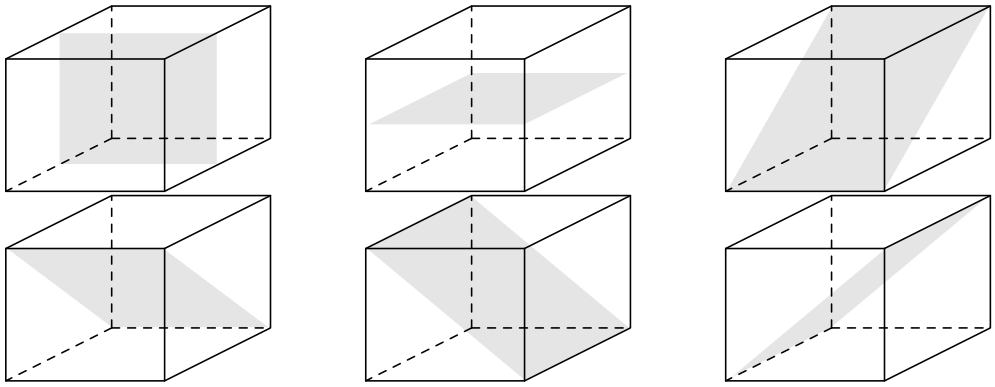
Câu 4. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. 3. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.





Chọn đáp án D □

Câu 5. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là

A. 10. **B**. 12. **C**. 14. **D**. 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là 12.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều?

A. 7. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Có 5 khối đa diện đều là khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

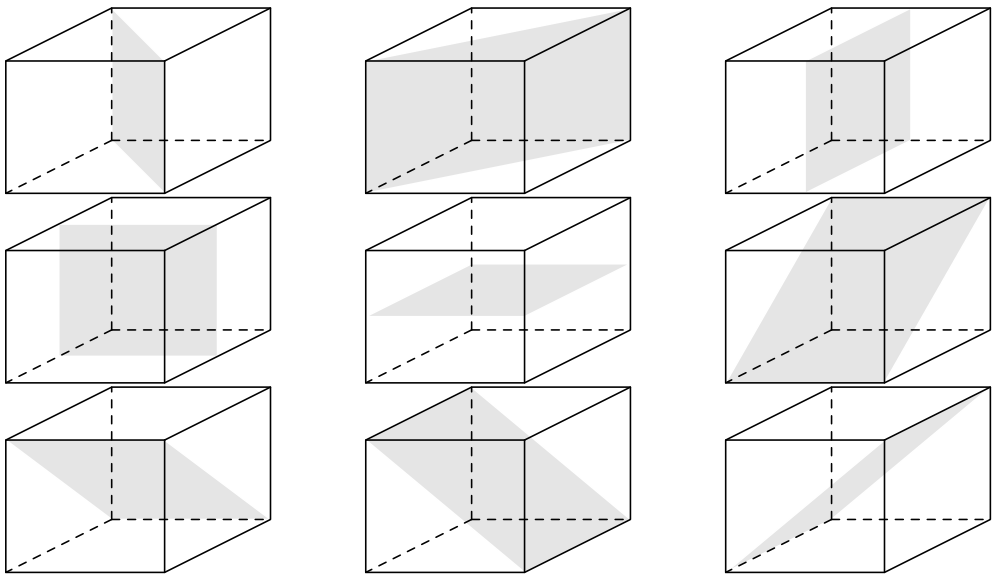
Chọn đáp án C □

Câu 7. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng.



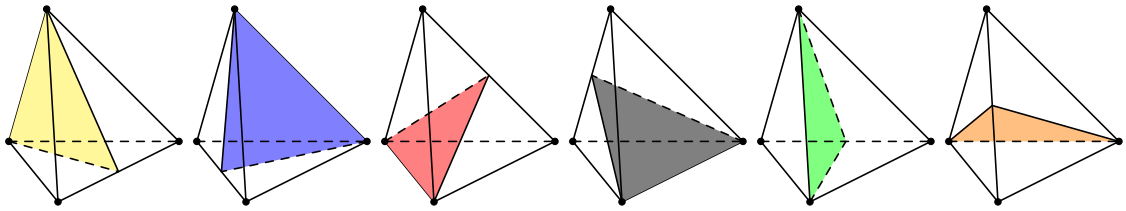
Chọn đáp án D □

Câu 8. Khối tứ diện đều có mấy mặt đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Khối tứ diện đều có 6 mặt đối xứng.



Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau. Biết rằng ABC là tam giác cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Khi đó hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là

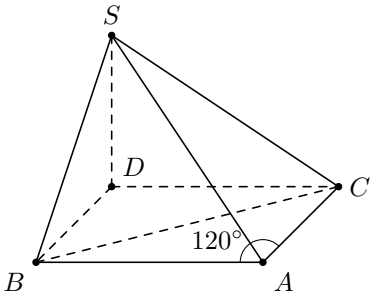
A. trung điểm cạnh BC. **B**. đỉnh A của $\triangle ABC$.

C. đỉnh D của hình thoi $ABDC$. **D**. tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Do tứ diện $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp D tam giác ABC.

Do tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 60^\circ$ (góc ở tâm). Do đó ADB và ADC là các tam giác đều. Vậy $ABDC$ là hình thoi.

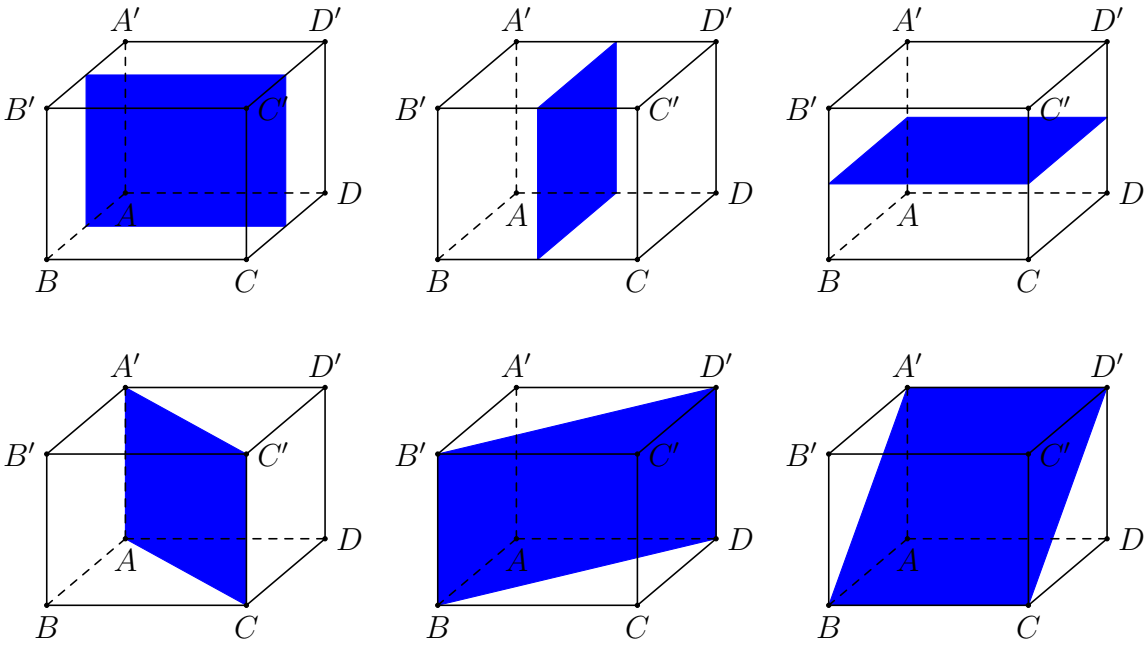


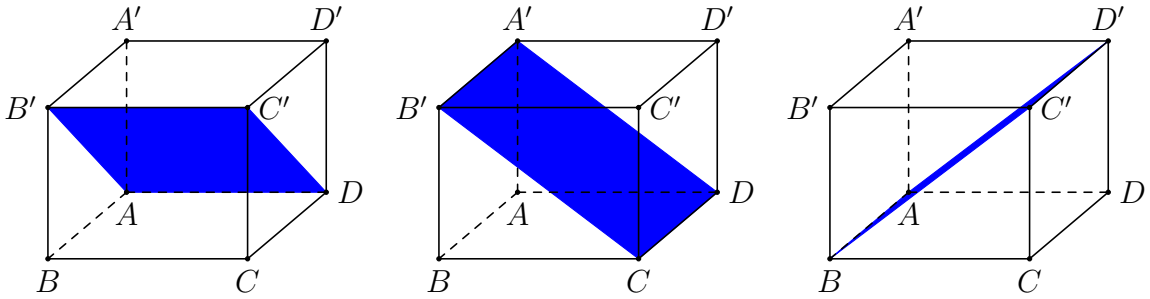
Chọn đáp án C □

Câu 10. Hình lập phương có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 8. **C**. 9. **D**. 7.

Lời giải.





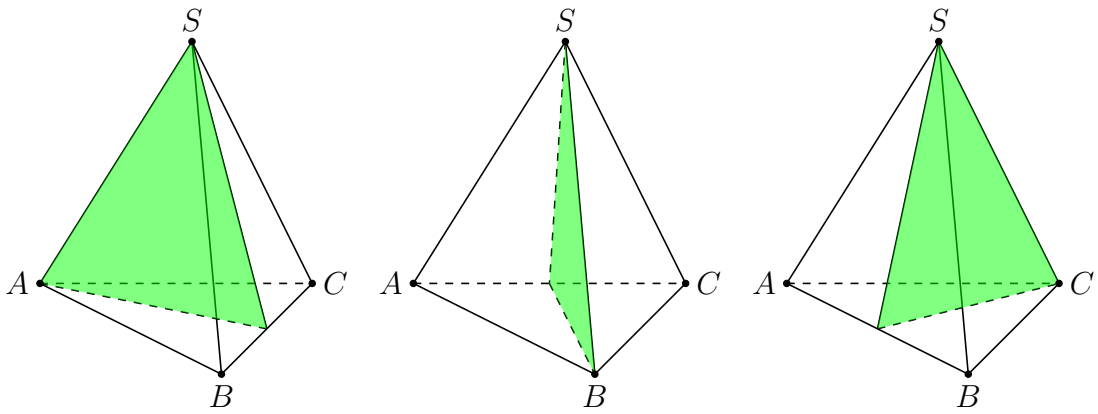
Chọn đáp án C □

Câu 11. Khối chóp tam giác đều có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

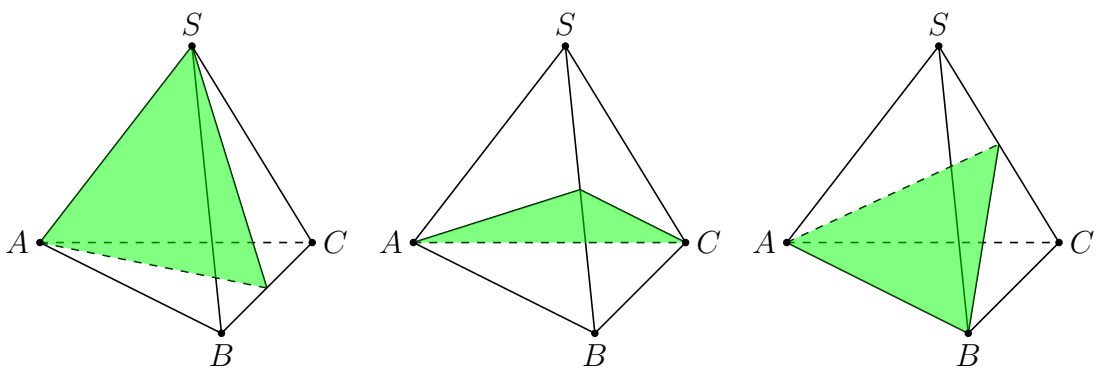
A. 3. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 4.

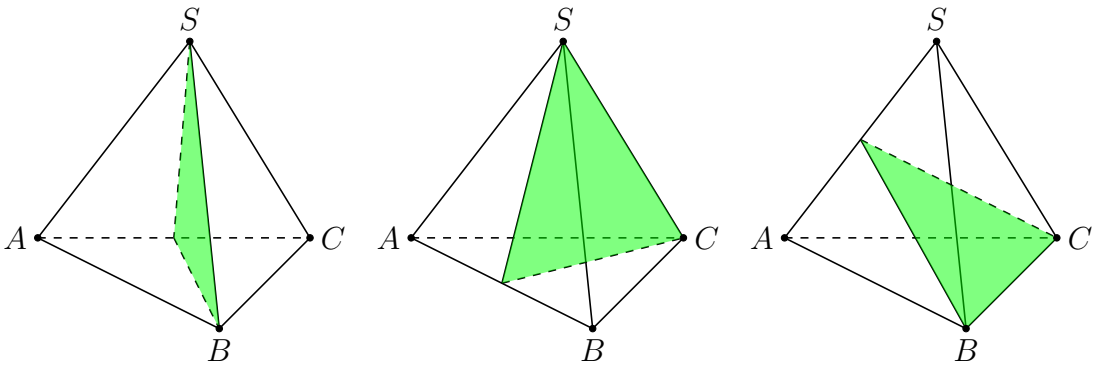
Lời giải.

Trường hợp 1: Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy không bằng cạnh bên. Khi đó khối chóp tam giác đều có tất cả 3 mặt phẳng đối xứng.



Trường hợp 2: Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng cạnh bên. Khi đó khối chóp tam giác đều trở thành khối tứ diện đều $SABC$. Khi đó khối chóp tam giác đều có tất cả 6 mặt phẳng đối xứng.





Vậy khối chóp tam giác đều có nhiều nhất 6 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. sáu. **B**. mười hai. **C**. ba. **D**. chín.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tổng số cạnh của khối lập phương và khối bát diện đều là

A. 24. **B**. 42. **C**. 36. **D**. 18.

Lời giải.

Hình lập phương có 12 cạnh, hình bát diện có 12 cạnh.

Chọn đáp án A □

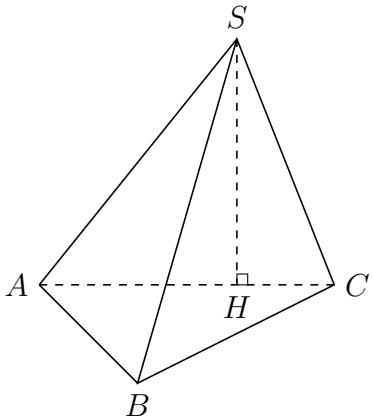
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy là điểm H nằm trên cạnh AC sao cho $AH = \dfrac{2}{3}AC$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $HI \perp BC \Rightarrow (\widehat{SBC};(ABC)) = \widehat{SIH} = 60°$;

$HI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \dfrac{a}{2}$. $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$



Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm số cạnh ít nhất của hình đa diện có 5 mặt

A. 9 cạnh. **B**. 8 cạnh. **C**. 7 cạnh. **D**. 6 cạnh.

Lời giải.

Hình đa diện có 5 mặt mà có số cạnh ít nhất là hình chóp tứ giác, suy ra số cạnh là 8.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho khối đa diện đều loại $\{4;3\}$, tên gọi của nó là

A. Chóp đều. **B**. Tứ diện đều. **C**. Bát diện đều. **D**. Lập phương.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, góc $\widehat{ACB} = 60^0$ và cạnh $BC = a$. Đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng ABC một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{a^3 3\sqrt{3}}{2}$. **D**. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy, biết $AC = 3a\sqrt{2}, SA = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 27a^3$. **B**. $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C**. $V = \dfrac{9a^3}{2}$. **D**. $V = \dfrac{27a^3}{2}$.

Câu 19. Số mặt phẳng đối xứng của khối chóp tam giác đều là

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng đi qua một cạnh bên và trung điểm cạnh đối diện với cạnh bên đó. Ta có 3 mặt phẳng như vậy.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Hình bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{3;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{5;3\}$.

Câu 21. Khối tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 8.

Câu 22. Khối bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 12. **B**. 14. **C**. 10. **D**. 16.

Câu 23. Khối lập phương thuộc loại khối đa diện đều nào?

A. $\{3;4\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Câu 24. Khối chóp đều $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là

A. Hình chữ nhật. **B**. Hình bình hành. **C**. Hình vuông. **D**. Hình thoi.

Câu 25. Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ thuộc loại nào?

A. Khối hai mươi mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối bát diện đều. **D**. Khối mười hai mặt đều.

Lời giải.

Khối bát diện đều loại $\{3;4\}$. Khối lập phương loại $\{4;3\}$. Khối hai mươi mặt đều loại $\{3;5\}$

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ biết $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{13}$.

A. 2. **B**. 3. **C**. $\dfrac{650}{6}$. **D**. 1.

Lời giải.

Đặt $SA=a, SB=b, SC=c$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b^2+c^2=10 \\ a^2+c^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=1, c=3$$

Vậy $V=\dfrac{1}{6}abc=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.BCD$ biết $AB=1$, $SA=2$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

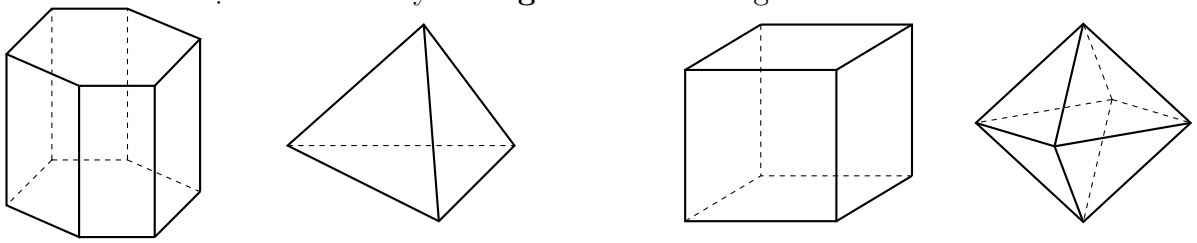
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=120^0$, $SA=SB=SC=2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{4}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{11}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$. **D.** $a^3\sqrt{11}$.

Câu 30. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



A. Lăng trụ lục giác đều. **B.** Tứ diện đều.

C. Hình lập phương. **D.** Bát diện đều.

Lời giải.

Hình tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?** Số đỉnh và số mặt của bất kì hình đa diện nào cũng

A. Lớn hơn hoặc bằng 5. **B.** Lớn hơn 5.

C. Lớn hơn hoặc bằng 4. **D.** Lớn hơn 4.

Câu 32. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt đối xứng?

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 33. Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a=4$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $16\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 45°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ theo a là

A. $a^3\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $a^3\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 35. Hình tứ diện đều có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36. Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh?

A. 6. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều là đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số mặt $M = 8$. Dùng hệ thức $4\cdot Đ = 3\cdot M \Rightarrow Đ = \dfrac{3\cdot 8}{4} = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Số cạnh của một khối đa diện đều loại $\{3,4\}$ là

A. 8. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 20.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3,4\}$ là khối bát diện nên có 12 cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a.

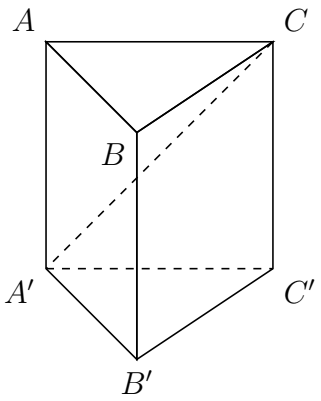
A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{CA'C'} = (A'C, (A'B'C')) = 60^\circ$.

Suy ra $CC' = A'C'\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy $V = CC'\cdot S_{A'B'C'} = a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Đa diện đều loại $\{5;3\}$ có tên gọi nào dưới đây?

A. Tứ diện đều. **B.** Lập phương. **C.** Hai mươi mặt đều. **D.** Mười hai mặt đều.

Lời giải.

Tên gọi là mười hai mặt đều.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải.

Có 6 mặt phẳng đối xứng: Các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm cạnh đối diện.

Chọn đáp án C ☐

Câu 41. Số mặt phẳng đối xứng của một hình bát diện đều bằng

A. 6. **B**. 8. **C**. 5. **D**. 9.

Lời giải.

Có 9 mặt phẳng đối xứng gồm : 3 mặt đi qua 4 đỉnh của bát diện, 6 mặt đi qua 2 đỉnh đối diện và 2 trung điểm của 2 cạnh đối diện.

Chọn đáp án D ☐

Câu 42. Tìm số mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều.

A. 4. **B**. 9. **C**. 3. **D**. 6.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện. Có 6 mặt phẳng như vậy.

Chọn đáp án D ☐

Câu 43. Trong các mặt của khối đa diện, số cạnh cùng một mặt tối thiểu là

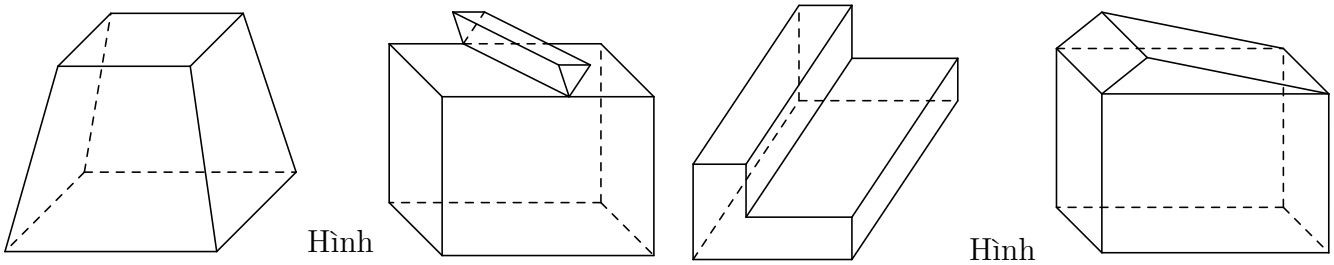
A. 5. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Mỗi mặt của một đa diện là một đa giác. Vậy số cạnh tối thiểu của một mặt là 3.

Chọn đáp án C ☐

Câu 44. Cho các khối hình sau:



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Theo định nghĩa đa diện lồi, chỉ có duy nhất hình 1 là đa diện lồi.

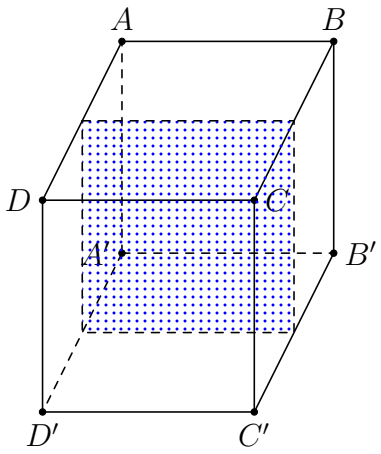
Chọn đáp án D ☐

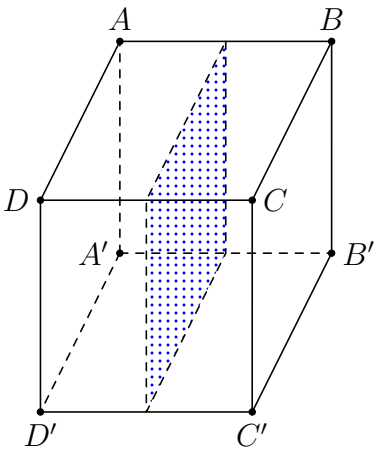
Câu 45. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

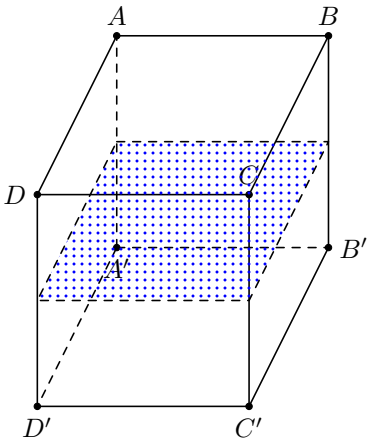
A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Có 3 mặt phẳng đối xứng.







Chọn đáp án C □

Câu 46. Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là

A. 10. **B**. 12. **C**. 14. **D**. 8.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số cạnh là 12.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều?

A. 7. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải.

Có 5 khối đa diện đều là khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

Chọn đáp án C □

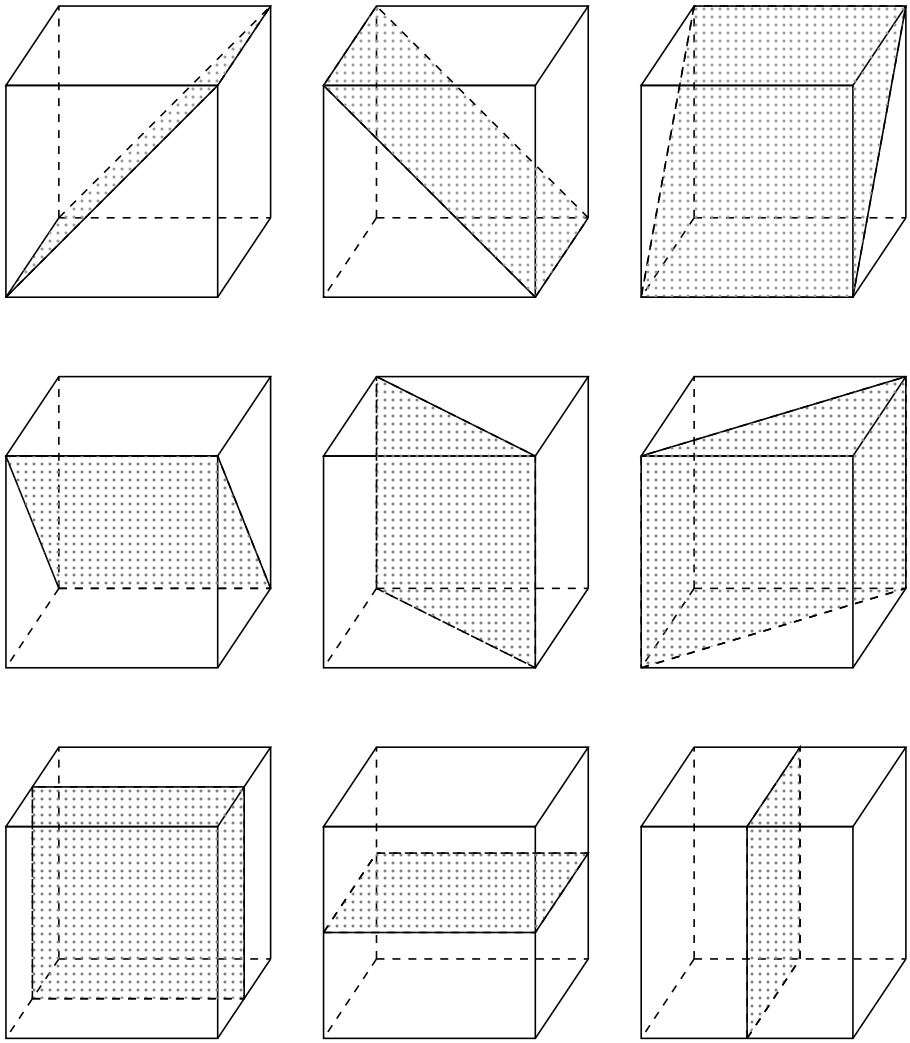
Câu 48. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 15. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 12.

Lời giải.

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng gồm:
- 3 mặt phẳng đi qua trung điểm của các cạnh đối diện nhau.
- 6 mặt chéo.

Chọn đáp án B □



Câu 49. Gọi x, y, z lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt của một khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng $T = x + y + 2z$ bằng

A. $T = 34$. **B**. $T = 18$. **C**. $T = 16$. **D**. $T = 32$.

Lời giải.

Khối đa diện loại $\{3;4\}$ có $x = 6, y = 12, z = 8$ suy ra $T = 34$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Tâm các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình

A. bát diện đều. **B**. lăng trụ tam giác đều.

C. chóp lục giác đều. **D**. chóp tứ giác đều.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi.

B. Khối hộp là khối đa diện lồi.

C. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

D. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Hình bát diện đều là hình đa diện đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{3;5\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{3;4\}$. **D**. $\{4;3\}$.

Lời giải.

Hình bát diện đều là hình đa diện đều loại $\{3;4\}$, mỗi mặt là một tam giác có 3 cạnh, và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt.

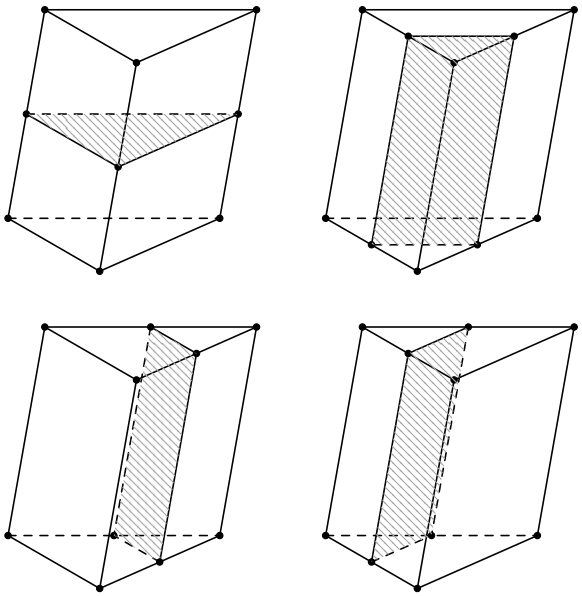
Chọn đáp án C □

Câu 53. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán là mặt phẳng qua các trung điểm của các cặp cạnh như hình vẽ



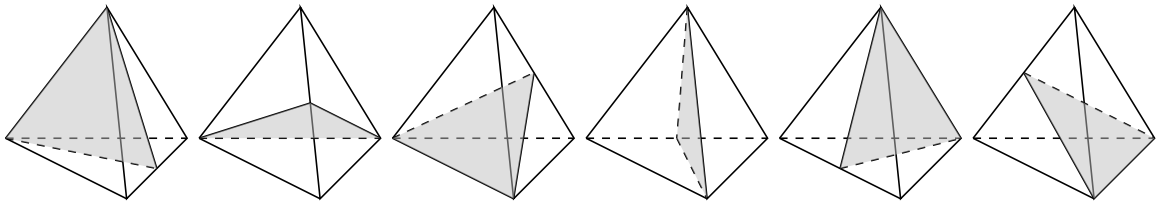
Chọn đáp án C □

Câu 54. Khối tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là mặt phẳng đi qua trung điểm của 1 cạnh và chứa cạnh đối diện. Có 6 mặt phẳng như vậy (Quan sát hình vẽ dưới).

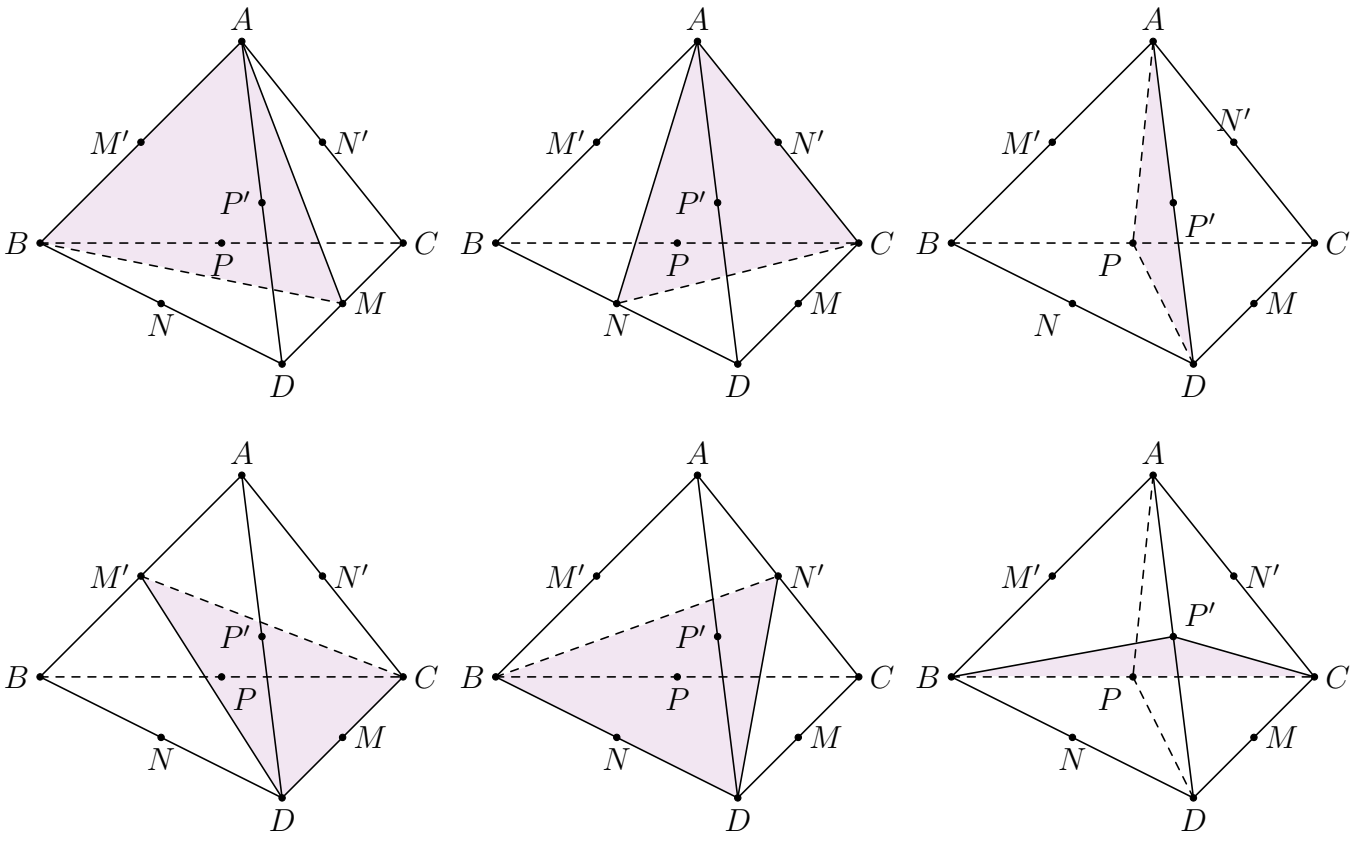


Chọn đáp án C □

Câu 55. Khối tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.



Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Khối bát diện đều có tổng số đỉnh và số cạnh lần lượt là 8 và 12.

B. Khối tứ diện đều có tổng số đỉnh và tổng số cạnh lần lượt là 4 và 8.

C. Khối mười hai mặt đều có tổng số đỉnh và tổng số cạnh lần lượt là 20 và 30.

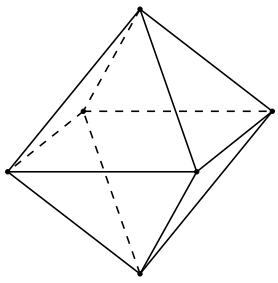
D. Khối lập phương có tổng số đỉnh và tổng số cạnh lần lượt là 6 và 12.

Câu 57. Mỗi đỉnh của một hình bát diện đều là đỉnh chung của bao nhiêu cạnh?

A. Bốn cạnh. **B**. Năm cạnh. **C**. Ba cạnh. **D**. Sáu cạnh.

Lời giải.

Vẽ bát diện đều, ta thấy mỗi đỉnh của một hình bát diện đều là đỉnh chung của bốn cạnh.



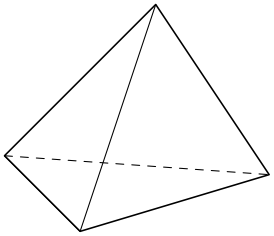
Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Tổng số mặt phẳng đối xứng của khối tứ diện đều bằng bao nhiêu?

A. 4. **B**. 1. **C**. 6. **D**. 8.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng chứa 1 cạnh và đi qua trung điểm của cạnh đối diện.



Chọn đáp án C □

Câu 59. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Dùng một mặt phẳng bất kỳ cắt một khối bát diện đều ta được khối tứ diện đều.

B. Mỗi mặt của một bát diện đều là một tam giác đều.

C. Mỗi đỉnh của hình bát diện đều là đỉnh chung của ba mặt.

D. Mỗi mặt của hình bát diện đều là tứ giác đều.

Lời giải.

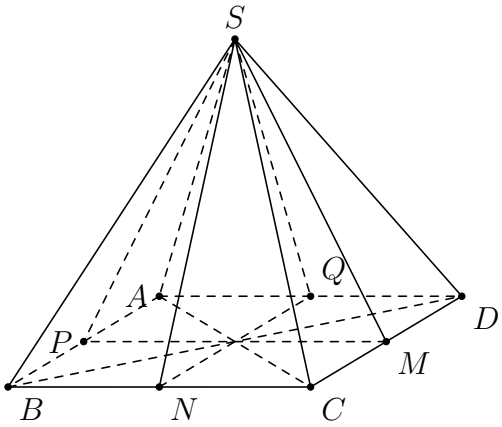
Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA = SB = SC = SD$ thì số mặt phẳng đối xứng của hình chóp đó là

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Hình chóp có 2 mặt phẳng đối xứng gồm: (SMP), (SNQ).



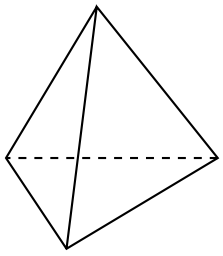
Chọn đáp án C □

Câu 61. Trong các khối đa diện sau, khối đa diện nào có số đỉnh và số mặt bằng nhau?

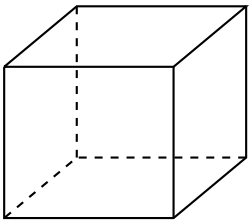
A. Khối lập phương. **B**. Khối bát diện đều.

C. Khối mười hai mặt đều. **D**. Khối tứ diện đều.

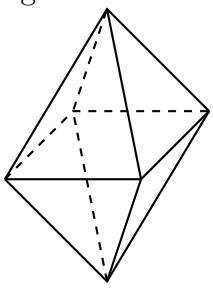
Lời giải.



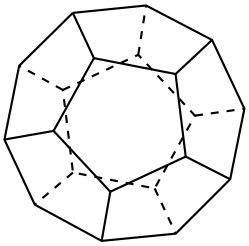
Khối tứ diện đều có 4 đỉnh và 4 mặt.



Khối lập phương có 8 đỉnh và 6 mặt.



Khối bát diện đều có 6 đỉnh và 8 mặt.



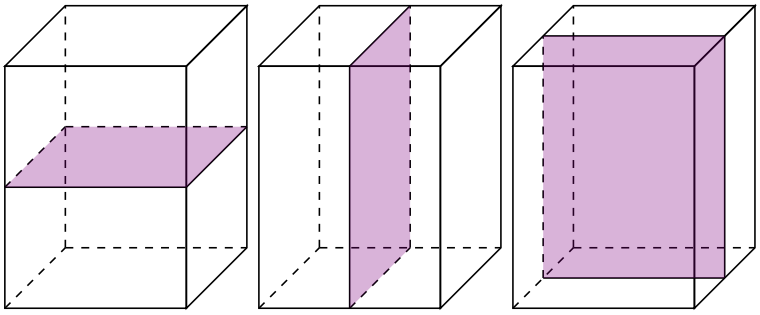
Khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh và 12 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng. **B**. 4 mặt phẳng. **C**. 1 mặt phẳng. **D**. 6 mặt phẳng.

Lời giải.



Chọn đáp án A □

Câu 63. Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a có thể tích là

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B**. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C**. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D**. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

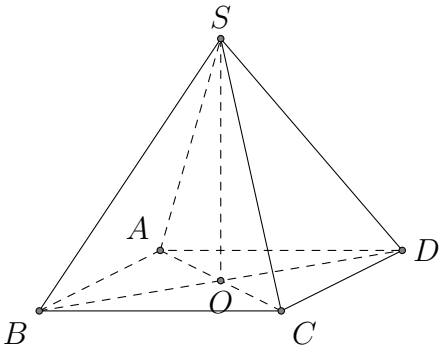
Lời giải.

Ta có $SO\perp(ABCD)$ với O là tâm của $ABCD$.

Xét tam giác SOD vuông tại O:

$$SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 64. Trong các khối đa diện đều sau, khối đa diện nào có số cạnh gấp đôi số đỉnh?

A. Khối hai mươi mặt đều. **B**. Khối lập phương.

C. Khối mười hai mặt đều. **D**. Khối bát diện đều.

Lời giải.

Khối bát diện đều có số đỉnh bằng 6, số cạnh bằng 12.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $6a^3$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = SC = BC = AC = a$. Hai mặt phẳng $(SAC), (BAC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 67. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBC đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp đó?

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

Câu 68. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Xét điểm P, Q, R lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, DB sao cho $PA = 2PB$, $QB = 3QC$, $RB = 4RD$. Tính thể tích khối đa diện $APRQCD$?

A. $\dfrac{4}{5}V$. **B.** $\dfrac{2}{3}V$. **C.** $\dfrac{3}{4}V$. **D.** $\dfrac{5}{6}V$.

Lời giải.

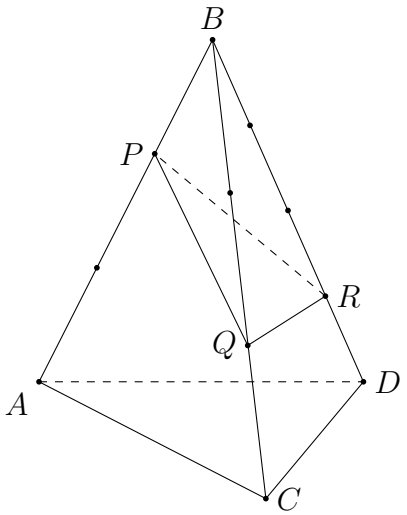
Ta có: $\begin{cases} PA = 2PB \Rightarrow \dfrac{BP}{BA} = \dfrac{1}{3} \\ QB = 3QC \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{3}{4} \\ RB = 4RD \Rightarrow \dfrac{BR}{BD} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Khi đó:
$\dfrac{V_{B.PQR}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{BP}{BA} \cdot \dfrac{BQ}{BC} \cdot \dfrac{BR}{BD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$

Suy ra: $V_{BPQR} = \dfrac{1}{5}V$.

Mặt khác: $V_{BPQR} + V_{APRQCD} = V$.

Vậy: $V_{APRQCD} = \dfrac{4}{5}V$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Hình chóp đều có các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

B. Hình chóp đều có các cạnh bằng nhau.

C. Một hình chóp có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy thì đó là hình chóp đều.

D. Hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

Lời giải.

Dựa vào tính chất, khẳng định: "Hình chóp đều có các cạnh bằng nhau " là khẳng định **sai**.

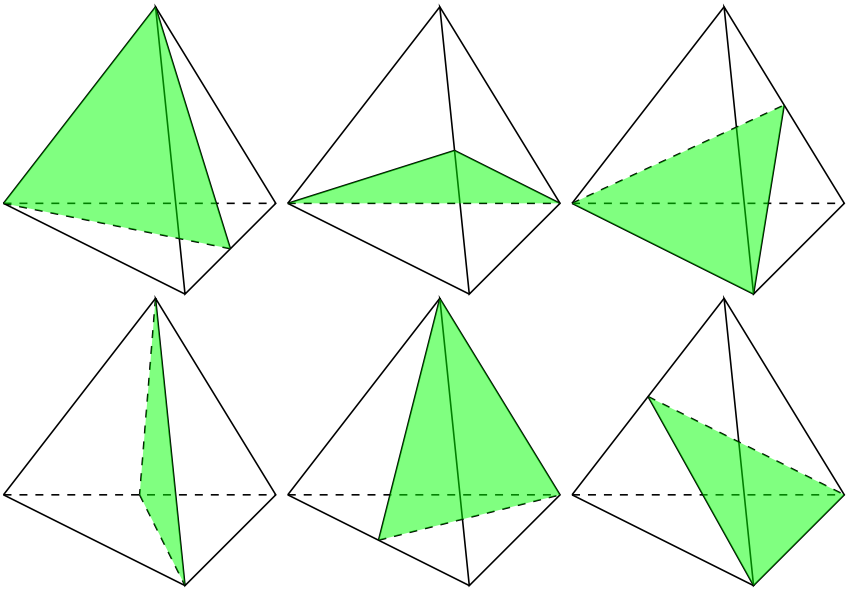
Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Khối tứ diện đều có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 5.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là mặt phẳng đi qua trung điểm của 1 cạnh và chứa cạnh đối diện. Có 6 mặt phẳng như vậy (Quan sát hình vẽ dưới).



Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh của khối đa diện bằng

A. $180°$. **B**. $240°$. **C**. $324°$. **D**. $360°$.

Lời giải.

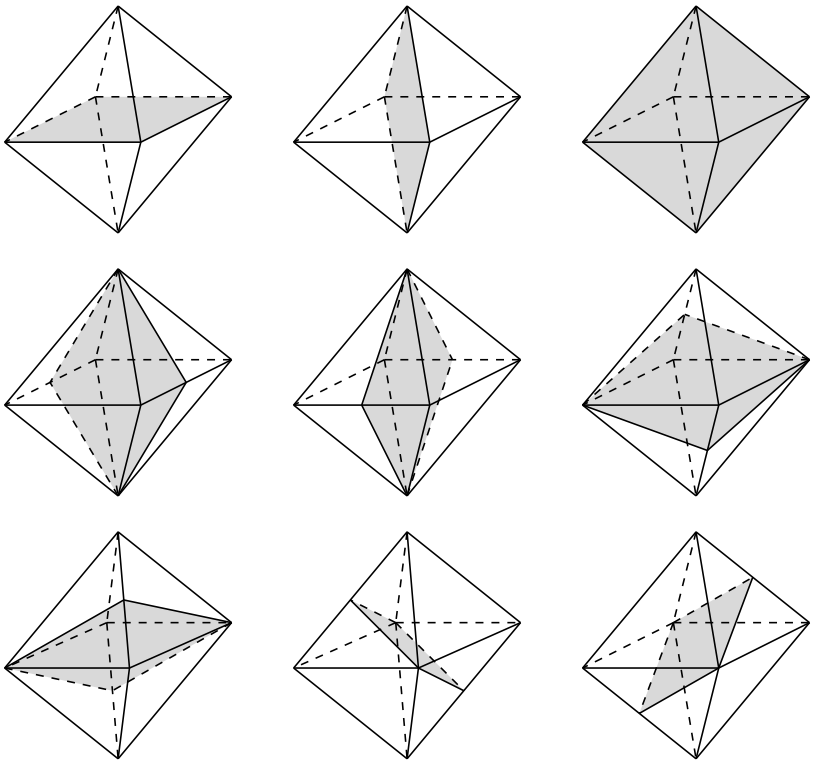
Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối bát diện đều, mỗi mặt là một tam giác đều và tại mỗi đỉnh có 4 tam giác đều nên tổng các góc tại 1 đỉnh bằng $240°$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B**. 6. **C**. 9. **D**. 8.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

Câu 73. Có bao nhiêu loại khối đa diện đều?

A. 3. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Có đúng 5 loại khối đa diện đều là: tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện (tám mặt đều), khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

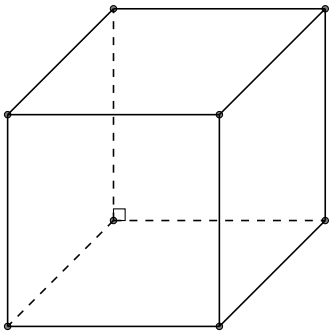
Chọn đáp án B □

Câu 74. Khối lập phương là khối đa diện đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{3;3\}$. **B**. $\{5;3\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Mỗi một mặt của khối lập phương có 4 cạnh. Mỗi một đỉnh của khối lập phương là đỉnh chung của đúng 3 mặt. Vậy khối lập phương là khối đa diện đều loại $\{4;3\}$.



Chọn đáp án C □

Câu 75. Hình lập phương thuộc loại khối đa diện nào?

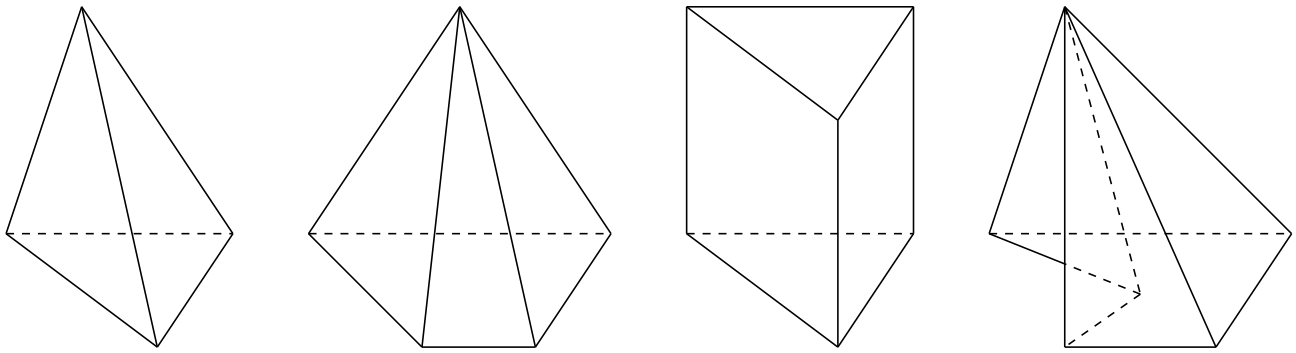
A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;4\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;5\}$.

Lời giải.

Hình lập phương là đa diện đều có các mặt là tứ giác đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh nên nó thuộc loại $\{4;3\}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 76. Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?



Hình (I) Hình (II) Hình (III) Hình (IV)

A. Hình (IV). **B**. Hình (III). **C**. Hình (II). **D**. Hình (I).

Lời giải.

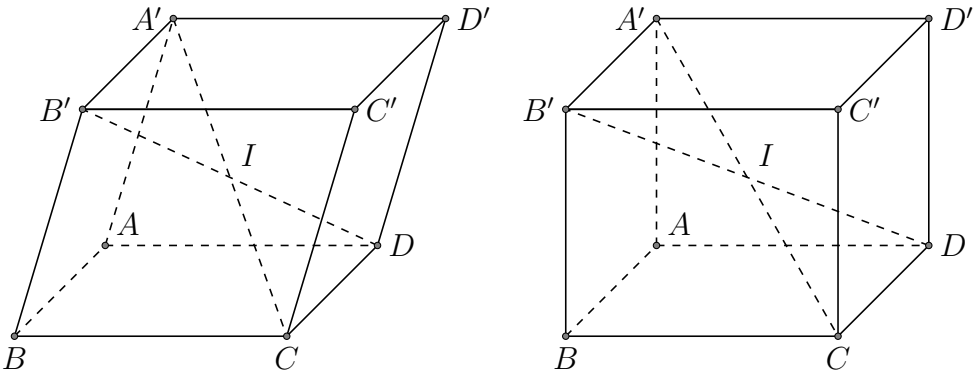
Hình (IV) không phải đa diện lồi vì không thỏa định nghĩa: Khối đa diện H là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối 2 điểm bất kì của H luôn thuộc H.

Chọn đáp án A ☐

Câu 77. Hình nào sau đây **không** có tâm đối xứng?

A. Đường thẳng. **B**. Tam giác đều. **C**. Hình hộp xiên. **D**. Hình lập phương.

Lời giải.



- ☑ Tâm đối xứng của đường thẳng là một điểm bất kì trên đường thẳng đó.
- ☑ Tam giác đều không có tâm đối xứng.
- ☑ Hình hộp xiên có tâm đối xứng là tâm của hình hộp.
- ☑ Hình lập phương có tâm đối xứng là tâm của hình lập phương.

Chọn đáp án B ☐

Câu 78. Số mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là

A. 6. **B**. 9. **C**. 12. **D**. 4.

Lời giải.

Mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là mặt phẳng chứa một cạnh và đi qua trung điểm cạnh đối diện.

Chọn đáp án A ☐

Câu 79. Khối đa diện đều loại $(3,4)$ có bao nhiêu cạnh?

A. 20. **B**. 6. **C**. 30. **D**. 12.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $(3,4)$ là bát diện đều và có số cạnh bằng 12.

Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều cả 5 điểm S, A, B, C, D?

A. 5. **B**. 11. **C**. 9. **D**. 3.

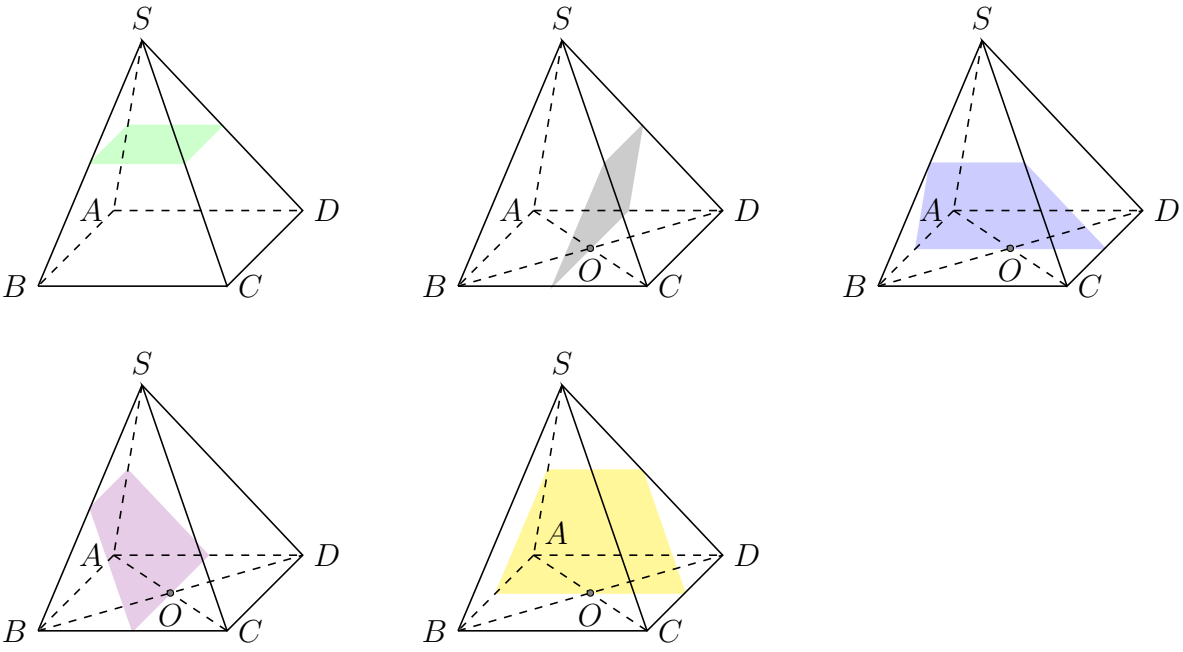
Lời giải.

Có 5 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán:

① Mặt phẳng qua trung điểm của AC và BD đồng thời song song với (SAD) hoặc (SBC).

② Tương tự có 2 mặt phẳng qua trung điểm của AD và BC đồng thời song song với (SAC) hoặc (SBD).

③ Mặt phẳng đi qua trung điểm của SA, SB, SC, SD.



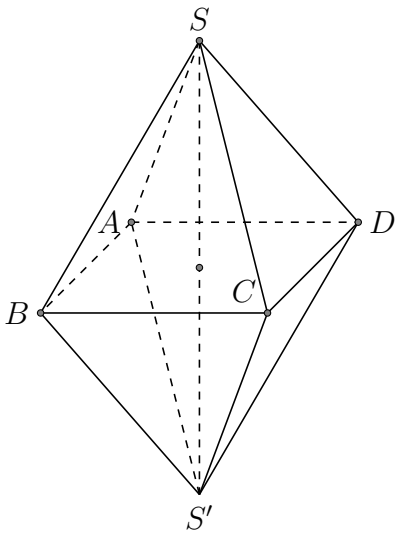
Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 8. **C**. 4. **D**. 9.

Lời giải.

Gọi bát diện đều là $SABCDS'$ có S và S' đối xứng qua tâm của hình vuông $ABCD$.



① Từ S kẻ được 4 mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng chứa hai đường thẳng SA, SC; mặt phẳng chứa SB, SD; mặt phẳng chứa hai trung tuyến kẻ từ S xuống AD, BC; mặt phẳng chứa hai trung tuyến kẻ từ S xuống AB, CD

② Tương tự, từ B kẻ được 4 mặt phẳng trùng với 4 mặt phẳng từ D, nhưng có một mặt phẳng trùng với một mặt phẳng chứa S và S' là $SBS'D$. Như vậy từ B có thêm 3 mặt phẳng đối xứng

③ Từ C ta cũng có 4 mặt, nhưng có 2 mặt trùng với 2 trong 7 mặt phẳng nói trên là $SCS'A$ và $ABCD$. Vậy từ C có thêm 2 mặt phẳng đối xứng.

Vậy số mặt phẳng đối xứng của bát diện là $4+3+2=9$.

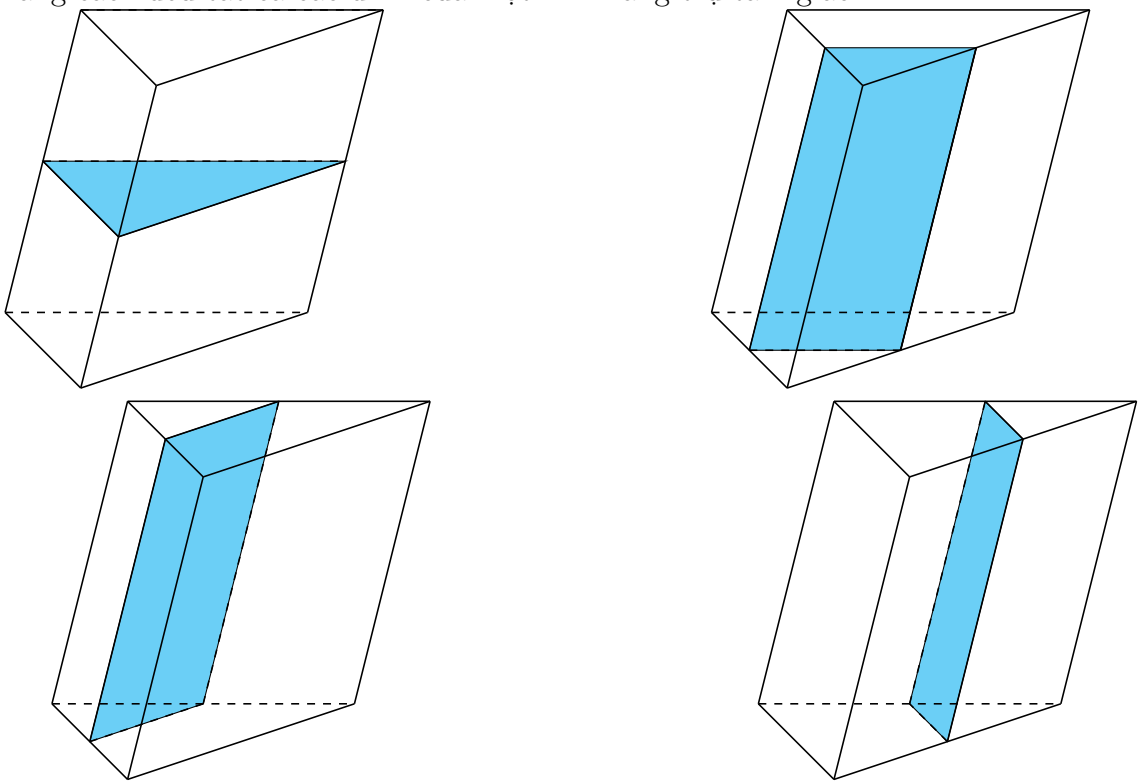
Chọn đáp án D □

Câu 82. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Có 4 mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác.

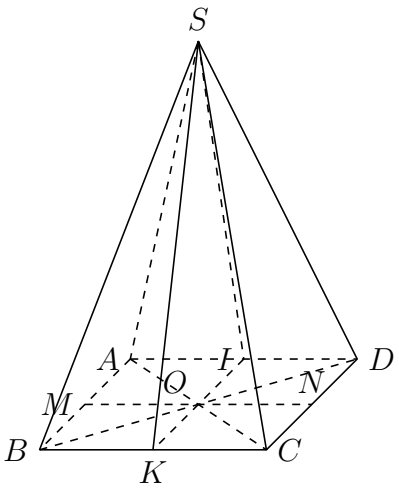


Chọn đáp án D □

Câu 83. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng. **B**. 2 mặt phẳng. **C**. 5 mặt phẳng. **D**. 4 mặt phẳng.

Lời giải.



Các mặt phẳng đối xứng là $(SAC), (SBD), (SIK), (SMN)$.

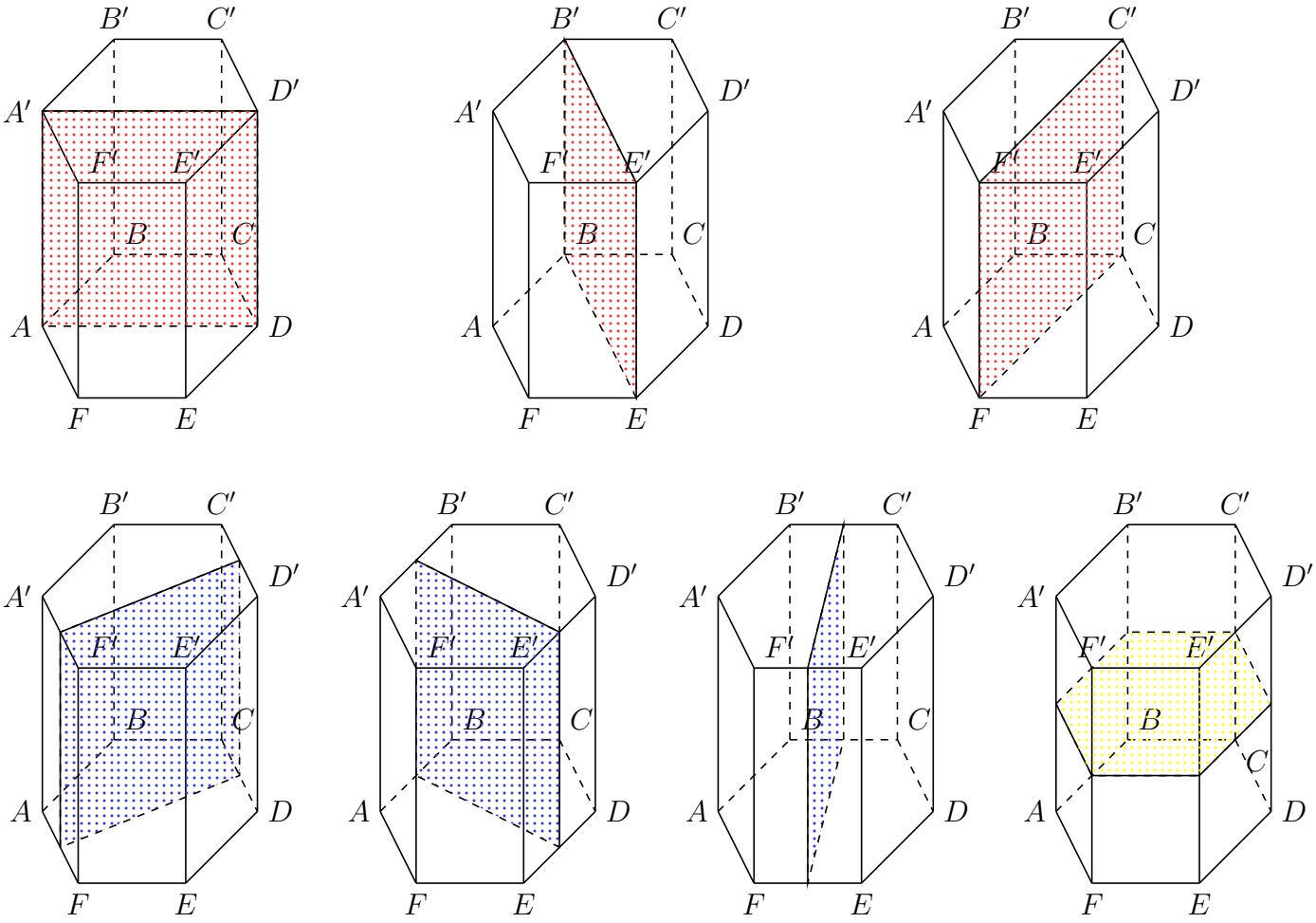
Chọn đáp án (D) □

Câu 84. Hình lăng trụ lục giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 7.

Lời giải.

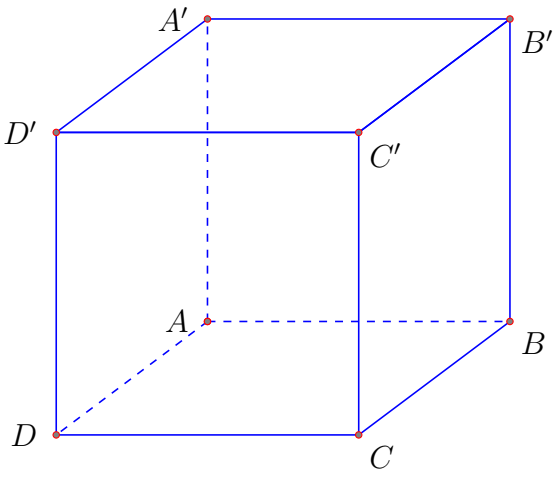
Có tất cả 7 mặt phẳng đối xứng của lăng trụ lục giác đều.



Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Tính chiều cao h của hình hộp đã cho.

A. $h = 2a$. **B**. $h = a$. **C**. $h = 3a$. **D**. $h = 4a$.



Lời giải.

Do đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên diện tích đáy là: $B = 2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

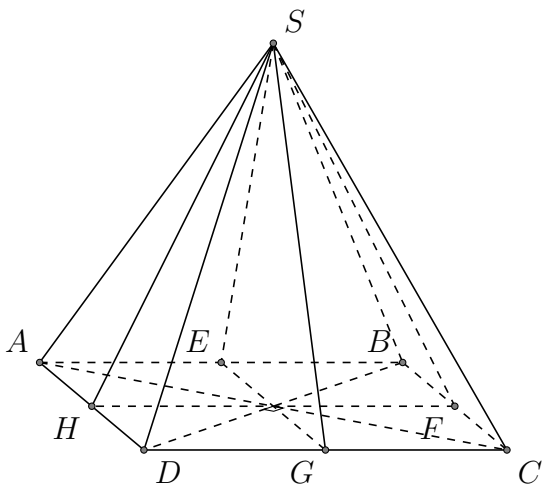
Thể tích của hình hộp là $V = B \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{B} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 2a$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng là $(SAC), (SBD), (SGE), (SHF)$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Có bao nhiêu loại khối đa diện đều có mỗi mặt là một tam giác đều?

A. 5. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

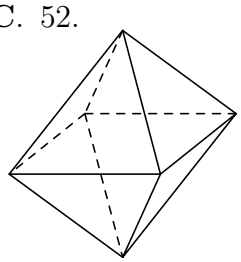
Có ba loại khối đa diện đều mà mỗi mặt là một tam giác đều, đó là loại $\{3;3\}$ (khối tứ diện đều), loại $\{3;4\}$ (khối bát diện đều hay khối tám mặt đều), loại $\{3;5\}$ (khối hai mươi mặt đều).

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của một hình bát diện đều là

A. 24. **B**. 26. **C**. 52. **D**. 20.

Lời giải.



Số cạnh: 12, số đỉnh: 6, số mặt: 8.

Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.

B. Khối chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau là khối đa diện đều.

C. Khối chóp tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau là khối đa diện đều.

D. Khối lập phương là khối đa diện đều.

Lời giải.

Khối đa diện đều có các mặt có cùng số cạnh. Chóp tứ giác có mặt đáy và mặt bên không cùng số cạnh, nên không phải là khối đa diện đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có bao nhiêu mặt?

A. 12 mặt. **B**. 6 mặt. **C**. 10 mặt. **D**. 8 mặt.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có 12 mặt đều.

Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B**. 9. **C**. 8. **D**. 12.

Lời giải.

Hình lập phương là hình có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

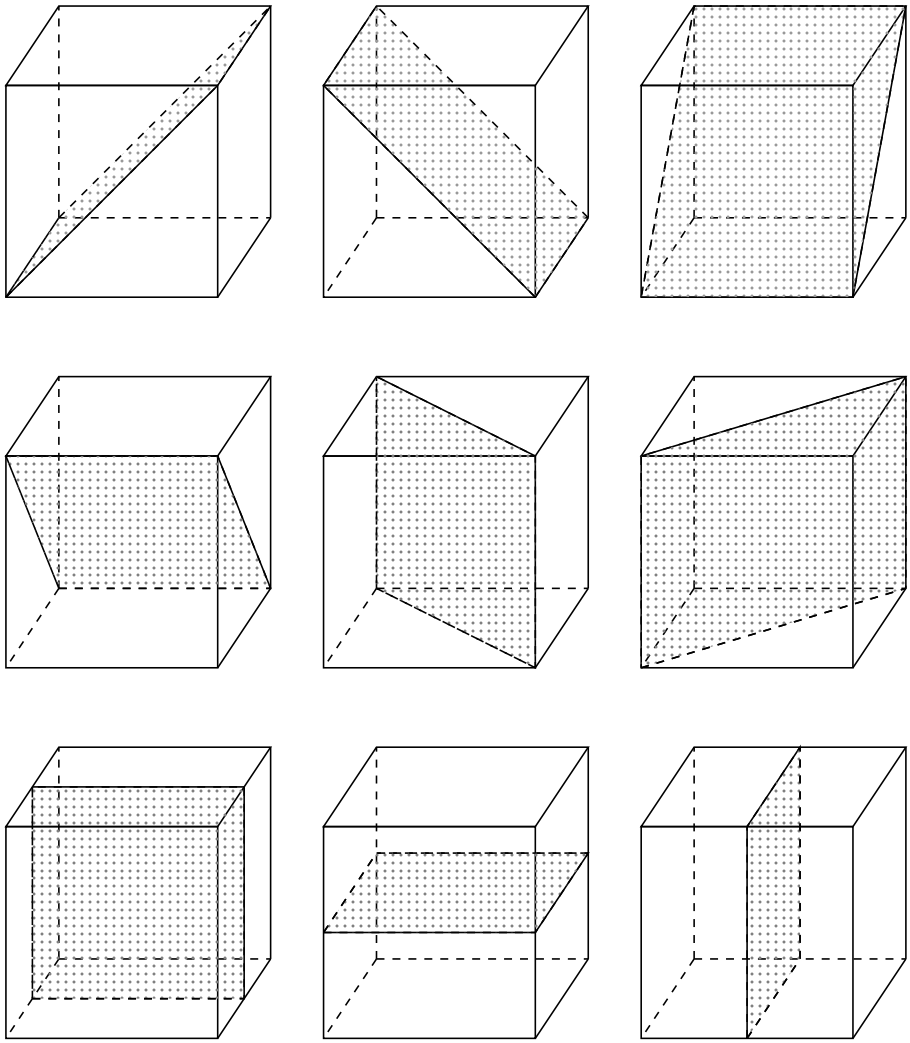
Câu 92. Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là

A. 8. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

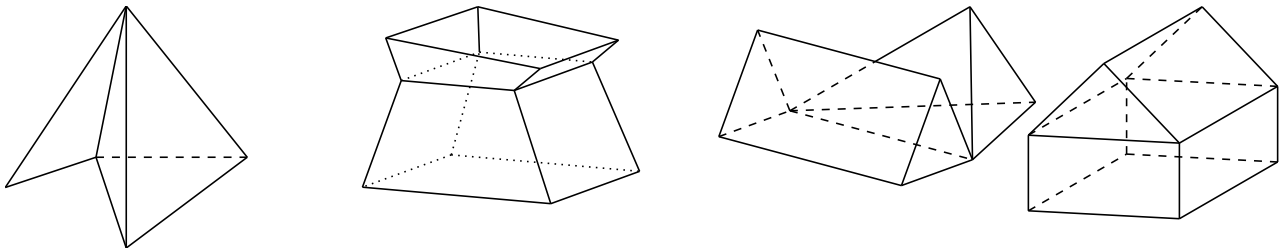
Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là 9 gồm:

- 3 mặt phẳng đi qua trung điểm của các cạnh đối diện nhau.
- 6 mặt chéo.



Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Trong các hình dưới đây, có bao nhiêu hình là đa diện lồi?

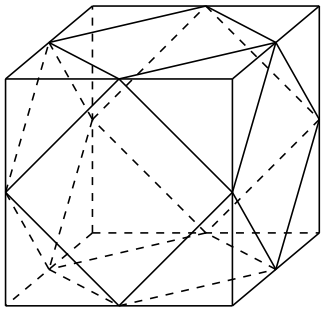


A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Khối đa diện lồi là hình 4.

Chọn đáp án (C) □

Câu 94. 

A. 12 đỉnh, 24 cạnh. **B**. 10 đỉnh, 24 cạnh. **C**. 10 đỉnh, 48 cạnh. **D**. 12 đỉnh, 20 cạnh.

Lời giải.

☑ Mỗi đỉnh của hình đa diện đó là trung điểm của một cạnh của hình lập phương nên khối đa diện có 12 đỉnh.

☑ Mỗi một hình chóp ở góc bị cắt đi sinh ra 3 cạnh của khối đa diện nên có $3 \times 8 = 24$ cạnh.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đều đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$. **B**. $S = \sqrt{3}a^2$. **C**. $S = 2\sqrt{3}a^2$. **D**. $S = 8a^2$.

Lời giải.

Tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đều bằng $8 \cdot S_{1 \text{ mặt}} = 8 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = 2a^2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho khối đa diện đều (H) loại $\{4;3\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (H) có 3 đỉnh và 4 mặt. **B**. (H) có 6 đỉnh và 6 mặt.

C. (H) có 4 đỉnh và 4 mặt. **D**. (H) có 8 đỉnh và 6 mặt.

Lời giải.

Khối đa diện đều (H) loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, có 8 đỉnh và 6 mặt.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Hỏi hình mười hai mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

A. Mười hai. **B**. Mười sáu. **C**. Hai mươi. **D**. Ba mươi.

Lời giải.

Hình mười hai mặt đều có hai mươi đỉnh.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Trong một khối đa diện lồi với các mặt là các tam giác, nếu gọi C là số cạnh và M là số mặt thì hệ thức nào sau đây đúng?

A. $2M = 3C$. **B**. $3M = 2C$. **C**. $3M = 5C$. **D**. $2M = C$.

Lời giải.

Một khối đa diện lồi với có M mặt là các tam giác có 3 cạnh thì số tổng số cạnh của M mặt là $3M$. Mặt khác,mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt.

Vậy số cạnh của khối đa diện là $C = \dfrac{3M}{2} \Leftrightarrow 3M = 2C$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Khối bát diện đều là khối đa diện đều loại nào?

A. $\{5;3\}$. **B**. $\{3;5\}$. **C**. $\{4;3\}$. **D**. $\{3;4\}$.

Lời giải.

Khối bát diện đều có các mặt là các tam giác đều (3 cạnh), mỗi đỉnh có 4 cạnh đi qua. Do đó khối bát diện đều là khối đa diện đều loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Hình trụ có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. Vô số. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Do các mặt phẳng đi qua trục của hình trụ và mặt phẳng vuông góc với trục của hình trụ tại trung điểm của trục đều là mặt phẳng đối xứng của hình trụ. Do đó hình trụ có vô số mặt phẳng đối xứng.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. D	5. B	6. C	7. D	8. B	9. C	10. C
11. C	12. D	13. A	14. C	15. B	16. D	17. A	18. C	19. A	20. A
21. B	22. A	23. C	24. C	25. D	26. D	27. A	28. D	29. B	30. B
31. C	32. B	33. A	34. D	35. D	36. A	37. C	38. A	39. D	40. C
41. D	42. D	43. C	44. D	45. C	46. B	47. C	48. B	49. A	50. A
51. A	52. C	53. C	54. C	55. B	56. C	57. A	58. C	59. B	60. C
61. D	62. A	63. A	64. D	65. C	66. B	67. D	68. A	69. B	70. C
71. B	72. C	73. B	74. C	75. C	76. A	77. B	78. A	79. D	80. A
81. D	82. D	83. D	84. D	85. A	86. C	87. D	88. B	89. C	90. A
91. B	92. B	93. C	94. A	95. C	96. D	97. C	98. B	99. D	100. A

BÀI 3 KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Khái niệm về thể tích khối đa diện

Định nghĩa 1. Người ta chứng minh được rằng: có thể đặt tương ứng cho mỗi khối đa diện (H) một số dương duy nhất $V_{(H)}$ thỏa mãn các tính chất sau:

① Nếu (H) là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V_{(H)} = 1$.

② Nếu hai khối đa diện (H_1) và (H_2) bằng nhau thì $V_{(H_1)} = V_{(H_2)}$.

③ Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) thì:

$$V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)}$$

Số dương $V_{(H)}$ nói trên được gọi là *thể tích* của khối đa diện (H). Số đó cũng được gọi là thể tích của hình đa diện giới hạn bởi khối đa diện (H).

Khối lập phương có cạnh bằng 1 được gọi là *khối lập phương đơn vị*.

Định lí 1. *Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó*

2 Thể tích khối lăng trụ

Định lí 2. *Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là*

$$V = B \cdot h$$

3 Thể tích khối chóp

Định lí 3. *Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là*

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

4 Tỷ số thể tích

Tính chất 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác S. Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

.

Một vài công thức tính diện tích đa giác thường gặp

Trong các trường hợp đơn giản, diện tích đáy của lăng trụ và chóp (B) ở trên là các diện tích của các hình đa giác đơn giản sau đây.

Diện tích tam giác

Đối với các tam giác thường ta sử dụng một trong các công thức tính diện tích sau đây:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

.

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp; r là bán kính đường tròn nội tiếp; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác ABC.

Tuy nhiên, trong các trường hợp đơn giản thì ta lại thường gặp các tam giác đặc biệt sau đây.

① Tam giác ABC vuông tại A: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC$.

② Tam giác ABC đều cạnh t: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{t^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích tứ giác

Các tứ giác đặc biệt mà ta thường gặp trong các bài toán:

① Hình vuông $ABCD$ cạnh t: $S_{ABCD} = t^2 = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$.

② Hình chữ nhật $ABCD$: $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

③ Hình thoi: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

④ Hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

⑤ Hình thang $ABCD$: $S_{ABCD} = \dfrac{(a+b) \cdot h}{2}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Thể tích khối chóp tam giác

Phương pháp giải. Công thức tính thể tích của khối chóp: $V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

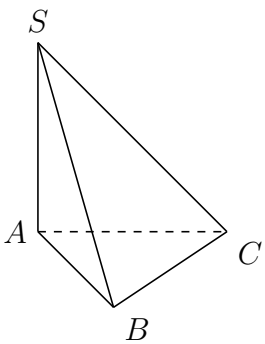
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 3. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$.

Mà $S_{ABC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. Vậy

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{9}{2}$$



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$. Tính thể tích khối chóp trên.

Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác ABC.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO$.

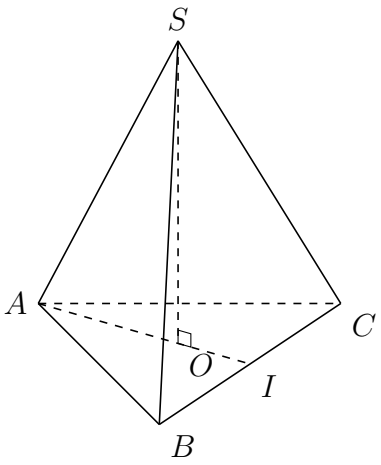
Mà $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Xét tam giác ABC có $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SA^2 = AO^2 + SO^2$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{33}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp trên.

Lời giải.

Dựng $SI \perp BC \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SI$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vì $SI \perp (ABC)$ nên I là hình chiếu của S trên (ABC).

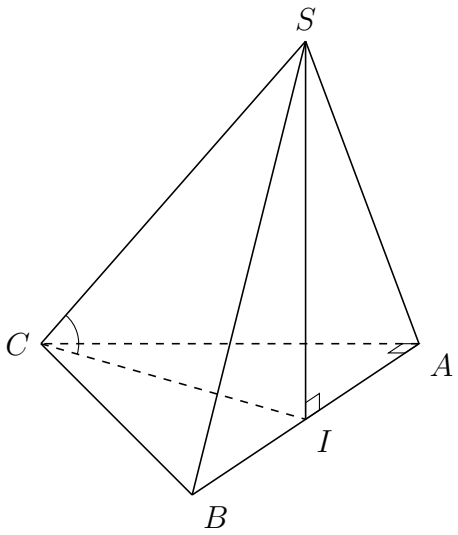
Vậy $(SC, (ABC)) = (SC, IC) = \widehat{SCI} = 60°$.

Ta có $CI = \sqrt{AC^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow SI = CI \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{39}}{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp là

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{2} = \frac{a^3\sqrt{13}}{4}$$



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

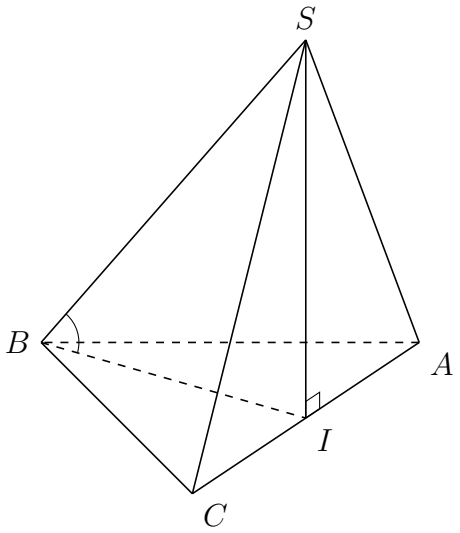
Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SI$.

Mà ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SIB có $\tan 30^\circ = \dfrac{SI}{BI} \Rightarrow SI = \dfrac{a}{2}$.

Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$



□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc tạo bởi mặt bên (SBC) và (ABC) bằng 60° và $BC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$.

Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{4} \cdot BC^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

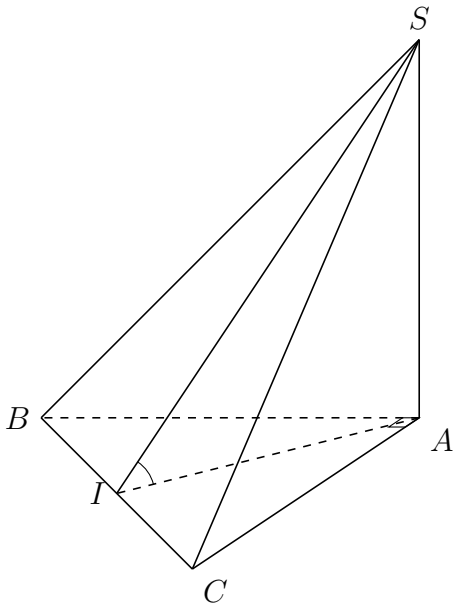
Lấy I là trung điểm của BC khi đó $\begin{cases} BC \perp SI, BC \perp AI \\ AI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Vậy $((SBC),(ABC)) = (SI, AI) = \widehat{SIA} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAI vuông tại A: $\tan 60^\circ = \dfrac{SA}{AI}$

$SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Đáp số: $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

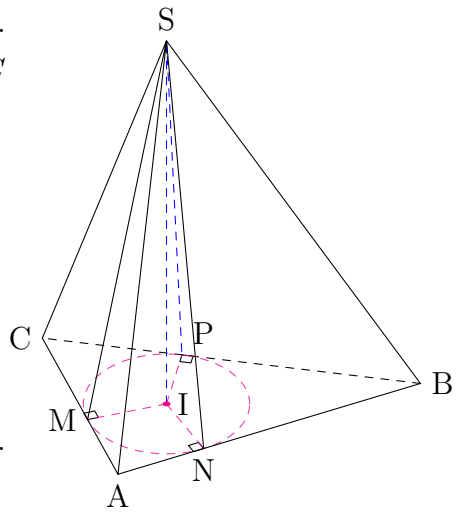


□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a$ các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp đó.

Lời giải.

Dựng $SO \perp (ABC)$ và từ O dựng $OM \perp AB$, $ON \perp AC$, $OP \perp BC$.
Từ định lý ba đường vuông góc suy ra $SM \perp AB$, $SN \perp AC$, $SP \perp BC$
do đó $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = 60^\circ$.
Vậy $\Delta SOM = \Delta SON = \Delta SOP \Rightarrow OM = ON = OP$.
Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Diện tích tam giác ABC là
$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6a^2\sqrt{6}$
Với $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 9a$ là nửa chu vi của tam giác.
Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $OM = r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.
Vậy đường cao của hình chóp $SO = r \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{2}$.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot 6a^2\sqrt{6} = 8a^3\sqrt{3}$.



□

DẠNG 2. Thể tích khối chóp tứ giác

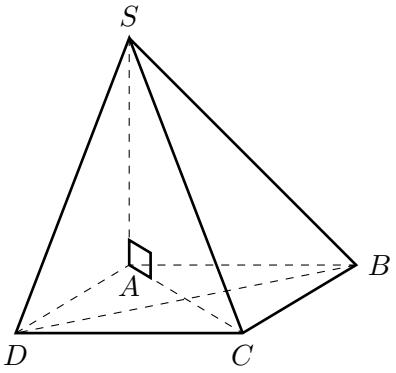
Phương pháp giải. Sử dụng công thức tính thể tích của khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2\sqrt{2}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SC = 4\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA$. Mà $S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A = 4\sqrt{3}$. Xét tam giác SAC có
$AC = 2 \cdot AO = \sqrt{6}$ (Với O là tâm của hình thoi và AO là đường trung tuyến trong tam giác đều ABD).
$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{42}$.
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = 4\sqrt{14}$.



□

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh SC tạo với mặt đáy một góc 30°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

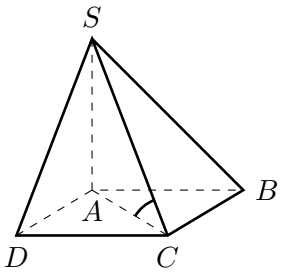
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA$. Mà $S_{ABCD} = AB \times BC = a^2\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAC có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$ và $\tan 30^\circ = \dfrac{SA}{AC}$

$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2a^3}{3}.$$



□

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là O, và góc tạo bởi SC và mp(SBD) bằng 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO$. Mà

$S_{ABCD} = BA \times BC \times \sin B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

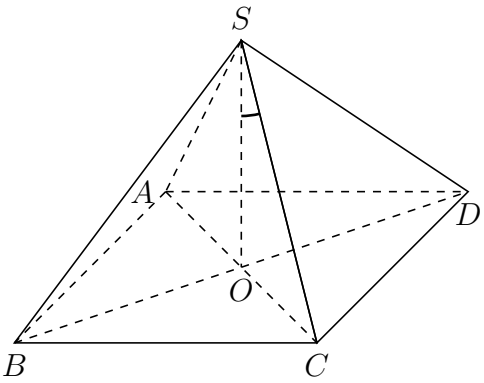
Vì $AC \perp (SBD)$ nên O là hình chiếu của C trên mp(SBD).

Vậy $(SC, (SBD)) = (SC, BD) = \widehat{OSC} = 45^\circ$.

Xét tam giác SOC vuông cân tại O có

$OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2} = SO$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

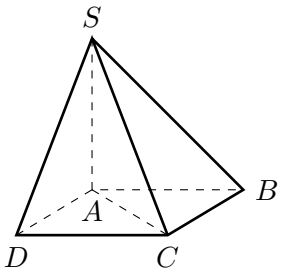
Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA$.

Mà $S_{ABCD} = 6a^2$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.

Đáp số: $8a^3$

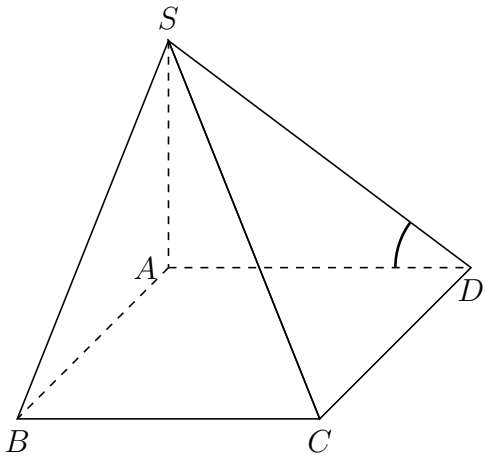


□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với đáy một góc $\varphi = 60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA$.
Mà $S_{ABCD} = a^2$.
Và $((ABCD),(SCD)) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.
Xét tam giác SAD vuông tại A có $\tan 60^\circ = \dfrac{SA}{AD}$
$\Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.
Đáp số: $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

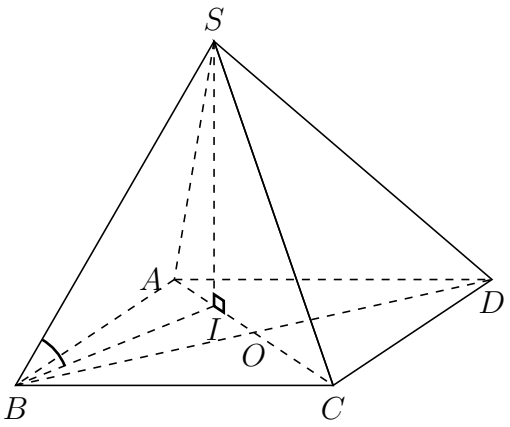


□

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AB = a, AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm I của AO. Biết góc tạo bởi cạnh bên SB và đáy bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABCD} = 2 \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SI$.
Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác ABI có $AB = a, AI = \dfrac{1}{4} \cdot AC = \dfrac{a}{2}$
$\Rightarrow BI = \sqrt{AB^2 + AI^2 - 2 \cdot AB \cdot AI \cdot \cos A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow SI = \dfrac{3a}{2}$.
Đáp số: $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



□

DẠNG 3. Thể tích khối lăng trụ đứng

Phương pháp giải. Công thức thể tích khối lăng trụ: $V = B \cdot h$.

Ví dụ 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đường cao $AA' = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B có $AB = a$, $A'C$ tạo với (ABA') góc 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a.

Lời giải.

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B).$

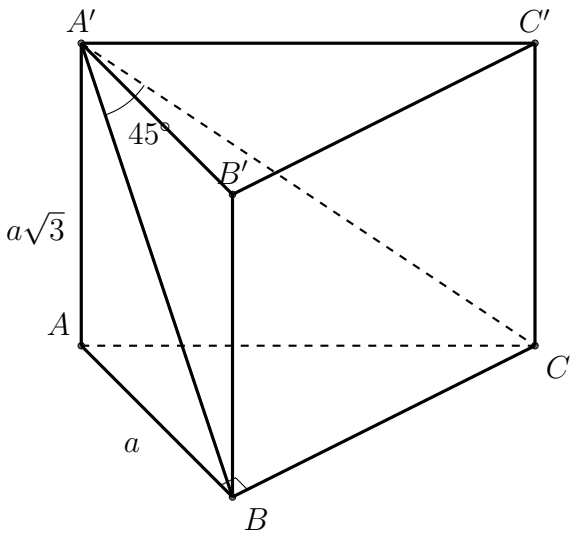
Hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(AA'B'B)$ là $A'B$.

Suy ra: $\widehat{(A'C, (AA'B'B))} = \widehat{BA'C} = 45°$.

$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = 2a, BC = A'B = 2a.$

Diện tích ΔABC: $S_{ABC} = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ $V = a^3\sqrt{3}$.



□

Ví dụ 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a$, mp$(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$ và $\Delta A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải.

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'B$

Và $\begin{cases} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp AB \subset (A'BC) \\ BC = (ABC) \cap (A'BC) \end{cases}$

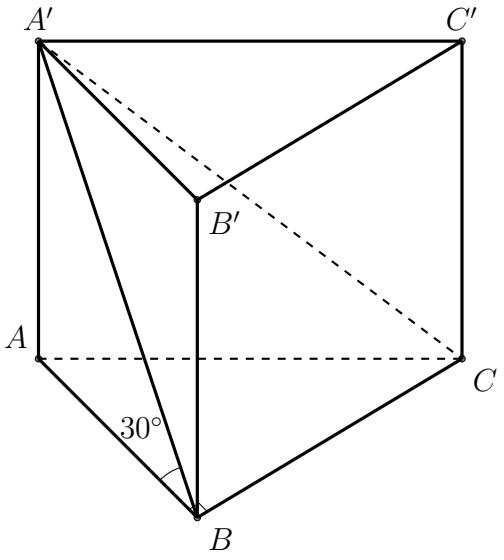
$\Rightarrow \left(\widehat{(A'BC), (ABC)}\right) = \widehat{ABA'}$

Ta có: $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}A'B \cdot BC$

$\Rightarrow A'B = \dfrac{2S_{\Delta A'BC}}{BC} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}.$

$AB = A'B \cdot \cos \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cdot \cos 30° = 3a$

$AA' = A'B \cdot \sin \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cdot \sin 30° = a\sqrt{3}$

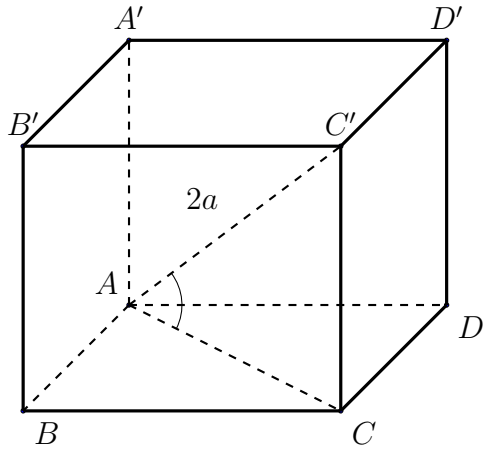


Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$ □

Ví dụ 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông, $AC' = 2a$ và tạo với mặt phẳng (BCD) góc $60°$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc AC' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC.
Do đó: $(\widehat{AC', (ABCD)}) = \widehat{C'AC} = 60^\circ$.
Suy ra: $CC = AC' \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$, $AC = AC' \cdot \cos 60^\circ = a$ và $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Diện tích đáy: $S = \dfrac{a^2}{2}$.
Thể tích khối hộp: $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



□

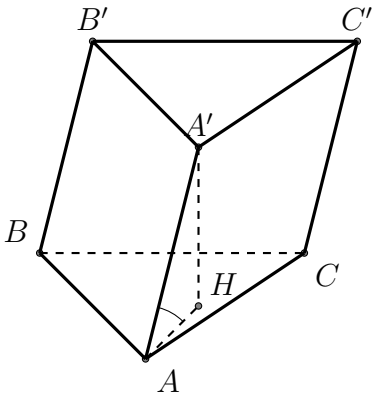
DẠNG 4. Thể tích khối lăng trụ xiên

Phương pháp giải. Công thức thể tích khối lăng trụ: $V = B \cdot h$.

Ví dụ 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 3 cm , cạnh bên $2\sqrt{3}$ cm tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên trên mặt phẳng đáy (ABC).
Ta có: $AB = 3$, $AA' = 2\sqrt{3}$ nên $A'H = AA' \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}$.
Thể tích khối lăng trụ $V = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{27}{4}$ cm^3

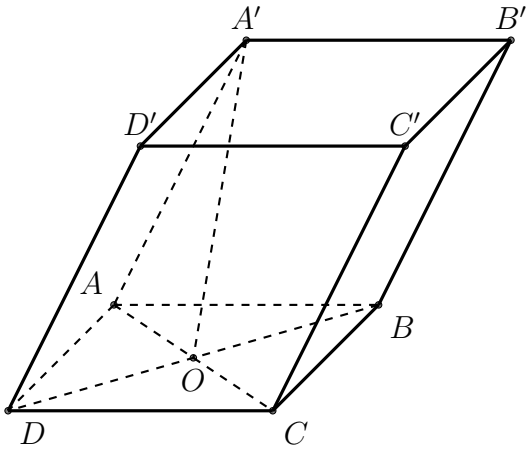


□

Ví dụ 11. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'D = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
$ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OA = OB = OD$.
Mà $A'A = A'B = A'D$ nên $A'O \perp (ABD)$.
ΔABD vuông tại A nên
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow OA = OB = OD = a$.
$\Delta AA'O$ vuông tại $O \Rightarrow A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = a\sqrt{3}$.
$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.
$V_{ABCDA.'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = 3a^3$.



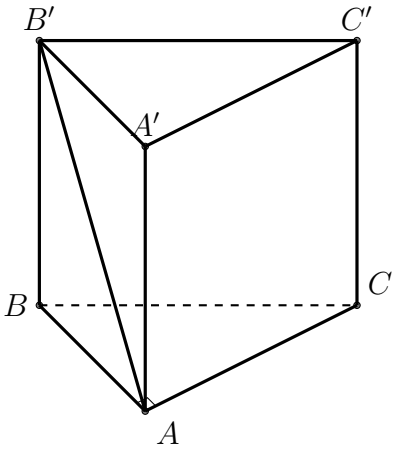
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy $A'B'C'$ là tam giác vuông cân tại A, biết $BC = a\sqrt{2}$, $AB' = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Lời giải.

Ta có ΔABC vuông cân tại A nên $AB = AC = a$.
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow BB' \perp AB$.
$\Delta ABB' \Rightarrow BB'^2 = AB'^2 - AB^2 = 8a^2 \Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$.
Vậy thể tích khối lăng trụ: $V = S_{A'B'C'} \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$.

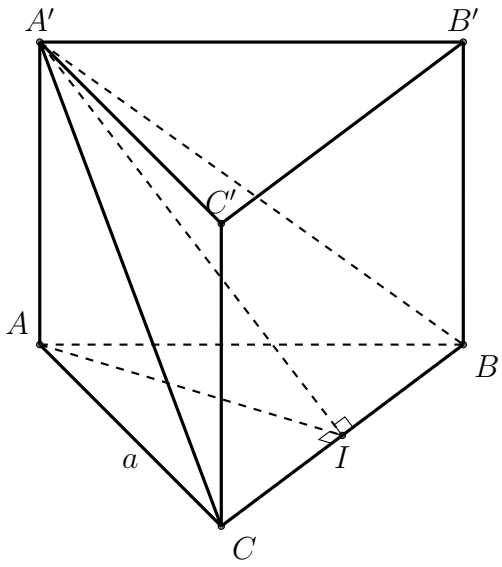


□

Bài 8. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng a^2. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC.
ΔABC đều nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$.
Ta có: $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot A'I \Rightarrow A'I = \dfrac{2S_{A'BC}}{BC} = 2a$.
$\Delta A'AI$ vuông tại A nên $AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{39}}{8}$ (đvtt)



□

Bài 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân với $AB = AC = a, \widehat{ABC} = 30°$. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy (ABC) góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm đoạn BC.

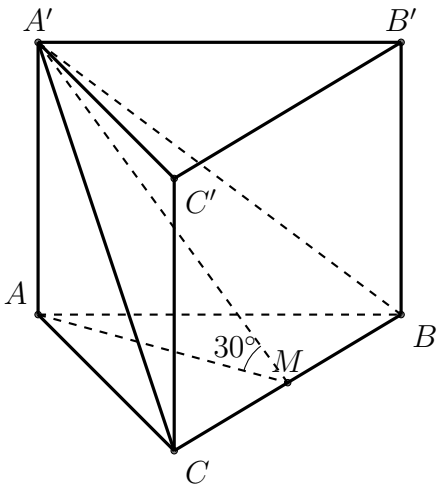
Tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC$

và $AM = AB \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a}{2}; BC = 2BM = 2AB \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Góc tạo bởi $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 30^\circ$.

Khi đó: $AA' = AM \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{2}BC \cdot AM \cdot AA' = \dfrac{a^3}{8}$.



□

Bài 10. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có góc nhọn $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích khối hộp theo a.

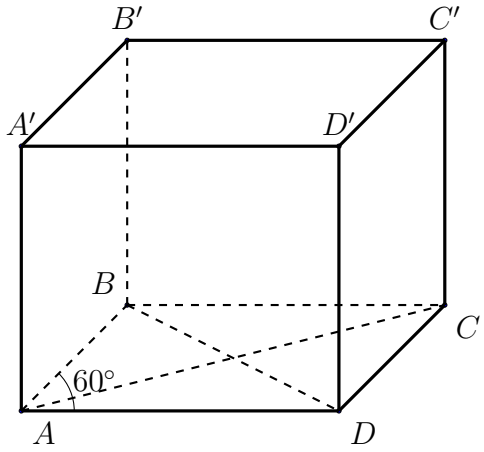
Lời giải.

Ta có tam giác ABD đều nên $BD = a$ và $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$BD' = AC = 2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$.

$V = S_{ABCD} \cdot DD' = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$(đvtt)



□

Bài 11. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ theo a.

Lời giải.

Gọi O là tâm của $ABCD$.

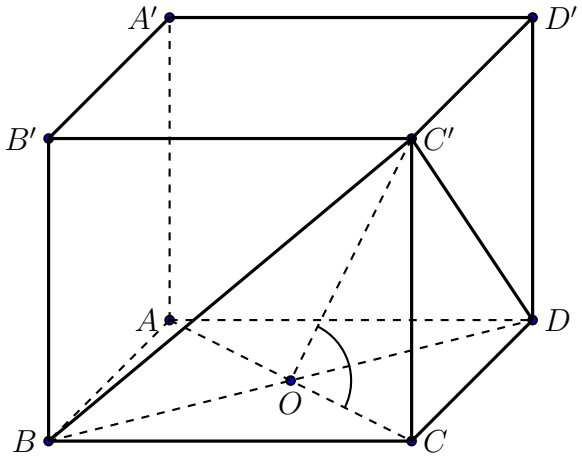
Ta có $\begin{cases} C'C \perp DB \\ BD \perp OC \end{cases} \Rightarrow BD \perp C'O$.

Suy ra góc $((\widehat{C'BD}), (ABC)) = \widehat{COC'} = 60^\circ$.

$CC' = OC \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích $ABCD$: $S_{ABCD} = a^2$.

Do đó: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot CC' = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.



□

Bài 12. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$; mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc $60°$ và $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc $30°$. Tính thể tích khối hộp chữ nhật theo a.

Lời giải.

Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$.

Suy ra góc $(\widehat{A'C, (ABCD)}) = \widehat{A'CA} = 30°$.

$BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$.

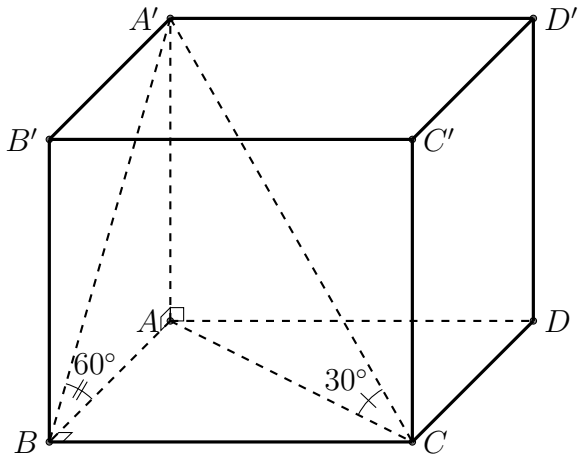
Suy ra góc $(\widehat{(A'BC), (ABCD)}) = \widehat{A'BA} = 60°$.

$AC = AA' \cdot \cot 30° = 2a\sqrt{3}$.

$AB = AA' \cdot \cot 60° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $V = AB \cdot BC \cdot AA' = \dfrac{16a^3\sqrt{2}}{3}$.



□

Bài 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$ cm , $AD = \sqrt{7}$ cm. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc $45°$ và $60°$. Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1 cm.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên trên $(ABCD)$, kẻ $HM \perp AB$ và $HN \perp AD$.

Suy ra: $\widehat{A'MH} = 45°$ và $\widehat{A'NH} = 60°$.

Đặt $A'H = x$ với $x > 0$. Khi đó ta có:

$A'N = \dfrac{A'H}{\sin 60°} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.

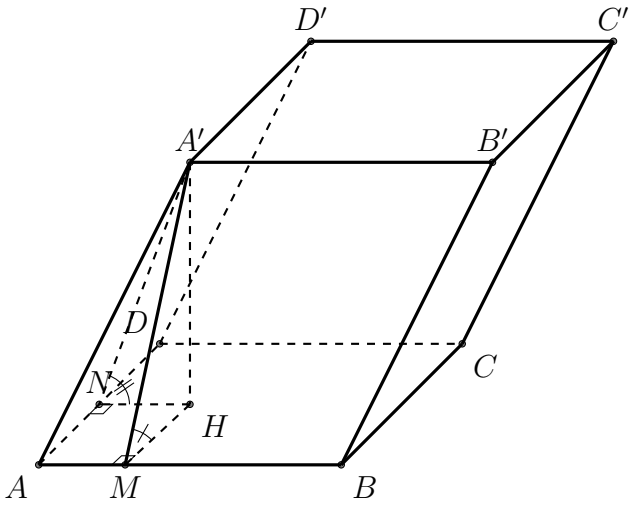
$AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\dfrac{3 - 4x^2}{3}}$.

$MH = A'H = x$.

Mà $ANHM$ là hình chữ nhật nên $AN = MH$ do đó:

$$\sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Thể tích khối hộp: $V = AD \cdot AB \cdot x = 3$ cm^3.



□

DẠNG 5. Tỉ số thể tích

Phương pháp giải.

- Để tính thể tích của khối chóp tam giác hoặc tính tỉ số thể tích của các khối chóp tam giác ta có thể sử dụng kết quả sau: Nếu A', B', C' là các điểm (khác điểm S) lần lượt nằm trên các đường thẳng SA, SB, SC của hình chóp $S.ABC$ thì

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

- Nếu ta cần tính thể tích V một khối đa diện K mà không phải là khối chóp hay khối lăng trụ thì ta thường coi V là tổng hoặc hiệu của của thể tích của hai khối đa diện khác mà cả hai khối đó đều là khối chóp hoặc khối lăng trụ.

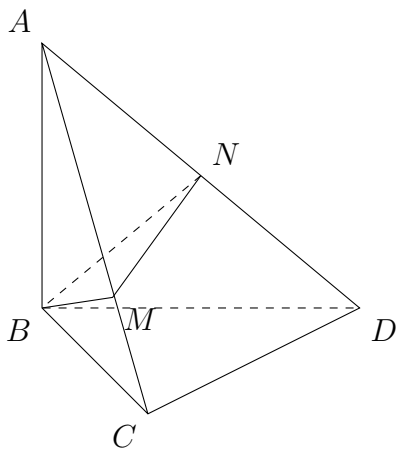
Ví dụ 12. Cho hình chóp $A.BCD$ có đáy BCD là tam giác vuông tại C với $BC = a, CD = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (ABD) và (ABC) cùng vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết $AB = a$ và M, N lần lượt thuộc các cạnh AC, AD sao cho $AM = 2MC, AN = ND$. Tính thể tích khối chóp $A.BMN$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{A.BMN}}{V_{A.BCD}} = \dfrac{AB}{AB} \cdot \dfrac{AM}{AC} \cdot \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BC \cdot CD \cdot AB = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Từ đó suy ra $V_{A.BMN} = \dfrac{1}{3}V_{A.BCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

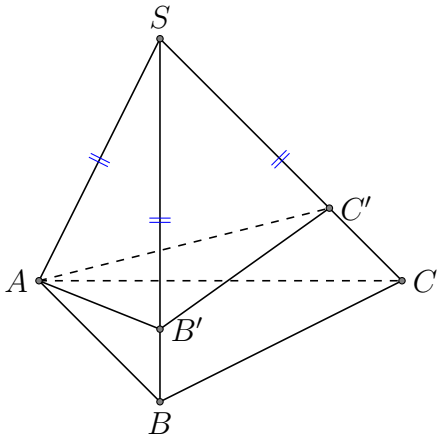


□

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{ASB} = \widehat{ASB} = 60^\circ$ và $SA = a, SB = b, SC = c$. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$ theo a, b, c.

Lời giải.

Trên các tia SB, SC lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $SB' = SC' = a$. Khi đó ta có:
$\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{c}$.
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{bc}{a^2} V_{S.AB'C'}$.



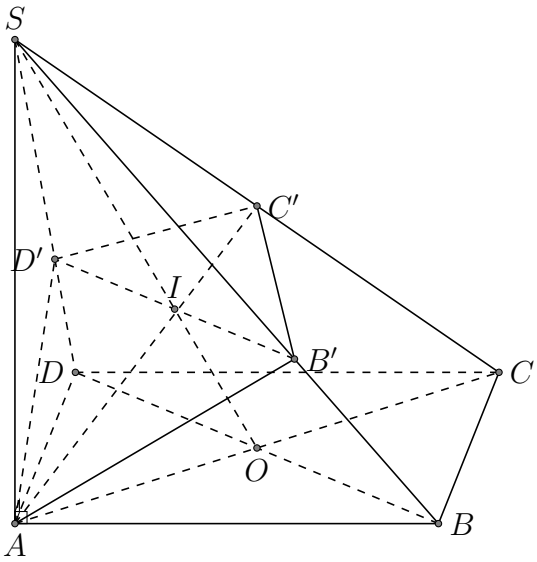
Dễ thấy $S.AB'C'$ là tứ diện đều cạnh a nên $V_{S.AB'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Từ đó suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{abc\sqrt{2}}{12}$.

□

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, $SA \perp (ABCD), SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AC' và SO. Vì (P) song song với BD nên giao tuyến $B'D'$ của (P) với mặt phẳng (SBD) là đường thẳng qua I và song song với BD.



Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC, từ đó:

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

Do đó $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{3} V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

Tương tự ta có $V_{S.AD'C'} = \dfrac{1}{3} V_{S.ADC} = \dfrac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

Mặt khác $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'} = \dfrac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên hình chóp tạo với đáy một góc bằng $60°$. Mặt phẳng (P) chứa AB đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABMN$.

Lời giải.

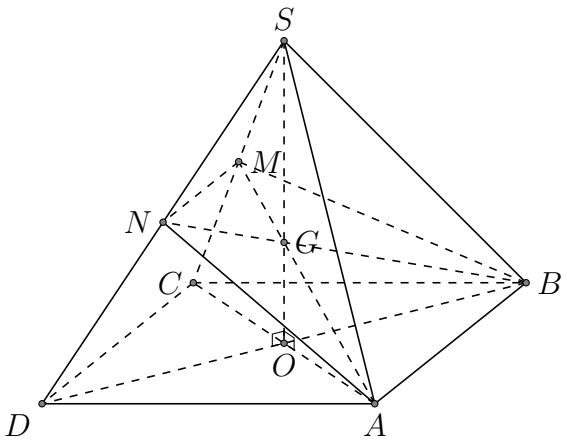
Từ giả thiết ta suy ra M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$, J là trung điểm của AD. Khi đó, $\widehat{IJS} = 60^\circ$, Suy ra $SI = a\sqrt{3}$ và $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

$\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{4}$. Suy ra $V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$



□

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Lời giải.

Mặt phẳng (BMC) cắt (SAD) theo giao tuyến MN song song với $AD, N \in SD$.

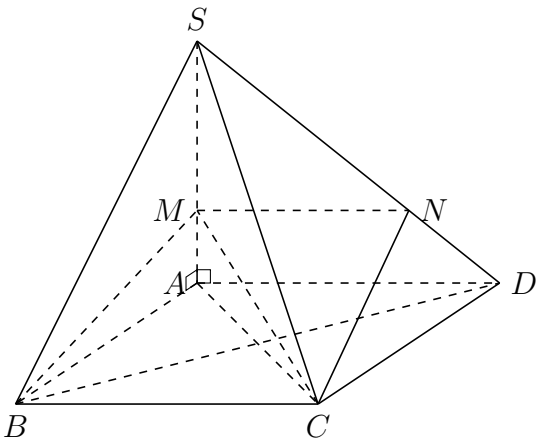
Ta có $\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} = k$, $\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD} = k^2$.

Mà $V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$,

$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = 2\dfrac{V_{S.MNCB}}{V_{S.ABCD}} = 1.$

Từ đó suy ra

$k^2 + k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (vì $k > 0$).

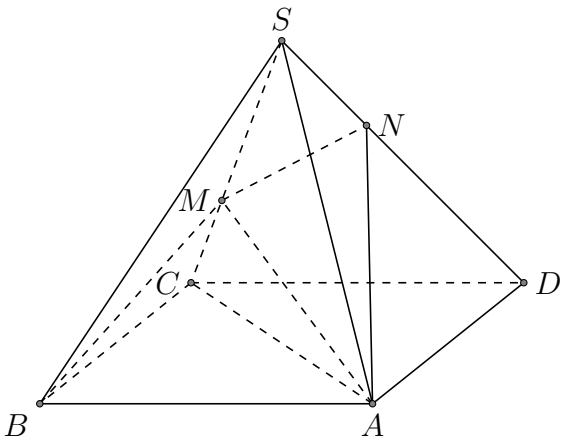


□

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Giả sử M, N là các điểm lần lượt thuộc cạnh SC, SD sao cho $SM = 2MC, SN = \dfrac{1}{3}ND$. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện $S.ABMN$ và V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$, tính $\dfrac{V_1}{V}$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.ANM}$.
Do $SM = 2MC$ nên $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3}$, từ đó suy ra
$\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB}{SB} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3}$.
Vậy $V_{S.ABM} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}V_2$. (1)
Do $SN = \dfrac{1}{3}ND$ nên $SN = \dfrac{1}{4}SD$, từ đó suy ra
$\dfrac{V_{S.ANM}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.
Vậy $V_{S.ANM} = \dfrac{1}{6}V_{S.ADC} = \dfrac{1}{12}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{12}V_2$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3}V_2 + \dfrac{1}{12}V_2 = \dfrac{5}{12}V_2 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V2} = \dfrac{5}{12}$.

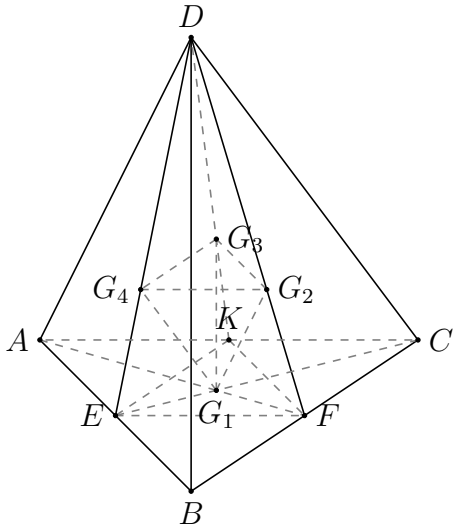


□

Bài 17. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$, gọi G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm của 4 mặt của tứ diện $ABCD$. Tính thể tích V của khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

Lời giải.

Chiều cao của hình chóp $G_1G_2G_3G_4$ bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của hình chóp $DABC$, diện tích tam giác $G_2G_3G_4$ bằng $\dfrac{4}{9}$ diện tích tam giác KEF, cho nên diện tích tam giác $G_2G_3G_4$ bằng $\dfrac{1}{9}$ diện tích tam giác ABC, vì vậy $\dfrac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{DABC}} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$.
$V_{DABC} = \dfrac{1}{3} \times a\sqrt{6} \times \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{4}$.



□

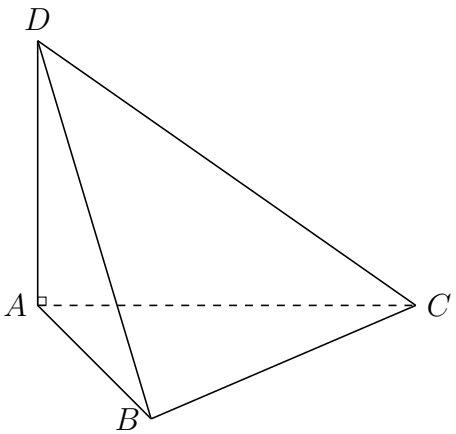
DẠNG 6. Ứng dụng thể tích để tính khoảng cách

Phương pháp giải. Sử dụng công thức thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

Ví dụ 15. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

Nhận thấy $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm nên tam giác ABC là tam giác vuông tại A.
Ta có thể tích khối chóp $V_{D.ABC} = \dfrac{1}{3}DA \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}DA \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 8$ cm^3.
Ta có $BD = \sqrt{DA^2 + AB^2} = 5$ cm, $DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = 4\sqrt{2}$ cm.
Diện tích tam giác BCD là $S_{\Delta BCD} = 2\sqrt{34}$ cm^2.
Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) là $d(A,(BCD)) = \dfrac{3V_{D.ABC}}{S_{\Delta BCD}} = \dfrac{6\sqrt{34}}{7}$ cm.



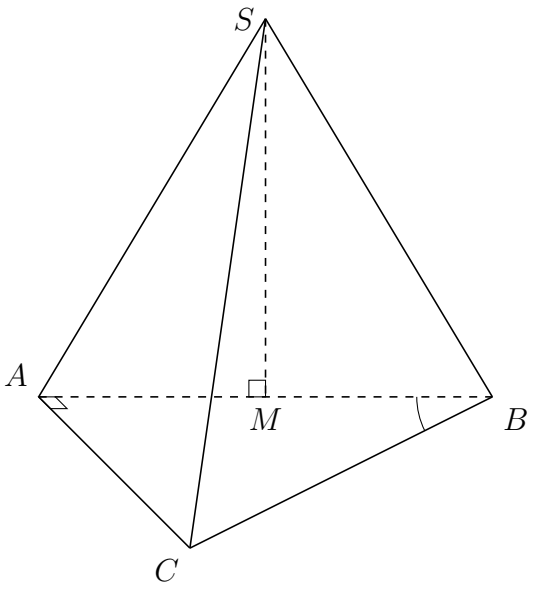
□

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30°$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến (SAB).

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB suy ra $SM \perp AB$. Ta có $AC = AB \tan 30° = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Khi đó thể tính khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{12}$.
Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot d(C,(SAB)) \cdot S_{\Delta SAB}$

$$\Rightarrow d(C,(SAB)) = \frac{3V}{S_{\Delta SAB}} = \frac{\dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



□

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

Ta có $MD=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $SM=\sqrt{SD^2-MD^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}=a$.

Khi đó thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}a^3$.

Ta có $SB=\sqrt{SM^2+BM^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Mà $V_{S.ABD}=\frac{1}{3}\cdot d(A,(SBD))\cdot S_{\Delta SBD}\Rightarrow d(A,(SBD))=\frac{3V_{S.ABD}}{S_{\Delta SBD}}$

với $S_{\Delta SBD}=\frac{1}{4}\sqrt{(SB+BD+SD)(SB+BD-SD)(SB-BD+SD)(BD+SD-SB)}=3$.

Suy ra $d(A,(SBD))=\frac{\frac{3}{2}V_{S.ABD}}{S_{\Delta SBD}}=\frac{a}{6}$

□

Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết $SD=2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

Ta có $\Delta SMC=\Delta SMD\Rightarrow SC=SD=2a\sqrt{3}$.

Ta có $SM=SC\cdot\sin 30^\circ=a\sqrt{3}$

suy ra $SA=SB=AB=2a$.

Do đó $MD=\sqrt{SD^2-SM^2}=3a$.

Mà $AD=\sqrt{MD^2-AM^2}=\sqrt{(3a)^2-(a)^2}=2a\sqrt{2}$.

Khi đó thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot(2a)^2\sqrt{2}=\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(2a)^2+(2a\sqrt{2})^2}=2a\sqrt{3}$.

□

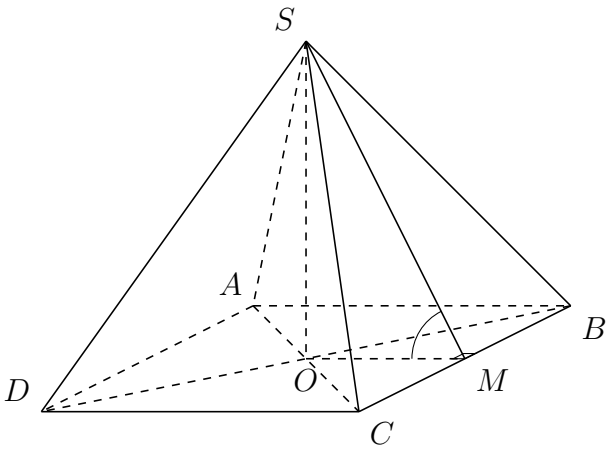
Thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $d(B,(SAC))=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3V_{S.ABC}}{\frac{1}{2}AB\cdot BC}=\frac{2a^3\sqrt{6}}{\frac{1}{2}2a\cdot 2a\sqrt{2}}=a\sqrt{3}$.

Ví dụ 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh a, $\widehat{DAB}=120^\circ$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60°.Tính thể tích $S.ABCD$ và khoảng cách A đến (SBC).

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Do $\widehat{DAB} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{ABC} = 60^\circ$ suy ra tam giác ABC đều.
Kẻ $OM \perp BC$ mà $SO \perp BC \Rightarrow BC \perp SM$
$\Rightarrow \widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{(SMO)} = 60^\circ$.



□

Ta có $OM = \sqrt{\dfrac{OC^2 \cdot OB^2}{OC^2 + OB^2}} = \sqrt{\dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \sin 120^\circ = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Khoảng cách từ A đến (SBC) là $d(A,(SBC)) = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \dfrac{\frac{3}{2}V_{S.ABCD}}{\frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$

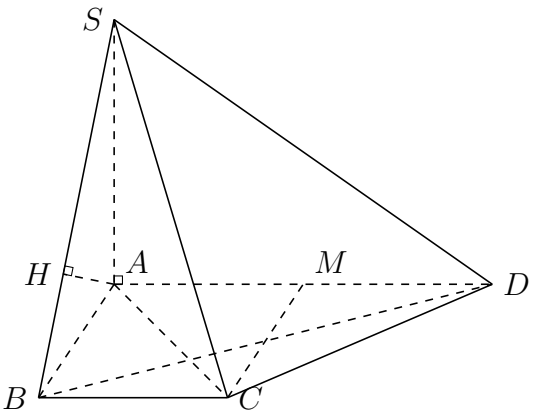
với $SM = OM \cdot \cot 60^\circ = \dfrac{a}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD. Ta có $\begin{cases} AM = BC \\ AM \parallel BC \end{cases}$
$\Rightarrow$ tứ giác $ABCM$ là hình vuông.
Suy ra $CM = a$ mà $AM = MD = \dfrac{AD}{2} = a$ nên tam giác ACD là tam giác vuông tại C.
Ta có $\begin{cases} AC \perp CD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC$.
Suy ra tam giác SCD vuông tại C.



Ta có $SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SB} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{2}{3}$.
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2} = 2a$ suy ra $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2} SC \cdot CD = a^2$.

Ta có $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{3}a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

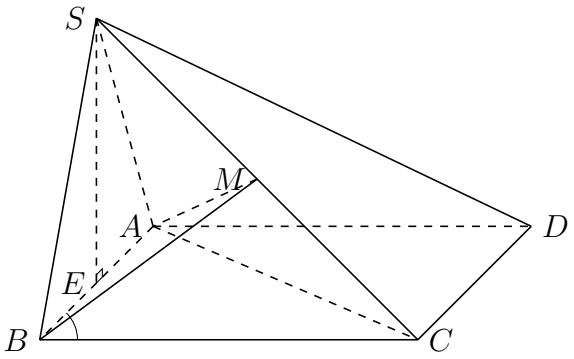
Ta có $\dfrac{d(H,(SCD))}{d(B,(SCD))} = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $d(H,(SCD)) = \dfrac{2}{3}d(B,(SCD)) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{\frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. □

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAC} = 60°$, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ M đến (SAB).

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$.
Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow$ tam giác ABC là tam giác đều.
Suy ra $S_{ABCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác SAB kẻ đường cao SE suy ra $SE = \sqrt{\dfrac{SA^2 \cdot SB^2}{SA^2 + SB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SE \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

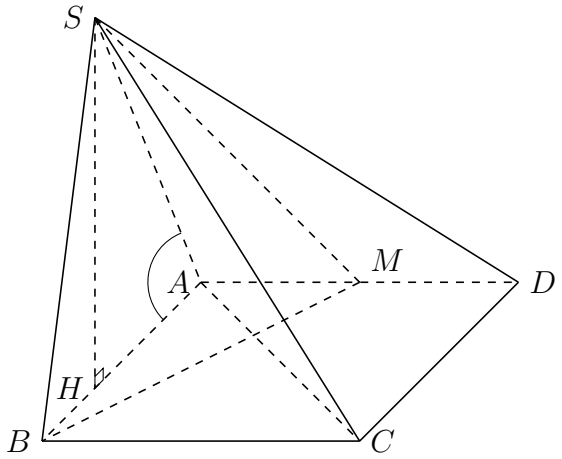
Ta có $V_{M.SAB} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{16}$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) là $d(M,(SAB)) = \dfrac{3V_{M.SAB}}{S_{\Delta SAB}} = \dfrac{\frac{a^3}{16}}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{24}$. □

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$ và hai mặt (SHC), (SHD) cùng vuông góc với đáy, SA hợp với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.BMC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm của AD.

Lời giải.

Ta có $AH = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}$
suy ra $SH = AH \tan 60° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Thể tích chóp $S.BMC$ là $V_{S.BMC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta BMC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.



Ta có $SM=\sqrt{SH^2+HM^2}=\sqrt{SH^2+AH^2+AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{73}}{6}$.

$SB=\sqrt{SH^2-HB^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}a\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

$BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

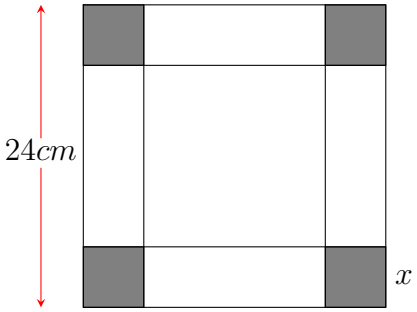
Đặt $p=\dfrac{SB+BM+SM}{2}$, khi đó $S_{\Delta SBM}=\sqrt{p(p-SB)(p-BM)(p-SM)}=\dfrac{a^2\sqrt{61}}{12}$.

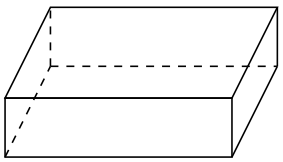
Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBM) là $d(C,(SBM))=\dfrac{3V_{S.BMC}}{S_{\Delta SBM}}=\dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{a^2\sqrt{61}}{12}}=\dfrac{4\sqrt{183}}{61}$. □

DẠNG 7. Thể tích khối đa diện liên quan đến giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Phương pháp giải.

Ví dụ 20. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





Lời giải.

Gọi x cm là cạnh hình vuông bị cắt $(0<x<12)$ Thể tích của hộp không nắp bằng $V(x)=x(24-2x)^2$.

$V'(x)=(24-2x)(24-6x)$.

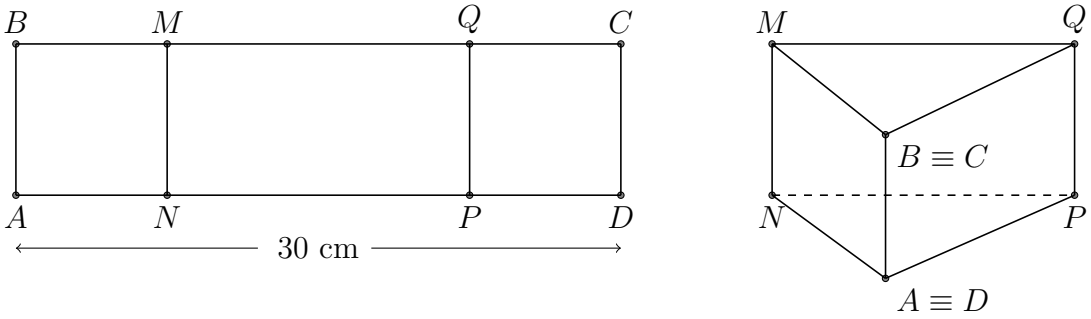
Trên $(0;12)$ ta có $V'(x)=0\Leftrightarrow x=4$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		4		12
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	1024	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=4$. □

Ví dụ 21. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 30\,\text{cm}$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau, với $AN = PD$ (như hình vẽ bên dưới) để được một hình lăng trụ. Tìm độ dài đoạn AN để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



Lời giải.

Gọi $x\,\text{cm}\,(0 < x < 15)$ là độ dài cạnh AN và H là trung điểm cạnh NP.

Ta có thể tích lăng trụ là $V = S_{NAP}.AB$.

Do chiều cao AB cố định nên thể tích lăng trụ lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác NAP lớn nhất.

Mặt khác $S = S_{NAP} = \dfrac{1}{2}NP.AH = \dfrac{1}{2}(30-2x)\sqrt{15(2x-15)} = (15-x)\sqrt{15(2x-15)}$.

$\Rightarrow S^2 = 15(15-x)^2(2x-15)$.

Trên $\left(\dfrac{15}{2};15\right)$ xét $f(x) = (15-x)^2(2x-15)$.

Ta có $f'(x) = 2(15-x)(30-3x) = 0 \Rightarrow x = 10$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$\frac{15}{2}$		10		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	125	↘	0

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 10$. Do đó S^2 lớn nhất khi và chỉ khi $x = 10\,\text{cm}$.

Vậy độ dài đoạn $AN = 10\,\text{cm}$ thì thể tích khối lăng trụ lớn nhất. □

Ví dụ 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = b > 0$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = x$ với $0 < x < a$ biết $x^2 + b^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ADCM$.

Lời giải.

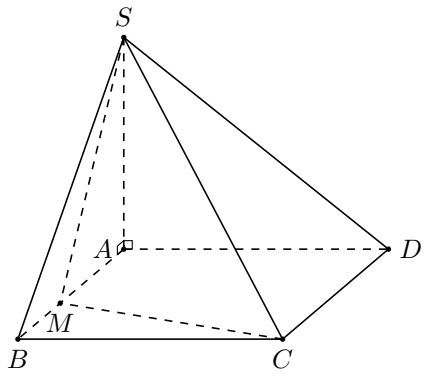
Ta có: $b=\sqrt{a^2-x^2}$

$$\Rightarrow V_{S.ADCM}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ADCM}=\frac{1}{3}b\cdot\frac{(x+a)\,a}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}(x+a)a}{6}.$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}\,(x+a)$ với $0<x<a$.

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\text{ (loại)}\\ x=\dfrac{a}{2}.\end{array}\right.$$



Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a^2	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	$\searrow$	0

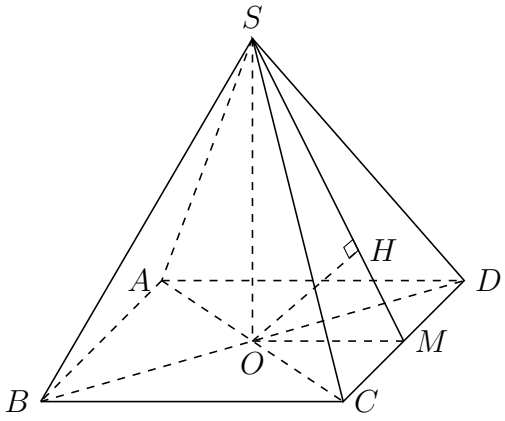
Suy ra $\max f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}\Rightarrow\max V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ tại $x=\dfrac{a}{2}$. □

Ví dụ 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ tâm O, biết khoảng cách từ tâm O đến (SBC) bằng a. Đặt $AB=x$. Tìm giá trị của x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm DC, H là hình chiếu của O lên SM. Ta có:

$$\begin{cases}DC\perp OM\\ DC\perp SO\end{cases}\Rightarrow DC\perp OH.$$



Do đó

$$\begin{cases}OH\perp SM\\ OH\perp DC\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SDC).$$

Nên $d(O,(DSC))=OH$.

Xét tam giác SOM có $OM=\dfrac{x}{2}$, $OH=a$,

$$\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{OH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SO=\frac{ax}{\sqrt{x^2-4a^2}}.$$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot\frac{ax}{\sqrt{x^2-4a^2}}=\frac{a}{3}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{x^2-4a^2}}.$$

Vậy để thể tích nhỏ nhất thì $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4a^2}}$ nhỏ nhất. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4a^2}}$ trên khoảng $(2a,+\infty)$.

Ta có

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4a^2)-x^4}{\sqrt{(x^2-4a^2)^3}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\sqrt{6}\\x=-a\sqrt{6}.\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

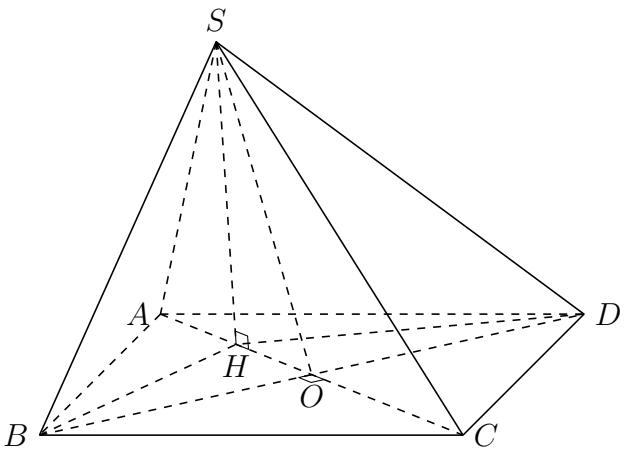
x	$2a$		$a\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(a\sqrt{6}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị x cần tìm là $a\sqrt{6}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Cho chóp $S.ABCD$ cạnh $SA=x$, $(0<x<a\sqrt{3})$, các cạnh còn lại có độ dài bằng a. Xác định x sao cho thể tích khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

Lời giải.



Gọi O là tâm đáy và H là chân đường cao hạ từ S xuống đáy. Khi đó $SH\perp OD$ và có $OD\perp OA$, nên $DO\perp(SAC)$.

Ta có $SO^2+OD^2=a^2$ trong đó $\begin{cases}SO^2=\dfrac{x^2+a^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}\\OD^2=a^2-\dfrac{AC^2}{4}\end{cases}$

Suy ra $\dfrac{x^2+a^2}{2}-\dfrac{AC^2}{2}=a^2\Leftrightarrow x^2+a^2=AC^2$

$\Rightarrow\triangle SAC$ vuông tại S.

Mặt khác ta có $V_{S.ABCD}=2V_{SACD}=\dfrac{2}{3}OD\cdot S_{SAC}$

Do đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{\sqrt{3a^2x^2-x^4}}{6}$.

Xét $f(x)=3a^2x^2-x^4$ với $0<x<a\sqrt{3}$

có $f'(x)=6a^2x-4x^3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\\x=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$		$a\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$	$\searrow$	0

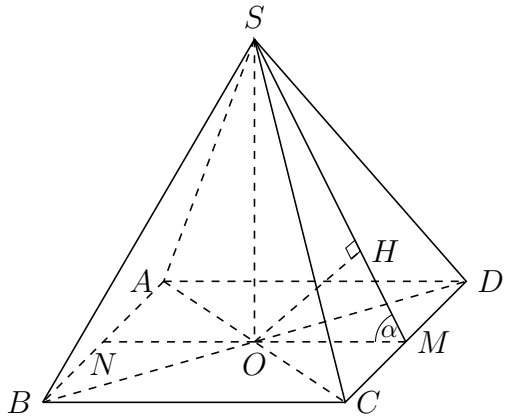
Để thể tích $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\left(0; a\sqrt{3}\right)$.

Vậy $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. □

Bài 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp. Tìm $\cos\alpha$ để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Và M, N lần lượt là trung điểm của cạnh CD, AB.



Góc giữa mặt bên (SCD) và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{SMO}$.

Ta có $d\,(A,(SCD)) = d\,(N,(SCD))$

$= 2d\,(O,(SCD)) = 2OH$

(với $OH \perp SN$)

Suy ra $OH = a$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$ trong đó:

- ☑ $SO = OM \tan\alpha = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.
- ☑ $S_{ABCD} = \left(\dfrac{2a}{\sin\alpha}\right)^2$

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{4a^3}{3\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}$.

Để $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ lớn nhất.

□

Mặt khác ta có $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos\alpha - \cos^3\alpha$.

Xét hàm số $f(x) = x - x^3$ với $0 < x < 1$ có $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

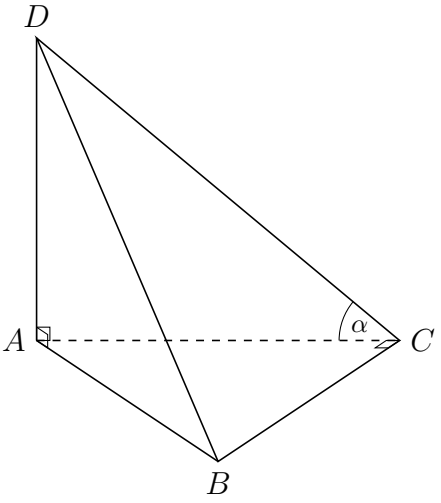
Do đó thể tích $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất khi $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại C và cạnh bên DA vuông góc với mặt phẳng (ABC), cạnh $CD = a$. Tìm sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) để thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} (DBC) \cap (ABC) = BC \\ AC \perp BC \\ DC \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((DBC),(ABC)) = \widehat{DCA} = \alpha.$$



Ta có

$$AD = a\sin\alpha, AC = a\cos\alpha$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}DA = \frac{a^3}{6}\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Do vậy thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $\cos^2\alpha\sin\alpha$ lớn nhất

hay $\left(1-\sin^2\alpha\right)\sin\alpha$ lớn nhất (với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

□

Đặt $x = \sin\alpha \Rightarrow x \in (0;1)$. Ta được $f(x) = x - x^3$ có $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

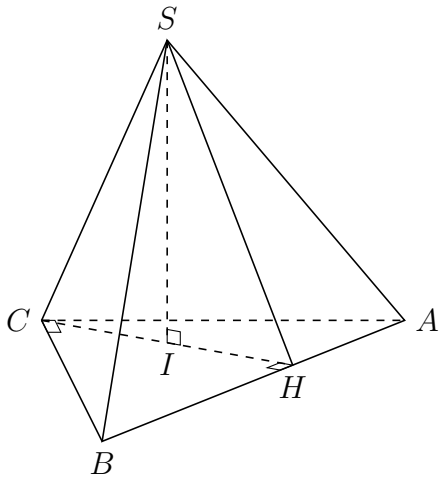
x	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Vậy để thể tích tứ diện lớn nhất khi $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 24. Trong mp(P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn.

Kẻ $CH \perp AB$ (với $H \in AB$). Gọi I là trung điểm của CH, trên đường thẳng vuông góc với $mp(P)$ tại I lấy điểm S sao cho góc giữa $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $SABC$có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải.



Ta có

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SI = \frac{1}{3} SI \cdot CH \cdot R = \frac{1}{3} \sqrt{SH^2 - IH^2} \cdot CH \cdot R.$$

Ta có

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ SI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow SH \perp AB.$$

Do $\triangle SAB$ vuông tại S nên $SH^2 = AH \cdot HB$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} \sqrt{AH \cdot HB - HI^2} \cdot CH \cdot R$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{AH \cdot HB - \frac{HC^2}{4}} \cdot CH \cdot R$$

$$\Rightarrow V_{SABC} \le \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(AH + HB)^2}{4} - \frac{CH^2}{4}} \cdot CH \cdot R$$

$$\Rightarrow V_{SABC} \le \frac{R}{3} \sqrt{R^2 \cdot CH^2 - \frac{CH^4}{4}}$$

□

Đặt $CH = x$ với $0 < x \le R$. Xét hàm số $f(x) = \frac{R}{3} \sqrt{R^2 x^2 - \frac{x^4}{4}}$

có $f'(x) = \frac{R}{3} \cdot \frac{2xR^2 - x^3}{2\sqrt{R^2 x^2 - \frac{x^4}{4}}} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} R. \end{array} \right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		R
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{R^3\sqrt{3}}{6}$

Do vậy $f(x) \le f(R)$.

Vậy $V_{SABC} \le \frac{\sqrt{3} R^3}{6}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Lời giải.

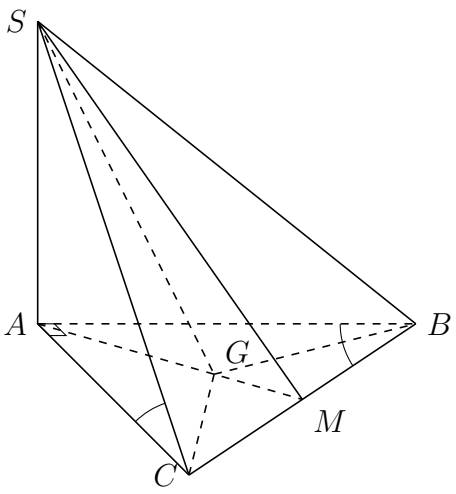
$SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

$\Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta GBC} = \dfrac{2}{3} S_{\Delta ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = \dfrac{1}{3} a^2$.

Thể tích khối chóp $S.GBC$ là $V_{S.GBC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta GBC} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Với $SC = \dfrac{AC}{\cos 60^\circ} = 2a$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$, $AB = a\sqrt{2}$.



Đặt $p = \dfrac{SC + CB + SB}{2}$, ta có $S_{SBC} = \sqrt{p(p - SC)(p - CB)(p - SB)} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$.

Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $d(G,(SBC)) = \dfrac{3V_{S.GBC}}{S_{\Delta GBC}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{63}$. □

Bài 26. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Lời giải.

$AB = AC.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AB \perp AC$; $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$ nên AC' là hình chiếu của BC' trên $(AA'C'C)$.

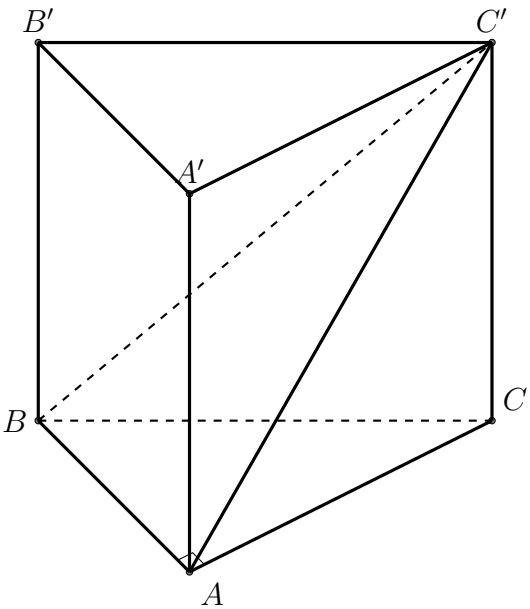
Suy ra góc $\widehat{(BC',(ACC'A'))} = \widehat{BC'A} = 30^\circ$.

$AC' = \dfrac{AB}{\tan 30^\circ} = 3a$.

$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$.

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$V = S_{ABC} \cdot AA' = a^3\sqrt{6}$(đvtt).

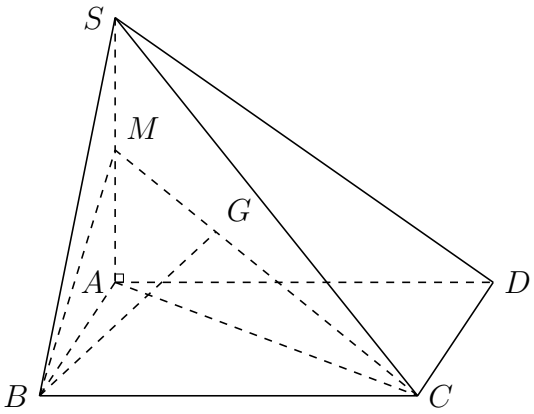


□

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$. SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCG).

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.



Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Gọi M là trung điểm SA.

Ta có $V_{G.ABC} = \dfrac{2}{3}V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Đặt $p = \dfrac{BM + MC + BC}{2}$, ta có $S_{\Delta MBC} = \sqrt{p(p - BM)(p - CM)(p - BC)}$

với $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $CM = \sqrt{AM^2 + AC^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$; $BC = a\sqrt{3}$

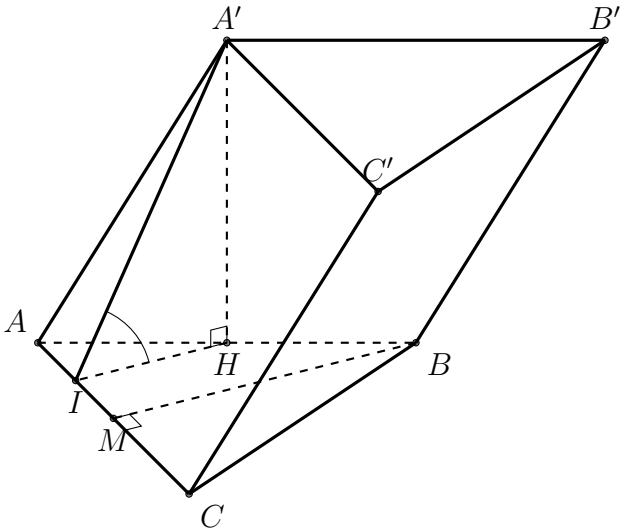
mà $S_{\Delta GBC} = \dfrac{2}{3}S_{\Delta MBC} \Rightarrow S_{\Delta GBC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{6}$.

Do đó, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCG) là $d(A, (BCG)) = \dfrac{3V_{G.ABC}}{S_{\Delta GBC}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. □

Bài 28. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mp(ABC) là trung điểm của AB. Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải.

Gọi H, M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, AM.



$$V_{ABC.A'B'C'} = B \cdot h = S_{\Delta ABC} \cdot A'H \quad (1)$$

Do ΔABC đều nên: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (2).

Do IH là đường trung bình trong đều ΔAMB, đồng thời BM là trung tuyến nên cũng là đường cao.

Do đó: $\begin{cases} IH \parallel MB \\ MB \perp AC \end{cases} \Rightarrow IH \perp AC$

$\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp IH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow AC \perp A'I$

Mà: $\begin{cases} (ABC) \cap (ACC'A') = AC \\ AC \perp IH \subset (ABC) \\ AC \perp A'I \subset (ACC'A') \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(ACC'A'); (ABC)}\right) = \widehat{A'IH} = 60°$

Trong $\Delta A'HI$ vuông tại H,
ta có: $\tan 45^\circ = \dfrac{A'H}{HI} \Rightarrow A'H = IH \cdot \tan 45^\circ = IH = \dfrac{1}{2}MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ (3).
Thay (2), (3) vào (1) $\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{16}$ □

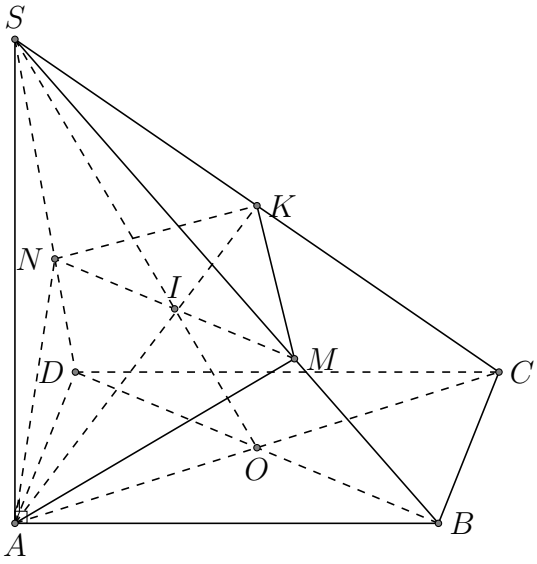
Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V lần lượt là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$.

Lời giải.

Đặt $x = \dfrac{SM}{SB}$, $y = \dfrac{SN}{SD}$ $(0 < x, y \le 1)$. Gọi O, I lần lượt ta tâm của hình bình hành $ABCD$ và trọng tâm tam giác SAC. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{S.ANK}}{V_{S.ADC}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SK}{SC}\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}(x+y)\end{aligned}$$

Ta có $3\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{x}\overrightarrow{SM} + \dfrac{1}{y}\overrightarrow{SN}$ mà I, M, N thẳng hàng nên $3 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$ hay $x+y \ge \dfrac{4}{3}$. Suy ra $\dfrac{V_1}{V} \ge \dfrac{1}{3}$.
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \dfrac{2}{3}$.
Vậy $\min \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{3}$.



□

Bài 30. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Khối tứ diện có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

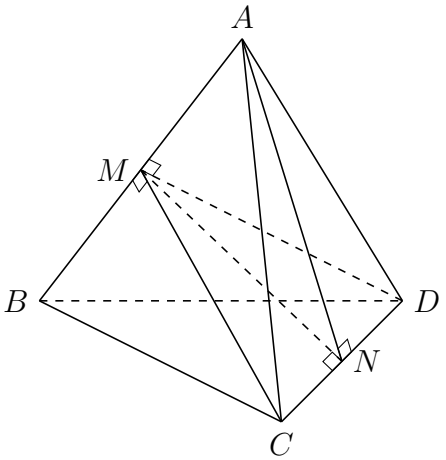
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. Khi đó ta có tam giác ACM, ADM cân lần lượt tại C, D nên $AB \perp (CMD), MN \perp CD$.
Ta được

$$MD = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, MN = \sqrt{MD^2 - ND^2}$$

nên

$$MD = \sqrt{1 - \frac{a^2+b^2}{4}}, S_{MCD} = \frac{1}{2}b\sqrt{1 - \frac{a^2+b^2}{4}}, AM = \frac{a}{2}.$$



□

Khi đó

$$V_{ABCD} = 2V_{A.MCD} = \frac{1}{6}ab \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2+b^2}{4}} \le \frac{1}{6}ab \cdot \sqrt{1 - \frac{ab}{2}}$$

$$(\text{vì } a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{4} \ge \frac{ab}{2})$$

Đặt $t = \sqrt{1 - \frac{ab}{2}}$ (với $0 < t < 1$) $\Rightarrow ab = 2 - 2t^2$.

Ta được $f(t) = \frac{1}{3}(t - t^3)$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{3}(1 - t^2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{27}$	↘	0

Thể tích của tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;1)$. Vậy V_{ABCD} lớn nhất là $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

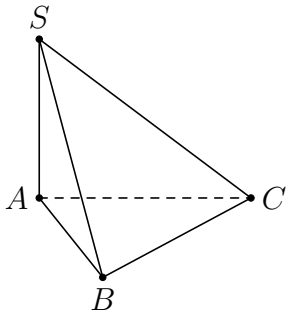
1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot \mathrm{S}_{ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn đáp án D □

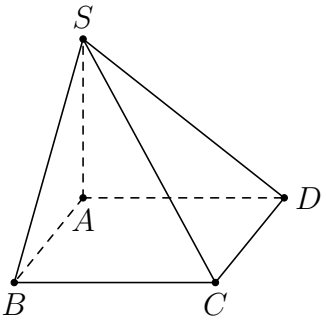
Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ cạnh bên SA vuông góc với đáy, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $6a^3$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình chữ nhật nên thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}SA \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot 2a = 2a^3.$$



Chọn đáp án C □

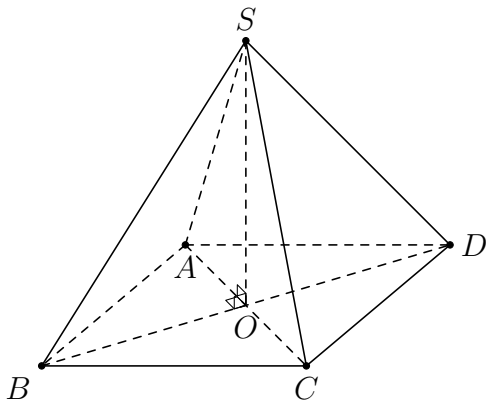
Câu 3. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, đường cao SO. Biết $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



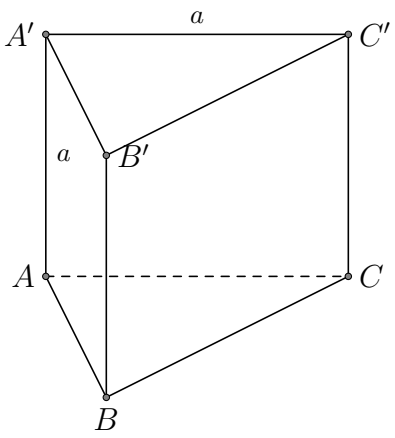
Chọn đáp án A □

Câu 4. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = h \cdot S_{ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



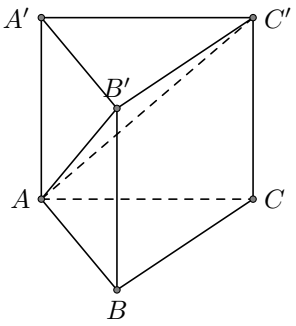
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$ theo V.

A. $\dfrac{3V}{4}$. **B.** $\dfrac{2V}{3}$. **C.** $\dfrac{V}{2}$. **D.** $\dfrac{V}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow V_{ABCB'C'} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2V}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 6. Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h = a$, diện tích tam giác ABC là $3a^2$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{3}{2}a^3$. **D.** $3a^3$.

Lời giải.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}h.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}.a.3a^2 = a^3.$

Chọn đáp án B □

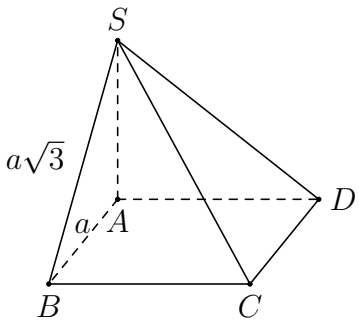
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SB = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{ABCD} = a^2, SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^2 a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.



Chọn đáp án D □

Câu 8. Gọi S là diện tích đáy, h là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích khối lăng trụ đó là:

A. $V = \dfrac{1}{3}Sh$. **B.** $V = \dfrac{1}{6}Sh$. **C.** $V = Sh$. **D.** $V = \dfrac{1}{2}Sh$.

Lời giải.

Theo công thức sách giáo khoa ta có $V = Sh$.

Chọn đáp án C □

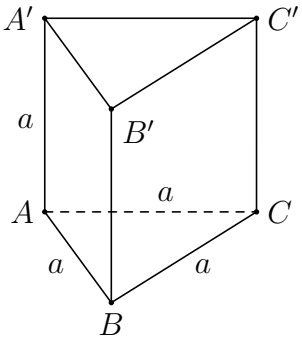
Câu 9. Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là:

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.

Theo giả thiết mặt đáy của lăng trụ là tam giác đều cạnh a nên đáy có diện tích $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lăng trụ đứng chiều cao $h = a$, do vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = B \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



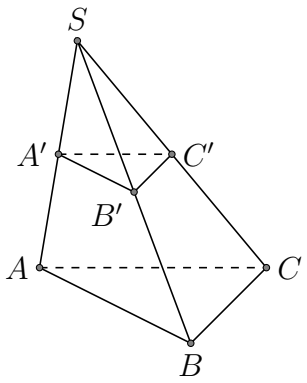
Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi $A'; B'; C'$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA; SB; SC$. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}.$



Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A,cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Biết $AB = 2a$ và $SB = 2\sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

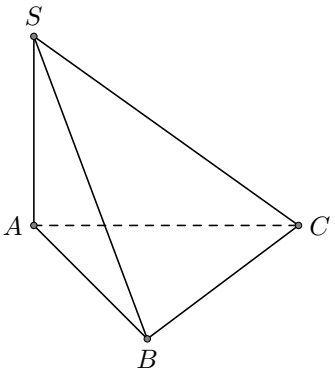
A. $V = \dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **C.** $V = 4a^3$. **D.** $V = 8a^3$.

Lời giải.

ΔSAB vuông tại A có $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 4a^2$ nên $SA = 2a$.

Có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = 2a^2$.

Có $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}2a \cdot 2a^3 = \dfrac{4}{3}a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 13. Viết công thức tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là B (đvdt) và chiều cao có độ dài là h.

A. $V = B^2h$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **D.** $V = 3Bh$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng a và khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $4a$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho?

A. $V = 9\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 6\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy: $S = 6 \cdot S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Khi đó thể tích của khối lăng trụ là: $V = S \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot 4a = 6\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Thể tích khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương cạnh $2a$ là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

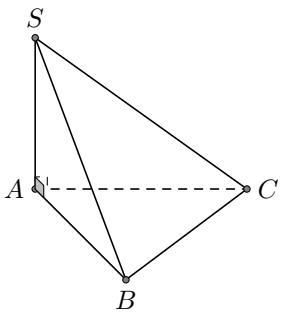
Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2$, tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 17. Hình lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy S thì thể tích bằng

A. $\dfrac{1}{6}Sh$. **B.** $\dfrac{1}{3}Sh$. **C.** $\dfrac{1}{2}Sh$. **D.** Sh.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Sh$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính thể tích V của khối chóp $D'.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3}{4}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$, chiều cao $D'D = a$.

Do đó $V_{D'.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot D'D = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot a = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho lăng trụ tam giác đều, có độ dài tất cả các cạnh bằng 2. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = 2\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Diện tích đáy tam giác đều cạnh 2 là $S = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = S \cdot h = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho lăng trụ tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao $2a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $2a^3$.

Lời giải.

Đáy của lăng trụ tứ giác đều là hình vuông cạnh a nên diện tích đáy $S = a^2$. Khi đó thể tích lăng trụ là: $V = S.h = a^2.2a = 2a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tính thể tích khối hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh xuất phát từ một đỉnh là $2a$, $3a$, $4a$.

A. a^3. **B.** $9a^3$. **C.** $24a$. **D.** $24a^3$.

Lời giải.

Gọi x, y, z là 3 cạnh của hình hộp chữ nhật.

Ta có: $V = x.y.z = 2a.3a.4a = 24a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Diện tích đáy của khối chóp có chiều cao bằng h và thể tích bằng V là

A. $B = \dfrac{6V}{h}$. **B.** $B = \dfrac{3V}{h}$. **C.** $B = \dfrac{2V}{h}$. **D.** $B = \dfrac{V}{h}$.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}Bh \Rightarrow B = \dfrac{3V}{h}$.

Chọn đáp án (B) □

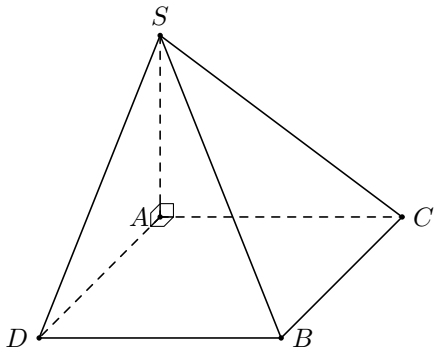
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2 = a^3.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho khối chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm và cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Tính thể tích khối chóp này.

A. $7\,000\sqrt{2}$ cm^3. **B.** $6\,000$ cm^3. **C.** $6\,213$ cm^3. **D.** $7\,000$ cm^3.

Lời giải.

Diện tích đáy

$$S=\sqrt{\frac{20+21+29}{2}\left(\frac{20+21+29}{2}-20\right)\left(\frac{20+21+29}{2}-21\right)\left(\frac{20+21+29}{2}-29\right)}=210\text{ cm}^2.$$

Thể tích khối chóp

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 210\cdot 100=7\,000\text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi S là tổng diện tích của tất cả các mặt đa diện. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=20\sqrt{3}$. **B.** $S=20$. **C.** $S=10\sqrt{3}$. **D.** $S=10$.

Lời giải.

Tổng diện tích tất cả các mặt đa diện

$$S=20\cdot\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=20\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Hình lập phương có đường chéo của mặt bên bằng 4 cm. Tính thể tích khối lập phương đó.

A. $8\sqrt{2}$ cm^3. **B.** $16\sqrt{2}$ cm^3. **C.** 8 cm^3. **D.** $2\sqrt{2}$ cm^3.

Lời giải.

Độ dài các cạnh hình lập phương là $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ cm.

Thể tích khối lập phương là $V=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$ cm^3.

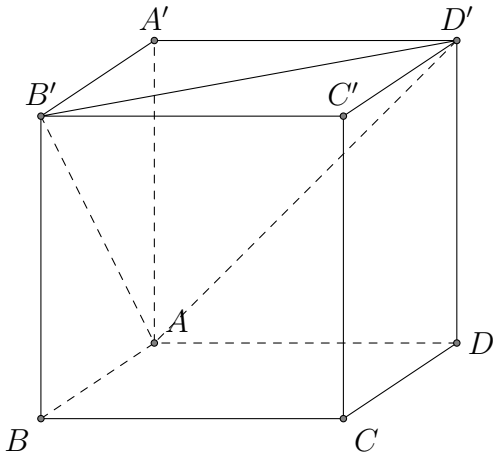
Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2$ cm; $AD=5$ cm; $AA'=3$ cm. Tính thể tích khối chóp $A.A'B'D'$

A. 5 cm^3. **B.** 10 cm^3. **C.** 20 cm^3. **D.** 15 cm^3.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'D'}=\dfrac{1}{3}\cdot AA'\cdot\dfrac{1}{2}\cdot A'B'\cdot A'D'=5$ cm^3.



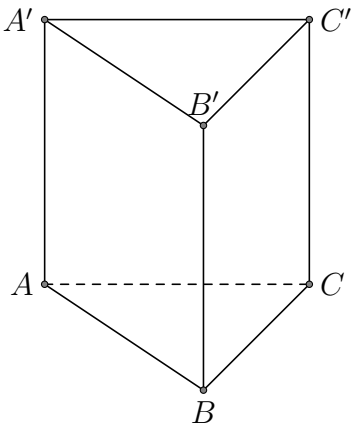
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính thể tích của (H).

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đứng, tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho khối chóp có thể tích $V = 36$ cm^3 và diện tích mặt đáy $B = 6$ cm^2. Tính chiều cao của khối chóp.

A. $h = 18$ cm. **B.** $h = \dfrac{1}{2}$ cm . **C.** $h = 6$ cm . **D.** $h = 72$ cm .

Lời giải.

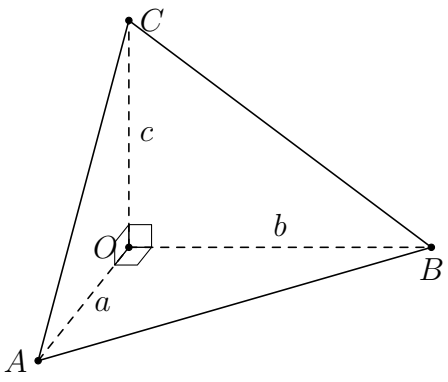
Từ công thức thể tích khối chóp, ta suy ra $h = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{3 \cdot 36}{6} = 18$ cm.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích khối tứ diện $O.ABC$.

A. $\dfrac{abc}{3}$. **B.** $\dfrac{abc}{4}$. **C.** $\dfrac{abc}{6}$. **D.** $\dfrac{abc}{2}$.

Lời giải.



Ta có: $V_{O.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta BOC} \cdot OA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}bca = \dfrac{1}{6}abc$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $2a^2$ và cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $18a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

$V = S_{\text{đáy}}h = 2a^2 \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $2a^2$ và cạnh bên bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $18a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ đứng $V = 2a^2 \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại B có $AB = a, BC = 2a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

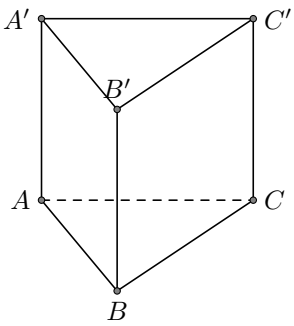
A. $2a^3$. **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $4a^3$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng bao nhiêu?

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = AA' \cdot S_{ABC} = 2a \cdot \dfrac{a \cdot 2a\sqrt{3}}{2} = 2a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}abc$. **B.** $3abc$. **C.** abc. **D.** $\dfrac{1}{2}abc$.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích của ba kích thước. Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = abc$.

Nhận xét: Bài này đề gốc cho $AC = c$ nên không có phương án đúng. Tôi sửa đề thành $AA' = c$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = 3a^3$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 3a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Thể tích của khối chóp có diện tích mặt đáy bằng B, chiều cao bằng h được tính bởi công thức

A. $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = \dfrac{1}{2}Bh$. **D.** $V = 3Bh$.

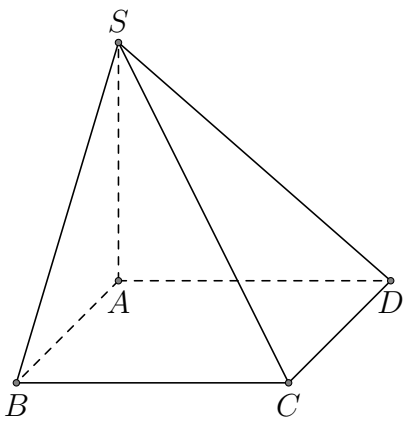
Lời giải.

Công thức tính thể tích chóp.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, thể tích của khối chóp bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



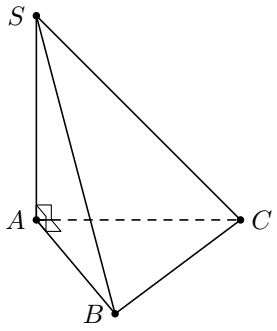
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \times SA \times S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times a\sqrt{3} \times a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 3a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** a^3.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}2a \cdot 3a = 3a^2$.
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot a = a^3$.



Chọn đáp án D □

Câu 40. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **C.** $V=\dfrac{1}{2}Bh$. **D.** $V=Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là $V=Bh$.

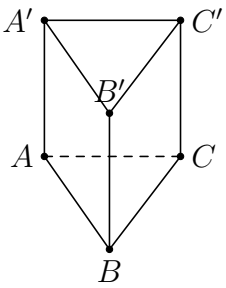
Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a$, $AA'=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2a)^2=\sqrt{3}a^2$.
Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\triangle ABC}AA'=\sqrt{3}a^2\cdot a\sqrt{3}=a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 42. Nếu cạnh của một hình lập phương tăng lên gấp 3 lần thì thể tích của hình lập phương đó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

$V'=(3a)^3=3^3\cdot a^3=27V$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA'=\dfrac{1}{2}SA$, $SB'=\dfrac{1}{3}SB$; $SC'=\dfrac{1}{4}SC$. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{1}{24}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V'_{SA'BC}}{V_{SABC}}=\dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SB'}{SB}\cdot\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$.

Chọn đáp án C □

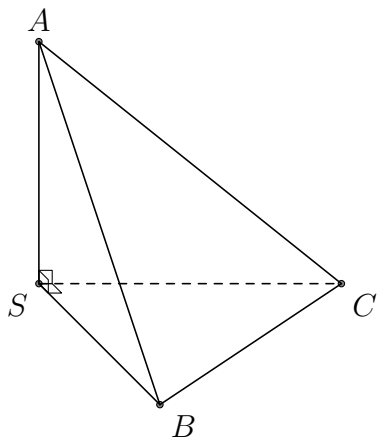
Câu 44. Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA=3a$, $SB=4a$, $SC=5a$. Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $SABC$.

A. $V=20a^3$. **B.** $V=10a^3$. **C.** $V=\dfrac{5a^3}{2}$. **D.** $V=5a^3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SC \\ SA \perp SB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$.

Nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SB \cdot SC = 10a^3$.



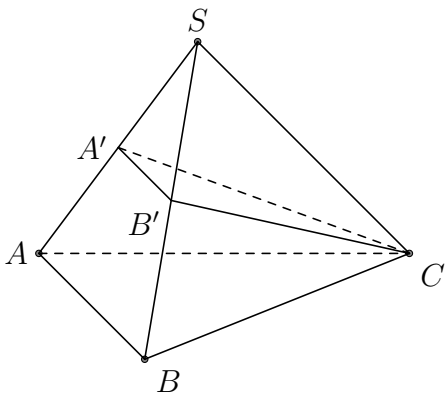
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ và $S.ABC$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.



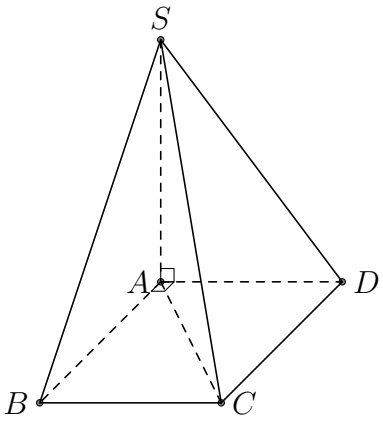
Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot 2a = \dfrac{a^3}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Thể tích V của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích bằng B là

A. $V = Bh$. **B.** $V = \frac{1}{6}Bh$. **C.** $V = \frac{1}{3}Bh$. **D.** $V = \frac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Ta có $V = hB$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Thể tích V của khối hộp chữ nhật đó là

A. $V = (a+b)c$. **B.** $V = \frac{1}{3}abc$. **C.** $V = abc$. **D.** $V = (a+c)b$.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là: $V = abc$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho khối tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 2OB = 3OC = 3a$. Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng

A. $6a^3$. **B.** $\frac{4a^3}{3}$. **C.** $9a^3$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $OA = 3a, OB = \frac{3a}{2}, OC = a \Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{3a^3}{4}$.

Chọn đáp án D □

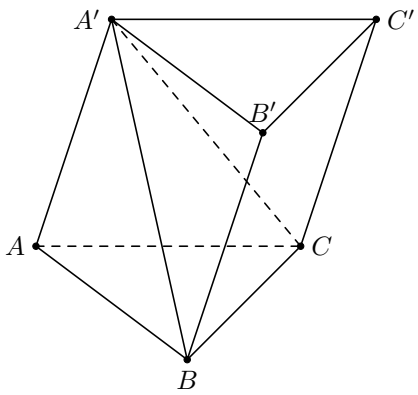
Câu 50. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{A'BC} \cdot d(A,(A'BC)) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 2$.



Chọn đáp án C □

Câu 51. Thể tích của một khối lăng trụ có đường cao bằng $3a$ diện tích mặt đáy bằng $4a^2$ là

A. $12a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $4a^2$. **D.** $12a^2$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là S và chiều cao h là $V = S \cdot h$.

Cách giải: Thể tích của khối lăng trụ đó là: $V = S \cdot h = 4a^2 \cdot 3a = 12a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là: a^3.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $3a^3$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot SD \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot a = 3a^3$.

Chọn đáp án D □

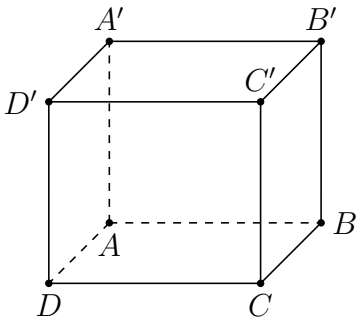
Câu 54. Trong không gian, cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$ m, $AA' = 3$ m và $BC = 2$ m. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật đó.

A. $V = \sqrt{5}$ m^3. **B.** $V = 6$ m^3. **C.** $V = 3$ m^3. **D.** $V = 3\sqrt{5}$ m^3.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = AB \cdot AD \cdot AA' = AB \cdot BC \cdot AA' = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^3.$$



Chọn đáp án B □

Câu 55. Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng $(2a)^3 = 8a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = \sqrt{3}; SB = 2; SC = 3$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 57. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 4, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 6$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $24\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.6.\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Một khối lăng trụ và một khối chóp có cùng diện tích đáy và chiều cao thì thể tích của khối lăng trụ gấp bao nhiêu lần thể tích khối chóp?

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 59. Cho khối lăng trụ có $B > 0$ là diện tích mặt đáy, $a > 0$ là khoảng cách từ đỉnh tới mặt đáy. Thể tích của khối lăng trụ đó được cho bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = B \cdot a$. **B.** $V = \dfrac{1}{3}B \cdot a$. **C.** $V = \dfrac{1}{2}B \cdot a$. **D.** $V = \dfrac{1}{6}B \cdot a$.

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy là 5, chiều cao có số đo gấp 3 lần diện tích đáy. Thể tích của khối chóp đó là

A. $\dfrac{125}{3}$. **B.** 125. **C.** $\dfrac{25}{3}$. **D.** 25.

Câu 61. Tính thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy là B và chiều cao h.

A. $V = Bh$. **B.** $V = \dfrac{1}{4}Bh$. **C.** $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **D.** $V = \dfrac{1}{2}Bh$.

Câu 62. Thể tích khối lập phương có cạnh a là

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 63. Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $V = \dfrac{1}{2}Bh$. **B.** $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **C.** $V = \dfrac{1}{3}B^2h$. **D.** $V = Bh$.

Câu 64. Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

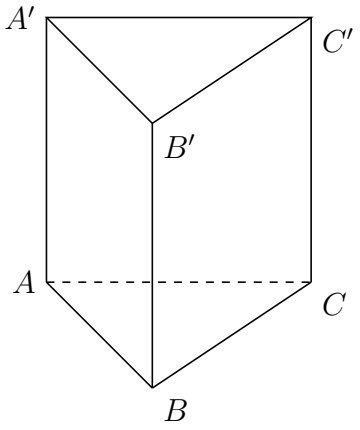
A. $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = 3Bh$. **D.** $V = Bh^2$.

Câu 65. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi B là diện tích một đáy của lăng trụ, V là thể tích của lăng trụ. Tính chiều cao h của lăng trụ.

A. $h = \dfrac{3V}{\mathrm{B}}$. **B.** $h = \dfrac{B}{\mathrm{V}}$. **C.** $h = \dfrac{V}{\mathrm{B}}$. **D.** $h = \dfrac{V}{3\mathrm{B}}$.

Lời giải.

Ta có: $V = B.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{B}$.



Chọn đáp án C □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có diện tích bằng 12 cm^2. Cạnh bên $SA = 2$ cm và $SA \perp (ABC)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. 24 cm^3. **B.** 6 cm^3. **C.** 12 cm^3. **D.** 8 cm^3.

Câu 67. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

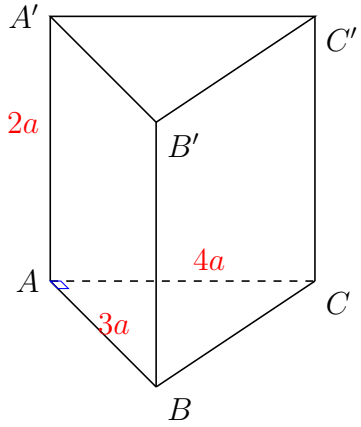
Câu 68. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 3a, AC = 4a$, cạnh bên $AA' = 2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $12a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

Ta có: $S_{ABC} = 6a^2; h = AA' = 2a$

Vậy $V = 12a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $6a^3$. **B.** $2a^2$. **C.** $2a^3$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.3a.a.2a = 2a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ có thể tích là:

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AC = 2a$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích lăng trụ đó là:

A. $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $4\sqrt{2}a^3$. **D.** $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Ta có: $AC = 2a \Rightarrow AB = \sqrt{2}a$.

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2a^2$.

Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = a\sqrt{2}.2a^2 = 2\sqrt{2}a^3$.

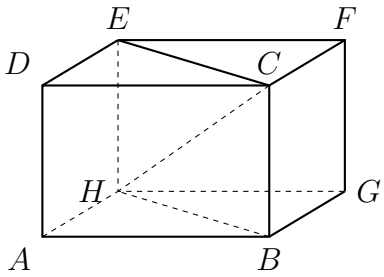
Chọn đáp án D □

Câu 72. Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c.

A. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **B.** $\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. **C.** $\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$. **D.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.

Giả sử hình hộp chữ nhật $ABCD.HGFE$ có $AB = a, AD = b, AH = c$. Mặt chéo $BCEH$ là hình chữ nhật có đường chéo $CH = \sqrt{BC^2+BH^2} = \sqrt{BC^2+AB^2+AH^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 73. Một khối lăng trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $V=\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V=4a^3$. **D.** $V=\dfrac{4a^2}{3}$.

Lời giải.

$V=B\cdot h=2a^2\cdot 2a=4a^3$.

Chọn đáp án C ☐

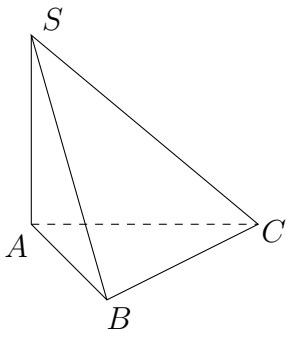
Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Lời giải.

Có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 75. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $AC=a\sqrt{5}$. Mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

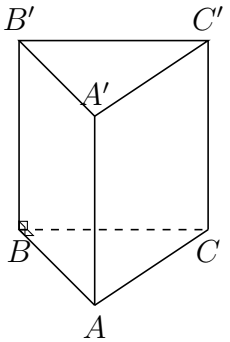
A. $V=\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=3\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=4a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải.

Ta có: $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a$

Vì $BCC'B'$ là hình vuông nên $BB'=BC=2a$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V=B.h=\dfrac{1}{2}BA.BC.BB'=\dfrac{1}{2}.a.2a.2a=2a^3$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 76. Tính thể tích của khối lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

A. $V=9a^3$. **B.** $V=3\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=27a^3$. **D.** $V=\sqrt{3}a^3$.

Câu 77. Gọi B,h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của một khối chóp. Thể tích V của khối chóp đó được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\dfrac{1}{2}Bh$. **C.** $V=Bh$. **D.** $V=\dfrac{1}{6}Bh$.

Câu 78. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A. Biết $SA=\dfrac{3a}{2}, AB=a, AC=4a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $2a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 79. Một lăng trụ có chiều cao là $6dm$; diện tích một mặt đáy là $120cm^2$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=7200cm^3$. **B.** $V=72000cm^3$. **C.** $V=720cm^3$. **D.** $V=240cm^3$.

Câu 80. Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có bao nhiêu mặt?

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 81. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân tại C. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=4a$, $SB=6a$, thể tích khối chóp $SABC$ bằng

A. $\dfrac{8\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{16\sqrt{5}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$.

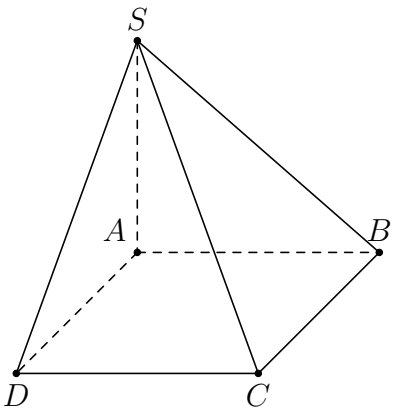
Câu 82. Cho hình khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=3a$ và vuông góc với đáy. Khi đó thể tích khối chóp là

A. a^3 . **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $3a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy là $B=a^2$.

Thể tích $V=\dfrac{1}{3}Bh=\dfrac{1}{3}\cdot a^2\cdot 3a=a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=4a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

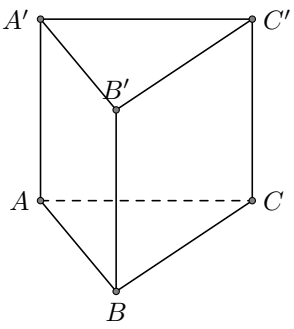
A. a^3. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA'\perp(ABC)$, suy ra $AA'=4a$ là chiều cao của lăng trụ đã cho.

Do $\triangle ABC$ đều, suy ra diện tích đáy $S_{\triangle ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ $V=AA'\cdot S_{\triangle ABC}=4a\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 84. Khối lăng trụ có diện tích đáy là S và chiều cao là h thì thể tích của khối lăng trụ đó là

A. $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$. **B.** $\frac{1}{2} S \cdot h$. **C.** $S \cdot h$. **D.** $\frac{1}{6} S \cdot h$.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích khối lăng trụ là $V = S \cdot h$.

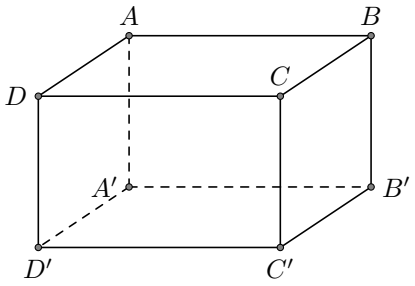
Chọn đáp án C □

Câu 85. Thể tích khối hộp chữ nhật có chiều dài ba kích thước là 2 cm, 3 cm, 4 cm là

A. 24 cm^3. **B.** 9 cm^3. **C.** 18 cm^3. **D.** 30 cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ cm^3.

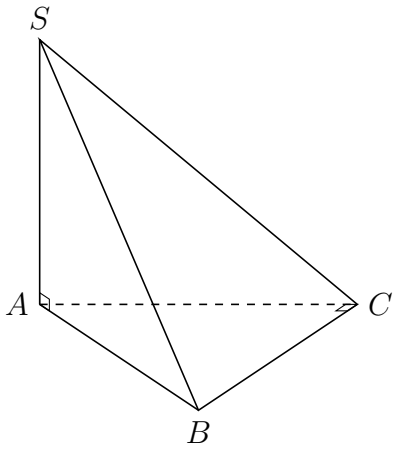


Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, biết $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại C nên $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

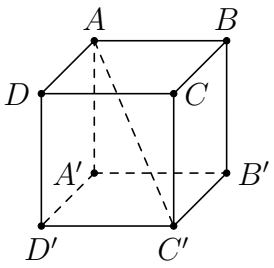
Chọn đáp án C □

Câu 87. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = 2a\sqrt{3}$.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi $x > 0$ là độ dài cạnh của hình lập phương. Ta có đường chéo hình lập phương $AC' = x\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a$. Vậy thể tích hình lập phương là $V = x^3 = 8a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $3a^3$. **D.** a^3.

Lời giải.

Ta có $V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $9a^3$. **C.** a^3. **D.** $3a^3$.

Lời giải.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.3a.a^2 = a^3$

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Viết công thức tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy là B và chiều cao có độ dài là h.

A. $V = B^2h$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = \dfrac{1}{3}Bh$. **D.** $V = 3Bh$.

Lời giải.

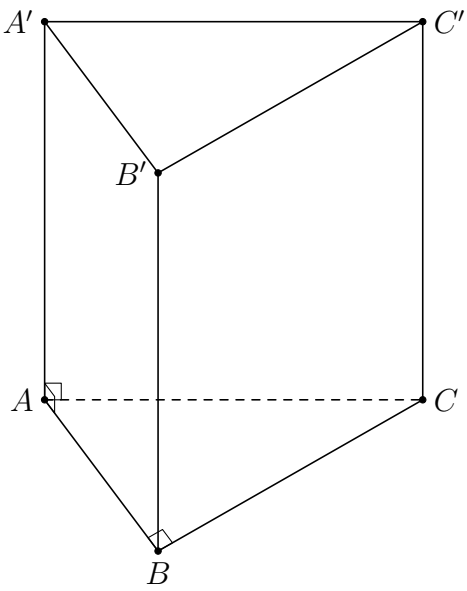
Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại B có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $2a^3$. **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $4a^3$.

Lời giải.

Do giả thiết $AA' \perp (ABC)$ và gọi V là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ ta có
$V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AA' \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \cdot 2a = 2a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $2a$.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $2a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

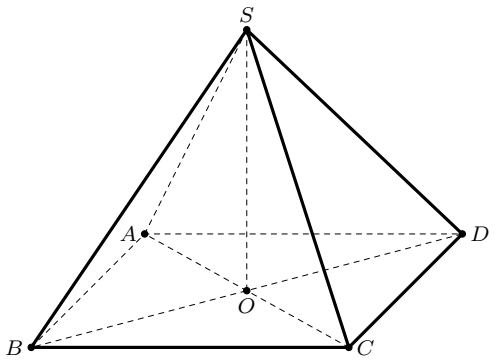
Ta có $V = S \cdot h = 2a \cdot \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 93. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Tính thể tích khối chóp (H).

A. $\dfrac{1}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Lời giải.



Xét hình vuông $ABCD$, có OC là nửa đường chéo $\Rightarrow OC = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có ΔSOC vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

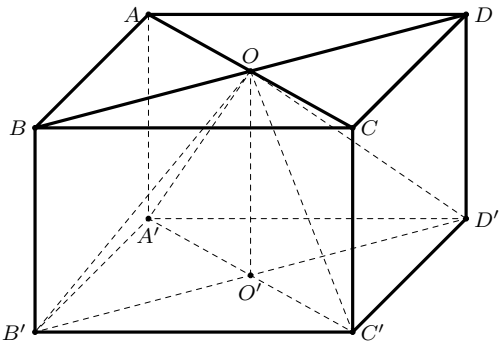
Vậy thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3} \times SO \times AB^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 94. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có O là giao điểm của AC và BD. Khi đó tỉ số thể tích của khối chóp $O.A'B'C'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{1}{4}$. **D**. $\frac{1}{6}$.

Lời giải.



$$\begin{aligned} V_{O.A'B'C'D'} &= \frac{1}{3} \times OO' \times S_{A'B'C'D'}. \\ V_{ABCD.A'B'C'D'} &= AB \times S_{A'B'C'D'} \\ &= OO' \times S_{A'B'C'D'}. \\ \Rightarrow \frac{V_{O.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 95. Khối đa diện nào sau đây có công thức tính thể tích là $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao)?

A. Khối lăng trụ. **B**. Khối chóp. **C**. Khối lập phương. **D**. Khối hộp chữ nhật.

Lời giải.

Vì khối lập phương và và khối hộp chữ nhật đều là khối lăng trụ nên ta đều có công thức tính thể tích chung là $V = Bh$.

Chỉ có khối chóp có công thức tính thể tích là $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Trong cách mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

B. Hai khối chóp có chiều cao và diện tích đáy tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

C. Hai khối hộp lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

D. Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

Lời giải.

Xét hai hình hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt là 3, 3, $\frac{1}{2}$ và 2, 2, 2. Dễ thấy hai khối hộp này cùng có diện tích toàn phần là 24 nhưng thể tích lần lượt là $\frac{9}{2}$ và 8.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Khi tăng độ dài tất cả các cạnh của một khối hộp chữ nhật lên gấp đôi thì thể tích khối hộp tương ứng sẽ thay đổi như thế nào?

A. Tăng 8 lần. **B**. Tăng 6 lần. **C**. Tăng 2 lần. **D**. Tăng 4 lần.

Lời giải.

Giả sử các kích thước của khối hộp đó là a, b, c và V là thể tích khối hộp đó.

Thể tích khối hộp sau khi tăng gấp đôi độ dài mỗi cạnh là

$$(2a)(2b)(2c) = 8abc = 8V.$$

Thể tích khối hộp tăng lên 8 lần.

Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h = a$, diện tích tam giác ABC là $3a^2$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $3a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 3a^2 = a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai khối chóp có hai đáy là tam giác đều bằng nhau thì thể tích bằng nhau.

B. Hai khối đa diện có thể tích bằng nhau thì bằng nhau.

C. Hai khối đa diện bằng nhau có thể tích bằng nhau.

D. Hai khối lăng trụ có chiều cao bằng nhau thì thể tích bằng nhau.

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Nếu tăng độ dài cạnh đáy lên 2 lần và độ dài đường cao không đổi thì thể tích $S.ABC$ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 3. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Nếu tăng độ dài cạnh đáy lên 2 lần thì diện tích đáy tăng lên 4 lần, mà chiều cao có độ dài không đổi nên thể tích $S.ABC$ tăng lên 4 lần.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. A	4. C	5. B	6. B	7. D	8. C	9. B	10. D
11. C	12. B	13. B	14. B	15. A	16. B	17. D	18. C	19. A	20. D
21. D	22. B	23. C	24. D	25. A	26. B	27. A	28. C	29. A	30. C
31. D	32. D	33. A	34. D	35. C	36. C	37. A	38. A	39. D	40. D
41. B	42. A	43. C	44. B	45. B	46. A	47. A	48. C	49. D	50. C
51. A	52. C	53. D	54. B	55. A	56. C	57. B	58. B	59. A	60. D
61. A	62. D	63. B	64. A	65. C	66. D	67. A	68. A	69. C	70. D
71. D	72. D	73. C	74. D	75. D	76. B	77. A	78. B	79. A	80. A
81. A	82. A	83. C	84. C	85. A	86. C	87. A	88. C	89. C	90. B
91. A	92. C	93. B	94. A	95. B	96. D	97. A	98. B	99. C	100. B

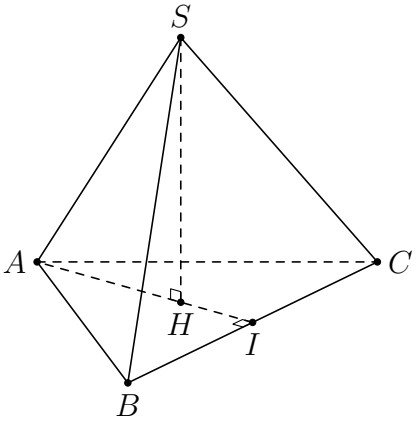
2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC). Khối chóp $S.ABC$ đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC.



Xét tam giác ABI ta có

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì H là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$AH = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lại có AH là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC). Suy ra $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,AH)} = 30^\circ$.

Xét tam giác SAH ta có

$$SH = \tan 30^\circ \cdot AH = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

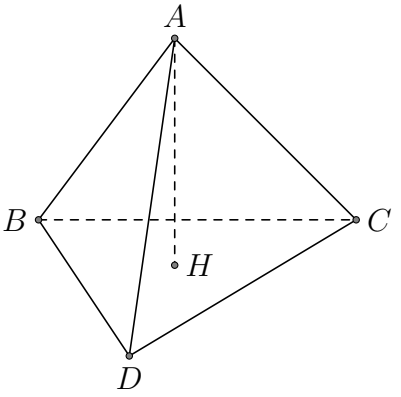
Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp đó là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{36}$.

Lời giải.

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là $\widehat{SAH} = 60^\circ$.



$AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Do đó $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

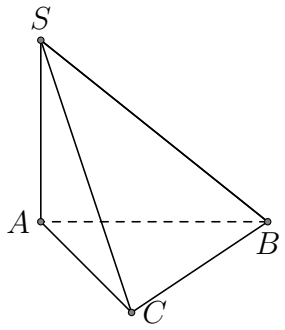
Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{4a^3}{3V}$ có giá trị là

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{160}$.

Lời giải.

Ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{36a^2 - 16a^2} = 2a\sqrt{5}$
$\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$.
Do đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2}(2a\sqrt{2})^2 = 4a^2$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ASC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{5} \cdot 4a^2 = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}a^3 \Rightarrow \dfrac{4a^3}{3V} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

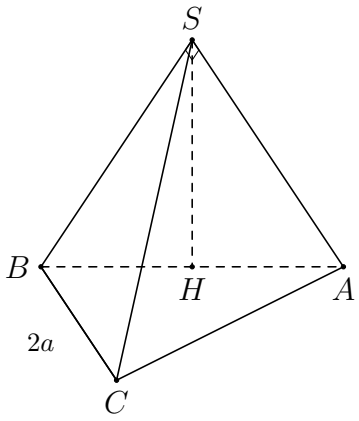


Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, tam giác SAB vuông cân tại S. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

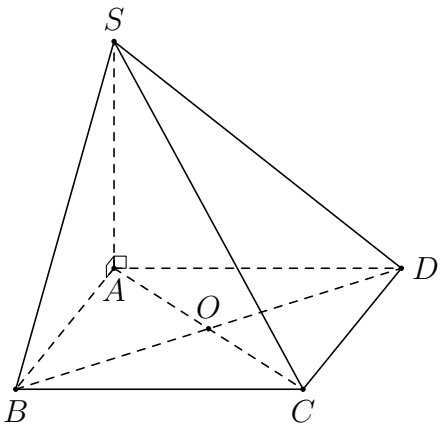


Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$ Vì $(ABC) \cap (ABC) = AB$ và $(ABC) \perp (ABC)$.
Ta có: $SH = \dfrac{AB}{2} = a$ (Do SAB là tam giác vuông cân tại S cạnh huyền $AB = 2a$).
Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = (2a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.
Vậy thể tích khối chóp $SABC$ là: $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\sqrt{3}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình chop $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AC = a\sqrt{5}, SC = 3a$. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

A. $4a^3$. **B.** $\dfrac{4a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$.
Tam giác SAC vuông tại A nên $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 2a$.
Thể tích hình chóp $SABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.2a.2a^2 = \dfrac{4}{3}a^3$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$ có hình chiếu A' lên $mp(ABCD)$ là trung điểm AB, $ABCD$ là hình thoi cạnh 2a, góc $\widehat{ABC} = 60°$, BB' tạo với đáy một góc 30°. Tính thể tích hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải.

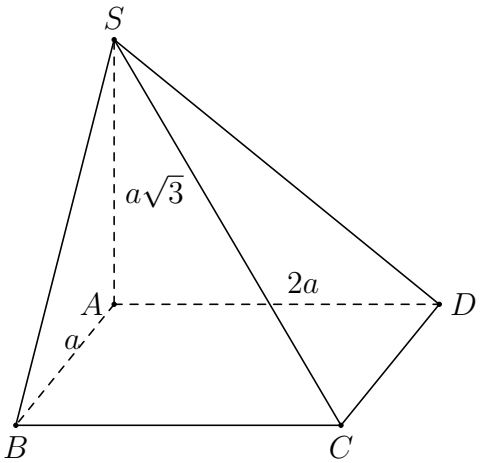
Gọi H là hình chiếu của A' trên $mp(ABCD)$. Dễ thấy góc $\measuredangle(BB'; mp(ABCD)) = \measuredangle(AA'; mp(ABCD)) = \measuredangle A'AH = 30^o$
$AH = a \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Dễ dàng tính được diện tích đáy: $S_{ABCD} = 2.(2a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.
Suy ra: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot \dfrac{1}{2} AB \cdot BC = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

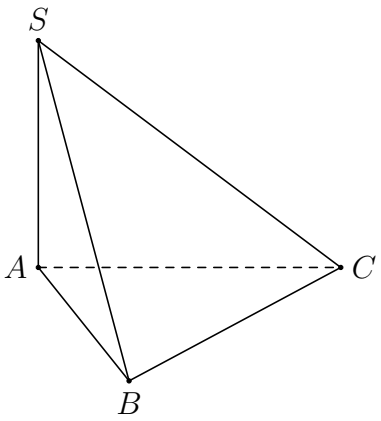
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow$ Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.S_{\triangle ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 9. Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 50 m, chiều rộng 19 m. Biết rằng trong hồ bơi có 1900000 lít nước. Độ sâu của hồ bơi lúc này là

A. 1,8 m. **B.** 1,4 m. **C.** 1,6 m. **D.** 2 m.

Lời giải.

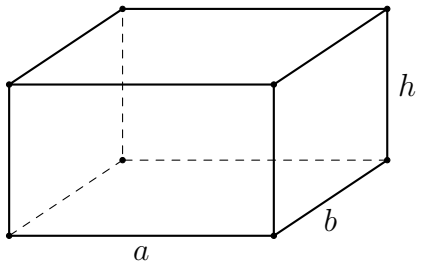
Vậy, độ sâu của hồ bơi lúc này là 2 m.

Phương pháp:

Công thứ tính thể tích khối hộp chữ nhật là: $V = abh$.

Cách giải: Đổi 1900000 lít = 1900 m^3.

Theo đề bài ta có: $1900 = 50.19.h \Leftrightarrow h = 2$ m.



Chọn đáp án D □

Câu 10. Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của nó tăng lên

A. 18 lần. **B.** 54 lần. **C.** 9 lần. **D.** 27 lần.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

Cách giải:

Giả sử hình chóp có chiều cao là h và cạnh đáy là a. Thể tích khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3}.a^2.h$.

Khi chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của khối chóp là:

$$V' = \frac{1}{3}(3a)^2.3h = 27.\frac{1}{3}.a^2.h = 27V.$$

Vậy thể tích tăng 27 lần.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $A.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}$.

Và $\frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A. $V = 9a^3$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = 3a^3$. **D.** $V = 6a^3$.

Lời giải.

Ta có hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6} \Rightarrow AB = BC = CD = AD = a\sqrt{6}$.

Ta có $BD = \sqrt{DC^2 + CB^2} = 2\sqrt{a} \Rightarrow OB = \frac{BD}{2} = a\sqrt{3}$.

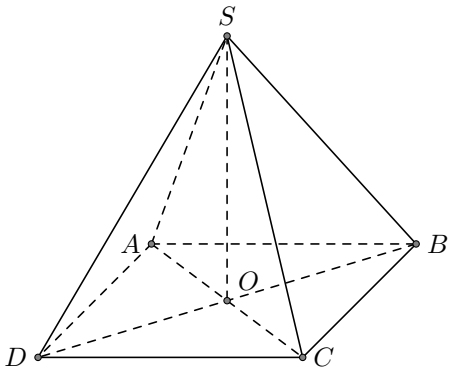
Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 3a^2$.

Vì góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60° \Rightarrow \widehat{SBO} = 60°$.

Ta có $SO = OB \cdot \tan\widehat{SBO} = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot 3a^2 = 3a^3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với O' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$. Biết rằng tứ diện $O'BCD$ có thể tích bằng $6a^3$. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = 18a^3$. **B.** $V = 54a^3$. **C.** $V = 12a^3$. **D.** $V = 36a^3$.

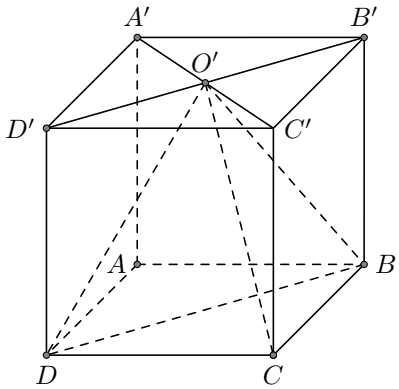
Lời giải.

Ta có: $V = AA' \cdot S_{ABCD}$

$= \mathrm{d}_{[(O';(ABCD))]} \cdot 2S_{BCD}$.

$= 6V_{O'BCD} = 36a^3$

Do đó, chọn D.



Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$.

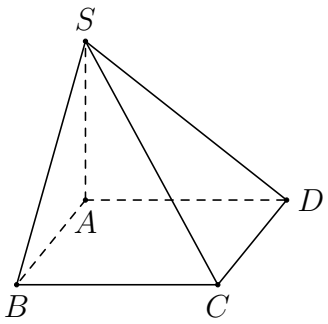
A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

Đường cao của khối chóp là $SA = 2a$.

Thể tích khối chóp $S.BCD$ là $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (B) □

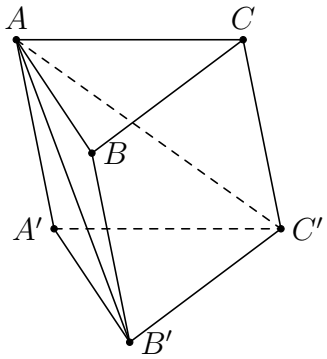
Câu 15. Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Khi đó, thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ bằng

A. $\dfrac{V}{2}$. **B.** $\dfrac{3V}{4}$. **C.** $\dfrac{2V}{3}$. **D.** $\dfrac{V}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$.

Suy ra $V_{A.BCC'B'} = V - V_{A.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

Đường chéo đáy $AC = 2\sqrt{2}a$ nên $AO = a\sqrt{2}$,

do đó chiều cao $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3}4a^2a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các mặt bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

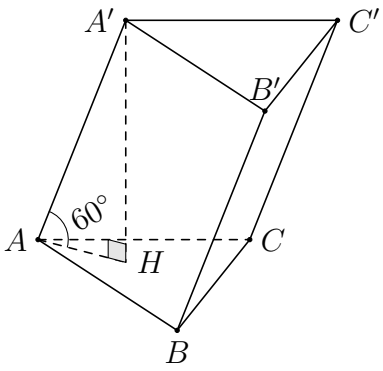
A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

Kẻ $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (A'A,(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

Xet $\triangle AHA' : \sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA' \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.



Chọn đáp án B □

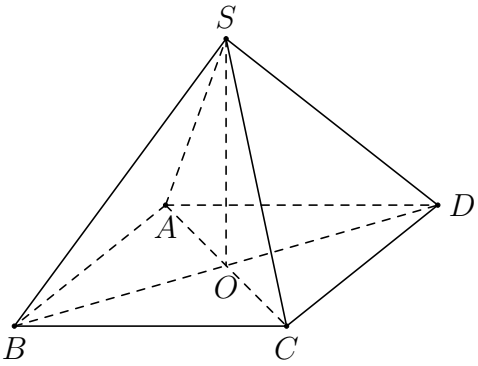
Câu 18. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, tam giác ABD đều, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $h = SO = 2a$, $S = S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hình bát diện đều cạnh 2. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Khi đó, S bằng

A. $S = 32$. **B.** $S = 8\sqrt{3}$. **C.** $S = 4\sqrt{3}$. **D.** $S = 16\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có hình bát diện đều có 8 mặt là 8 tam giác đều cạnh bằng 2.

Do đó $S = 8 \cdot 2^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

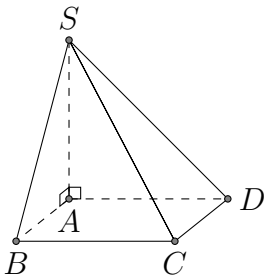
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

Tam giác SAC vuông tại A có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$.

Thể tích của khối chóp

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2a^3}{3}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\times SH\times S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy một góc 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

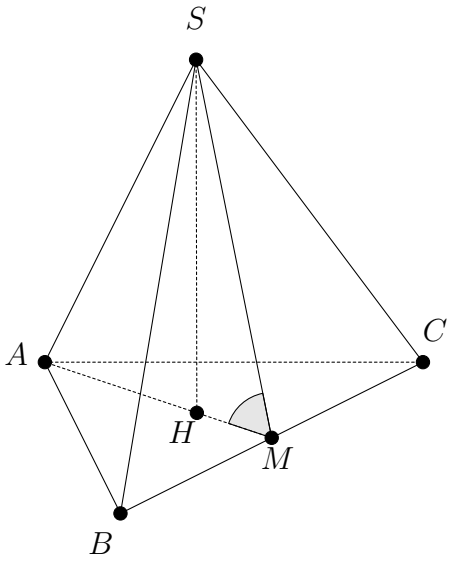
A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Tính diện tích đáy và chiều cao rồi áp dụng công thức $V=\dfrac{1}{3}Sh$ tính thể tích.

Cách giải:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC suy ra SH là đường cao.

Góc giữa mặt bên và đáy là góc giữa SM và AM với M là trung điểm của BC.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MH=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Tam giác vuông SHM có $MH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}, SMH=45^\circ$ nên $SH=HM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy thể tích $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SH=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^3}{24}$.

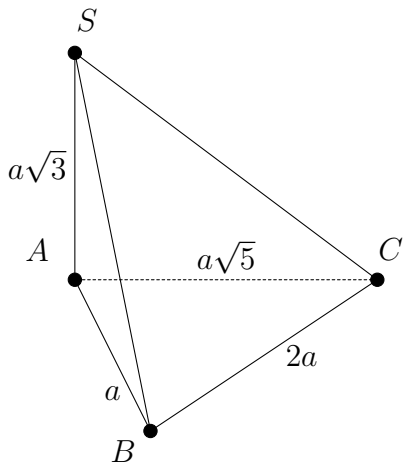
Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$, $AB=a$, $BC=2a$, $AC=a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B**. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **D**. $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:
Tính diện tích đáy và chiều cao rồi áp dụng công thức $V=\dfrac{1}{3}Sh$ tính thể tích.
Cách giải:



Xét tam giác ABC có $AB^2+BC^2=a^2+4a^2=5a^2=AC^2$.
Nên tam giác ABC vuông tại B (Định lí Pytago đảo).
Thể tích $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SA=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot SA=\dfrac{1}{6}\cdot a\cdot 2a\cdot a\sqrt{3}=\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$.

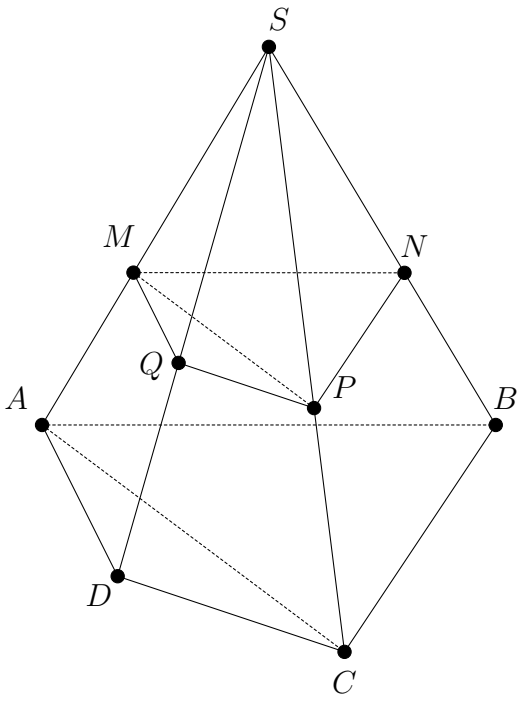
Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là 1.

A. 16. **B**. 8. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính tỉ số thể tích đối với khối chóp tam giác: $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SP}{SC}$
với M, N, P lần lượt thuộc SA, SB, SC.
Cách giải:



Ta có $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SC}\cdot\dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ $\dfrac{V_{S.MPN}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SC}\cdot\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

Suy ra $\dfrac{1}{8} = \dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{V_{S.MPN}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S.MPN}+V_{S.MPN}}{V_{S.ADC}+V_{S.ACB}} = \dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 8V_{S.MNPQ} = 8.$

Chú ý: Công thức tỉ số thể tích trên chỉ áp dụng đối với chóp tam giác.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Hình lập phương có độ dài đường chéo là 6 thì có thể tích là

A. $2\sqrt{2}$. **B**. $54\sqrt{2}$. **C**. $24\sqrt{3}$. **D**. 8.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức hình lập phương cạnh a có độ dài đường chéo chính là $a\sqrt{3}$.

Thể tích hình lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Cách giải:

Gọi độ dài cạnh hình lập phương là a, $(a > 0)$ thì độ dài đường chéo hình lập phương là $a\sqrt{3} = 6 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

Thể tích hình lập phương là $V = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 24\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Một khối lăng trụ tứ giác đều có thể tích là 4. Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ này hai lần thì được khối lăng trụ mới có thể tích là:

A. 8. **B**. 4. **C**. 16. **D**. 2.

Lời giải.

Phương pháp:

Nhận xét sự thay đổi về thể tích của khối lăng trụ theo cạnh đáy và chiều cao rồi kết luận.

Cách giải:

Gọi cạnh đáy và chiều cao khối lăng trụ đều là a; h thì thể tích $V = a^2h$.

Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ hai lần thì $V' = (2a^2) \cdot \dfrac{h}{2} = 2a^2h = 2V$.

Vậy thể tích khối lăng trụ được tăng lên 2 lần và bằng $4 \cdot 2 = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.

$(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB$,

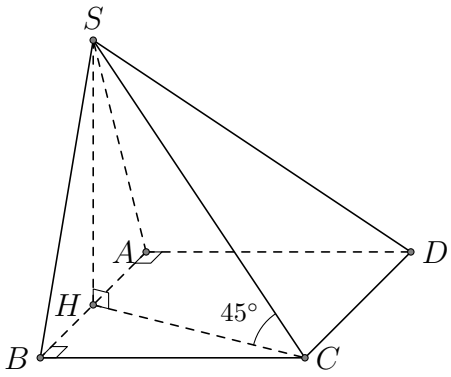
mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Do đó $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH} = 45°$.

Xét tam giác vuông BHC có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông SHC có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

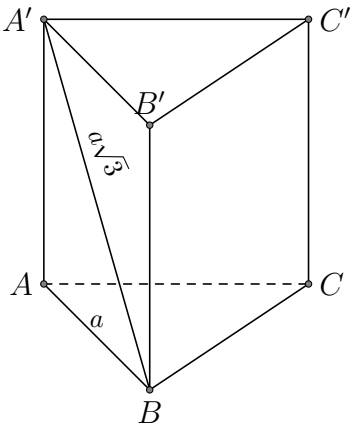
Do tam giác $A'AB$ vuông tại A nên theo Py-ta-go ta có

$$A'B^2 = AA'^2 + AB^2 \Leftrightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Lại có tam giác ABC vuông cân tại B nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{1}{2}a^2$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

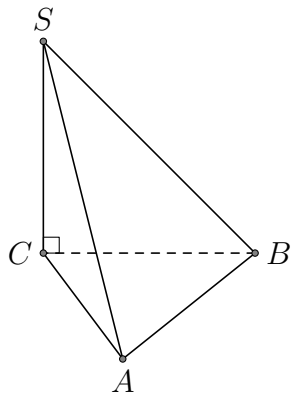
A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Đáy ABC là tam giác đều cạnh a nên diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Đường cao của hình chóp là $SC = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\dfrac{1}{3}SC \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvdt)



Chọn đáp án (D) □

Câu 30 (Kiều Văn Công). [2H1B3-1] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và diện tích toàn phần bằng $9 + 9\sqrt{3}$. Độ dài cạnh hình chóp bằng

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh của hình chóp bằng $x (x > 0)$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chóp có tất cả các cạnh bằng x nên các mặt bên là các tam giác đều cạnh bằng x.

Diện tích toàn phần của hình chóp bằng $9 + 9\sqrt{3}$ nên

$S_{ABCD} + 4S_{SAB} = 9 + 9\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 9 + 9\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2(1 + \sqrt{3}) = 9(1 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy độ dài cạnh hình chóp bằng 3.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31 (Kiều Văn Công). [2H1B3-2] Tính thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng $2a$.

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B**. $2a^3\sqrt{2}$. **C**. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

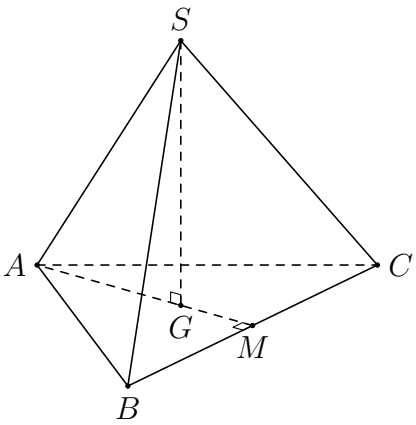
Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC.

$SG \perp (ABC), AM = a\sqrt{3}, AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.$

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}.$

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}.$



Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B**. a^3. **C**. $\dfrac{3a^3}{4}$. **D**. $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên diện tích đáy $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên đường cao là AA'.
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hình chóp đều $S.ABC$ cạnh bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích V của khối chóp $A.BCNM$ bằng

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{16}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{24}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{36}$.

Lời giải.

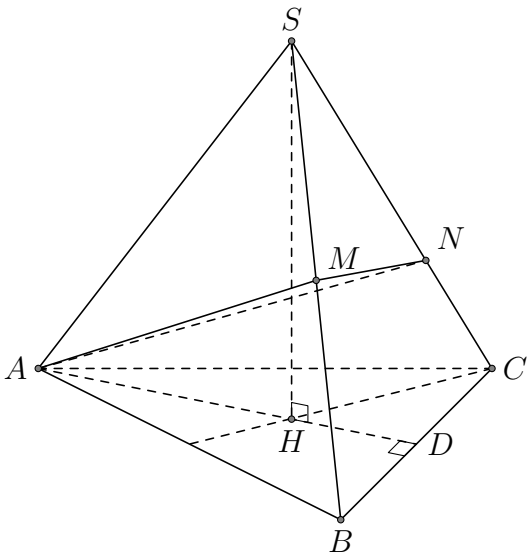
Ta có $V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN}$.
Áp dụng công thức tỉ số thể tích, ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $V_{A.BCNM} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC}$.
Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), theo tính chất hình chóp đều thì H là trọng tâm tam giác ABC.
Tam giác ABC đều cạnh a nên

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Tam giác SHA vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{33}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.
Vậy $V_{A.BCNM} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $3a^3$. **B.** $27a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

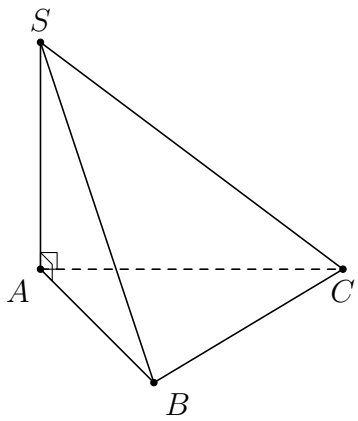
Lời giải.

Góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBA}$, do đó $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $AB = \dfrac{SA}{\tan 60^\circ} = a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \dfrac{3a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{3a^3}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của hình chóp đã cho

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AC và H là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có

$$BH = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

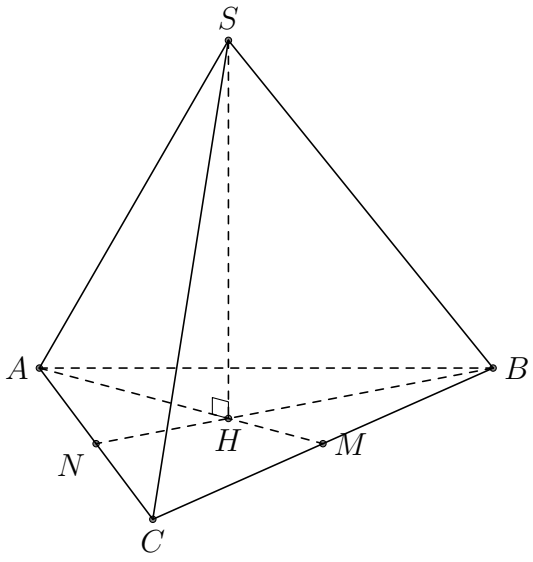
Tam giác SHB vuông tại H nên

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{21a^2}{36} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$



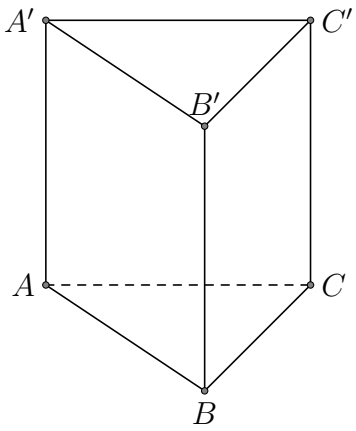
□

Câu 36. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Theo đề bài, ta có $3S_{ABB'A'} = 3a^2 \Rightarrow AB \cdot AA' = a^2 \Leftrightarrow AA' = a$.
Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



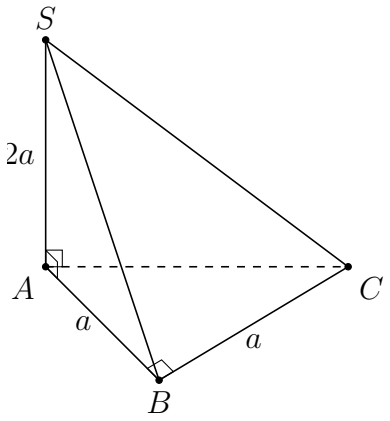
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại B nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = \dfrac{a^2}{2}$.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{a^3}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 38. Kim tự tháp Kheops (Kê-ốp) ở Ai cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m cạnh đáy dài 230 m. Tính thể tích của nó.

A. 2592100 m^3. **B.** 3888150 m^3. **C.** 7776300 m^3. **D.** 2952100 m^3.

Lời giải.

Diện tích đáy của kim tự tháp là $S = 230^2 = 54\,900$ m^2.
Thể tích của kim tự tháp $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 147 = 2\,592\,100$ m^3. □

Câu 39. Khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ có thể tích V là

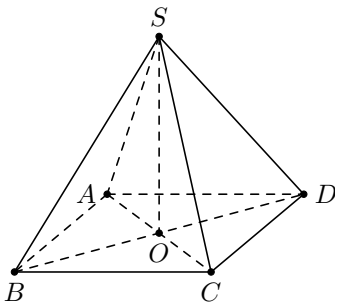
A. $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 4a^2$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AO = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{2}$.

Do vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, đường chéo $AC = 2\sqrt{2}a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. a^3. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Hạ đường cao SH của tam giác SAB.

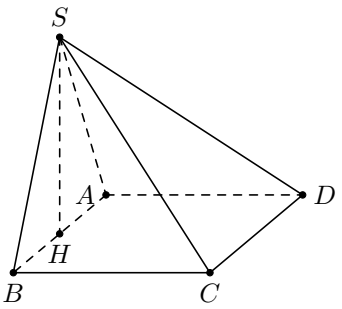
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Xét hình vuông $ABCD$ có $AC = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 2a$,

suy ra $S_{ABCD} = 4a^2$.

Trong tam giác đều SAB có $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

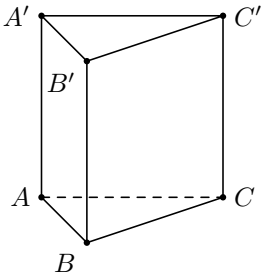
A. $V = \dfrac{1}{3}a^3$. **B.** $V = 6a^3$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{2}{3}a^3$.

Lời giải.

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a \Rightarrow BA = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Diện tích của tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = a^2$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot a^2 = a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 42. Tính chiều cao của khối lăng trụ tam giác đều biết thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$, cạnh đáy bằng a.

A. $3a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $6a$.

Lời giải.

Khối lăng trụ tam giác đều có đáy là tam giác đều.

Theo bài ra ta có đáy là tam giác đều cạnh a.

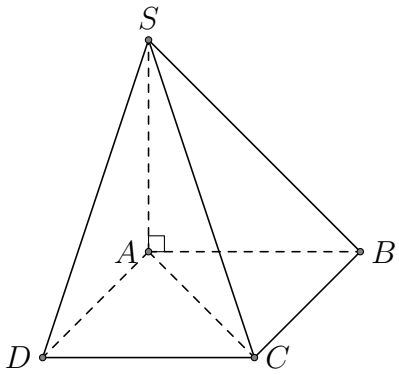
Diện tích đáy là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Gọi h là chiều cao của khối lăng trụ.
Ta có: $V = S.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có ΔABC là tam giác đều cạnh a.
$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



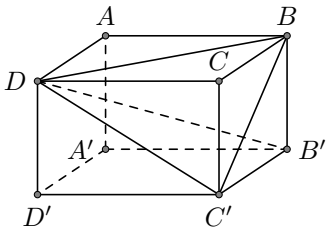
Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = 2a$. Tính thể tích khối tứ diện $BDB'C'$.

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{BDB'C'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{ABD.A'B'D'} - V_{D.B'C'D'} - V_{C'.BCD}$.
Có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a \cdot a^2 = 2a^3$, $V_{ABD.A'B'D'} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$.
Hai khối chóp $D.B'C'D'$ và $C'.BCD$ có chung chiều cao và đáy có diện tích bằng nửa hình hộp chữ nhật $\Rightarrow V_{D.B'C'D'} = V_{C'.BCD} = \dfrac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3}{3}$.
Vậy $V_{BDB'C'} = 2a^3 - a^3 - \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a^3}{3} = \dfrac{a^3}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi $A'B$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3$.

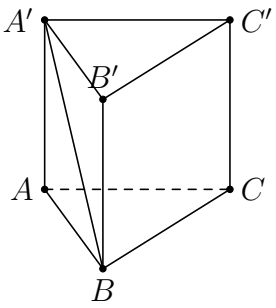
Lời giải.

Ta có: $BB' \perp (A'B'C')$ nên $\left(\widehat{A'B, (A'B'C')}\right) = \widehat{BA'B'} = 60^\circ$.

Xét tam giác $BB'A'$ vuông tại B' có $\tan 60^\circ = \dfrac{BB'}{B'A'} \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}$.

Và $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{\Delta A'B'C'} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.



Chọn đáp án (A) □

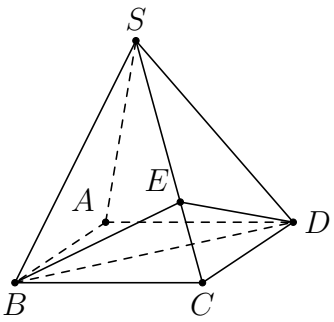
Câu 46. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $S.EBD$.

A. $V = \dfrac{1}{6}$. **B.** $V = \dfrac{1}{3}$. **C.** $V = \dfrac{1}{12}$. **D.** $V = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.EBD}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow V_{S.EBD} = \dfrac{2}{3}V_{S.BCD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 30°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

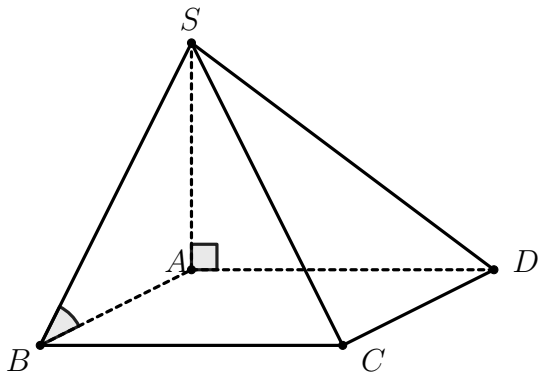
A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và đáy là $\widehat{SBA} = 30^\circ$.

Lại có $SA = AB \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

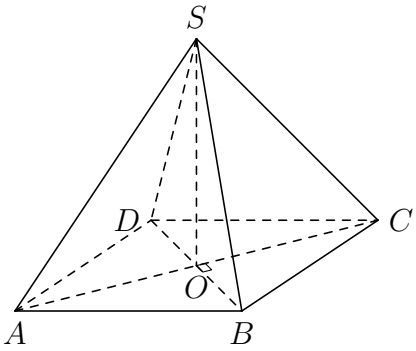
Lời giải.

Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$.
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$. Do $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Vậy SO là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.
Xét ΔSOB vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$



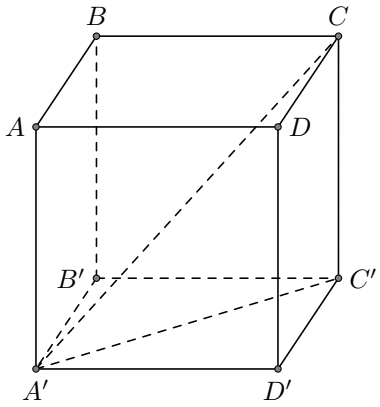
Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = a, BC = 2a, A'C = a\sqrt{21}$ có thể tích bằng

A. $4a^3$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $8a^3$. **D.** $\frac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 2a^2$.
$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.
$CC' = \sqrt{A'C^2 - A'C'^2} = \sqrt{21a^2 - 5a^2} = 4a$.
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot CC' = 2a^2 \cdot 4a = 8a^3$.



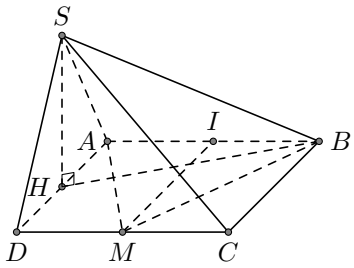
Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AD, M là trung điểm của CB, cạnh bên SB hợp với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABM$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Lời giải.

Kẻ $MI \perp AB \Rightarrow MI = a$ và $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot MI \cdot AB = \frac{a^2}{2}$.
Ta có $\widehat{SBH} = 60°$.
Xét ΔSHB vuông tại H có $\tan SBH = \tan 60° = \frac{SH}{HB} \Rightarrow SH = \sqrt{3}HB = \sqrt{3}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.
Vậy $V_{S.ABM} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.



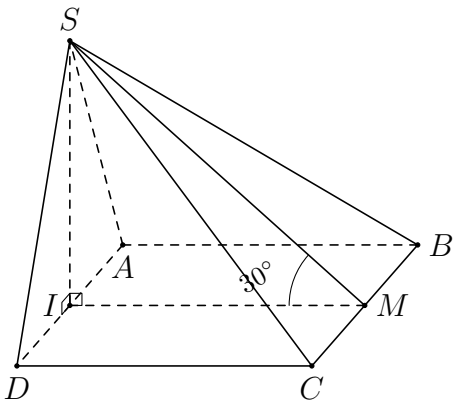
Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Góc giữa mặt phẳng (SBC) và

mặt phẳng $(ABCD)$ là 30°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là :

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



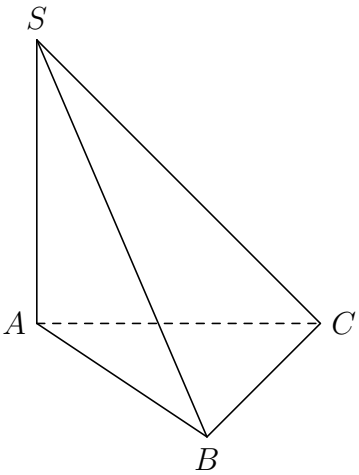
Trong tam giác đều SAD gọi I là trung điểm AD
$\Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.(Vì $(SAD) \perp (ABCD)$)
Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp IM$ (1)
Mặt khác $SI \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SI$ (2)
Từ (1), (2) suy ra $BC \perp SM$.
Vậy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là $\widehat{SMI} = 30^\circ$.
Xét tam giác vuông SIM có $IM = \dfrac{SI}{\tan 30^\circ} = 3a$ (vì tam giác SAD là tam giác đều cạnh $2a$ nên $SI = a\sqrt{3}$).
Vậy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là
$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SI = \dfrac{1}{3}AD \cdot BC \cdot SI = 2a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp biết $SC = a\sqrt{3}$.

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Từ đề bài ta có
$\begin{cases}(SAB) \perp (ABC)\\(SAC) \perp (ABC)\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC)$.
Vì tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AB = AC = BC = a$.
Tam giác SAC vuông tại A (do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$) nên theo định lí Pytago ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.
Thể tích khối chóp là
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$(đvtt).

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $V = Bh = S_{ABC} \cdot AA'$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'B.$

Và $\begin{cases} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp A'B \subset (A'BC) \\ BC = (ABC) \cap (A'BC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((ABC), (A'BC)) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'}.$

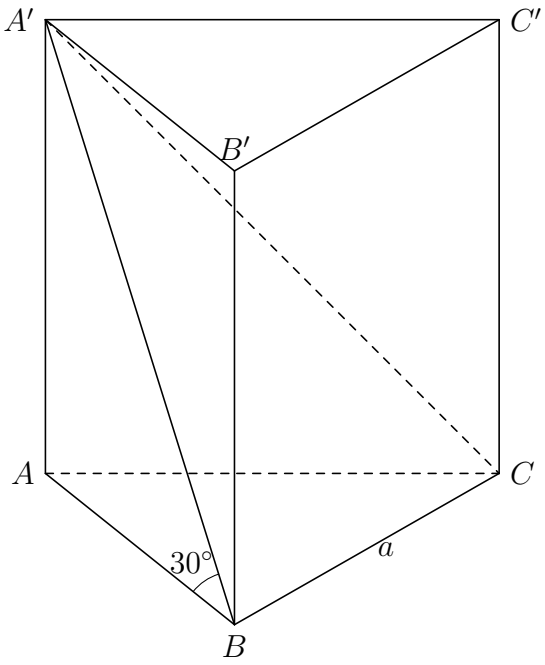
Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} A'B \cdot BC$

$\Rightarrow A'B = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}.$

$AB = A'B \cdot \cos \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cos 30^\circ = 3a.$

$AA' = A'B \cdot \sin \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \sin 30^\circ = a\sqrt{3}.$

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AA' = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$



Chọn đáp án A □

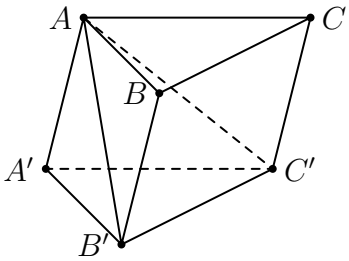
Câu 54. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối tứ diện $ABCB'C'$.

A. $\dfrac{V}{4}$. **B.** $\dfrac{V}{2}$. **C.** $\dfrac{3V}{4}$. **D.** $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} d(A, (A'B'C') S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{3} V.$

Do đó $V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = V - \dfrac{1}{3} V = \dfrac{2}{3} V.$



Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải.

Phương pháp

Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy là Svà chiều cao h là: $V = \dfrac{1}{3} Sh$.

Cách giải:

Ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} a.a^2 = \dfrac{a^3}{3}$

Chọn đáp án A □

Câu 56. Thể tích V của khối trụ có bán kính và chiều cao đều bằng 3.

A. $V = 9\pi$. **B.** $V = 12\pi$. **C.** $V = 3\pi$. **D.** $V = 27\pi$.

Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h là: $V = \pi r^2 h$.

Cách giải:

Ta có: $V = \pi r^2 h = \pi.3^2.3 = 27\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $A'.ABCD$.

A. $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

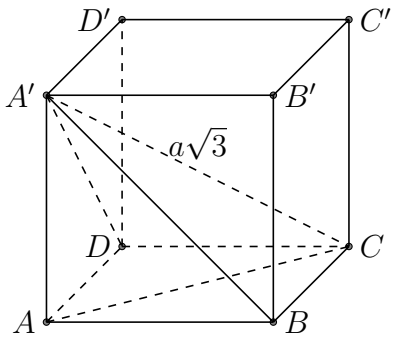
Lời giải.

Áp dụng định lí Pitago, ta có

$AC'^2 = AA^2 + AC^2 = AA^2 + AB^2 + AD^2 = 3AB^2$

$\Rightarrow 3a^2 = 3AB^2 \Rightarrow AB = a.$

Vậy $V_{A'.ABCD} = \dfrac{1}{3}AA'S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot a \cdot a^2 = \dfrac{a^3}{3}.$

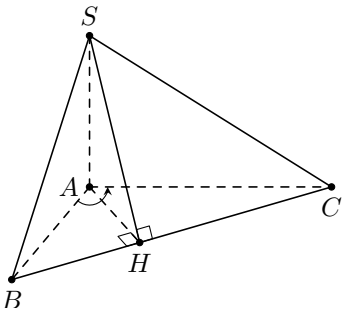


Chọn đáp án B □

Câu 58.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120°$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa (SBC) và (ABC) là $60°$.

A. $\dfrac{\sqrt{7}a^3}{14}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{21}a^3}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a^3}{14}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}a^3}{7}$.



Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Khi đó

$\begin{cases} BC \perp SA\,(SA \perp (ABC)) \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp SH.$

Có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \widehat{SHA} = 60^0.$

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}.$

Lại có $\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \sin\widehat{BAC} \\ S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC}}{BC} = \dfrac{a \cdot 2a \cdot \sin\widehat{120}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}.$

Có $\triangle SAH$ vuông tại A có $SA = 2AH \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$, có $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Nên $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{21}a^3}{14}.$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại A, $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4a^2}{3}$.

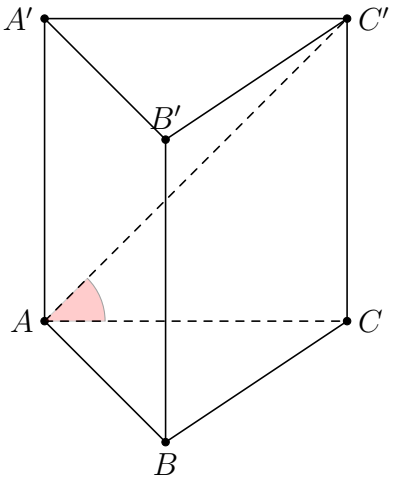
Lời giải.

Vì $C'C \perp (ABC)$ nên góc giữa AC' và (ABC) là $\widehat{CAC'}$.

Ta có : $\tan\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC} \Rightarrow CC' = AC \cdot \tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{2a \cdot 2a}{2} = 2a^2$.

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = 2a^2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 60. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

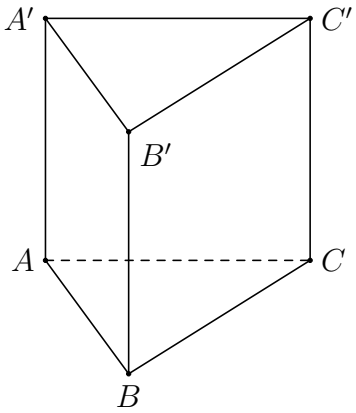
A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Diện tích đáy $B = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Độ dài đường cao của khối lăng trụ $h = 3$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = Bh = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.



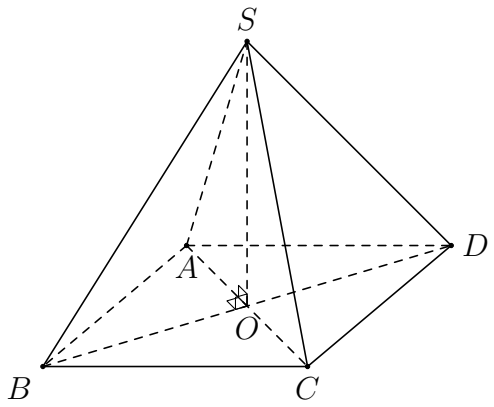
Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đá bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho?

A. $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **B.** $V = 4\sqrt{7}a^3$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.
Mặt khác $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$.
Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.
Vậy : $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a\sqrt{7} = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.



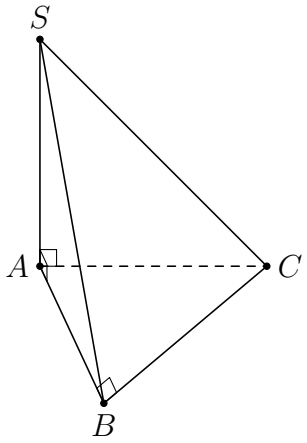
Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 45°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh SB tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{4\sqrt{3}}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB$ vuông tại A có $\angle SBA = 60°$ nên $SA = \sqrt{3}a$. Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}a^2$.
Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}a \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.



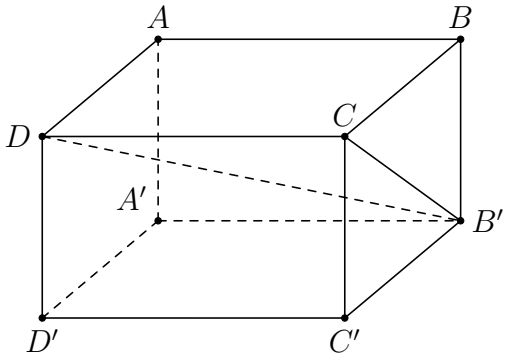
Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, đường thẳng DB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ góc $30°$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $8a^3\sqrt{2}$. **D.** a^3.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của D xuống mặt phẳng $(BCC'B')$ là điểm C. Theo đề bài, ta có $\angle DB'C = 30°$; $B'C = DC \cdot \cot 30° = 2a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a$.
$\Rightarrow BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.
Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = 2\sqrt{2}a \cdot 4a^2 = 8\sqrt{2}a^3$.



Chọn đáp án C □

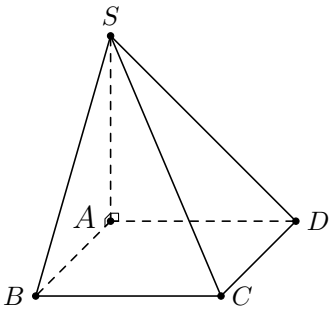
Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $AB = a$, $AD = 2a$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a \cdot 2a = 2a^2$.
$(\widehat{SB, (ABCD)}) = \widehat{SBA} = 45^0$.
Do tam giác SAB vuông cân tại A nên $SA = AB = a$.
Vậy thể tích của khối chóp là

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} 2a^2 \cdot a = \frac{2a^3}{3}.$$



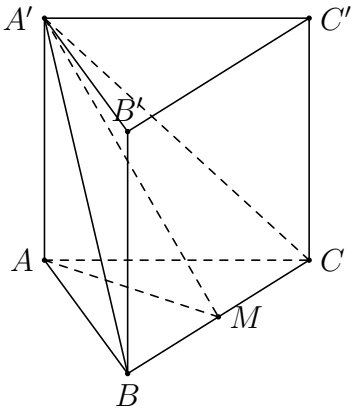
Chọn đáp án A □

Câu 65. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $30°$ và tam giác có ABC diện tích bằng $8a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $8a^3$. **C.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{8a^3}{3}$.

Lời giải.

- ☑ Gọi là trung M điểm của BC. Ta chứng minh được $BC \perp (AA'M)$ nên góc giữa hai mặt phẳng và $(A'BC)$ mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'MA} = 30°$.
- ☑ Đặt $AB = x$, Tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ lên mặt phẳng (ABC) nên $S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot \cos 30^0 = 4a^2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4a \Rightarrow AM = 2a\sqrt{3}$.
- ☑ $\dfrac{AA'}{AM} = \tan 30° \Rightarrow AA' = 2a$.
- ☑ Vậy $V_{ABCA'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 8a^3\sqrt{3}$.

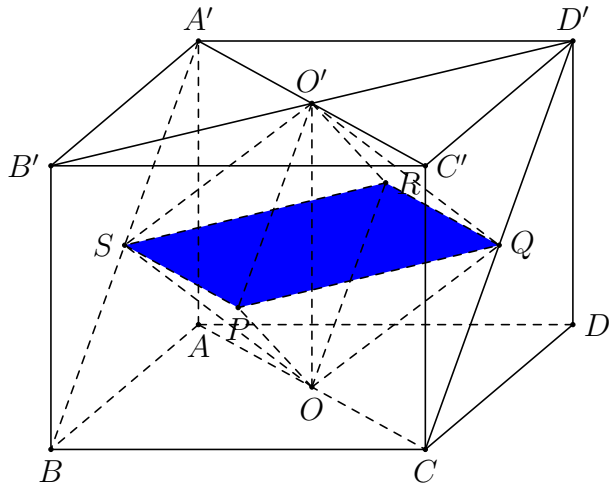


Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho một khối lập phương có cạnh bằng a. Tính theo a thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của khối lập phương.

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.



☑ Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và tâm các mặt là P, Q, R, S, O, O' như hình vẽ.

☑ Ta có là PQ đường trung bình của tam giác đều $B'CD'$ cạnh $a\sqrt{2}$ nên $PQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $S_{PQRS} = PQ^2 = \dfrac{1}{2}a^2$ và $OO' = a$.

☑ Vậy thể tích bát diện cần tìm là $V = \dfrac{1}{3}S_{PQRS} \cdot OO' = \dfrac{1}{6}a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$. **B.** $V = 4\sqrt{7}a^3$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **D.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

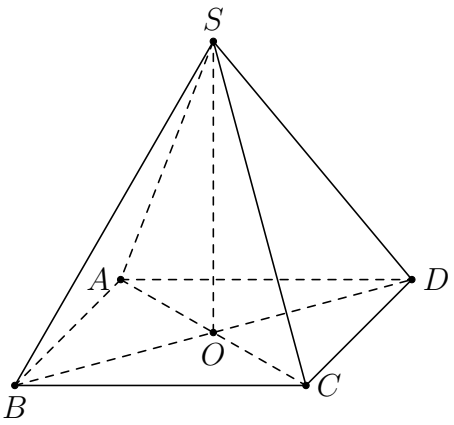
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp OB$.

Xét $\triangle SOB$ ta có $SO^2 = SB^2 - OB^2$.

Mà $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{2} = \sqrt{2}a$

nên $SO^2 = (3a)^2 - \left(\sqrt{2}a\right)^2 = 7a^2$ suy ra $SO = a\sqrt{7}$.

Khi đó $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{7} \cdot 4a^2 = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.



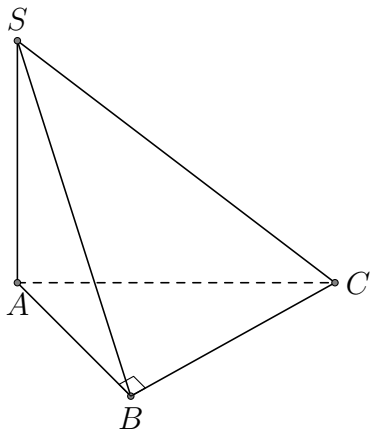
Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

- ☑ Xét $\triangle SAB$ vuông tại A nên $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a$.
- ☑ Xét $\triangle ABC$ vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.
- ☑ Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \times SA \times S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \times 2a \times \dfrac{1}{2} \times a \times a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 69. Tính thể tích V của khối chóp có đáy là hình vuông cạnh $2a$ và chiều cao là $3a$.

A. $V = 4a^3$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = 12a^3$. **D.** $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp đã cho là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot (2a)^2 = 4a^3$.

Chọn đáp án A ☐

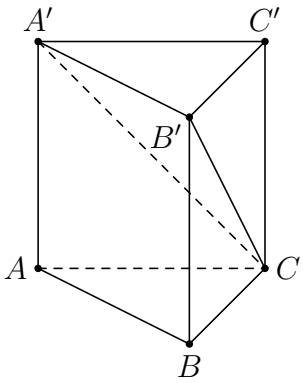
Câu 70. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Biết thể tích lăng trụ là V, tính thể tích khối chóp $C.ABB'A'$.

A. $\dfrac{2V}{3}$. **B.** $\dfrac{V}{3}$. **C.** $\dfrac{3V}{4}$. **D.** $\dfrac{V}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V_{CA'B'C'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(C, (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{V}{3}$.

Suy ra $V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{CA'B'C'} = V - \dfrac{V}{3} = \dfrac{2V}{3}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, biết $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SCD).

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

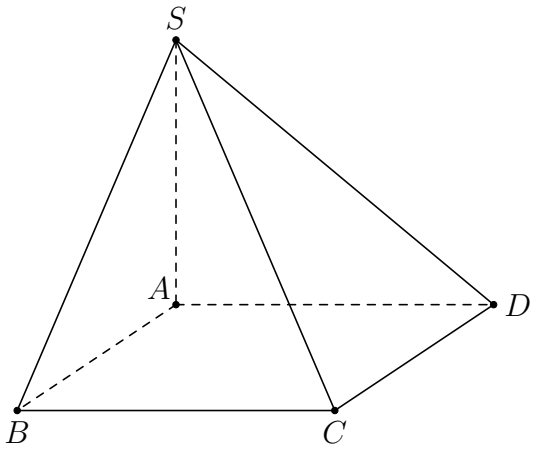
Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD}$

$\Rightarrow SA = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$.

Mặt khác $SD = (SAD) \cap (SCD)$ suy ra SD là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SCD). Khi đó

$$(SA, (SCD)) = \widehat{ASD}.$$



Ta có tam giác SAD vuông tại A nên

$$\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{AS} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 60^\circ.$$

Chọn đáp án A □

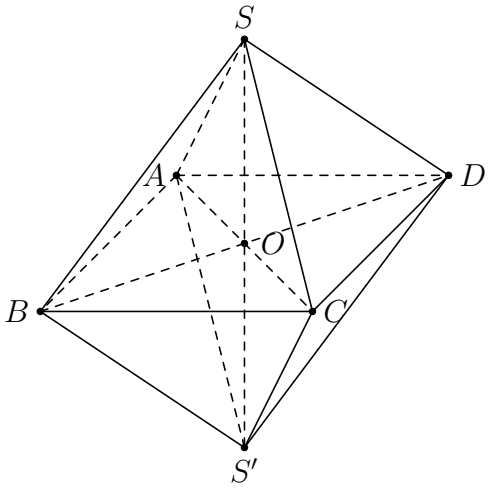
Câu 72. Tính thể tích của khối bát diện đều có tất cả các cạnh bằng $2a$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích V của khối bát diện đều gấp 2 lần thể tích của khối chóp đều $S.ABCD$. Suy ra

$$V = \frac{2}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{2}{3}a\sqrt{2} \cdot (2a)^2 = \frac{8\sqrt{2}a^3}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 73. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc SD và mặt phẳng (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm AC và BD. Dễ dàng xác định được góc giữa SD và mặt phẳng (SAC) là góc OSD.
Ta tính được $SD = 2a;\ OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{OD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : 2a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

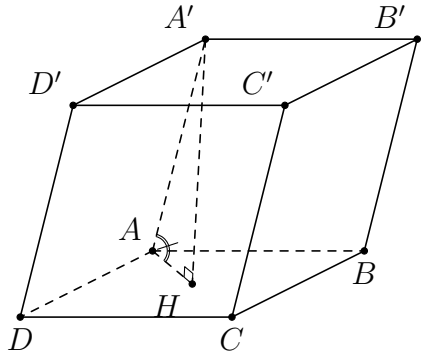
Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho một khối lập phương có thể tích V_1 và một khối hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích V_2. Biết rằng cạnh của khối lập phương bằng cạnh của khối hình hộp. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 \geq V_2$. **C.** $V_1 > V_2$. **D.** $V_1 \leq V_2$.

Lời giải.

Gọi cạnh hình lập phương là a khi đó $V_1 = a^3$ (đvtt).
Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cũng có cạnh là a.
Dựng $A'H$ vuông góc với $(ABCD)$ tại H.
Đặt góc $\widehat{A'AH} = \alpha \Rightarrow A'H = A'A \cdot \sin\alpha$.
Gọi góc $\widehat{BAC} = \beta \Rightarrow S_{ABCD} = a^2 \sin\beta \Rightarrow$
$V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3 \sin\alpha \sin\beta \leq a^3$.
Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta = 90°$.
Vậy $V_2 \leq V_1$.



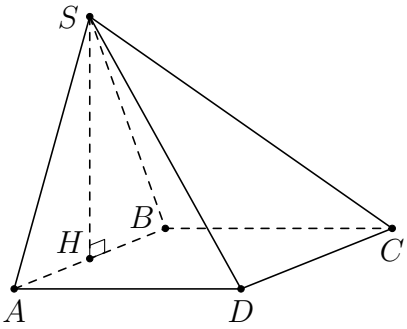
Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho hình chóp tứ giác $ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:
Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V = \dfrac{1}{3}S.h$.
Cách giải: Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
$\Rightarrow SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



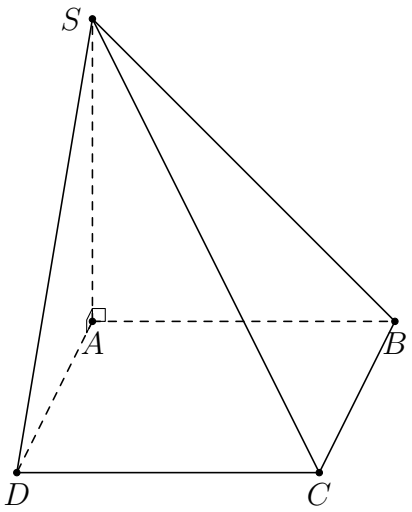
□

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp: Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P).
Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng a và a'.
Thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Sh$.



Cách giải:
Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SD;(ABCD)) = \widehat{SDA} = 30^\circ$.
ΔSAD vuông tại $A \Rightarrow SA = AD \cdot \tan\widehat{SDA} = a\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = a$.
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là
$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

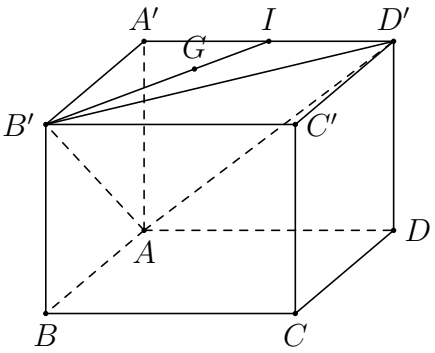
Chọn đáp án A □

Câu 78 (2H1B3-2). Khối hộp có 6 mặt đều là các hình thoi cạnh a, các góc nhọn của các mặt đều bằng 60° có thể tích là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử các góc ở đỉnh A' đều bằng 60°, khi đó tứ diện $AA'B'D'$ là tứ diện đều, có cạnh bằng a.
Gọi I là trung điểm của $A'D'$, G là trọng tâm tam giác đều $A'B'D'$
$\Rightarrow B'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}, B'G = \frac{2}{3}B'I = \frac{a\sqrt{3}}{3}, S_{A'B'D'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
$AG = \sqrt{AB'^2 - B'G^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.
$V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3}AG \cdot S_{A'B'D'} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}$.
$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 6V_{A.A'B'D'} = 6 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.



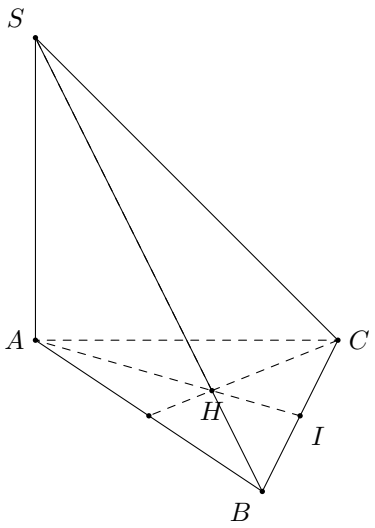
Chọn đáp án D □

Câu 79. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$, $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SCH} = 60^\circ \Rightarrow SH = HC \cdot \tan 60^\circ = a$.
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Chọn đáp án B □

Câu 80. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết đường chéo $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** a^3.

Lời giải.

Gọi cạnh hình lập phương là x. Ta có $AC'^2 = 3x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a \Rightarrow V = a^3$.

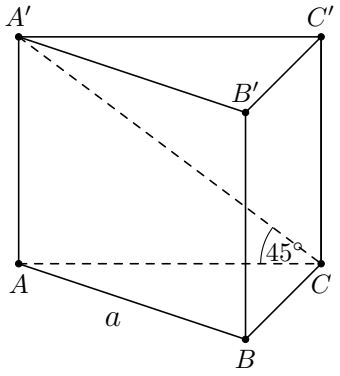
Chọn đáp án D □

Câu 81. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C'$ và mặt đáy bằng 45°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Theo tính chất lăng trụ tam giác đều thì lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng, có đáy là tam giác ABC đều, cạnh $AB = a$. Do đó $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'CA = 45^\circ$.
$AA' = AC \cdot \tan 45^\circ = AB \cdot \tan 45^\circ = a$.
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Thể tích khối tứ diện $AB'C'D'$ bằng

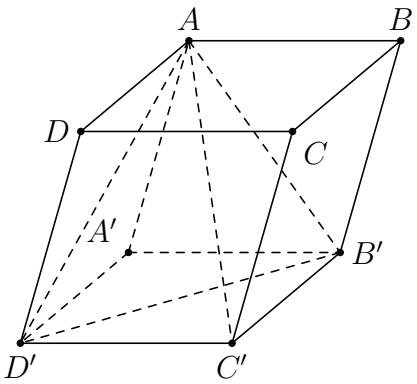
A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của hình hộp, ta có

$$V_{A.B'C'D'} = \frac{1}{3}S_{\Delta B'C'D'} \cdot h = \frac{1}{6}S_{A'B'C'D'} \cdot h = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Từ đó suy ra $V_{A.B'C'D'} = \dfrac{1}{6}$.



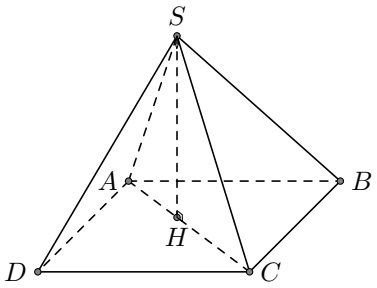
Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.

Vẽ $SH \perp AC$ tại H.



Khi đó ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \\ SH \subset (SAC) \\ SH \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD}$.

Theo đề ΔSAC vuông tại S nên ta có $SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$ và $SH = \dfrac{SA \cdot SC}{AC} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}a}{2}}{\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

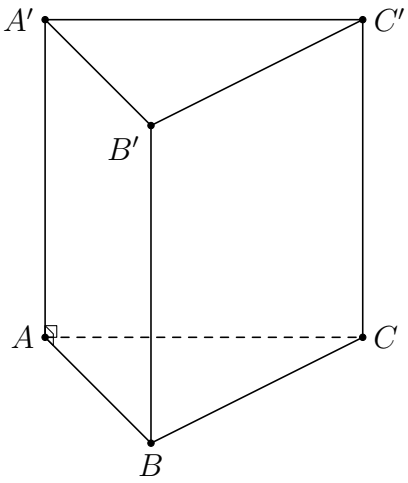
Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông $\sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^2}{6}$.

Lời giải.

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông nên tam giác ABC là tam giác đều và



$$\begin{cases} AA' \perp AC \\ AA' \perp AB \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (ABC).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} &= AA' \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

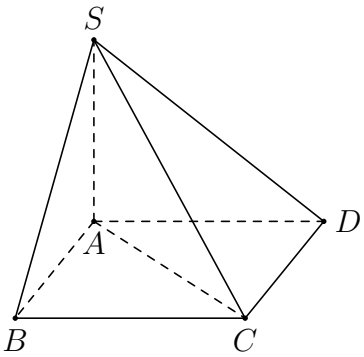
Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **B.** $V = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V = \sqrt{2}a^3$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$V = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$



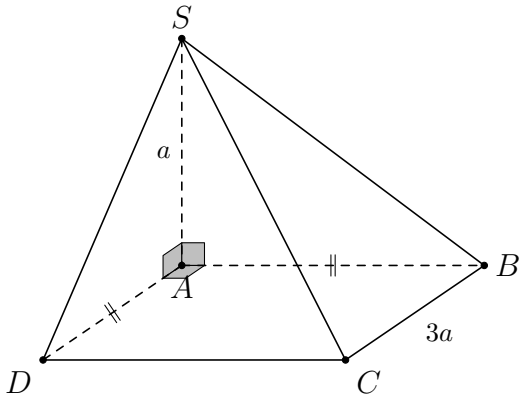
Chọn đáp án A □

Câu 86. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $3a^3$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $9a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a \cdot (3a)^2 = \dfrac{1}{3}a \cdot 9a^2 = 3a^3$.



Chọn đáp án A □

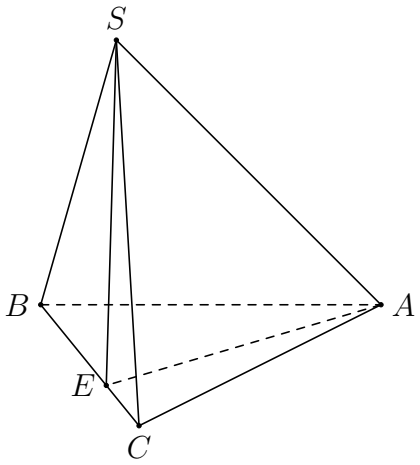
Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $S.AEB$?

A. $V = \dfrac{1}{6}$. **B.** $V = \dfrac{1}{3}$. **C.** $V = \dfrac{2}{3}$. **D.** $V = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle AEB} &= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot \mathrm{d}(A, BC) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} BC \cdot \mathrm{d}(A, BC) \\ &= \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$



Suy ra

$$\begin{aligned} V_{S.ABE} &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(S, (ABC)) \cdot S_{\triangle ABE} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(S, (ABC)) \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{2}{3} \cdot V_{S.ABC} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 88. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$.

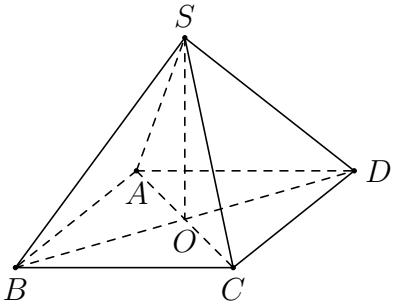
Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a^3$. □

Câu 89. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{BSA} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

- ☑ Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \dfrac{1}{3} Sh$.
- ☑ Gọi $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
- ☑ Ta có là hình chóp $S.ABCD$ tứ giác đều $\Rightarrow SA = SB \Rightarrow \Delta SAB$ cân tại S.



- ☑ Ta có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SA = SB = AB = a$.

☑ Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

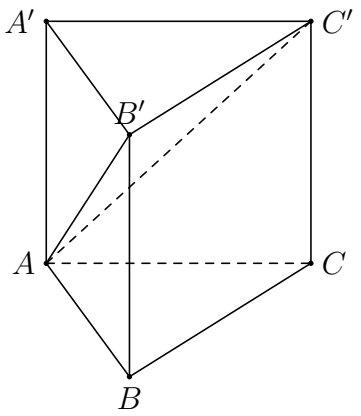
☑ Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\dfrac{V}{2}$. **B.** 45π. **C.** 180π. **D.** 15π.

Lời giải.



Ta có:

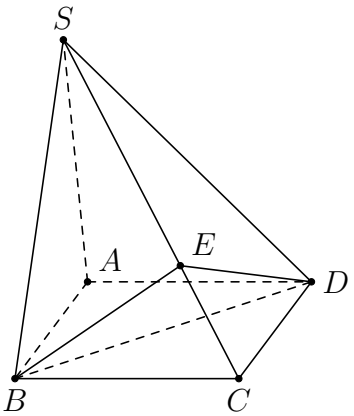
$$\begin{aligned} V_{ABCA'B'} &= V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} \\ &= V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

A. $V = \dfrac{2}{3}$. **B.** $V = \dfrac{1}{6}$. **C.** $V = \dfrac{1}{12}$. **D.** $V = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



☑ Vì $SE = 2EC$ nên $\dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3}$.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên ta có

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle BDC}.$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = 2V_{S.BCD} = 1 \Leftrightarrow V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2}$.

☑ Ta có $\dfrac{V_{S.BED}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SB}{SB} \cdot \dfrac{SE}{SC} \cdot \dfrac{SD}{SD} = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{2}{3}$.
Suy ra$V_{S.BED} = \dfrac{2}{3} \cdot V_{S.BCD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$, G là trọng tâm tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$. Tính $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = |k|^2 = \dfrac{1}{4}$, suy ra $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SH \cdot S_{\triangle A'B'C'}}{SH \cdot S_{\triangle ABC}} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

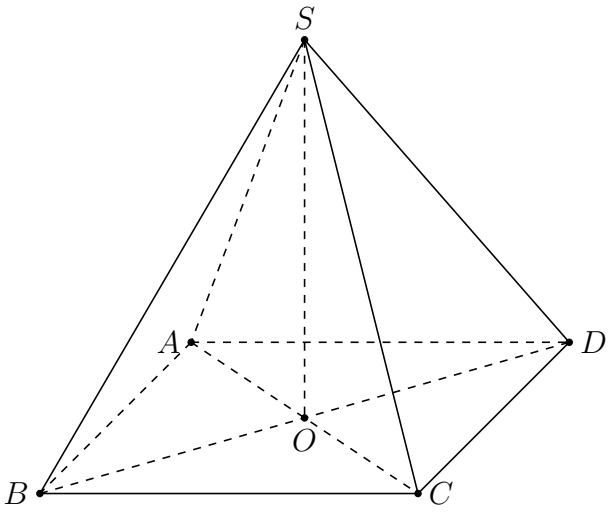
A. $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Do chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AC = BD = 2a\sqrt{2}$. Suy ra $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ là

A. $4a^3\sqrt{3}$. **B.** $5a^3\sqrt{3}$. **C.** $6a^3\sqrt{3}$. **D.** $7a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích đáy: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.AA' = 3a^2\sqrt{3}.2a = 6a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, cạnh góc vuông bằng $2a$ và thể tích khối chóp bằng a^3. Tính chiều cao kẻ từ đỉnh S của hình chóp đã cho.

A. $h = \sqrt{3}a$. **B.** $h = 6a$. **C.** $h = \dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $h = \dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Diện tích đáy: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot (2a)^2 = 2a^2$.

Chiều cao là $h = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{3 \cdot a^3}{2a^2} = \dfrac{3}{2}a$.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \sqrt{2}a^3$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 97. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Thể tích V của khối lăng đó là:

A. $V = 3a^3\sqrt{3}$. **B**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C**. $V = a^3\sqrt{3}$. **D**. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 99. Một lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy bằng $37, 13, 30$ và diện tích xung quanh bằng 480. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. 2010. **B**. 1080. **C**. 2040. **D**. 1010.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của lăng trụ. Khi đó diện tích xung quanh của lăng trụ là
$S_{xq} = 37h + 13h + 30h = 80h = 480 \Leftrightarrow h = 6$.
Diện tích đáy của lăng trụ $S = \sqrt{40\,(40-37)\,(40-13)\,(40-30)} = 180$.
Vậy thể tích lăng trụ là: $V = S \cdot h = 180 \cdot 6 = 1080$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 100. Tổng diện tích các mặt của khối lập phương bằng 96. Tìm thể tích của khối lập phương đó.

A. 48. **B**. 84. **C**. 64. **D**. 91.

Lời giải.

Khối lập phương có 6 mặt và theo đề bài tổng diện tích các mặt của khối lập phương là 96 nên diện tích một mặt của khối lập phương là $96 \div 6 = 16$.
Suy ra cạnh của hình lập phương là $\sqrt{16} = 4$. Do đó, thể tích của khối lập phương là $4^2 = 16$.
Chọn đáp án (C) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. A	5. B	6. C	7. A	8. C	9. D	10. D
11. C	12. C	13. D	14. B	15. C	16. A	17. B	18. B	19. B	20. A
21. A	22. B	23. C	24. B	25. C	26. A	27. D	28. D	29. D	30. B
31. D	32. A	33. C	34. D	36. C	37. B	39. A	40. D	41. C	42. B
43. D	44. D	45. A	46. B	47. B	48. D	49. C	50. B	51. D	52. B
53. A	54. D	55. A	56. D	57. B	58. C	59. C	60. B	61. C	62. B
63. C	64. A	65. A	66. B	67. A	68. C	69. A	70. A	71. A	72. C
73. A	74. A	75. B	77. A	78. D	79. B	80. D	81. A	82. B	83. A
84. A	85. A	86. A	87. C	89. D	90. D	91. D	92. A	93. A	94. C
95. D	96. B	97. B	98. B	99. B	100. C				

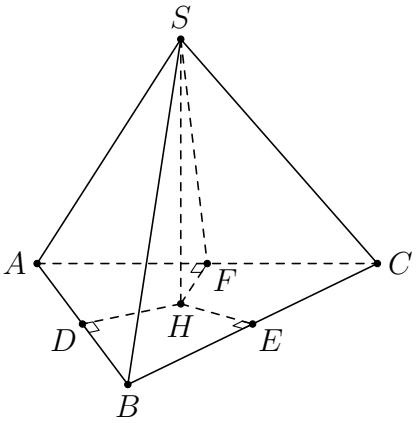
❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 7$ cm. Các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}cm^3$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}cm^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}cm^3$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{4}cm^3$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao của khối chóp $S.ABC$.
Lần lượt gọi hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CA là D, E, F.
Khi đó ta có góc giữa các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ với mặt đáy (ABC) lần lượt là $\widehat{SDH}, \widehat{SHE}, \widehat{SFH}$
$\Rightarrow \widehat{SDH} = \widehat{SDH} = \widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 30°$.
Từ đó suy ra $DH = HE = HF$.
Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có
$p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = 8$ (cm).

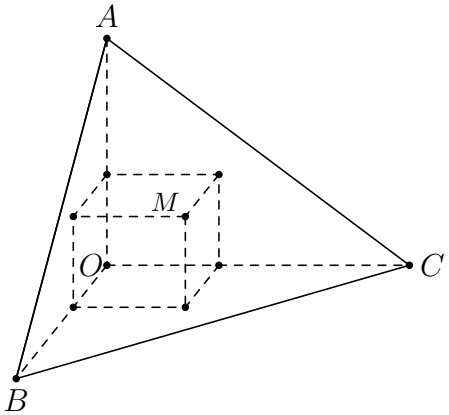


$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p(p-5)(p-4)(p-7)} = 4\sqrt{6}$.
Mà $S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (cm).
Do đó $SH = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \tan 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (cm).
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2}4\sqrt{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm^3).

Chọn đáp án B □

Câu 2.

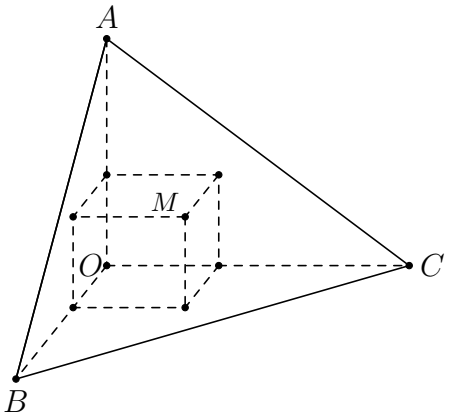
Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = 3$ cm, $OB = 6$ cm, $OC = 12$ cm. Trên mặt (ABC) người ta đánh dấu một điểm M sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng



A. 8 cm^3. **B.** 24 cm^3. **C.** 12 cm^3. **D.** 36 cm^3.

Lời giải.

Gọi khoảng cách từ điểm M đến các mặt bên $(OAB), (OBC), (OCA)$ lần lượt là a, b, c.



Khi đó $V_{O.ABC} = V_{M.OAB} + V_{M.OBC} + V_{M.OAC}$.

Hay $\dfrac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 12 = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \dfrac{1}{3} \cdot b \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 + \dfrac{1}{3} \cdot c \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12$

$\Rightarrow 12 = a + 4b + 2c$.

Thể tích khối gỗ hình hộp chữ nhật theo đề bài là $V = abc$.

Ta có $abc = \dfrac{1}{8} a \cdot 4b \cdot 2c \le \dfrac{1}{8} \left(\dfrac{a + 4b + 2c}{3} \right)^3 = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{12^3}{27} = 8$ (Theo bất đẳng thức Cô-si).

Vậy $V = abc$ đạt giá trị lớn nhất bằng 8 cm^3.

Khi $a = 4b = 2c \Leftrightarrow a = 4$ cm, $b = 1$ cm, $c = 2$ cm.

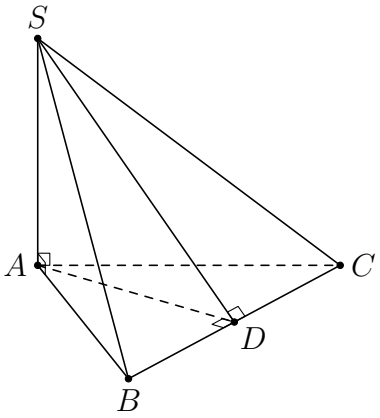
Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD bằng a, cạnh bên SB tạo với đáy góc 30° và tạo với mặt phẳng (SAD) góc 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.

Đặt $SA = x > 0$. Ta có $BD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{BSD} = 30^\circ, \widehat{SBA} = 30^\circ$.



$AB = SA \cdot \tan 30^\circ = x\sqrt{3}$.

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2x$.

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3x^2 - a^2}$.

Xét tam giác vuông SBD, ta có

$\sin BSD = \dfrac{BD}{SB} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2 - a^2} = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, BC = 2BD = 2\sqrt{3 \cdot \dfrac{a^2}{2} - a^2} = a\sqrt{2}$.

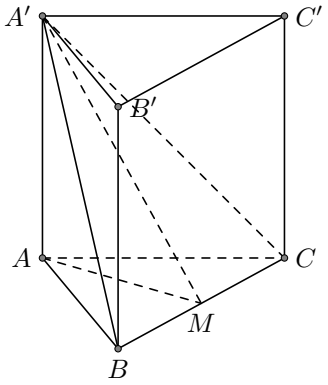
Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 12 \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 2. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi độ dài cạnh $AA' = x, x > 0$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A ta có $\sin 30^\circ = \dfrac{A'A}{A'M} \Rightarrow A'M = \dfrac{A'A}{\sin 30^\circ} = 2x$.

$\tan 30^\circ = \dfrac{A'A}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{A'A}{\tan 30^\circ} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = x\sqrt{3}$.

Xét tam giác ABC đều có đường cao AM, suy ra $\dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot A'M \cdot BC = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} A'M \cdot BC = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

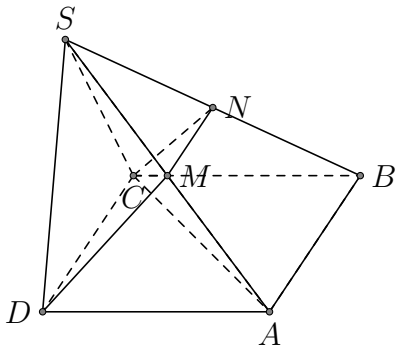
Vậy $AA' = 1, AB = 2$. Do đó $V = Bh = S_{ABC} \cdot A'A = 2^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M, N theo thứ là trung điểm của SA, SB. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}$ là

A. $\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.CDMN} = V_{S.CDM} + V_{S.CMN}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{S.CDM}}{V_{S.CDA}} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.CDM} = \dfrac{1}{2} V_{S.CDA} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{S.CNM}}{V_{S.CBA}} = \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.CNM} = \dfrac{1}{4} V_{S.CBA} = \dfrac{1}{8} V_{S.ABCD}$.

$V_{S.CDMN} = V_{S.CDM} + V_{S.CMN}$

$= \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{8} V_{S.ABCD} = \dfrac{3}{8} V_{S.ABCD}$.

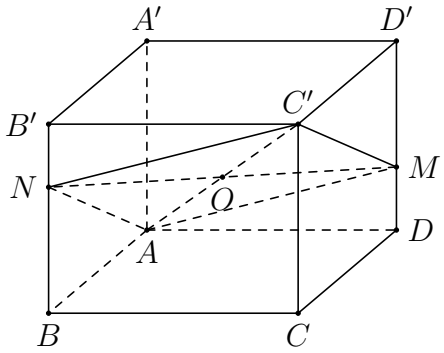
Vậy $\dfrac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}} = \dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a$. $AC' = a$. Điểm N thuộc cạnh BB' sao cho $BN = 2NB'$, điểm M thuộc cạnh DD' sao cho $D'M = 2MD$. $(A'MN)$ chia hình hộp chữ nhật làm hai phần, tính thể tích phần chứa điểm C'.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $2a^3$. **D.** $3a^3$.

Lời giải.

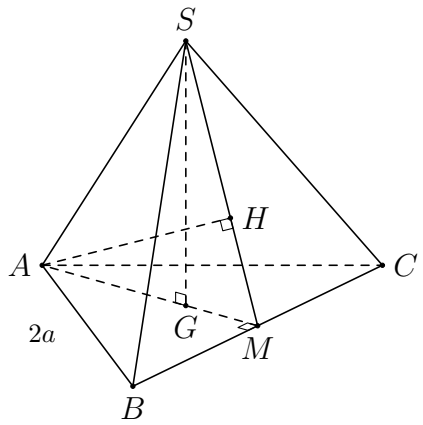


Ta có $AC = \sqrt{CB^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$, $CC' = \sqrt{C'A^2 - CA^2} = 2a$.
Khi đó thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a.a.2a = 4a^3$.
Ta có giao tuyến của $Mp(A'MN)$ và $(C'D'DC)$ là $C'M$.
Ta có giao tuyến của $Mp(A'MN)$ và $(B'C'CB)$ là CN.
Suy ra $AMC'N$ là hình bình hành.
Gọi O là tâm hình hộp Ta có phép đối xứng tâm O biến hình đa diện $C'CDMBAN$ thành hình đa diện $AA'B'ND'C'M$.
Nên $V_{C'CDMBAN} = V_{AA'B'ND'C'M} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = 2a$, khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Đáp án là D
Gọi M là trung điểm của BC và G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$ và G là trọng tâm $\triangle ABC$.
Ta có: $\begin{cases} AM \perp BC \\ SG \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$ hay $(SBC) \perp (SAM)$ theo giao tuyến SM.
Trong (SAM), kẻ $AH \perp SM, H \in SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{3a}{2}$.
Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Đặt $SG = x$. Ta có: $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}.a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SGM$ vuông tại G ta có: $SM = \sqrt{SG^2 + GM^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

Xét $\triangle SAM$ ta có: $S_{\triangle SAM} = \frac{1}{2}SG.AM = \frac{1}{2}AH.SM \Rightarrow x.a\sqrt{3} = \frac{3a}{2}.\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 3\left(x^2 + \frac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow x = a$. Do đó: $SG = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}a.a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E, F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối còn lại. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. $\frac{25}{47}$. **B.** 1. **C.** $\frac{8}{17}$. **D.** $\frac{17}{25}$.

Lời giải.

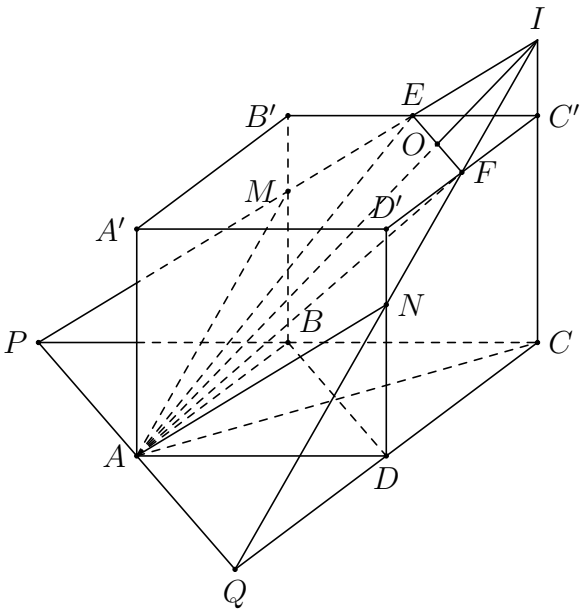
Dựng PQ qua A và song song với BD (vì $P \in BC$, $Q \in CD$).

PE cắt các cạnh BB', CC' tại M và I. Thiết diện là $AMEFN$.

Dựa vào đường trung bình BD và định lí Ta-lét cho các tam giác IAC, DNQ, $D'NF$ ta tính được: $IC' = \frac{a}{3}, ND = \frac{2a}{3}$.

Tương tự ta tính được: $MB = \frac{2a}{3}$. Và ta có: $QD = PB = a$.

Ta có: $V_{IEFC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$.



Dùng tỉ lệ thể tích ta có: $V_{IPQC} = 4^3 \cdot V_{IEFC'} = 64 \cdot \frac{a^3}{72} = \frac{8a^3}{9}$.

$V_{NADQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{9} = V_{MPAB} \Rightarrow V_2 = \frac{8a^3}{9} - \frac{a^3}{72} - 2 \cdot \frac{a^3}{9} = \frac{47a^3}{72}$.

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là a^3 nên $V_1 = a^3 - \frac{47a^3}{72} = \frac{25a^3}{72}$.

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 300.000 đồng/m^2. Chi phí thuê công nhân thấp nhất là:

A. 51 triệu đồng. **B.** 75 triệu đồng. **C.** 46 triệu đồng. **D.** 36 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi chiều rộng, chiều dài của đáy lần lượt là x và $2x$, chiều cao là y.

Diện tích các mặt bên và mặt đáy là $S = 6xy + 2x^2$.

Thể tích là $V = 2x^2y = 200 \Rightarrow xy = \dfrac{100}{x}$.

$S = \dfrac{600}{x} + 2x^2 = \dfrac{300}{x} + \dfrac{300}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{300}{x} \cdot \dfrac{300}{x} \cdot 2x^2} = 30\sqrt[3]{180}$.

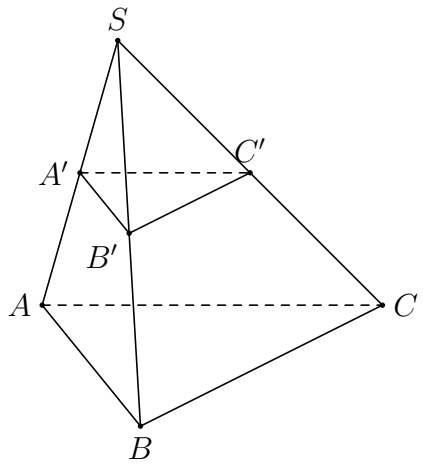
Vậy chi phí thấp nhất là $T = 30\sqrt[3]{180} \cdot 300000 \approx 51$ triệu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tỷ số $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 8.

Lời giải.



$\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

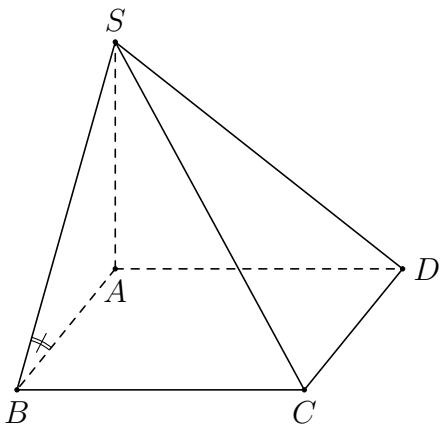
Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA} = 60°$.

Ta có: Diện tích đáy: $S_{ABCD} = a^2$.

Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB \cdot \tan\left(\widehat{SBA}\right) = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau, $AB = 6a, AC = 5a, AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CD, DB. Thể tích V của tứ diện $AMNP$ là

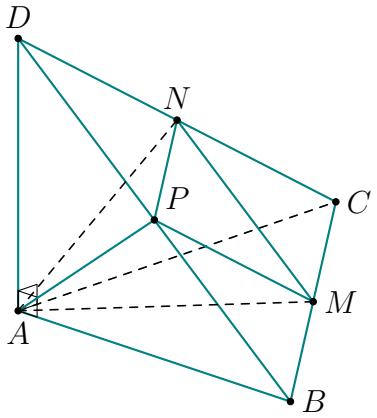
A. $V = \dfrac{5a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{20a^3}{3}$. **C.** $V = 5a^3$. **D.** $V = 10a^3$.

Lời giải.

Phương pháp:

Thể tích khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài các cạnh đó lần lượt bằng a, b, c là: $V = \dfrac{1}{6}abc$.

Cách giải:



Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.AC \cdot AD = \frac{1}{6}.6a.5a.4a = 20a^3.$$

Ta có:

$$\frac{V_{A.MNP}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta MNP} \cdot d(A,(BCD))}{\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BCD} \cdot d(A,(BCD))} = \frac{S_{\Delta MCP}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{1}{4}$$

(do $S_{\Delta DNP} = S_{\Delta BPM} = S_{\Delta BPM} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}$).

Chọn đáp án C □

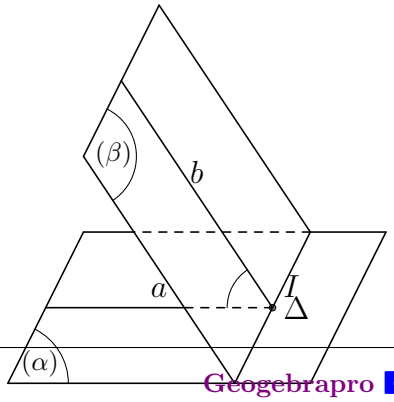
Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a, \widehat{BAD} = 60°, SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

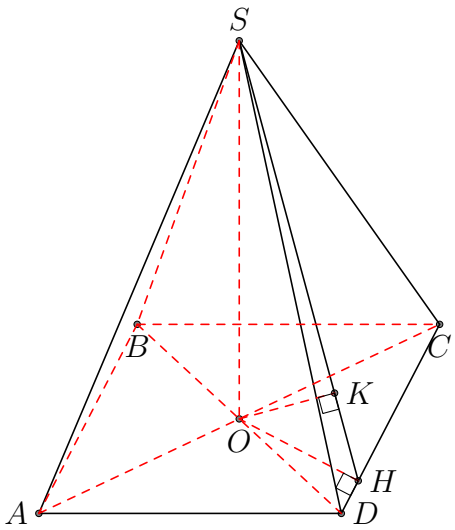
Lời giải.

Phương pháp - Xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

- Tìm giao tuyến Δ của (α) và (β).
- Xác định một mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$.
- Tìm các giao tuyến $a = (\alpha) \cap (\gamma); b = (\beta) \cap (\gamma)$.
- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(a,b)}$.



Cách giải:



Kẻ $OH \perp CD, (H \in CD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp OH \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow ((\widehat{SCD});(\widehat{ABCD})) = \widehat{SHO} = 60°$.

$ABCD$ là hình thoi tâm O, $\widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \Delta BCD$ đều nên $OH = \dfrac{1}{2}d(B,CD) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

ΔSOH vuông tại $O \Rightarrow SO = OH.\tan\widehat{SHO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\tan 60° = \dfrac{3a}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Thể tích V của khối lập phương có các đỉnh là trọng tâm các mặt của một khối bát diện đều cạnh bằng 1 là

A. $\dfrac{1}{27}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Thể tích khối lập phương cạnh a là: $V = a^3$.

Cách giải:

Khối lập phương có các đỉnh lần lượt là trọng tâm các mặt của khối bát diện đều cạnh $a = 1$ có độ dài cạnh là $x = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

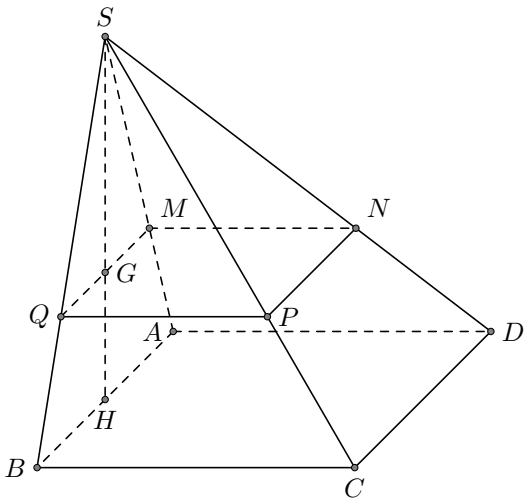
Thể tích cần tìm là : $V = x^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$(đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác (SAB) và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $(S.ABCD)$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S?

A. $V = 24$. **B**. $V = 8$. **C**. $V = 12$. **D**. $V = 36$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều nên $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x^2 = 27 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$.

Vậy $SH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Suy ra $S_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\left(3\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{81}{2}$.

Dễ thấy mặt phẳng đi qua G song song với mặt đáy cắt hình chóp theo thiết diện là hình vuông $MNPQ$ như hình vẽ.

Ta có $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MQ = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot 2}{3} = 2\sqrt{3}$

và $SG = \dfrac{2}{3}SH = \dfrac{2\cdot\dfrac{9}{2}}{3} = 3$.

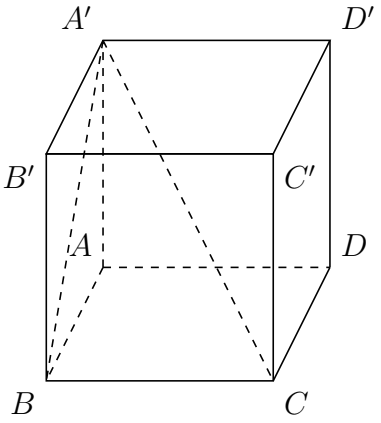
Vậy $V = \dfrac{1}{3}SG \cdot S_{MNPQ} = \dfrac{1}{3}\cdot 3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $ABB'A'$ bằng 30°. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B**. $V_{\max} = \dfrac{1}{2}$. **C**. $V_{\max} = \dfrac{3}{2}$. **D**. $V_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V = AA' \cdot S_{ABCD}$. Hình chiếu của $A'C$ trên mặt $(ABB'A')$ là $A'B$, do đó góc giữa $A'C$ và $(ABB'A')$ là góc $\widehat{BA'C} = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông $\Delta A'BC$ có

$\tan 30^\circ = \dfrac{BC}{A'B} \Rightarrow A'B = \sqrt{3}BC = \sqrt{3}$.

Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}$. Vậy $V = x\sqrt{3-x^2}$.

Xét $f(x) = x\sqrt{3-x^2}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ với $0 < x < \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{3}$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗	$\frac{3}{2}$	↘	

Vậy $V_{\max} = \dfrac{3}{2}$.

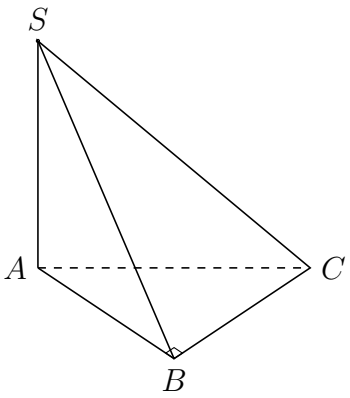
Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B, biết $SA = AC = 2a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên
$AB=AC=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$.
$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA\cdot\dfrac{1}{2}BA\cdot BC=\dfrac{1}{3}\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}=\dfrac{2a^3}{3}$.



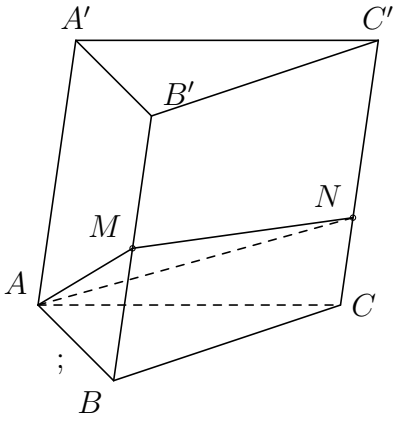
Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M là trung điểm cạnh BB' điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN=2C'N$. Tính thể tích V'của khối chóp $A.BCNM$ theo V.

A. $V'=\dfrac{7V}{12}$. **B.** $V'=\dfrac{7V}{18}$. **C.** $V'=\dfrac{V}{3}$. **D.** $V'=\dfrac{V}{2}$.

Lời giải.

Gọi $h=\mathrm{d}(B',CC')$. Khi đó ta có $S_{BCC'B'}=h\cdot CC'$ và
$S_{BMNC}=\dfrac{(BM+CN)\cdot h}{2}=\dfrac{1}{2}h\cdot\left(\dfrac{1}{2}CC'+\dfrac{2}{3}CC'\right)=\dfrac{7}{12}h\cdot CC'$.
Ta có $\dfrac{V'}{V_{ABCC'B'}}=\dfrac{S_{BMNC}}{S_{BCC'B'}}=\dfrac{7}{12}$.
Mặt khác ta có $V_{ABCC'B'}=\dfrac{2}{3}V$.
Vậy $V'=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{2}{3}V=\dfrac{7V}{18}$.



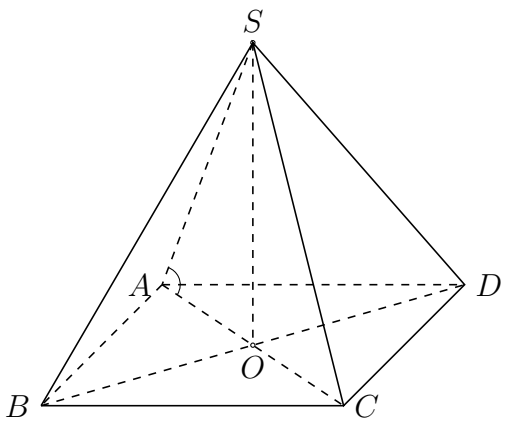
Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB=a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V=\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có $SO\perp(ABCD)$.
$\Rightarrow (SA,(ABC))=(SA,(ABCD))=\widehat{SAO}$
$\Rightarrow SO=OA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2$, $AC = 4$, $SA = \sqrt{3}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính R là

A. $R = \dfrac{5}{2}$. **B.** $R = 5$. **C.** $R = \dfrac{10}{3}$. **D.** $R = \dfrac{25}{2}$.

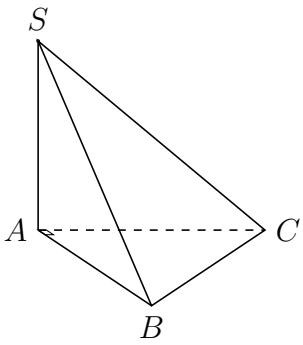
Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên nội tiếp đường tròn đường kính BC. Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow r = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{5}$.

Sử dụng công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, suy ra

$R = \sqrt{\dfrac{SA^2}{4} + r^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4} + 5} = \dfrac{5}{2}$.



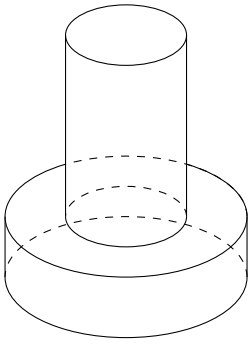
Chọn đáp án A □

Câu 21.

Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1$, $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3, thể tích khối trụ (H_1) bằng

A. 24cm^3. **B.** 15cm^3.

C. 20cm^3. **D.** 10cm^3.



Lời giải.

Ta có $V_2 = h_2\pi r_2^2 = 2h_1\pi\dfrac{1}{4}r_1^2 = \dfrac{1}{2}h_1\pi r_1^2 = \dfrac{1}{2}V_1$.

Mà $V_1 + \dfrac{1}{2}V_1 = 30$ nên $V_1 = 20$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CC', h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Ta có $V_{C.C'PQ} = \dfrac{1}{3}\cdot h \cdot S_{\Delta C'PQ} = \dfrac{1}{3}\cdot h \cdot 4S_{\Delta C'A'B'} = \dfrac{4}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{4}{3}$.

$V_{MNI.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}$.

$V_{C.MNI} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{h}{2}\cdot S_{MNI} = \dfrac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{6}$.

Suy ra $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - (V_{MNI.A'B'C'} + V_{C.MNI}) = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và CD. Khi đó, khoảng cách cần tìm bằng độ dài của đoạn thẳng MN.

Ta có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABC), $SA = SB$, I là trung điểm AB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là

A. Góc $\widehat{SCA}$. **B.** Góc $\widehat{SCI}$. **C.** Góc $\widehat{ISC}$. **D.** Góc $\widehat{SCB}$.

Lời giải.

Ta có $(SI) \perp (AB)$ do $SA = SB$ và $(CI) \perp (AB)$ do tam giác ABC cân tại C. Suy ra $\widehat{SIC}$ là góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (ABC). Do đó (CI) là hình chiếu của (SC) lên mặt phẳng (ABC). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCI}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ GA = GB = GC \end{cases}$ nên SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

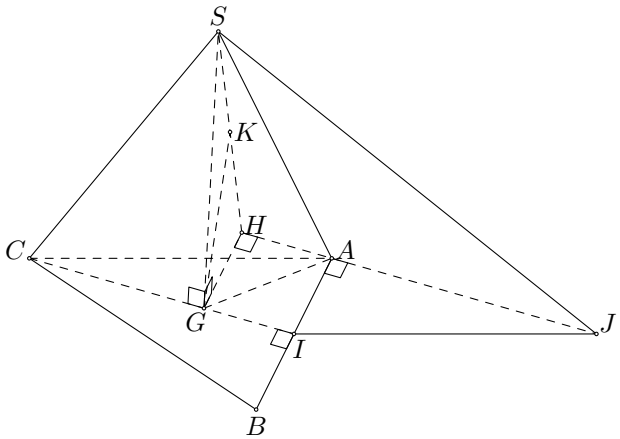
Do đó $SG \perp (ABC)$.

Ta có: $(SA; (ABC)) = \widehat{SAG} = 60°$.

Gọi I là trung điểm AB. Trong $(ABCD)$, kẻ AJ sao cho $ACIJ$ là hình bình hành.

Suy ra $CI // AJ$, do đó $CI // (SAJ)$.

Suy ra $d(GC; SA) = d(CI; (SAJ)) = d(G; (SAJ))$ (do $G \in CI$).



Trong $(ABCD)$: Kẻ $GH \perp AJ$ tại H.

Mà $SG \perp AJ$ (do (1)).

Nên $AJ \perp (SGH)$.

Suy ra $(SAJ) \perp (SGH)$.

Từ $(SAJ) \cap (SGH) = SH$. Trong (SGH) kẻ $(GK) \perp (SH)$ tại K, ta được $(GK) \perp (SAJ)$.

Do đó $d(G; (SAJ)) = GK$.

Ta có: $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $SG = AG. \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}. \tan 60° = a$.

Mặt khác: $GH = AI = \dfrac{a}{2}$. Do đó $\dfrac{1}{GK^2} = \dfrac{1}{SG^2} + \dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

Suy ra $GK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(GC; SA) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

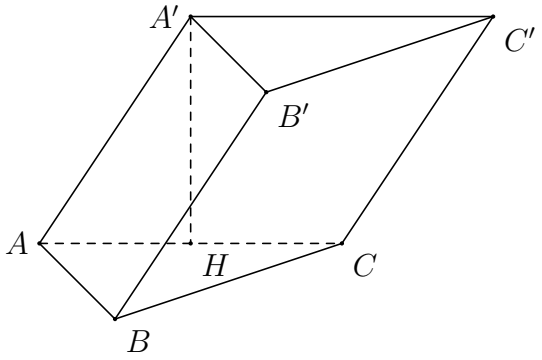
Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 1$, $AC = 2$, cạnh $AA' = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A. $V = \dfrac{\sqrt{21}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao hạ từ B trong tam giác ABC. Theo đề $A'H$ là đường cao của lăng trụ.



Xét ΔABC

$AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$.

Xét $\Delta AA'H$. ta có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Thể tích cần tìm

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot AH = \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC\right) AH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{21}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

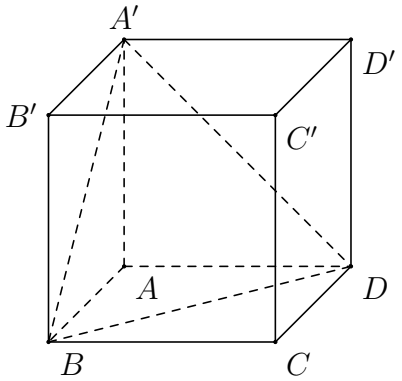
A. $V = 3V_1$. **B.** $V = 4V_1$. **C.** $V = 6V_1$. **D.** $V = 2V_1$.

Lời giải.

Gọi a là cạnh của hình lập phương.

Khi đó, ta có $V = a^3$ và $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$

Vậy $V = 6V_1$.



Chọn đáp án (C) □

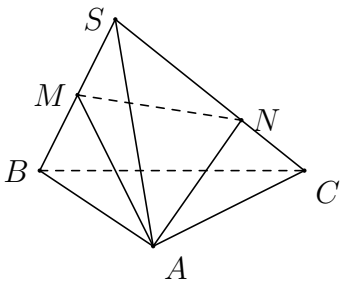
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích V của khối chóp $A.BMNC$ là

A. $V = 10$. **B.** $V = 30$. **C.** $V = 5$. **D.** $V = 15$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC}$

Suy ra: $V_{A.BMNC} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 5\cdot 9 = 10$



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của đoạn AB.

Ta có ΔSAB đều $\Rightarrow SK \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB

$\Rightarrow SK \perp (ABC) \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SK\cdot S_{\Delta ABC}$

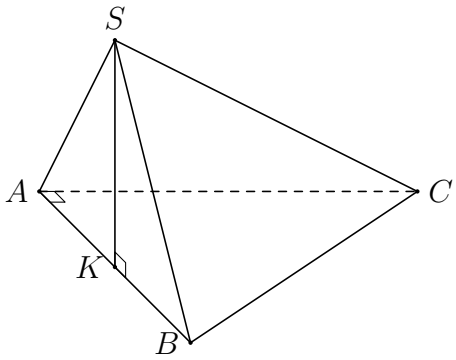
Ta có ΔABC vuông tại A có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

ΔSAB đều cạnh $AB = a \Rightarrow$ đường cao $SK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Một công ty cần xây dựng một cái kho chứa hàng dạng hình hộp chữ nhật (có nắp) bằng vật liệu gạch và xi măng có thể tích 2000 m^3, đáy là hình chữ nhật có chiều dài bằng hai lần chiều rộng. Người ta cần tính toán sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất, biết giá xây dựng là 500.000 đồng/m^2. Khi đó chi phí thấp nhất gần với số nào dưới đây?

A. 495969987. **B.** 495279087. **C.** 495288088. **D.** 495289087.

Lời giải.

Gọi kích thước đáy của cái kho cần xây dựng là x(m) và $2x$ (m), chiều cao của kho là y (m), (với $x, y > 0$)

Ta có $V = 2x^2y = 2000 \Rightarrow y = \dfrac{1000}{x^2}$ (m)

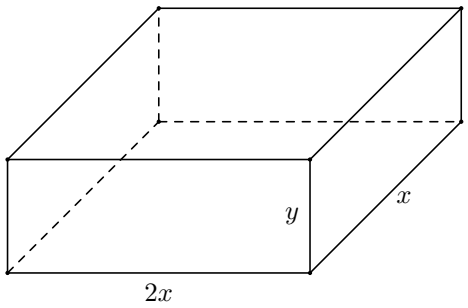
Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$s_{tp} = 2\left(x\cdot 2x + x\cdot y + 2x\cdot y\right) = 4x^2 + 6xy = 4x^2 + \dfrac{6000}{x}$

$= 4x^2 + \dfrac{3000}{x} + \dfrac{3000}{x} \geq 3\sqrt[3]{4x^2\cdot\dfrac{3000}{x}\cdot\dfrac{3000}{x}} = 300\sqrt[3]{36}$ (m^2)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 4x^2 = \dfrac{3000}{x} \Leftrightarrow 4x^3 - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{3000}{4}}$.

Chi phí xây dựng thấp nhất khi đó sấp sỉ là $300\cdot\sqrt[3]{36}\cdot 500000 \approx 495289087$ đồng.



Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A và V_2 là thể tích của phần còn lại. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{55}{89}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{37}{48}$.

Lời giải.

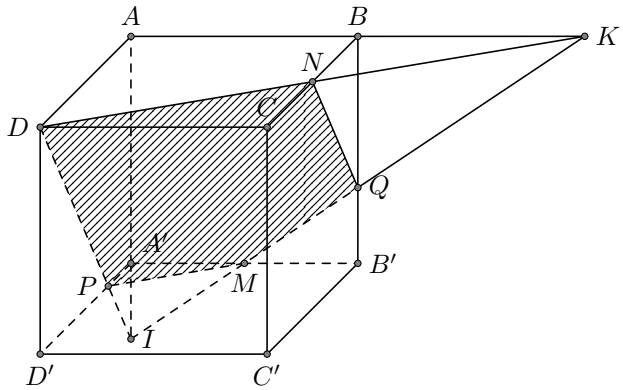
Gọi $K = DN \cap AB$, $Q = MK \cap BB'$, $I = MK \cap AA'$, $P = DI \cap A'D'$.

Vậy thiết diện của hình lập phương cắt bởi mp (DMN) là $MPDNQ$.

Do N là trung điểm của $BC \Rightarrow B$ là trung điểm của $AK \Rightarrow BK = AB = 1$.

Vì $A'I = B'Q$ và $\dfrac{B'Q}{BQ} = \dfrac{B'M}{BK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B'Q = A'I = \dfrac{1}{3}, BQ = \dfrac{2}{3}$.

Tương tự $\dfrac{A'P}{AD} = \dfrac{A'I}{AI} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow A'P = \dfrac{1}{4}$.



Ta có $V_{IA'MP} = \dfrac{1}{3} \cdot A'I \cdot S_{\triangle A'MP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{144}$;

$V_{KBNQ} = \dfrac{1}{3} \cdot BK \cdot S_{\triangle BNQ} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$;

$V_{I.ADK} = \dfrac{1}{3} \cdot AI \cdot S_{\triangle ADK} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot 1 = \dfrac{4}{9}$.

Do đó $V_1 = V_{I.ADK} - V_{IA'MP} - V_{KBNQ} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{144} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{55}{144} \Rightarrow V_2 = 1 - V_1 = \dfrac{89}{144}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{55}{89}$.

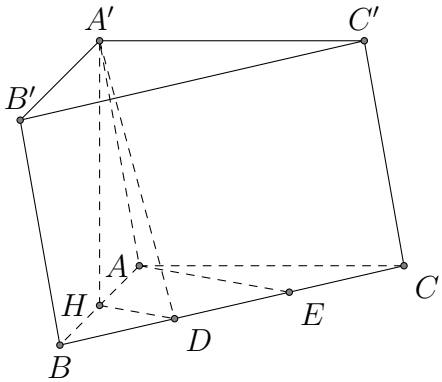
Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Biết góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$ và hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm H của AB. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = \dfrac{a^3}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H, A lên BC.



Ta có $\begin{cases} HD \perp BC \\ A'H \perp BC \end{cases} \Rightarrow (A'HD) \perp BC \Rightarrow A'D \perp BC$.

Khi đó $(A'BC)$ và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và HD hay $\widehat{A'DH} = 60°$.

Xét tam giác vuông ABC, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Nên $AE = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ suy ra $HD = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Từ đó $A'H = HD \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

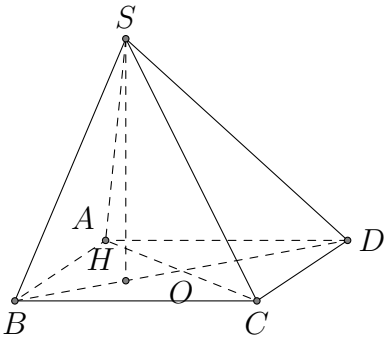
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot A'H = \dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^\circ$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$ mà $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ABC là tam giác đều cạnh a.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm hai đường chéo hình thoi.

Vì $SA = SB = SC$ nên S thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp H của tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Vì ABC đều cạnh a tâm H nên $AC = a$, $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BH = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

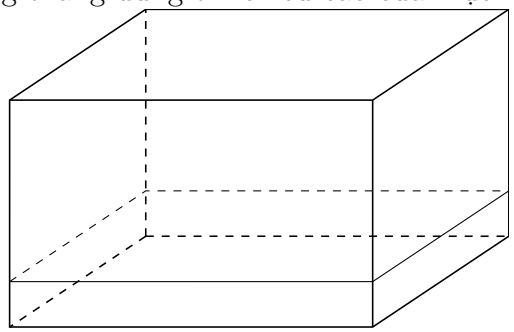
Xét tam giác BHD vuông tại H có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

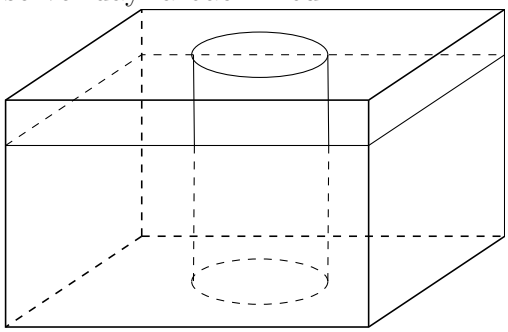
Diện tích hình thoi $ABCD$ là $\dfrac{1}{2}AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}AC\cdot 2BO = \dfrac{1}{2}a\cdot 2\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}SH\cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Một hình hộp chữ nhật có chiều cao 90cm, đáy hộp là hinh chữ nhật có chiều rông 50cm và chiều dài là 80cm . trong khối hộp có chứa nước , mực nước so với đáy hộp có chiều cao 40cm. Hỏi khi đặt vào khối hộp một khối trụ có chiều cao bằng chiều cao khối hộp và bán kính đáy là 20cm theo phuong thẳng đứng thì chiều cao của mực nước so với đáy là bao nhiêu?





A. 68,32cm. **B.** 78,32cm. **C.** 58,32cm. **D.** 48,32cm.

Lời giải.

Trước khi đặt khối trụ vào trong hộp thì thể tích nước trong hộp là $V_n = 40\cdot 80\cdot 50 = 160000\,(\text{cm}^3)$

Gọi h (cm) là chiều cao của mặt nước so với đáy.

Sau khi đặt khối trụ vào hình hộp thì thể tích lượng nước là$V_n = h\cdot(4000 - 400\pi)\,(\text{cm}^3)$.

Do lượng nước không đổi nên ta có $h\cdot(4000 - 400\pi) = 160000 \Leftrightarrow h = \dfrac{160000}{4000 - 400\pi} \approx 58{,}32(\text{cm})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $4a^3$. Tính khoảng cách từ điểm O tới mặt bên của hình chóp.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.

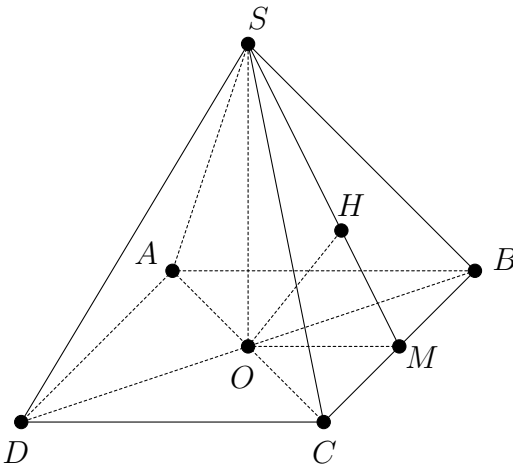
Phương pháp:

Sử dụng quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để xác định khoảng cách $\mathrm{d}(O;(P)) = OH$ với $OH \perp (P)$ tại H.

(Để chứng minh $OH \perp (P)$ ta chứng minh OH vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P)).

Ta tính SO dựa vào công thức thể tích hình chóp, tính OH dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cách giải:



Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều có O là tâm đáy nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm BC, trong tam giác SOM kẻ $OH \perp SM$ tại H.

Vì $ABCD$ là hình vuông tâm O nên $OB = OC = OA = OD = \frac{BD}{2}$.

Suy ra $OM \perp BC$ (vì ΔOBC vuông cân có OM là trung tuyến cũng là đường cao).

Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$, lại có $OM \perp BC$ nên $BC \perp (SOM)$ suy ra $BC \perp OH$.

Từ đó vì $\begin{cases} OH \perp SM \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(O;(SBC)) = OH$.

Xét tam giác OBC vuông cân tại O có trung tuyến $OM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow 4a^3 = \frac{1}{3} SO \cdot 4a^2 \Rightarrow SO = 3a$.

Xét tam giác SOM vuông tại M có OH là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow OH^2 = \frac{10}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$.

Vậy $\mathrm{d}(O;(SBC)) = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$.

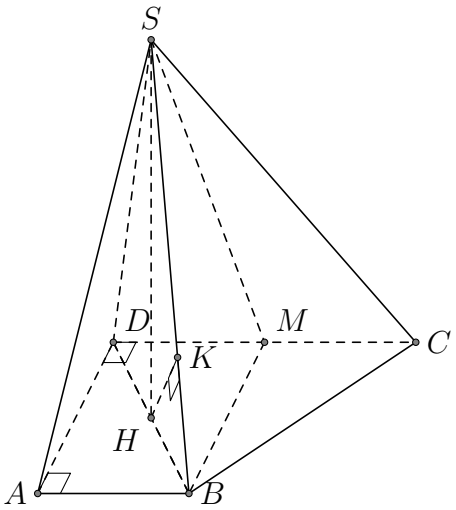
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a, CD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích tứ diện $SBCD$ bằng $\frac{a^3}{\sqrt{6}}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Cách 1: Gọi H là trung điểm BD và M là trung điểm của $CD \Rightarrow ABMD$ là hình vuông cạnh bằng a.
$BM = \frac{1}{2}DC$, tam giác BCD vuông cân tại B.
Ta có $BC \perp SB$ (vì $BC \perp BD, BC \perp SH$)



$$SH = \frac{3V_{SBCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}SH \cdot (S_{ABCD} - S_{\Delta ADC})}{\frac{1}{2}SB \cdot BC} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Cách 2: Gọi M là trung điểm của CD, H là trung điểm của BD.
Ta có ΔBCD có $BM = \frac{1}{2}DC \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.

$$BD = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot BC = a^2.$$

$$V_{SBCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta BCD} \Rightarrow SH = \frac{3V_{SBCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{3a^3}{\sqrt{6}a^2} = \frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Ta có $AH \parallel (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC))$.
Kẻ $HK \perp SB$ ta được $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHB) \Rightarrow BC \perp HK$.
Do đó $HK \perp (SBC) \Rightarrow d(H,(SBC)) = HK$ ΔSHB có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{16}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{4} = d(A,(SBC)).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Một khối lập phương có cạnh bằng a cm. Khi tăng kích thước của mỗi cạnh thêm 2 cm thì thể tích tăng thêm 98 cm^3. Giá trị của a bằng

A. 6 cm. **B.** 5 cm. **C.** 4 cm. **D.** 3 cm.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối lập phương ban đầu và thể tích khối lập phương khi tăng kích thước của mỗi cạnh thêm 2 cm.
Ta có $V_1 = a^3$ cm^3; $V_2 = (a+2)^3$ cm^3.
Theo đề bài suy ra $(a+2)^3 - a^3 = 98 \Leftrightarrow 6a^2 + 12a - 90 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \text{ (N)} \\ a = -5 \text{ (L)}. \end{array}\right.$
Vậy $a = 3$ cm.
Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCDE$ có đáy hình ngũ giác và có thể tích là V. Nếu tăng chiều cao của hình chóp lên 3 lần đồng thời giảm độ dài các cạnh đi 3 lần thì ta được khối chóp mới $S'.A'B'C'D'E'$ có thể tích là V'. Tỷ số thể tích $\frac{V'}{V}$ là

A. 3. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}Sh$.

Hai đa giác đồng dạng với nhau nên $S_{S'.A'B'C'D'E'} = \frac{1}{9}S_{S.ABCDE}$.

Chiều cao của hình chóp $S'.A'B'C'D'E'$ tăng lên 3 lần nên ta có

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}S_{S.ABCDE}3h = \frac{1}{3}V.$$

Do đó tỉ số thể tích $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

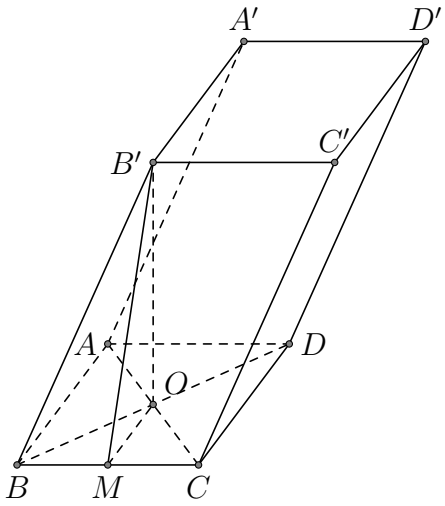
Câu 39. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC đều nên

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



Gọi M là hình chiếu của O trên BC thì BC vuông góc với mặt phẳng $(B'OM)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{B'MO} = 60°$.

Ta lại có tam giác BOC vuông tại O, có đường cao OM nên

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác $B'OM$ vuông tại O nên $B'O = OM \cdot \tan 60° = \frac{3a}{4}$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = B'O \cdot S_{ABCD} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn đáp án (A) □

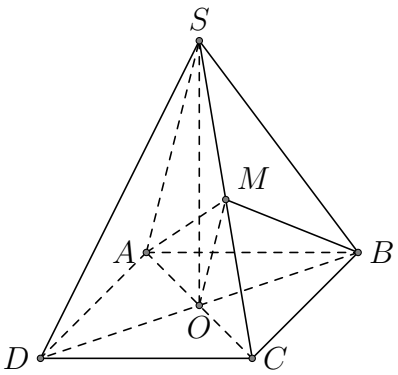
Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích V, có O là tâm của đáy. Lấy M là trung điểm của cạnh bên SC. Thể tích khối tứ diện $ABMO$ bằng

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{2}$. **C.** $\frac{V}{16}$. **D.** $\frac{V}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{ABMO} &= \frac{1}{2}V_{ABMC};\\ V_{ABMC} &= \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{4}V_{SABCD} = \frac{1}{4}V\\ \Rightarrow V_{ABMO} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}V = \frac{1}{8}V \end{aligned}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Xét ΔSAB đều cạnh $2a$ có $SI = a\sqrt{3}$.

Kẻ $AK \perp BD$ tại K.

Xét ΔBAD có $AK = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

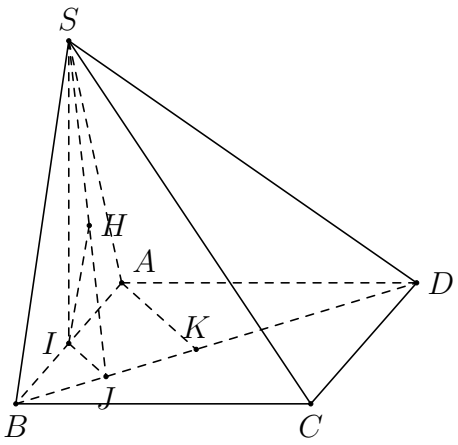
Kẻ $JI \perp BD$ tại $J \Rightarrow JI \parallel AK \Rightarrow JI = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ta có $BD \perp SI \Rightarrow BD \perp (SJI)$.

Kẻ $HI \perp SJ$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SBD)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(I,(SBD)) = IH$.

Xét ΔSIJ có $HI = \dfrac{JI \cdot SI}{\sqrt{JI^2 + SI^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do I là trung điểm của AB nên $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(I,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

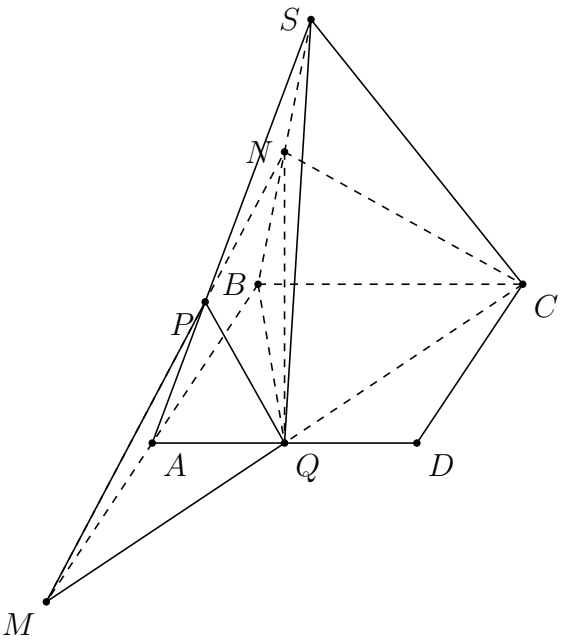


Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm cạnh SB, M là điểm đối xứng với B qua A. Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$.

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{7}{24}$. **C.** $\frac{5}{24}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải.



Gọi $P = MN \cap SA, Q = MC \cap AD$. Ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNC) là tứ giác $CNPQ$. Dễ thấy P là trọng tâm của tam giác SBM và Q là trung điểm của đoạn AD.
Gọi V_0 thể tích của phần chứa điểm S, S là diện tích của tứ giác $ABCD$ và h chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.
Ta có $V_0 = V_{S.NPQ} + V_{S.NQC} + V_{S.QDC}$.
Mà $V_{S.NPQ} = \dfrac{SP}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot V_{S.BAQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABQ} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} S \cdot h = \dfrac{1}{12} V$.
$V_{S.NQC} = \dfrac{SN}{SB} \cdot V_{S.BQC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} . S_{BQC} \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} S \cdot h = \dfrac{1}{4} V$.
$V_{S.QDC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{QDC} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} S \cdot h = \dfrac{1}{4} V$.
Suy ra $V_0 = \dfrac{1}{12} V + \dfrac{1}{4} V + \dfrac{1}{4} V = \dfrac{7}{12} V$.
Dẫn đến $V_2 = \dfrac{7}{12} V$ và $V_1 = V - V_2 = \dfrac{5}{12} V$.
Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{5}{12}$.
Nhận xét: kết quả này đúng cho hình chóp có đáy là hình bình hành.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V = 12$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, P là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS = 2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{5}{18}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{12}{25}$.

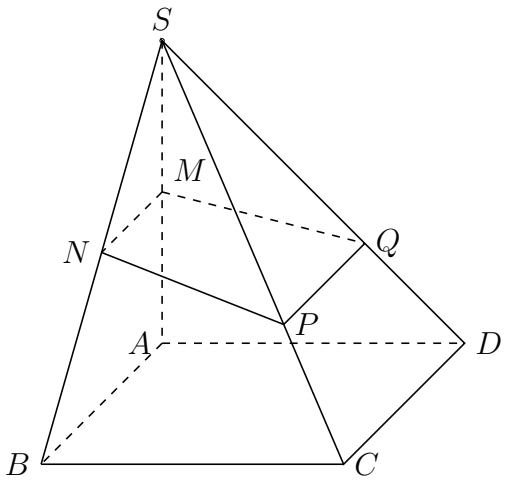
Lời giải.

Ta có $P \in (MNP) \cap (SCD)$ và $MN \parallel CD$. Do đó giao tuyến của (MNP) và (SCD) song song với CD. Qua P trong mặt phẳng (SCD) kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại Q. Khi đó $(MNP) \cap (SCD) = PQ$ và $PQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{2}{3}$. Ta có

$\dfrac{V_{SMNP}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{V_{SMNP}}{V} = \dfrac{1}{12}$.

$\dfrac{V_{SMQP}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \dfrac{V_{SMQP}}{V} = \dfrac{1}{9}$.

Vậy $V_{SMNPQ} = \dfrac{7}{36}V = \dfrac{7}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = 4a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = 8a^3$. **D.** $V = \dfrac{8a^3}{3}$.

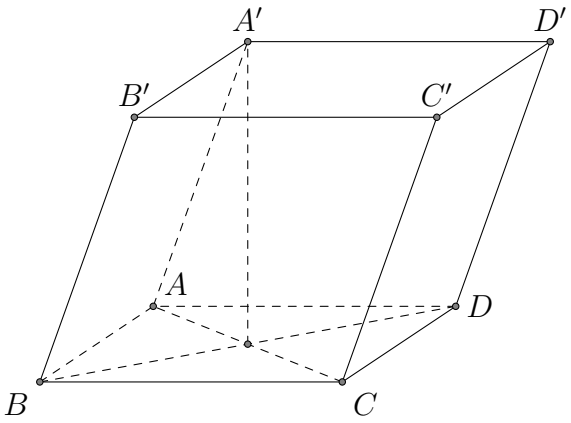
Lời giải.

Ta có $A'O \perp (ABCD)$, $AO = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2}$,

$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối hộp

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với góc $60°$. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AM và song song với BD, cắt SB, SD lần lượt tại E và F và chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích V của khối chóp không chứa đỉnh S.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

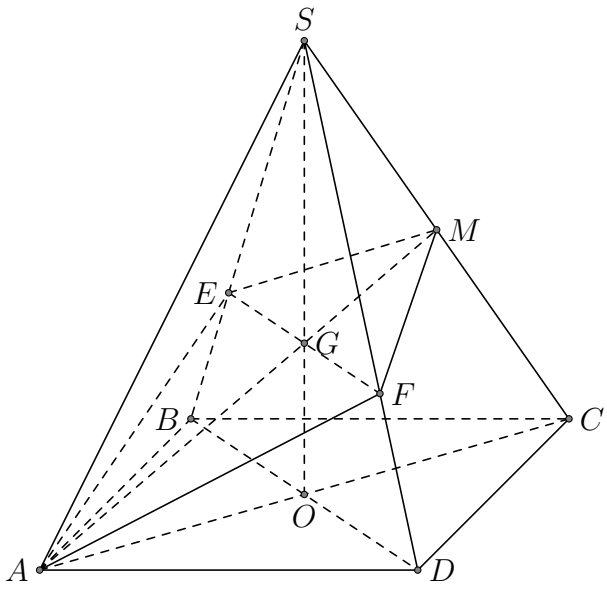
Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AM \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC nên $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $(\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCO} = 60^\circ$, do đó

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = OC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



Gọi (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD, suy ra (α) là mặt phẳng đi qua G, song song với BD và cắt SB, SD lần lượt tại E và F.

Do đó, (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AEMF$, suy ra (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần là khối chóp $S.AEMF$ và khối đa diện $EMFABCD$.

Ta có EF đi qua G và song song BD nên $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Xét hai khối chóp $S.AEF$ và $S.ABD$, ta có $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.ABD} = \dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}$.

Xét hai khối chóp $S.EFM$ và $S.BCD$, ta có $\dfrac{V_{S.EFM}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SF}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{S.EFM} = \dfrac{1}{9}V_{S.ABCD}$.

Ta có $V_{S.AEMF} = V_{S.AEF} + V_{S.EFM} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Thể tích khối chóp không chứa đỉnh S là

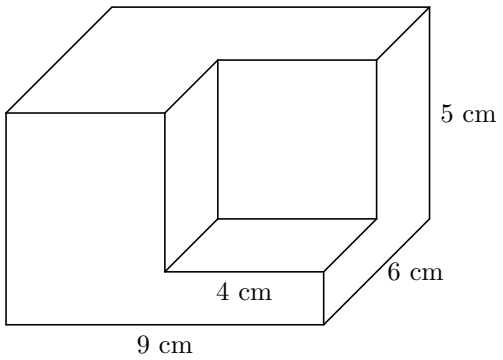
$$V = V_{S.ABCD} - V_{S.AEMF} = \frac{2}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 46.

Một khúc gỗ dạng hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Người ta cắt đi một phần khúc gỗ dạng hình lập phương cạnh 4 cm. Tính thể tích phần còn lại.

A. 262 cm^3. **B**. 54 cm^3. **C**. 145 cm^3. **D**. 206 cm^3.



Lời giải.

Thể tích khối gỗ lúc đầu khi chưa bị cắt $V_1 = 5 \cdot 9 \cdot 6 = 270$ cm^3.

Thể tích khối gỗ cắt bớt ra $V_2 = 4^3 = 64$ cm^3.

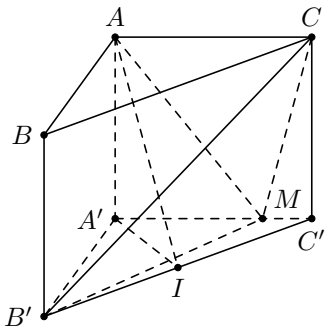
Thể tích phần còn lại $V = V_1 - V_2 = 206$ cm^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt bên $(AB'C')$ tạo với đáy (ABC) một góc 60°. Gọi M là điểm thuộc cạnh $A'C'$ sao cho $A'M = 3MC'$. Tính thể tích V của khối chóp $CMBC'$.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{24}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{32}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C' \Rightarrow \widehat{IA'B'}=60^\circ$.
Xét tam giác $A'IB'$ vuông tại I có $A'I=A'B'\cos 60^\circ=\dfrac{a}{2}$.
Ta có $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp AA'$ nên góc giữa $(AB'C')$ và (ABC) là $\widehat{AIA'}=60^\circ$.
Xét tam giác $A'IA$ vuông tại A' có $AA'=A'I\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mà $S_{\triangle MCC'}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle A'CC'}$ nên

$$\begin{aligned} V_{CMBC'} &= \frac{1}{4}V_{BA'CC'}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{12}\cdot AA'\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 120^\circ\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{32}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc cạnh SA, SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$. Mặt phẳng (α) đi qua MN và song song với SC. Kí hiệu $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ là các khối đa diện có được khi chia khối chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó $(\mathscr{H}_1)$ chứa điểm S và $(\mathscr{H}_2)$ chứa điểm A. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

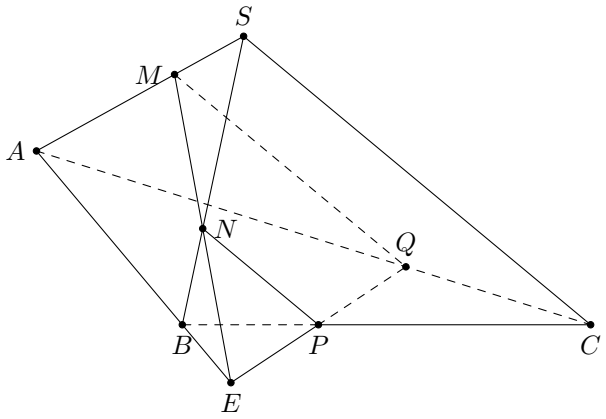
Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC, cắt BC và AC lần lượt tại P, Q. Gọi E là giao điểm của MN và $AB \Rightarrow PQ$ đi qua E.
Ta có $NP \parallel SC$ nên $\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{BN}{BS}=\dfrac{1}{3}$. Áp dụng Mê-nê-la-uýt cho tam giác SAB ta có

$$\frac{MS}{MA}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{NB}{NS}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{EA}{EB}=4.$$

Áp dụng Mê-nê-la-uýt cho tam giác ABC ta có

$$\frac{QC}{QA}\cdot\frac{EA}{EB}\cdot\frac{PB}{PC}=1 \Rightarrow \frac{QC}{QA}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{QC}{QA}=\frac{1}{3}.$$



Khi đó

$$\frac{V_{M.QAE}}{V_{S.ABC}} = \frac{AM}{SA}\cdot\frac{S_{\triangle QAE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{AQ}{CA}\cdot\frac{EA}{AB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{27} \Rightarrow V_{M.QAE} = \frac{16}{27}V_{S.ABC};$$
$$\frac{V_{N.PBE}}{V_{S.ABC}} = \frac{BN}{BS}\cdot\frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{BE}{BA}\cdot\frac{BP}{BC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{N.PBE} = \frac{1}{27}V_{S.ABC};$$
$$V_{\mathscr{H}_2} = V_{M.AEQ} - V_{N.BEP} = \left(\frac{16}{27} - \frac{1}{27}\right)V_{S.ABC} = \frac{15}{27}V_{S.ABC};$$
$$V_{\mathscr{H}_1} = V_{S.ABC} - V_{\mathscr{H}_2} = \frac{12}{27}V_{S.ABC}.$$

Vậy $\dfrac{V_{\mathscr{H}_1}}{V_{\mathscr{H}_2}} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

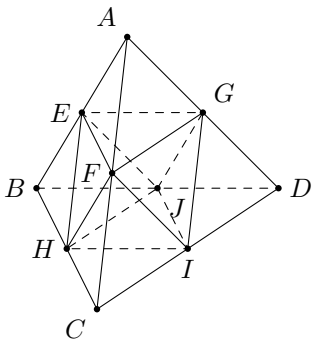
Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho khối tứ diện có thể tích V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh tứ diện đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Giả sử khối đa diện là $ABCD$. Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD, BC, CD, BD.



Ta có $\dfrac{V_{AEFG}}{V} = \dfrac{AE}{AB}\cdot\dfrac{AF}{AC}\cdot\dfrac{AG}{AD} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{AEFG} = \dfrac{1}{8}V$.

Tương tự, $V_{BEHJ} = \dfrac{1}{8}V$; $V_{CHIF} = \dfrac{1}{8}V$; $V_{DGIJ} = \dfrac{1}{8}V$.

Do đó $V' = V - V_{AEFG} - V_{BEHJ} - V_{CHIF} - V_{DGIJ} = \dfrac{1}{2}V$.

Vậy $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

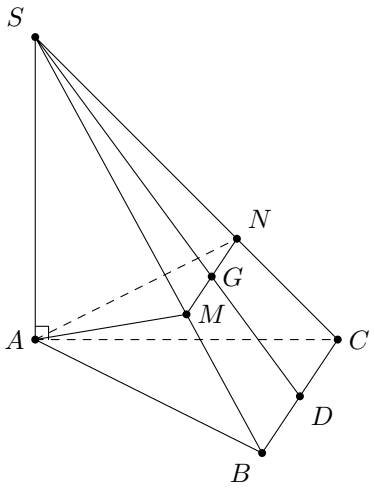
Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, (α) là mặt phẳng đi qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M và N. Tính thể tích V của khối đa diện $AMNBC$.

A. $V = \dfrac{4}{9}a^3$. **B.** $V = \dfrac{2}{27}a^3$. **C.** $V = \dfrac{5}{27}a^3$. **D.** $V = \dfrac{5}{54}a^3$.

Lời giải.

Do (α) đi qua $G \in (SBC)$, song song với BC nên (α) cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến MN qua G và song song với BC.
Suy ra $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3}$ và do đó

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}.$$



Từ đó suy ra $\dfrac{V_{AMNCB}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{5}{9}$. Do tam giác ABC vuông cân tại B và có $AC = a\sqrt{2}$ nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$.
Do $SA \perp (ABC)$ nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$.
Suy ra $V_{AMNCB} = \dfrac{5}{9} V_{S.ABC} = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{5}{54} a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích của ba mặt lần lượt là 60 cm^2, 72 cm^2, 81 cm^2. Khi đó, thể tích V của khối hộp chữ nhật gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 595 cm^3. **B.** 592 cm^3. **C.** 593 cm^3. **D.** 594 cm^3.

Lời giải.

Giả sử khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật là $V = abc$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} ab = 60 \\ bc = 72 \\ ac = 81 \end{cases} \Rightarrow (abc)^2 = 60 \cdot 72 \cdot 81 = 349920.$$

Suy ra $V = abc = \sqrt{349920} \approx 591{,}54$. Vậy thể tích V của khối hình hộp chữ nhật gần với giá trị 592 cm^3.

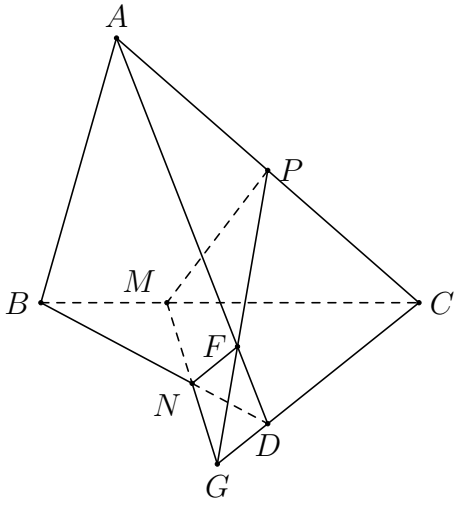
Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC,BD,AC lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \dfrac{3}{2} BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2, trong đó khối đa diện chứa cạnh CD có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{19}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{13}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{15}{19}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{19}$.

Lời giải.

Áp dụng định lí Me-ne-la-uyt ta có:
$\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{ND}{NB}\cdot\dfrac{GC}{GD}=1\Rightarrow\dfrac{GC}{GD}=4$
và $\dfrac{GC}{GD}\cdot\dfrac{FD}{FA}\cdot\dfrac{PA}{PC}=1\Rightarrow\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{1}{4}$



- $V_{DCPMNF}=V_{CPMF}+V_{CMNF}+V_{CNFD}$
- $\dfrac{V_{CPMF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(F,(CPM)\right)\cdot S_{CPM}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(D,(ABC)\right)\cdot S_{ABC}}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}$
- $\dfrac{V_{CNMF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(F,(CNM)\right)\cdot S_{CNM}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,(CBD)\right)\cdot S_{CBD}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{45}$
- $\dfrac{V_{CNDF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(FND)\right)\cdot S_{FND}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(ABD)\right)\cdot S_{ABD}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}$

$\Rightarrow\dfrac{V_2}{V_{ABCD}}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{45}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{19}{45}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{45-19}{19}=\dfrac{26}{19}.$

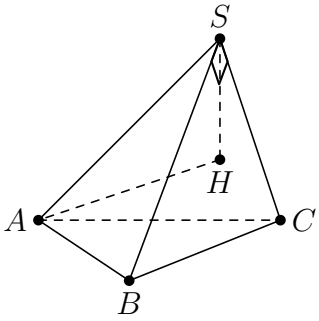
Chọn đáp án A □

Câu 53. Cho khối chóp $S.ABC$, mặt bên (SBC) là tam giác vuông cân tại S có $BC=2a$, cạnh $SA=a\sqrt{2}$ và tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 30°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SBC$ vuông cân tại S nên $BC=SC\sqrt{2}\Rightarrow SC=\dfrac{BC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$,
$S_{\triangle SBC}=a^2$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) suy ra $\widehat{ASH}=30^\circ$.
Ta có $\sin 30^\circ=\dfrac{AH}{SA}\Rightarrow AH=SA\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Từ đó ta có $V=\dfrac{1}{3}AH\cdot S_{\triangle SBC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



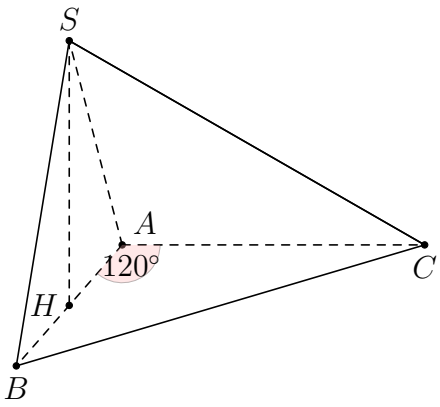
Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=a^3$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB
$\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Ta có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Vậy: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.



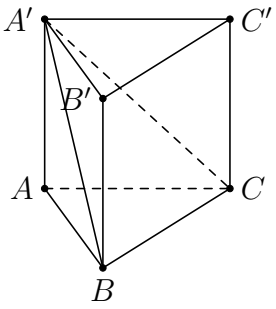
Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Do đáy tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$ nên AB = a.
Lại có: $(A'BC) \cap (ABC) = BC$ mà $BC \perp (A'B'BA)$ nên góc tạo bởi $(A'BC)$ và đáy là $\widehat{A'BA}$.
Theo bài ra: $\widehat{A'BA} = 60°$.
$AA' = AB \cdot \tan \widehat{A'BA} = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.
Thể tích V của khối lăng trụ: $V = A'A \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, $SB = a\sqrt{2}$. Hai mặt bên SAD và SAB cùng vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $S_{ABCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $SC = a\sqrt{3}$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên suy ra $\triangle ABC$ là tam giác đều.

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Loại phương án A.

Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $ABCD$ nên suy ra $SA \perp (ABCD)$. Xét tam giác SAB vuông tại A. Khi đó:

$\Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$.

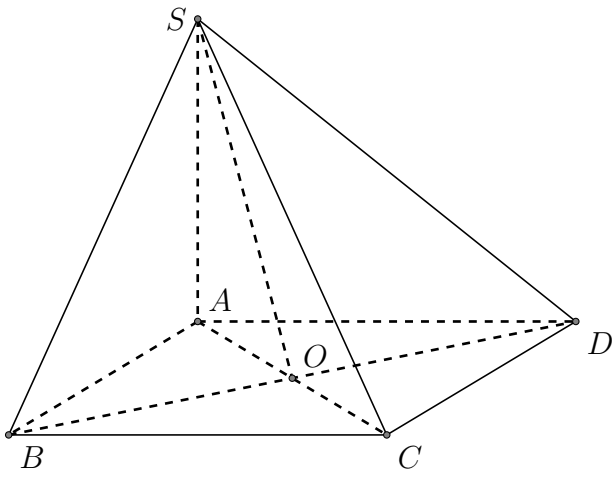
Xét tam giác SAC vuông tại A. Khi đó:

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Do đó loại phương án B.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Do đó loại phương án D.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Mà $BD \subset (SBD)$ suy ra $(SAC) \perp (SBD)$. Do đó chọn phương án đúng là C.



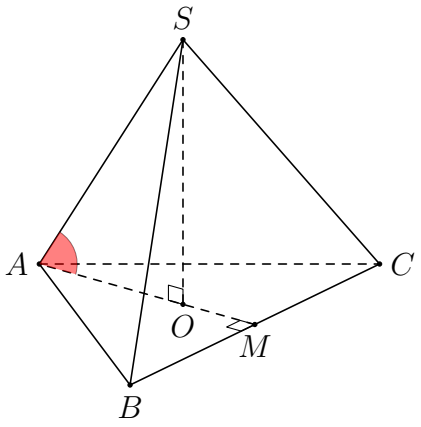
Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

- ☑ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$ nên $\widehat{SAO} = 60^\circ$.
- ☑ Ta có $AO = \dfrac{2}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $SH = AO \cdot \tan 60^\circ = 2a$.
- ☑ Diện tích đáy : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.
- ☑ Thể tích : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot 2a = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.

Do ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $HI \perp BD$ tại I, kẻ $HK \perp SI$ tại K.

Suy ra $\mathrm{d}[A,(SBD)] = 2\mathrm{d}[H,(SBD)] = 2HK$.

Xét ΔSAB đều có $SH = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Ta có ΔHIB đồng dạng ΔDAB nên $\dfrac{HI}{DA} = \dfrac{HB}{DB}$.

$\Rightarrow HI = \dfrac{HB \cdot DA}{DB} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Xét ΔSHI vuông tại H có $HK = \dfrac{HI \cdot SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}[A,(SBD)] = 2HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua AB cắt SC và SD lần lượt tại M và N sao cho $\dfrac{SM}{SC} = x$. Tìm x biết $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{11}{200}$.

A. $0,1$. **B.** $0,3$. **C.** $0,2$. **D.** $0,25$.

Lời giải.

Lấy $M \in SC$, qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt SD tại N ta được mặt phẳng $(ABMN)$ thỏa mãn điều kiện.

Vì MN song song CD nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = x.$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$V_{S.ACB} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V.$$

Ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = x^2;$$

$$\frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ACB}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SB}{SB} = x.$$

Do đó

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = 2\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = x^2 \Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x^2}{2}.$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = 2\frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABCD}} = x \Rightarrow \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x}{2}.$$

Mà $V_{S.AMN} + V_{S.AMB} = V_{S.ABMN}$ nên

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x^2 + x}{2}.$$

Theo giả thiết ta có $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{11}{200}$.

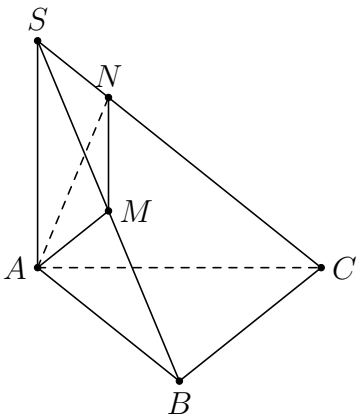
$$\Rightarrow \frac{x^2+x}{2} = \frac{11}{200} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 100x^2 + 100x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính $\dfrac{50V\sqrt{3}}{a^3}$, với V là thể tích khối chóp $A.BCMN$.

A. 10. **B**. 12. **C**. 9. **D**. 11.

Lời giải.



Xét tam giác SAB và SAC là các tam giác vuông tại A có hai cạnh góc vuông là a và $2a$ nên $SB = SC = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Tam giác SAB vuông A tại có đường cao AM.

Khi đó $SA^2 = SM \cdot SB \Rightarrow \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{SM}{SB} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{4}{5}$.

Tương tự ta có $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{5}$.

Lại có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{16}{25}$.

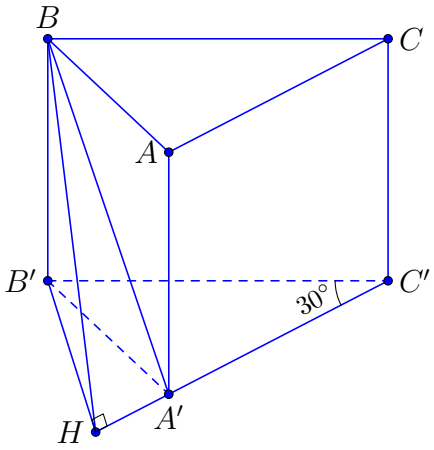
Do đó, $V = V_{A.BCNM} = \dfrac{9}{25} V_{S.ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{50}$, suy ra $\dfrac{50V\sqrt{3}}{a^3} = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.AB'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B**. $\dfrac{9a^3}{8}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D**. $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.



Ta có: $B'H = \sin 30° . B'C' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\widehat{BHB'} = 60° \Rightarrow BB' = B'H . \tan 60° = \dfrac{3a}{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} . BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\dfrac{AM}{AA'}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CP}{CC'}=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{CQ}{C'B'}=\dfrac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{22}{45}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{11}{45}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{19}{45}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{11}{30}$.

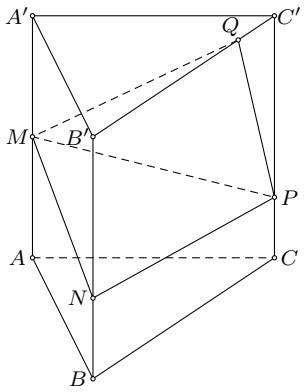
Lời giải.

$V_{A'ABC}=\dfrac{1}{3}V_2 \Rightarrow V_{ABCCB'}=V_{M.BCCB'}=\dfrac{2}{3}V_2$

Mà $S_{B'NQ}=\dfrac{4}{15}S_{BCC'B'}, S_{C'PQ}=\dfrac{3}{40}S_{BCC'B'}, S_{BCPN}=\dfrac{7}{24}S_{BCC'B'}$

Suy ra $S_{NPQ}=S_{BCCB'}-S_{B'NQ}-S_{C'PQ}-S_{BCPN}=\dfrac{11}{30}S_{BCCB}$

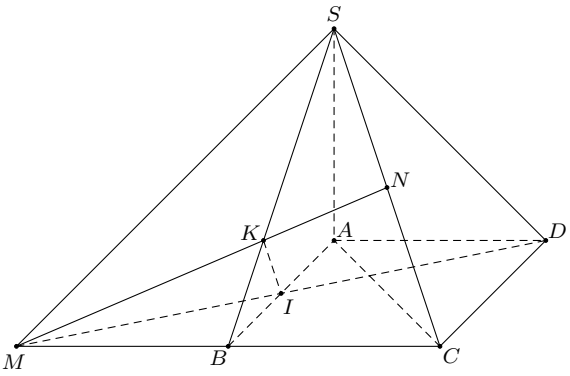
Do đó $V_1=V_{MNPQ}=\dfrac{11}{30}V_{MBCCB}=\dfrac{11}{45}V_2$ tức là $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{11}{45}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ sau).

Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{12}{7}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{5}$.

Lời giải.

Gọi $I=DM\cap AB$ và $K=MN\cap SB$ Ta có: B, N lần lượt là trung điểm của MC, SC nên K là trọng tâm tam giác SMC .Và BI là đường trung bình của tam giác MCD

Khi đó $\dfrac{V_{MBKI}}{V_{MCND}}=\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{MK}{MN}\cdot\dfrac{MI}{MD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{MBKI}=\dfrac{1}{6}V_{MCND} \Rightarrow V_{BKICND}=5V_{MBKI}$

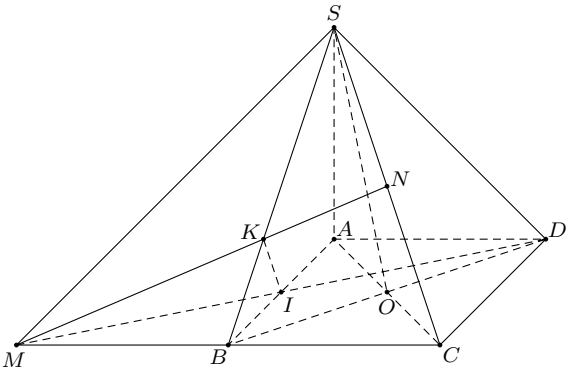
+) Tính thể tích của khối $SABCD$

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^\circ \Rightarrow \triangle BAD$ đều,

$\Rightarrow S_{ABCD}=2S_{ABD}=2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $[(SBD),(ABCD)]=\widehat{SOA}=45^\circ \Rightarrow SA=OA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{SBCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{4}$.



+) Tính thể tích khối $KMIB$

$V_{KMBB} = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}(K,(MIB))\cdot S_{MBB} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}(S,(MIB))\cdot S_{MB} = \frac{1}{9}\cdot SA\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABD} = \frac{1}{18}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{48}.$

Do đó $V_2 = \frac{5a^3}{48}$ và $V_1 = \frac{a^3}{4} - \frac{5a^3}{48} = \frac{7a^3}{48} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

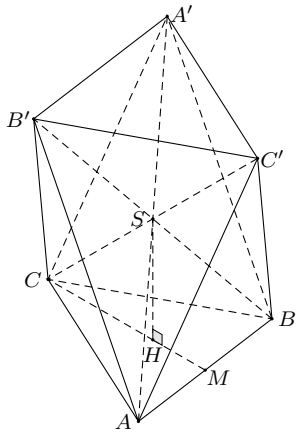
Ta tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

Gọi H là tâm tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 60° \Rightarrow SH = a \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

$V = 2V_{B.ACA'C'} = 2.4V_{B.ACS} = 8V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = SA = a$, $AD = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, gọi I là giao điểm của BM và AC. Tỷ số $\frac{V_{AMNI}}{V_{S.ABCD}}$ là

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Lời giải.

Coi hình chóp $AMNI$ với điểm N làm đỉnh và AMI làm đáy.

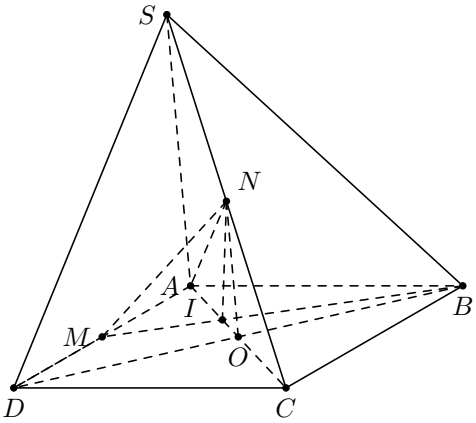
☑ Từ N là trung điểm của SC nên đường cao

$$h_{AMNI} = \frac{1}{2}h_{S.ABCD}.$$

☑ Lấy O là tâm hình chữ nhật ta có $BM; AO$ là các trung tuyến nên I là trọng tâm tam giác ABD nên

$$\frac{S_{AIM}}{S_{ABD}} = \frac{h_I\cdot AM}{h_B\cdot AD} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{S_{AIM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{12}.$$

☑ Suy ra $\frac{V_{AMNI}}{V_{S.ABCD}} = \frac{h_{AMNI}}{h_{S.ABCD}}\cdot\frac{S_{AIM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$

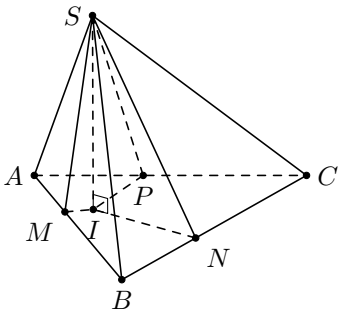


Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$, có $AB = 5\,(\mathrm{cm})$, $BC = 6\,(\mathrm{cm})$, $AC = 7\,(\mathrm{cm})$. Các mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp bằng

A. $\dfrac{105\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm}^3)$. **B.** $24\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$. **C.** $8\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$. **D.** $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm}^3)$.

Lời giải.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên $mp(ABC)$.
Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của I trên AB, BC, AC.
Vì các mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng 60°, khi đó
$\widehat{SMI} = \widehat{SNI} = \widehat{SPI} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ISM = \triangle ISN = \triangle ISP$
$\Rightarrow IM = IN = IP$.
Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 9 \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = 6\sqrt{6}$. Do đó

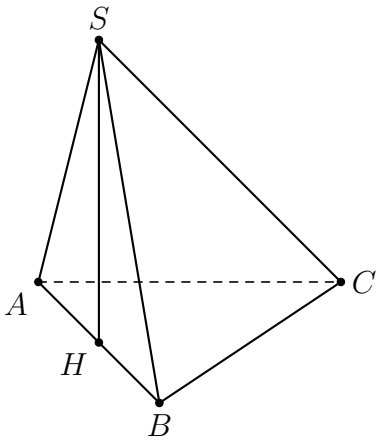
$$IM = r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\,(\text{cm})$$
$$\Rightarrow SI = IM \cdot \tan\widehat{SMI} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}\,(\text{cm})$$
$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SI \cdot S_{ABC} = 8\sqrt{3}\,(\text{cm}^3).$$

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = 3a^3$. **C.** $V = \dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$.
Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \perp AB, SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Mặt khác : $S_{\triangle ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ và $SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Thể tích khối chóp : $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3$.

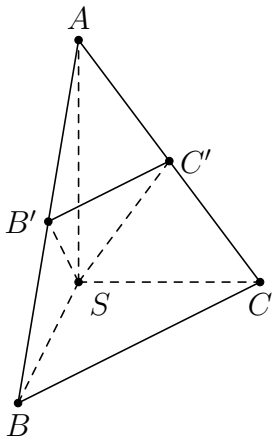
Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên AB, AC. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3}{24}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{48}$.

Lời giải.

Do các tam giác SAB, SAC vuông cân tại S nên B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ta có $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{V_{A.SB'C'}}{V_{A.SBC}} = \dfrac{AB'}{AB} \cdot \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Mặt khác $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \dfrac{1}{6} a^3$.

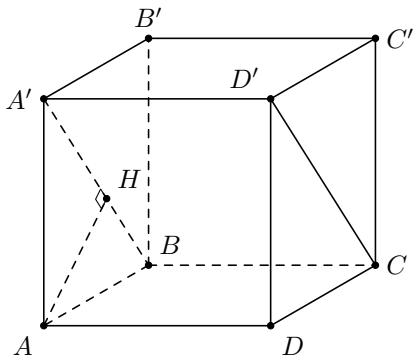
Vậy : $V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{7}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải.



Kẻ $AH \perp A'B$. (1)

Ta có $\begin{cases} A'D' \perp A'B' \\ A'D' \perp AA' \\ AA' \cap A'B' = A' \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp (ABB'A') \Rightarrow A'D' \perp AH$. (2)

$A'B \cap A'D' = A'$. (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow AH \perp (A'BCD')$ do đó AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BCD')$.

Xét tam giác $A'AB$ vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{AB^2 - AH^2}{AB^2 \cdot AH^2} = \frac{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}}{a^2 \cdot \dfrac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = a^2 \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A.

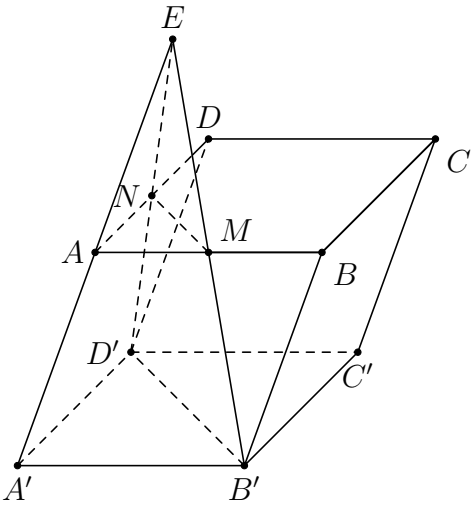
A. $\dfrac{5045}{6}$. **B.** $\dfrac{7063}{6}$. **C.** $\dfrac{10090}{17}$. **D.** $\dfrac{7063}{12}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $E = B'M \cap AA'$.
Trong mặt phẳng $(ADD'A')$, gọi $N = ED' \cap AD$.
Vì M là trung điểm AB nên M cũng là trung điểm EB'. Tương tự, N là trung điểm ED'.
Ta có

$$\frac{V_{E.AMN}}{V_{E.A'B'D'}} = \frac{EA}{EA'} \cdot \frac{EM}{EB'} \cdot \frac{EN}{ED'} = \frac{1}{8}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra



$$\begin{aligned} V_{AMNA'B'D'} &= \frac{7}{8} V_{E.A'B'D'} \\ &= \frac{7}{8} \cdot 2V_{A.A'B'D'} \\ &= \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{7}{24} \cdot 2018 = \frac{7063}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Một chiếc thùng đựng nước có hình của một khối lập phương chứa đầy nước . Đặt vào trong thùng đó một khối có dạng nón sao cho đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.

A. $\dfrac{\pi}{12-\pi}$. **B.** $\dfrac{1}{11}$. **C.** $\dfrac{\pi}{12}$. **D.** $\dfrac{11}{12}$.

Lời giải.

- ☑ Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phường là $V = 1$
- ☑ Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h = 1$, bán kính đáy $r = \dfrac{1}{2}$.
- ☑ Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón. Ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 1 = \dfrac{\pi}{12}$.
- ☑ Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là $V_2 = V - V_1 = 1 - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{12-\pi}{12}$.
- ☑ Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi}{12-\pi}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, ΔSACvuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là: $V = \dfrac{1}{3}hS$.

Cách giải: Gọi H là hình chiếu của S trên AC.

Ta có $\begin{cases}(SAC)\cap(ABCD)=AC\\(SAC)\supset SH\perp AC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Khi đó $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SA,AH}\right)=\left(\widehat{SA,AC}\right)=\widehat{SAC}$.

Ta có: $AC=AB\sqrt{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}=a$.

Xét ΔSAC vuông tại S ta có: $\begin{cases}SA=AC\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a}{2}\\SC=AC\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔSAC vuông tại S và có đường cao SH ta có:

$SH=\dfrac{SA.SC}{AC}=\dfrac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

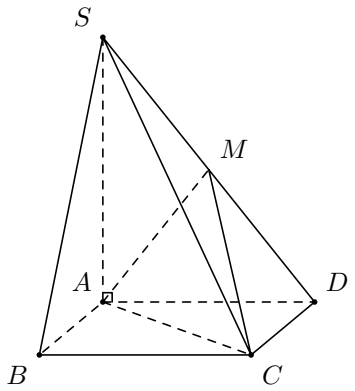
$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73.

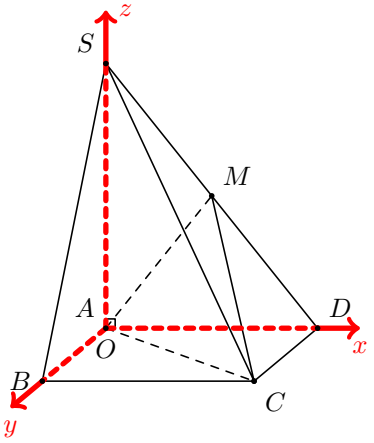
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A\equiv O(0;0;0)$, $D(a;0;0)\in Ox$, $B(0;a;0)\in Oy$, $S(0;0;2a)\in Oz$. Suy ra $C\in(Oxy)$ và $C(a;a;0)$, $M\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$.



Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$; $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)\Rightarrow\vec{n}_{(AMC)}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-a^2;a^2;\dfrac{a^2}{2}\right)$.

Hay $\vec{n}_{(AMC)}=\left(-a;a;\dfrac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{SB}=(0;a;-2a)$, $\overrightarrow{SC}=(a;a;-2a)$

$\Rightarrow\vec{n}_{(SBC)}=[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}]=(0;-2a;-a)$.

Đặt $((AMC),(SBC))=\alpha$.

Khi đó $\cos((AMC),(SBC))=\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}_{(MAC)}\cdot\vec{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(MAC)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|}=\dfrac{5a^2}{2\cdot\frac{3a}{2}\cdot a\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

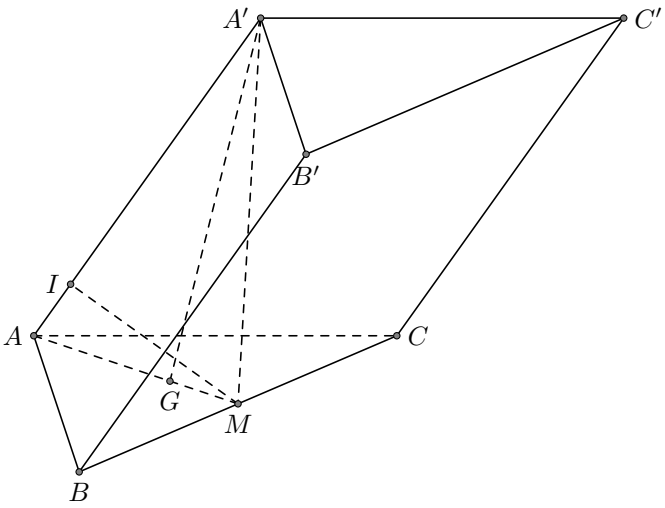
Mặt khác $\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC và I là hình chiếu vuông góc của M lên trên cạnh AA'.

Vì $AM \perp BC$ và $A'O \perp BC$ nên $BC \perp (AA'M)$. Suy ra $BC \perp MI$.

Vì $BC \perp MI$ và $BC \perp AA'$ nên MI là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC và AA'. Suy ra $MI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì hai tam giác $AA'O$ và AMI đồng dạng nên ta có $\dfrac{A'O}{MI} = \dfrac{AO}{AI}$. Suy ra

$$A'O = \frac{MI.AO}{AI} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3a}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Khi đó, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

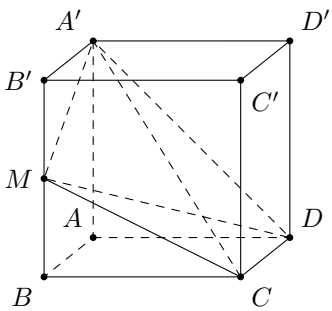
$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (dvtt)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 75.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính thể tích khối $A'MCD$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{2}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{28}$.



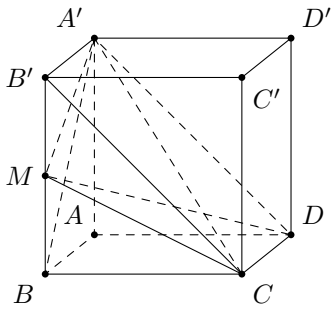
Lời giải.

Vì $\mathrm{d}\,(M,(A'CD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(B,(A'CD))$ và $S_{\triangle A'CD} = \dfrac{1}{2}S_{A'B'CD}$.

Suy ra $V_{A'MCD} = V_{M.A'CD} = \dfrac{1}{4}\cdot V_{B.CDA'B'}$.

Do đó

$$V_{A'MCD} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot V_{BCB'.ADA'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{12}.$$

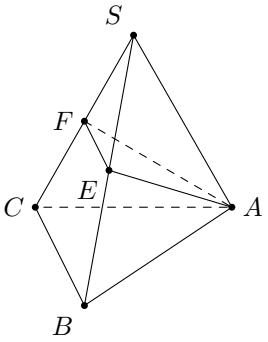


Chọn đáp án A □

Câu 76.

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.



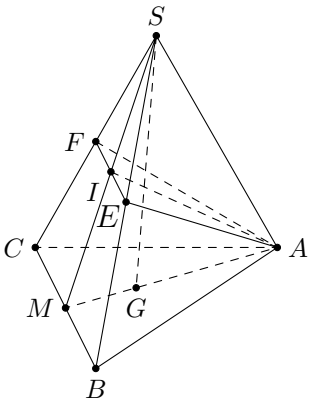
Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC, $I = EF \cap SM$, suy ra I là trung điểm của EF và SM.

Mặt khác, do hai tam giác $\triangle ACS$ và $\triangle ABS$ bằng nhau nên $AF = AE$. Do đó, tam giác AEF cân tại A nên $AI \perp EF$.

Lại có, $(AEF) \perp (SBC)$ nên $AI \perp (SBC)$, suy ra $AI \perp SM$.

Tam giác ASM có $AI \perp SM$ và I là trung điểm của SM nên ASM cân tại A, suy ra $SA = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Gọi G là trọng tâm ABC, suy ra $SG \perp (ABC)$ và $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SAG có $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

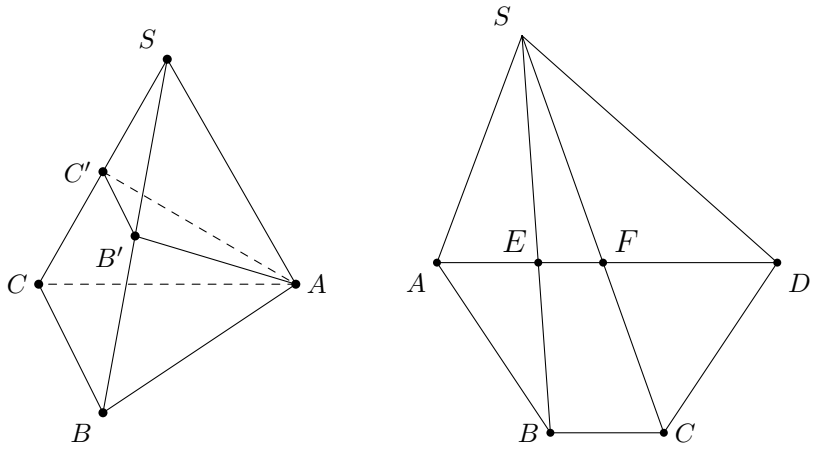
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{15}}{6}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 77. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, $\widehat{ASB} = 30^\circ$. Lấy các điểm B', C' lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tính chu vi đó.

A. $(\sqrt{3}-1)a$. **B.** $\sqrt{3}a$. **C.** $\dfrac{a}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $(1+\sqrt{3})a$.

Lời giải.



Trải hình chóp $S.ABC$ ra mặt phẳng (SBC), suy ra chu vi tam giác $AB'C'$ bằng $AB'+B'C'+C'A=AB'+B'C'+C'D\geq AD$. Dấu "=" xảy ra khi $B'\equiv E$, $C'\equiv F$.

Ta có $AB=a$, $\widehat{ASB}=30^\circ$, suy ra $SA=SB=\dfrac{a}{2\sin 15^\circ}=\dfrac{a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}$.

Lại có $\widehat{ASB}=30^\circ\Rightarrow\widehat{ASD}=90^\circ\Rightarrow AD=SA\sqrt{2}=(1+\sqrt{3})a$.

Vậy chu vi tam giác $AB'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(1+\sqrt{3})a$.

Chọn đáp án (D) □

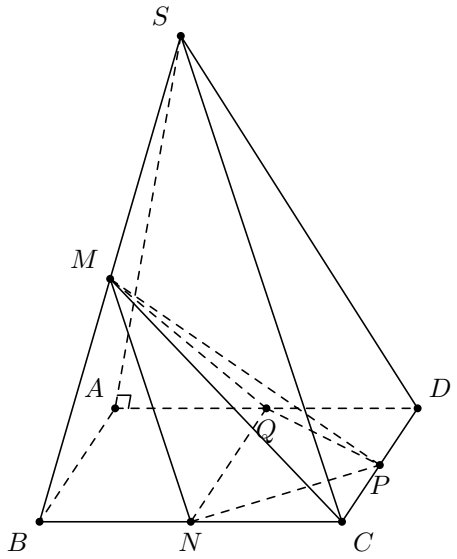
Câu 78. Cho khối chóp tứ giác $SABCD$ có thể tích V, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD, DA. Tính thể tích khối chóp $M.CNQP$ theo V.

A. $\dfrac{3V}{4}$. **B.** $\dfrac{3V}{8}$. **C.** $\dfrac{3V}{16}$. **D.** $\dfrac{V}{16}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}S_{CNPQ}&=S_{NQDC}-S_{DPQ}\\&=\frac{1}{2}S_{ABCD}-S_{DPQ}=\frac{1}{2}S-\frac{1}{8}S\\&=\frac{3}{8}S.\end{aligned}$$



Lại có $\mathrm{d}\,(M;(ABCD))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(A;(ABCD))$.

Suy ra $V_{MCNPQ}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(M;(ABCD))\cdot S_{CNPQ}=\dfrac{1}{2}h\cdot\dfrac{3}{8}S=\dfrac{3}{16}V$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AC=2\sqrt{3}a$, $BD=2a$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.

Phương pháp: $\begin{cases} (P) \perp (\alpha) \\ (Q) \perp (\alpha) \Rightarrow (d) \perp (\alpha). \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases}$

Cách giải: Ta có:

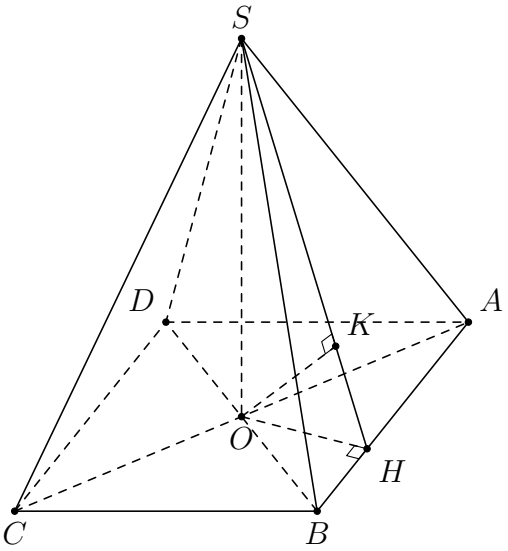
$\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow (SO) \perp (ABCD). \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases}$

Dựng $OH \perp AB, H \in AB, OK \perp SH$.

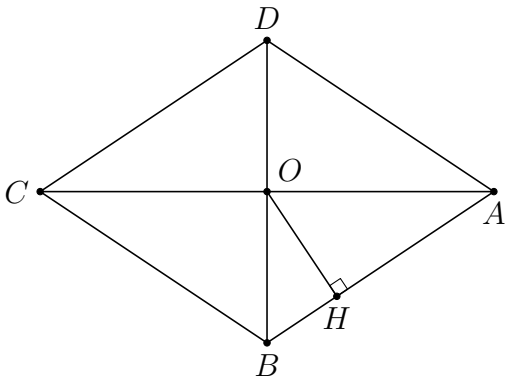
Ta có: $\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK.$

Mà $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SAB)$

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(O;(SAB)) = OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$



$\triangle OAB$ vuông tại O, $OH \perp AB \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$



$\triangle SOH$ vuông tại O, $OK \perp SH \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{3}{16}a^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{4}{\frac{3}{4}a^2} \Rightarrow SO = \dfrac{1}{2}a.$

Diện tích hình thoi $ABCD$: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = \dfrac{1}{2}2\sqrt{3}a \cdot 2a = 2\sqrt{3}a^2.$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}a^2 \cdot \dfrac{1}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ và N là trung điểm của DD'. Mặt phẳng (AMN) chia hình hộp thành hai phần, thể tích phần có chứa điểm A' bằng

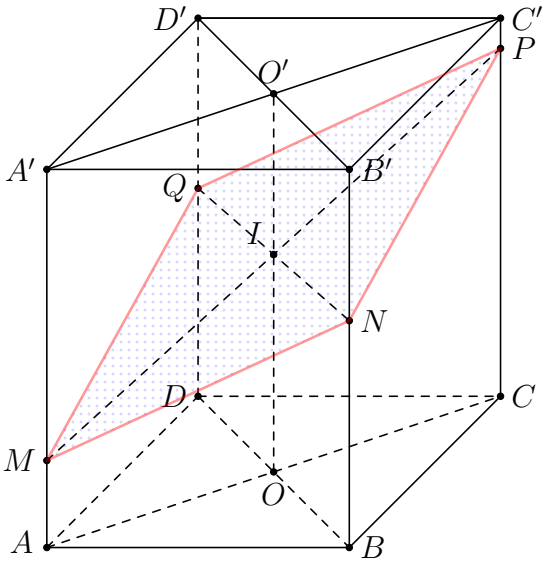
A. $\dfrac{67}{144}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{181}{432}$.

Lời giải.

Phương pháp:

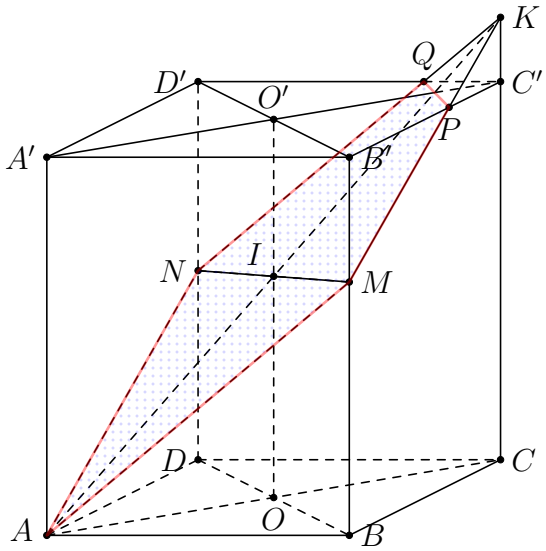
$\dfrac{AM}{AA'}=x, \dfrac{BN}{BB'}=y, \dfrac{CP}{CC'}=z, \dfrac{DQ}{DD'}=t.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=y+t \\ \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}. \end{cases}$$



Cách giải: Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$.

- ☑ Trong $(BDD'B')$, gọi I là giao điểm của OO' và MN.
- ☑ Trong $(ACC'A')$, gọi K là giao điểm của AI và CC'.
- ☑ Trong $(CDD'C')$, gọi Q là giao điểm của NK và $C'D'$.
- ☑ Trong $(CBB'C')$, gọi P là giao điểm của MK và $C'B'$.
- ☑ Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là ngũ giác $AMPQN$.



Đặt $\dfrac{AA'}{AA'}=x=0, \dfrac{BM}{BB'}=y=\dfrac{2}{3}, \dfrac{CK}{CC'}=z, \dfrac{DN}{DD'}=t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+z=y+t \\ \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}. \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0+z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3} \Rightarrow z=\dfrac{7}{6} \\ \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\dfrac{x+y+z+t}{4}=\dfrac{0+\frac{2}{3}+\frac{7}{6}+\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{7}{12}. \end{cases}$$

$\Rightarrow V_{ABCD.AMKN}=\dfrac{7}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{7}{12} \quad (1).$

$V_{K.CQP}=\dfrac{1}{3}d_{(K;(A'B'C'D'))}\cdot S_{\Delta CQP}.$

Mà $\mathrm{d}_{(K;(A'B'C'D'))}=\dfrac{1}{6}\mathrm{d}_{(C;(A'B'C'D'))}$ do $z=\dfrac{CK}{CC'}=\dfrac{7}{6}$ và $S_{\triangle CQP}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}S_{\Delta C'B'D'}=\dfrac{1}{24}S_{A'B'C'D'}.$

$\dfrac{CQ}{D'Q}=\dfrac{C'K}{ND'}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{C'Q}{C'D'}=\dfrac{1}{4}; \dfrac{C'P}{PB'}=\dfrac{C'K}{MB'}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{C'P}{B'C'}=\dfrac{1}{3}.$

$\Rightarrow V_{K.CQP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}_{(C';(A'B'C'D'))}\cdot\dfrac{1}{24}S_{A'B'C'D'}=\dfrac{1}{432}\mathrm{d}_{(C';(A'B'C'D'))}\cdot S_{A'B'C'D'}.$

$=\dfrac{1}{432}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{1}{432} \quad (2).$

Từ $(1), (2) \Rightarrow V_{ABCD.MPCQN}=\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{432}=\dfrac{251}{432}.$

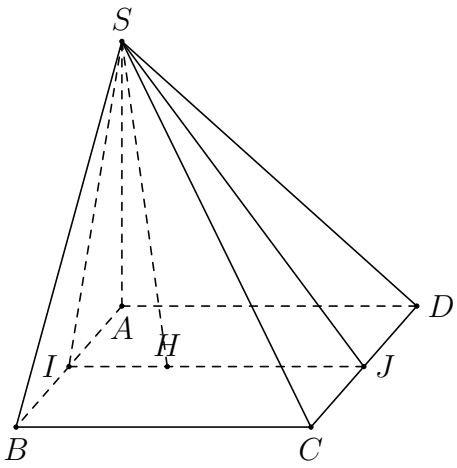
Thể tích cần tìm là $1-\dfrac{251}{432}=\dfrac{181}{432}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $SA=SB, SC=SD, (SAB)\perp(SCD)$. Tổng diện tích hai tam giác SAB, SCD bằng $\dfrac{7a^2}{10}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{15}$. **B.** $\dfrac{4a^3}{25}$. **C.** $\dfrac{a^3}{5}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{15}$.

Lời giải.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$\triangle SAB, \triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow SI\perp AB, SJ\perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} CD\perp SJ \\ CD\perp IJ \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SIJ)\Rightarrow(SCD)\perp(SIJ)$

Tương tự: $(SAB)\perp(SIJ)\Rightarrow((SAB),(SCD))=(SI,SJ)=\widehat{ISJ}=90^\circ$.

Kẻ $SH\perp JI$. Mà $SH\subset(SIJ)\Rightarrow SH\perp CD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Ta có: $S_{SAB}+S_{SCD}=\dfrac{1}{2}SI\cdot AB+\dfrac{1}{2}SJ\cdot CD=\dfrac{1}{2}SI\cdot a+\dfrac{1}{2}SJ\cdot a=\dfrac{1}{2}(SI+SJ)a=\dfrac{7a^2}{10}$

$\Rightarrow SI+SJ=\dfrac{7a}{5}$.

$\triangle SIJ$ vuông tại $S\Rightarrow SI^2+SJ^2=JI^2\Rightarrow(SI+SJ)^2-2SI\cdot SJ=a^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{7a}{5}\right)^2-2SI\cdot SJ=a^2\Leftrightarrow SI\cdot SJ=SH\cdot JI\Leftrightarrow\dfrac{12a^2}{25}=SH\cdot a\Leftrightarrow SH=\dfrac{12a}{25}$.

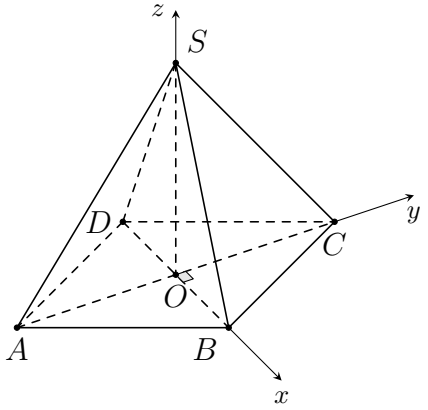
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{12a}{25}a^2=\dfrac{4a^3}{25}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{11}$, cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\dfrac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $12a^3$.

Lời giải.



(Sử dụng phương pháp tọa độ hóa)

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Chuẩn hóa $a=1$ (đơn vị dài), khi đó $SA=\sqrt{11}$.

Đặt $OC=OD=b>0$; $OS=c>0$.

Ta có $SA^2=SC^2=SO^2+OC^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2+c^2=11$ (1)

Tọa độ các điểm

$B(0;-b;0)$, $C(b;0;0)$, $D(0;b;0)$, $S(0;0;c)$.

Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{-b}+\dfrac{z}{c}=1 \Rightarrow \vec{n}_{SBC}=\left(\dfrac{1}{b};-\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$ là vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC).

Mặt phẳng (SCD) có phương trình: $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Rightarrow \vec{n}_{SCD}=\left(\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$ là vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD).

Theo giả thiết ta có $|\cos(\vec{n}_{SBC},\vec{n}_{SCD})|=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{b}.\dfrac{1}{b}+\left(-\dfrac{1}{b}\right).\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}.\dfrac{1}{c}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}.\sqrt{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{1}{c^2}}{\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{9}{c^2}=\dfrac{2}{b^2} \Leftrightarrow 9b^2-2c^2=0$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $\begin{cases}b^2=2\\c^2=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\sqrt{2}\\c=3\end{cases}$ (do $b,\,c>0$).

Vậy $CD=OC\sqrt{2}=2$; $SO=3 \Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}.2^2.3=4$ (đơn vị thể tích).

Vậy $V_{S.ABCD}=4a^3$.

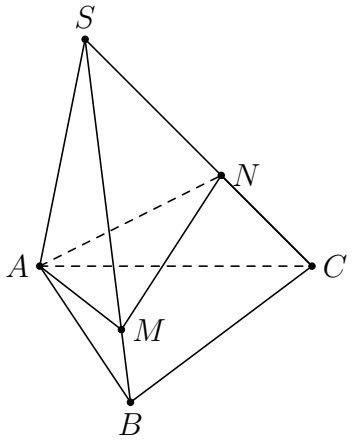
Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=\sqrt{2}a$, $SB=2a$, $SC=2\sqrt{2}a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60^\circ$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Trên cạnh SB lấy điểm M sao cho $SM=\sqrt{2}a$; trên cạnh SC lấy N sao cho $SN=\sqrt{2}a$.



Khi đó ta có tam giác SAM, SAN, SMN đều cạnh bằng $\sqrt{2}a$.

Suy ra hình chóp $S.AMN$ là tứ diện đều cạnh $\sqrt{2}a$ nên thể tích là

$$V_{S.AMN}=\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^3\cdot\sqrt{2}}{12}=\frac{4a^3}{12}=\frac{1}{3}a^3.$$

Mặt khác ta có $\dfrac{V_{SABC}}{V_{SAMN}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SB}{SN}\cdot\dfrac{SC}{SN}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{SABC}=2\sqrt{2}\cdot V_{SAMN}=\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

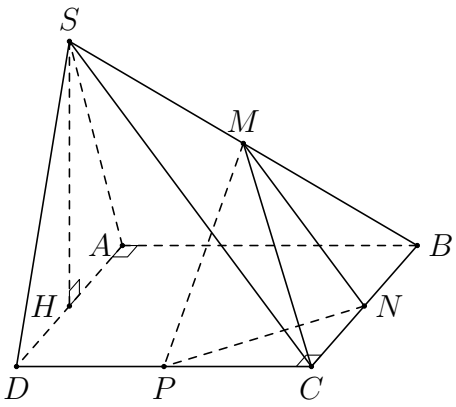
Chọn đáp án D □

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{96}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{54}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{72}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ta có $V_{CMNP} = V_{M.CNP} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle CNP} \cdot \mathrm{d}(M,(CNP))$.
Vì N, P là trung điểm CD, CB nên
$S_{\triangle CNP} = \dfrac{1}{2} \cdot CN \cdot CP = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{8}$.
Mặt khác M là trung điểm của SB nên

$$\mathrm{d}(M,(CNP)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD)) = \frac{1}{2} \cdot SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Khi đó $V_{M.CNP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{8} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

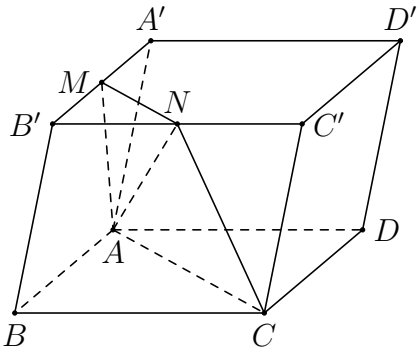
Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (ACM) chia khối hộp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần đó bằng

A. $\dfrac{7}{17}$. **B.** $\dfrac{5}{17}$. **C.** $\dfrac{7}{24}$. **D.** $\dfrac{7}{12}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của $B'C' \Rightarrow (ACM)$ chia khối hộp thành khối đa diện là $ABCB'MN$, $ACDMNC'D'A'$.
Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối đa diện



$ABCD.A'B'C'D', ABCB'MN, ACDMNC'D'A' \Rightarrow V_1 + V_2 = V$.

Vì M, N là trung điểm của $A'B'$, $B'C'$ nên
$S_{\triangle B'MN} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle B'A'C'} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. Đặt $S = \triangle ABC$.

Khi đó thể tích khối chóp cụt $ABCB'MN$ là
$V_1 = \dfrac{1}{3}\left(S + \dfrac{1}{4}S + \sqrt{S \cdot \dfrac{1}{4}S}\right) \cdot \mathrm{d}(B',(ABC))$
$V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7S}{4} \cdot \mathrm{d}(B',(ABC)) = \dfrac{7}{24} \cdot 2S \cdot \mathrm{d}(B',(ABC)) = \dfrac{7}{24}V$. Suy ra $V_2 = \dfrac{17}{24}V$ hay $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{17}$.

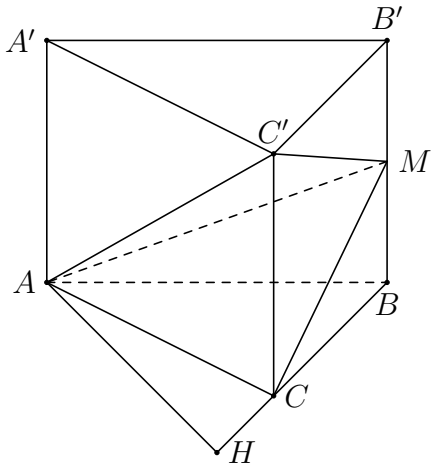
Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $\widehat{BAC} = 30°$, $AB = \sqrt{3}a$, $AA' = a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $MACC'$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{18}$.

Lời giải.

Tam giác ABC cân tại $C, \widehat{BAC} = 30^\circ, AB = \sqrt{3}a$.
Đặt $AC = CB = x > 0$.
Áp dụng định lí Côsin trong $\triangle ABC$ ta có
$AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos 120^\circ = AB^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a$.
Kẻ $AH \perp BC$, mà $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng. $\Rightarrow AH \perp (MCC')$.
Dễ thấy $S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{2}S_{BCC'B'} = \dfrac{1}{2}a^2$.
$V_{MACC'} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\triangle MCC'} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.



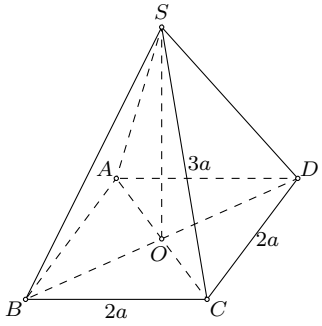
Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho hình chóp đều $SABCD$. có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.
Do $S.ABCD$ chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$
Ta có: $\dfrac{d(A,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A,(SCD)) = 2.d(O,(SCD)) = 2h$
Xét ΔACD vuông tại D ta có:
$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = CD\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OC = OD = a\sqrt{2}$
Xét ΔSOC vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{7}$



Do tứ diện $S.OCD$ có 3 cạnh OS, OC, OD đôi một vuông góc
$\Rightarrow \dfrac{1}{h}^2 = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{7}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.
Vậy khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

Chọn đáp án (D) □

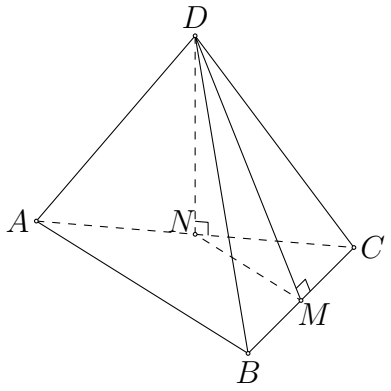
Câu 88. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AB vàDM?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AC.
Khi đó, $AB \| MN$ nên $(DM, AB) = (DM, MN)$
Dễ dàng tính được $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $MN = \dfrac{a}{2}$
Trong tam giác DMN, ta có

$$\cos DMN = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2DM.MN} = \frac{\dfrac{a^2}{4}}{2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



Vì $\cos DMN = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0$ nên $\cos(DM, MN) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Vậy $\cos(DM, AB) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

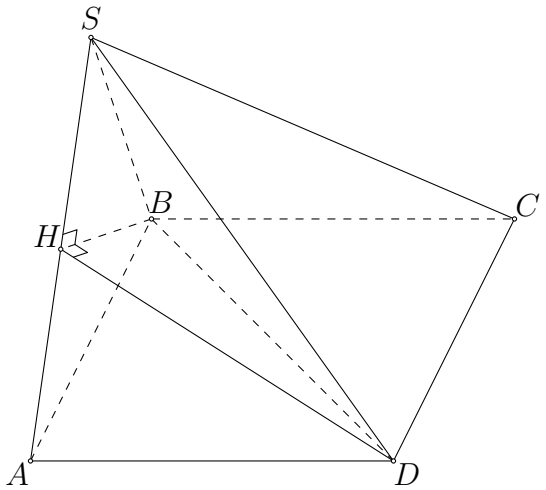
Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$?

A. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin(BD, (SAD)) = \sin\alpha = \dfrac{BH}{BD}$
(BH vuông góc với (SAD)) (1)
$ABCD$ là hình vuông cạnh a (gt), suy ra $BD = a\sqrt{2}$ (2)
Kẻ BH vuông góc SA (H thuộc SA), BH vuông góc AD suy ra BH vuông góc (SAD).
Tam giác SAD đều cạnh a, đường cao $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

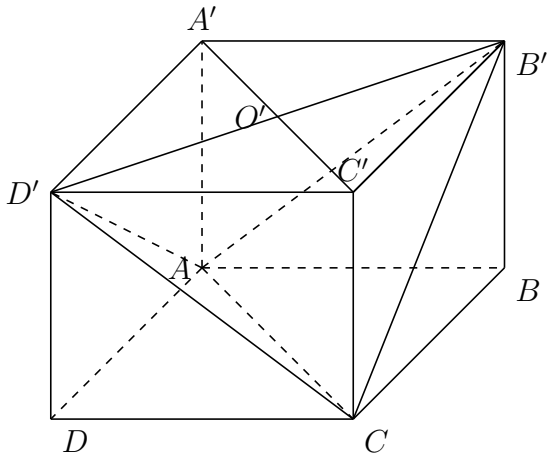


Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là $3cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $3cm^3$. **B.** $18\sqrt{2}cm^3$. **C.** $18cm^3$. **D.** $9cm^3$.

Lời giải.



Ta có $V_{B'D'AC} = 2V_{D'OAC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} V_{D'AA'C'C} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} V_{DD'AA'C'C} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 9cm^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60°, SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

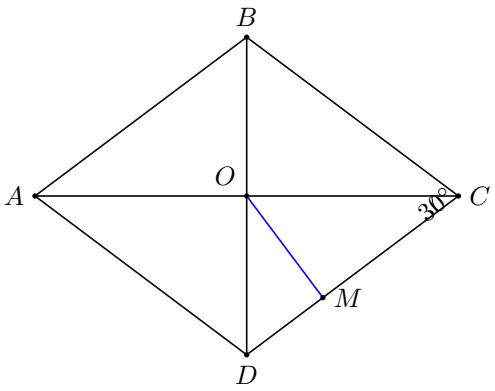
A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.

Ta có: $\widehat{DAB} = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều cạnh a $\Rightarrow BD = a$.

$\Rightarrow S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $SM \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OM \Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(OM, SM)} = \widehat{SMO} = 60°$.



Xét ΔOMD vuông tại D ta có:

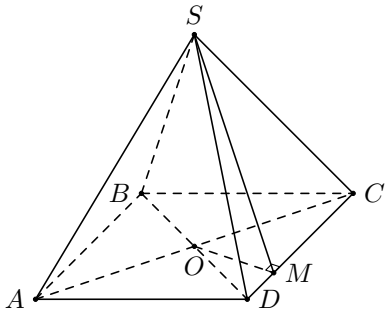
$\sin \widehat{ODM} = \dfrac{OM}{OD}$

$\Rightarrow OM = OD \cdot sin60° = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét ΔSOM vuông tại M ta có:

$SO = OM \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3a}{4}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

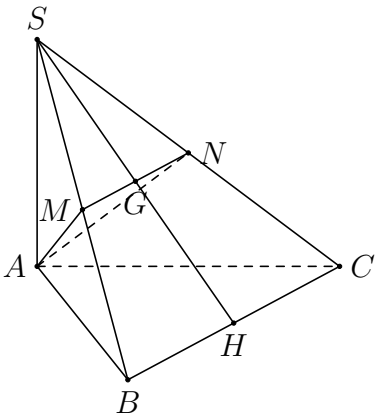


Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp mp(ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$?

A. $V = \dfrac{a^3}{9}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{27}$. **C.** $V = \dfrac{2a^2}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.



- ☑ Qua G, kẻ đường thẳng song song với BC, cắt SB tại M và cắt SC tại N. Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$.
- ☑ Ta có $MN // BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$ và $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$.
- ☑ Ta có : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{1}{6}a^3$.
- ☑ Theo công thức tỉ lệ thể tích ta có
$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$
$\Rightarrow V_{SAMN} = \dfrac{4}{9}V_{SABC} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{6}a^3 = \dfrac{2}{27}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{26}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{18}$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của BC, $SP \cap MN = I \Rightarrow I$ là trung điểm của SP. Gọi O là tâm của đáy.

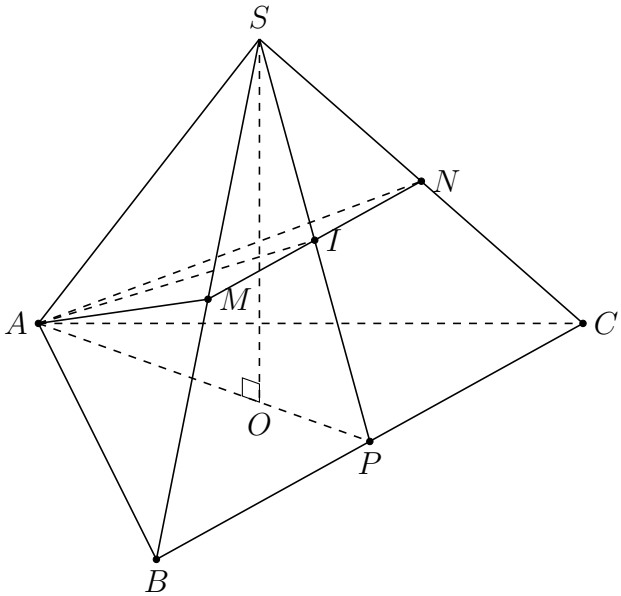
Tam giác SBC là tam giác cân nên $SP \perp BC$ mà $MN \parallel BC$ nên $SP \perp MN$. Từ

$$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ SP \perp MN \end{cases}$$

$\Rightarrow SP \perp (AMN) \Rightarrow SP \perp AI$.

Tam giác APS có AI là đường cao đồng thời là trung tuyến nên $\triangle ASP$ cân tại A

$\Rightarrow AS = AP = AB \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ta có $AO = \dfrac{2}{3}AP = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tam giác SOA là tam giác vuông tại O nên

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Thể tích của hình chóp: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

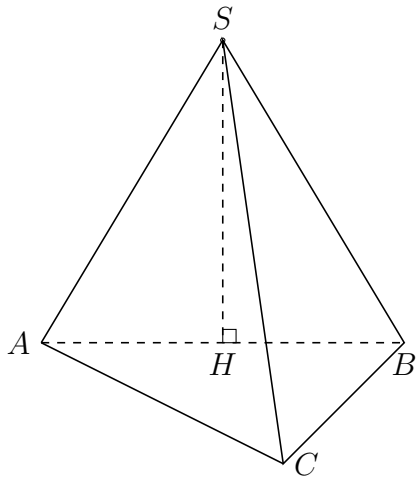
A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Cách giải:



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $SH \perp AB$ (Tính chất tam giác đều).

Mà có $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC}$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Do tam giác SAB đều cạnh a).

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC \sin \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ΔABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của ΔSBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\dfrac{5a^3}{54}$. **B.** $\dfrac{4a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{27}$.

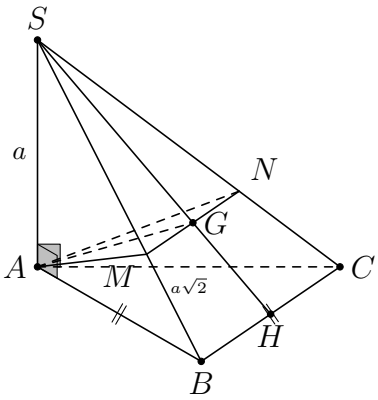
Lời giải.

Phương pháp

- ☑ Xác định mặt phẳng đi qua AG và song song với BC.
- ☑ Sử dụng công thức tỉ lệ thể tích Simpson.
  Cho chóp $S.ABC, A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$. Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

Cách giải



Trong (SBC) qua G kẻ $MN \parallel BC$ $(M \in SB, N \in SC)$. Khi đó mặt phẳng đi qua AG và song song với BC chính là mặt phẳng (AMN). Mặt phẳng này chia khối chóp thành 2 khối $S.AMN$ và $AMNBC$.

Gọi H là trung điểm của BC.

Vì $MN \parallel BC$ nên theo định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}\left(= \frac{SG}{SH}\right)$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \quad V_{S.AMN} = \frac{4}{9}V_{S.ABC}.$$

Mà $V_{S.AMN} + V_{AMNBC} = V_{S.ABC} \Rightarrow V_{AMNBC} = \frac{5}{9}V_{S.ABC} = V$.

Ta có ΔABC vuông cân tại B

$$\Rightarrow \quad AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow \quad V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

Vậy $V = \frac{5}{9}.\frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{54}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

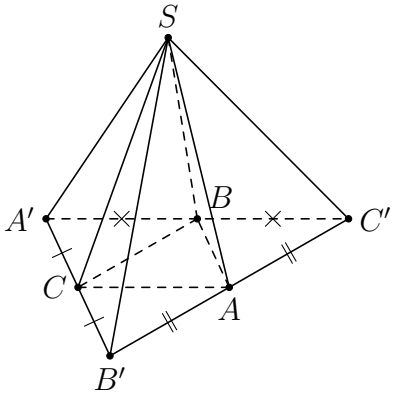
A. $\frac{\sqrt{390}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{390}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{390}}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{390}}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp

- ☑ Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Chứng minh chóp $S.A'B'C'$ có SA', SB', SC' đôi một vuông góc.
- ☑ Tính thể tích $S.A'B'C'$, từ đó suy ra thể tích $V_{S.ABC}$.

Cách giải



Đặt $SA = SB = a$, $SB = AC = b$, $SC = AB = c$.

Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

Dễ thấy ΔABC đồng dạng với $\Delta A'B'C'$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.A'B'C'}.$$

Ta có AB, BC, CA là các đường trung bình của tam giác $A'B'C'$

$$\Rightarrow A'B' = 2AB = 2c;\ B'C' = 2BC = 2a;\ A'C' = 2AC = 2b.$$

$\Rightarrow \Delta SA'B', \Delta SB'C', \Delta SC'A'$ là các tam giác vuông tại S (tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy) $\Rightarrow SA', SB', SC'$ đôi một vuông góc

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6}SA' \cdot SB' \cdot SC' \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{24}SA' \cdot SB' \cdot SC'.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:

$$\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = 4c^2 \\ SB'^2 + SC'^2 = 4a^2 \\ SA'^2 + SC'^2 = 4b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SA'^2 = 2\left(b^2 + c^2 - a^2\right) \\ SB'^2 = 2\left(a^2 + c^2 - b^2\right) \\ SC'^2 = 2\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{S.ABC} &= \frac{1}{24}.\sqrt{8\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}. \end{aligned}$$

Thay $a = 3, b = 4, c = 2\sqrt{5} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{390}}{4}$.

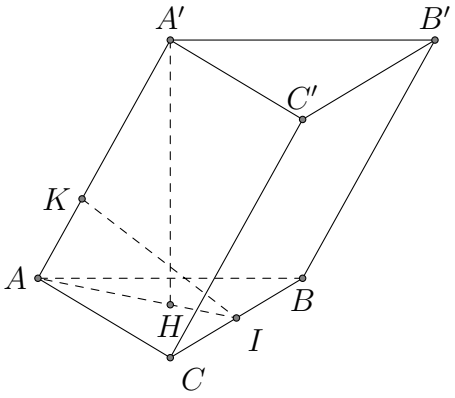
Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên mp(ABC) và I là trung điểm BC.



Ta có $\begin{cases} A'H \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (A'AI)$ nên $BC \perp AA'$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên AA'.

Khi đó IK là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.

Mặt khác $\mathrm{d}(AA', BC) = IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABC đều cạnh a suy ra

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác AIK vuông tại K có $\sin\widehat{KAI} = \dfrac{IK}{AI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{KAI} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AA'H$ vuông tại H có $A'H = AH.\tan 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

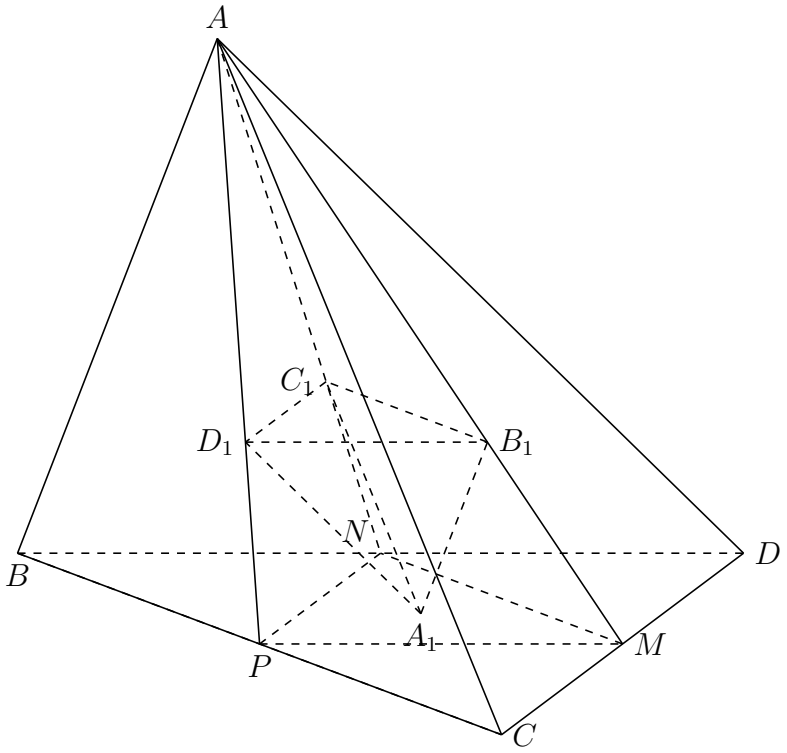
Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC và có thể tích V_1. Gọi $A_2B_2C_2D_2$ là tứ diện với các đỉnh

lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ và có thể tích V_2,... cứ như vậy cho đến tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của $P = \lim\limits_{n\to+\infty}(V_1 + V_2 + \cdots V_n)$.

A. $\dfrac{V}{26}$. **B.** $\dfrac{V}{27}$. **C.** $\dfrac{8V}{9}$. **D.** $\dfrac{82V}{81}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm CD, DB, BC. Tam giác $B_1C_1D_1$ đồng dạng tam giác MNP tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$ nên $\dfrac{S_{\triangle B_1C_1D_1}}{S_{\triangle MNP}} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{S_{B_1C_1D_1}}{BCD} = \dfrac{1}{9}$.

Mặt khác lại có $d(A_1;(B_1C_1D_1)) = d(D_1;(BCD)) = \dfrac{1}{3}d(A;(BCD))$. Từ đây ta có

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{d(A_1;(B_1C_1D_1))\cdot S_{\triangle B_1C_1D_1}}{d(A;(ABC))\cdot S_{BCD}} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{27}\cdot V_{ABCD}.$$

Tương tự ta có $V_2 = \dfrac{1}{27}V_1$,... hay (V_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $V_1 = \dfrac{1}{27}V$ và công bội $q = \dfrac{1}{27}$.

Do đó $P = \lim\limits_{n\to+\infty}(V_1 + V_2 + \cdots V_n) = \dfrac{V_1}{1 - \dfrac{1}{27}} = \dfrac{V}{26}$.

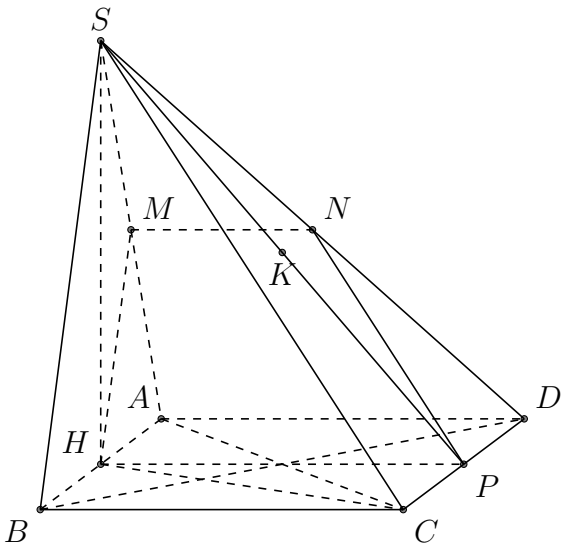
Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và P là giao điểm của (HMN) với CD. Khoảng cách từ trung điểm K của đoạn thẳng SP đến mặt phẳng (HMN) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{30}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có



$$H(0;0;0), \quad A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), \quad B\left(\frac{a}{2};0;0\right),$$

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \quad C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \quad D\left(-a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right).$$

Có $MN \parallel AD$ nên suy ra P là trung điểm của CD.

Theo công thức trung điểm, ta suy ra

$$M\left(-\frac{a}{4};0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \quad N\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$P\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \quad K\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$, $\overrightarrow{HM}=\left(-\frac{a}{4};0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (HMN) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{HM}\right]=\left(\frac{3a^2}{16};\frac{a^2\sqrt{3}}{16};\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (HMN) là

$$\frac{3a^2}{16}(x-0)+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}(y-0)+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}(z-0)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+y+z=0.$$

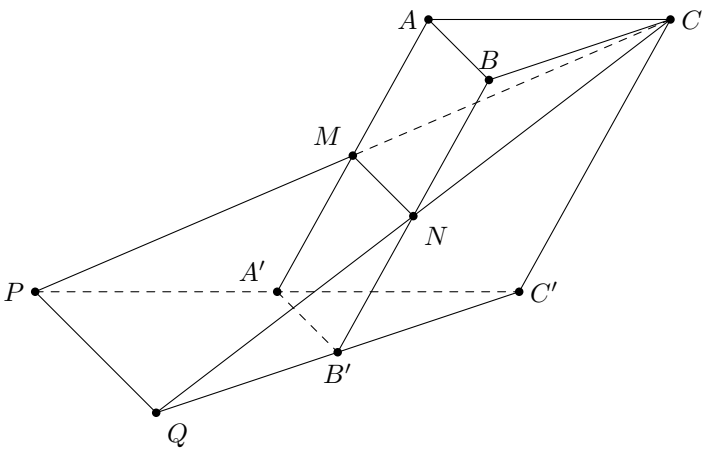
Vậy khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d}\left[K,(HMN)\right]=\dfrac{\left|-\frac{a\sqrt{3}}{4}+\frac{a\sqrt{3}}{4}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{3+1+1}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 100. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{C.ABNM} = \dfrac{1}{2}V_{C.A'B'BA} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{CMNA'B'C'} = \dfrac{2}{3}$.
Do M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên A', B' lần lượt là trung điểm của các đoạn $C'P$, $C'Q$. Do vậy, tam giác $C'QP$ đồng dạng với tam giác $C'B'A'$ với tỉ số 2 nên $S_{\triangle C'QP} = 4\cdot S_{\triangle A'B'C'}$.
Suy ra

$$V_{C.CQP} = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{d}\left(C,(A'B'C)\right)\cdot S_{\triangle C'QP} = 4\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(A'B'C)\right)\cdot S_{\triangle A'B'C} = 4\cdot V_{C.A'B'C} = \frac{4}{3}.$$

Khi đó

$$V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CMNA'B'C} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. D	4. D	5. B	6. C	7. D	8. A	9. A	10. C
11. B	12. C	13. B	14. C	15. C	16. C	17. A	18. B	19. B	20. A
21. C	22. D	23. A	24. B	25. B	26. C	27. C	28. A	29. C	30. D
31. B	32. B	33. A	34. C	35. C	36. D	37. D	38. D	39. A	40. D
41. B	42. D	43. B	44. B	45. B	46. D	47. D	48. D	49. D	50. D
51. B	52. A	53. D	54. C	55. A	56. C	57. A	58. B	59. A	60. C
61. A	62. B	63. D	64. A	65. D	66. B	67. A	68. A	69. B	70. D
71. A	72. A	73. D	74. A	75. A	76. B	77. D	78. C	79. B	80. D
81. B	82. C	83. D	84. B	85. A	86. A	87. D	88. B	89. C	90. D
91. A	92. B	93. B	94. D	95. A	96. D	97. D	98. A	99. B	100. D

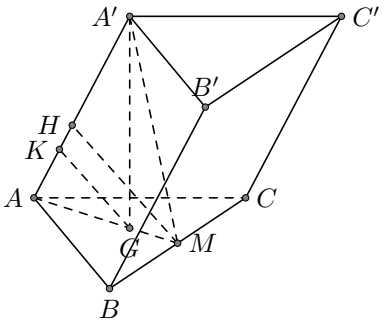
4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác (ABC). Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M, G lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC.



Do tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, có

$$\begin{cases} AM\perp BC \\ A'G\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp (AA'M).$$

Trong mặt phẳng $(AA'M)$ kẻ $MH\perp AA'$. Khi đó $MH\perp BC$ vì $BC\perp(AA'M)$.

Vậy MH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC nên $MH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác $AA'G$ kẻ $GK\perp AH$ thì $GK\parallel MH\Rightarrow \dfrac{GK}{MH}=\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GK=\dfrac{2}{3}MH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G ta có $\dfrac{1}{GK^2}=\dfrac{1}{A'G^2}+\dfrac{1}{GA^2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\dfrac{1}{A'G^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{A'G^2}=\dfrac{36}{3a^2}-\dfrac{9}{3a^2}=\dfrac{9}{a^2}\Leftrightarrow A'G=\dfrac{a}{3}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V=A'G\cdot S_{ABC}=\dfrac{a}{3}v\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

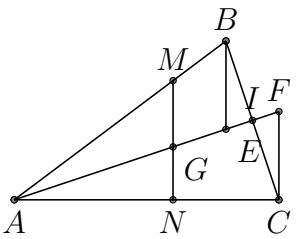
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho tứ diện đều $S.ABC$ có cạnh bằng 1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm S và trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Tính thể tích nhỏ nhất $V_{\min}$ của khối tứ diện $SAMN$.

A. $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. **B.** $V_{\min}=\dfrac{4}{27}$. **C.** $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. **D.** $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải.

Phương pháp:



Cho tam giác đều ABC, G là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng qua G cắt AB, AC lần lượt tại

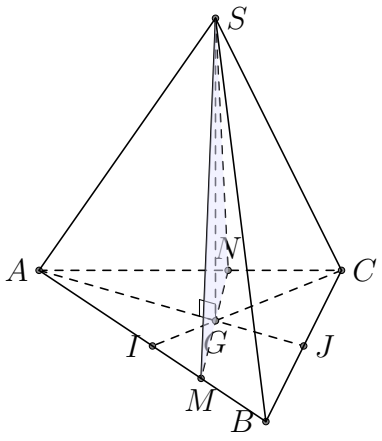
M, N. Khi đó, $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$.

Thật vậy, gọi I là trung điểm của BC, qua B, C kẻ các đường thẳng song song MN, cắt đường thẳng AI tại E, F. Khi đó, $\Delta BIE=\Delta CIF \Rightarrow IE=IF$.

Ta có:

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AE}{AG}+\frac{AF}{AG}=\frac{AE+AF}{AG}=\frac{2.AI}{AG}=\frac{2.AI}{\frac{2}{3}AI}=3.$$

Cách giải:



Do $SABC$ là tứ diện đều, G là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $SG \perp (ABC)$.

Vậy thể tích khối tứ diện $SAMN$ là $V=\dfrac{1}{3}\cdot SG\cdot S_{AMN}$.

+) Tam giác ABC đều, cạnh bằng 1 nên $AJ=\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AG=\dfrac{2}{3}\cdot AJ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAG vuông tại $G \Rightarrow SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

+) Diện tích tam giác AMN

$S_{AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot AN\cdot AM\cdot \sin A=\dfrac{1}{2}\cdot AN\cdot AM\cdot \sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot AN\cdot AM$.

Ta có $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3\Leftrightarrow \dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=3$.

Mà $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}\geq\dfrac{2}{\sqrt{AM.AN}}\Rightarrow 3\geq\dfrac{2}{\sqrt{AM\cdot AN}}$.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{AM.AN}}{2}\geq\dfrac{1}{3}\Rightarrow AM\cdot AN\geq\dfrac{4}{9}$.

$\Rightarrow S_{AMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot \mathrm{AN}\cdot \mathrm{AM}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

$\Rightarrow V_{S.AMN}\geq\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $AM=AN=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $(V_{SAMN})_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}$ khi và chỉ khi $AM=AN=\dfrac{2}{3}$ hay MN là đường thẳng qua G song song với BC.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB=BC=CD=DA=1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC.

Đặt $BD = 2x, AC = 2y$ $(x, y > 0)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

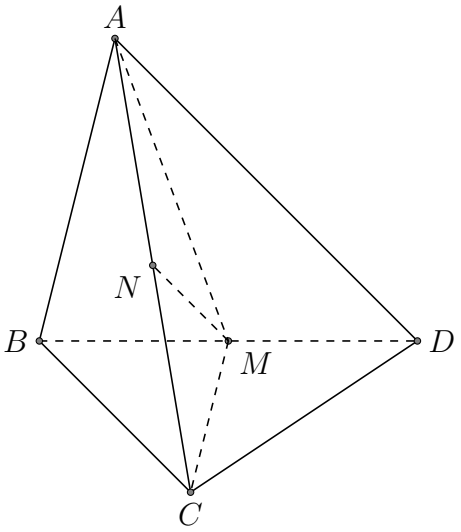
Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}, MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$S_{AMN} = \dfrac{1}{2}MN.AC = \dfrac{1}{2}y\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.DS.S_{AMC} = \dfrac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2} =$

$\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.(1-x^2-y^2)} \le \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)^3}{27}}$

$\Rightarrow V_{ABCD} \le \dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.



Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hai đường thẳng cố định a và b chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của a và b (A thuộc a, B thuộc b). Trên a lấy điểm M (khác A), trên b lấy điểm N (khác B) sao cho $AM = x, BN = y, x + y = 8$. Biết $AB = 6$, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng $60°$. Khi thể tích khối tứ diện $ABNM$ đạt giá trị lớn nhất hãy tính độ dài đoạn MN (trong trường hợp $MN > 8$).

A. $2\sqrt{21}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{39}$. **D.** 13.

Lời giải.

Dựng hình chữ nhật $ABNC$.

$\left(\widehat{AM, BN}\right) = \left(\widehat{AM, AC}\right) = 60°$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp BN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACM)$

$V_{ABNM} = V_{MABC} = \dfrac{1}{3}AB.S_{ACM} = \dfrac{1}{6}AB.AC.AM \sin\widehat{CAM} = \dfrac{1}{6}.6.x.y.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}xy.$

$V_{ABNM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}xy \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{(x+y)^2}{4} = 8\sqrt{3}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 4$. Khi đó $AM = BN = AC = 4$.

Lại có $AB \| CN \Rightarrow CN \perp (AMC) \Rightarrow CN \perp CM \Rightarrow MN^2 = CM^2 + CN^2$.

Mặt khác $\widehat{MAC} = 60°$ hoặc $\widehat{MAC} = 120°$.

Trường hợp 1: $\widehat{MAC} = 60° \Rightarrow \Delta AMC$ đều $\Rightarrow CM = 4 \Rightarrow MN = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

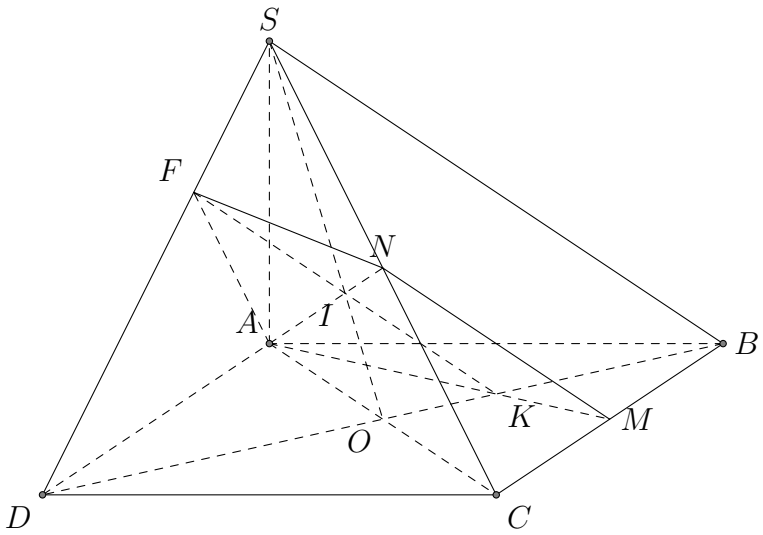
Trường hợp 2: $\widehat{MAC} = 120° \Rightarrow CM = \sqrt{AM^2 + AC^2 - 2AM.AC\cos 120°} = \sqrt{48} \Rightarrow MN = \sqrt{48 + 6^2} = 2\sqrt{41}$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SC. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa điểm B có thể tích là V_1. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$.

A. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{13}{24}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{24}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{17}{24}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{7}{12}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của BD và AC.
I là giao điểm của SO và AN. K là giao điểm của AM và BD. Kéo dài IK cắt SD tại F.
Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là $AMNF$.
Vì I là giao điểm của hai đường trung tuyến AN và SO của tam giác SAC nên I là trọng tâm của tam giác SAC.
Vì K là giao điểm của hai đường trung tuyến AM và BO của tam giác ABC nên K là trọng tâm của tam giác SAC.
$\Rightarrow \dfrac{OK}{OB} = \dfrac{OI}{OS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IK \parallel SB$.
Hay $KF \parallel SB$
$\Rightarrow \dfrac{DK}{DB} = \dfrac{DF}{DS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

Dễ thấy $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow V_{SAMC} = V_{SAMB} = \dfrac{1}{2}V_{SABC} = \dfrac{1}{4}V$.

Ta có: $\dfrac{V_{SAFN}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SF}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SACM}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SC} \cdot \dfrac{SM}{SM} = \dfrac{1}{2}$.

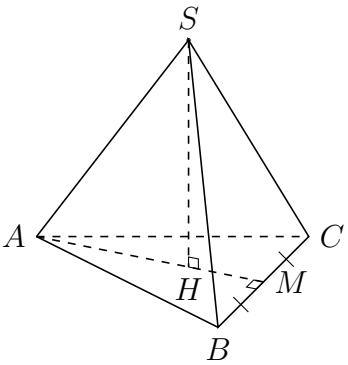
$\Rightarrow V_1 = V_{SAFN} + V_{SAMN} + V_{SAMB} = \dfrac{1}{12}V + \dfrac{1}{8}V + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{24}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{24}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 8$. **B.** $V = 6$. **C.** $V = 4$. **D.** $V = 12$.

Lời giải.



Ta có $\triangle SAB = \triangle SAC$ *c.g.c* hay tam giác SBC cân.
Gọi M là trung điểm BC ta có $AM \perp BC$, $SM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Gọi H là hình chiếu của S trên AM thì $SH \perp AM$, $SH \perp BC$ nên SH là đường cao của hình chóp. Xét tam giác SAB có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2 \cdot SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 16 \Rightarrow SB = 4 \Rightarrow SC = 4$.
Do đó $SM^2 = \dfrac{SB^2 + SC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 15 \Rightarrow SM = \sqrt{15}$.
Tam giác ABC có $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 15 \Rightarrow AM = \sqrt{15}$.
Khi đó $S_{SAM} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6$.
Do đó $SH = \dfrac{2S_{SAM}}{AM} = \dfrac{2 \cdot 6}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AM \cdot BC \cdot SH = 4$.

Chọn đáp án C □

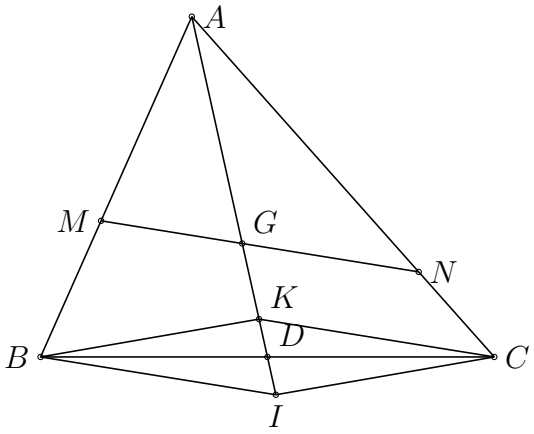
Câu 7. Cho tứ diện $S.ABC$ và G là trọng tâm của tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG và cắt các cạnh SB, SC tương ứng tại M, N. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Xét bài toán phụ sau:

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đường thẳng bất kì đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Khi đó ta có $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$.

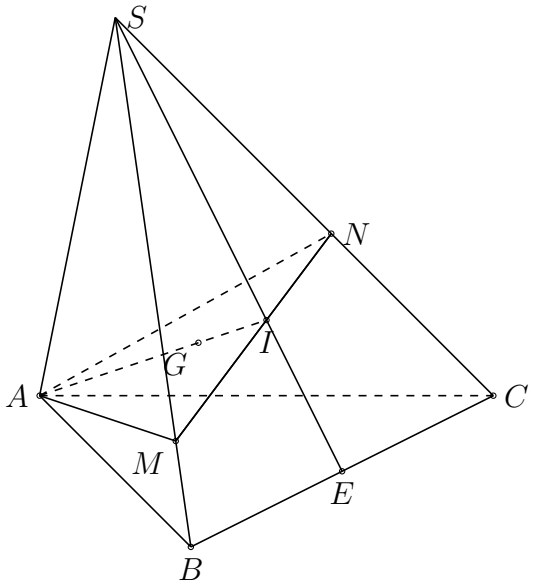


Qua B, C kẻ các đường thẳng song song với MN cắt đường thẳng AG tại K và I. Gọi D là trung điểm BC.

Theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AI}{AG}$; $\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AK}{AG}\Rightarrow\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AI+AK}{AG}$.

Mà $\triangle IBD=\triangle KCD$ (g-c-g) $\Rightarrow KD=ID\Rightarrow AI+AK=AD+DI+AK=2AD=2\dfrac{3}{2}AG=3$.

Do đó $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$.



Đặt $\dfrac{SM}{SB}=a$; $\dfrac{SN}{SC}=b$ $(0<a,b<1)$.

Lấy E là trung điểm BC. Trong (SAE), kéo dài AG cắt SE tại I. Khi đó $I\in MN$ và I là trọng tâm

tam giác SBC. Khi đó trong tam giác SBC ta luôn có $\dfrac{SB}{SM}+\dfrac{SC}{SN}=3$ (tính chất đã được chứng minh ở trên).

Lại có $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC}=ab.$

Ta có $\dfrac{SB}{SM}+\dfrac{SC}{SN}=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta được $3=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{2}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow ab\geq\dfrac{4}{9}.$

Dấu $=$ xảy ra khi $a=b=\dfrac{2}{3}$.

Từ đó $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=ab\geq\dfrac{4}{9}$ hay tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ nhỏ nhất là bằng $\dfrac{4}{9}$.

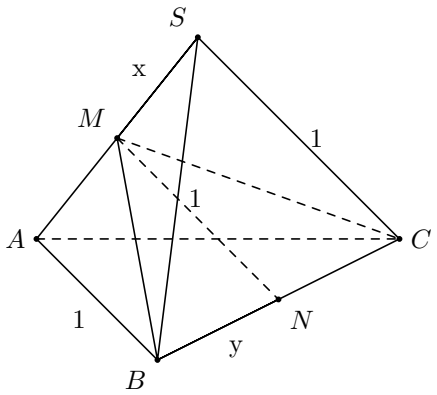
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho x,y là các số thực dương. Xét các khối chóp $S.ABC$ có $SA=x$, $BC=y$ các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x,y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Vì tam giác SAB, SAC lần lượt cân tại B và C nên $BM\perp SA$, $CM\perp SA$. Suy ra $SA\perp(BMC)$.



Ta có $V_{S.MBC}=V_{S.AMBC}$ nên

$$V_{S.ABC}=V_{S.MBC}+V_{S.AMBC}=2V_{S.MBC}=\frac{2}{3}.SM\cdot S_{\triangle MBC}.$$

Ta có $BM=CM=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$, tam giác BCM cân tại M nên $MN=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}}$.

$$V_{S\cdot ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}y\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{y^2}{4}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{y^2}{4}\cdot\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}\Rightarrow\frac{x^2}{4}\cdot\frac{y^2}{4}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\leq\frac{1}{27}.$$

Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất bằng

$$V_{S\cdot ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

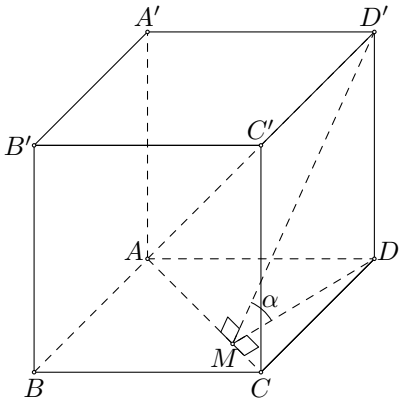
Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có

$AB=a, BC=a\sqrt{2}$, $AA'=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C. 2. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.



Lời giải.

Ta có $(ACD')\cap(ABCD)=AC$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $DM\perp AC$ thì $AC\perp D'M$. Suy ra $\left(\widehat{(ACD'),(ABCD)}\right)=\widehat{DMD'}$.

Tam giác ACD vuông tại D có $\dfrac{1}{DM^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{DC^2}\Rightarrow DM=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác MDD' vuông tại D có $\tan\alpha=\dfrac{DD'}{MD}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d=d_1+d_2$.

A. $d=\dfrac{2a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $d=\dfrac{2a\sqrt{2}}{33}$. **C.** $d=\dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$. **D.** $d=\dfrac{8a\sqrt{2}}{11}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều tâm O suy ra $AO\perp BC$ tại M là trung điểm của BC.

Ta có: $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, MO=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}, OA=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ giả thiết hình chóp đều suy ra $SO\perp(ABC), SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{3a^2-\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng $OK\perp SM, AH\perp SM\Rightarrow AH//OK; \dfrac{OK}{AH}=\dfrac{OM}{AM}=\dfrac{1}{3}$.

Có $\begin{cases}BC\perp SO\\ BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp OK$.

Có $\begin{cases}OK\perp SM\\ OK\perp BC\end{cases}\Rightarrow OK\perp(SBC), AH\perp(SBC)$ (do $AH//OK$).

Từ đó có $d_1=d(A,(SBC))=AH=3OK; d_2=d(O,(SBC))=OK$. Trong tam giác vuông OSM có đường cao OK nên $\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{36}{3a^2}+\dfrac{9}{24a^2}=\dfrac{99}{8a^2}\Rightarrow OK=\dfrac{2a\sqrt{2}}{33}$.

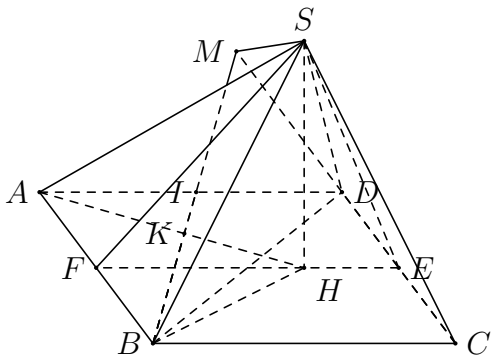
Vậy $d=d_1+d_2=4OK=\dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S, gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM vuông góc với SA. Tính thể tích V của khối chóp $S.BDM$?

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của đoạn CD và AB, ta có
ΔSAB đều $\Rightarrow AB \perp SF \Rightarrow CD \perp SF$ (do $CD \parallel AB$) (1).
ΔSCD vuông cân tại $S \Rightarrow CD \perp SE$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $CD \perp (SEF) \Rightarrow (SEF) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến EF.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên EF
$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$
Dựng $BK \perp AH$ tại $K \Rightarrow BK \perp (SAH) \Rightarrow BK \perp SA$.

Gọi $M = BK \cap CD$ ta có $SH \perp (ABCD)$ hay $SH \perp (BDM)$. Suy ra $V_{S.BDM} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta BDM}$.

ΔSCD vuông cân tại $S \Rightarrow SE = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$; ΔSAB đều cạnh $AB = a \Rightarrow SF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $EF = a$.

$\Rightarrow SE^2 + SF^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} = a^2 = EF^2 \Rightarrow \Delta SEF$ vuông cân tại S

$$\Rightarrow SH = \frac{SE \cdot SF}{EF} = \frac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4} \text{ và } HF = \sqrt{SF^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$$

Ta có $BK \cdot AH = HK \cdot AB \Rightarrow BK = \dfrac{HK \cdot AB}{AH} = \dfrac{\dfrac{3a}{4} \cdot a}{\dfrac{a\sqrt{13}}{a}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

ΔKBA và ΔABI là hai tam giác vuông đồng dạng (với $I = BM \cap AD$)

$$\Rightarrow \frac{BI}{AB} = \frac{AB}{BK} \Rightarrow BI = \frac{AB^2}{BK} = \frac{a^2}{\dfrac{3a}{\sqrt{13}}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$$

$$\Rightarrow AI = \sqrt{BI^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{9} - a^2} = \frac{2a}{3} \Rightarrow ID = \frac{a}{3}$$

ΔDIM và ΔAIB là hai tam giác vuông đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{DM}{AB} = \frac{DI}{AI} = \frac{\dfrac{a}{3}}{\dfrac{2a}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow DM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{\Delta BDM} = \frac{1}{2} BC \cdot DM = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.BDM} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta BDM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC_1, BB_1. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK) bằng

A. $a\sqrt{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos 120^\circ}=a\sqrt{7}$
$A_1B=\sqrt{A_1A^2+AB^2}=a\sqrt{21}$; $A_1K=\sqrt{A_1C_1^2+C_1K^2}=3a$;
$KB=\sqrt{KC^2+CB^2}=2a\sqrt{3}$
$d(I,(A_1BK))=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(B_1,(A_1BK))=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3V_{B_1A_1BK}}{S_{\Delta A_1BK}}$
Mà $V_{B_1A_1BK}=\dfrac{1}{2}V_{K.A_1B_1BA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$
$=\dfrac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{5}\dfrac{1}{2}a\cdot 2a\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$
Diện tích tam giác A_1BK bằng
$S=\sqrt{p\left(p-2a\sqrt{3}\right)(p-3a)\left(p-a\sqrt{21}\right)}=3a^2\sqrt{3}$ với $p=\dfrac{2a\sqrt{3}+3a+a\sqrt{21}}{2}$
Vậy $\mathrm{d}\,(I,(A_1BK))=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}}{3a^2\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh AA', BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN=\dfrac{1}{2}NB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Tính thể tích V của khối đa diện $A'MPB'NQ$.

A. $V=\dfrac{13}{18}$. **B.** $V=\dfrac{23}{9}$. **C.** $V=\dfrac{5}{9}$. **D.** $V=\dfrac{7}{18}$.

Lời giải.

Ta có

$V_{C.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}d\,(C,(A'B'C'))\,.S_{A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra $V_{C.ABB'A'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{C.A'B'C'}=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$.
Ta thấy $ABNM$ là hình thang nên

$$\begin{aligned}S_{ABNM}&=\frac{(AM+BN)\,d\,(BN;AM)}{2}\\&=\frac{\left(\dfrac{AA'}{2}+\dfrac{BB'}{3}\right).d\,(BB',AA')}{2}\\&=\frac{5}{12}AA'.d\,(BB',AA')\,.\end{aligned}$$

Mà

$S_{ABB'A'}=AA'\cdot d\,(AA',BB')\Rightarrow S_{ABNM}=\dfrac{5}{12}\cdot S_{ABB'A'}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}V_{C.ABNM}&=\frac{1}{3}d\,(C,(ABNM))\cdot S_{ABCNM}\\&=\frac{1}{3}d\,(C,(ABB'A'))\cdot\frac{5}{12}\cdot S_{ABB'A'}\\&=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3}d\,(C,(ABB'A'))\cdot S_{ABB'A'}\end{aligned}$$

$$= \frac{5}{12} \cdot V_{CABB'A'}$$
$$= \frac{5}{9}.$$

Suy ra $V_{CC'B'NMA'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABNM} = 2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$.

Ta có $A'M \parallel CC' \Rightarrow \frac{PA'}{PC'} = \frac{A'M}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow PA' = \frac{1}{2}PC' = A'C' \Rightarrow PC' = 2A'C'$.

Và $B'N \parallel CC' \Rightarrow \frac{B'N}{CC'} = \frac{QB'}{QC'} = \frac{2}{3} \Rightarrow QC' = 3B'C'$.

Mà $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}C'A' \cdot C'B' \cdot \sin C'$ suy ra

$$\Leftrightarrow S_{C'PQ} = \frac{1}{2}C'P \cdot C'Q \cdot \sin C' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A'C' \cdot 3B'C' \sin C = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}A'C' \cdot B'C' \cdot \sin C\right) = 6S_{A'B'C'}.$$

Ta có $V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3}d\left(C;(A'B'C')\right) \cdot S_{C'PQ} = \frac{1}{3}d\left(C;(A'B'C')\right) \cdot 6S_{C'A'B'} = 6 \cdot V_{C.A'B'C'} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$.

Từ đó $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{CC'B'NMA'} = 4 - \frac{13}{9} = \frac{23}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

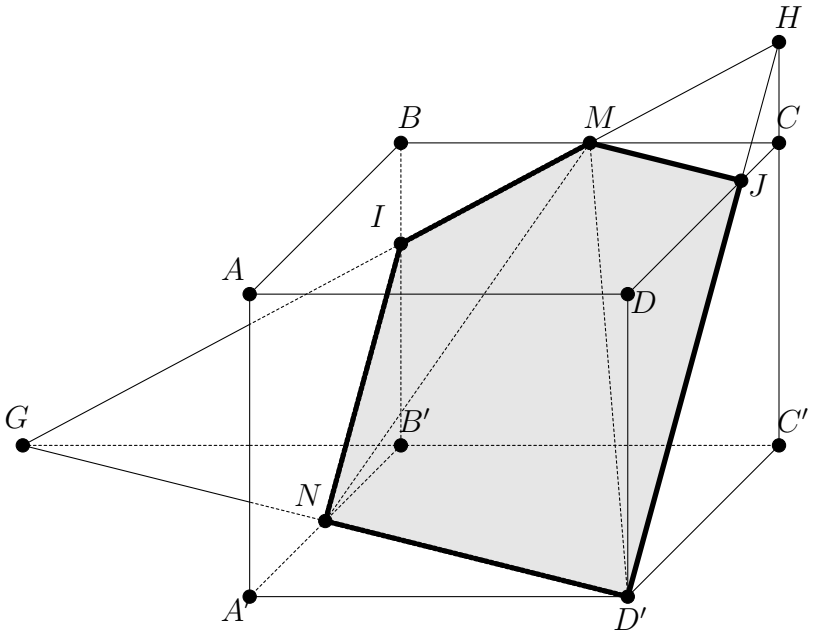
Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H). Tính thể tích khối (H).

A. $\frac{55a^3}{17}$. **B.** $\frac{55a^3}{144}$. **C.** $\frac{181a^3}{486}$. **D.** $\frac{55a^3}{48}$.

Lời giải.

Phương pháp:

- Dựng thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (MND').
- Sử dụng phương pháp phân chia khối đa diện để tính thể tích.



Gọi $G = D'N \cap B'C', GM$ cắt BB', CC' lần lượt tại I, H, $HD' \cap DC = J$. Do đó thiết diện là ngũ giác $MJD'NI$.

Thể tích khối đa diện cần tính $V_{(H)} = V_{CMIJNB'CD'} = V_{H.GD'C'} - V_{H.MCJ} - V_{GB'IN}$.

Vì $NB' \parallel C'D'$ nên $\dfrac{GB'}{GC'} = \dfrac{NB'}{C'D'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow GC' = 2B'C' = 2a$.

Lại có $MB \parallel GB' \Rightarrow \dfrac{MB}{GB'} = \dfrac{BI}{IB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IB' = \dfrac{2}{3}a, IB = \dfrac{a}{3}$.

Tam giác $\Delta MIB = \Delta MHC \Rightarrow HC = IB = \dfrac{a}{3}$.

Mà $JC \parallel D'C' \Rightarrow \dfrac{JC}{D'C'} = \dfrac{HC}{HC'} = \dfrac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}+a} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow JC = \dfrac{a}{4}$.

Thể tích $V_{H.GD'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot HC' \cdot \dfrac{1}{2}C'D' \cdot C'G = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \dfrac{4}{3} \cdot a = \dfrac{4}{9}a^3$.

Thể tích $V_{H.CJM} = \dfrac{1}{3}S_{CMJ} \cdot HC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{4} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3}{144}$.

Thể tích $V_{I.GB'N} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot B'G \cdot B'N \cdot IB' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{3}a = \dfrac{a^3}{18}$.

Vậy thể tích khối đa diện (H) là $V_{(H)} = \dfrac{4}{9}a^3 - \dfrac{a^3}{144} - \dfrac{a^3}{18} = \dfrac{55a^3}{144}$.

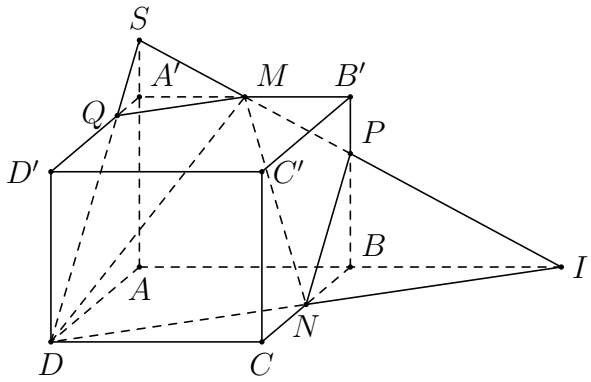
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A và (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A. $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{55}{89}$. **B.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{37}{48}$. **C.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Dựng được thiết diện như hình vẽ.



Ta có $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{1}{4}$, suy ra $\dfrac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADI}} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow V_{AMP.ADI} = \dfrac{63}{64} \cdot V_{S.ADI}$.

$V_{S.ADI} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot AI \cdot SA = \dfrac{4a^3}{9}$

$\Rightarrow V_{AMP.ADI} = \dfrac{63}{64} \cdot V_{S.ADI} \dfrac{63}{64} \cdot \dfrac{4a^3}{9} = \dfrac{7a^3}{16}$.

$V_{IPBN} = \dfrac{1}{6} \cdot BN \cdot BI \cdot BP = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{a^3}{18}$

$\Rightarrow V_{(H)} = V_{AMP.ADI} - V_{IPBN} = \dfrac{7a^3}{16} - \dfrac{a^3}{18} = \dfrac{55a^3}{144}$.

$V_{(H')} = V_{lp} - V_{(H)} = a^3 - \dfrac{55a^3}{144} = \dfrac{89a^3}{144}$ suy ra $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{55}{89}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{23}}{5}a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}.a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{19}}{5}a^3$.

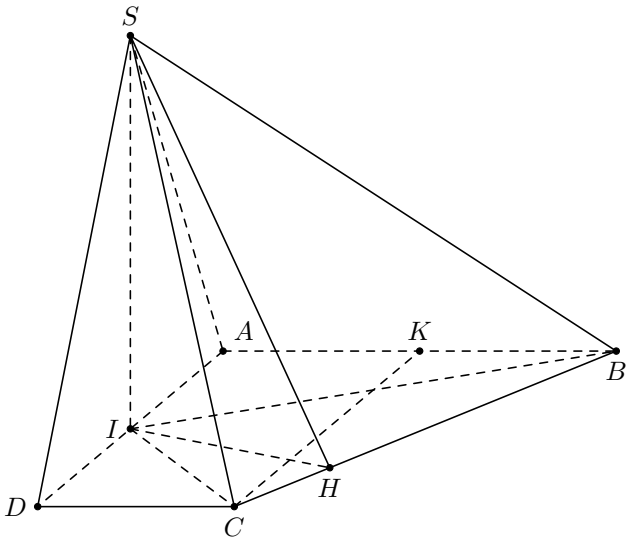
Lời giải.

Theo giả thuyết, ta có $SI \perp (ABCD)$.
Gọi K là trung điểm của AB ta suy ra $ADCK$ là hình chữ nhật.
$$\Rightarrow \begin{cases} CK \perp AB \\ BC = \sqrt{CK^2 + KB^2} = a\sqrt{5} \end{cases}.$$
Dựng $IH \perp BC$ tại H, ta suy ra

$$\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SHI} = 60^\circ.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle BCI} &= S_{ABCD} - S_{\triangle ABI} - S_{\triangle DCI} \\ &= 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} IH = \dfrac{2S_{\triangle BCI}}{BC} = \dfrac{3a^2}{a\sqrt{5}} \\ SI = IH \tan 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}. \end{cases}$$

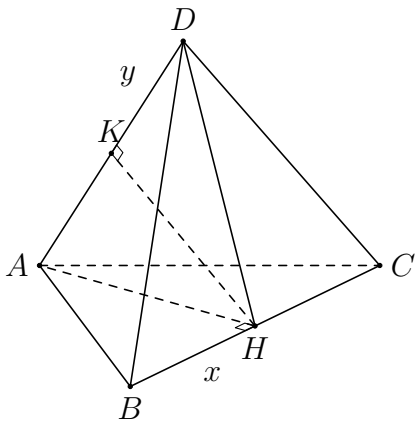
Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD vàBC bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Đặt $BC = x$, $AD = y$ $(x, y > 0)$.
Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và AD. Do các tam giác ABC và DBC cân tại A và D nên $AH \perp BC$, $DH \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp HK$.
Mặt khác, các tam giác ABC, DBC bằng nhau nên $AH = DH \Rightarrow HK \perp AD$ hay $HK = \mathrm{d}(AD, BC)$.



Ta có $\begin{cases} AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \\ HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} \end{cases}$.
Thể tích khối chóp $ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{\triangle HAD} = \dfrac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{12} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{12}\sqrt{x^2y^2(4 - x^2 - y^2)} \le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó, $\max V_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó, $HK = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\mathrm{d}(AD, BC) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ tâm O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V = a^2\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, theo giả thuyết ta có $SO \perp (ABCD)$.

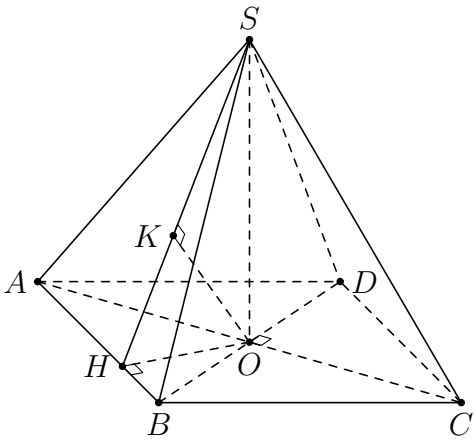
Dựng $OH \perp AB$ tại H, ta có $AB \perp (SOH)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$ (giao tuyến SH).

Dựng $OK \perp SH$ tại K, ta có $SK \perp (SAB)$

$\Rightarrow OK = \mathrm{d}(O, (SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $OA \perp OB$ và



$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

suy ra $\dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OK^2} - \dfrac{1}{OA^2} - \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot 2a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

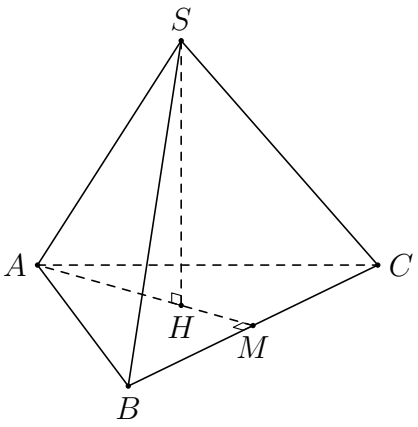
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V_{\max} = \dfrac{1}{6}$. **C.** $V_{\max} = \dfrac{1}{12}$. **D.** $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC, theo giả thuyết suy ra $SH \perp (ABC)$.



Đặt $AB = x \Rightarrow AH = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{1 - \dfrac{3x^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-3x^2}}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{12}x^2\sqrt{3-x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{x^2x^2(6-2x^2)} \le \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x^2+x^2+6-2x^2}{3}\right)^3} = \frac{1}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x^2 = 6 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

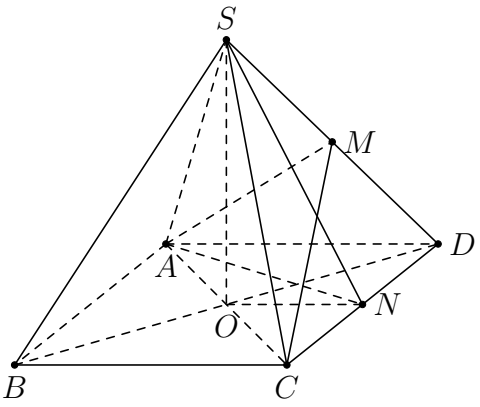
Vậy $\max V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}$ khi chỉ khi $AB = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, DC . Thể tích khối tứ diện $ACMN$ là

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm mặt đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SNO} = 60°$.

$SO = ON \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Vì M là trung điểm của SD nên $\mathrm{d}(M,(ACN)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ANC} = \dfrac{1}{2}S_{ACD} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{4} \cdot (2a)^2 = a^2$.

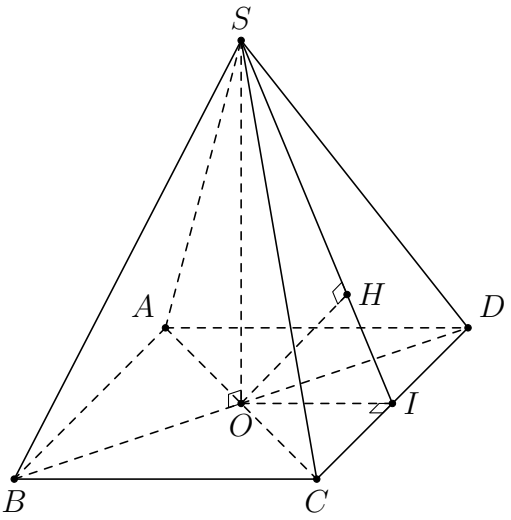
Vậy $V_{ACMN} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến (SCD) bằng $2a$, a là hằng số dương. Đặt $AB = x$, giá trị của x để thể tích $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $2\sqrt{6}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{6}a$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, hạ $OI \perp CD$ (1). Do giả thiết $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp OI$
và $SO \perp CD$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SOI)$.
Trong mặt phẳng (SOI) kẻ $OH \perp SI$, từ chứng minh trên ta suy ra $CD \perp OH$.
Khi đó $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$.
Nên $\mathrm{d}\,(O,(SCD)) = OH$.
Do $AB = x$ nên $OI = \dfrac{x}{2}$, trong tam giác SOI ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{\frac{x^2}{4}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{4}{x^2} \\ &\Leftrightarrow SO^2 = \frac{4a^2x^2}{x^2-16a^2} \Leftrightarrow SO = \sqrt{\frac{4a^2x^2}{x^2-16a^2}}. \end{aligned}$$

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{4a^2x^2}{x^2-16a^2}} \cdot x^2 = \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}}$.
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}}$ trên khoảng $(4a;+\infty)$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3ax^2\sqrt{x^2-16a^2} - \dfrac{ax^4}{\sqrt{x^2-16a^2}}}{(x^2-16a^2)} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2ax^4-48a^3x^2}{(x^2-16a^2)\cdot\sqrt{x^2-16a^2}}$.
Xét $f'(x) = 0$ suy ra

$$\begin{aligned} 2ax^4 - 48a^3x^2 = 0 &\Leftrightarrow 2ax^2\left(x^2-24a^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 - 24a^2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 2\sqrt{6}a \\ x = -2\sqrt{6}a \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}a. \end{aligned}$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 4a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4a^+} \dfrac{2ax^3}{3\sqrt{x^2-16a^2}} = +\infty$
Ta có bảng biến

x	$4a$		$2\sqrt{6}a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$16\sqrt{3}a^3$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{x\in(4a;+\infty)} f(x) = 16\sqrt{3}a^3$ khi $x = 2\sqrt{6}a$.

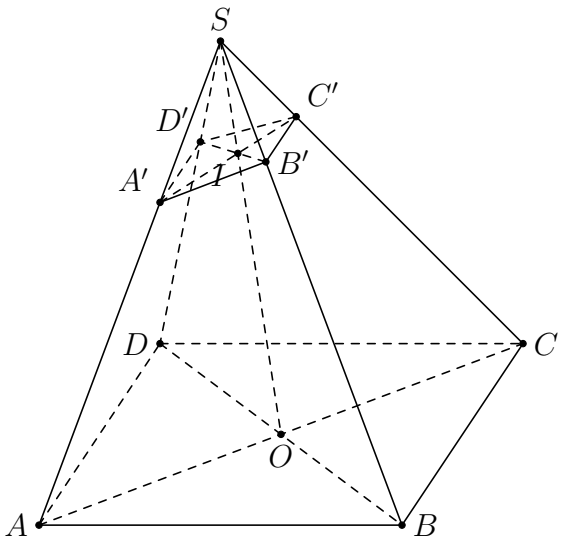
Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k = \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là

A. $\frac{4}{15}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{1}{60}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của SO và $A'C'$.



Do giả thiết ta có $V_{SABC} = V_{SADC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Mà $V_{SA'B'C'D'} = V_{SA'B'C'} + V_{SA'D'C'}$.

Mặt khác ta có
$\dfrac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SB'}{SB}\cdot\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{SB'}{SB}$.
Tương tự
$\dfrac{V_{SA'D'C'}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SD'}{SD}\cdot\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{SD'}{SD}$.
Khi đó

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SA'D'C'}}{V_{SADC}} = \frac{2V_{SA'B'C'}}{V_{SABCD}} + \frac{2V_{SA'D'C'}}{V_{SABCD}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{15}\cdot\frac{SB'}{SB} + \frac{1}{15}\cdot\frac{SD'}{SD} = \frac{2V_{SA'B'C'D}}{V_{SABCD}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{30}\cdot\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right) = k$$

Mặt khác ta có
$\dfrac{S_{\triangle SA'I}}{S_{\triangle SAO}} = \dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SI}{SO}$ và $\dfrac{S_{\triangle SC'I}}{S_{\triangle SCO}} = \dfrac{SC'}{SC}\cdot\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{SI}{SO}$.
Mà $S_{\triangle SAO} = S_{\triangle SCO} = \dfrac{1}{2}\cdot S_{\triangle SAC}$ nên

$$\frac{S_{\triangle SA'I}}{S_{\triangle SAO}} + \frac{S_{\triangle SC'I}}{S_{\triangle SCO}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{1}{5}\cdot\frac{SI}{SO} = \frac{8}{15}\cdot\frac{SI}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_{\triangle SA'I}}{S_{\triangle SAC}} + \frac{2S_{\triangle SC'I}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{8}{15}\cdot\frac{SI}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_{\triangle SA'C'}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{8}{15}\cdot\frac{SI}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SC'}{SC} = \frac{4}{15}\cdot\frac{SI}{SO} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}\cdot\frac{SI}{SO} \Leftrightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{4} \quad (1).$$

Chứng minh tương tự

$$\Leftrightarrow \frac{2S_{\triangle SB'D'}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SI}{SO} + \frac{SD'}{SD}\cdot\frac{SI}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{SI}{SO}\cdot\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)$ $(*)$.

Dễ chứng minh được $\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)^2\geq 4\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}$ $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)^2\geq\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\Leftrightarrow\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\geq 1$.

Do đó $30k\geq 1\Leftrightarrow k\geq\frac{1}{30}$. Nên $\min k=\frac{1}{30}$.

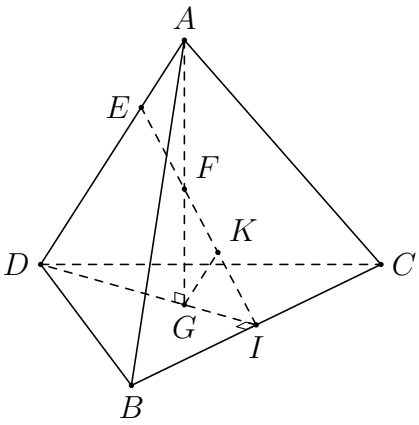
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC và cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo α thỏa mãn $\tan\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{5}{8}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, I là trung điểm của BC.
Gọi F là giao điểm của AG và IE.
Lấy điểm K trên EI sao cho $GK\parallel AD$.



Do $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên $GI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AG=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
Ta có (P) chính là mặt phẳng (EBC).
$\Rightarrow((P),(BCD))=(EI,DI)=\widehat{EID}=\widehat{FIG}=60^\circ$.
Theo giả thiết $\tan\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{7}$ nên $GF=GI\tan\alpha=\frac{5a\sqrt{6}}{42}$
và $AF=AG-GF=\frac{3a\sqrt{6}}{14}$. Suy ra $\frac{GF}{AF}=\frac{5}{9}$.
Do $GK\parallel AD$ nên $\frac{GK}{AE}=\frac{GF}{AF}=\frac{5}{9}$, $\frac{GK}{DE}=\frac{GI}{DI}=\frac{1}{3}$.
Do đó $\frac{AE}{DE}=\frac{3}{5}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{AE}{DE}=\frac{3}{5}$.

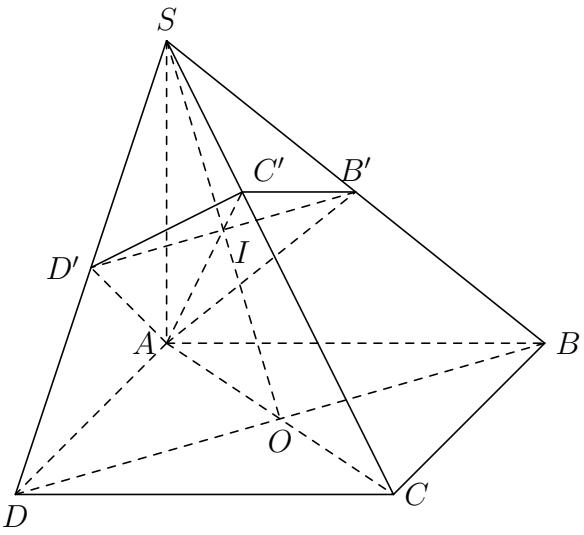
Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi B' và D' theo thứ tự là trung điểm các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được chia ra bởi mặt phẳng $(AB'D')$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và SO cắt $B'D'$ tại I.



Nối AI cắt SC tại C' nên A, B', C', D' đồng phẳng

Đặt $V_{S.ABCD} = V \Rightarrow V_{S.ACD} = V_{S.ABC} = \dfrac{V}{2}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}$

và $\dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SB'}{SB}$.

Do đó,

$\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} + \dfrac{V_{S.AC'B'}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SC'}{SC}.\left(\dfrac{SB'}{SB} + \dfrac{SD'}{SD}\right)$.

Hay $\dfrac{2V_{S.AC'B'}}{V} + \dfrac{2V_{S.AC'D'}}{V} = \dfrac{SC'}{SC}$.

Ta có $B'D' = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow SI = \dfrac{1}{2}SO$.

Xét tam giác $\triangle SCO$ có C', I, A thẳng hàng nên áp dụng định lý Mê-nê-la-úyt ta có

$$\frac{C'S}{C'C}\cdot\frac{AC}{AO}\cdot\frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{C'S}{C'C}\cdot 2\cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{2V_{S.AB'C'D'}}{V} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{V}{6} \Rightarrow V_{AB'C'D'BCD} = V - \dfrac{V}{6} = \dfrac{5V}{6}$.

Vậy tỷ số thể tích của hai khối đa diện được chia ra bởi $(AB'D')$ là $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{AB'C'D'BCD}} = \dfrac{V}{6} : \dfrac{5V}{6} = \dfrac{1}{5}$.

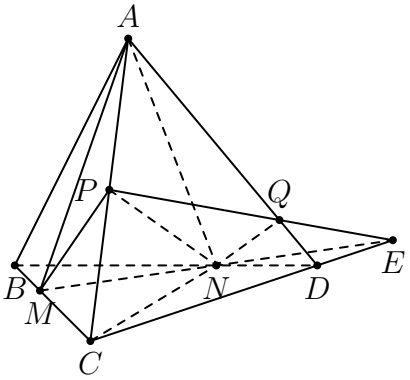
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \dfrac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành 2 phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{19}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{19}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{15}{19}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{26}{13}$.

Lời giải.

Gọi $E = MN \cap CD$ và $Q = AD \cap PE$.



Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNQP$.

Từ đó ta có $V_{ABMNQP} = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{ANPQ}$. $(*)$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác BCD ta có:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{ND}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{EC}{ED} = 4$$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác ACD ta có:

$$\frac{PA}{PC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow 1\cdot 4\cdot\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{1}{4}.$$

Ta có $\dfrac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{ABMN} = \dfrac{2}{9}V_{ABCD}$. (1)

Lại có $\dfrac{S_{NMC}}{S_{DBC}} = \dfrac{d(N;BC)\cdot MC}{d(D;BC)\cdot BC} = \dfrac{NB}{DB}\cdot\dfrac{MC}{BC} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{V_{AMNC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{AMNC} = \dfrac{4}{9}V_{ABCD}$.

Do đó $\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AMNC}}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{AMNP}=\dfrac{1}{2}V_{AMNC}=\dfrac{2}{9}V_{ABCD}.$ (2)

Lại có $\dfrac{S_{CND}}{S_{CBD}}=\dfrac{DN}{DB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{V_{ACDN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{ACDN}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD}.$

Do đó $\dfrac{V_{APQN}}{V_{ACDN}}=\dfrac{AP}{AC}\cdot\dfrac{AQ}{AD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow V_{APQN}=\dfrac{2}{5}V_{ACDN}=\dfrac{2}{15}V_{ABCD}.$ (3)

Thay (1), (2) và (3) vào $(*)$, ta có $V_{ABMNQP}=\dfrac{2}{9}V_{ABCD}+\dfrac{2}{9}V_{ABCD}+\dfrac{2}{15}V_{ABCD}=\dfrac{26}{45}V_{ABCD}.$

Gọi $V_1=V_{ABMNQ}$ và V_2 là thể tích phần còn lại ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{26}{19}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB=a, SA=2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

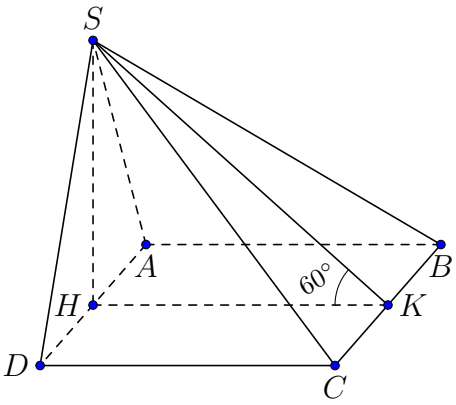
A. $\dfrac{15a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{5a^3}{2}$. **D.** $5a^3$.

Lời giải.

Kẻ $SH\perp AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

- ☑ $\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right)=\widehat{SKH}=60^\circ$.
- ☑ $SH=HK\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.
- ☑ $\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SD^2}\Rightarrow\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{5}{4SD^2}\Rightarrow SD=\dfrac{\sqrt{15}a}{2}, SA=a\sqrt{15}, AD=\dfrac{5\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.a.\dfrac{5\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{5a^3}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AC=2a$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 45°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a^3\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

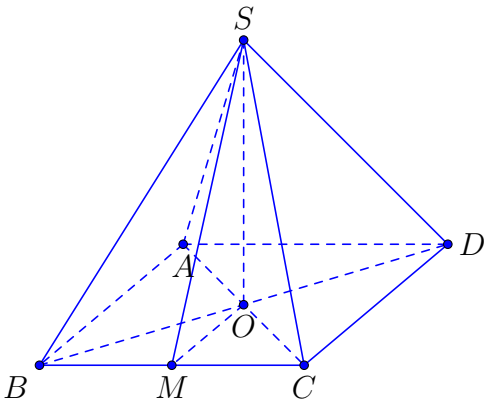
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow\begin{cases}SM\perp BC\\OM\perp BC\end{cases}$

Suy ra $((SBC);(ABCD))=(SM;OM)=\widehat{SMO}=45^\circ$.

Vì $AC=2a$ nên $AB=BC=a\sqrt{2}\Rightarrow SO=OM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD chia khối chóp thành 2 khối đa diện. Đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S

và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=1$.

Lời giải.

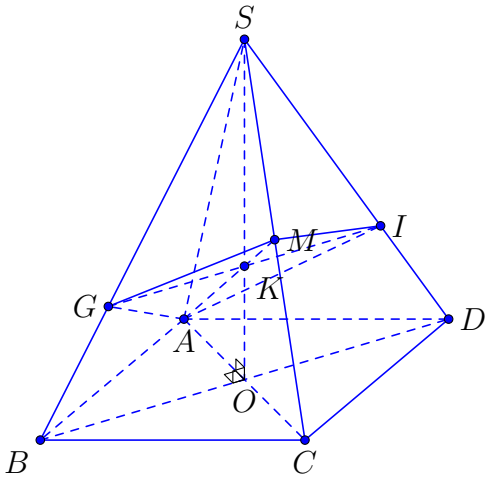
Nhìn hình vẽ ta thấy $V_1=V_{S.MIAG}$.

Gọi $V_{S.ABCD}=V \Rightarrow V_{S.ABC}=V_{S.ADC}=\dfrac{V}{2}$.

Có $\dfrac{V_{S.AGM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SG}{SB}.\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AGM}=\dfrac{V}{6}$.

Có $\dfrac{V_{S.AMI}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SI}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AMI}=\dfrac{V}{6} \Rightarrow V_{S.MIAG}=\dfrac{V}{3} \Rightarrow V_2=V-\dfrac{V}{3}=\dfrac{2}{3}V \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1}=2$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Một khối lăng trụ tam giác có thể phân chia ít nhất thành n khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**.

A. 8. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

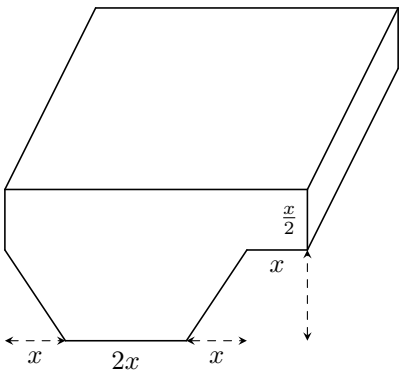
Lời giải.

Vì thể tích khối lăng trụ $V_1=Bh$ và thể tích khối chóp (tứ diện) $V_2=\dfrac{1}{3}Bh$ suy ra $V_1=3V_2$ nên ít nhất ta có thể chia lăng trụ thành ba khối tứ diện (vì chiều cao lớn nhất của khối tứ diện bằng chiều cao lăng trụ và diện tích đáy lớn nhất của tứ diện bằng diện tích đáy lăng trụ).

Chọn đáp án (B) □

Câu 30.

Người ta muốn xây dựng một bể bơi (hình vẽ bên) có thể tích là $V=\dfrac{968}{4+2\sqrt{2}}(m^3)$. Khi đó giá trị thực của x để diện tích xung quanh của bể bơi là nhỏ nhất thuộc khoảng nào sau đây?



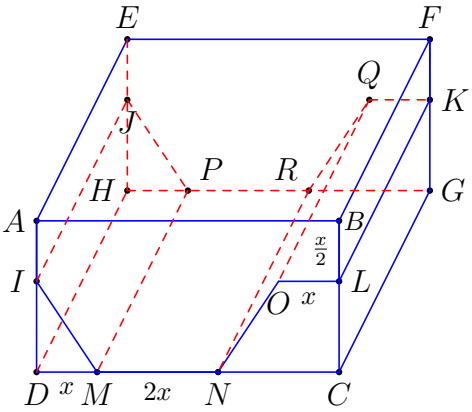
A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của khối lăng trụ bể bơi là h.

Ta có

$$\begin{aligned} V &= S \cdot h \\ &= \left(5x \cdot \frac{3x}{2} - \frac{x \cdot x}{2} - \frac{2x+x}{2}\right) \cdot h \\ &= \frac{11x^2}{2} \\ &\Rightarrow h = \frac{2V}{11x^2} \end{aligned}$$



Diện tích xung quanh của bể bơi là

$$\begin{aligned} S_{xq} &= S_{AIJE} + S_{IMPJ} + S_{MNPR} + S_{NOQR} + S_{OLKQ} + S_{BLKF} + 2S_{MNIABLON} \\ &= \frac{x}{2} \cdot h + x\sqrt{2} \cdot h + 2x \cdot h + x\sqrt{2} \cdot h + xh + \frac{x}{2} \cdot h + 2 \cdot \frac{11x^2}{2} \\ &= (4 + 2\sqrt{2})xh + 2 \cdot \frac{11x^2}{2} \\ &= (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{2V}{11x} + 11x^2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số ta có

$$S_{xq} = \frac{(4+2\sqrt{2})V}{11x} + \frac{(4+2\sqrt{2})V}{11} + 11x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{(4+2\sqrt{2})^2 \cdot V^2}{11}}.$$

Vậy $\min S_{xq} = 3\sqrt[3]{\dfrac{(4+2\sqrt{2})^2 \cdot V^2}{11}}$ khi và chỉ khi $\dfrac{(4+2\sqrt{2})V}{11x} = 11x^2 \Rightarrow x^3 = \dfrac{(4+2\sqrt{2})V}{121} = 8 \Rightarrow x = 2.$

Chọn đáp án A □

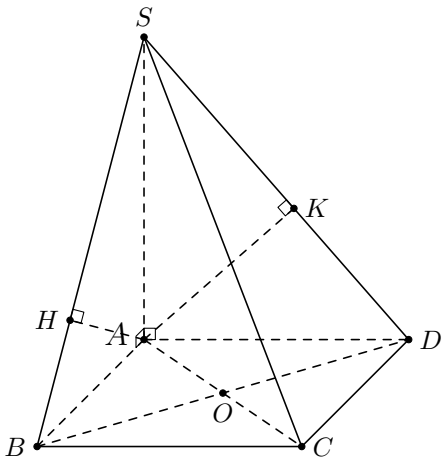
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$. Biết $SA = a$ và vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{4}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{2}{3}a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi $AD = x$ $(x > 0)$.

Kẻ $AH \perp SB$, $AK \perp SD$ dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SBC)$, $AK \perp (SCD) \Rightarrow ((SBC), (SCD)) = (AH, AK)$.



Trong tam giác SBC ta có

$$\begin{aligned}\cos BSD &= \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2SB \cdot SD} \\ &= \frac{2a^2 + (a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}.\end{aligned}$$

Trong tam giác SAD có $SK = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Xét tam giác AHK có

$$\begin{aligned}HK^2 &= SH^2 + SK^2 - 2SH \cdot SK \cdot \cos BSD \\ &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{a^2 + x^2} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{a^2}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Xét tam giác AHK có $AK = \dfrac{SA \cdot AD}{SD} = \dfrac{a \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ $\cos HAK = \dfrac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2AH \cdot AK}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\dfrac{2a^2}{4} + \dfrac{a^2x^2}{a^2 + x^2} - \dfrac{a^2}{2}}{2\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x^2}{2a^2 + 2x^2} \Rightarrow x = 2a.$$

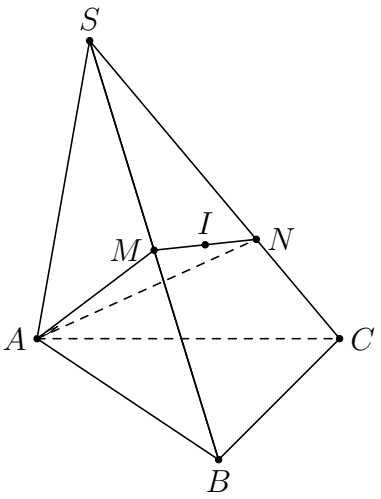
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot 2a \cdot a = \dfrac{2a^3}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = 3$ và $\widehat{ASB} = 60°$, $\widehat{BSC} = 120°$, $\widehat{CSA} = 90°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Trên cạnh $SB,\ SC$ lần lượt lấy điểm $M,\ N$ sao cho $SM = SN = 1$.
Ta có $AM = 1,\ AN = \sqrt{2},\ MN = \sqrt{3}$ nên tam giác AMN vuông tại A.
Hình chóp $S.AMN$ có $SA = SM = SN = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (AMN) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AMN và đó là điểm trung điểm I của MN.
Trong $\triangle SIM$, $SI = \sqrt{SM^2 - IM^2} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{2}$.
Khi đó,

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

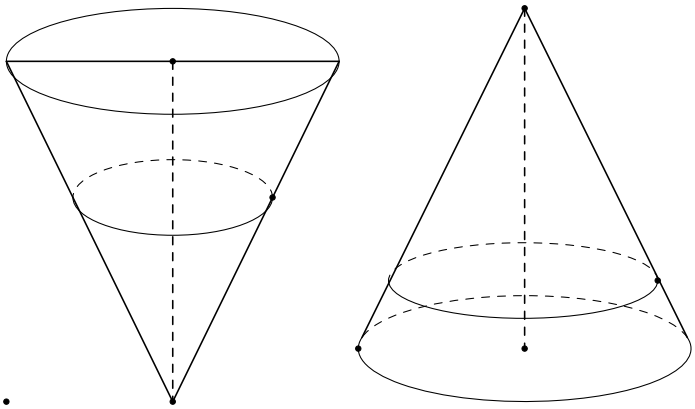
Ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{S.ABC} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

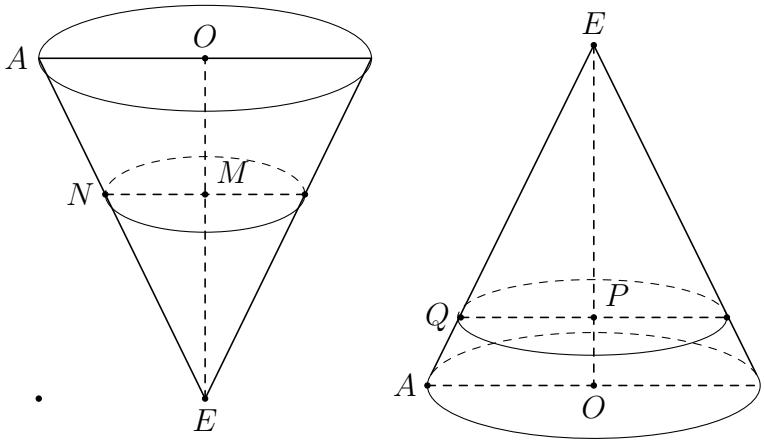
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là 30cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 15cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?

A. 1,553cm. **B**. 1,306cm. **C**. 1,233cm. **D**. 15cm.



Lời giải.



☑ Phễu có dạng hình nón, gọi E là đỉnh, đáy là đường tròn tâm O, bán kính OA chiều cao $OE = 30$cm.

☑ Gọi V là thể tích của khối nón có đỉnh E đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA. Ta có $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot OA^2\cdot OE=10\pi OA^2$.

☑ Gọi M là trung điểm của đoạn OE, N là trung điểm của EA.Khi đổ nước vào phễu chiều cao của cột nước là $EM=15$cm. Gọi V_1 là thể tích của khối nón có đỉnh E, đáy là đường tròn tâm M, bán kính MN. Thể tích nước là $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\cdot MN^2-EM=5\pi\cdot MN^2=\dfrac{5}{4}\pi\cdot OA^2\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{8}V$.

☑ Khi bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên, chiều cao của cột nước là OP. Gọi V_2 là thể tích của khối nón có đỉnh E , đáy là đường tròn tâm P , bán kính PQ. Ta có

$$V_2=V-V_1=\frac{7}{8}V\Leftrightarrow\frac{V_2}{2}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow\frac{\dfrac{1}{3}\pi\cdot PQ^2\cdot PE}{\dfrac{1}{3}\pi\cdot \mathrm{OA}^2\cdot \mathrm{OE}}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow\frac{PQ^2PE}{\mathrm{OA}^2\cdot \mathrm{OE}}=\frac{7}{8}\quad(1).$$

☑ Ta có $\triangle PEQ$ vuông tại P và $\triangle OEA$ vuông tại O. Ta có $\widehat{OEA}=\overline{PEQ}\Rightarrow\triangle PEQ$ và $\triangle OEA$ đồng dạng nên $\dfrac{PQ}{OA}=\dfrac{PE}{OE}$. Do đó

$$\begin{aligned}(1)\quad&\Leftrightarrow\quad\left(\frac{PE}{OE}\right)^3=\frac{7}{8}\Leftrightarrow\frac{PE}{OE}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\Leftrightarrow\frac{OE-OP}{OE}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\\&\Leftrightarrow\quad DP=OE\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)=30\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)\approx1{,}306.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC=x\,(0<x<a\sqrt{3})$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x=\dfrac{a\sqrt{m}}{n}(m,n\in\mathbb{N}*)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m+2n=10$. **B.** $2m^2-3n<15$. **C.** $m^2-n=30$. **D.** $4m-n^2=-20$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Chứng minh hình chiếu vuông của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

+) Chứng minh tam giác SAC vuông tại S, tính AC.

+) Tính BD.

+) Sử dụng công thức tính thể tích $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$.

Cách giải:

Vì $SA=SB=SD=a$ nên hình chiếu vuông của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Do tam giác ABD cân tại $A\Rightarrow H\in AC$.

Dễ dàng chứng minh được: $\Delta SBD=\Delta ABD$ (c.c.c)

$\Rightarrow SO=AO=\dfrac{AC}{2}\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại S (Tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy) $\Rightarrow AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=\sqrt{a^2+x^2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC có $SH=\dfrac{SA.SC}{AC}=\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Ta có $OA=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2}\Rightarrow OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2+x^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3a^2 - x^2}$.

Do ABCD là hình thoi $\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$.

Khi đó ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}\sqrt{a^2+x^2}.\sqrt{3a^2-x^2} = \dfrac{1}{6}ax\sqrt{3a^2-x^2}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $x\sqrt{3a^2-x^2} \le \dfrac{x^2+3a^2-x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} \le \dfrac{1}{6}\cdot a \cdot \dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{m}}{n} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow m + 2n = 10.$

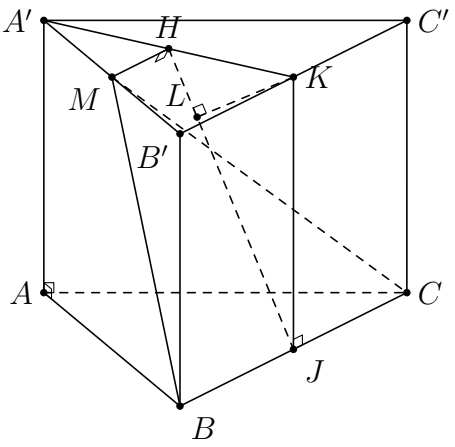
Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, $AB = 2a$, M là trung điểm $A'B'$ và khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi J, K, H lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$, KA' do $MH \parallel B'C'$ nên $MH \parallel BC$. Do đó mặt phẳng (MBC) trùng với mặt phẳng $(MHJB)$.



Khi đó $\mathrm{d}(C', (MBC)) = \mathrm{d}(K, (MBC))$.

Do giả thiết $\begin{cases} MH \perp A'K \\ MH \perp KJ \end{cases} \Rightarrow MH \perp (JKH)$

nên $(JKH) \perp (MHJB)$.

Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên JH. Theo chứng minh trên suy ra $KL \perp (BMHJ)$.

Do đó $\mathrm{d}(K, (MBC)) = KL$ hay $\mathrm{d}(C', (MBC)) = KL$.

Xét $\triangle JKH$ vuông ở K ta có $KL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $KH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Khi đó $\dfrac{1}{LK^2} = \dfrac{1}{KH^2} + \dfrac{1}{KJ^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{KJ^2} = \dfrac{1}{\frac{2a^2}{4}} - \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow KL^2 = \dfrac{3a^2}{2}$ suy ra $KL = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = KJ \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

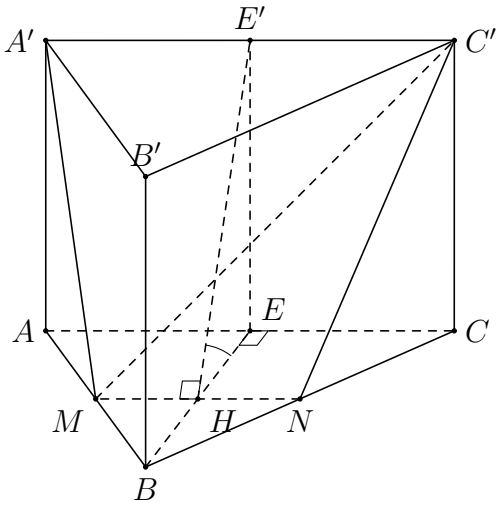
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Diện tích thiết diện cắt lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. **D.** $\dfrac{9}{8}a^2$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm BC.
Kẻ $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel A'C'$.
Mặt phẳng $(A'C'M)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là hình thang $A'C'NM$.
Gọi E, E' lần lượt là trung điểm AC và $A'C'$. Gọi H là giao điểm của MN và BE. Khi đó $MN \perp (E'HE)$.



Ta có: $\begin{cases} (A'C'NM) \cap (ABC) = MN \\ EH \perp MN \\ E'H \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow ((A'C'NM), (ACNM)) = (HE, HE') = \widehat{E'HE} = \varphi$.
Ta có

$$\begin{aligned} BE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE &= \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot E'H \\ &= \sqrt{E'E^2 + EH^2} \\ &= \sqrt{2a^2 + \frac{3a^2}{16}} \\ &= \frac{a\sqrt{35}}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó $\cos\varphi = \dfrac{HE}{HE'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{4}{a\sqrt{35}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$.
Diện tích hình thang cân S_{ACMN}

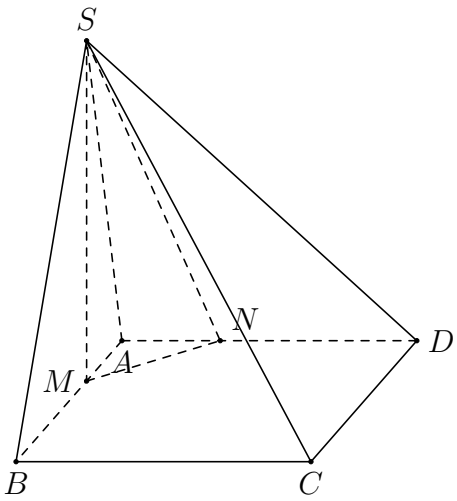
$$\begin{aligned} S_{ACMN} &= \frac{(MN + AC) \cdot HE}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right)\frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} \\ &= \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

Ta có $S_{ACNM} = S_{A'C'MM} \cdot \cos\varphi$.
Vậy $S_{A'C'MM} = \dfrac{S_{ACNM}}{\cos\varphi} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a^2\sqrt{35}}{16}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N thuộc các cạnh AB và AD (M, N không trùng với A, B, D) sao cho $\dfrac{AB}{AM} + 2.\dfrac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{14}{17}$.

Lời giải.



Do các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$ có cùng chiều cao kẻ từ S nên $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{S_{MBCDN}}{S_{ABCD}}$

Ta có: $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AD}{AN}=4.$

ÁP dụng BĐT cô-si, ta có:

$\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AD}{AN}\geq 2\sqrt{\dfrac{AB}{AM}.2\dfrac{AD}{AN}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}}$ (với $\dfrac{AB}{AM}>1$, $\dfrac{AD}{AN}>1$)

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}}\leq 4\Leftrightarrow\dfrac{AB\cdot AD}{AM\cdot AN}\leq 2$

$\Rightarrow\dfrac{S_{ABD}}{S_{AMN}}\leq 2\Rightarrow\dfrac{S_{ABCD}}{S_{AMN}}\leq 4$ (do $S_{ABD}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}$)

$\Rightarrow\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABCD}}\geqslant\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{S_{ABCDN}}{S_{ABCD}}\geqslant\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{V_1}{V}\leq\dfrac{3}{4}.$

Tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ đạt GTLN bằng $\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AD}{AN}=4\\ \dfrac{AB}{AM}=2\dfrac{AD}{AN}\end{cases}\Leftrightarrow$

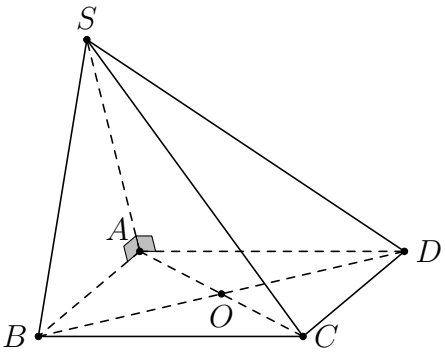
$\begin{cases}\dfrac{AB}{AM}=2\\ \dfrac{AD}{AN}=1\end{cases}.$

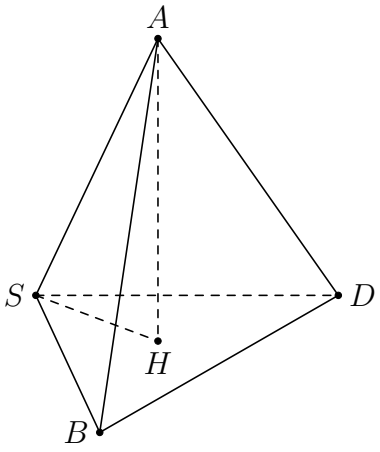
Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $AC=\sqrt{3}a$, SAB là tam giác đều, $\widehat{SAD}=120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $\sqrt{6}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.





Tam giác SAB đều nên $SA=SB=AB=2a$.

Xét tam giác SAD có

$$SD^2=SA^2+AD^2-2SA AD\cdot\cos SAD=12a^2\Rightarrow SD=2\sqrt{3}a.$$

Gọi $AC\cap BD=O\Rightarrow AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\Rightarrow BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\dfrac{\sqrt{13}a}{2}\Rightarrow BD=\sqrt{13}a.$

Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích của tam giác SBD là $S_{\triangle SBD}=\dfrac{\sqrt{183}a^2}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của A trên (SBD). Vì $AB = AD = AS = 2a \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD

$$\Rightarrow \quad SH = \frac{SB \cdot SD \cdot BD}{4S_{\Delta SBD}} = \frac{4\sqrt{39}a}{\sqrt{183}}$$

$$\Rightarrow \quad AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{624a^2}{183}} = \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{183}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{S,ABD} = V_{ASBD} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\Delta SBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{183}} \cdot \frac{\sqrt{183}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = \sqrt{3}a^3.$$

Cách 2

Ta có

$$\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2 \cdot 2a \cdot \sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos BAD = 2(\cos BAC)^2 - 1 = -\frac{5}{8}.$$

Áp dụng công thức tính nhanh cho khối chóp $A.SBD$ ta có

$$V_{ASBD} = \frac{AS \cdot AB \cdot AD}{6} \cdot \sqrt{1 + 2\cos SAB \cdot \cos BAD \cdot \cos DAS - \cos^2 SAB - \cos^2 BAD - \cos^2 DAS}$$

$$= \frac{2a \cdot 2a.2a}{6} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{25}{64} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2};$$

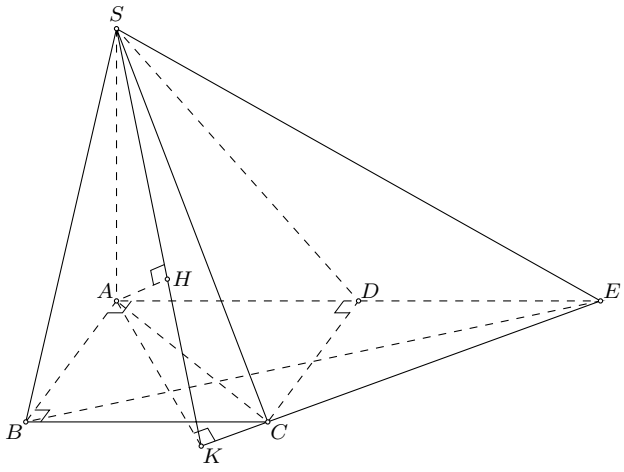
$$\Rightarrow \quad V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = 2V_{ASBD} = \sqrt{3}a^3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng :

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{4a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$,
qua C kẻ $CE \| BD \Rightarrow BD \| (SCE)$
$\Rightarrow d(SC, BD) = d(BD, (CSE)) = \frac{1}{2} d(A; (SCE))$.
Từ A kẻ $AK \perp CE$.
Dễ dàng chứng minh được:
$AH \perp (ACE) \Rightarrow d(A; (ACE)) = AH$.
+ Tính AH:
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔSAK ta có:
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2}$.
+ Tính AK: $S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} AK.CE = \frac{1}{2} CD.AE \Rightarrow AK = \frac{CD.AE}{CE} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.
Suy ra: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{9}{16a^2} \Rightarrow d(A; (SCE)) = \frac{4a}{3}$. Vậy $d(SC.BD) = \frac{2a}{3}$

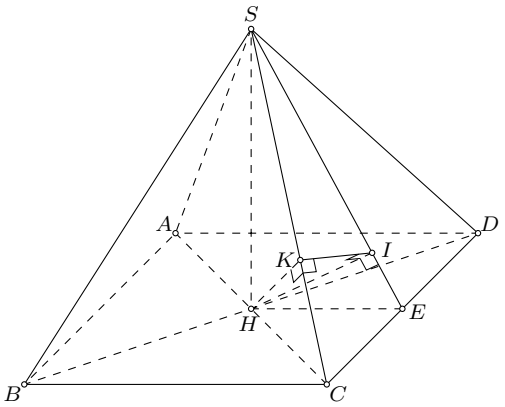
Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Gọi $\{H\} = AC \cap BD$.
Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SH \perp (ABCD)$.
Ta có: $(SAC) \cap (SCD) = SC$.
Gọi I là hình chiếu của H trên mặt phẳng (SCD).
(Cách xác định điểm I: Gọi M là trung điểm của CD.
Nối S với M. Gọi I là hình chiếu của H trên SM.
Dễ dàng chứng minh được: $SI \perp (SCD)$.
Tính được: $SM = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}, SH = a\sqrt{3}, HC = a, MC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.)



Gọi K là hình chiếu của I trên mặt phẳng SC. Có: $\begin{cases} HI \perp SC \\ KI \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HIK) \Rightarrow SC \perp HK$.
Lại có: $SC \perp HI$ (vì $HI \perp (SCD), SC \subset (SCD)$) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) là góc $HKI = \alpha$
Tính $\cos\alpha = \cos KHI = \dfrac{IK}{HK}$.
+ Tính HK : $HK.SC = SH.HC \Rightarrow HK = \dfrac{SH.HC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
+ Tính IK: dễ thấy $\Delta SIK - \Delta SCM \Rightarrow \dfrac{IK}{MC} = \dfrac{SK}{SM} \Rightarrow IK = \dfrac{SK.MC}{SM}$.
+ Tính SK: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho tam giác SHC ta có:

$$SH^2 = SK.SC \Rightarrow SK = \frac{SH^2}{SC} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \Rightarrow IK = \frac{\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{14}}{2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

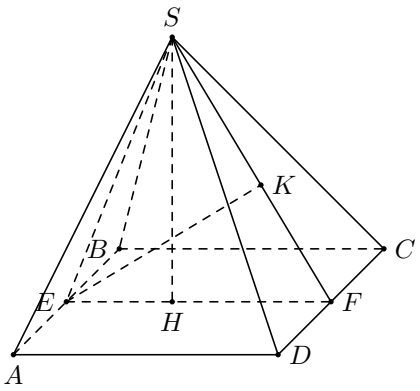
Vậy $\cos\alpha = \cos KHI = \dfrac{IK}{HK} = \dfrac{\frac{3a\sqrt{7}}{14}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = SB = \sqrt{2}a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng a. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

ΔSAB có $SA = SB \Rightarrow SE \perp AB \Rightarrow SE \perp CD$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SE \\ CD \perp EF \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF)$.

Trong (SEF) kẻ $EK \perp SF$ ta có:

$\begin{cases} EK \perp SF \\ EK \perp CD \end{cases} \Rightarrow EK \perp (SCD) \Rightarrow d\,(E;(SCD)) = EK$

Vì

$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\,(E;(SCD)) = \mathrm{d}\,(A;(SCD)) = a.$

Kẻ $SH \perp EF$ ta có $\begin{cases} SH \perp EF \\ CD \perp (SEF) \end{cases} \Rightarrow SD \perp CD \Leftrightarrow SH \perp (ABCD).$

Ta có $S_{\Delta SEF} = \dfrac{1}{2} SH \cdot \mathrm{EF} = \dfrac{1}{2} EK \cdot SF \Leftrightarrow SH \cdot 2a = a \cdot SF \Rightarrow 2SH = SF.$

Đặt $SH = x \Rightarrow SF = 2a.$

Ta có $AE = \dfrac{1}{2} AB = a \Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a.$

Áp dụng định lí Cosin trong tam giác SEF ta có:

$cos\widehat{SEF} = \dfrac{SE^2 + EF^2 - SF^2}{2SE.EF} = \dfrac{a^2 + 4a^2 - 4x^2}{2 \cdot a \cdot 2a} = \dfrac{5a^2 - 4x^2}{4a^2}.$

Xét tam giác vuông SHE có $EH = SE \cdot \cos\widehat{SEF} = a \cdot \dfrac{5a^2 - 4x^2}{4a^2} = \dfrac{5a^2 - 4x^2}{4a}.$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông SHE có:

$$\begin{aligned} & SH^2 + EH^2 = SE^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + \left(\frac{5a^2 - 4x^2}{4a}\right)^2 = a^2 \\ \Leftrightarrow\ & 16a^2x^2 + 25a^4 - 40a^2x^2 + 16x^4 = 16a^4 \\ \Leftrightarrow\ & 9a^4 - 24a^2x^2 + 16x^4 = 0 \Leftrightarrow \left(3a^2 - 4a^2\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SH. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 4a^2 = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$

Chọn đáp án (D) □

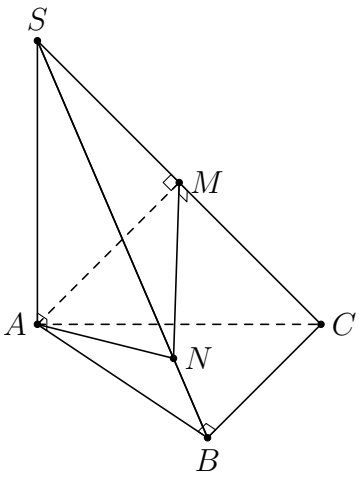
Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Cho $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SC. Do $SA = AC = 2a$ nên

$$AM \perp SC. \tag{1}$$



Trong (SBC), gọi điểm N thuộc cạnh SB sao cho

$$MN \perp SC. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AMN)$. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác AMN.

Ta có $AM = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$. (3)

Vì $\triangle SMN \sim \triangle SBC$ nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow MN = \frac{SM \cdot BC}{SB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}. \tag{4}$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow SN = \frac{SC \cdot MN}{BC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 1.

Xét $\triangle SAB$, $\cos S = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\triangle SAB$,

$$AN^2 = SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos S = 4a^2 + \frac{16a^2}{5} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4a^2}{5}.$$

$$\Leftrightarrow AN = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \tag{5}$$

Từ (3),(4) và (5) đặt $p = \dfrac{AM + MN + AN}{2}$. Ta tính được

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - MN)(p - AN)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{SM \cdot S_{AMN}}{SA \cdot S_{ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} \\ \Leftrightarrow\ & S_{AMN} = \frac{S_{ACB} \cdot SA \cdot SN}{SC \cdot SB} = \frac{\dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

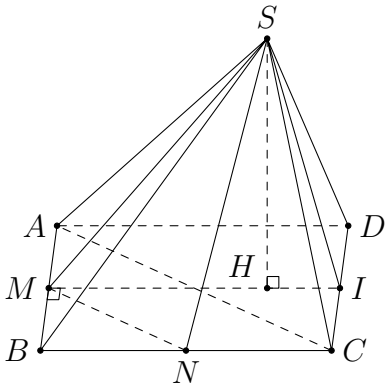
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S

trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC là

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm cạnh CD, khi đó $\begin{cases} AB \perp SM \\ AB \perp MI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMI)$.



Do $CD \parallel AB$ nên $CD \perp (SMI) \Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = \widehat{SIM}$.

Vẽ $SH \perp MI$ tại $H \in MI$ thì $SH \perp (ABCD)$.

$\triangle SMI$ có $SM^2 = MI^2 + SI^2 - 2MI \cdot SI \cos\widehat{SIM}$

$\Leftrightarrow 3a^2 = 4a^2 + SI^2 - 2aSI$

$\Leftrightarrow SI^2 - 2aSI + a^2 = 0 \Leftrightarrow SI = a$.

Cách 1:

Theo định lý Pythagore đảo thì $\triangle SMI$ vuông tại $S \Rightarrow SH = \dfrac{SM \cdot SI}{MI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel MN$

$\Rightarrow \mathrm{d}(AC,SM) = \mathrm{d}(AC,(SMN)) = \mathrm{d}(C,(SMN)) = \dfrac{3V_{SMNC}}{S_{\triangle SMN}}$.

Ta có $V_{SMNC} = V_{S.MNB} = \dfrac{1}{3}SH \cdot \dfrac{1}{2}BM \cdot BN = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Tam giác SIC có $SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBC có $SN^2 = \dfrac{SB^2 + SC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SN = a\sqrt{2}$.

Tam giác SMN có nửa chu vi $p = \dfrac{SM + SN + MN}{2} = \dfrac{a\sqrt{3} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2}$.

Và diện tích $\triangle SMN$ là $S_{\triangle SMN} = \sqrt{p(p - SM)(p - SN)(p - BC)} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC,SM) = \dfrac{3V_{SMNC}}{S_{\triangle SMN}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Cách 2:

Ta thấy $SM^2 + SI^2 = MI^2$ nên $\triangle SMI$ vuông tại S. Suy ra $SH = \dfrac{SM \cdot SI}{MI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $HM = \dfrac{3a}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$; N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel (SMN)$.

Do đó, $\mathrm{d}(AC,SM) = \mathrm{d}(AC,(SMN)) = \mathrm{d}(O,(SMN)) = \dfrac{2}{3}d(H,(SMN))$.

Gọi K là hình chiếu của H lên MN, ta có $\triangle HKM$ vuông cân tại K nên $HK = \dfrac{HM}{\sqrt{2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(AC,SM) = \dfrac{2}{3}\dfrac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

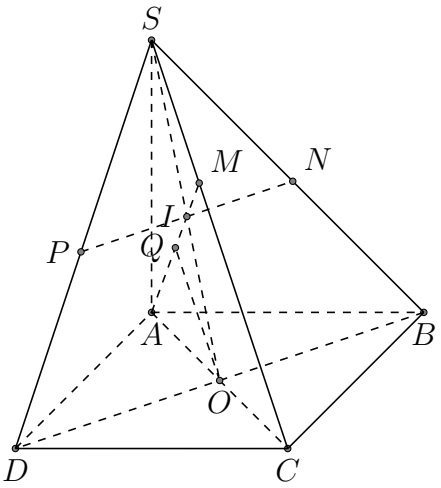
Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Gọi M là điểm trên cạnh SC sao cho $MC = 2MS$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AM và song song với đường thẳng BD, (α) cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại hai điểm N, P. Tính theo V thể tích khối chóp $S.APMN$.

A. $\dfrac{V}{6}$. **B.** $\dfrac{V}{27}$. **C.** $\dfrac{V}{9}$. **D.** $\dfrac{V}{12}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD,
I là giao điểm của SO với AM.
Khi đó, đường thẳng qua I song song với BD cắt SB, SD tại N và P.
Gọi Q là điểm thuộc AM sao cho OQ song song với SC.



Đặt $k = \dfrac{MC}{MS} = 2$.
Ta có $\dfrac{IO}{IS} = \dfrac{OQ}{SM} = \dfrac{OQ}{MC \cdot \dfrac{MS}{MC}} = \dfrac{OA}{AC \cdot \dfrac{MS}{MC}} = \dfrac{k}{2}$.
Suy ra: $\dfrac{DP}{PS} = \dfrac{BN}{NS} = \dfrac{IO}{IS} = \dfrac{k}{2}$.
Do đó, $\dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{k+2}$.
Ta cũng có: $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{k+1}$.

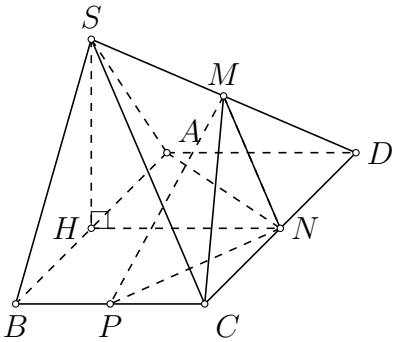
$V_{S.APMN} = 2.V_{S.APM} = 2 \cdot \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} \cdot V_{S.ADC} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} \cdot V_{S.ABCD}$
$= \dfrac{2}{(k+2)(k+1)} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{V}{6}$.
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Biết thể tích khối chóp $S.ABPN$ bằng a, thể tích khối chóp $CMNP$ bằng b. Giá trị của a, b thỏa mãn bất đẳng thức nào sau đây?

A. $a^2 + 2ab - b^2 > 160$. **B.** $a^2 - 2ab + 2b^2 < 109$.
C. $a^2 + ab - b^4 < 145$. **D.** $a^2 - ab + b^4 > 125$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
Khi đó $V = V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.
Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có



$$b = V_{M.CNP} = \frac{1}{2} V_{S.CNP} = \frac{1}{16} V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

và

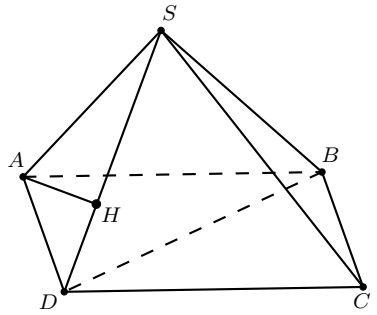
$$a = V_{S.ABPN} = V - V_{S.CNP} - V_{S.AND} = V - \frac{V}{8} - \frac{V}{4} = \frac{5V}{8} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra $a^2 + ab - b^4 < 145$.
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy và $SB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng(SBD).

A. $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{30}}{80}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{20}$.

Lời giải.



Gọi AH là đường cao trong tam giác SAD.
Do $(SAB)\perp(ABCD)$ và $AD\perp AB$ nên $AD\perp(SAB)$ hay $AD\perp SB$. Nhận thấy tam giác SAB vuông tại S nên $SB\perp SA$.
Suy ra $SB\perp(SAD)$ hay $SB\perp AH$. Mà $AH\perp SD$ suy ra $AH\perp(SBD)$ hay khoảng cách từ A đến mặt phẳng SBD là AH.
Trong tam giác SAD vuông tại A:
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2}$ từ đó suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.
Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SB, N là hình chiếu vuông góc của A lên SC. Thể tích của khối chóp $A.BCNM$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{30}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{15}$.

Lời giải.

Ta có tam giác SAC vuông tại A và đường cao AN nên

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SN\cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{2a^2}{5a^2} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{V_{SANM}}{V_{SACB}} = \frac{SN}{SC}\cdot\frac{SM}{SB} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow V_{SANM} = \frac{1}{5}\cdot V_{SACB} = \frac{1}{30}a^3\sqrt{6}.$$

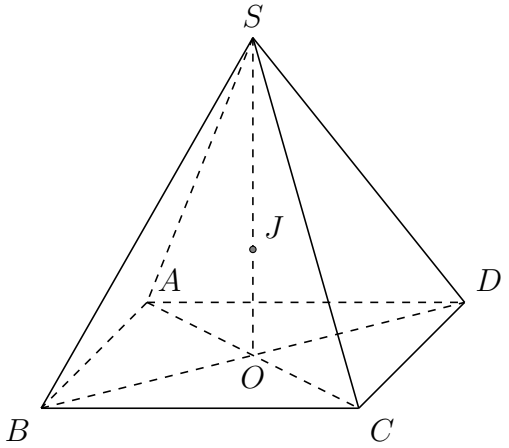
Vậy $V_{A.BCNM} = V_{SACB} - V_{SANM} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6} - \dfrac{a^3\sqrt{6}}{30} = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và có thể tích $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Gọi J là điểm cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính khoảng cách d từ J đến mặt phẳng đáy.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Ta có d là khoảng cách từ J đến $(ABCD)$.
$V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow d(S,(ABCD)) = \dfrac{3V}{S_{ABCD}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Ta có $V = V_{JSAD} + V_{JSAB} + V_{JSBC} + V_{JSCD} + V_{JABCD}$
$= \dfrac{4}{3}d\cdot S_{\triangle SAD} + \dfrac{1}{3}d\cdot S_{ABCD} = a^2d$ (do J cách đều các mặt của hình chóp)
$\Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích 36 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) chứa AM song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại P, Q. Tính thể tích khối chóp $S.APMQ$.

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải.

$\dfrac{V_{S.PQM}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SP}{SB}.\dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{SM}{SC}.\left(\dfrac{SI}{SO}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}.$

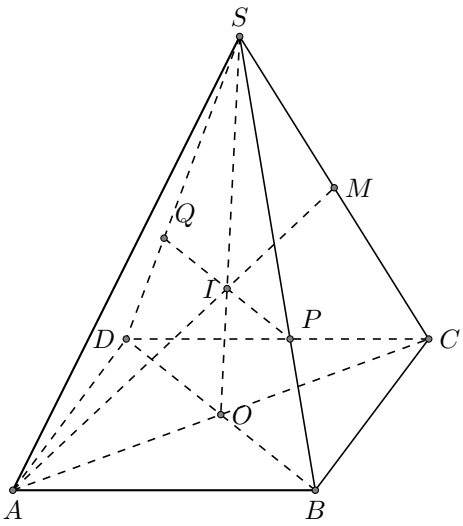
Do $V_{S.BCD} = \dfrac{V_{S.ABCD}}{2} = 18.$

Suy ra $V_{S.PQM} = 4.$

$\dfrac{V_{S.AQP}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SP}{SB}.\dfrac{SQ}{SD} = \left(\dfrac{SI}{SO}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}.$

Suy ra: $V_{S.AQP} = 8.$

Vậy $V_{S.AQMP} = 12.$



Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = k, 0 < k < 1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là

A. $k = \dfrac{1}{3}.$ **B.** $k = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$ **D.** $k = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}.$

Lời giải.

Kẻ $MN \parallel BC$ với $N \in SD$. Mặt phẳng (BMC) tạo với hình chóp thiết diện là hình thang $MNBC$.

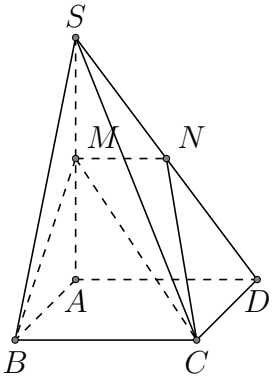
$V_{SABCD} = V_{SMNCB} + V_{MNABCD}.$

$V_{SMNCB} = V_{SMBC} + V_{SMNC} = k.V_{SABC} + k^2.V_{SMNC}$

$= \dfrac{1}{2}(k + k^2)V_{SABCD}.$

Theo yêu cầu bài toán $V_{SMNCB} = \dfrac{1}{2}V_{SABCD} \Rightarrow k^2 + k = 1$

$\Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (do $0 < k < 1$).



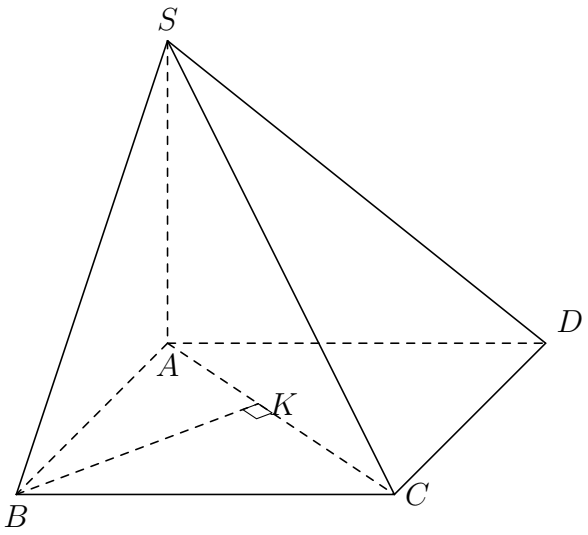
Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và $(ABCD)$ bằng $60°$, $AD = 2AB$ và thể tích khối chóp bằng $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ B tới mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}.$ **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.$ **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}.$

Lời giải.

Đặt $AB = x \Rightarrow AD = 2x \Rightarrow S_{ABCD} = 2x^2$.
Do AB là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$ nên góc giữa SB và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}$.
Xét tam giác SAB có $SA = AB\tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.
Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}2x^2x\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}2x^2x\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = a$.
Kẻ $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp (SAC) \Rightarrow d(B,(SAC)) = AK$.
Mặt khác: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có các góc tại đỉnh S cùng bằng 60°, $SA = a, SB = 2a$, $SC = 3a$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Trên cạnh SB lấy B' sao cho $SB' = a$.
Trên cạnh SC lấy C' sao cho $SC' = a$.
Khi đó, ta có $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = 6V_{S.AB'C'}$.
Ta có $S.AB'C'$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Suy ra $V_{S.ABC} = 6\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
$S_{SBC} = \dfrac{1}{2}SB \cdot SC\sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.
$d(A;(SBC)) = \dfrac{3V}{S_{SBC}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Gọi O là điểm bất kỳ trên mặt đáy $(ABCD)$. Biết thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng V. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{27}{8}V$. **B.** $\dfrac{27}{2}V$. **C.** $\dfrac{9}{4}V$. **D.** $\dfrac{27}{4}V$.

Lời giải.

Thể tích $V_{O.MNPQ} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}\,(O,(MNPQ)) \cdot S_{MNPQ}$.

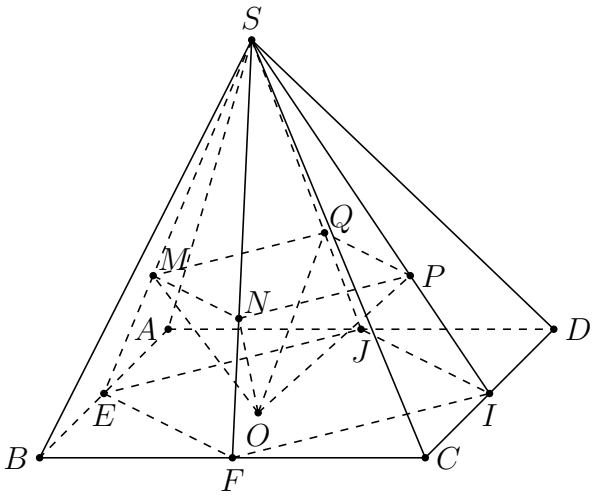
Gọi E, F, I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Ta có $PQ \parallel IJ$ và $PQ = \dfrac{2}{3}IJ$.

Hai hình bình hành $MNPQ$ và $EFIJ$ đồng dạng với tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra, $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{EFIJ}} = k^2 \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{4}{9}S_{EFIJ}$.

mà $S_{EFIJ} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{2}{9}S_{ABCD}$.

Mặt khác, do $(MNPQ) \parallel (ABCD)$ nên



$$\mathrm{d}\,(O,(MNPQ)) = \mathrm{d}\,(P,(ABCD)) = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}\,(S,(ABCD)).$$

Do đó

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3}\,\mathrm{d}\,(S,(ABCD)) \cdot S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3\,\mathrm{d}\,(O,(MNPQ)) \cdot \frac{9}{2}\,S_{MNPQ} \\ &= \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}\,(O,(MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \frac{27}{2}V. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$, đáy là tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = 2$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp.

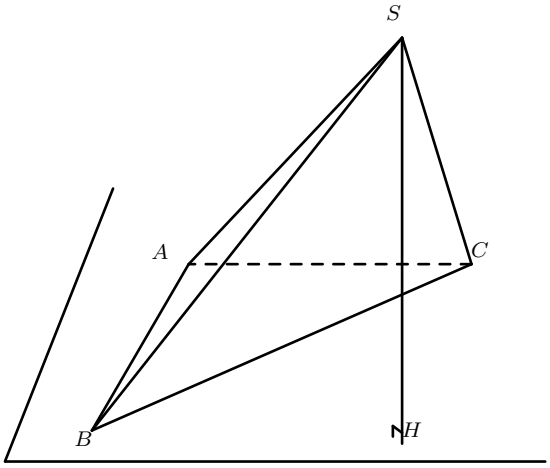
A. $V = \dfrac{\sqrt{7}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{7}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do $SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Trong tam giác ABC:

- ☑ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$ $\Rightarrow BC = \sqrt{7}$.
- ☑ $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- ☑ Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.



Trong tam giác SAH: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, đáy tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1$, $AC = 2$, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

Gọi H là trung điểm $\Rightarrow \begin{cases} IH \perp AB \\ SH \perp AB \end{cases}$.

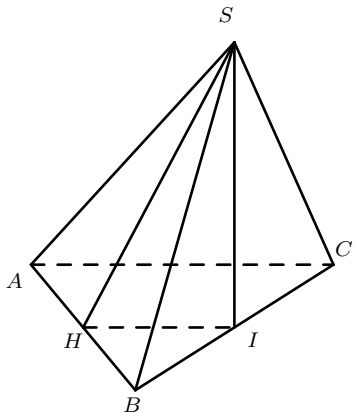
$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SHI} = 60°$.

Trong tam giác ABC: $HI = \dfrac{AC}{2} = 1$.

Trong tam giác SHI : $SI = HI.\tan 60° = \sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $SABC$:

$V = \dfrac{1}{3}.SI.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.SI.\dfrac{1}{2}.AB.AC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Xét khối chóp tứ giác $S.ABCD$, trong đó $SBAC$ là tứ diện đều cạnh a và $ABCD$ là hình thoi. Tính thể tích khối chóp đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $SABC$ là tứ diện đều nên $SG \perp (ABC)$.

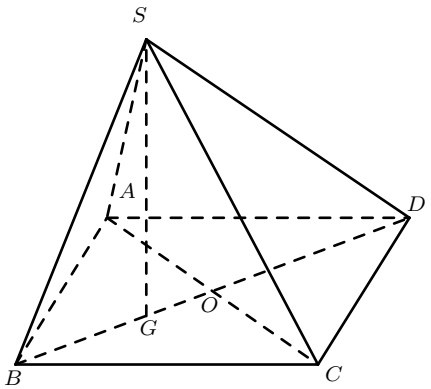
Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $BG = \dfrac{2}{3} \cdot BO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SBG: $SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối chóp $SABCD$:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot SG.V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SG.2S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Xét khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và diện tích toàn phần của hình hộp đó là 32. Thể tích V lớn nhất của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là bao nhiêu?

A. $V_{\max} = \dfrac{56\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V_{\max} = \dfrac{70\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V_{\max} = \dfrac{64\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V_{\max} = \dfrac{80\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Gọi x là cạnh đáy của khối hộp, h là chiều cao của khối hộp.

Ta có $S_{tp} = 4xh + 2x^2 = 32 \Leftrightarrow h = \dfrac{16 - x^2}{2x}$.

Có $V = x^2.h = \dfrac{1}{2}x(16 - x^2)$, $V' = \dfrac{1}{2}(16 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Vậy $V_{\max} = \dfrac{64\sqrt{3}}{9}$.

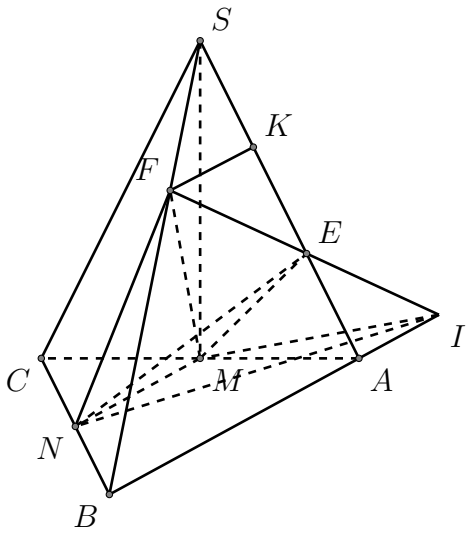
Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AB = 4$, $SA = SB = SC = 12$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy điểm E và F sao cho $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{BF}{BS} = \dfrac{2}{3}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $MNEF$.

A. $V = \dfrac{16\sqrt{34}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{17}}{9}$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{34}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, mà $\triangle ABC$ vuông tại B nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Suy ra $SM \perp (ABC)$ tại M. Ta có $AB = BC = 4 \Rightarrow BN = 2$ và $AC = 4\sqrt{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 2\sqrt{34}$.



Gọi I là giao điểm của EF với AB, kẻ $FK \parallel BI$, $K \in SA$.

Ta có $\dfrac{SK}{SA} = \dfrac{SF}{SB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow SK = KE = EA$

$\Rightarrow \triangle EKF = \triangle EAI \Rightarrow E$ là trung điểm của IF.

Vậy $V_{MNEF} = V_{EMNI} = \dfrac{1}{3} \cdot d[E,(MNI)] \cdot S_{MNI}$

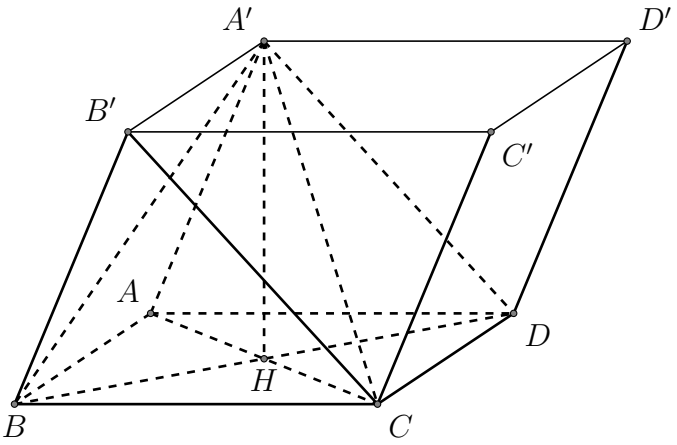
$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{SM}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot BN. \cdot MN = \dfrac{4\sqrt{34}}{9}$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $B'C' = a\sqrt{5}$, các đường thẳng $A'B$ và $B'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$, tam giác $A'AB$ vuông tại B, tam giác $A'CD$ vuông tại D. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.



Ta có $A'D \perp CD \Rightarrow A'D \perp AB$, vậy $\begin{cases} A'B \perp AB \\ A'D \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'BD) \Rightarrow (A'BD) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến BD.

Ta có $B'C \parallel A'D$ nên $A'D$ tạo với $(ABCD)$ góc $45°$.

Gọi H là hình chiếu của A' xuống $(ABCD)$, $H \in BD$, ta có $\widehat{A'BH} = \widehat{A'DH} = 45°$ nên $\triangle A'BD$ vuông cân tại A'.

Vậy H là trung điểm của BD.

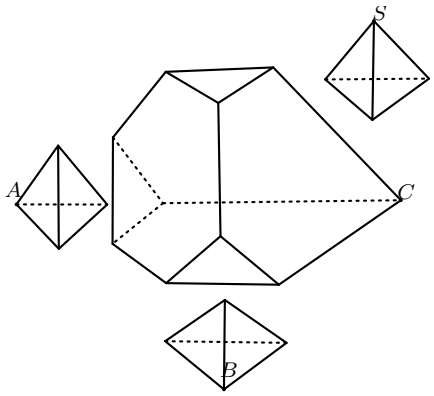
Có $AB \perp (A'BD) \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại $B \Rightarrow BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = 2a$, $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BD = a^2$.

Có $A'H = \dfrac{BD}{2} = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot 2S_{ABD} = 2a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 60.

Cho một tứ diện đều có chiều cao h. Ở ba góc của tứ diện, người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nữa thể tích khối tứ diện đều ban đầu (hình bên). Tìm x.



A. $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{3}}$. **C.** $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Lời giải.

Tứ diện đều cạnh a có chiều cao là $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $a=\dfrac{3h}{\sqrt{2}}$.

Tứ diện đều có chiều cao x có cạnh là $\dfrac{3x}{\sqrt{2}}$.

Gọi V, V_1 lần lượt là thể tích của tứ diện đều có chiều cao lần lượt là h, x.

Khi đó $V=6V_1\Leftrightarrow x=\dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$

Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân, $AB=2a, BC=CD=AD=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Biết $SC=SD=SM$ và góc giữa cạnh bên SA và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là 30°. Thể tích của hình chóp đó là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $CDAM$ là hình bình hành $\Rightarrow CM=a$.

Tương tự có: $DM=a$.

Có: $CM=MD=DC=a\Rightarrow \Delta CMD$ đều.

Gọi H là trọng tâm ΔCMD.

$\Rightarrow HC=HM=HD=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\Rightarrow AH=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Mà $SC=SD=SM$ nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔCDM.

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

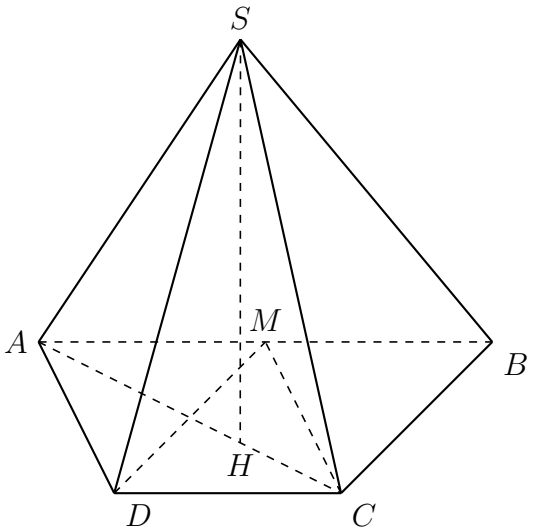
$\Rightarrow$ Góc giữa SA và $(ABCD)$ là $\widehat{SAH}$.

$\Rightarrow \widehat{SAH}=30^\circ$.

Ta có: $SH=AH.\tan\widehat{SAH}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}\tan 30^\circ=\dfrac{2a}{3}$.

$ABCD$ là hình thang cân có $AB=2a; BC=CD=DA\Rightarrow$ $S_{ABCD}=3.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Ta có: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $4a^2$. Thể tích lăng trụ đó là:

A. $\dfrac{2\sqrt{10}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{10}a^3$. **C.** $2\sqrt{6}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC; AI = \dfrac{1}{2}BC = \sqrt{2}a$.

Ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (AA'I) \Rightarrow BC \perp A'I$.

Do đó: $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}.A'I.BC$

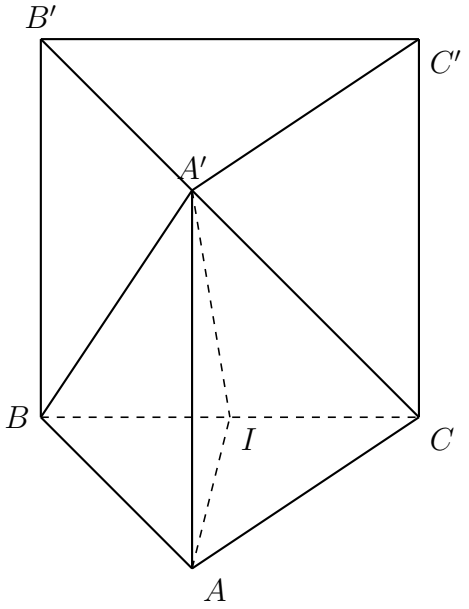
Mà $S_{\Delta A'BC} = 4a^2; BC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}a$

Nên $A'I = 2\sqrt{2}a$.

Ta có: $\Delta A'AI$ vuông tại A (Do $AA' \perp AI$)

$\Rightarrow$ Áp dụng định lí Py - ta - go ta có: $A'A = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = a\sqrt{6}$.

Ta có: $V_{\text{lăng trụ}} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{6}.\dfrac{1}{2}.(2a)^2 = 2\sqrt{6}a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến (SCD) bằng 4. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$, tính giá trị lớn nhất của V.

A. $16\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $32\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

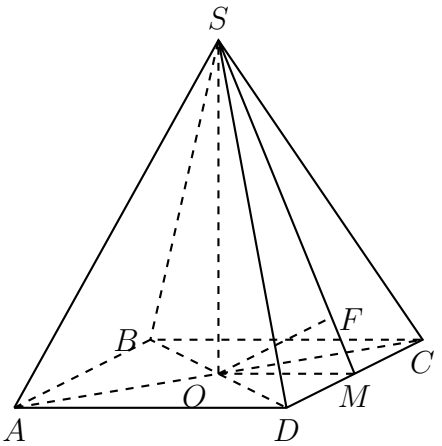
Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD và $OF \perp SM$.

Khi đó $d(O,(SCD)) = \dfrac{1}{2}d(A,(SCD)) = 2$.

Ta xét tứ diện $SOCD$ và ta có $V_{SOCD} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Đặt $SO = y, OC = OD = x$ ta có: $\dfrac{1}{OF^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{4y^2}{y^2-4} \Leftrightarrow S_{OCD} = \dfrac{4y^2}{y^2-4}$. Vậy $V_{SOCD} = \dfrac{1}{3}y.\dfrac{4y^2}{y^2-4}$.



Xét hàm $f(y) = \dfrac{4}{3}\dfrac{4y^3}{y^2-4}$. Ta có $f'(y) = \dfrac{16y^2}{y^2-4} - \dfrac{8}{3}\dfrac{4y^4}{(y^2-4)^2}$.

Cho $f'(y) = 0 \Rightarrow y = 0, y = -2\sqrt{3}, y = 2\sqrt{3}$. Từ đó suy ra $\max f(y) = f(2\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}$.

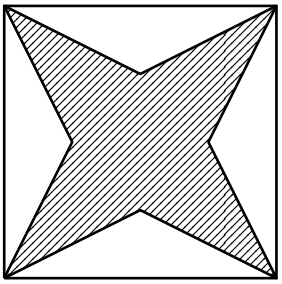
Chọn đáp án A □

Câu 64. Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3, đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m^2. Chi phí thuê nhân công thấp nhất là

A. 150 triệu đồng. **B.** 60 triệu đồng. **C.** 100 triệu đồng. **D.** 75 triệu đồng.

Câu 65.

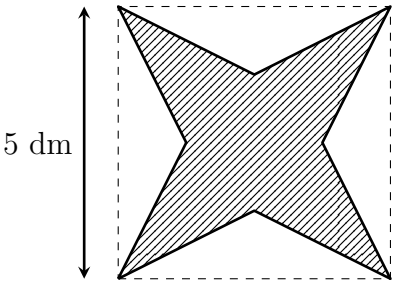
Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Tính độ dài cạnh đáy của mô hình để mô hình có thể tích lớn nhất.



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm. **B.** $\frac{5}{2}$ dm. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ dm. **D.** $2\sqrt{2}$ dm.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy của mô hình là x (dm) $\Rightarrow$ độ dài đường cao của mặt bên hình chóp: $\frac{5\sqrt{2}-x}{2}$ $\Rightarrow$ đường cao hình chóp là $\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25-5\sqrt{2}x}{2}}$



$\Rightarrow V=\frac{1}{2}.x^2.\sqrt{\frac{25-5\sqrt{2}x}{2}}$.

Xét $f(x)=x^4(5-\sqrt{2}x)$ trên $\left(0;\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$:

$f'(x)=5x^3(4-\sqrt{2}x)=0\Rightarrow x=2\sqrt{2}\Rightarrow V_{\max}=V(2\sqrt{2})$.

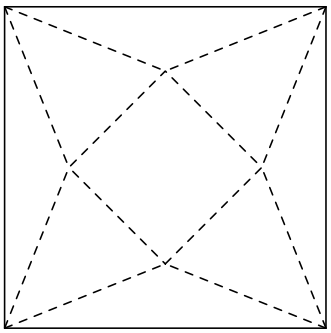
Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song với BC. Mặt phẳng (α) cắt SB và SC lần lượt tại M và N. Tính tỉ số $\frac{MN}{SB}$ biết mặt phẳng (α) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

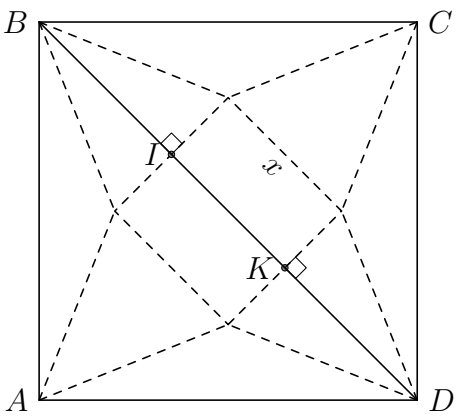
Câu 67.

Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng bao nhiêu?



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm. **B.** $\frac{5}{2}$ dm. **C.** $2\sqrt{2}$ dm. **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ dm.

Lời giải.



Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều là x.
Chiều cao của hình tam giác là mặt bên của hình chóp tam giác đều là:
$BI = DK = \dfrac{BD - x}{2} = \dfrac{5\sqrt{2} - x}{2}$, $(x < 5\sqrt{2})$.

Chiều cao của hình chóp tứ giác đều là: $h = \sqrt{BI^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{50 - 10\sqrt{2}x}{4}}$.

Thể tích cần tính là: $V = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{\dfrac{50 - 10\sqrt{2}x}{4}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{50x^4 - 10\sqrt{2}x^5}$.
Xét hàm số $f(x) = 50x^4 - 10\sqrt{2}x^5$ trên khoảng $\left(0; 5\sqrt{2}\right) \Rightarrow \max\limits_{\left(0;5\sqrt{2}\right)} f(x) = 640$ khi $x = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy một góc $45°$ và $60°$. Tính thể tích của khối hộp nếu biết cạnh bên của hình hộp bằng 1.

A. 3. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 2.

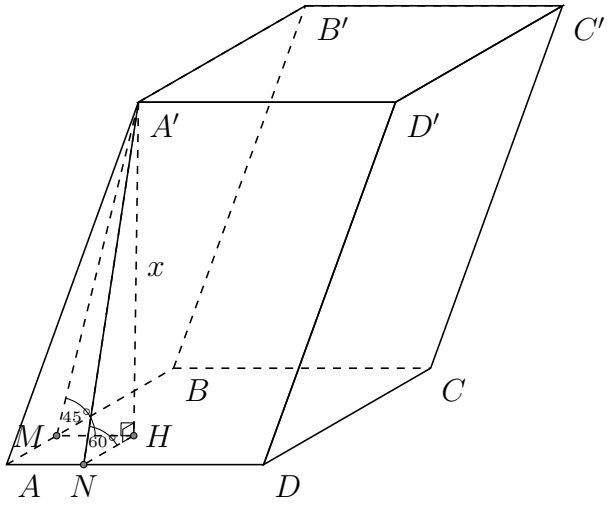
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc A' lên $(ABCD)$.
Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc H lên $AB, AD \Rightarrow \widehat{A'NH} = 60°$ và $\widehat{A'MH} = 45°$.
Đặt $A'H = x$, khi đó $A'N = \dfrac{x}{\sin 60°} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{cases} A'N = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\dfrac{3 - 4x^2}{3}} = HM \\ HM = x.\tan 45° = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} = x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.x = \sqrt{3}.\sqrt{7}.\sqrt{\dfrac{3}{7}} = 3.$

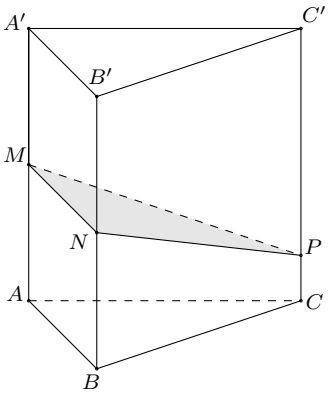


Chọn đáp án A □

Câu 69.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'; P là điểm trên CC' sao cho $C'P = 5CP$. Gọi V_1, V lần lượt là thể tích các khối đa diện $A'B'C'.MNP, ABC.A'B'C'$ (hình vẽ bên). Tính $\dfrac{V_1}{V}$

A. $\dfrac{11}{18}$. **B**. $\dfrac{5}{24}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{2}{3}$.



Lời giải.

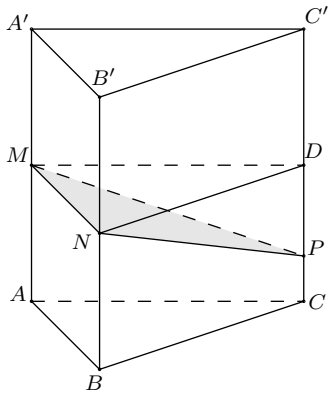
Gọi diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ lần lượt là S và $6h$.

Ta có:

$\circ\ V = 6h \cdot S$

$\circ\ V_1 = V_{MND.A'B'C'} + V_{P.MND} = 3h \cdot S + \dfrac{1}{3} \cdot 2h \cdot S = \dfrac{11}{3}hS$

Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{11}{18}$



Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BD.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

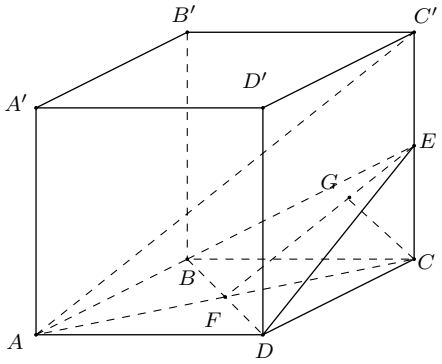
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CC', AC.

Ta có $AC' \parallel (BDE)$ nên $d(AC', BD) = d(AC', (BDE)) = d(C', (BDE)) = d(C, (BDE))$ (do E là trung điểm của CC')

Kẻ $CG \perp EF$, ta chứng minh được $CG \perp (BDE)$.

Suy ra khoảng cách cần tìm là CG

$$\frac{1}{CG^2} = \frac{1}{CF^2} + \frac{1}{CE^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow CG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = AC = a$. Gọi H là trung điểm của BC. Hai mặt phẳng (SHA) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $60°$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

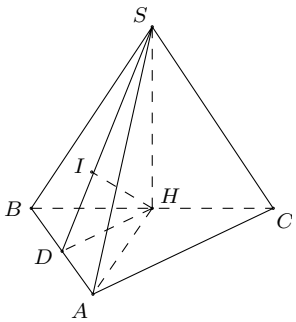
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SHA) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên SH là đường cao. Gọi D là trung điểm của AB ta có $AB \perp HD, AB \perp SD$ nên góc giữa mặt phẳng (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SDH} = 60°$.

Kẻ $HI \perp SD$ ta có $HI \perp (SAB)$ và $d(C, (SBA)) = 2d(H, (SAB)) = 2HI$.

$HD = \dfrac{a}{2}, SH = HD.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(C, (SBA)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = y > 0$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = x$ với $0 < x < a$ biết $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCM$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $y=\sqrt{a^2-x^2}$

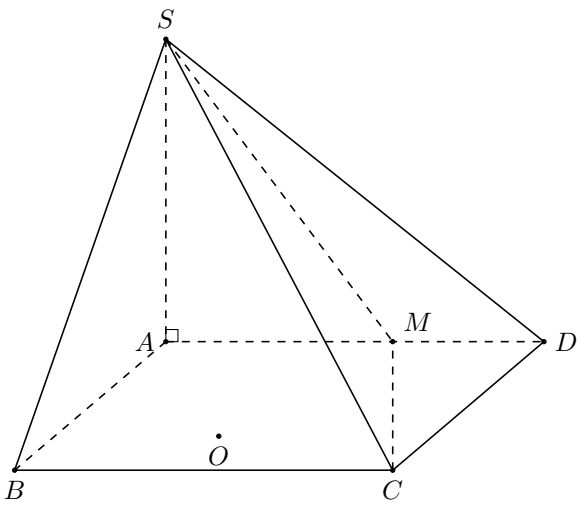
$\Rightarrow V_{S.ABCM}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCM}=\dfrac{1}{3}y.\dfrac{(x+a)\,a}{2}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}\,(x+a)$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\text{ (loại)}\\ x=\dfrac{a}{2}\end{array}\right.$

$\max V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án D □

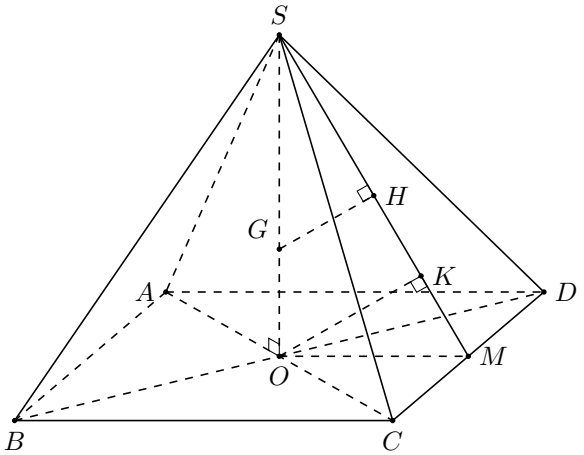
Câu 73. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC biết khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

$d(O;(SCD))=OK=\dfrac{3}{2}GH\Rightarrow OK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



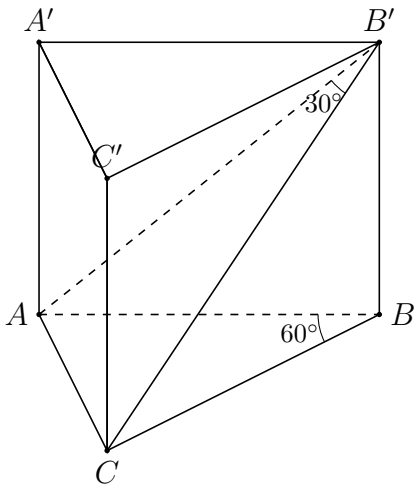
Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $BC=a$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30°. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3\sqrt{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=a^3\sqrt{6}$.

Lời giải.

$AC = a\sqrt{3}, S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
$\widehat{AB'C} = 30^\circ \Rightarrow B'C = \dfrac{AC}{\tan 30^\circ} = 3a.$
$BB' = 2a\sqrt{2} \Rightarrow V = a^3\sqrt{6}.$



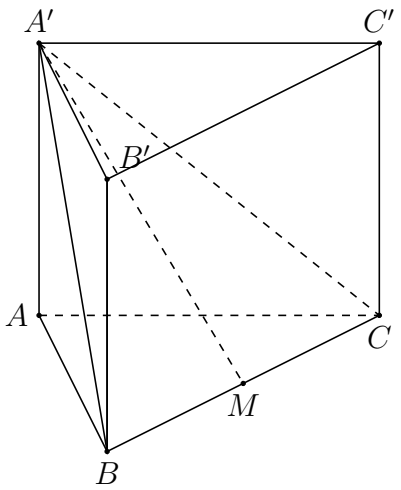
Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 2, diện tích tam giác $A'BC$ bằng 3. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 2\sqrt{5}$. **B.** $V = \sqrt{2}$. **C.** $V = 3\sqrt{2}$. **D.** $V = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow \dfrac{1}{2}A'M.BC = 3$
$\Leftrightarrow A'M = 3 \Rightarrow AA' = \sqrt{6} \Rightarrow V = S_{ABC}.AA' = 3\sqrt{2}$



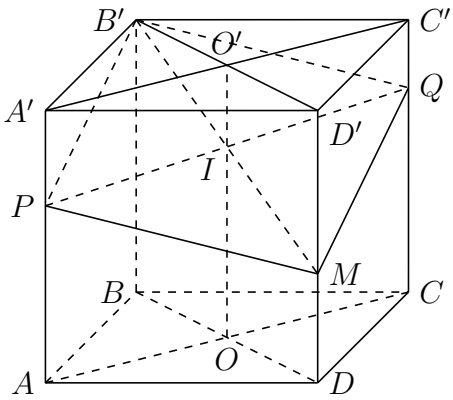
Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M thuộc cạnh DD' thoả mãn $\dfrac{MD}{MD'} = k$. Mặt phẳng (P) qua $B'M$ cắt hai cạnh AA' và CC' tại P và Q tương ứng. Biết (P) chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối có tỉ số thể tích bằng $\dfrac{1}{4}$. Tính giá trị của k.

A. $k = \dfrac{3}{2}$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = \dfrac{1}{4}$. **D.** $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối đa diện chứa điểm D' và thể tích khối đa diện không chứa điểm D'.



Không mất tính tổng quát, coi cạnh hình lập phương có độ dài 1. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$. Khi đó $B'M$, OO', PQ đồng quy tại I.

Dễ thấy I là trung điểm $B'M$ và PQ nên

$$PA' + QC' = 2IO' = MD'.$$

Do đó

$$\begin{aligned} V_1 =& V_{B'.A'D'MP} + V_{B'.C'D'MQ} \\ =& \frac{1}{3} \cdot A'B' \cdot \frac{1}{2} \cdot A'D' \cdot \frac{PA' + MD'}{2} \\ &+ \frac{1}{3} \cdot C'B' \cdot \frac{1}{2} \cdot C'D' \cdot \frac{QC' + MD'}{2} \\ =& \frac{MD'}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{MD'}{2}}{1 - \frac{MD'}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow MD' = \frac{2}{5}.$$

Do đó $MD = \dfrac{3}{5}$ và $k = \dfrac{MD}{MD'} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

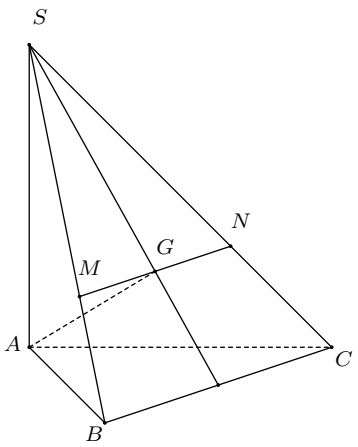
Câu 77. Cho hình chóp tứ giác $SABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC, cắt SC, SB lần lượt tai M, N. Khi đó thể tích khối chóp $SAMN$ là

A. $\dfrac{4a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{27}$.

Lời giải.

Xét hai mp (α) và (SBC) có điểm G chung.

Theo bài mp (α) song song với BC và cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Suy ra $(\alpha) \cap (SBC) = MN$ với MN đi qua G, song song với BC, $M \in SB$, $N \in SC$.



Khi đó ta có $\dfrac{V(S.AMN)}{V(S.ABC)} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

Lại có $V(S.ABC) = \dfrac{1}{3} SA . S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} . a . \dfrac{1}{2} . a^2 = \dfrac{a^3}{6}$

$\Rightarrow V(S.AMNN) = \dfrac{2a^3}{27}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng bên trong dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình vuông, có thể tích là $62,5\text{m}^3$. Hỏi các cạnh bên và cạnh đáy của hình hộp chữ nhật là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp chữ nhật là nhỏ nhất?

A. Cạnh bên là 2.5m, cạnh đáy 5m.

B. Cạnh bên là 4m, cạnh đáy $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$m.

C. Cạnh bên là 3m, cạnh đáy $\dfrac{5\sqrt{30}}{6}$m.

D. Cạnh bên là 5m, cạnh đáy $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$m.

Lời giải.

Gọi x, h lần lượt là độ dài cạnh đáy hình vuông, chiều cao của thùng gỗ $(x>0; h>0, (\text{m}))$.

Thể tích của thùng gỗ là: $V=x^2h \Leftrightarrow h=\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{62,5}{x^2}$

Tổng diện tích xung quanh và diện tích của mặt đáy là

$$S(x)=x^2+4xh=x^2+4x.\frac{62.5}{x^2}=x^2+\frac{250}{x}$$

Khi đó, bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất.

$S'(x)=2x-\dfrac{250}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=5$

Ta có bảng biến thiên

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để $S(x)$ nhỏ nhất thì cạnh đáy $x=5$, chiều cao của thùng gỗ là $h=2.5$

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB=a, CD=b$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Khối tứ diện có thể tích lớn nhất là

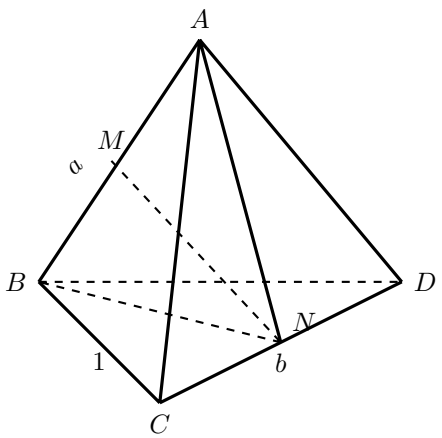
A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

B. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

D. $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải.



Áp dụng công thức tính thể tích tứ diện: $V=\dfrac{1}{6}AB.CD.\sin(AB,CD).d(AB,CD)$.

Dễ dàng chứng minh được $AB\perp CD\Rightarrow V=\dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD)$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm $AB,CD\Rightarrow MN^2=d^2(AB,CD)=\dfrac{4-a^2-b^2}{4}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}V^2&=\frac{1}{36}.a^2.b^2\frac{4-(a^2+b^2)}{4}=\frac{1}{144}.a^2.b^2.\left(4-a^2-b^2\right).\\&\le\frac{1}{144}\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4}.\left(4-a^2-b^2\right)\\&\le\frac{1}{144}\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}+4-(a^2+b^2)}{3}\right)^3=\frac{4}{243}.\end{aligned}$$

Vậy $V_{\min}=\dfrac{2}{9\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{8}{3}\\a=b\end{cases}\Rightarrow a=b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên k lần $(k>0)$ nhưng độ dài mỗi cạnh đáy giảm đi k lần thì thể tích V của nó thay đổi như thế nào?

A. V tăng lên k lần. **B**. V giảm đi k lần. **C**. V tăng lên k^2 lần. **D**. V không thay đổi.

Lời giải.

Đường cao tăng lên k lần và diện tích đáy giảm k lần thì thể tích khối chóp đều tăng $k\cdot\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{k}$ lần, tức là giảm k lần.

Chọn đáp án (B) □

Câu 81. Cho khối tứ diện có thể tích là V. Gọi V' là thể tích của khối tứ diện có các đỉnh là các trọng tâm của các mặt của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{9}$. **C**. $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{8}$. **D**. $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{27}$.

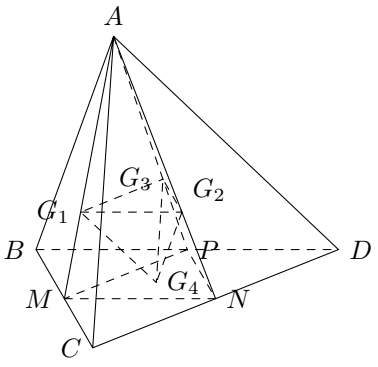
Lời giải.

Cho khối tứ diện $ABCD$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,CD,BD và G_1,G_2,G_3,G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt ABC,ACD,ABD,BCD. Khi đó, ta có

$V_{AMNP}=\dfrac{1}{4}V\Rightarrow V_{A.G_1G_2G_3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot V_{AMNP}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{4}V$.

Ta cũng có $V_{G_4.G_1G_2G_3}=\dfrac{1}{2}V_{A.G_1G_2G_3}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{4}V$.

Vậy $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{27}$.



Chọn đáp án (D) □

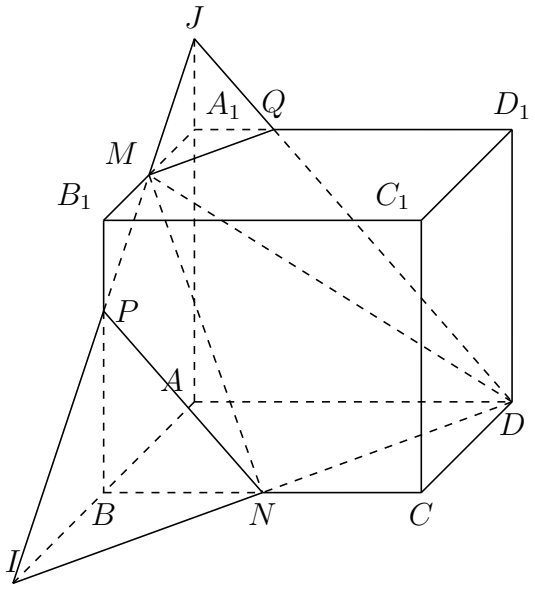
Câu 82. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm cạch A_1B_1,BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương thành hai khối đa diện. (H) là khối đa diện chứa

đỉnh A, (H_1) là khối đa diện phần còn lại. Tính $\dfrac{V_{(H_1)}}{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}$.

A. $\dfrac{89}{144}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{103}{144}$. **D.** $\dfrac{33}{89}$.

Lời giải.

Ta có $V_{(H)} = V_{I.JAD} - V_{I.BPN} - V_{J.MQA_1}$.
Để cho gọn mà không ảnh hưởng đến kết quả, ta có thể giả sử $a = 1$.
Ta có $IB = 1, IA = 2$, $PB = \dfrac{2}{3}$, $JA = \dfrac{4}{3}$,
$JA_1 = \dfrac{1}{3}, A_1Q = \dfrac{1}{4}$
Do đó $V_{I.JAD} = \dfrac{4}{9}$, $V_{I.BPN} = \dfrac{1}{18}$, $V_{J.MQA_1} = \dfrac{1}{144}$
Suy $V_{(H)} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{144} = \dfrac{55}{144}$.
Vậy $\dfrac{V_{(H_1)}}{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}} = 1 - \dfrac{55}{144} = \dfrac{89}{144}$.



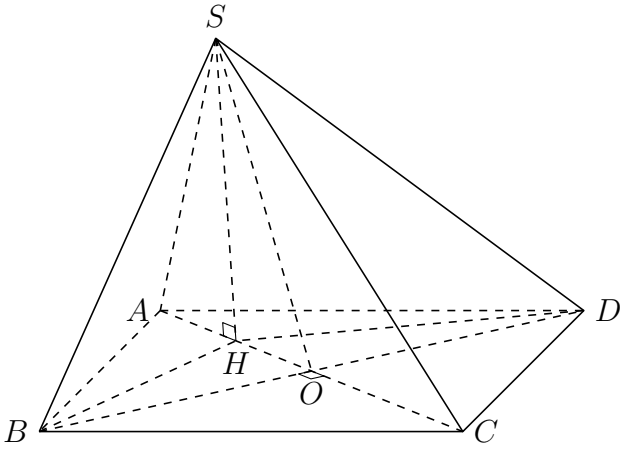
Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho chóp $S.ABCD$ cạnh $SA = x$, $(0 < x < \sqrt{3})$, các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Xác định x sao cho thể tích khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất?

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm đáy và H là chân đường cao hạ từ S xuống đáy. Khi đó $SH \perp OD$ và có $OD \perp OA$, nên $DO \perp (SAC)$. Suy ra Ta có
$V_{S.ABCD} = 2V_{SACD} = \dfrac{2}{3}OD.S_{SAC}$
Ta có $\Delta SBO = \Delta SCO \Rightarrow SO = OC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S. Do đó,
$OD = \sqrt{1 - OC^2} = \sqrt{1 - \dfrac{AC^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$.
Từ đó nhận được
$V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3x^2 - x^4}}{6}$. Vậy $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



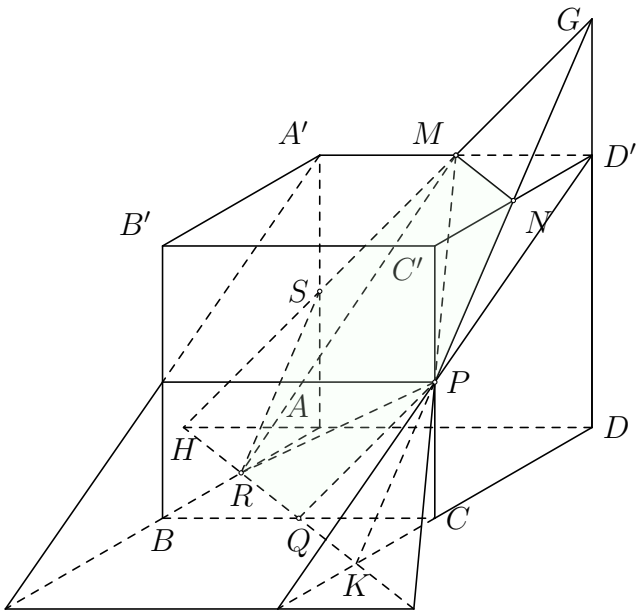
Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của AB, $A'D'$ và CC' chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Khối chứa đỉnh D có thể tích là V_1, khối chứa đỉnh B' có thể tích là V_2. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Thiết diện là đa giác $MNPQRS$.



Ta có: $KC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$;

$KD = KC + CD = \dfrac{a}{2} + a = \dfrac{3a}{2}$;

$DG = DD' + D'G = a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}$; $HD = \dfrac{3a}{2}$.

$S_{DKG} = \dfrac{1}{2}KD \cdot DG = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{9a^2}{8}$.

$V_{H.KDG} = \dfrac{1}{2}HD \cdot S_{DKG} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{9a^2}{8} = \dfrac{9a^3}{16}$.

$V_{Q.CKP} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{48}$;

$V_{G.MND'} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{48}$;

$V_{H.SRA} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{48}$.

Suy ra $V_1 = \dfrac{9a^3}{16} - \left(\dfrac{a^3}{48} + \dfrac{a^3}{48} + \dfrac{a^3}{48}\right) = \dfrac{a^3}{2}$.

$V_2 = a^3 - \dfrac{a^3}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

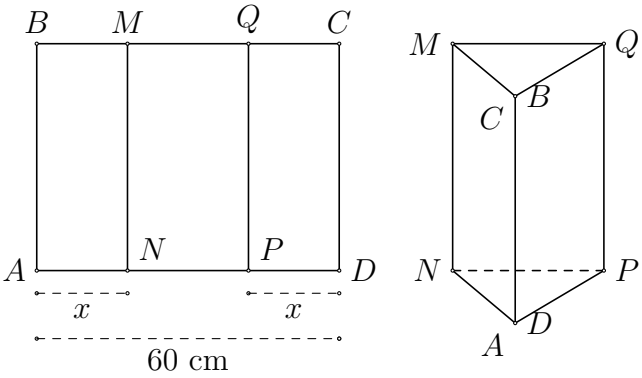
Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$.

Nhận xét: Gọi O là tâm của hình lập phương, khi đó hai khối đối xứng qua tâm O nên thể tích chúng bằng nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 85.

Cho một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60$ cm. Ta gập tấm tôn theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong sao cho BA trùng với CD (như hình vẽ bên) để được lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khối lăng trụ có thể tích lớn nhất khi x bằng bao nhiêu?



A. $x = 20$. **B**. $x = 30$.

C. $x = 45$. **D**. $x = 40$.

Lời giải.

Ta có $AN = PD = x$, $NP = 60 - 2x \Rightarrow \mathrm{p}_{\triangle DNP} = 30$.

Thể tích khối lăng trụ như hình vẽ bằng:

$V = S_{\triangle DNP} \cdot MN = MN \cdot \sqrt{(30-x)(30-x)(30-60+2x)}$

$= MN \cdot \sqrt{(30-x)^2(2x-30)}, x \in (15;30)$.

Xét hàm số $f(x) = (30-x)^2(2x-30)$.

$f'(x) = -2(30-x)(3x-60)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

Dựa vào bảng biến thiên, $\max\limits_{(15;30)} f(x) = f(20) = 1000$.

Do đó thể tích khối lăng trụ như hình vẽ lớn nhất khi $x = 20$ cm.

x	15		20		30
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	1000	↘	

Chọn đáp án A □

Câu 86. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; biết $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

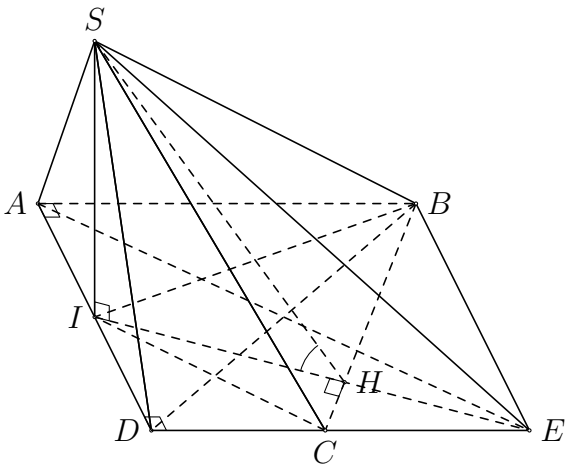
A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AD \cdot (AB + DC) = 3a^2$ và $SI = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3\sqrt{15}a}{5}$.

Gọi E là điểm đối xứng D qua $C \Rightarrow ABED$ là hình vuông.

Gọi H là giao điểm BC và IE. Ta có $IE \perp BC$ mà $BC \perp SI$ nên $BC \perp SH$.



Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ IH \perp BC \\ BC \perp SH \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((ABCD),(SBC))} = \widehat{(IH,SH)} = \widehat{SHI}$.

Ta có $KC = \dfrac{BD}{4} =$ Xét $\triangle IDE \backsim \triangle CHE \Rightarrow \dfrac{ID}{CH} = \dfrac{IE}{CE} \Rightarrow CH = \dfrac{ID \cdot CE}{IE} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Xét $\triangle ICH$, $IH = \sqrt{IC^2 - CH^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

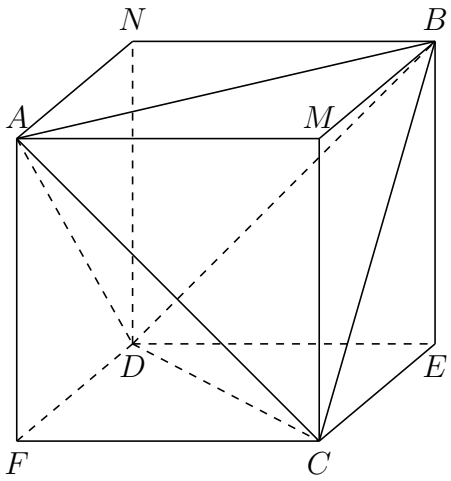
Trong tam giác vuông SIH, $\tan \widehat{SHI} = \dfrac{SI}{IH} = \dfrac{3\sqrt{15}a}{5} \div \dfrac{3a\sqrt{5}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHI} = 60°$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{13}$. Tính thể tích tứ diện đã cho.

A. $5\sqrt{26}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{26}}{6}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.



Dựng hình hộp chữ nhật $AMBN.FCED$ sao cho các cạnh của tứ diện $ABCD$ là đường chéo của các mặt của hình hộp. Dễ thấy thể tích của tứ diện bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của hình hộp. Đặt $AM=a, AN=b, AF=c$, theo giả thiết ta có hệ $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b^2+c^2=13 \\ c^2+a^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$. Vậy thể tích của tứ diện bằng $\frac{abc}{3}=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $SA=SB, SC=SD$, (SAB) $\perp$ (SCD). Tổng diện tích hai tam giác SAB, SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4a^3}{25}$. **B.** $\frac{4a^3}{15}$. **C.** $\frac{a^3}{5}$. **D.** $\frac{a^3}{15}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

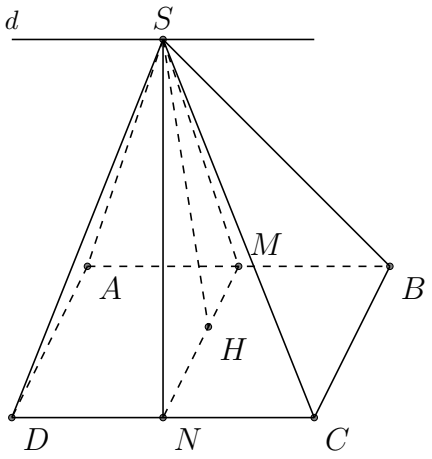
Suy ra SM, SN là đường cao của tam giác SAB, SCD.

Ta có $S_{\triangle SAB}+S_{\triangle SCD}=\frac{1}{2}(SM.AB+SN.CD)=\frac{7a^2}{10}$.

Suy ra $SN+SM=\frac{7a}{5}$.

Kẻ $SH \perp MN$. Khi đó $SH \perp (ABCD)$.

Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cắt nhau theo giao tuyến $d \parallel AB \parallel CD$ nên $SN \perp d$.



Tam giác SMN vuông tại S nên $SM^2+SN^2=MN^2$.

mà $SN+SM=\frac{7a}{5}$ nên suy ra $SM=\frac{3a}{5}, SN=\frac{4a}{5}$.

Suy ra $SH=\frac{12a}{25}$.

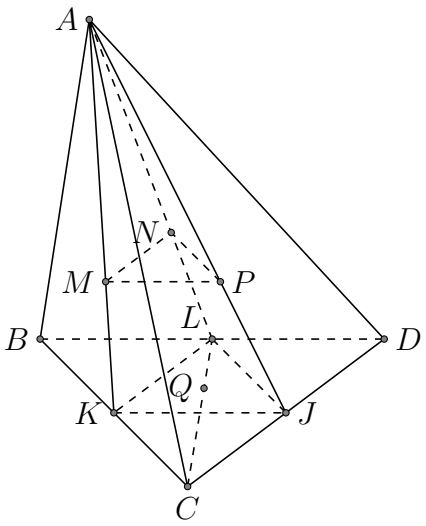
$V=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{4a^3}{25}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích $9\sqrt{3}$ cm^3. M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tâm các mặt của khối tứ diện $ABCD$. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **C.** $3\sqrt{3}$ cm^3. **D.** $\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải.



Gọi J, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, BC, BD.

Ta có: $S_{ABC} = S_{BKL} + S_{DLJ} + S_{CKJ} + S_{KLJ} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} + \dfrac{1}{4}S_{ABC} + \dfrac{1}{4}S_{ABC} + S_{KLJ}$ nên $S_{JKL} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$.

Ta có: $\dfrac{V_{AJKL}}{V_{ABCD}} = \dfrac{d\,(A;(ABC)) \cdot S_{JKL}}{d\,(A;(ABC)) \cdot S_{ABC}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow V_{AJKL} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ (cm^3).

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các mặt (SBC), (SBD), (SCD), (ABC).

Khi đó $(MNP) \parallel (JKL)$. Do đó: $\dfrac{d\,(A;(JKL))}{d\,(M;(JKL))} = \dfrac{AK}{AM} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{d\,(Q;(MNP))}{d\,(A;(JKL))} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có: $\dfrac{V_{MNPQ}}{V_{AJKL}} = \dfrac{d\,(Q;(MNP))}{d\,(A;(JKL))} \cdot \dfrac{S_{MNP}}{S_{JKL}} = \dfrac{d\,(Q;(MNP))}{d\,(A;(JKL))} \cdot \dfrac{MN}{KL} \cdot \dfrac{NP}{LJ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{27}$.

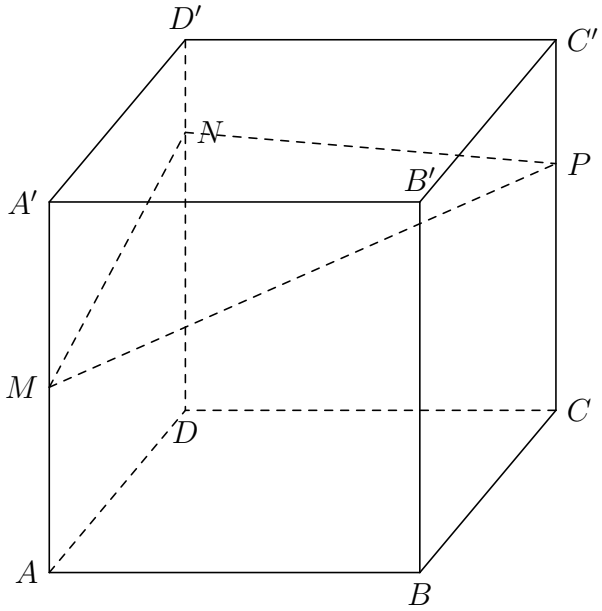
Do đó: $V_{MNPQ} = \dfrac{4}{27} \cdot V_{AJKL} = \dfrac{4}{27} \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 90.

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA, DN = 3ND', CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng

A. $\dfrac{7385}{18}$. **B.** $\dfrac{5275}{12}$. **C.** $\dfrac{8440}{9}$. **D.** $\dfrac{5275}{6}$.



Lời giải.

Ta có:

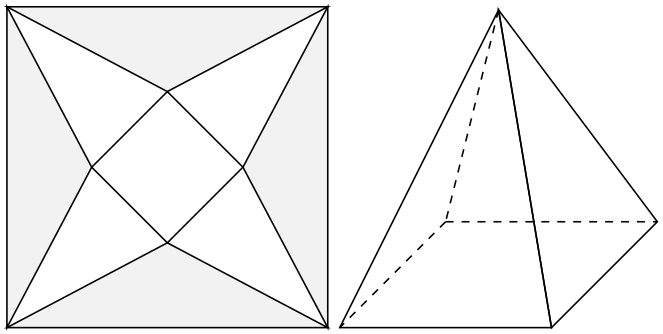
$\dfrac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A'M}{AA'} + \dfrac{C'P}{CC'}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \dfrac{5}{12}.V_{ABCD.A'D'C'B'} = \dfrac{5275}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 91.

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1 m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x m. Tìm giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

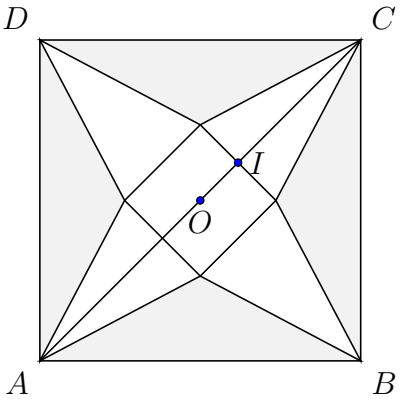
Ta có: $x+2CI=AC \Rightarrow CI=\dfrac{AC-x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-x}{2}$.

Đường cao $CO=\sqrt{CI^2-OI^2}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{2}x}{2}}$.

Khi đó, thể tích của khối chóp là

$$V=\frac{1}{3}\cdot CO\cdot x^2 \Rightarrow V^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\sqrt{2}x}{2}\cdot x^4$$

Đặt $f(x)=x^4(1-\sqrt{2}x)$, với $x\in(0;1)$.



Ta có: $f'(x)=x^3\left(4-5\sqrt{2}x\right)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

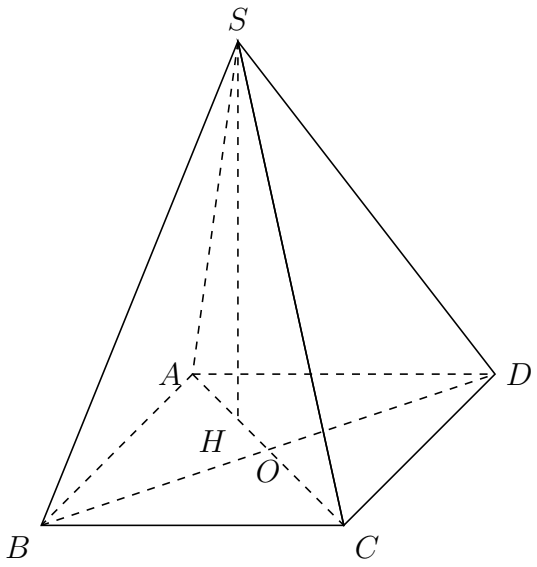
Lập bảng biến thiên suy ra $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ thỏa bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=x$, còn tất cả các cạnh khác có độ dài bằng 2. Tính thể tích V lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=1$. **B.** $V=\dfrac{1}{2}$. **C.** $V=3$. **D.** $V=2$.

Lời giải.



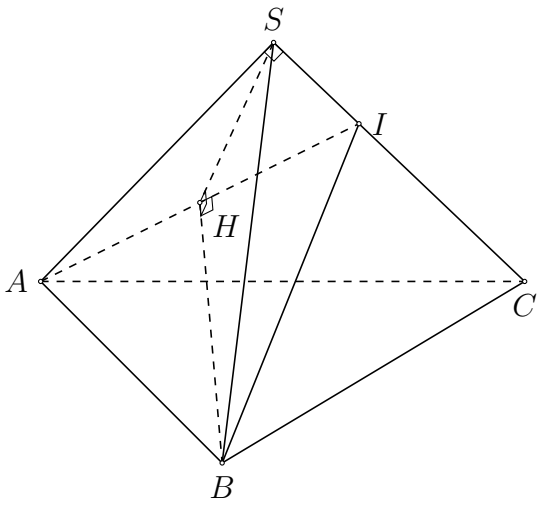
Ta có: $\Delta BDC = \Delta BDS = \Delta BDA \Rightarrow OC = OS = OA$. Suy ra ΔSAC vuông tại S.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD) thì $H \in AC$.
Ta có $AC = \sqrt{x^2+4}, OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = \dfrac{\sqrt{12-x^2}}{2}, SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.
$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+4}.\sqrt{12-x^2}$.
$V = \dfrac{1}{3}x.\sqrt{12-x^2} \le \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{x^2+12-x^2}{2}\right) = 2$
Vậy $\max V = 2$ khi $x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60°, \widehat{ASC} = 90°, SA = SB = a, SC = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là điểm nằm trên đoạn SC sao cho $SI = a$.
Gọi H là trung điểm của AI.Mà tam giác SAI vuông tại S, nên H cách đều S, A, I.
Hơn nữa $BA = BS = BI = a$, nên $BH \perp (SAI)$.
Ta có $BH = \sqrt{BI^2 - HI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$V_{B.SAI} = \dfrac{1}{3}\cdot BH \cdot S_{ASI} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
$V_{S.ABC} = 3\cdot V_{S.ABI} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.



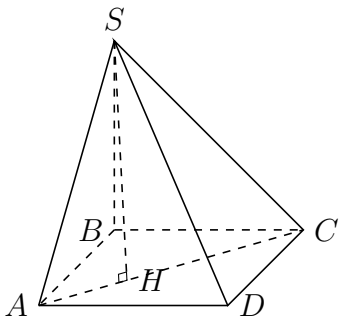
Chọn đáp án (B) □

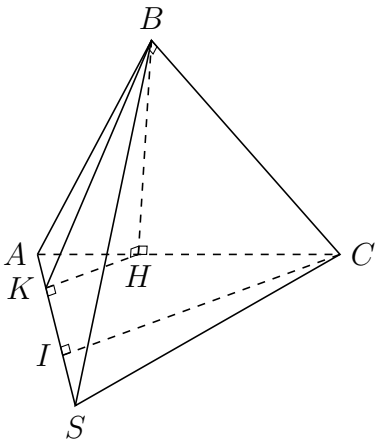
Câu 94. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3\,\text{cm}, BC = 4\,\text{cm}, SC = 5\,\text{cm}$. Tam giác SAC nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Các mặt (SAB) và (SAC) tạo với nhau một góc α sao cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{29}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $16\,\text{cm}^3$. **B**. $15\sqrt{29}\,\text{cm}^3$. **C**. $20\,\text{cm}^3$. **D**. $18\sqrt{5}\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.BAC} = 2V_{B.SAC}$.
Vì $(BAC) \perp (SAC)$, nên từ B kẻ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.
Ta dễ dàng tính được $BH = \dfrac{12}{5}$.
Từ H kẻ $HK \perp SA$
$\Rightarrow \cos\widehat{BKH} = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$
$\Rightarrow \tan\widehat{BKH} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{18\sqrt{5}}{25}$.
Ta có $\triangle AKH \sim \triangle AIC$
$\Rightarrow \dfrac{IC}{KH} = \dfrac{AC}{AH} \Rightarrow IC = 2\sqrt{5}$.
Suy ra
$S_{\triangle SAC} = \dfrac{1}{2}CI \cdot AC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{12}{5} \cdot 10 = 8$. Vậy $V_{S.ABCD} = 2 \cdot 8 = 16\,\text{cm}^3$.



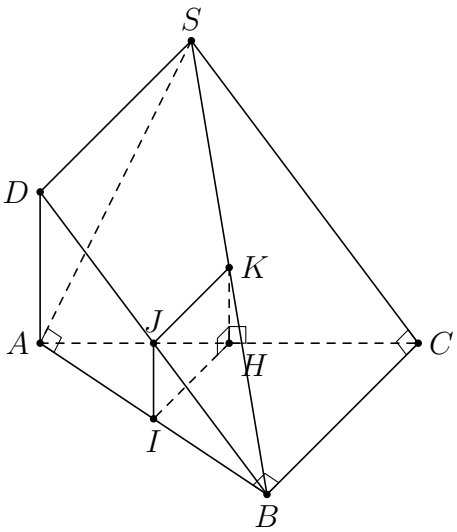


Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SBC) bằng 30°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B**. $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{9}$. **C**. $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **D**. $V = \dfrac{8\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi I, H, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, SB.
Vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên $HA = HB = HC$.
Vì $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ lần lượt vuông tại A, C nên $KA = KB = KC\ (= KS)$.
Do đó HK là trục vuông góc qua tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, suy ra $HK \perp (ABC)$.
Dựng hình chữ nhật $SCBD$, gọi J là trung điểm của BD.
Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow (ABD) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BD.

Do đó $(AB,(SBC))=(AB,BD)=\widehat{ABD}=30^\circ$.

Ta có $JK\parallel SD\parallel BC\parallel IH$ và $JK=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{1}{2}BC=IH$ nên $IHKJ$ là hình bình hành, suy ra $IJ\parallel HK$, mà $HK\perp(ABC)$ nên $IJ\perp(ABC)\Rightarrow IJ\perp IB$.

Xét $\triangle IJB$ vuông tại I ta có $IJ=IB\tan 30^\circ=a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(S,(ABC))=2\mathrm{d}\,(K,(ABC))=2HK=2IJ=2a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}\,(S,(ABC))\,S_{ABC}=\dfrac{1}{3}2a\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{4a^2}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Hai mặt phẳng (SDB) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp đó bằng $2a^3\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB?

A. $d=\dfrac{16a}{\sqrt{15}}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $d=\dfrac{8a}{3\sqrt{17}}$. **D.** $d=\dfrac{3a}{\sqrt{17}}$.

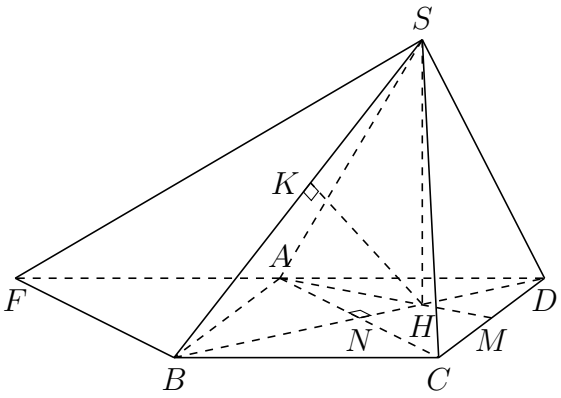
Lời giải.

Gọi $H=AM\cap BD$. Do $(SBD),(SAM)$ cùng vuông góc với đáy nên $SH\perp(ABCD)$.

Tam giác ACD đều có AM,DN là các đường trung tuyến nên H là trọng tâm của tam giác ACD

$\Rightarrow HD=\dfrac{2}{3}ND=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}2a\sqrt{3}=2a$.

$BH=4a; SH=\dfrac{3V}{S_{ABCD}}=\dfrac{3\cdot 2a^3\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2a\sqrt{3})^2}=a$



Dựng hình bình hành $ACBF$ ta có:

$\circ\ d\,(SB,AC)=d\,(AC,(SBF))=d\,(N,(SBF))$

$\circ\ \dfrac{d\,(N,(SBF))}{d\,(H,(SBF))}=\dfrac{NB}{HB}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow d\,(N,(SBF))=\dfrac{3}{4}\cdot d\,(H,(SBF))$

Kẻ $HK\perp SB$ do $FB\perp BH, FB\perp SH$ nên $FB\perp HK\Rightarrow HK\perp(SBF)$

$\Rightarrow HK=d\,(H,(SBF))$.

$\circ\ \dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HB^2}\Rightarrow HK=\dfrac{SH\cdot HB}{\sqrt{SH^2+HB^2}}=\dfrac{a\cdot 4a}{\sqrt{a^2+(4a)^2}}=\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.

$\Rightarrow d(SB,AC)=\dfrac{3}{4}HK=\dfrac{3a}{\sqrt{17}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Cho ba tia không đồng phẳng Ox,Oy,Oz. Xét tam giác ABC có các đỉnh A trên tia Ox, B trên tia Oy, C trên tia Oz sao cho tam giác ABC chứa trong nó một điểm M cố định. Thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

A. OM vuông góc với mặt phẳng (ABC).

B. $S_{\triangle MBC}=S_{\triangle MCA}=S_{\triangle MAB}$ (với kí hiệu $S_{\triangle ABC}$ là diện tích tam giác ABC).

C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. $V_{O.MBC}=2V_{O.MCA}$ (với kí hiệu $V_{O.ABC}$ là thể tích khối chóp $O.ABC$).

Lời giải.

Gọi giao điểm của MA với BC tại D. Các điểm E, F tương tự.

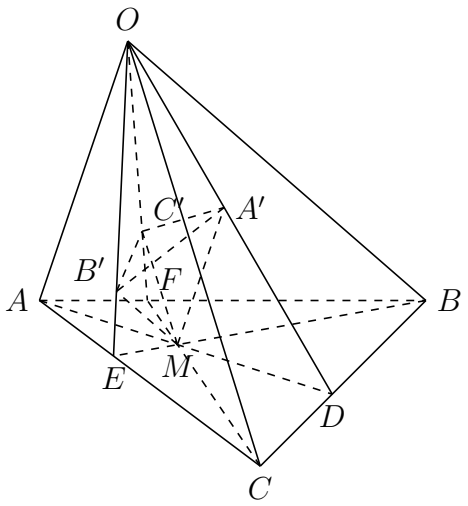
Qua M kẻ các đường thẳng song song với OA, OB, OC cắt các mặt phẳng $(OBC), (OAC), (OAB)$ lần lượt tại A', B', C'. Do quan hệ song song nên ta có:

$$\frac{V_{M.A'B'C'}}{V_{OABC}} = \frac{MA'}{OA} \cdot \frac{MB'}{OB} \cdot \frac{MC'}{OC} = \frac{DM}{DA} \cdot \frac{EM}{EB} \cdot \frac{FN}{FC}.$$

Mặt khác:

$$\frac{DM}{DA} + \frac{EM}{EB} + \frac{FM}{FC} = \frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}} = 1$$

Do M cố định và các các mặt phẳng $(Ox, Oy); (Oy, Oz); (Oz, Ox)$ cố định nên A', B', C' cố định, suy ra $V_{M.A'B'C'}$ không đổi.



Từ đó ta có $V_{O.ABC}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{DM}{DA} \cdot \frac{EM}{EB} \cdot \frac{FN}{FC}$ đạt giá trị lớn nhất.

Áp dụng BĐT Côsi ta suy ra $V_{O.ABC}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $S_{\triangle MBC} = S_{\triangle MCA} = S_{\triangle MAB}$ tức M là trọng tâm tam giác $\triangle ABC$.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích V của lăng trụ bằng

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $BC \perp (A'AI) \Rightarrow (A'BC) \perp (A'AI)$ theo giao tuyến $A'I$, kẻ $AH \perp A'I$ tại H ta có:

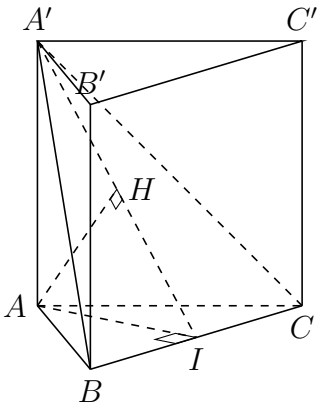
$$AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}; AI = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Tam giác $A'AI$ vuông tại A nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow AA' = a\sqrt{3}; S_{ABC} = (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

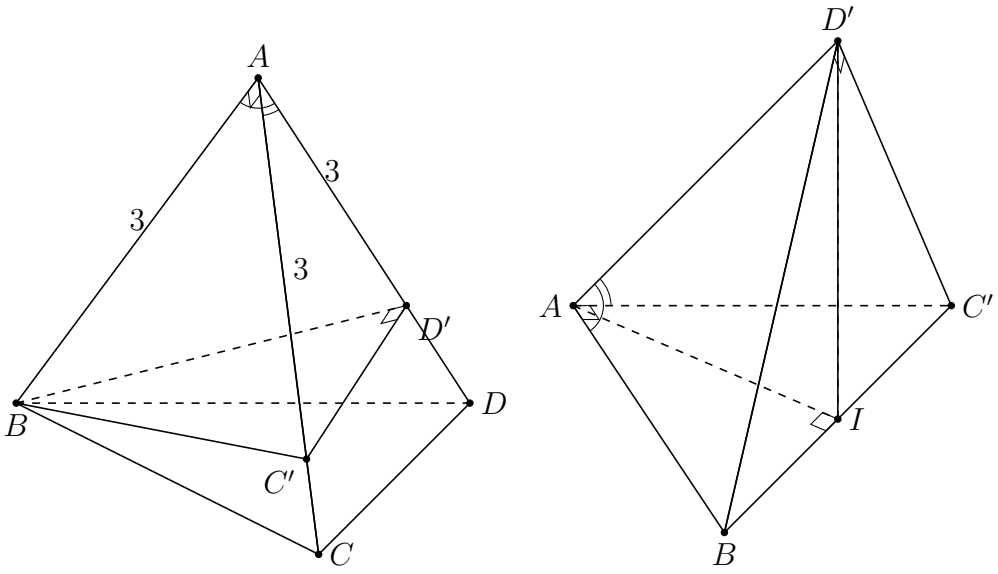


Chọn đáp án B □

Câu 99. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3$, $AC = 6$, $AD = 9$, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 60°$, $\widehat{BAC} = 90°$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{27\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{27\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Lấy trên hai cạnh AC, AD hai điểm C' và D' sao cho $AC' = AD' = 3$.

Xét tứ diện $ABC'D'$ có:

$BC' = 3\sqrt{2}$; $AI = \dfrac{1}{2}BC' = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; $AD' = 3$.

Các tam giác $AC'D'$ và ABD' là những tam giác đều.

$C'D' = 3$; $BD' = 3$; $BC' = 3\sqrt{2}$.

Tam giác $BC'D'$ vuông tại D' suy ra $ID' = \dfrac{1}{2}BC' = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác $AD'I$ có:

$$\cos\widehat{AID'} = \frac{AI^2 + ID'^2 - AD'^2}{2AI \cdot ID'} = \frac{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3^2}{2 \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

Suy ra tam giác $AD'I$ vuông tại I.

$\Rightarrow V_{D'.ABC'} = \dfrac{1}{3}D'I \cdot S_{\triangle ABC'} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Mà $\dfrac{V_{ABC'D'}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AC'}{AC} \cdot \dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{6}$

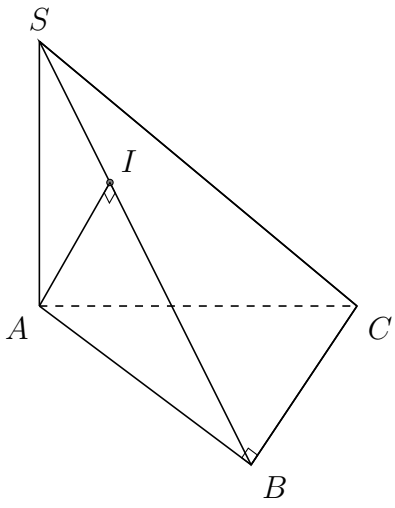
$\Rightarrow V_{ABCD} = 6 \cdot V_{ABC'D'} = 6 \cdot \dfrac{9\sqrt{2}}{4} = \dfrac{27\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 30°$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC), biết khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

A. $d = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$. **B.** $d = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Ta có $AB = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AC = \dfrac{2AB}{3} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \times BC = \dfrac{a^2}{2\sqrt{3}}$.

Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA \perp (ABC)$. Nên ta được $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \times SA \Leftrightarrow \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a^2}{2\sqrt{3}} \times SA \Leftrightarrow SA = \dfrac{a}{2}$.

Lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$. Kẻ $AI \perp SB$ Ta được $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Leftrightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Mà $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AI$. Lại có $AI \perp SB$ nên ta được $AI \perp (SBC)$. Tức khoảng cách $d = AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. A	5. B	6. C	7. D	8. D	9. A	10. C
11. A	12. B	13. B	14. B	15. A	16. C	17. D	18. B	19. B	20. C
21. B	22. B	23. C	24. D	25. A	26. C	27. C	28. B	29. B	30. A
31. B	32. A	33. B	34. A	35. C	36. B	37. B	38. A	39. A	40. D
41. D	42. D	43. A	44. A	45. C	46. A	47. D	48. C	49. D	50. C
51. A	52. C	53. B	54. A	55. A	56. C	57. C	58. C	59. A	60. D
61. A	62. C	63. A	64. D	65. D	66. B	67. C	68. A	69. A	70. A
71. D	72. D	73. B	74. D	75. C	76. A	77. C	78. A	79. C	80. B
81. D	82. A	83. A	84. C	85. A	86. B	87. D	88. A	89. B	90. D
91. C	92. D	93. B	94. A	95. B	96. D	97. B	98. B	99. B	100. C

5 Bài toán thực tế

Câu 1. Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật, có đáy là hình vuông, sao cho thể tích của khối hộp được tạo thành 8 dm^3 và diện tích toàn phần nhỏ nhất. Tìm độ dài cạnh đáy của mỗi hộp được thiết kế.

A. $2\sqrt[3]{2}$ dm. **B.** 2 dm. **C.** 4 dm. **D.** $2\sqrt{2}$ dm.

Lời giải.

Giả sử cạnh đáy bằng x, chiều cao y $(x > 0, y > 0)$. Theo giả thiết $x^2y = 8$, diện tích toàn phần $S = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + \dfrac{32}{x} = 2x^2 + \dfrac{16}{x} + \dfrac{16}{x}$. Theo BĐT Cauchy cho 3 số thực dương $S \geq 3\sqrt[3]{512} = 24$.

Vậy $S_{\min} = 24$ khi $2x^2 = \dfrac{16}{x} \iff x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Một người thợ thủ công cần làm một cái thùng hình hộp đứng không nắp đáy là hình vuông có thể tích 100 cm^3. Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người đó cần thiết kế sao cho tổng S của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Tìm S.

A. $S = 30\sqrt[3]{40}$. **B.** $S = 40\sqrt[3]{40}$. **C.** $S = 10\sqrt[3]{40}$. **D.** $S = 20\sqrt[3]{40}$.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy, cạnh bên của hình hộp đứng lần lượt là x và y $(x, y > 0)$.

Ta có $V = 100 \Rightarrow x^2y = 100 \Rightarrow y = \dfrac{100}{x^2}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} S &= 4xy + x^2 = 4x \cdot \frac{100}{x^2} + x^2 = \frac{400}{x} + x^2 = \frac{200}{x} + \frac{200}{x} + x^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{200}{x} \cdot \frac{200}{x} \cdot x^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 10^3} = 30\sqrt[3]{40}. \end{aligned}$$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $30\sqrt[3]{40}$ khi $\dfrac{200}{x} = x^2 \Leftrightarrow x^3 = 200 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{200}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 220500 cm^3 nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.

A. 2220 cm^2. **B.** 1880 cm^2. **C.** 2100 cm^2. **D.** 2200 cm^2.

Lời giải.

Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá lần lượt là a, b, c. Ta có $c = 3a$ và $b \geq a$.

Thể tích của bể cá là $V = abc = 3a^2b = 220500$ cm^3 $\Leftrightarrow b = \dfrac{73500}{a^2}$.

Vì $a \leq b$ và $a \leq c$ nên $a^3 \leq 220500 \Rightarrow a < 61$.

Nguyên vật liệu tiết kiệm nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

$S_{tp} = 6a^2 + \dfrac{514500}{a}$ và $S'_{tp} = 12a - \dfrac{514500}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = 35$.

Bảng biến thiên của S_{tp} là

a	0		35		61
S'_{tp}		$-$	0	$+$	
S_{tp}		↘		↗	

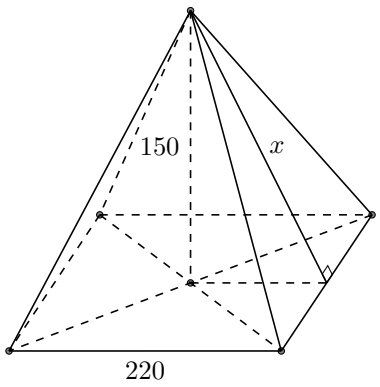
Do đó diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $a = 35$.
Diện tích đáy $S = ab = \dfrac{73500}{a} = 2100$ cm^2.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Một kim tự tháp Ai Cập được xây dựng khoảng 2500 năm trước công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 150 mét, cạnh đáy dài 220 mét. Hỏi diện tích xung quanh của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu? (Diện tích xung quanh của hình chóp là tổng diện tích của các mặt bên).

A. $2200\sqrt{346}\,\text{m}^2$. **B.** $1100\sqrt{346}\,\text{m}^2$.
C. $\left(4400\sqrt{346} + 48400\right)\,\text{m}^2$. **D.** $4400\sqrt{346}\,\text{m}^2$.

Lời giải.

Gọi x là chiều cao mặt bên của kim tự tháp.
$x = \sqrt{150^2 + 110^2} = 10\sqrt{346}$ m.
Diện tích một mặt bên của kim tự tháp:
$S = \dfrac{1}{2} \cdot 220 \cdot 10\sqrt{346} = 1100\sqrt{346}$ m^2.
Diện tích xung quanh của kim tự tháp:
$S_{xq} = 4S = 4400\sqrt{346}$ m^2.



Chọn đáp án D □

Câu 5. Một công ty sữa cần sản xuất các hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, chứa được thể tích thực là 180 ml. Chiều cao của hình hộp bằng bao nhiêu để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất?

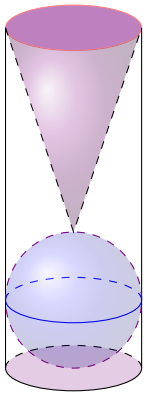
A. $\sqrt[3]{180^2}$cm. **B.** $\sqrt[3]{360}$cm. **C.** $\sqrt[3]{180}$cm. **D.** $\sqrt[3]{720}$cm.

Lời giải.

Gọi chiều cao hình hộp là h, độ dài cạnh đáy là a. Khi đó thể tích của khối hộp là $V = a^2 \cdot h = (a \cdot h) \cdot a = 180$. Khi đó để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất thì diện tích hình chữ nhật $a \cdot h$ phải lớn nhất. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất nên $h = a$.
Vậy $V = a^2 \cdot h \Rightarrow 180 = h^3 \Rightarrow h = \sqrt[3]{180}$.
Chọn đáp án C □

Câu 6.

Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua về dày của lớp vỏ thủy tinh).



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính cầu, V là thể tích nước ban đầu, V_1 là thể tích nước còn lại, V_2 là thể tích nước bị khối cầu và khối nón chiếm chỗ.

$V = \pi \cdot R \cdot 6R = 6\pi \cdot R^3$; $V_2 = V_c + V_n = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

$V_1 = V - V_2 = \frac{10 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Một hồ bơi hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh bằng 50 m. Lượng nước trong hồ cao 1,5 m. Thể tích nước trong hồ là

A. 1875 m^3. **B.** 2500 m^3. **C.** 1250 m^3. **D.** 3750 m^3.

Lời giải.

Thể tích nước $V = 1{,}5.50^2 = 3750$ m^3.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

A. 36 triệu đồng. **B.** 75 triệu đồng. **C.** 46 triệu đồng. **D.** 51 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi 3 kích thước của hình hộp là x, $2x$ và y.

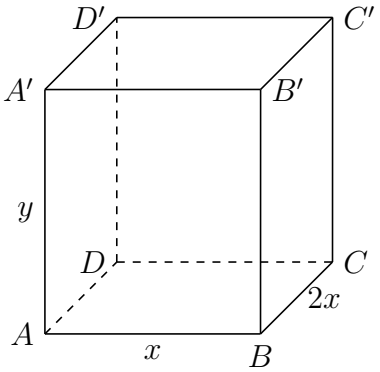
Có thể tích $2x^2y = 200 \Rightarrow y = \frac{100}{x^2}$.

Diện tích cần tính là

$S = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + \frac{600}{x} = 2\left(x^2 + \frac{150}{x} + \frac{150}{x}\right)$

$\geqslant 2 \cdot 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{150}{x} \cdot \frac{150}{x}} = 6\sqrt[3]{150^2}$.

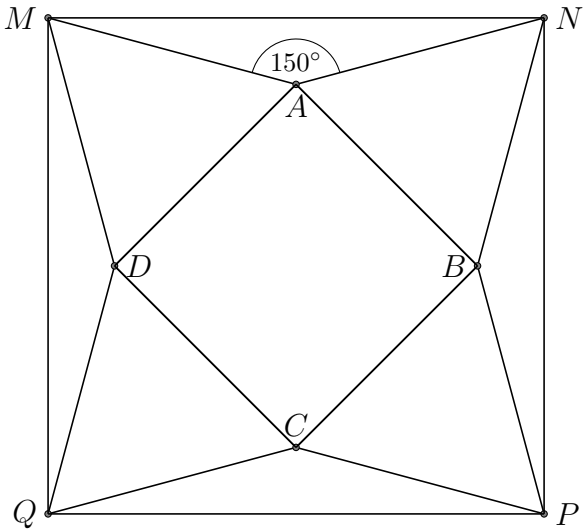
Chi phí xây bể là $T = 300S = 1800\sqrt[3]{150^2} = 50815,9...$ (nghìn đồng) $\approx$ 51 triệu đồng.



Chọn đáp án D □

Câu 9.

Để làm một hình chóp tứ giác đều từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho bốn đỉnh M, N, P, Q trùng nhau (hình vẽ bên). Biết rằng các góc ở đỉnh của mỗi tam giác cân là 150°. Tính thể tích V của khối chóp đều tạo thành.



A. $V=\dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{2}{3}$.

C. $V=\dfrac{52+30\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Xét tam giác AMN, ta có

$$\begin{aligned}
&\cos\widehat{MAN}=\frac{AM^2+AN^2-MN^2}{2\cdot AM\cdot AN}=\frac{2AM^2-MN^2}{2AM^2}\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2AM^2-MN^2}{2AM^2}\\
\Leftrightarrow\ &AM^2=\frac{MN^2}{\sqrt{3}+2}=2\\
\Leftrightarrow\ &AM=\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Mặt khác: $2\cdot\widehat{DAM}+150^\circ+90^\circ=360^\circ\Rightarrow\widehat{DAM}=60^\circ\Rightarrow\Delta ADM,\Delta ABN,\Delta BCP,\Delta CDQ$ là các tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $\sqrt{2}$ là $V=\dfrac{(\sqrt{2})^3\cdot\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2}{3}$.

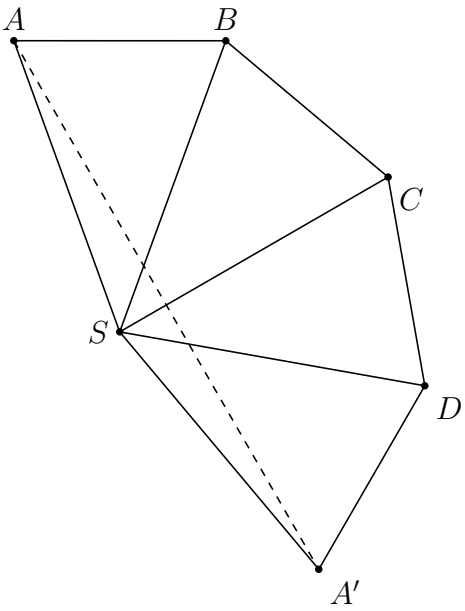
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Có một mô hình kim tự tháp là một chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 6cm; cạnh đáy bằng 4cm được đặt trên bàn trưng bày (đáy nằm trên mặt bàn). Một chú kiến tinh nghịch đang ở một đỉnh của đáy và có ý định khám phá một vòng quanh các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất của chú kiến (nếu kết quả lẻ thì làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A. 12,25cm. **B.** 11,73cm. **C.** 10cm. **D.** 16cm.

Lời giải.

Giả sử chú kiến đang ở vị trí đỉnh A. Cắt khối chóp theo cạnh SA rồi trải ra trên mặt phẳng ta được hình vẽ bên.



Các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA' cân và bằng nhau, có góc ở đỉnh S là φ thỏa $\cos\varphi = \dfrac{6^2+6^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 6} = \dfrac{7}{9} \Rightarrow \varphi < \dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $\widehat{A'SA} = 4\varphi < \pi$. Do đó đường đi ngắn nhất của chú kiến thỏa yêu cầu là đoạn thẳng nối A và A'. Ta có

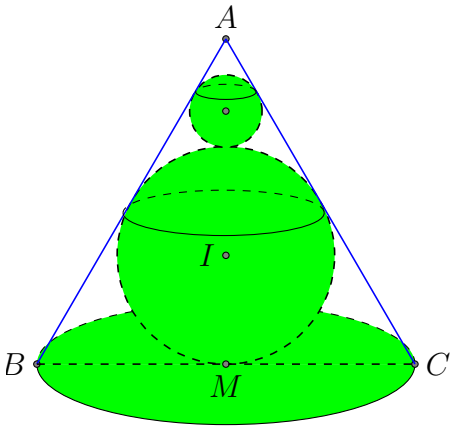
$\cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 = 2\left(2\cos^2\varphi - 1\right)^2 - 1 = -\dfrac{5983}{6561}$.

Do đó $A'A = \sqrt{6^2+6^2-2\cdot 6\cdot 6\cdot\cos 4\varphi} \approx 11{,}37(\text{cm})$.

Chọn đáp án B □

Câu 11.

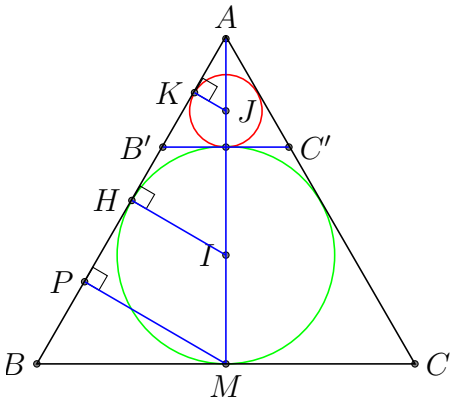
Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một mặt nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\beta = 60^\circ$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho 2 mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón. Quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của mặt nón. Cho biết chiều cao của mặt nón bằng 9 cm. Bỏ qua bề dày của những lớp vỏ thủy tinh, hãy tính tổng thể tích của hai khối cầu.



A. $\dfrac{25}{3}\pi$ cm^3. **B.** $\dfrac{112}{3}\pi$ cm^3. **C.** $\dfrac{40}{3}\pi$ cm^3. **D.** $\dfrac{10}{3}\pi$ cm^3.

Lời giải.

Cắt món đồ chơi đó bằng mặt phẳng đứng đi qua trục đối xứng, ta có hình vẽ: Gọi P, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, I, J trên AB.



Vì $\widehat{BAC} = 2\beta = 60^\circ, AM = 9$ cm.

$\Rightarrow \begin{cases} BM = MC = 3\sqrt{3} \\ AB = AC = 6\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Vì IH là bán kính mặt cầu nội tiếp tam giác đều ABC nên $IH = \dfrac{AM}{3} = 3$.

Gọi $B'C'$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Vì $\triangle ABC$ đều nên dẫn đến $\triangle AB'C'$ đều. Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều $AB'C'$ là $IK = \dfrac{AM}{9} = 1$.

Vậy tổng thể tích là: $V_1 + V_2 = \dfrac{4}{3}\pi IH^3 + \dfrac{4}{3}\pi IK^3 = \dfrac{40\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/m^2. Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là:

A. 11 triệu đồng. **B**. 13 triệu đồng. **C**. 15 triệu đồng. **D**. 17 triệu đồng.

.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của đáy bể là x (m) ($x > 0$). Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ (m) và độ sâu của bể là $\dfrac{250}{3x^2}$ (m).

Diện tích cần xây chính là diện tích của 1 mặt đáy cộng diện tích của 4 mặt bên. Tổng diện tích đó là:

$$f(x) = 2x^2 + 2\left(2x \cdot \frac{250}{3x^2} + x \cdot \frac{250}{3x^2}\right) \text{ (m}^2\text{)}$$

Giá thuê nhân công nhỏ nhất khi tổng diện tích nhỏ nhất. Xét hàm:

$$f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}, x > 0$$

Khảo sát hàm này trên $(0; +\infty)$ ta có $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = 150$, đạt được khi và chỉ khi $x = 5$. Vậy giá thuê nhân công khi đó là $150.100000 = 15.000.000$ (đồng).

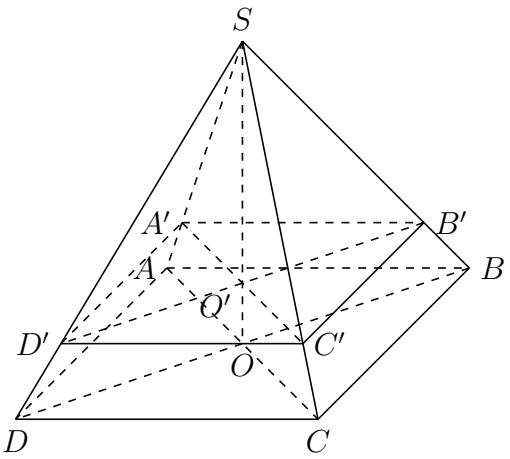
Chọn đáp án C □

Câu 13. Một viên đá có hình dạng là khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng a. Người ta cắt khối đá đó bởi mặt phẳng song song với đáy của khối chóp để chia khối đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích của thiết diện khối đá bị cắt bởi mặt phẳng nói trên. (Giả thiết rằng tổng thể tích của hai khối đá sau vẫn bằng thể tích của khối đá ban đầu).

A. $\dfrac{2a^3}{\sqrt{3}}$. **B**. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **C**. $\dfrac{a^2}{4}$. **D**. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải.

Giả sử viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và mặt phẳng mà ta cắt viên đá là $A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$.



Đặt $k = \dfrac{SO'}{SO}$, khi đó ta có

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \dfrac{SO'}{SO}.\dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^3$

Từ đó suy ra $k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$\dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^2 \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Khi xây nhà, anh Tiến cần xây một bể đựng nước mưa có thể tích $V = 6$ m^3 dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp ba lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép, xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 1.000.000 đồng/m^2 và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng 2/9 diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà anh Tiến phải trả (làm tròn đến hàng trăm nghìn).

A. 22.000.000 đồng. **B**. 20.970.000 đồng. **C**. 20.965.000 đồng. **D**. 21.000.000 đồng.

Lời giải.

Gọi $3x, x$ (m) lần lượt là chiều dài và chiều rộng của đáy bể ($x > 0$).
Gọi y (m) là chiều cao của bể ($y > 0$).
Thể tích bể nước là $V = x \times 3x \times y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x^2}$ (m^3).
Diện tích toàn phần của bể nước là

$$S_{tp} = 3xy + 3xy + xy + xy + 3x^2 + 3x^2 - \frac{2}{9} \times 3x^2 = 8xy + \frac{16}{3}x^2 = \frac{16}{x} + \frac{16}{3}x^2 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$= \frac{8}{x} + \frac{8}{x} + \frac{16}{3}x^2 \Rightarrow S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x} \times \frac{8}{x} \times \frac{16}{3} \times x^2} = 24\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \text{ (m}^2\text{)}.$$

(dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ (m))

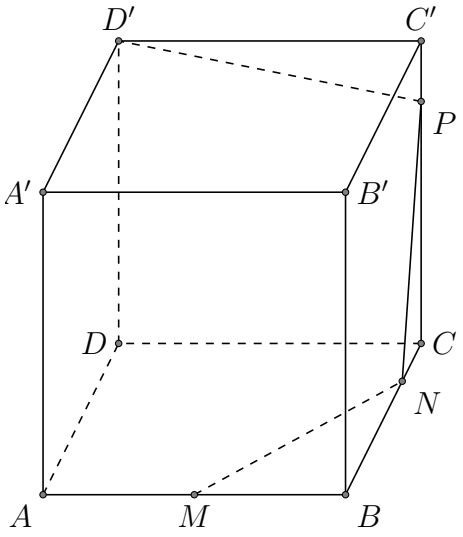
Vậy chi phí thấp nhất để xây bể là $P = 24\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}.1000.000 \approx 20.965.000$ đồng.

Chọn đáp án C □

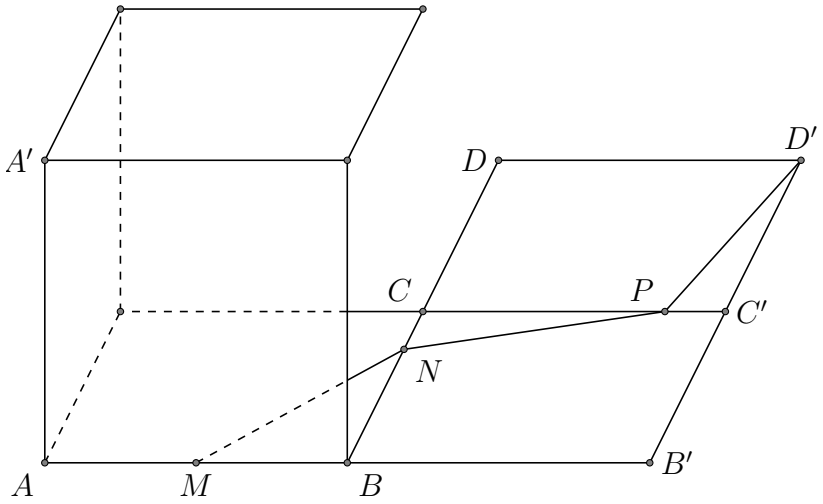
Câu 15.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Một con kiến đi từ điểm M thẳng tới điểm N thuộc cạnh BC, từ điểm N đi thẳng tới điểm P thuộc cạnh CC', từ điểm P đi thẳng tới điểm D' (*điểm N, P thay đổi tùy theo hướng đi của con kiến*). Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ M đến D' là

A. $\dfrac{5}{2}$. **B**. $\sqrt{2}+1$. **C**. $\dfrac{7}{2}$. **D**. $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$.



Lời giải.



Dựa vào hình vẽ, ta có thể thấy đường đi của con kiến là ngắn nhất khi M, N, P, D' thẳng hàng. Do đó, khoảng cách ngắn nhất là

$$MD' = \sqrt{MB'^2 + B'D'^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}.$$

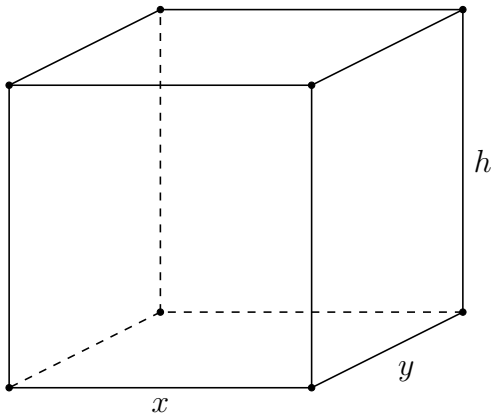
Chọn đáp án A □

Câu 16. Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng /m^2. Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

A. 108 triệu đồng. **B**. 54 triệu đồng. **C**. 168 triệu đồng. **D**. 90 triệu đồng.

Câu 17.

Một người thợ nhôm kính nhận được đơn đặt hàng làm một bể cá cảnh bằng kính dạng hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích 3,2 m^3; tỉ số giữa chiều cao của bể cá và chiều rộng của đáy bể bằng 2 (hình dưới). Biết giá một mét vuông kính để làm thành và đáy của bể cá là 800 nghìn đồng. Hỏi người thợ đó cần tối thiểu bao nhiêu tiền để mua đủ số mét vuông kính làm bể cá theo yêu cầu (coi độ dày của kính là không đáng kể so với kích thước của bể cá).



A. 9,6 triệu đồng. **B**. 10,8 triệu đồng. **C**. 8,4 triệu đồng. **D**. 7,2 triệu đồng.

Lời giải.

Ta có $h = 2y$ và $V = x \cdot y \cdot h = 2x \cdot y^2 \Rightarrow x = \dfrac{1{,}6}{y^2}$.

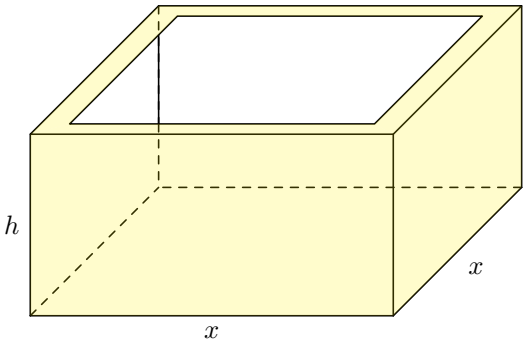
Diện tích kính cần mua là $S = x \cdot y + 2x \cdot h + 2y \cdot h = \dfrac{1{,}6}{y^2} \cdot y + 4\dfrac{1{,}6}{y^2} \cdot y + 4y^2$.

Do đó số tiền mua kính là

$$\left(\frac{8}{y} + 4y^2\right) \cdot 800000 = \left(\frac{4}{y} + \frac{4}{y} + 4y^2\right) \cdot 800000 \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{y} \cdot \frac{4}{y} \cdot 4y^2} \cdot 800000 = 9600000.$$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Nhân ngày quốc tế phụ nữ 8-3-2017, ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp. Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp, biết rằng độ dày lớp mạ vàng tại mọi điểm trên hộp là như nhau. Gọi chiều cao và độ dài cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x phải là



A. $x=4;\ h=2$. **B.** $x=2;\ h=4$. **C.** $x=4;\ h=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=1;\ h=2$.

Lời giải.

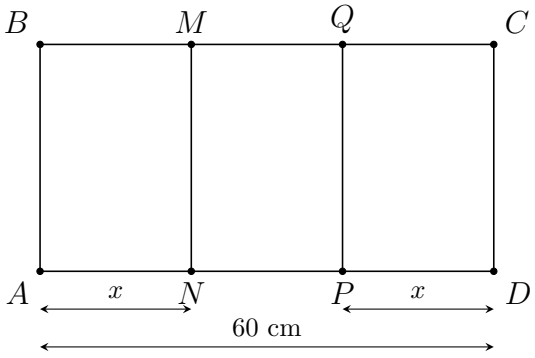
Ta có $V=h.S_{\text{đáy}} \Rightarrow 32=h.x^2 \Rightarrow h=\dfrac{32}{x^2}$.

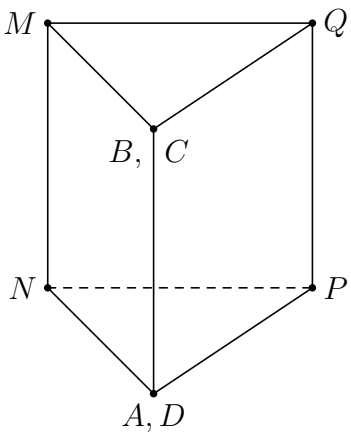
$S_{\text{mạ vàng}}=S_{xq}+S_{\text{đáy dưới}}=4hx^2+x^2=\dfrac{128}{x}+x^2=\dfrac{64}{x}+\dfrac{64}{x}+x^2\geq 3\sqrt[3]{64\cdot 64}$.

Để lượng vàng ít nhất thì $S_{\text{mạ vàng}}$ nhỏ nhất thì $\dfrac{64}{x}=x^2\Leftrightarrow x=4\Rightarrow h=2$.

Chọn đáp án A □

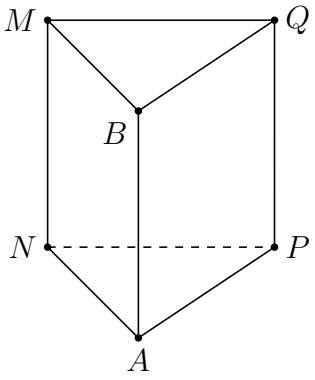
Câu 19. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=60$ cm. Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?





A. $x=30$. **B.** $x=15$. **C.** $x=25$. **D.** $x=20$.

Lời giải.



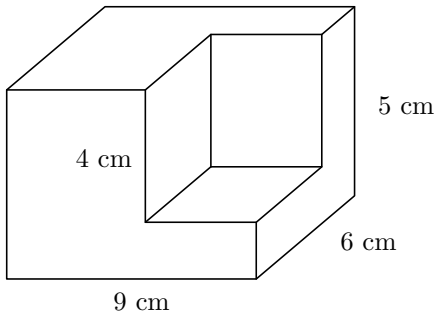
$V_{ANP.BMQ} = MN \cdot S_{\triangle ANP}$.
Để $V_{ANP.BMQ}$ lớn nhất thì $S_{\triangle ANP}$ lớn nhất.
Ta có
$NP = 60 - 2x$. (với $15 < x < 30$)
Gọi H là trung điểm NP.
Ta có $AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = \sqrt{30(2x-30)}$.
Suy ra $S_{\triangle ANP} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC = (30-x)\sqrt{30(2x-30)}$.
Xét hàm số $y = (30-x)\sqrt{30(2x-30)}$ trên khoảng $(15;30)$
$y' = \sqrt{30}\left(\dfrac{-3x+60}{\sqrt{2x-30}}\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 20$.
Bảng biến thiên

x	15		20		30
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $x = 20$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 20.
Một khúc gỗ dạng hình hộp chữ nhật có các kích thước như hình vẽ. Người ta cắt đi một phần khúc gỗ có dạng hình lập phương cạnh bằng 4 cm. Tính thể tích phần gỗ còn lại.

A. $262\,\text{cm}^3$. **B**. $54\,\text{cm}^3$. **C**. $145\,\text{cm}^3$. **D**. $206\,\text{cm}^3$.



Lời giải.
Thể tích khối gỗ khi chưa cắt bớt là: $V_1 = 5 \cdot 6 \cdot 9 = 270\ (\text{m})^3$.
Thể tích phần cắt bớt là: $V_2 = 4^3 = 64\ (\text{m})^3$.
Thể tích phần còn lại là: $V = V_1 - V_2 = 270 - 64 = 206\ (\text{m})^3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Kim tự tháp Kheops (Kê-ốp) ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công Nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Tính thể tích của kim tự tháp.

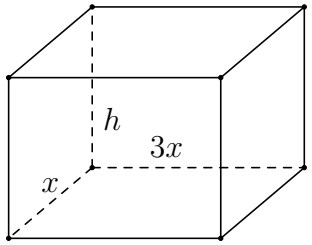
A. $2592100\,\text{m}^3$. **B**. $3888150\,\text{m}^3$. **C**. $7776300\,\text{m}^3$. **D**. $2952100\,\text{m}^3$.

Lời giải.
Ta có diện tích đáy là $S = 230^2 = 52900\ \text{m}^2$.
Thể tích của kim tự tháp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 52900 \cdot 147 = 2592100\,\text{m}^3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là 125 m^3. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A. 3,12 m. **B**. 3,82 m. **C**. 3,62 m. **D**. 3,42 m.

Lời giải.



Gọi chiều rộng của đáy bể bơi là x (m) $(x > 0)$.
$\Rightarrow$ chiều dài của đáy bể bơi là $3x$.
Ta có $V = 125 \Rightarrow h = \dfrac{V}{3x^2}$.
Nên $S = S_{xq} + S_{\text{đ}} = 8xh + 3x^2 = \dfrac{1000}{3x} + 3x^2$.
$\Rightarrow S' = -\dfrac{1000}{3x^2} + 6x$. Cho $S' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{500}{9}}$.

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{500}{9}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy S nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{500}{9}} \approx 3{,}82$ m.

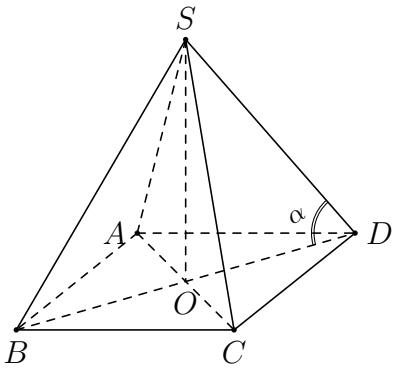
Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp với mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D**. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử $SD = a \Rightarrow \begin{cases} SO = SD\sin\alpha = a\sin\alpha \\ OD = SD\cos\alpha = a\cos\alpha \end{cases}$
Nên $\text{S} = 4 \cdot \dfrac{1}{2}OD^2 = 2OD^2 = 2a^2\cos^2\alpha$.
Thể tích của kim tự tháp là



$$\begin{aligned} \text{V} &= \frac{1}{3}SO \cdot \text{S}_{ABCD} = \frac{2}{3}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha \\ &= \frac{2}{3}a^3\left(\sin\alpha - \sin^3\alpha\right). \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin\alpha$, $t \in [0;1]$.
Xét hàm $f(t) = t - t^3 \Rightarrow f'(t) = 1 - 3t^2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Ta có $f(0) = f(1) = 0$; $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
Nên $\max f(t) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Một bác nông dân cần xây một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200 cm^3, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên liệu nhất?

A. 1200 cm^2. **B**. 120 cm^2. **C**. 160 cm^2. **D**. 1600 cm^2.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của đáy hố ga; h là chiều cao của hố ga $(x, y, h > 0)$.
Ta có

$$h = 2x$$

$$V = xyh = 2x^2y = 3200 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}.$$

Diện tích bề mặt sử dụng của hố ga không nắp là

$$S = xy + 2xh + 2yh = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \frac{8000}{x}.$$

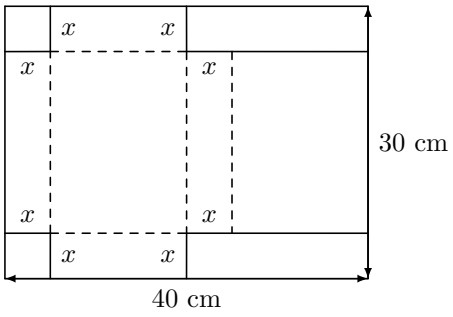
Đặt $f(x) = 4x^2 + \dfrac{8000}{x}$. Ta có $f'(x) = 8x - \dfrac{8000}{x^2}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.
Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1200	↗	

Vậy S nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$.
Diện tích đáy hố ga khi đó là 160 cm^2.
Chọn đáp án C □

Câu 25.

Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 30 cm, 40 cm. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\dfrac{35+5\sqrt{13}}{3}$ cm. **B**. $\dfrac{35-4\sqrt{13}}{3}$ cm.
C. $\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$ cm. **D**. $\dfrac{35+4\sqrt{13}}{3}$ cm.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật tạo thành sau khi gấp lên có độ dài ba cạnh là $30 - 2x$, $20 - x$, x với $0 < x < 15$.
Thể tích khối hộp chữ nhật là

$$V = (30 - 2x) \cdot (20 - x) \cdot x = 2x^3 - 70x^2 + 600x.$$

Ta có $V' = 6x^2 - 140x + 600$. Giải $V' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 140x + 600 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{35 + 5\sqrt{13}}{3} > 15 \\ x = \dfrac{35 - 5\sqrt{13}}{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$		15
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích khối hộp lớn nhất khi $x = \dfrac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$.

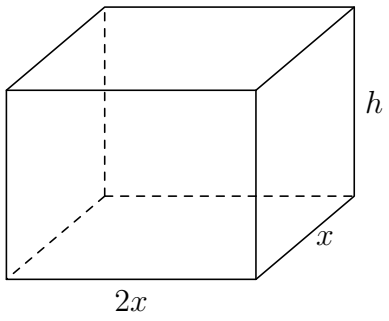
Chọn đáp án C □

Câu 26. Ông A dự định sử dụng hết 6,5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 2,26 m^3. **B**. 1,61 m^3. **C**. 1,33 m^3. **D**. 1,50 m^3.

Lời giải.

Đặt chiều rộng là x (m); chiều cao là h (m) (với $x, h > 0$).



Ta có $2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \dfrac{6,5 - 2x^2}{6x}$.

Do $h > 0$, $x > 0$ nên $6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Lại có $V = 2x^2h = \dfrac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x)$, với $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{13}{6} - 2x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

x	0		$\dfrac{\sqrt{39}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{13\sqrt{39}}{54}$	$\searrow$	

Vậy $V \leqslant f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right) = \dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$ m^3.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Ông A dự định sử dụng hết 6,7 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 1,57 m^3. **B**. 1,11 m^3. **C**. 1,23 m^3. **D**. 2,48 m^3.

Lời giải.

Gọi a, b, c lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể cá $(a, b, c > 0)$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} a = 2b \\ 2ac + 2bc + ab = 6{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \dfrac{6{,}7 - 2b^2}{6b}. \end{cases}$

Thể tích bể cá là $V = abc = \dfrac{2b^2(6{,}7 - 2b^2)}{6b} = \dfrac{6{,}7b - 2b^3}{3} = f(b)$.

Xét hàm số $f(b) = \dfrac{6{,}7b - 2b^3}{3}$ với $b > 0$.

Ta có $f'(b) = \dfrac{6{,}7 - 6b^2}{3}$, $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{\dfrac{67}{60}}$, $f(b) \approx 1{,}57$.

Bảng biến thiên

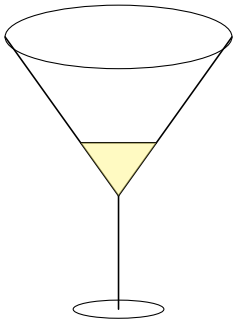
b	0		$\sqrt{\frac{67}{60}}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	↗	$1{,}57$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, dung tích lớn nhất của bể cá gần bằng 1,57.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.

Một cái ly đựng rượu có dạng hình nón như hình vẽ. Người ta đổ một lượng rượu vào ly sao cho chiều cao của lượng rượu trong ly bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của ly (không tính chân ly). Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi lộn ngược ly lên thì tỷ lệ chiều cao của rượu và chiều cao của ly trong trường hợp này bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{3 - \sqrt[3]{26}}{3}$. **D.** $\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi R, h, V lần lượt là bán kính, chiều cao và thể tích của ly hình nón.

Gọi R_1, h_1, V_1 lần lượt lượt là bán kính, chiều cao và thể tích của hình nón phần chứa rượu.

Gọi V_2 lần lượt là chiều cao và thể tích phần còn lại.

Gọi R_2, h_2 lần lượt là bán kính và đường cao của phần còn lại khi lộn ngược lên.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{1}{3}$

Theo Ta-lét ta suy ra $\dfrac{R_1}{R} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{h_2}{h} = \dfrac{R_2}{R}$.

Khi đó ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \dfrac{R_1^2}{R^2} \cdot \dfrac{h_1}{h} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow \dfrac{V_2}{V} = 1 - \dfrac{1}{27} = \dfrac{26}{27}$.

Khi ly lộn ngược lên thì lượng rượu có thể tích V_1 xuống miệng ly, còn phần còn lại V_2 lên trên nên ta

có

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V}=\frac{26}{27} &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}=\frac{26}{27}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{h_2}{h}\right)^3=\frac{26}{27}\left(\text{ do } \frac{h_2}{h}=\frac{R_2}{R}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{h_2}{h}=\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\end{aligned}$$

Vậy tỉ số chiều cao của rượu và chiều cao của ly trong trường hợp này là $1-\dfrac{\sqrt[3]{26}}{27}=\dfrac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. D	5. C	6. A	7. D	8. D	9. B	10. B
11. C	12. C	13. D	14. C	15. A	16. A	17. A	18. A	19. D	20. D
21. A	22. B	23. D	24. C	25. C	26. D	27. A	28. C		

CHƯƠNG 2

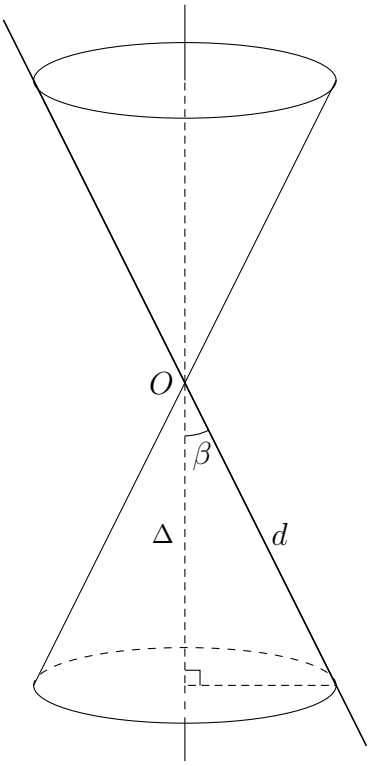
MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

BÀI 1 MẶT NÓN, MẶT TRỤ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

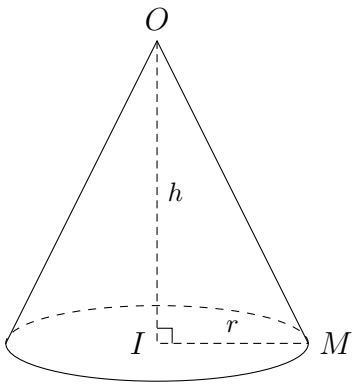
1 Mặt nón

Định nghĩa 1.
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo với nhau một góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là *mặt nón tròn xoay* đỉnh O.
Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là *mặt nón*.
Đường thẳng Δ gọi là *trục*, đường thẳng d gọi là *đường sinh* và góc β gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón đó.



Định nghĩa 2. Cho tam giác OIM vuông tại I. Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình gọi là *hình nón tròn xoay*, gọi tắt là *hình nón*.
Đường thẳng OI gọi là *trục*, O gọi là *đỉnh*, OI gọi là *đường cao* và OM gọi là *đường sinh* của hình nón.
Hình tròn tâm I, bán kính $r = IM$ gọi là *đáy* của hình nón.
Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh OI được gọi là *mặt xung quanh* của hình nón đó.

Định nghĩa 3.
Khối nón tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó. Người ta còn gọi tắt khối nón tròn xoay là *khối nón*.
Những điểm không thuộc khối nón được gọi là những *điểm ngoài* của khối nón.
Nhuỹng điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón ứng với khối nón ấy được gọi là những *điểm trong* của khối nón.
Ta gọi đỉnh, mặt, đáy, đường sinh của một hình nón theo thứ tự là *đỉnh, măt đáy, đường sinh* của khối nón tương ứng.



Tính chất 1. Gọi h là chiều cao, l là độ dài đường sinh và r là bán kính đáy của hình nón, ta có:

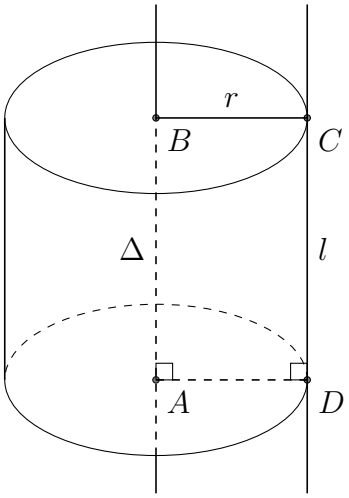
- ☑ Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl$.
- ☑ Thể tích của khối nón: $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (S là diện tích đáy).

❷ Mặt trụ

Định nghĩa 4.

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r. Khi quay (P) quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt nón tròn xoay được gọi là *mặt trụ tròn xoay* hay gọi tắt là *mặt trụ*.

Đường thẳng Δ gọi là *trục*, đường thẳng l gọi là *đường sinh* và khoảng cách r gọi là *bán kính* của mặt trụ.



Định nghĩa 5. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình được gọi là *hình trụ tròn xoay* hay gọi tắt là *hình trụ*.

Đường thẳng AB gọi là *trục*, đoạn thẳng CD gọi là *đường sinh*, độ dài $AB = CD$ gọi là *chiều cao*, hai hình tròn $(A; AD)$ và $(B; BC)$ gọi là hai *đáy* của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là *khối trụ* là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay, kể cả hình trụ.

Tính chất 2. Gọi h là chiều cao và r là bán kính đáy của hình trụ, ta có:

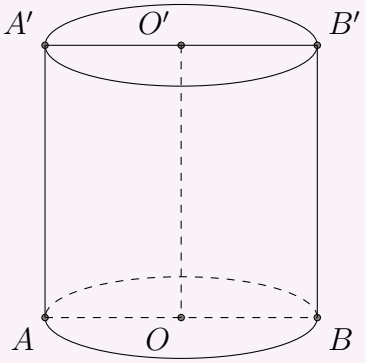
- ☑ Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$.
- ☑ Thể tích khối trụ: $V = Sh = \pi r^2 h$ (S là diện tích đáy).

B CÁC DẠNG TOÁN

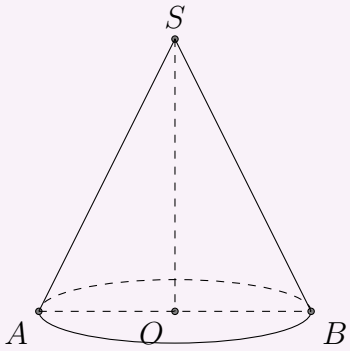
🗀 DẠNG 1. Thiết diện qua trục hình trụ, hình nón

Phương pháp giải.

- ☑ Thiết diện qua trục của hình trụ luôn là một hình chữ nhật nhận trục OO' của hình trụ làm đường trung bình.



- ☑ Thiết diện qua trục của hình nón đỉnh S luôn là một tam giác cân đỉnh S.



Ví dụ 1. Cho hình nón đỉnh S có thiết diện qua trục là một tam giác đều có cạnh bằng 4. Tính thể tích của khối nón đó.

Lời giải.

Gọi SAB là thiết diện qua trục của hình nón.

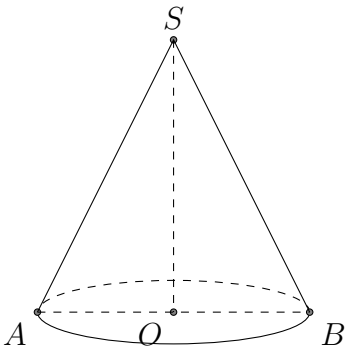
Có SAB đều nên $h = SO = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$R = OA = \dfrac{AB}{2} = 2.$

Thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$$

.



□

Ví dụ 2. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Tính tỉ số k $(k < 1)$ của diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ đó.

Lời giải.

Gọi $ABB'A'$ là thiết diện qua trục của hình trụ.

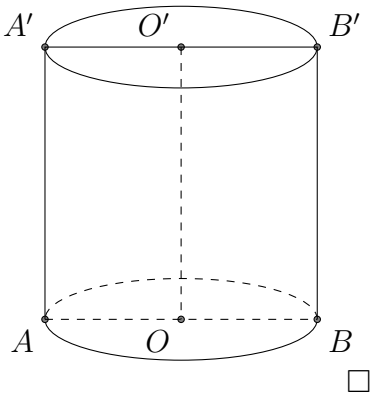
Do $ABB'A'$ là hình vuông nên $h = AA' = AB = 2R$.

Có

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi R^2$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$

Vậy tỉ số cần tìm là $k = \dfrac{S_{xq}}{S_{tp}} = \dfrac{2}{3}$.

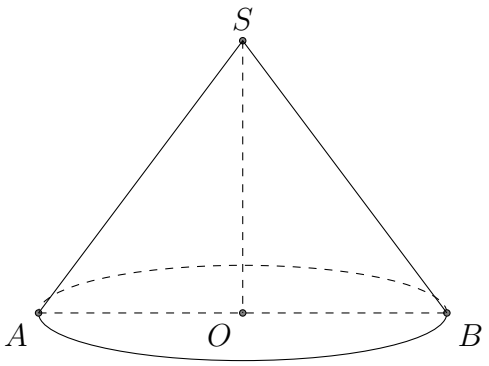


□

Ví dụ 3. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân. Tính diện tích của thiết diện đó biết thể tích khối nón là $18\pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi SAB là thiết diện qua trục của hình nón, gọi ℓ là độ dài đường sinh SA.



Có SAB vuông cân nên $h = SO = \dfrac{SA\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$

$R = OA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi\ell^3\sqrt{2}}{12}$$

Mà $V = 18\pi\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi\ell^3\sqrt{2}}{12} = 18\pi\sqrt{2} \Leftrightarrow \ell^3 = 216 \Leftrightarrow \ell = 6$.

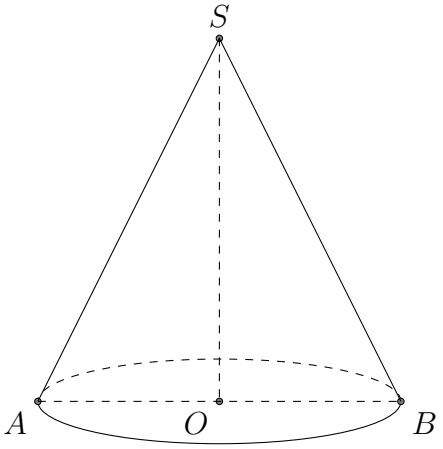
Vậy diện tích cần tìm của thiết diện là $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SA^2 = \dfrac{\ell^2}{2} = 18$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều có diện tích là $a^2\sqrt{3}$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

Lời giải.

Gọi SAB là thiết diện qua trục của hình nón.



Có SAB đều nên $S_{SAB} = \dfrac{SA^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Leftrightarrow SA = 2a$

$R = OA = \dfrac{AB}{2} = a$, $h = SO = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi R\ell = 2a^2\pi$$

Thể tích của khối nón là

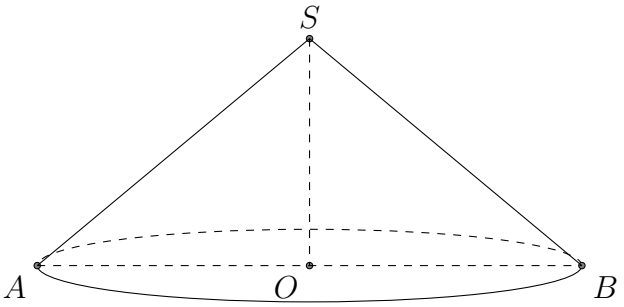
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$$

□

Bài 2. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác cân với góc ở đỉnh là 120° và có chu vi là $3a(\sqrt{3}+2)$, tính diện tích toàn phần của hình nón.

Lời giải.

Gọi SAB là thiết diện qua trục của hình nón.



Hình nón có góc ở đỉnh là 120° nên

$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos 120^\circ = 3\ell^2$

$\Rightarrow AB = \ell\sqrt{3} \Rightarrow P_{SAB} = 2\ell + \ell\sqrt{3}$

gt $\Rightarrow 2\ell + \ell\sqrt{3} = 3a(\sqrt{3}+2) \Leftrightarrow \ell = SA = 3a$.

$R = AO = SA\sin 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{tp} = \pi R\ell + \pi R^2 = \frac{9a^2\pi(2\sqrt{3}+2)}{4}$$

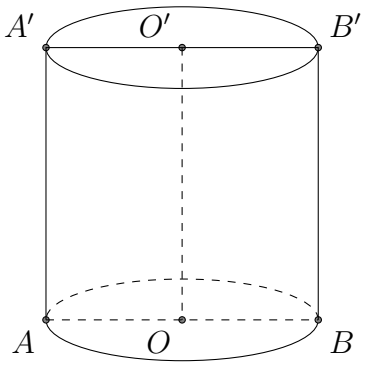
□

Bài 3. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình chữ nhật có diện tích là 8, tính thể tích của khối trụ biết rằng đường tròn đáy có chu vi là 4π.

Lời giải.

Gọi $ABB'A'$ là thiết diện qua trục của hình trụ.
Do $ABB'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng 8
nên $S = AA' \cdot AB = 8$.
Mặt khác, có $C = 2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2 \Rightarrow AB = 4$.
Vậy $h = AA' = \dfrac{8}{AB} = 2$.
Thể tích của khối trụ là

$$V = \pi R^2 h = 8\pi$$



□

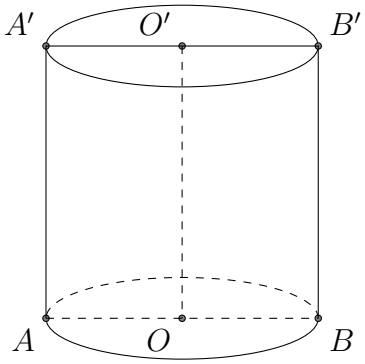
Bài 4. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình chữ nhật có chu vi là 100. Tính diện tích của thiết diện đi qua trục hình trụ khi thể tích của hình trụ đó đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $ABB'A'$ là thiết diện qua trục của hình trụ.
Có chu vi thiết diện là 100 nên

$$2(AB + AA') = 100 \Leftrightarrow 2R + h = 50$$

. Có $V = \pi R^2 h = \pi R^2(50 - 2R) = \pi(50R^2 - 2R^3) = \pi f(R)$.
$f'(R) = 100R - 6R^2$, $f'(R) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 0 \\ R = \dfrac{50}{3} \end{array}\right.$.



x	0		$\dfrac{50}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $R = h = \dfrac{50}{3}$.
Khi đó diện tích thiết diện là $S = AB \cdot AA' = 2Rh = \dfrac{5000}{9}$

□

.

DẠNG 2. Thiết diện không qua trục hình trụ, hình nón

Phương pháp giải.

Ví dụ 4. Cho hình nón đỉnh S, có chiều cao là $a\sqrt{2}$, đáy là đường tròn tâm O, bán kính bằng $2a$, mặt phẳng đi qua đỉnh S của hình nón và cắt đường tròn O theo dây cung AB, biết rằng tam giác OAB tù và có diện tích là $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$, hãy tính góc tạo bởi mặt phẳng đó với mặt phẳng đáy hình nón.

Lời giải.

Có $S_{OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$

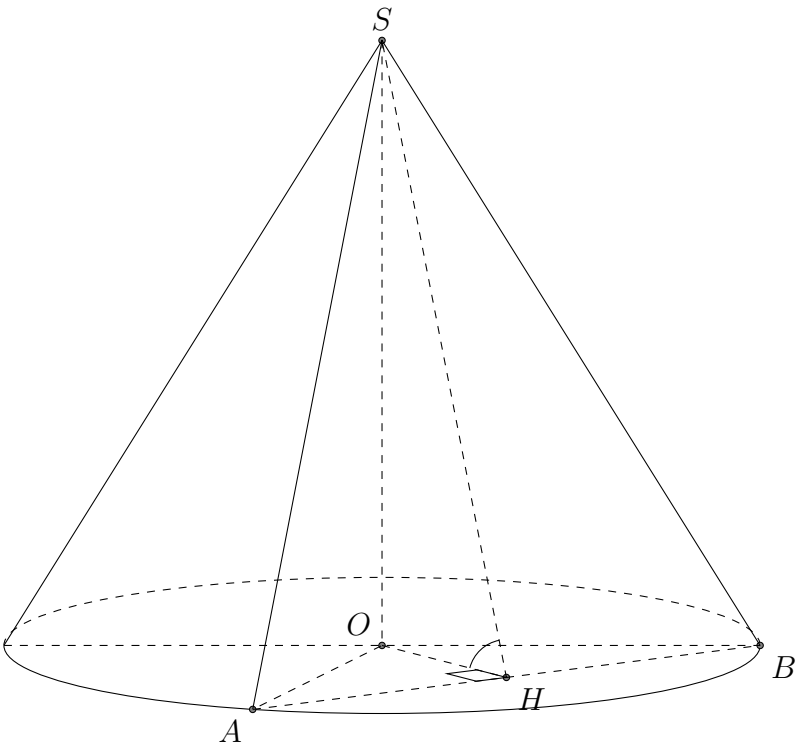
$\Leftrightarrow \sin \widehat{AOB} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{AOB} = -\dfrac{3}{4}$ (vì $\widehat{AOB}$ tù).

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 14a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{14}$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH)$

$\Rightarrow$ góc giữa (SAB) với đáy là $\widehat{SHO}$.

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $\tan \widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{2}}} = 2 \Rightarrow \widehat{SHO} \approx 63°26'$.

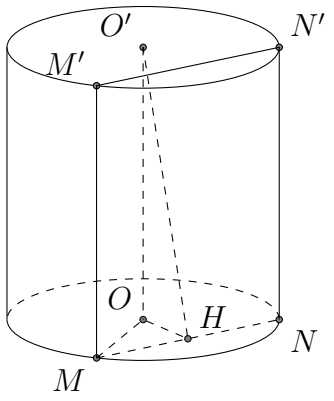


□

Ví dụ 5. Cho hình trụ có hai đáy là đường tròn (O) và (O'), bán kính đáy bằng $2a$, chiều cao bằng $5a$. Mặt phẳng (α) song song với trục OO' và cách trục một đoạn bằng $a\sqrt{3}$, tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình trụ.

Lời giải.

Gọi thiết diện của mặt phẳng với hình trụ là tứ giác $MNN'M'$
Gọi H là trung điểm của MN.
Ta có $\begin{cases} OH \perp MN \\ OH \perp MM' \end{cases} \Rightarrow OH \perp (MNN'M')$
$\Rightarrow d(OO', (MNN'M')) = d(O, (MNN'M')) = OH = a\sqrt{3}$.
$\triangle OMH$ có $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = a \Rightarrow MN = 2MH = 2a$.
Vậy diện tích thiết diện là $S_{MNN'M'} = MM' \cdot MN = 5a \cdot 2a = 10a^2$.

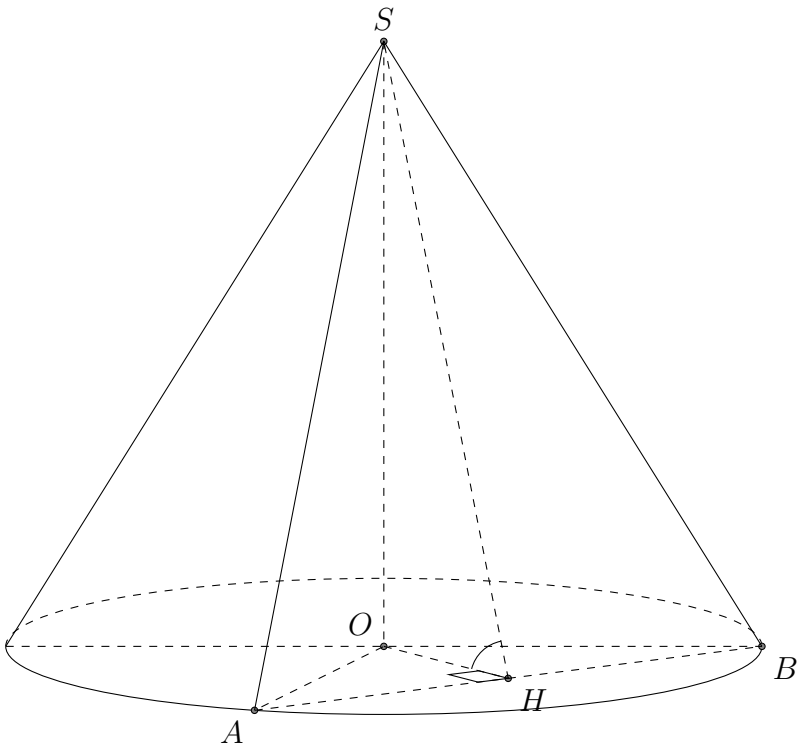


□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Cho hình nón đỉnh S, có độ dài đường sinh là $5a$, bán kính đường tròn đáy là $4a$. Một mặt phẳng (α) tạo với đáy hình nón một góc $60°$, tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với hình nón.

Lời giải.

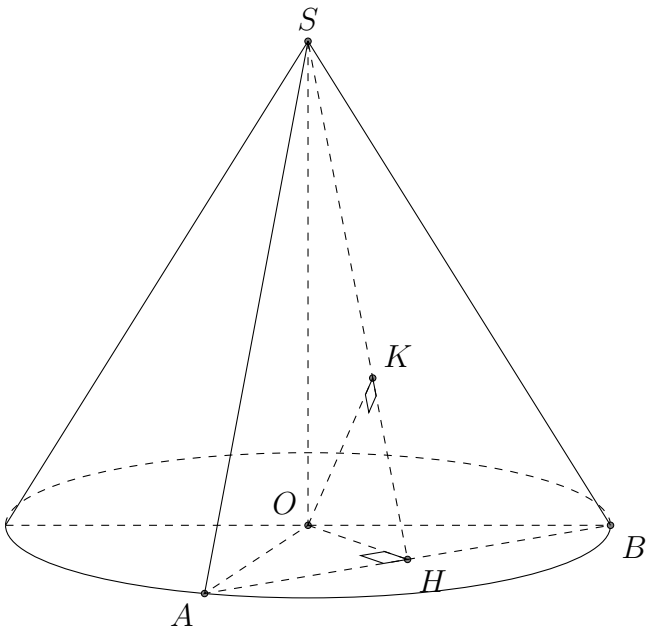


Gọi SAB là thiết diện tạo bởi (α) với hình nón.
Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow ((\alpha), (OAB)) = \widehat{SHO} = 60°$.
Có $SA = 5a$, $OA = 4a$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 3a$, $OH = \dfrac{SO}{\tan 60°} = a\sqrt{3}$
$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2a\sqrt{13}$, $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = 2a\sqrt{3}$.
Vậy diện tích thiết diện là $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot SH \cdot AB = 2a^2\sqrt{39}$. □

Bài 6. Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường cao là $3a$, thiết diện qua trục là tam giác vuông cân.

Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh S, cắt đường tròn đáy theo dây cung AB có độ dài $3a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α).

Lời giải.



Do thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân nên ta có $h = SO = OA = OB = 3a$.

Gọi H là trung điểm của AB, có $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \dfrac{3a}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của O lên SH.

Có $\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK$.

Mà $OK \perp SH$ nên $OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OK$.

$\triangle SOH$ có $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OH^2} \Rightarrow OK = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5} = d(O,(SAB))$. □

Bài 7. Cho hình trụ có chiều cao là $4a$, hai đường tròn đáy có tâm là O và O' và bán kính là $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (α) song song với trục OO' và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích là $8a^2$, tính khoảng cách từ trục OO' đến mặt phẳng (α).

Lời giải.

Gọi $MNN'M'$ là thiết diện tạo bởi (α) với hình trụ.

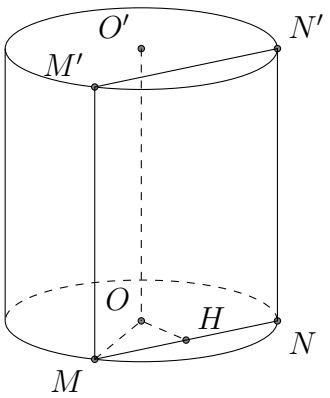
Ta có $S_{MNN'M'} = MN \cdot MM' \Leftrightarrow MN = \dfrac{S_{MNN'M'}}{MM'} = \dfrac{8a^2}{4a} = 2a$.

Gọi H là trung điểm của MN, có $\begin{cases} OH \perp MN \\ OO' \perp MN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (\alpha)$.

$\Rightarrow d(OO',(MNN'M')) = d(O,(MNN'M')) = OH$.

Có $MH = \dfrac{MN}{2} = a$, $\triangle OHM$ có $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = 2a$.

Vậy khoảng từ trục OO' đến (α) là $OH = 2a$.

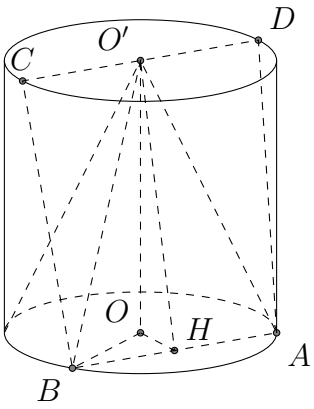


□

Bài 8. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O, 2a)$ và $(O', 2a)$. Xét hình nón (T) có đỉnh là O' và

nhận đường tròn (O) làm đáy. Mặt phẳng (α) đi qua O', tạo với đáy hình trụ một góc 45°, giả sử (α) cắt đường tròn (O) theo dây cung AB, cắt đường tròn (O') theo dây cung CD (theo thứ tự tạo thành tứ giác $ABCD$). Tính thể tích của khối trụ biết rằng $S_{ABCD} = 3S_{O'AB}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ OO' \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OO'H)$.

$\Rightarrow O'H \perp AB \Rightarrow \begin{cases} ((OAB),(\alpha)) = \widehat{OHO'} = 45^\circ \\ O'H \text{ là đường cao chung của } ABCD \text{ và } \triangle O'AB \end{cases}$.

Do $S_{ABCD} = 3S_{O'AB} \Leftrightarrow S_{O'BC} = S_{O'AB}$ (vì $\triangle O'BC = \triangle O'CD$).

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot O'H \cdot O'C = \dfrac{1}{2} \cdot O'H \cdot AB \Leftrightarrow AB = O'C = 2a \Rightarrow BH = a$.

$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = a\sqrt{3}$, $OO' = OH \tan 45^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối trụ là

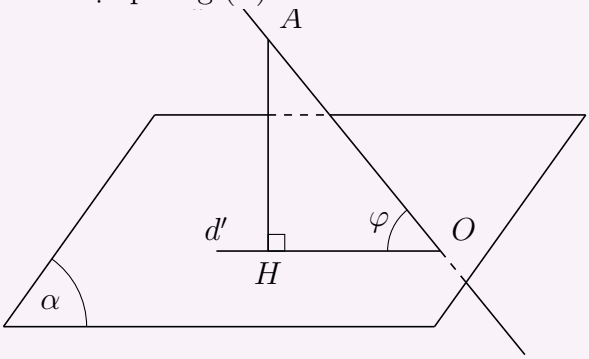
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot OO' = 4\pi a^3\sqrt{3}.$$

□

DẠNG 3. Góc và khoảng cách trong nón và trụ

Phương pháp giải.

① Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

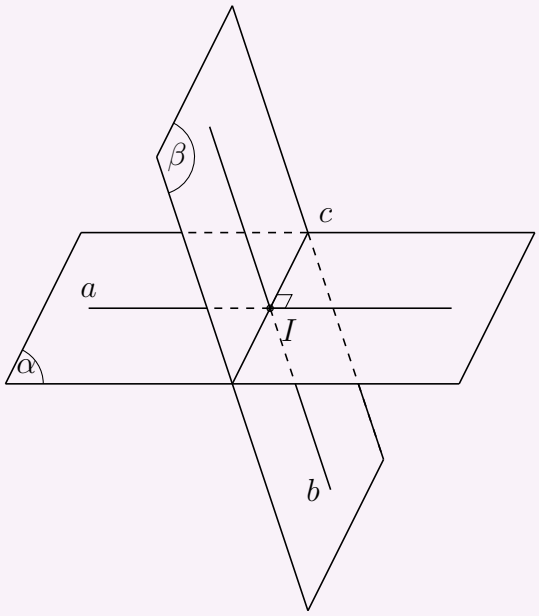


B1. Xác định giao điểm O của d và (α).

B2. Trên d lấy điểm A khác O và các định H là hình chiếu của A lên (α).

B3. Góc giữa d và (α) là góc $\widehat{AOH}$.

② Góc giữa hai mặt phẳng.



B1. Xác định điểm I trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng.

B2 Xác định $a \subset (\alpha)$, $a \perp \Delta$, $b \subset (\beta)$, $b \perp \Delta$.

B3. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b.

③ Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

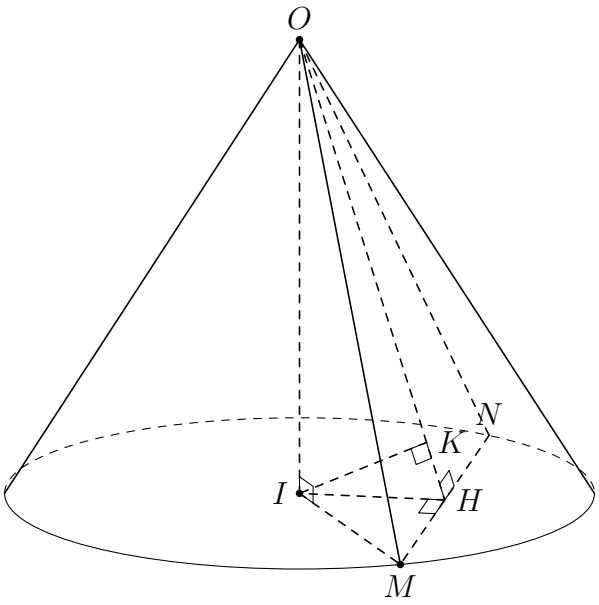
④ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và d.

B1. Xác định mặt phẳng (α) chứa Δ và song song với d.

B2. Xác định khoảng cách giữa d và (α). Đó chính là khoảng cách giữa Δ và d.

Ví dụ 6. Cho hình nón có đường cao $h = 16$, bán kính đáy $r = 12$. Tính diện tích thiết diện của khối nón khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua đỉnh của hình nón, biết khoảng cách từ tâm của đáy đến (α) bằng 8.

Lời giải.



Gọi O, I lần lượt là đỉnh và tâm của đáy hình nón, M, N là giao của (α) và đường tròn đáy, H, K lần lượt là hình chiếu của I lên MN, OH.

Ta có $\begin{cases} MN \perp IH \\ MN \perp IO \end{cases} \Rightarrow MN \perp IK.$

Lại có $OH \perp IK$ nên $IK \perp (OMN)$, theo giả thiết $IK = 8$, $IO = 16$, $IM = 12$. Tam giác OIH vuông tại I có đường cao IK suy ra $\dfrac{l}{IO^2} + \dfrac{l}{IH^2} = \dfrac{l}{IK^2} \Rightarrow IH = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

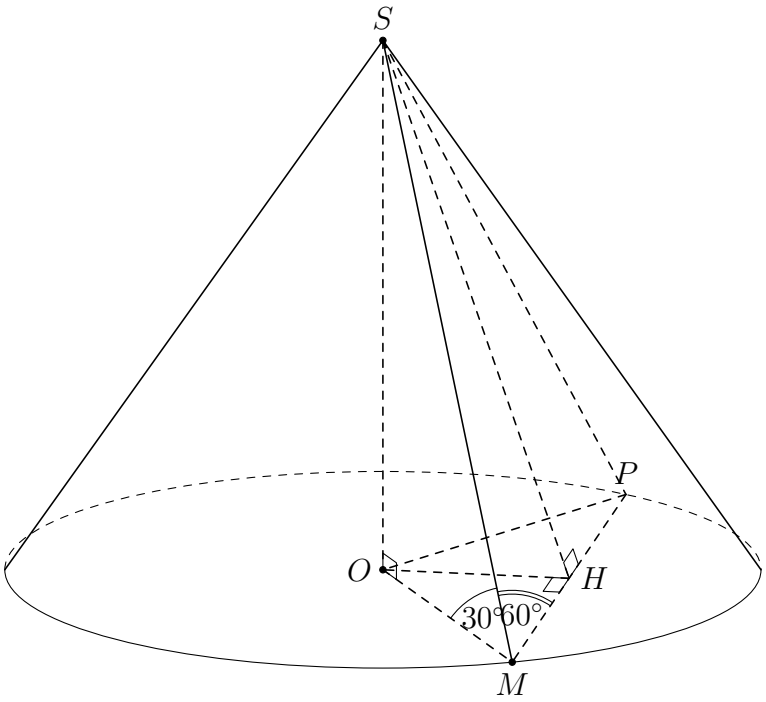
Trong tam giác vuông OIH ta có $OH = \sqrt{IO^2 + IH^2} = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông IHM ta có $MH = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \dfrac{4\sqrt{33}}{3}$.

$\Rightarrow S_{\Delta OMN} = \dfrac{128\sqrt{11}}{3}$. □

Ví dụ 7. Cho hình nón có đường cao SO. Gọi M, P là hai điểm trên đường tròn đáy. Tính diện tích xung quanh của hình nón biết khoảng cách từ tâm của đáy đến MP bằng 5 và $\widehat{SMO} = 30^\circ$, $\widehat{SMP} = 60^\circ$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của O lên MP.

Đặt $SO = h$, khi đó $SH = \sqrt{h^2 + 25}$.

Trong tam giác vuông SOM và SHM ta có

$$OM = SO.\cot\widehat{SMO} = h\sqrt{3}, MH = SH.\cot\widehat{SMP} = \frac{\sqrt{h^2+25}}{\sqrt{3}}.$$

Trong tam giác vuông HOM ta có:

$$OH^2+HM^2=OM^2 \Leftrightarrow 25+\frac{h^2+25}{3}=3h^2 \Leftrightarrow h=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $OM=\dfrac{5\sqrt{6}}{2} \Rightarrow SM=5\sqrt{2}$. Vậy diện tích xung quanh của hình chóp $S_{xq}=25\sqrt{3}\pi$. □

Ví dụ 8. Cho hình nón có đường cao $SO=12$, bán kính đáy $r=24$. Tính diện tích thiết diện của khối nón khi cắt bởi mặt phẳng (α) biết góc giữa SO và mặt phẳng (α) bằng 60°.

Lời giải.

Gọi M, N là giao của α và đường tròn đáy, H, K lần lượt là hình chiếu của O lên MN, SH. Ta có

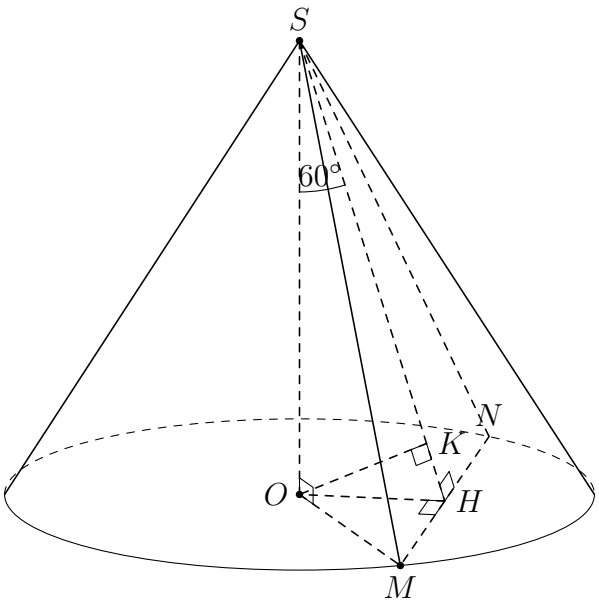
$$\begin{cases} MN\perp OH \\ \\ MN\perp SO \end{cases} \Rightarrow MN\perp OK.$$

Lại có $OK\perp SH$ nên $OK\perp(SMN) \Rightarrow \widehat{OSH}=60^\circ$.

Trong tam giác vuông SOH ta có:

$$OH=SO.\tan\widehat{OSH}=12\tan 60^\circ=12\sqrt{3} \Rightarrow SH=24.$$

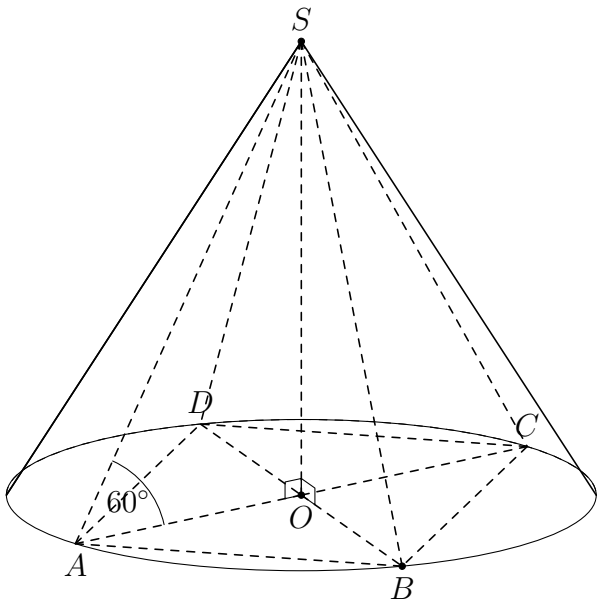
Mặt khác $MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=12 \Rightarrow MN=24$. Vậy diện tích thiết diện là $S_{\Delta SMN}=288$



□

Ví dụ 9. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

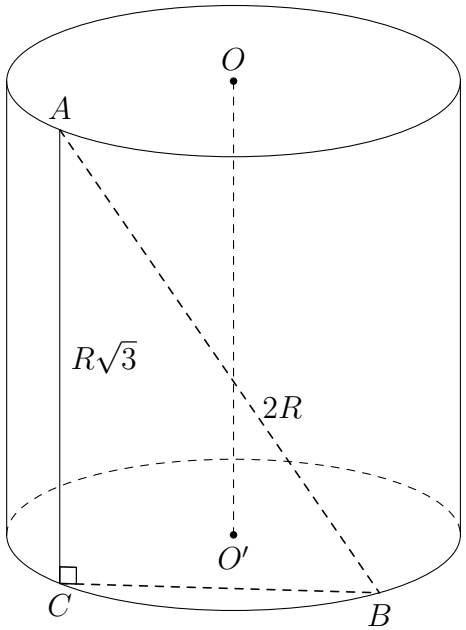
Lời giải.



Goi O là tâm của đáy hình chóp $S.ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa cạnh bên SA và đáy là $\widehat{SAO}$. Và do đó $\widehat{SAO} = 60^\circ$.
Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, suy ra thể tích khối nón là: $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$. □

Ví dụ 10. Một hình trụ tròn xoay, bán kính đáy bằng R, trục $OO' = R\sqrt{3}$. Gọi hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho $AB = 2R$. Tính góc giữa đường thẳng AB và OO'.

Lời giải.

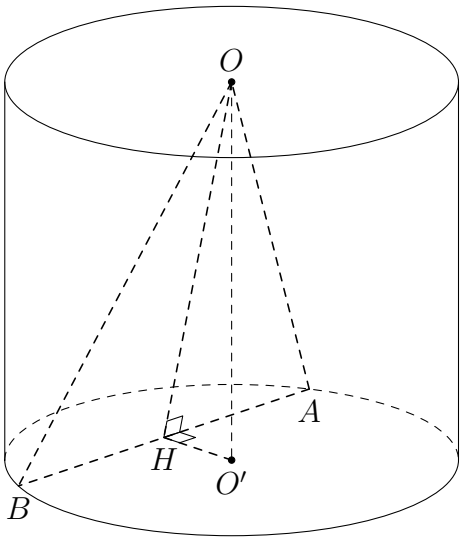


Lấy C trên đường tròn (O') sao cho AC là đường sinh của hình trụ. Ta có AC song song OO' nên góc giữa AB và OO' là góc giữa AB và OO' và bằng $\widehat{CAB}$.

Trong tam giác vuông ABC ta có: $\cos\widehat{CAB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{CAB} = 30^\circ$.
Vậy góc giữa AB và OO' bằng 30° □

Ví dụ 11. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'). Gọi A, B là hai điểm trên đường tròn (O'). Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết tam giác OAB đều cạnh a và góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng chứa (O') bằng 60°

Lời giải.

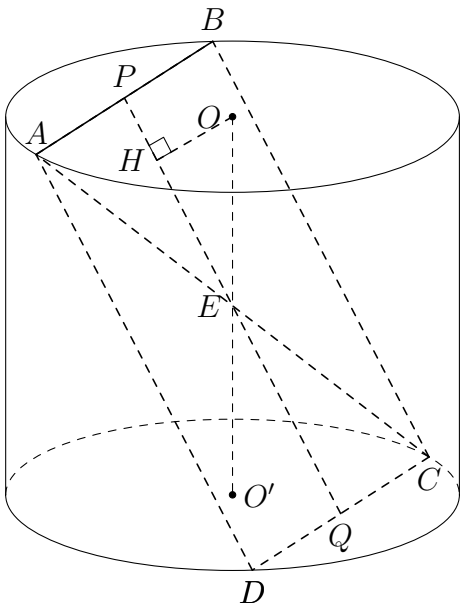


Gọi H là trung điểm AB. Khi đó ta có $OH \perp A, O'H \perp AB$ nên góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng chứa (O') là góc giữa HO và HO', cũng chính là $\widehat{O'HO}$.
Ta có $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OO' = OH.\sin 60^\circ = \dfrac{3a}{4}, O'H = OH.\cos 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác $O'B = \sqrt{O'H^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. Từ đây ta suy ra diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = \dfrac{3\sqrt{7}\pi.a^2}{8}$ □

Ví dụ 12. Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r$. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy (O) và (O'). Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng $ABCD$, biết rằng đường thẳng BC không phải là đường sinh của hình trụ.

Lời giải.



Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm AB, CD, OO'. Điểm H là hình chiếu của O lên PQ. Ta có

$$\begin{cases} AB \perp OP \\ \\ AB \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (POO').$$

Tương tự $CD \perp (QOO')$. Mà $CD // (QOO')$ nên $AB \perp (QOO')$. Do đó O, P, Q, O' đồng phẳng. Cũng từ đây ta có $OH \perp AB, OH \perp PQ$ suy ra $OH \perp (ABCD)$ hay OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt khác dễ dàng nhận thấy $OP = O'Q$ và $OP // O'Q$ nên PQ cắt OO' tại E là trung điểm mỗi đường.

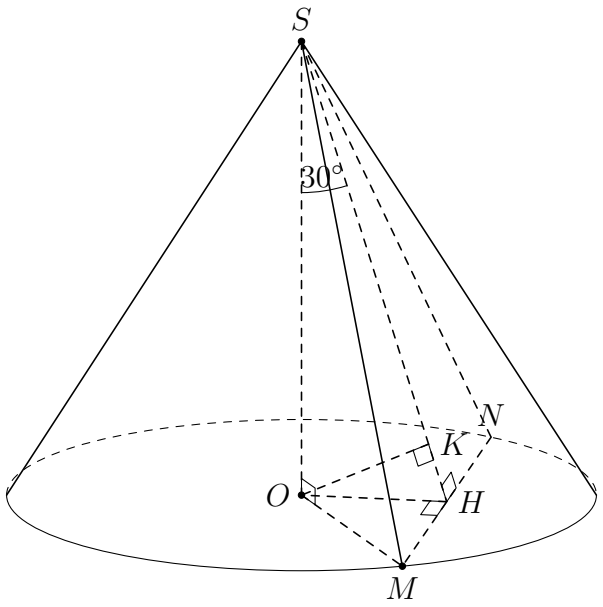
Trong tam giác vuông AOE ta có $AE = \sqrt{AO^2 + OE^2} = \dfrac{r\sqrt{5}}{2}$. Mà tam giác APE vuông cân tại P suy ra $EP = \dfrac{r\sqrt{10}}{4}$.

Trong tam giác vuông POE: $OP = \sqrt{PE^2 - OE^2} = \dfrac{r\sqrt{6}}{4} \Rightarrow OH = \dfrac{r\sqrt{15}}{10}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Cho hình nón có đường cao $SO = 15$, Gọi M, N là hai điểm trên đường tròn đáy. Tính thể tích của khối nón biết tam giác MNS đều và góc giữa SO và mặt phẳng (SMN) bằng $30°$.

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên MN, OH.

Ta có $\begin{cases} MN \perp OH \\ \\ MN \perp OS \end{cases} \Rightarrow MN \perp OK.$

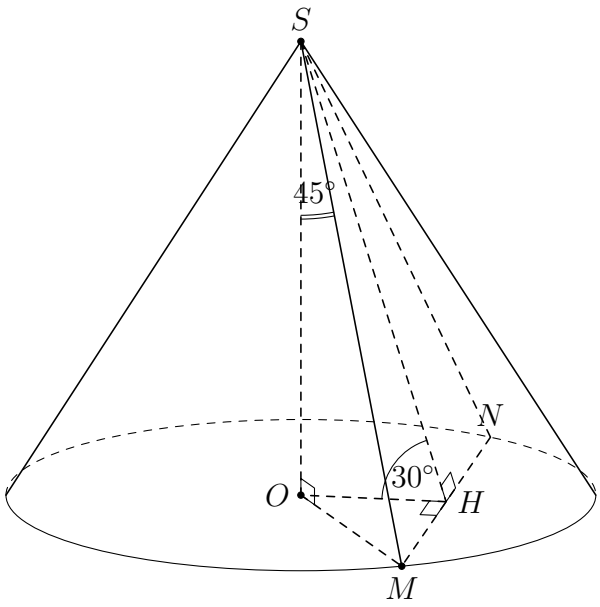
Lại có $SH \perp OK$ nên $OK \perp (SMN)$. Do đó $\widehat{OSH}$ là góc giữa SO và mặt phẳng (SMN), suy ra $\widehat{OSH} = 30°$.

Trong tam giác vuông SOH ta có: $OH = SO.\tan\widehat{OSH} = 5\sqrt{3}$' $SH = \dfrac{OH}{\sin\widehat{OSH}} = 10\sqrt{3}$. Tam giác SMN đều có đường cao $SH = 10\sqrt{3}$ nên có canh $MN = SH.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = 20$, suy ra $OM = \sqrt{MH^2 OH^2} = 5\sqrt{7}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = 875\pi$ □

Bài 10. Một hình nón có đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt phẳng chứa đáy hình nón bằng 60°. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải.



Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm của đáy hình nón, M, N là giao của α và đường tròn đáy, H là hình chiếu của O lên MN.

Ta có $\begin{cases} SH \perp MN \\ \\ OH \perp MN \end{cases}$ suy ra $\widehat{SHO}$ là góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt phẳng (OMN).

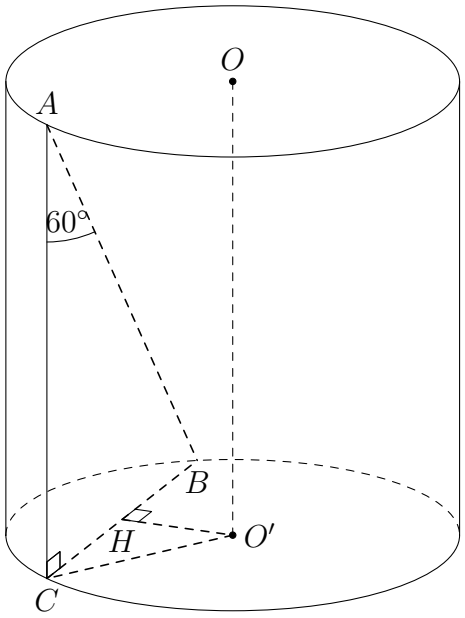
Vì góc ở đỉnh của hình nón bằng 90° nên ta có $\widehat{OSM} = 45^\circ$, kết hợp với tam giác SOM vuông tại O ta được $SO = OM = a$.

Trong tam giác vuông SOH ta có $OH = SO.\cot\widehat{SHO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = 2a$ suy ra $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Do đó diện tích thiết diện của hình nón khi cắt bởi (α) là $S_{SMN} = \dfrac{2\sqrt{6}.a^2}{3}$ □

Bài 11.

Một hình trụ có bán kính $r = 7$ và chiều cao $h = 8$. Gọi A, B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 60°. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

Lời giải.



Qua A dựng đường thẳng song song với OO' cắt đường tròn (O') tại C.Khi đó góc giữa AB và OO' bằng góc giữa AC và AB và bằng $\widehat{CAB}$ suy ra $\widehat{CAB} = 60^\circ$.

Gọi H là trung điểm của BC. Ta có $\begin{cases} O'H \perp BC \\ O'H \perp AC \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABC)$.

Mặt khác $OO'//(ABC) \Rightarrow d(OO';(ABC)) = d(O';(ABC)) = O'H$.

Trong tam giác vuông ABC có $BC = AC.\tan\widehat{CAB} = 8\sqrt{3}$, suy ra $O'H = \sqrt{O'C^2 - CH^2} = 1$. Vậy khoảng cách giữa AB và OO' bằng 1. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V=12\pi$. **B.** $V=4\pi$. **C.** $V=4$. **D.** $V=12$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là
$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot 4=4\pi$.
Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho khối trụ có thể tích V và bán kính đáy R. Chiều cao của khối trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{V}{\pi R^2}$. **B.** $\dfrac{V}{3\pi R^2}$. **C.** $\dfrac{V}{R^2}$. **D.** $\dfrac{V}{3R^2}$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi R^2h\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Thể tích của khối nón có chiều cao $h=6$ và bán kính đáy $R=4$ bằng

A. $V=32\pi$. **B.** $V=96\pi$. **C.** $V=16\pi$. **D.** $V=48\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 6=32\pi$
Chọn đáp án A □

Câu 4. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh bằng 3 và bán kính đáy bằng 2 là

A. 4π. **B.** 6π. **C.** 12π. **D.** 5π.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{\text{xq}}=\pi rl=\pi\cdot 2\cdot 3=6\pi.$$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hình nón có bán kính đáy $r=4$ và diện tích xung quanh bằng 20π. Thể tích của khối nón đã cho bằng

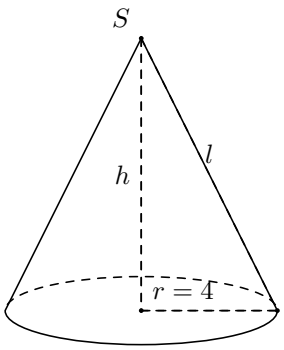
A. 4π. **B.** 16π. **C.** $\dfrac{16}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{80}{3}\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón ta có

$$S_{xq}=\pi rl\Rightarrow 20\pi=\pi\cdot 4\cdot l\Rightarrow l=5.$$

Vì $h=\sqrt{l^2-r^2}$ nên $h=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$.
Khối nón có thể tích là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 3=16\pi$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 6. Cho khối trụ có đường sinh bằng 5 và thể tích bằng 45π. Diện tích toàn phần của hình trụ là

A. 48π. **B.** 36π. **C.** 12π. **D.** 24π.

Lời giải.

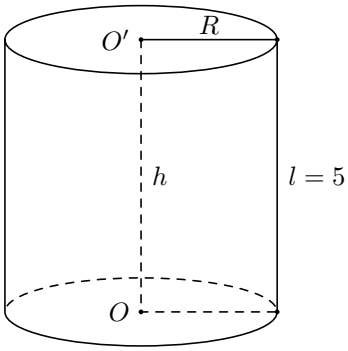
Vì hình trụ có đường cao bằng đường sinh nên $h = l = 5$.

Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ ta có

$V = \pi R^2 h \Rightarrow 45\pi = \pi \cdot R^2 \cdot 5 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + 2\pi \cdot 3^2 = 30\pi + 18\pi = 48\pi$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 7. Tính theo a thể tích của một khối trụ có bán kính đáy là a, chiều cao bằng $2a$.

A. $2\pi a^3$. **B.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** πa^3.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h$.

Cách giải:

Ta có $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi \cdot a^3$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 8. Cho hình nón có đường cao $h = a$, bán kính $r = a$. Diện tích xung quanh hình nón là

A. $4\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón trên là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2}\pi a^2$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 9. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2.

A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 8\pi$. **C.** $V = 16\pi$. **D.** $V = 4\pi$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có bán kính đáy $R = 2$, chiều cao khối trụ $h = 2$.

Do đó $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 8\pi$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 10. Cho hình nón có độ dài đường sinh $l = 4a$, bán kính đáy bằng $R = \sqrt{3}a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $8\sqrt{3}\pi a^2$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **C.** $4\sqrt{3}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình nón là: $s_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{3}4a = 4\sqrt{3}\pi a^2$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 11. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 và chiều cao bằng 7 . Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{175\pi}{3}$. **B.** 175π. **C.** 70π. **D.** 35π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Khối trụ tròn xoay có đường kính bằng $2a$, chiều cao $h = 2a$ có thể tích là

A. $V = 2\pi a^2$. **B.** $V = 2\pi a^3$. **C.** $V = 2\pi a^2 h$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải.

Khối trụ tròn xoay có bán kính bằng $\dfrac{2a}{2} = a$ nên có thể tích là $V = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

A. $S_{\text{xq}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $S_{\text{xq}} = \pi rh$. **C.** $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$. **D.** $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 8. **B.** 12. **C.** 30. **D.** 16.

Lời giải.

Số cạnh $= \dfrac{8 \cdot 3}{2} = 12$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6.

A. $V = 18\pi$. **B.** $V = 54\pi$. **C.** $V = 108\pi$. **D.** $V = 36\pi$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$.

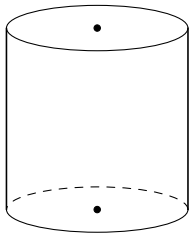
Chọn đáp án A □

Câu 16. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính a. Khi đó thể tích của hình trụ bằng

A. Sa. **B.** $\dfrac{1}{2}Sa$. **C.** $\dfrac{1}{3}Sa$. **D.** $\dfrac{1}{4}Sa$.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.



Theo bài ra ta có $\begin{cases} S = 2\pi rh \\ \pi r^2 = 4\pi a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2a \\ h = \dfrac{S}{4\pi a}. \end{cases}$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot \dfrac{S}{4\pi a} = Sa$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình nón có chiều cao h và góc ở đỉnh bằng $90°$. Thể tích của khối nón xác định bởi hình nón trên:

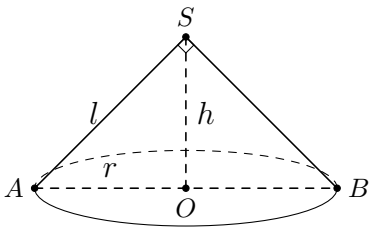
A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** 2π.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra bán kính nón $r = h$.

Vậy thể tích khối nón tương ứng là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 18. Một hình trụ có bán kính đáy , $r = a$ độ dài đường sinh $l = 2a$ Diện tích toàn phần của hình trụ này là

A. $2\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $6\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Lời giải.

$S_{tp} = 2S_d + S_{xq} = 2\pi a^2 + 2\pi a \cdot 2a = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho khối trụ có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính thể tích khối trụ ta có $V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$ là

A. $V = 32\pi$. **B.** $V = 32\sqrt{2}\pi$. **C.** $V = 64\sqrt{2}\pi$. **D.** $V = 128\pi$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích V của khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h là $V = \pi r^2 h$.

Cách giải: Thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Thể tích của khối nón có đường sinh bằng 10 và bán kính đáy bằng 6 là:

A. 196π. **B.** 48π. **C.** 96π. **D.** 60π.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích của khối nón có đường cao bằng h và bán kính đáy bằng r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2$.

Cách giải: Độ dài đường cao của khối nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Thể tích của khối nón đó là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$.

A. $V = 4\pi$. **B.** $V = 12\pi$. **C.** $V = 16\pi\sqrt{3}$. **D.** $V = 4$.

Lời giải.

Thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$ là $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Thể tích của khối trụ có bán kính $R = 3$, chiều cao $h = 5$ là

A. $V = 90\pi$. **B.** $V = 45$. **C.** $V = 45\pi$. **D.** $V = 15\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 45\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Công thức tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đường sinh l, bán kính đáy r là

A. $S_{\text{xq}} = 4\pi rl$. **B.** $S_{\text{xq}} = \pi rl$. **C.** $S_{\text{xq}} = \pi rl$. **D.** $S_{\text{xq}} = 3\pi rl$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h và đường sinh l là $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

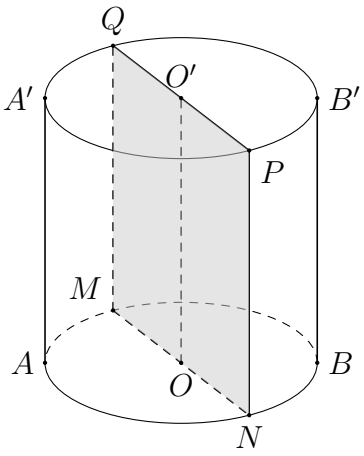
Chọn đáp án C □

Câu 25. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2cm và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $8\pi\text{cm}^2$. **B.** $4\pi\text{cm}^2$. **C.** $32\pi\text{cm}^2$. **D.** $16\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4\text{cm} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2.4 = 16\pi\text{cm}^2$.



Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $6a^3$. **B.** a^3. **C.** $3a^3$. **D.** $2a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h$ với B là diện tích đáy, h là chiều cao của lăng trụ.

Lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng suy ra đường cao là một cạnh bên nên $h = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 4 và độ dài đường sinh bằng 5.

A. 12π. **B**. 36π. **C**. 16π. **D**. 48π.

Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy của khối nón là $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 3$.

Vậy thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, độ dài đường cao bằng 4 cm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ này.

A. 24π (cm^2). **B**. 22π (cm^2). **C**. 26π (cm^2). **D**. 20π (cm^2).

Lời giải.

$S_{\text{xq}} = 2\pi \times r \times h = 2\pi \times 3 \times 4 = 24$ (cm^2).

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho đường thẳng d_2 cố định, đường thẳng d_1 song song và cách d_2 một khoảng cách không đổi. Khi d_1 quay quanh d_2 ta được

A. một hình tròn. **B**. một khối trụ. **C**. một hình trụ. **D**. một mặt trụ.

Lời giải.

Khi d_1 quay quanh d_2 ta được một mặt trụ.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Công thức tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón nào trong bốn đáp án dưới đây là đúng?

A. $S_{xq} = \pi rh$. **B**. $S_{xq} = 2\pi rl$. **C**. $S_{xq} = \pi rl$. **D**. $S_{xq} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a. Tính độ dài đường cao h của hình trụ đó.

A. a. **B**. $2a$. **C**. $3a$. **D**. $4a$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy a và chiều cao h là:

$$S_{xq} = 2\pi ah \Leftrightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = 16\pi\sqrt{3}$. **B**. $V = 12\pi$. **C**. $V = 4$. **D**. $V = 4\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích của khối nón ta tính được $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}.\pi.(\sqrt{3})^2.4 = 4\pi$.

Chọn đáp án D □

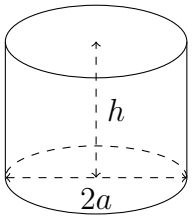
Câu 33. Hình trụ tròn xoay có đường kính đáy là $2a$, chiều cao là $h = 2a$ có thể tích là

A. $V = 2\pi a^3$. **B.** $V = \pi a^3$. **C.** $V = 2\pi a^2$. **D.** $V = 2\pi a^2 h$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $r = a$.

Thể tích $V = h \cdot \pi r^2 = 2a \cdot \pi a^2 = 2\pi a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

A. $S = 8\sqrt{3}\pi$. **B.** $S = 24\pi$. **C.** $S = 16\sqrt{3}\pi$. **D.** $S = 4\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

$S_{xq} = \pi Rl = 4\sqrt{3}\pi$ (đvdt).

Chọn đáp án D □

Câu 35. Công thức tính thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao bằng h là

A. $V = \pi Rh$. **B.** $V = \pi R^2 h$. **C.** $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$. **D.** $V = \pi Rh^2$.

Lời giải.

Gọi S là diện tích đáy của khối trụ, khi đó $V = Sh = \pi R^2 h$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Tính thể tích khối trụ có bán kính $R = 3$, chiều cao $h = 5$.

A. $V = 45\pi$. **B.** $V = 45$. **C.** $V = 15\pi$. **D.** $V = 90\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = 45\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h bán kính đáy là R.

A. $S_{xq} = 2\pi Rh$. **B.** $S_{xq} = \pi^2 Rh$. **C.** $S_{xq} = \pi Rh$. **D.** $S_{xq} = 4\pi Rh$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 4, diện tích xung quanh bằng 48π. Thể tích của khối trụ bằng

A. 24π. **B.** 96π. **C.** 32π. **D.** 72π.

Lời giải.

Gọi hình trụ có bán kính và chiều cao lần lượt là R, h.

Theo giả thiết $R = 4$ và $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 48\pi$ nên $h = 6$.

Do đó thể tích khối trụ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 96\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác ABC (kể cả các điểm trong) quanh cạnh AC ta được

A. Mặt nón. **B.** Khối nón. **C.** Khối trụ. **D.** Khối cầu.

Lời giải.

Khi quay quanh cạnh góc vuông AC thì tam giác và cả phần trong sẽ tạo thành khối nón tròn xoay.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hình nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy r, chiều cao h và đường sinh l. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$. **C.** $h^2 = r^2 + l^2$. **D.** $S_{xq} = \pi rl$.

Lời giải.

Ta có $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - r^2$, suy ra đáp án $h^2 = r^2 + l^2$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Tính diện tích xung quanh của một hình nón tròn xoay có đường cao là 1 và đường kính đáy là 1.

A. π. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{8}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{4}$ (đvdt).

Chọn đáp án D □

Câu 42. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $R^2 = h^2 + l^2$. **B.** $l = h$. **C.** $l^2 = h^2 + R^2$. **D.** $R = h$.

Lời giải.

Theo tính chất hình trụ ta có $l = h$.

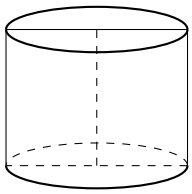
Chọn đáp án B □

Câu 43. Khối trụ tròn xoay có đường cao và bán kính đáy cùng bằng 1 thì thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** π^2. **C.** 2π. **D.** π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$.



Chọn đáp án D □

Câu 44. Gọi l, h và R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Đẳng thức luôn đúng là

A. $l = h$. **B.** $r = h$. **C.** $l^2 = h^2 + R^2$. **D.** $R^2 = h^2 + l^2$.

Lời giải.

Trong hình trụ thì chiều cao và độ dài đường sinh luôn bằng nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Tính thể tích V của khối nón tròn xoay có chiều cao h và đáy là hình tròn bán kính r.

A. $V=\pi rh$. **B.** $V=\dfrac{2}{3}\pi rh$. **C.** $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. **D.** $V=\pi r^2h$.

Lời giải.

Thể tích khối nón bằng $\dfrac{1}{3}$ diện tích đáy nhân chiều cao $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

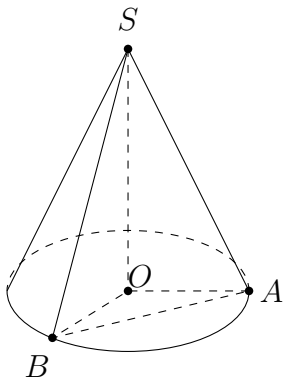
Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình nón có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R=3$ cm, góc ở đỉnh của hình nón là $\varphi=120^\circ$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB, trong đó A,B thuộc đường tròn đáy. Diện tích của tam giác SAB bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm^2. **B.** $6\sqrt{3}$ cm^2. **C.** 6 cm^2. **D.** 3 cm^2.

Lời giải.

Xét tam giác SAO vuông tại O, ta có
$\sin\widehat{ASO}=\dfrac{OA}{SA}\Rightarrow SA=\dfrac{R}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$ cm.
$S_{SAB}=\dfrac{SA^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$ cm^2.



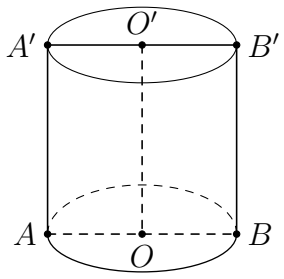
Chọn đáp án A □

Câu 47. Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

A. πa^2. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên hình trụ có đường sinh bằng đường kính đáy: $l=2a$.
Vậy diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq}=2\pi rl=4\pi a^2$.



Chọn đáp án D □

Câu 48. Một hình nón tròn xoay có độ dài đường cao là h và bán kính đường tròn đáy là r. Thể tích khối nón tròn xoay được giới hạn bởi hình nón đó là

A. $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. **B.** $V=\pi r^2h$. **C.** $V=\dfrac{1}{3}\pi rh$. **D.** $V=\dfrac{2}{3}\pi r^2h$.

Lời giải.

Theo công thức về thể tích khối nón tròn xoay.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình trụ có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. πa^2. **B.** $2a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Một hình nón có độ dài đường sinh là 5 cm, đường cao bằng 4 cm. Thể tích V của khối nón đó là

A. $V = 15\pi$ cm^3. **B.** $V = 20\pi$ cm^3. **C.** $V = 36\pi$ cm^3. **D.** $V = 12\pi$ cm^3.

Lời giải.

Ta có bán kính đáy nón $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Khối lăng trụ có chiều cao bằng h, diện tích đáy bằng B có thể tích là

A. $V = \dfrac{1}{2}Bh$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = \dfrac{1}{6}Bh$. **D.** $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

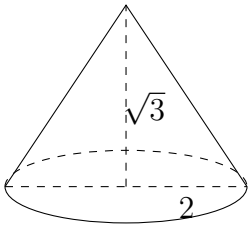
Lời giải.

Khối lăng trụ có chiều cao bằng h, diện tích đáy bằng B có thể tích là $V = Bh$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52.

Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$ (hình vẽ). Thể tích của khối nón là



A. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $4\pi\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Tính thể tích khối trụ biết bán kính đáy $r = 4$ cm và chiều cao $h = 6$ cm.

A. 32π cm^3. **B.** 24π cm^3. **C.** 48π cm^3. **D.** 96π cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = h \cdot S_{\text{đáy}} = 6 \cdot \pi \cdot 4^2 = 96\pi$.

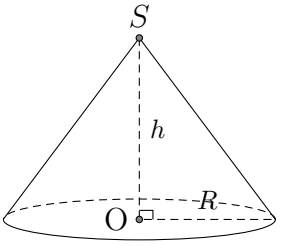
Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho hình nón đỉnh (S) có đáy là đường tròn tâm (O) bán kính R. Biết $SO = h$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. $\sqrt{h^2 - R^2}$. **B.** $\sqrt{h^2 + R^2}$. **C.** $2\sqrt{h^2 - R^2}$. **D.** $2\sqrt{h^2 + R^2}$.

Lời giải.

Ta có đường sinh $l = \sqrt{h^2 + R^2}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 55. Khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thì có thể tích bằng

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $\frac{1}{3}\pi r h^2$. **D.** $\pi r h^2$.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích của khối trụ ta có $V = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 56. Thể tích khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là

A. $V = Bh$. **B.** $V = \frac{1}{6}Bh$. **C.** $V = \frac{1}{2}Bh$. **D.** $V = \frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là $V = Bh$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 57. Diện tích xung quanh mặt trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

A. $S_{\text{xq}} = \pi Rh$. **B.** $S_{\text{xq}} = 3\pi Rh$. **C.** $S_{\text{xq}} = 4\pi Rh$. **D.** $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh mặt trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.

Chọn đáp án D ☐

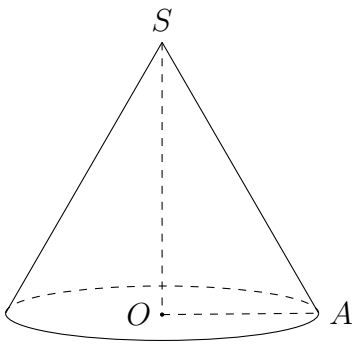
Câu 58. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối nón.

A. $\sqrt{3}\pi a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều cạnh $2a$ nên $l = 2a$, $R = a$ và $h = a\sqrt{3}$.

Suy ra, $V = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 59. Bán kính đáy hình trụ bằng 4 cm, chiều cao bằng 6 cm. Độ dài đường chéo của thiết diện qua trục bằng

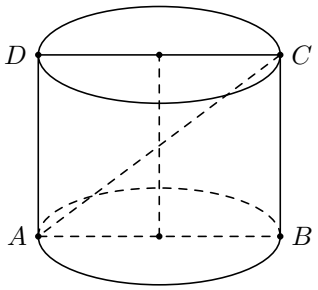
A. 5 cm. **B.** 10 cm. **C.** 6 cm. **D.** 8 cm.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $r = 4, h = 6 \Rightarrow AB = 2r = 8$, $BC = h = 6$.

$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 60. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $\ell = 2$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

A. $S = 8\sqrt{3}\pi$. **B.** $S = 24\pi$. **C.** $S = 4\sqrt{3}\pi$. **D.** $S = 2\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = \pi r\ell = 2\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4.

A. $S = 12\pi$. **B.** $S = 42\pi$. **C.** $S = 36\pi$. **D.** $S = 24\pi$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$.

Chọn đáp án D □

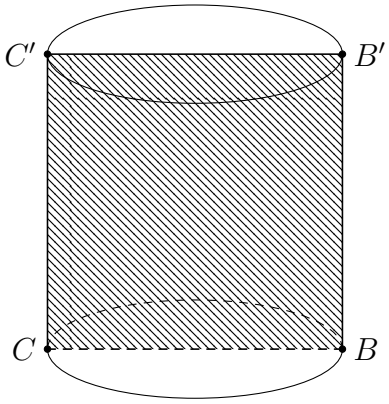
Câu 62. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a. Thể tích của khối trụ đó bằng bao nhiêu?

A. πa^3. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải.

Khối trụ có chiều cao $h = a$, bán kính đáy bằng $r = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot a = \dfrac{\pi a^3}{4}$.



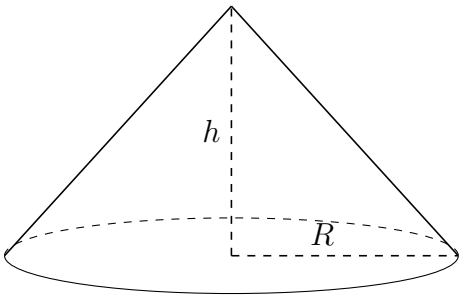
Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho hình nón có chiều cao bằng 3 cm, góc giữa trục và đường sinh bằng 60°. Thể tích của khối nón là:

A. $V = 9\pi$ (cm^3). **B.** $V = 54\pi$ (cm^3). **C.** $V = 27\pi$ (cm^3). **D.** $V = 18\pi$ (cm^3).

Lời giải.

Vì chiều cao bằng 3 cm và góc giữa trục và đường sinh bằng 60° nên bán kính đáy là $R = h\tan 60° = 3\sqrt{3}$ cm. Suy ra thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 27\pi$ (cm^3).



Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Công thức tính thể tích khối trụ đó là

A. πRh^2. **B.** $\pi R^2 h$. **C.** $\dfrac{1}{3}\pi Rh^2$. **D.** $\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Một khối trụ có độ dài đường sinh bằng 10, biết thể tích của khối trụ bằng 90π. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

A. 60π. **B**. 78π. **C**. 81π. **D**. 90π.

Lời giải.

Gọi R, l lần lượt là bán kính và độ dài đường sinh của khối trụ. Chiều cao của khối trụ cũng bằng độ dài đường sinh của khối trụ.

Thể tích V của khối trụ là $V = \pi R^2 l$. Suy ra $R = \sqrt{\dfrac{V}{\pi l}} = \sqrt{\dfrac{90\pi}{10\pi}} = 3$.

Diện tích xung quanh của khối trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho.

A. $a\sqrt{5}$. **B**. $3\sqrt{2}a$. **C**. $3a$. **D**. $5a$.

Lời giải.

Ta có diện tích xung quanh của hình nón $\mathcal{S}_{\text{xq}} = \pi r \times l = \pi a \times l = 5\pi a^2 \Leftrightarrow l = 5a$.

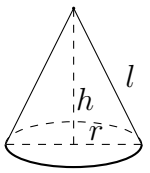
Chọn đáp án D □

Câu 67. Một hình nón có bán kính đáy là $5a$, độ dài đường sinh là $13a$ thì đường cao h của hình nón là

A. $12a$. **B**. $7\sqrt{6}a$. **C**. $17a$. **D**. $8a$.

Lời giải.

Ta có $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(13a)^2 - (5a)^2} = 12a$.



Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho một hình trụ có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 3. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 6π. **B**. 18π. **C**. 15π. **D**. 9π.

Lời giải.

Khối trụ có chiều cao h, bán kính đáy r có thể tích là $V = \pi r^2 h$.

Nên thể tích khối trụ đã cho bằng $\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là

A. một hình chữ nhật. **B**. một tam giác cân. **C**. một đường elip. **D**. một đường tròn.

Lời giải.

Mặt phẳng chứa trục của một hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác cân.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm và khoảng cách giữa hai đáy bằng 8 cm. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. 40π cm^2. **B.** 144π cm^2. **C.** 72π cm^2. **D.** 80π cm^2.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot r \cdot h = 80\pi$ cm^2.

Chọn đáp án D □

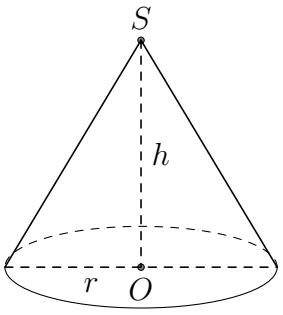
Câu 71. Thể tích của khối nón có chiều cao $h = 6$ và bán kính đáy $r = 4$ bằng bao nhiêu?

A. $V = 32\pi$. **B.** $V = 96\pi$. **C.** $V = 16\pi$. **D.** $V = 48\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{đáy}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \pi \cdot 4^2 = 32\pi.$$



Chọn đáp án A □

Câu 72. Khối nón có chiều cao $h = 3$ cm và bán kính đáy $r = 2$ cm thì có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 16π cm^2. **B.** 4π cm^2. **C.** $\frac{4}{3}\pi$ cm^3. **D.** 4π cm^3.

Lời giải.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 4\pi$ cm^3

Chọn đáp án B □

Câu 73. Cho hình trụ (T) có độ dài đường sinh l, bán kính đáy r. Kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của (T). Công thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{xq} = 3\pi rl$. **B.** $S_{xq} = 2\pi rl$. **C.** $S_{xq} = \pi rl$. **D.** $S_{xq} = 2\pi r^2 l$.

Câu 74. Một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy, độ dài đường sinh và bán kính đường tròn đáy lần lượt bằng h, l, r. Khi đó công thức tính diện tích toàn phần của khối trụ là gì?

A. $S_{tp} = 2\pi r(l + r)$. **B.** $S_{tp} = 2\pi r(l + 2r)$. **C.** $S_{tp} = \pi r(l + r)$. **D.** $S_{tp} = \pi r(2l + r)$.

Lời giải.

$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r(l + r)$.

Chọn đáp án A □

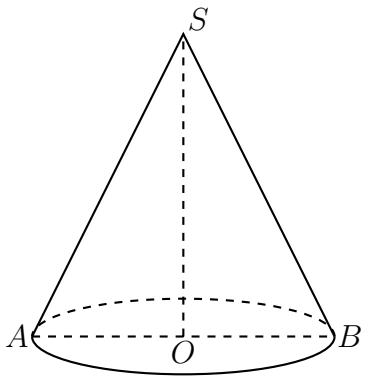
Câu 75. Cho hình nón tròn xoay. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh O của hình nón và cắt đường tròn đáy của hình nón tại hai điểm. Thiết diện được tạo thành là hình gì?

A. Một tứ giác. **B.** Một hình thang cân.

C. Một ngũ giác. **D.** Một tam giác cân.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác SAB cân tại S.



Chọn đáp án D ☐

Câu 76. Cho hình nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy r, chiều cao h và đường sinh l. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$. **C.** $h^2 = r^2 + l^2$. **D.** $S_{xq} = \pi rl$.

Lời giải.

Công thức đúng $h^2 = l^2 - r^2$

Chọn đáp án C ☐

Câu 77. Tính diện tích toàn phần của hình nón có bán kính đáy bằng $4a$, chiều cao bằng $3a$.

A. $20\pi a^2$. **B.** $15\pi a^2$. **C.** $24\pi a^2$. **D.** $36\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có đường sinh $l = \sqrt{h^2 + R^2} = 5a$.
Ta có $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi \cdot R \cdot l + \pi \cdot R^2 = 36\pi a^2$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 78. Mặt cầu bán kính R nội tiếp trong một hình lập phương. Hãy tính thể tích V của hình lập phương đó.

A. $V = \dfrac{8\pi R^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{16\pi R^3}{3}$. **C.** $V = 16R^3$. **D.** $V = 8R^3$.

Lời giải.

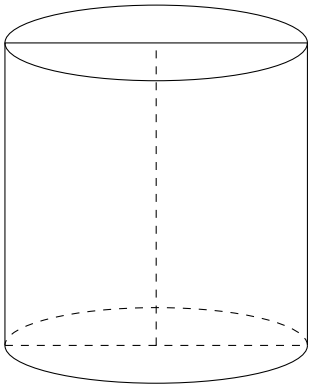
Vì mặt cầu bán kính R nội tiếp trong một hình lập phương nên độ dài một cạnh hình lập phương bằng $2R$. Thể tích khối lập phương $V = (2R)^3 = 8R^3$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 79. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 8, diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu có bán kính bằng 2. Tính thể tích V của khối trụ đó.

A. $V = 32$. **B.** $V = 64$. **C.** $V = 16$. **D.** $V = 24$.

Lời giải.



Gọi r, S_{xq}, $S_{\text{đ}}$ lần lượt là bán kính, diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình trụ.
Gọi S_{mc} là diện tích mặt cầu.
Ta có:
$S_{\text{đ}} = S_{\text{mc}} \Leftrightarrow \pi r^2 = 4\pi \cdot 2^2 \Leftrightarrow r = 4.$
Thể tích của khối trụ:
$V = S_{\text{đ}} \cdot h = \pi r^2 h = \dfrac{2\pi rh \cdot r}{2} = \dfrac{S_{\text{xq}} \cdot r}{2} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16.$
(với h là đường cao của hình trụ).
Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Cho một khối trụ có đường kính của đáy bằng với chiều cao và có thể tích bằng 2π. Tính chiều cao h của khối trụ.

A. $h = 2$. **B.** $h = \sqrt[3]{24}$. **C.** $h = \sqrt{2}$. **D.** $h = \sqrt[3]{4}$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ $V = 2\pi$. Theo giả thiết, suy ra:
$\pi \cdot \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 \cdot h = 2\pi \Leftrightarrow h^3 = 8 \Leftrightarrow h = 2.$
Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Một nón lá có đường kính của vành nón là 50 cm, chiều cao bằng 25 cm. Hỏi diện tích xung quanh của cái nón lá đó bằng bao nhiêu?

A. 625 cm^2. **B.** $625\sqrt{3}\pi$ cm^2. **C.** $625\sqrt{2}\pi^2$ cm^2. **D.** 625π cm.

Lời giải.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2}$.
Diện tích xung quanh của hình nón là:
$S_{xq} = \pi \cdot 25 \cdot 25\sqrt{2} = 625\pi\sqrt{2}$ cm^2.
Chọn đáp án (C) □

Câu 82. Tính diện tích xung quanh của một hình nón có bán kính đường tròn đáy là 4 cm và độ dài đường sinh là 5 cm.

A. 15π cm^2 . **B.** 20π cm^2 . **C.** $9\pi\sqrt{3}$ cm^2 . **D.** 12π cm^2 .

Lời giải.

Ta có: $S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi$ cm^2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho hình nón có chu vi đường tròn đáy là 4πcm, chiều cao là $\sqrt{3}$cm. Tìm thể tích của khối nón.

A. $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **B.** $\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **C.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **D.** $4\pi\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải.

Ta có: $2\pi r = 4\pi \Leftrightarrow r = 2$.
Vậy $V = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3.
Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 10$ cm và chiều cao $h = 6$ cm.

A. $V = 120\pi$ cm^3. **B**. $V = 360\pi$ cm^3. **C**. $V = 200\pi$ cm^3. **D**. $V = 600\pi$ cm^3.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 6 = 600\pi$ cm^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Gọi r, h, l, S_{xq} lần lượt là bán kính đáy, chiều cao, độ dài đường sinh và diện tích xung quanh của một hình nón. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_{\text{xq}} = \pi rh$. **B**. $S_{\text{xq}} = \pi rl$. **C**. $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$. **D**. $S_{\text{xq}} = \pi r^2 h$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích xung quanh ta có: $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Công thức thể tích V của khối nón tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h được cho bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \dfrac{4}{3}\pi rh^2$. **B**. $V = \dfrac{1}{3}\pi rh^2$. **C**. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2 h$. **D**. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Theo công thức lý thuyết, ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Cho hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy là R. Diện tích toàn phần của hình trụ đó là

A. $S_{\text{tp}} = 2\pi R(R + h)$. **B**. $S_{\text{tp}} = \pi R(R + h)$. **C**. $S_{\text{tp}} = \pi R(2R + h)$. **D**. $S_{\text{tp}} = \pi R(R + 2h)$.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2 \cdot S_{\text{đ}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng r, chiều cao bằng h. Khẳng định nào **sai?**

A. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng $2\pi rh + r\pi^2 + \pi h^2$.

B. Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có diện tích $2rh$.

C. Thể tích khối trụ bằng $\pi r^2 h$.

D. Khoảng cách giữa trục của hình trụ và đường sinh củả hình trụ bằng r.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi rh, S_{\text{đ}} = \pi r^2 \Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đ}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T) là

A. $S_{\text{tp}} = \pi Rl + 2\pi R^2$. **B**. $S_{\text{tp}} = \pi Rh + \pi R^2$. **C**. $S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2$. **D**. $S_{\text{tp}} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$.

Lời giải.

$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 3a$, bán kính đường tròn đáy $r = a$. Thể tích khối nón bằng

A. $3\pi a^3$. **B**. $\dfrac{\pi a^3}{9}$. **C**. πa^3. **D**. $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{2}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot 3a = \pi a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Công thức nào sau đây là công thức tính thể tích V của khối trụ có diện tích đáy là B, chiều cao h?

A. $V = hB$. **B**. $V = \dfrac{1}{3}hB$. **C**. $V = \dfrac{4}{3}hB$. **D**. $V = 2hB$.

Lời giải.

Công thức thể tích khối trụ là $V = hB$.

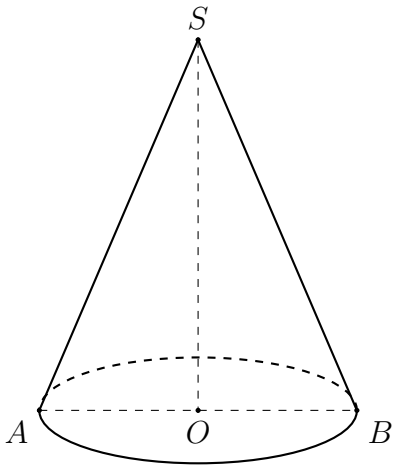
Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = 5$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V = 10\pi$. **B**. $V = 20\pi$. **C**. $V = \dfrac{20\pi}{3}$. **D**. $V = \dfrac{10\pi}{3}$.

Lời giải.

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{20\pi}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho hình chữ nhật $ABCD$ cạnh $AB = 2$, $AD = 4$. Gọi M, N là trung điểm của các cạnh AB, CD. Cho hình chữ nhật này quay quanh MN ta được hình trụ có thể tích V bằng bao nhiêu?

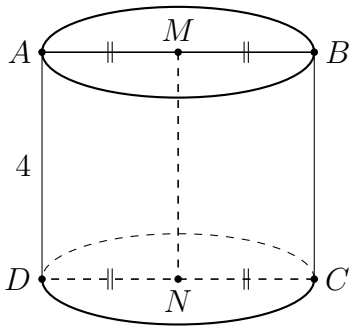
A. $V = 8\pi$. **B**. $V = 16\pi$. **C**. $V = 4\pi$. **D**. $V = 32\pi$.

Lời giải.

Bán kính khối trụ bằng 1.

Chiều cao khối trụ bằng 4.

Thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi$.

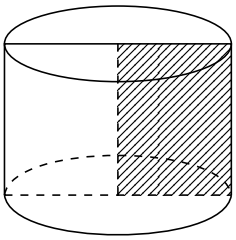


Chọn đáp án C □

Câu 94. Khối tròn xoay được sinh ra khi quay một hình chữ nhật quanh một cạnh của nó là

A. Khối chóp. **B**. Khối trụ. **C**. Khối cầu. **D**. Khối nón.

Lời giải.



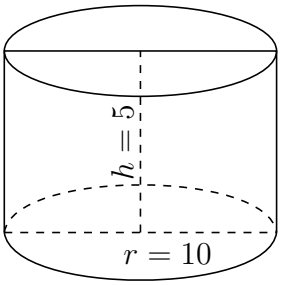
Chọn đáp án B □

Câu 95. Diện tích toàn phần của một hình trụ có bán kính đáy bằng 10 cm và khoảng cách giữa hai đáy bằng 5 cm là

A. 200π cm^2. **B**. 300π cm^2. **C**. 250π cm^2. **D**. 100π cm^2.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = 10$ cm; khoảng cách giữa hai đáy bằng 5 cm
$\Rightarrow$ chiều cao hay đường sinh $h = l = 5$ cm.
Diện tích toàn phần của hình trụ là
$S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 10 \cdot 5 + 2\pi \cdot 10^2 = 300\pi$ cm^2.



Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng bán kính đường tròn đáy. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

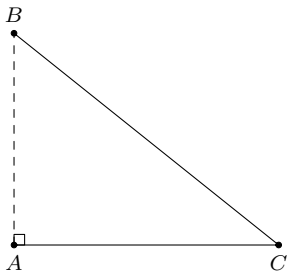
A. 60π. **B**. 80π. **C**. 100π. **D**. 120π.

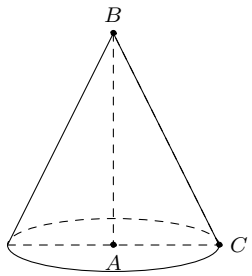
Lời giải.

Theo đề bài ta có $h = r$.
Diện tích xung quanh là $A = 2\pi rh = 2\pi r^2 = 50\pi$.
Diện tích toàn phần là $2\pi r(r + h) = 2\pi 2r^2 = 50\pi.2 = 100\pi$.
Chọn đáp án C □

Câu 97.

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$. Quay tam giác ABC quanh trục AB ta nhận được hình nón có độ dài đường sinh bằng





A. 8. **B**. 10. **C**. 6. **D**. 7.

Lời giải.

Đường sinh chính là cạnh huyền BC của tam giác ABC.
Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ABC ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 98. Cho hình nón có thể tích bằng $V = 36\pi a^3$ và bán kính bằng $3a$. Tính độ dài đường cao h của hình nón đã cho.

A. $h = 4a$. **B.** $h = 2a$. **C.** $h = 5a$. **D.** $h = 12a$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}Bh \Leftrightarrow 36\pi a^3 = \dfrac{1}{3}\pi(3a)^2 h \Leftrightarrow h = 12a$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = 12\pi$. **B.** $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$. **D.** $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \dfrac{1}{2}l2\pi r = 4\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $l^2 = h^2 + R^2$. **B.** $\dfrac{1}{l^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{R^2}$. **C.** $R^2 = h^2 + l^2$. **D.** $l^2 = hR$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. B	5. B	6. A	7. A	8. D	9. B	10. C
11. C	12. B	13. D	14. B	15. A	16. A	17. C	18. C	19. B	20. C
21. C	22. A	23. C	24. C	25. D	26. A	27. A	28. A	29. D	30. C
31. B	32. D	33. A	34. D	35. B	36. A	37. A	38. B	39. B	40. C
41. D	42. B	43. D	44. A	45. C	46. A	47. D	48. A	49. D	50. D
51. B	52. A	53. D	54. B	55. B	56. A	57. D	58. B	59. B	60. D
61. D	62. D	63. C	64. B	65. A	66. D	67. A	68. B	69. B	70. D
71. A	72. B	73. B	74. A	75. D	76. C	77. D	78. D	79. C	80. A
81. C	82. B	83. C	84. D	85. B	86. D	87. A	88. A	89. D	90. C
91. A	92. C	93. C	94. B	95. B	96. C	97. B	98. D	99. B	100. A

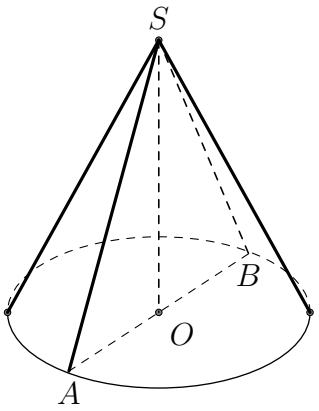
2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng qua trục tạo thành một tam giác đều có cạnh bằng a. Thể tích của khối nón là

A. $\pi a^3\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{3\pi a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.



Cách giải:

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow \begin{cases} R = OA = OB = \dfrac{a}{2}. \\ h = SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

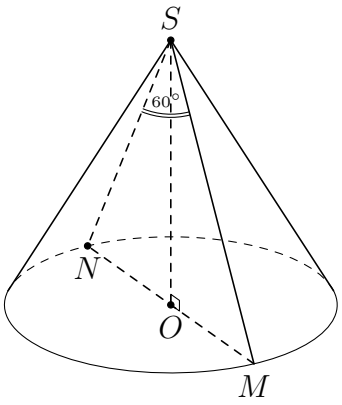
Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A. $2\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.



Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{MSO} = 30^\circ$.

$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có

$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Chiều cao $h = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh S của khối trụ đó.

A. $S = 2\pi a^2$. **B.** $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. **C.** $S = \pi a^2$. **D.** $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Do thiết diện là hình vuông cạnh a nên bán kính đáy bằng $\dfrac{a}{2}$ và chiều cao $h = a$.

Diện tích xung quanh: $S = 2\pi \times \dfrac{a}{2} \times a = \pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Thiết diện qua trục của hình nón tròn xoay là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{3\pi a^3}{8}$.

Lời giải.

Cắt hình nón bằng mặt phẳng qua trục ta dược thiết diện là tam giác đều suy ra $2r = 2a \Rightarrow r = a$ và đường cao $h = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

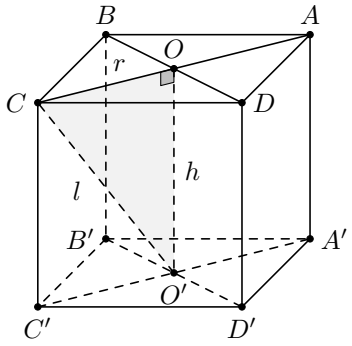
A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là đường tròn có bán kính

$$r = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra $h = a$.

Khi đó độ dài đường sinh là $l = O'C = \sqrt{O'O^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Một khối nón có bán kính đáy bằng 3 và góc ở đỉnh bằng $60°$ thì có thể tích bằng bao nhiêu?

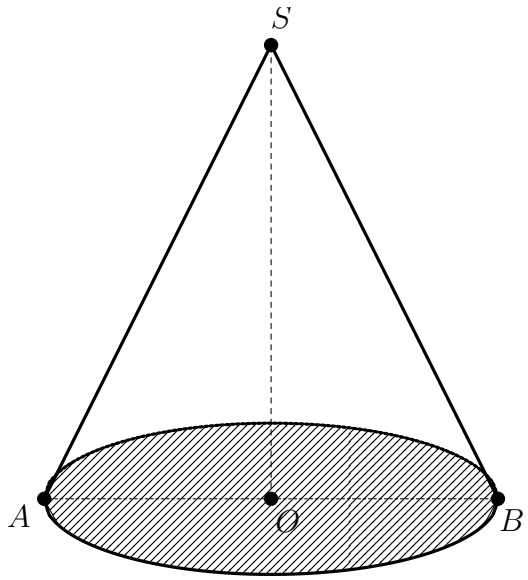
A. $9\pi\sqrt{3}$. **B.** $27\pi\sqrt{3}$. **C.** $3\pi\sqrt{3}$. **D.** $6\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức tính thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ với r là bán kính đáy, h là chiều cao hình chóp.

Cách giải:



Cắt hình nón bằng mặt phẳng qua trục ta dược thiết diện là tam giác cân SAB có $AB = 2R = 6$ và $ASB = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều cạnh $6 \Rightarrow$ trung tuyến $SO = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Một khối nón có thể tích bằng 4π và chiều cao bằng 3. Bán kính đường tròn đáy bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow 4\pi = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích xung quanh S của hình nón đó là

A. $S = 4\pi a^2$. **B.** $S = 2\pi a^2$. **C.** $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. **D.** $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Vì thiết diện qua trục là tam giác đều nên chiều cao của hình nón là $h = R\sqrt{3}$.

Từ đây ta suy ra thể của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. (1)

Theo giả thiết ta có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R = a$. Do đó diện tích xung quanh là $S = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ (cm), bán kính đáy $r = 25$ (cm). Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 (cm). Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 400$ (cm^2). **B.** $S = 500$ (cm^2). **C.** $S = 406$ (cm^2). **D.** $S = 300$ (cm^2).

Lời giải.

Thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow (SAB) \perp (SOK)$.

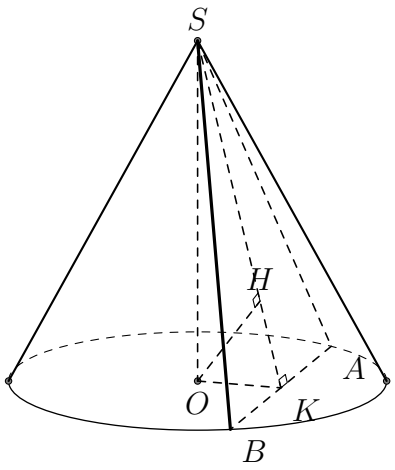
Kẻ $OH \perp SK\ (H \in SK) \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12(\text{cm})$.

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{12^2} - \dfrac{1}{20^2} = \dfrac{1}{225} \Rightarrow OK = 15$ (cm).

$KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 2BK = 40$ (cm).

$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ (cm).

$\Rightarrow S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}.SK.AB = 500$ (cm^2).



Chọn đáp án B □

Câu 11. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 3.

A. $V = 216\pi$. **B.** $V = 108\pi$. **C.** $V = 72\pi$. **D.** $V = 36\pi$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = 6^2 \cdot 3\pi = 108\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 60π . Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 360π. **B.** 288π. **C.** 120π. **D.** 96π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = 10\pi r = 60\pi \Rightarrow r = 6$.

và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Một hình trụ có trục OO' chứa tâm của một mặt cầu bán kính R, các đường tròn đáy của hình trụ đều thuộc mặt cầu trên, đường cao của hình trụ bằng R. Tính thể tích V của khối trụ.

A. $V = \dfrac{3\pi R^3}{4}$. **B.** $V = \pi R^3$. **C.** $V = \dfrac{\pi R^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.

Cách giải:

Đường kính đáy của khối trụ là: $2r = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$V = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 R = \dfrac{3\pi R^3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích mặt bên ABB_1A_1 bằng 6, khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt phẳng ABB_1A_1 bằng 8. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. 24. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.

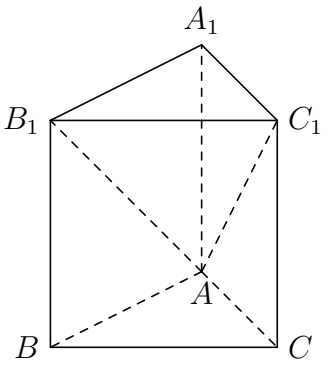
Lời giải.

Phương pháp

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = Sh$

Chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp $C_1.ABC$ và khối tứ giác $C_1.ABB_1A_1$

Ta có: $V_{C_1.ABC} = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow \begin{cases} V_{C_1ABB_1A_1} = \dfrac{2}{3}V \\ V_{C_1ABB_1A_1} = \dfrac{1}{3}d\left(A;(ABB_1A_1)\right) = \dfrac{1}{3}.6.8 = 16 \end{cases}$



Chọn đáp án A □

Câu 15. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $V = 27\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 24\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 36\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $ADD'A'$. Gọi O, O' lần lượt là hai tâm đường tròn đáy (hình vẽ). Suy ra $l = 2r$.

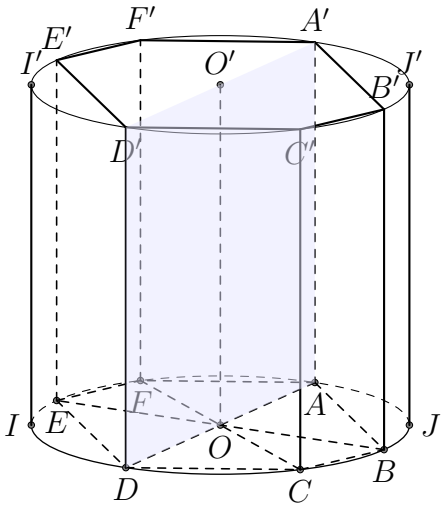
Theo giả thiết ta có

$S_{xq} = 2\pi rl = 36\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi r \cdot 2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a \Rightarrow l = 6a$.

Lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ nội tiếp hình trụ có chiều cao là $h = 6a$.

$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta OAB} = 6 \cdot \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔOAB đều, cạnh bằng $3a$).

Suy ra $V = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 6a = 81a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 16. Khối nón có bán kính đáy $r = 3$, chiều cao $h = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón

A. $V = 9\pi\sqrt{2}$. **B.** $V = 3\pi\sqrt{11}$. **C.** $V = 3\pi\sqrt{2}$. **D.** $V = \pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2} = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án C □

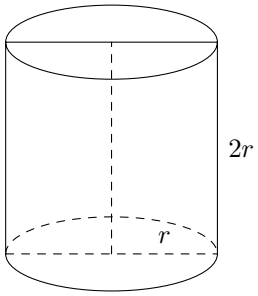
Câu 17. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 8π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

A. $\dfrac{4\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Gọi bán kính đường tròn đáy là r. Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông nên chiều cao hình trụ là $2r$. Ta có $S_{tp} = 2S_d + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.

Theo đề bài $S_{tp} = 8\pi \Rightarrow r^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{9} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{9}$.

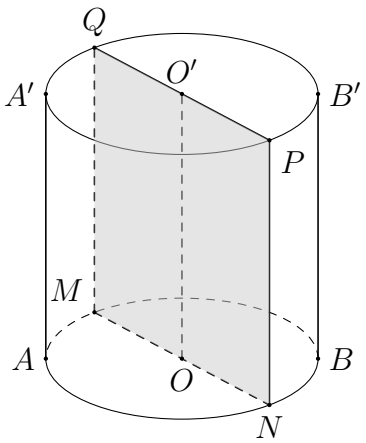


Chọn đáp án C □

Câu 18. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 30cm^2 và chu vi bằng 26cm . Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là

A. $23\pi\text{cm}^2$. **B**. $\dfrac{23\pi}{2}\text{cm}^2$. **C**. $\dfrac{69\pi}{2}\text{cm}^2$. **D**. $69\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $MNPQ$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h \cdot 2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h + 2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \left[\begin{array}{l} r = 5 \Rightarrow h = 3 \\ r = \dfrac{3}{2} \Rightarrow h = 10 \text{ (nhận} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + 2S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 10 + 2\pi \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{69\pi}{2}\text{cm}^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 36\pi$. **B**. $V = 60\pi$. **C**. $V = 20\pi$. **D**. $V = 12\pi$.

Lời giải.

☑ Ta có $S_{xq} = \pi rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{15\pi}{3\pi} = 5$ và chiều cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

☑ Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

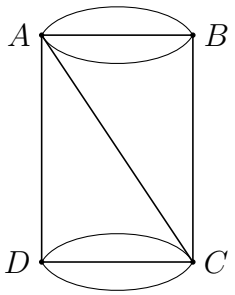
Chọn đáp án D □

Câu 20. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy hình trụ, $AB = 4a; AC = 5a$. Tính thể tích khối trụ:

A. $V = 8\pi a^3$. **B.** $V = 16\pi a^3$. **C.** $V = 12\pi a^3$. **D.** $V = 4\pi a^3$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức tính thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \pi r^2 h$.



Cách giải:

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ABC có

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 .BC = \pi.(2a)^2.3a = 12\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó.

A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $\dfrac{2}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

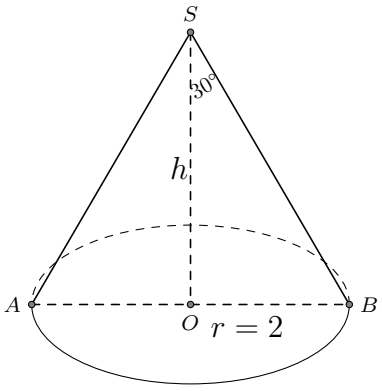
Ta có: $V_{\text{Trụ}} = h\pi r^2 = 2a \cdot \pi \cdot a^2 = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 cm, góc ở đỉnh bằng 60°. Tính thể tích của khối nón đó.

A. $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}$ cm^3. **B.** $8\sqrt{3}\pi$ cm^3. **C.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.



Vì góc ở đỉnh bằng 60° nên đường cao của hình nón là

$$h = r \cdot \cot 30° = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Khi đó, thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

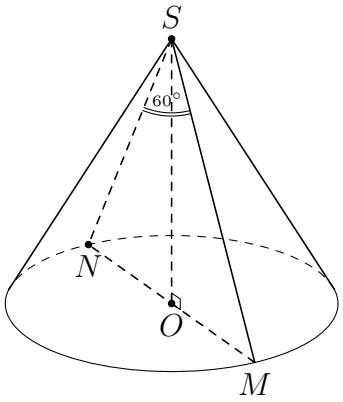
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A. $2\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hình nón đã cho có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O đường kính MN như hình vẽ.



Ta có bán kính đáy $r = OM = a$, góc $\widehat{MSN} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{MSO} = 30^\circ$.

$\triangle SOM$ vuông tại O, ta có

$\sin\widehat{MSO} = \dfrac{OM}{SM}$, suy ra $SM = \dfrac{OM}{\sin\widehat{MSO}} = 2a$, hay đường sinh $l = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot l = 2\pi a^2.$$

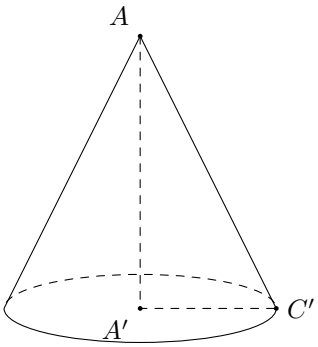
Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C'$ quanh trục AA'.

A. $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$. **B.** $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. **C.** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. **D.** $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$.

Lời giải.

Khi quay tam giác $AA'C'$ quanh trục AA' ta được hình nón có bán kính đáy $R = A'C' = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = AC'$ và chiều cao $h = AA' = a$.



Ta có $l = AC' = \sqrt{A'C'^2 + AA'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi(\sqrt{6}+2)a^2.$$

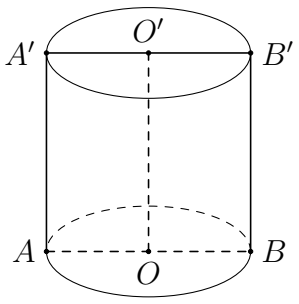
Chọn đáp án A □

Câu 25. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π. Thể tích khối trụ là

A. $\dfrac{2}{3}\pi$. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Ta có $ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow h = 2r$.



Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = 2$.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Một hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy và thể tích của khối trụ bằng 16π . Diện tích toàn phần của khối trụ đã cho bằng

A. 16π. **B**. 12π. **C**. 8π. **D**. 24π.

Lời giải.

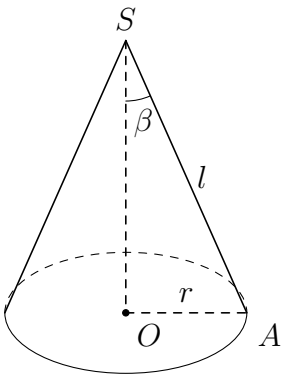
Gọi bán kính đáy của hình trụ là R suy ra $h = l = 2R$.
Theo đề bài ta có thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2.h = \pi R^2.2R = 2\pi R^3 = 16\pi \Rightarrow R = 2$
Do đó $h = l = 4$. Diện tích toàn phần của khối trụ là: $S = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi.2.4 + 2\pi.2^2 = 24\pi$
Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

A. $60°$. **B**. $150°$. **C**. $90°$. **D**. $120°$.

Lời giải.

Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm mặt đáy của hình nón. Lấy A là một điểm nằm trên đường tròn đáy. Gọi góc ở đỉnh của hình nón là 2β suy ra $\beta = \widehat{OSA}$.
Mặt khác $S_{xq} = \pi rl \Leftrightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$. Xét $\triangle SOA$ vuông tại O, ta có $\sin OSA = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OSA} = 60°$.
Vậy $2\beta = 2\widehat{OSA} = 120°$.



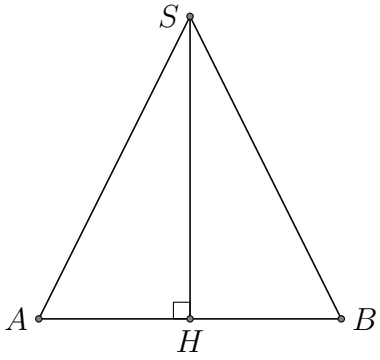
Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hình nón tròn xoay có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}\pi$. Góc ở đỉnh của hình nón đã cho bằng

A. $60°$. **B**. $150°$. **C**. $90°$. **D**. $120°$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện qua trục của hình nón đã cho là tam giác SAB, gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón.
Ta có $AH = 3$ và $S_{xq} = \pi \cdot AH \cdot SA$
Suy ra $SA = \dfrac{S_{xq}}{\pi AH} = \dfrac{6\sqrt{3}\pi}{3\pi} = 2\sqrt{3}$.
Ta có $\cos\widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 30°$.
Do đó, góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$.



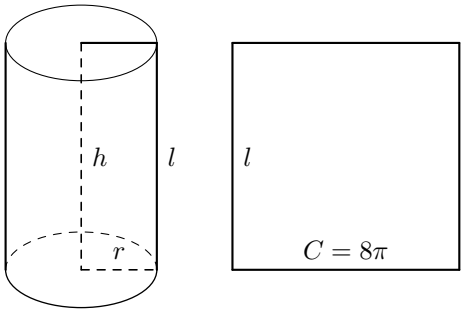
Chọn đáp án A □

Câu 29. Cắt mặt xung quanh của một hình trụ dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được hình vuông có chu vi bằng 8π. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $2\pi^2$. **B**. $2\pi^3$. **C**. 4π. **D**. $4\pi^2$.

Lời giải.

Chu vi hình vuông bằng 8π nên cạnh hình vuông bằng 2π.
Do đó hình trụ có bán kính $R = 1$, đường sinh $l = 2R$.
Vậy thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h = 2\pi^2$.



Chọn đáp án A □

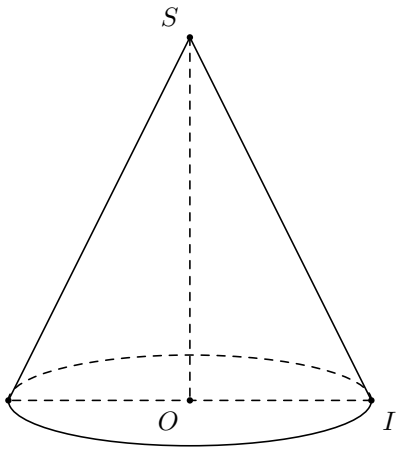
Câu 30. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích của khối nón (N).

A. 36π. **B.** 12π. **C.** 16π. **D.** 45π.

Lời giải.

Gọi SO, SI lần lượt là đường cao và đường sinh của khối nón (N).
Ta có $S_{xq} = \pi \cdot OI \cdot SI$.
$\Rightarrow SI = \dfrac{S_{xq}}{\pi \cdot OI} = 5$.
Suy ra $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = 4$.
Thể tích của khối nón (N) bằng

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot OI^2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi 9 = 12\pi$$



Chọn đáp án B □

Câu 31. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính bằng 3.

A. 18π. **B.** 36π. **C.** 12π. **D.** 9π.

Lời giải.

Gọi r là bán kính của mặt cầu.
Ta có diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$.
Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho khối nón có chiều cao bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^2 .2a = \dfrac{2\pi a^3}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho khối trụ (T). Biết rằng một mặt phẳng chứa trục của (T) cắt (T) theo thiết diện là một hình vuông cạnh $4a$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $8\pi a^3$. **B.** $64\pi a^3$. **C.** $32\pi a^3$. **D.** $16\pi a^3$.

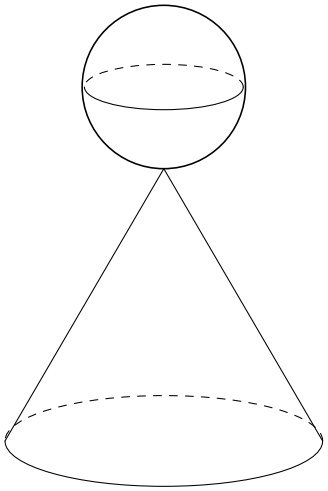
Lời giải.

Thiết diện của hình trụ (T) qua trục là hình vuông cạnh $4a \Rightarrow$ hình trụ có chiều cao là $h = 4a$ và bán kính đáy $R = \dfrac{1}{2} \cdot 4a = 2a \Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot 4a = 16\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34.

Một khối pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \dfrac{1}{2}l$ và $l = \dfrac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau như hình vẽ bên. Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là $91\,\text{cm}^2$. Tính diện tích của khối cầu (H_1).



A. $\dfrac{104}{5}\,\text{cm}^2$. **B.** $16\,\text{cm}^2$. **C.** $64\,\text{cm}^2$. **D.** $\dfrac{26}{5}\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Do giả thiết $r = \dfrac{1}{2}l$ và $l = \dfrac{3}{2}R$ suy ra $r = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2}R = \dfrac{3}{4}R$.

Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình nón, ta có

$$S_1 = \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4}R\right) \cdot \frac{3}{2}R + \pi \cdot \left(\frac{3}{4}R\right)^2 = \frac{27\pi R^2}{16}.$$

Mặt khác gọi S_2 là diện tích mặt cầu, ta có $S_2 = 4\pi R^2$.

Để thỏa mãn bài toán cho

$$S_1 + S_2 = 91 \Leftrightarrow \frac{27\pi R^2}{16} + 4\pi R^2 = 91 \Leftrightarrow \frac{91\pi R^2}{16} = 91 \Leftrightarrow \pi R^2 = 16.$$

Do đó $S_2 = 4\pi R^2 = 4 \cdot 16 = 64\ (\text{cm}^2)$.

Chọn đáp án (C) □

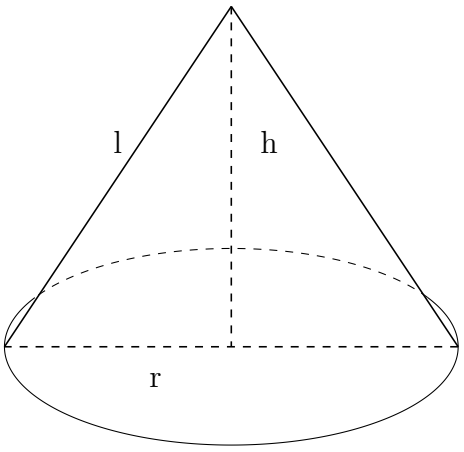
Câu 35. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $l = 2a; r = a$, suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}a$.

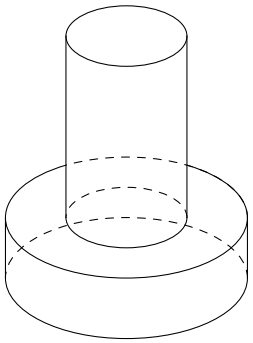
Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 36.

Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1$, $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30\,\text{cm}^3$, thể tích khối trụ (H_1) bằng



A. $24\,\text{cm}^3$. **B.** $15\,\text{cm}^3$. **C.** $20\,\text{cm}^3$. **D.** $10\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối trụ (H_1), (H_2).

Ta có $V_2 = h_2\pi r_2^2 = 2h_1\pi\dfrac{1}{4}r_1^2 = \dfrac{1}{2}h_1\pi r_1^2 = \dfrac{1}{2}V_1$. Mà $V_1 + \dfrac{1}{2}V_1 = 30$ nên $V_1 = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao gấp hai lần bán kính đáy.

A. $V = 6\sqrt{3}\pi$. **B.** $V = 2\sqrt{3}\pi$. **C.** $V = 2\pi$. **D.** $V = 6\pi$.

Lời giải.

Chiều cao khối nón $h = 2r = 2\sqrt{3}$. Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 2\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $AB = 4a$. Quay tam giác này xung quanh cạnh AB. Thể tích của khối nón được tạo thành là

A. $\dfrac{64\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 39. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm, chiều cao $h = 50$ cm. Hỏi diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ đó bằng bao nhiêu?

A. $S_{\text{xq}} = 500$ cm^2. **B.** $S_{\text{xq}} = 250$ cm^2. **C.** $S_{\text{xq}} = 500\pi$ cm^2. **D.** $S_{\text{xq}} = 2500\pi$ cm^2.

Câu 40. Một hình trụ tròn xoay có diện tích toàn phần là S_1, diện tích đáy là S. Cắt đôi hình trụ này bằng một mặt phẳng vuông góc và đi qua trung điểm của đường sinh, ta được hai hình trụ nhỏ mà mỗi hình trụ nhỏ có diện tích toàn phần là S_2. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_2 = \dfrac{1}{2}S_1 + S$. **B.** $S_2 = \dfrac{1}{2}(S_1 + S)$. **C.** $S_2 = 2S_1$. **D.** $S_2 = \dfrac{1}{2}S_1$.

Câu 41. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh $2a$. Thể tích khối nón là

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Câu 42. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao là $a\sqrt{3}$, đường kính đáy là $2a$. Tìm diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = 2\pi a^2$. **C.** $S_{xq} = \pi a^2$. **D.** $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = a$, suy ra đường sinh $l = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$. Do đó, diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = 2a^2\pi$.

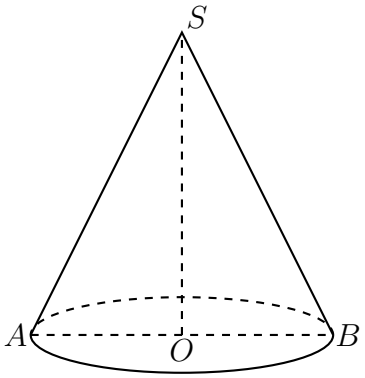
Chọn đáp án B □

Câu 43. Thể tích V của khối nón có chiều cao bằng a và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$ là

A. $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $V = 4\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{2}{3}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{5}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Theo Pitago ta có $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = 2a$.
Vậy $V = \sqrt{1}3OA^2SO\pi = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.



Chọn đáp án A □

Câu 44. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S. Diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính a. Khi đó thể tích của hình trụ bằng

A. Sa. **B.** $\dfrac{1}{2}Sa$. **C.** $\dfrac{1}{3}Sa$. **D.** $\dfrac{1}{4}Sa$.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là r, khi đó $\pi r^2 = 4\pi a^2$ nên $r = 2a$.
Chiều cao hình trụ là $h = \dfrac{S}{2\pi r} = \dfrac{S}{4\pi a}$. Thể tích hình trụ là $V = h\pi r^2 = \dfrac{S}{4\pi a}\pi 4a^2 = Sa$.

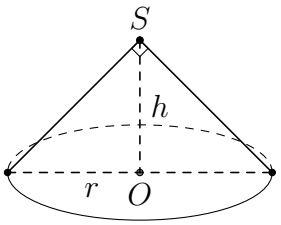
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình nón có chiều cao h và góc ở đỉnh bằng $90°$. Thể tích của khối nón xác định bởi hình nón trên là

A. $\dfrac{2\pi h^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi h^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi h^3}{3}$. **D.** $2\pi h^3$.

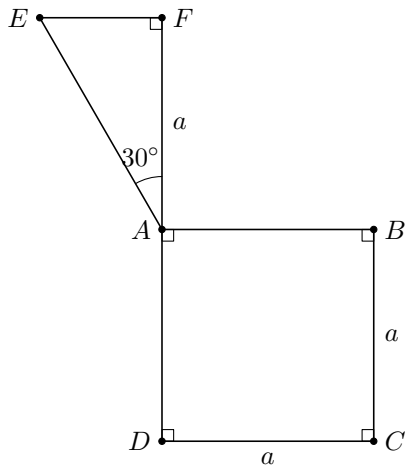
Lời giải.

Từ giả thiết suy ra bán kính nón $r = h$.
Vậy thể tích khối nón tương ứng là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi h^3}{3}$.



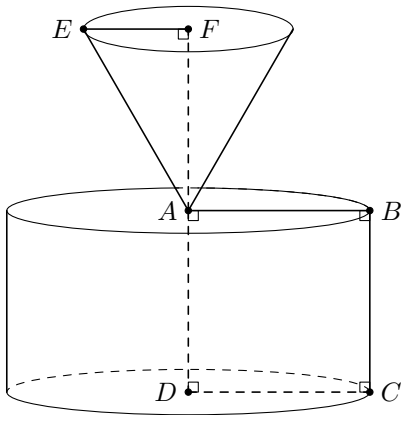
Chọn đáp án C □

Câu 46. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF.



A. $\dfrac{10\pi}{7}a^3$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}a^3$. **C.** $\dfrac{5\pi}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{10\pi}{9}a^3$.

Lời giải.



☑ Khi quay hình vuông $ABCD$ quanh trục DF ta được khối trụ tròn xoay có chiều cao bằng a và bán kính đáy bằng a. Thể tích khối trụ này là $V_1 = \pi \cdot a^2 \cdot a = \pi a^3$.

☑ Khi quay tam giác vuông AFE quanh trục DF ta được khối nón tròn xoay có chiều cao bằng a và bán kính đáy bằng $EF = AF \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối nón này là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot a = \dfrac{\pi}{9}a^3$.

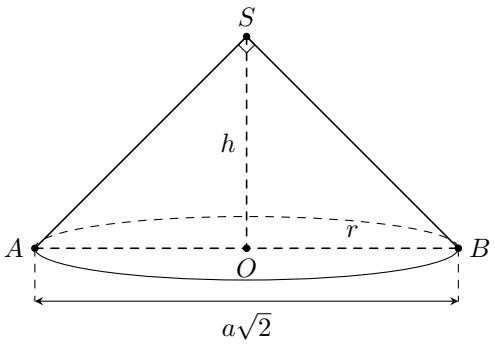
Vậy thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2 = \pi a^3 + \dfrac{\pi}{9}a^3 = \dfrac{10\pi}{9}a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón là

A. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}a^3$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}a^3$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}a^2$.

Lời giải.



Xét tam giác vuông cân SAB có cạnh $AB = a\sqrt{2}$. Khối nón có bán kính đáy r, chiều cao $h = SO$ và $r = h = SO = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (do tam giác SAB vuông cân tại S). Thể tích khối nón cần tìm là

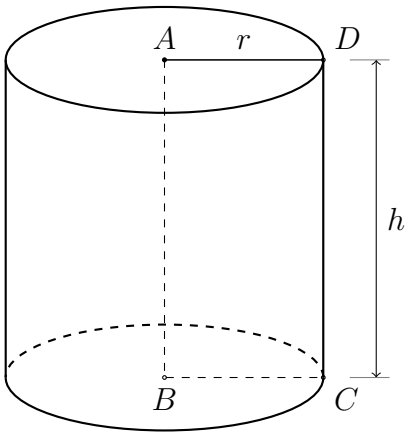
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hình trụ (T) được sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB. Biết $AC = 2\sqrt{3}a$ và góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T).

A. $S_{tp} = 12\pi a^2$. **B.** $S_{tp} = 8\pi a^2$. **C.** $S_{tp} = 24\pi a^2$. **D.** $S_{tp} = 16\pi a^2$.

Lời giải.



Ta có $AB = \sin 45^\circ AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{3}a = \sqrt{6}a$ và $BC = \sqrt{AC^2 - BA^2} = \sqrt{6}a$.
Do đó $S_{tp} = 2\pi BC^2 + 2\pi BC \cdot AB = 2\pi 6a^2 + 2\pi 6a^2 = 24\pi a^2$.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Tính thể tích V của khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$.

A. $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $l = 2a$, $S_{xq} = \pi rl = 2\pi a^2$. Suy ra $r = \dfrac{2\pi a^2}{\pi 2a} = a$.
Mặt khác $h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$. Vậy $V = \pi a^2 a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B □

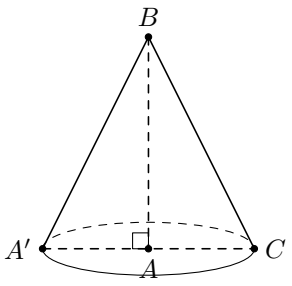
Câu 50. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = 2a$. Tính thể tích khối nón sinh ra khi quay tam giác ABC quay cạnh AB.

A. $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = 2\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$ và thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AB = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 51. Một hình nón có bán kính hình tròn đáy là R và chiều cao bằng $2R$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\pi R^2(1 + \sqrt{5})$. **B.** $\pi R^2(1 + \sqrt{3})$. **C.** $\pi R^2\sqrt{3}$. **D.** $\pi R^2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón là $\ell = \sqrt{h^2 + R^2} = R\sqrt{5}$
Diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi R\ell = \pi R \cdot R\sqrt{5} = \pi R^2\sqrt{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 52. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh $2a$. Thể tích khối trụ tương ứng bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Do khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh bằng $2a$ nên $h = 2R = 2a \Rightarrow \begin{cases} h = 2a \\ R = a \end{cases}$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 \cdot h = 2\pi a^3$.

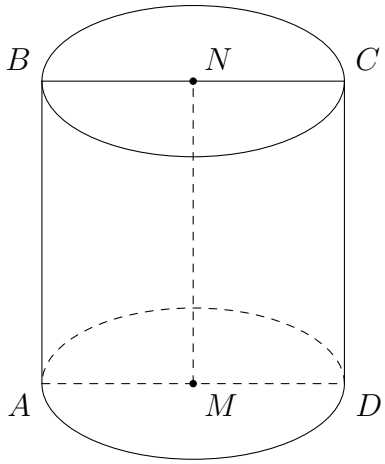
Chọn đáp án A □

Câu 53. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp} = \dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $S_{tp} = 4\pi$. **C.** $S_{tp=6\pi}$. **D.** $S_{tp} = 3\pi$.

Lời giải.

Do quay hình chữ nhật quanh trục MN nên hình trụ tạo thành sẽ có $h = MN = AB = 1$ và $R = \dfrac{AD}{2} = 1$. Từ đó ta tính được $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi$.



Chọn đáp án B □

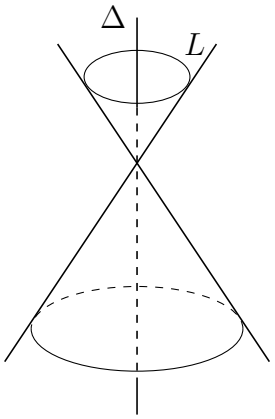
Câu 54. Cho đường thẳng L cắt và không vuông với Δ, quay mặt phẳng chứa L và Δ quanh Δ ta được

A. Khối nón tròn xoay. **B.** Mặt trụ tròn xoay.

C. Mặt nón tròn xoay. **D.** Hình nón tròn xoay.

Lời giải.

Theo định nghĩa: Cho đường thẳng L cắt và không vuông với Δ, quay mặt phẳng chứa L và Δ quanh Δ ta được mặt nón tròn xoay.



Chọn đáp án C □

Câu 55. Tính thể tích V của khối nón có đáy là hình tròn bán kính 2, diện tích xung quanh của nón là 12π.

A. $V=\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{9}$. **C.** $V=16\sqrt{2}\pi$. **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq}=\pi rl \Leftrightarrow 12\pi=\pi 2l \Leftrightarrow l=6$. suy ra $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi 2^2 4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính thể tích V của hình trụ đó.

A. $V=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $V=\pi$. **C.** $V=2\pi$. **D.** $V=4\pi$.

Lời giải.

Hình trụ tạo thành có chiều cao bằng $AD=2$ và bán kính bằng $\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}$. Do đó nó có thể tích $V=\pi r^2h=\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', bán kính bằng R, chiều cao $R\sqrt{3}$; và hình nón có đỉnh là O', đáy là đường tròn $(O;R)$. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích xung quanh của hình nón.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình trụ là $S_1=2\pi R\cdot h=2\pi\cdot R^2\sqrt{3}$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l=\sqrt{R^2+h^2}=2R$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_2=\pi Rl=2\pi R^2$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

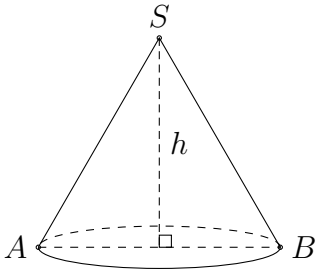
Câu 58. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối nón

A. $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi S là đỉnh của hình nón, AB là một đường kính bất kì của đường tròn đáy. Theo giả thiết ta có tam giác SAB là tam giác đều cạnh $2a$. Suy ra chiều cao của khối nón là $h=a\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn đáy là $r=a$.

Vậy thể tích khối nón là $S=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 59. Cắt một khối trụ T bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó ta được một hình vuông có diện tích bằng 9. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Khối trụ có thể tích $V = \dfrac{9\pi}{4}$.

B. Khối trụ T có diện tích toàn phần $S_{tp} = \dfrac{27\pi}{2}$.

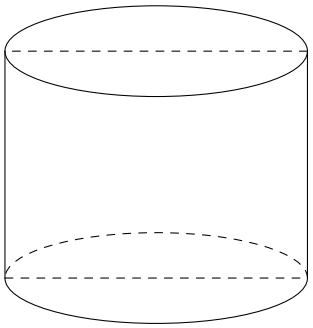
C. Khối trụ T có diện tích xung quanh $S_{xq} = 9\pi$.

D. Khối trụ T có độ dài đường sinh là $l = 3$.

Lời giải.

Từ cách cắt suy ra hình vuông có cạnh bằng 3.

Suy ra độ dài đường sinh và đường kính đáy bằng 3.



☑ $V = \pi R^2 l = \dfrac{27\pi}{4}$.

☑ $S_{xq} = 9\pi$.

☑ $S_{tp} = \dfrac{27\pi}{2}$

Chọn đáp án A ☐

Câu 60. Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết nửa chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π.

A. $S = 16\pi$. **B**. $S = 64\pi$. **C**. $S = 8\pi$. **D**. $S = 32\pi$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S). Chu vi đường tròn lớn là $8\pi \Leftrightarrow 2\pi R = 8\pi \Leftrightarrow R = 4$.

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 64\pi$.

Chọn đáp án B ☐

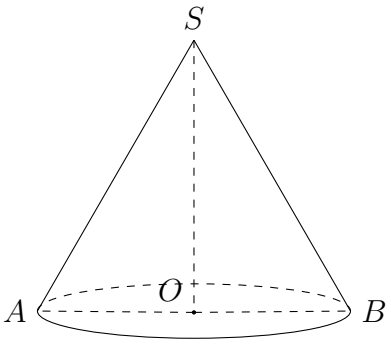
Câu 61. Khi cắt khối nón (N) bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}a$. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 3\sqrt{6}\pi a^3$. **B**. $V = \sqrt{6}\pi a^3$. **C**. $V = \sqrt{3}\pi a^3$. **D**. $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}a$ nên bán kính đáy bằng $r = a\sqrt{3}$, chiều cao $h = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \left(a\sqrt{3}\right)^3 = \sqrt{3}\pi a^3$.



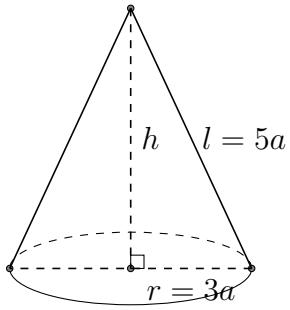
Chọn đáp án C ☐

Câu 62. Một hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng $3a$ và đường sinh bằng $5a$. Tính thể tích khối nón.

A. $9\pi a^3$. **B**. $12\pi a^3$. **C**. $5\pi a^3$. **D**. $15\pi a^3$.

Lời giải.

Theo giả thiết $r = 3a, l = 5a \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$.
Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.9a^2.4a = 12\pi a^3$.



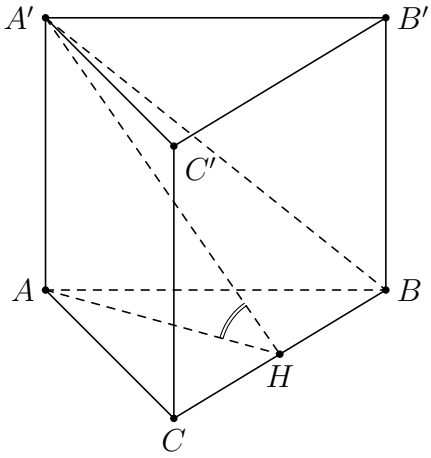
Chọn đáp án B ☐

Câu 63. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$, $AA' \perp BC$
$\Rightarrow \widehat{A'HA} = ((\widehat{A'BC}), (ABC)) = 45°$.
Có $\tan 45° = \dfrac{AA'}{AH} \Rightarrow AA' = AH = x$, $A'H = x\sqrt{2}$.
Xét tam giác đều ABC có $BC = \dfrac{2}{\sqrt{3}}AH = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.
Vì $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{A'H \cdot BC}{2} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.
Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là
$R = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = 2\pi a^2$.



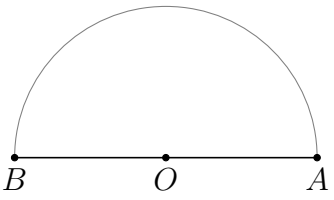
Chọn đáp án C ☐

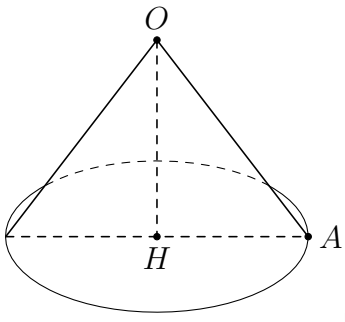
Câu 64. Cho nửa hình tròn tâm O, đường kính AB. Người ta ghép hai bán kính OA, OB lại để tạo ra một mặt nón. Tính góc ở đỉnh của mặt nón đó.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón. Ta có chu vi đường tròn đáy của hình nón là $2\pi R = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi OA \Rightarrow R = \dfrac{OA}{2}$
$\Rightarrow$ thiết diện của hình nón đi qua trục là một tam giác đều
$\Rightarrow$ góc ở đỉnh của hình nón là $60°$.





Chọn đáp án A ☐

Câu 65. Tính diện tích xung quanh một hình trụ có chiều cao 20 m và chu vi đáy bằng 5 m.

A. 100π m^2. **B.** 50π m^2. **C.** 50 m^2. **D.** 100 m^2.

Lời giải.

Chu vi đáy $2\pi R = 5$ (m^2) $\Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rh = 100$ (m^2).
Chọn đáp án D ☐

Câu 66. Cho khối nón có chiều cao bằng 24 cm, độ dài đường sinh bằng 26 cm. Tính thể tích V của khối nón tương ứng.

A. $V = 800\pi$ cm^3. **B.** $V = \dfrac{800\pi}{3}$ cm^3. **C.** $V = \dfrac{1600\pi}{3}$ cm^3. **D.** $V = 1600\pi$ cm^3.

Lời giải.

Bán kính đáy là $R = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 24 = 800\pi$ cm^3.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Quay tam giác ABC xung quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. $V = \dfrac{\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$. **C.** $V = \dfrac{\pi(1+\sqrt{3})}{8}$. **D.** $V = \dfrac{\pi(1+\sqrt{3})}{3}$.

Lời giải.

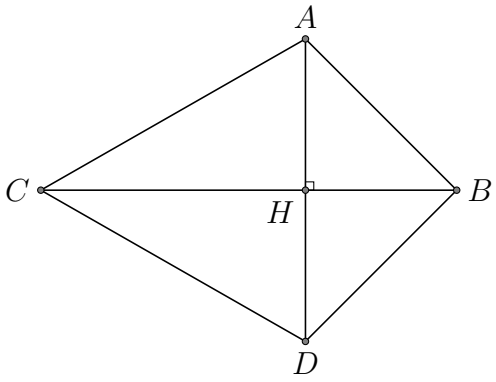
Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

Ta có $AH = BH = \dfrac{1}{2}; AC = \dfrac{AH}{\sin 30^\circ} = 1; CH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi V_1 là thể tích khối nón sinh bởi $\triangle HAB$ quay quanh cạnh $BC \Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot BH \cdot \pi \cdot AH^2 = \dfrac{\pi}{24}$.

Gọi V_2 là thể tích khối nón sinh bởi $\triangle HAC$ quay quanh cạnh $BC \Rightarrow V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot CH \cdot \pi \cdot AH^2 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}$.

Vậy $V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$.



Chọn đáp án B □

Câu 68. Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có diện tích bằng 4. Thể tích của khối trụ đó bằng

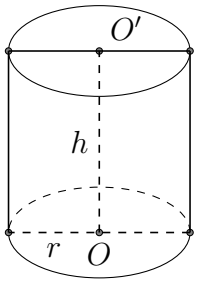
A. π. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** 5π.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ.

Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có diện tích bằng 4 suy ra $(2r)^2 = 4 \Rightarrow r = 1$. Chiều cao của hình trụ là $h = 2r = 2$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi$.



Chọn đáp án B □

Câu 69. Một hình nón có chiều cao $h = 3$, bán kính đáy $r = 5$. Mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón nhưng không đi qua trục của hình nón cắt hình nón theo một thiết diện là một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng 8. Tính diện tích của thiết diện.

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $12\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{2}$.

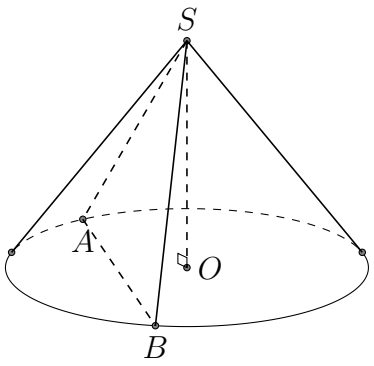
Lời giải.

Ta có $l = SC = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Vì $\triangle SAB$ cân tại S nên $SA = SB = SC = \sqrt{34}$, $P = \dfrac{\sqrt{34} + \sqrt{34} + 8}{2} = 4 + \sqrt{34}$.

Suy ra diện tích tam giác $\triangle SAB$ là:

$S = \sqrt{\left(4 + \sqrt{34}\right)\left(4 + \sqrt{34} - 8\right)\left(4 + \sqrt{34} - \sqrt{34}\right)\left(4 + \sqrt{34} - \sqrt{34}\right)} = 12\sqrt{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 70. Thiết diện qua trục của một hình nón (N) là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Thể tích khối nón (N) bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{12}$.

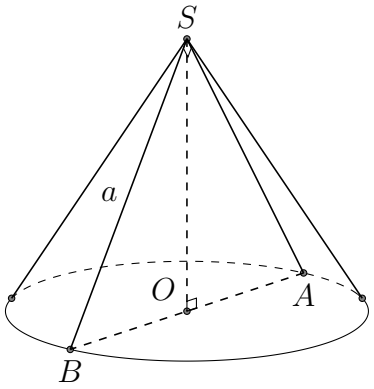
Lời giải.

Giả sử SAB là thiết diện qua trục của hình nón (như hình vẽ).

Tam giác SAB cân tại S và là tam giác cân nên $SA = SB = a$.

Do đó, $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$ và $r = SO = OA = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{a^3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án C □

Câu 71. Khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và thể tích bằng 36π. Diện tích xung quanh hình nón (N) là

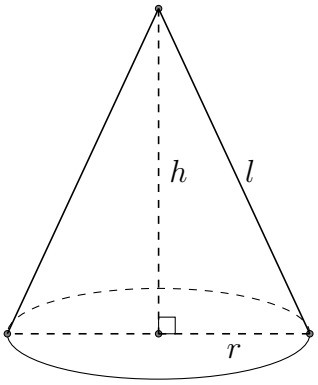
A. 36π. **B.** $3\sqrt{115}\pi$. **C.** $3\sqrt{135}\pi$. **D.** $3\sqrt{153}\pi$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}Bh \Rightarrow h = \dfrac{3V}{B} = \dfrac{3.36\pi}{\pi r^2} = \dfrac{108}{3^2} = \dfrac{108}{9} = 12$.

$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$.

Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.3\sqrt{153}$.



Chọn đáp án D □

Câu 72. Xét hình trụ T có thiết diện qua trục là hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần S của hình trụ.

A. $\dfrac{3\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **C.** πa^2. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là hình vuông cạnh a nên chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$.
Diện tích toàn phần của hình trụ bằng

$$\begin{aligned} S_{tp} &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi r(r+h) \\ &= 2\pi \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + a\right) \\ &= \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 15$ cm và đường sinh $l = 25$ cm. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho.

A. $V = 2000\pi$ cm^3. **B.** $V = 4500\pi$ cm^3. **C.** $V = 6000\pi$ cm^3. **D.** $V = 1500\pi$ cm^3.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình nón là $r = \sqrt{l^2 - h^2} = 20$ cm.
Thể tích V của khối nón là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 2000\pi$ cm^3.

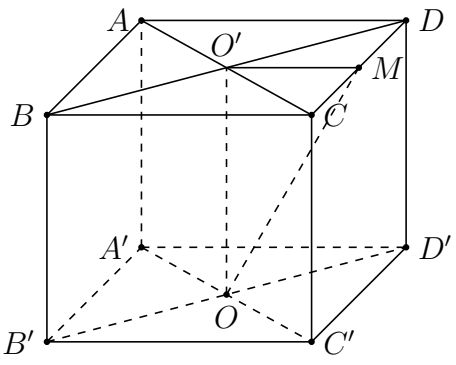
Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và cạnh bên bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $A'B'C'D'$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

A. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{17}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{17}$.

Lời giải.

Hình nón có chiều cao $OO' = 2a$ và bán kính đáy $O'M = \dfrac{a}{2}$ nên đường sinh $l = \sqrt{OO'^2 + O'M^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{17}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$



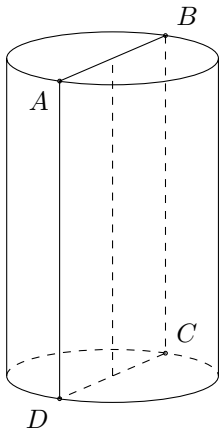
Chọn đáp án C □

Câu 75. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là một hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ, $AB = 4a, AC = 5a$. Thể tích của khối trụ.

A. $16\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $8\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có bán kính đáy: $r = \dfrac{AB}{2} = 2a$.
Chiều cao khối trụ: $h = AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.
Vậy $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (2a)^2 \cdot 3a = 12\pi a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 76. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác đều ABC cạnh bằng 1 quanh AB.

A. $\dfrac{3\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Khi quay tam giác đều ABC quanh cạnh AB ta thu được hai khối nón bằng nhau.
Do đó, ta có $V = 2V_{\text{nón}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{2}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{1\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ (đvtt).
(bán kính $r = h_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, đường cao $h = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}$).

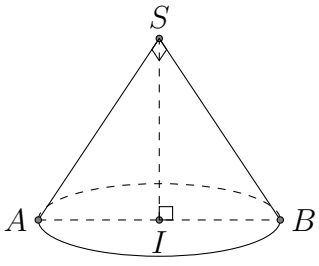
Chọn đáp án B □

Câu 77. Biết thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = 4\pi a^2$. **C.** $S_{xq} = \sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $S_{xq} = 2\pi a^2$.

Lời giải.

Tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SA = SB = 2a$.
Suy ra hình nón có đường sinh $l = SA = 2a$, bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.
$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$.



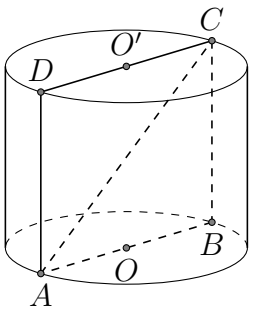
Chọn đáp án A □

Câu 78. Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABCD$ có $AC = 4a$. Tính thể tích khối trụ.

A. $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $V = 2\pi a^3$. **C.** $V = 4\sqrt{2}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình vuông $AC = 4a \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}a$.
Khối trụ có đường chiều cao $h = AB = 2\sqrt{2}a$, bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{2}a$.
Vậy $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (\sqrt{2}a)^2 \cdot 2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}\pi a^3$.



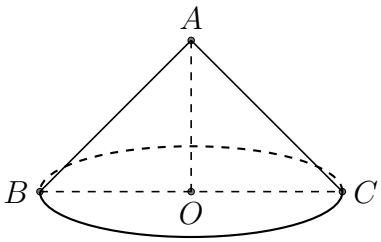
Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, với $AB = 2a$. Gọi O là trung điểm của BC. Tính diện tích xung quanh của hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục OA.

A. $\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$.

Lời giải.

Ta tính được $BO = a\sqrt{2}$. Hình nón tạo thành có bán kính đáy R bằng $a\sqrt{2}$, đường sinh l bằng $2a$. Vậy, diện tích cần tính là $\pi Rl = 2\sqrt{2}\pi a^2$.

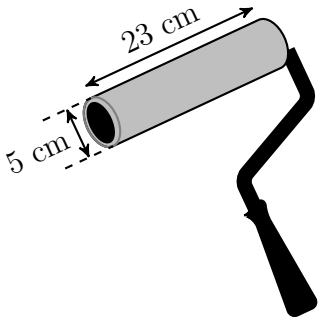


Chọn đáp án B □

Câu 80.

Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5 cm, chiều dài trục lăn là 23 cm (như trong hình vẽ bên). Sau khi lăn trọn 15 vòng không đè lên nhau thì trục lăn tạo ra trên sân phẳng một hình có diện tích bằng

A. 3450π cm^2. **B.** 1725π cm^2. **C.** 1725 cm^2. **D.** $862{,}5\pi$ cm^2.



Lời giải.

Diện tích xung quanh của trục lăn là $S_{xq} = 5 \cdot 23 \cdot \pi = 115\pi$. Sau khi lăn trọn 15 vòng không chờm lên nhau, diện tích sơn được là $15 \cdot 115\pi = 1725\pi$ cm^2.
Chọn đáp án B □

Câu 81. Tính thể tích khối nón có bán kính đáy 3 cm và độ dài đường sinh 5 cm.

A. 12π cm^3. **B.** 15π cm^3. **C.** 36π cm^3. **D.** 45π cm^3.

Lời giải.

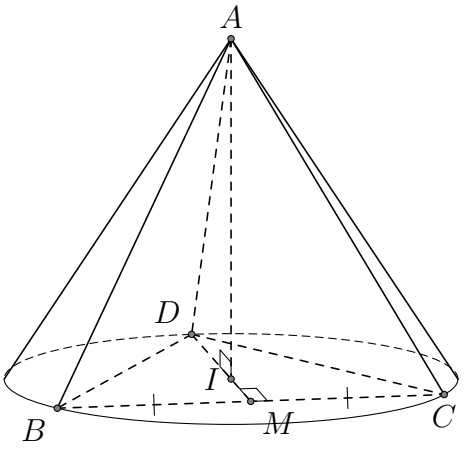
Độ dài đường cao của hình nón là $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm. Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 12\pi$ cm^3.
Chọn đáp án A □

Câu 82. Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a, có diện tích xung quanh là

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện đều cạnh a là $ABCD$ và hình nón ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ có đỉnh trùng với A, đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác BCD.
Khi đó, tâm của đường tròn đáy của hình nón trùng với trọng tâm I của tam giác đều BCD.
Suy ra độ dài đường sinh $l = AB = a$,
bán kính đáy $r = ID = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy diện tích xung quanh hình nón là
$S_{xq} = \pi rl = \pi\dfrac{a\sqrt{3}}{3}a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.



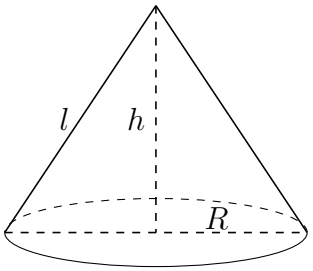
Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 6 và diện tích xung quanh bằng 60π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 288\pi$. **B.** $V = 96\pi$. **C.** $V = 432\sqrt{6}\pi$. **D.** $V = 144\sqrt{6}\pi$.

Lời giải.

Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón (N).
Ta có $S_{\text{xung quanh}} = \pi Rl \Rightarrow l = \dfrac{60\pi}{6\pi} = 10$.
Ta có $h = \sqrt{l^2 - R^2} = 8$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\cdot h \cdot \pi R^2 = 96\pi$.



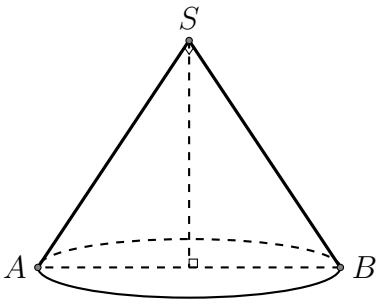
Chọn đáp án B □

Câu 84. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón này bằng

A. 3π. **B.** $3\sqrt{2}\pi$. **C.** $\sqrt{3}\pi$. **D.** $3\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Gọi R và h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của khối nón.
Tam giác SAB vuông cân ở S nên $R = h = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.
Từ đó suy ra thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \sqrt{3}\pi$.



Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải.

Gọi r, l, h lần lượt là bán kính đáy, đương sinh và chiều cao hình nón.
Góc ở đỉnh bằng $60°$ nên $l = 2r$.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = 6\pi a^2 \Leftrightarrow \pi r \cdot 2r = 6\pi a^2 \Rightarrow r = a\sqrt{3}, l = 2a\sqrt{3}, h = 3a$.
Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 3\pi a^3$.
Chọn đáp án C □

Câu 86. Một khối trụ có thể tích bằng 25π. Nếu chiều cao khối trụ tăng lên năm lần và giữ nguyên bán kính đáy thì khối trụ mới có diện tích xung quanh bằng 25π. Bán kính đáy của khối trụ ban đầu là

A. $r = 10$. **B.** $r = 5$. **C.** $r = 2$. **D.** $r = 15$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối trụ ban đầu $V = \pi r^2 h_1 = 25\pi \Rightarrow h_1 = \dfrac{25}{r^2}$.
Ta có diện tích xung quanh lúc sau $2\pi r h_2 = 25\pi \Rightarrow h_2 = \dfrac{25}{2r}$.
Mà $h_2 = 5h_1 \Leftrightarrow \dfrac{25}{2r} = \dfrac{5 \cdot 25}{r^2} \Leftrightarrow r = 10$.
Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hình nón có bán kính đáy là $r = \sqrt{2}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S của hình nón đã cho.

A. $S = 16\pi$. **B.** $S = 8\sqrt{2}\pi$. **C.** $S = 16\sqrt{2}\pi$. **D.** $S = 4\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

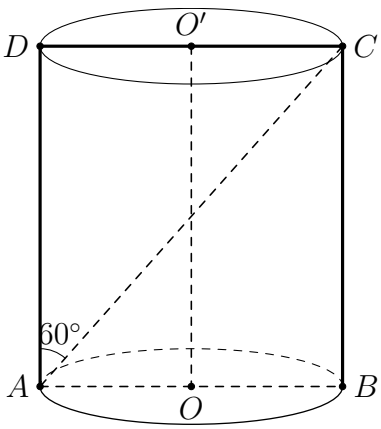
Ta có $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2}\pi$.
Chọn đáp án D □

Câu 88. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = AC = a\sqrt{2}$. Xét tam giác ADC có $AD = AC\cos 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $CD = AC \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Ta có bán kính đáy khối trụ $R = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, đường cao $h = AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Một hình trụ có bán kính đáy bằng r và khoảng cách giữa hai đáy là $r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là tâm của mặt đáy này và đáy trùng với đáy kia của hình trụ. Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

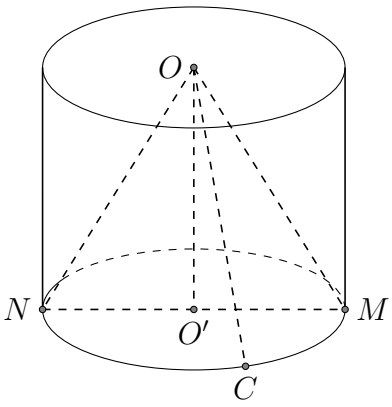
Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_1 = 2\pi r \cdot r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi r^2.$$

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_2 = \pi r \cdot \sqrt{\left(r\sqrt{3}\right)^2 + r^2} = 2\pi r^2.$$



Từ đó suy ra $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi r^2}{2\pi r^2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Tính theo a thể tích V của khối trụ đó.

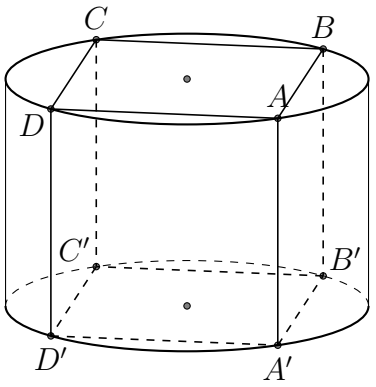
A. $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$. **C.** $V = \pi a^3$. **D.** $V = 2\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a do vậy bán kính của hình tròn đáy là

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy thể tích của khối trụ là $V = \pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a = \dfrac{\pi a^3}{2}$.



Chọn đáp án A □

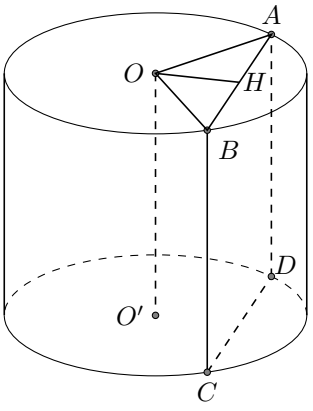
Câu 91. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 5 và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 3. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A. $S = 56$. **B.** $S = 28$. **C.** $S = 7\sqrt{34}$. **D.** $S = 14\sqrt{34}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là thiết diện tạo thành và H là trung điểm AB, khi đó $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Từ đó suy ra $S_{ABCD} = 7 \cdot 4 \cdot 2 = 56$.



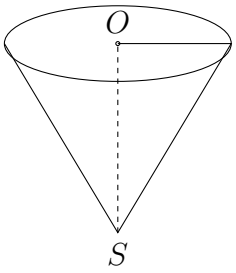
Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón.

A. $S_{xq} = \pi a^2$, $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.
B. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{2}$, $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.
C. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{2}$, $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.
D. $S_{xq} = \pi a^2$, $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Đường cao của hình nón là $SO = a\sqrt{2}\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Bán kính đáy là $r = a\sqrt{2}\cos 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

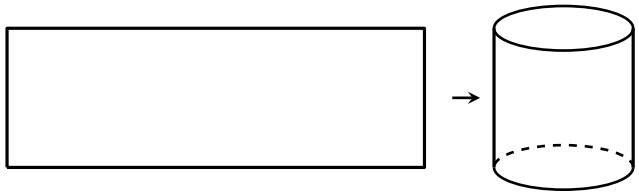
Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \pi a^2$.

Thể tích $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\text{đáy}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$.

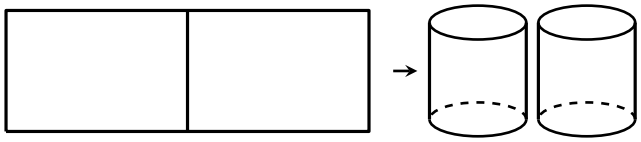
Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm x 240cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách như sau:

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng



- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng



Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$.
B. $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$.
C. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$.
D. $\dfrac{V_1}{V_2} = 4$.

Lời giải.

$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\dfrac{120}{\pi}\right)^2 \cdot h$.

$V_2 = 2\pi r_2^2 h = \pi \cdot \left(\dfrac{60}{\pi}\right)^2 \cdot h$.

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{120}{60}\right)^2 = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 1$, $BC = 2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật đó xung quanh IJ ta được một hình trụ tròn xoay. Thể tích của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ tròn xoay đó là

A. $V = \pi$.
B. $V = 4\pi$.
C. $V = 2\pi$.
D. $V = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 \cdot AB = \pi$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 95. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính theo a thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $V = 3\pi a^3$.

Lời giải.

Tam giác SAB cân có $\widehat{ASB} = 60°$ nên là tam giác đều.

$\Rightarrow SB = AB = 2R \Rightarrow S_{xq} = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.

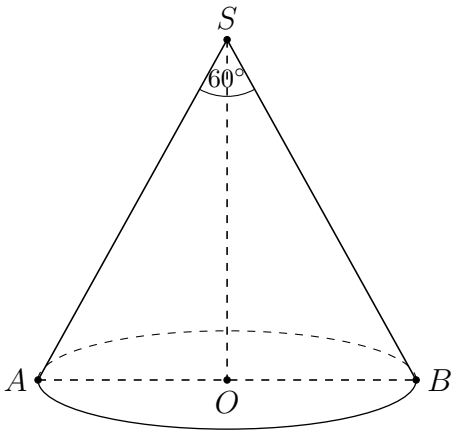
Do đó, $R = a\sqrt{3}$.

Vì tam giác SAB đều nên $SO = \dfrac{2a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3a$.

$S_{(O)} = 3\pi a^2$.

Vậy thể tích của khối nón là

$V = \dfrac{1}{3}\cdot 3a \cdot 3\pi a^2 = 3\pi a^3$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 96. Cho hình nón có độ dài đường sinh $l = 4a$ và bán kính đáy $r = a\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng bao nhiêu?

A. $2\pi a^2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $8\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $4\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = 4a^2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 97. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $l = a\sqrt{3}$. **C.** $l = a$. **D.** $l = 2a$.

Lời giải.

Ta có : $S_{xq} = \pi rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = 2a$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 98. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Thể tích của khối trụ đó là

A. $\dfrac{1}{2}a^3\pi$. **B.** $\dfrac{1}{4}a^3\pi$. **C.** $\dfrac{1}{3}a^3\pi$. **D.** $a^3\pi$.

Lời giải.

Khối trụ đó có chiều cao bằng cạnh hình lập phương, bán kính đáy bằng một nửa cạnh hình lập phương.

Do đó $V_{\text{trụ}} = \pi\cdot\dfrac{a^2}{4}\cdot a = \dfrac{1}{4}a^3\pi$.

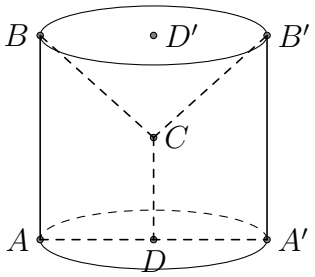
Chọn đáp án B ☐

Câu 99. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $AD = CD = a, AB = 2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng CD. Tính thể tích khối tròn xoay thu được.

A. $\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{7\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $5\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm V bằng thể tích hình trụ V_1 có đáy là đường tròn đường kính AB và đường cao DD' trừ cho thể tích hình nón V_2 đỉnh C và đáy là đường tròn đường kính BB'.



Khi đó $V = V_1 - V_2 = AB \cdot \pi \cdot AD^2 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot D'B^2 \cdot CD' = 2a^3 \cdot \pi - \dfrac{1}{3}\pi \cdot a^3 = \dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 100. Xét hình trụ T có thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần S của hình trụ.

A. $S = 4\pi a^2$. **B.** $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$. **C.** $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. **D.** $S = \pi a^2$.

Lời giải.

Hình trụ này có bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$ và chiều cao $h = a$ nên có diện tích toàn phần là $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. C	5. B	6. D	7. A	8. D	9. B	10. B
11. B	12. D	13. A	14. A	15. D	16. C	17. C	18. C	19. D	20. C
21. B	22. C	23. A	24. A	25. B	26. D	27. D	28. A	29. A	30. B
31. B	32. C	33. D	34. C	35. A	36. C	37. B	38. A	39. C	40. B
41. A	42. B	43. A	44. A	45. C	46. D	47. B	48. C	49. B	50. D
51. D	52. A	53. B	54. C	55. D	56. A	57. D	58. B	59. A	60. B
61. C	62. B	63. C	64. A	65. D	66. A	67. B	68. B	69. C	70. C
71. D	72. A	73. A	74. C	75. B	76. B	77. A	78. C	79. B	80. B
81. A	82. C	83. B	84. C	85. C	86. A	87. D	88. B	89. A	90. A
91. A	92. A	93. D	94. A	95. D	96. D	97. D	98. B	99. A	100. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $R = 2h$. **B.** $h = \sqrt{3}R$. **C.** $R = 3h$. **D.** $h = 2R$.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi Rh$.

Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Cách giải:

Hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp ba diện tích xung quanh nên ta có:

$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 3.2\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow R = 2h.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ, $AB = 4a$, $AC = 5a$. Thể tích V của khối trụ là

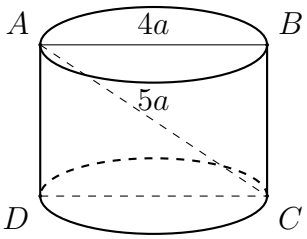
A. $V = 16\pi a^3$. **B.** $V = 4\pi a^3$. **C.** $V = 12\pi a^3$. **D.** $V = 8\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.

Bán kính đáy $r = \dfrac{AB}{2} = 2a$, chiều cao $BC = 3a$.

Vậy $V = h\pi r^2 = 3a \cdot 4a^2 = 12\pi a^3$.



Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $a\sqrt{2}$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng, song song với trụ của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\dfrac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{7}}{3}$. **C.** $V = 2\pi a^3\sqrt{7}$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm các đáy và thiết diện là hình vuông $ABCD$.

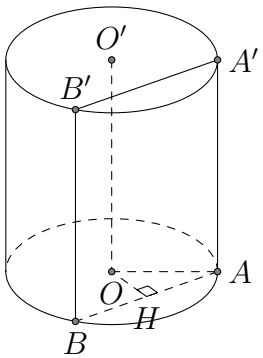
Gọi H là trung điểm AB, ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AA' \end{cases}$ suy ra $OH \perp (ABB'A')$.

Do đó $\mathrm{d}\,(OO', (ABCD)) = OH = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác OAH vuông tại H nên $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $AB = AA' = OO' = 2AH = a\sqrt{7}$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Vậy thể tích $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot a\sqrt{7} = 2\pi a^3\sqrt{7}$.

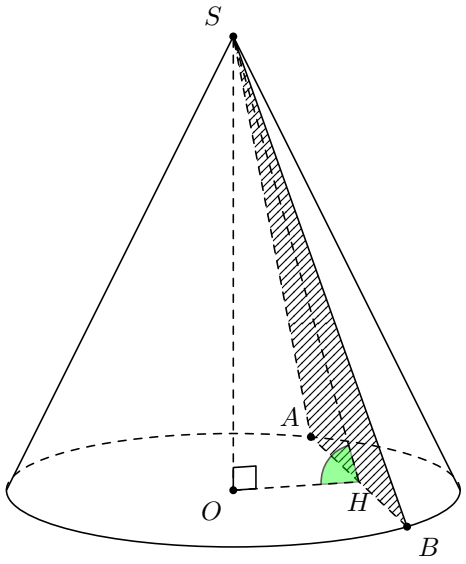


Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho khối nón (N) đỉnh S , có chiều cao là $a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh là $3a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S, cắt và tạo với mặt đáy của khối nón một góc 60°. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và khối nón (N).

A. $2a^2\sqrt{5}$. **B.** $a^2\sqrt{3}$. **C.** $2a^2\sqrt{3}$. **D.** $a^2\sqrt{5}$.

Lời giải.



Khối nón có tâm đáy là điểm O, chiều cao là $SO = h = a\sqrt{3}$ và độ dài một đường sinh $l = 3a$.

Giả sử (P) cắt khối nón (N) theo thiết diện là tam giác SAB. Gọi H là trung điểm của AB.

Do $SA = SB = l \Rightarrow \triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$.

Mặt khác $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OH \perp AB$ nên góc giữa mặt phẳng (P) và đáy của hình chóp là góc giữa OH và SH, hay $\widehat{SHO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SOH vuông tại O, ta có

$$SH = \frac{SO}{\sin\widehat{SHO}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2a.$$

Mặt khác tam giác SHA vuông tại H, ta có

$HA^2 = SA^2 - SH^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow HA = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = 2 \cdot HA = 2a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là

$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Một tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 5 được cắt thành hai hình quạt, sau đó quấn hai hình quạt đó thành hai hình nón (không có đáy). Biết một trong hai hình nón này có diện tích xung quanh là 15π. Tính thể tích hình nón còn lại. Giả sử chiều rộng các mép dán không đáng kể.

A. $\frac{4\pi\sqrt{21}}{3}$. **B.** $2\pi\sqrt{21}$. **C.** $\frac{2\pi\sqrt{21}}{3}$. **D.** $4\pi\sqrt{21}$.

Lời giải.

Phương pháp:

+ Tính diện tích xung quanh hình nón còn lại.

+ Sử dụng công thức $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l$ để tính bán kính đáy của hình nón này.

+ Sử dụng công thức $R^2 + h^2 = l^2$ để tính chiều cao hình nón.

+ Sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$ để tính thể tích hình nón còn lại.

(với R là bán kính đáy hình nón, h là chiều cao hình nón và l là đường sinh hình nón)

Cách giải:

Diện tích hình tròn là $S = \pi \cdot r^2 = 25\pi$.

Diện tích xung quanh hình nón còn lại là $S_2 = 25\pi - 15\pi = 10\pi$.

Nhận xét rằng khi quấn hình quạt được cắt từ hình tròn thành hình nón thì đường sinh của hình nón chính là bán kính của hình tròn.

Từ đó hình nón còn lại có đường sinh $l = 5$.

Lại có diện tích xung quanh hình nón còn lại là 10π nên gọi R là bán kính hình nón này thì $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l \Rightarrow 10\pi = \pi R \cdot 5 \Rightarrow R = 2$.

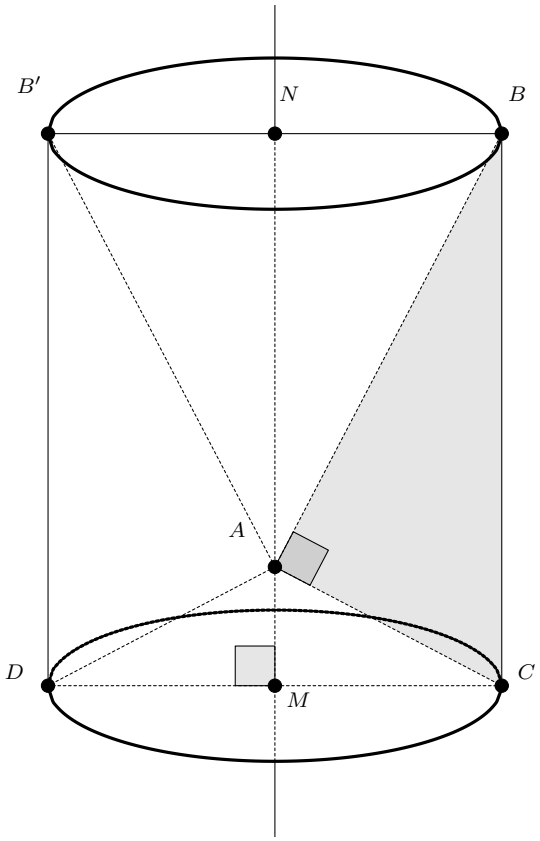
Ta gọi chiều cao hình nón này là $h, (h > 0)$ thì $h^2 + R^2 = l^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.
Thể tích hình nón còn lại là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{21} = \dfrac{4\pi\sqrt{21}}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng d đi qua A và song song với BC. Cạnh BC quay xung quanh d tạo thành một mặt xung quanh của hình trụ có thể tích là V_1. Tam giác ABC quay xung quanh trục d được khối tròn xoay có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:
Dựng hình, xác định các hình tròn xoay tạo thành khi quay và tính tỉ số thể tích.
Cách giải:



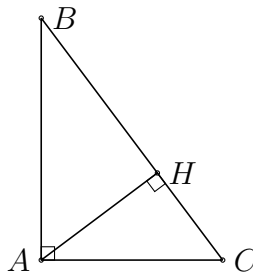
Thể tích khối trụ $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi MC^2 \cdot BC$
Tổng thể tích hai khối nón $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi MC^2 \cdot AM + \dfrac{1}{3}\pi NB^2 \cdot AN$
$= \dfrac{1}{3}\pi MC^2 (AM + AN) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot MC^2 \cdot BC = \dfrac{1}{3}V_1$.
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = 3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các hình nón tròn xoay sinh bởi tam giác ABC khi quay quanh các cạnh BC, AC, AB. Biết $V_2 = 3\pi, V_3 = 4\pi$. Tính V_1.

A. $V_1 = \dfrac{19\pi}{5}$. **B.** $V_1 = \dfrac{8\pi}{5}$. **C.** $V_1 = \dfrac{16\pi}{5}$. **D.** $V_1 = \dfrac{12\pi}{5}$.

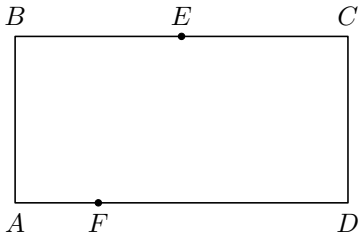
Lời giải.

Ta có
$V_1 = \dfrac{1}{3}(BH + CH)\pi AH^2 = \dfrac{1}{3}BC\pi AH^2$, $V_2 = \dfrac{1}{3}AC\pi AB^2$, $V_3 = \dfrac{1}{3}AB\pi AC^2$.
$\Rightarrow \dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3\pi}{4\pi} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AB = \dfrac{3}{4}AC$.
$\Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4}AC\pi AC^2 = \dfrac{1}{4}\pi AC^3 = 4\pi$.
$\Rightarrow AC = \sqrt[3]{16} \Rightarrow AB = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{16} \Rightarrow AH = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{16} = \dfrac{5}{6}\sqrt[3]{16}, BC = \dfrac{5}{4}\sqrt[3]{16}$.
Vậy $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5}{4}\sqrt[3]{16}\pi . \left(\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{16}\right)^2 = \dfrac{12\pi}{5}$.



Chọn đáp án (D) □

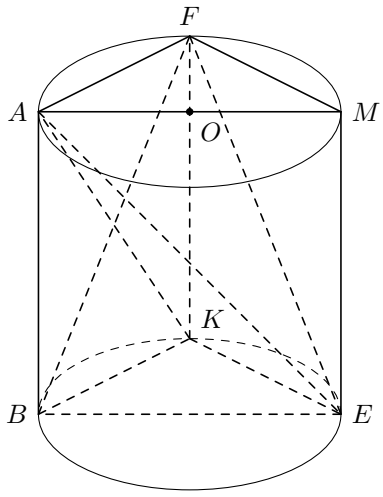
Câu 8.
Có một mảnh bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a$, $AD = 4a$. Người ta đánh dấu E là trung điểm BC và $F \in AD$ sao cho $AF = a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.



A. $\dfrac{16a^3}{3\pi^2}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3\pi^2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{8a^3}{\pi^2}$.

Lời giải.

Hai đáy của hình trụ là hai đường tròn bán kính $R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{2a}{\pi}$ (chu vi $C = AD = 4a$).
Gọi K là hình chiếu của F lên mặt đáy $\Rightarrow ABKF$ là hình chữ nhật.
Vì $\overset{\frown}{AF} = \dfrac{1}{4}(O, R) \Rightarrow AF = R\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}$
$\Rightarrow S_{ABKF} = AB \cdot AF = 2a \cdot \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi} = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{\pi}$.
$EK = \sqrt{BE^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4a}{\pi}\right)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\pi}$
$\Rightarrow V_{E.ABKF} = \dfrac{1}{3}EK \cdot S_{ABKF} = \dfrac{16a^3}{3\pi}$
$\Rightarrow V_{E.ABF} = \dfrac{1}{2}V_{E.ABKF} = \dfrac{8a^3}{3\pi}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Một khối nón có thể tích bằng $9a^3\pi\sqrt{2}$. Tính bán kính R đáy khối nón khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

A. $R = 3a$. **B.** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C.** $R = \sqrt[3]{9}a$. **D.** $R = \dfrac{3a}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

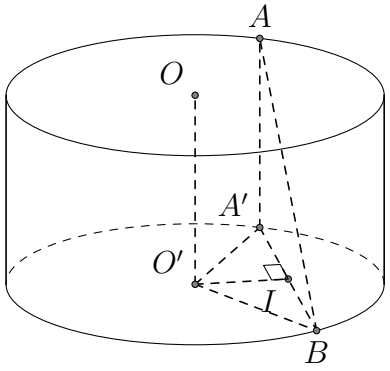
Gọi h, l lần lượt là chiều cao và độ dài đường sinh của khối nón.
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 9a^3\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{27a^3\sqrt{2}}{R^2} \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2 \cdot \dfrac{729a^6}{R^4}}$.
$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \pi\sqrt{R^4 + \dfrac{729a^6}{R^2} + \dfrac{729a^6}{R^2}} \geq \pi\sqrt{\sqrt[3]{R^4 \cdot \dfrac{729a^6}{R^2} \cdot \dfrac{729a^6}{R^2}}}$.
$\Rightarrow S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$. Nên $\min S_{\text{xq}} = 9\pi a^2$ khi $R^4 = \dfrac{729a^6}{R^2} \Leftrightarrow R = 3a$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình trụ có trục OO', chiều cao bằng a. Trên hai đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $60°$. Thể tích của khối trụ đã cho là

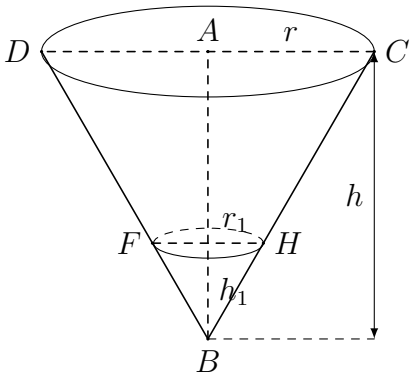
A. $\frac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **C.** $2\pi a^3$. **D.** πa^3.

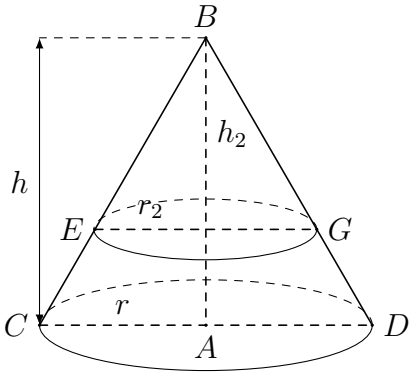
Lời giải.



Dựng AA' vuông góc với mặt phẳng đáy.
$AB \subset (ABA')$ nên $d(AB, OO') = d(OO', (ABA')) = d(O', (ABA'))$.
Gọi I là trung điểm BA'. Ta có $O'I \perp BA'$ (vì $\Delta O'BA'$ cân).
Mà $O'I \perp AA'$ nên $O'I \perp (ABA')$
hay $d(O', (ABA')) = O'I = \frac{a}{2}$.
Mặt khác $\widehat{AB, OO'} = \widehat{AB, AA'} = \widehat{A'AB} = 60°$.
Xét $\Delta ABA'$ vuông tại A' có $\tan 60° = \frac{A'B}{AA'} \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$ và $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\Delta O'BI$ vuông tại I có $O'B = \sqrt{O'I^2 + BI^2} = a$.
Vậy thể tích của khối trụ đã cho là
$V = \pi \cdot O'B^2 \cdot OO' = \pi \cdot a^2 \cdot a = \pi a^3$.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 cm.





A. $0,501$ (cm). **B.** $0,302$ (cm). **C.** $0,216$ (cm). **D.** $0,188$(cm).

Lời giải.

Ta gọi chiếc phễu trên là khối nón (N) có bán kính đáy r và chiều cao $h = 15$ cm và thể tích là V.
Thể tích lượng nước đổ vào phễu cũng bằng thể tích V_1 của khối nón (N_1) có bán kính đáy r_1 và chiều cao h_1.
Áp dụng định lý ta-lét ta có $\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} = \frac{1}{3}$
Suy ra $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi(\frac{r}{3})^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{81}\pi r^2 h = \frac{1}{27}V$

Khi bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì nước trong phễu vẫn giữ nguyên. Phần không chứa nước trong phễu chính là khối nón (N_2) với bán kính đáy r_2, chiều cao h_2 và thể tích là $V_2 = V - V_1 = \dfrac{26}{27}V$.

Áp dụng định lý ta-lét ta có $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{h_2}{h}$.

Nên suy ra: $V_2 = \dfrac{26}{27}V \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \dfrac{26}{27}\dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow (\dfrac{r_2}{r})^2\dfrac{h_2}{h} = \dfrac{26}{27} \Leftrightarrow (\dfrac{h_2}{h})^3 = \dfrac{26}{27} \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}$

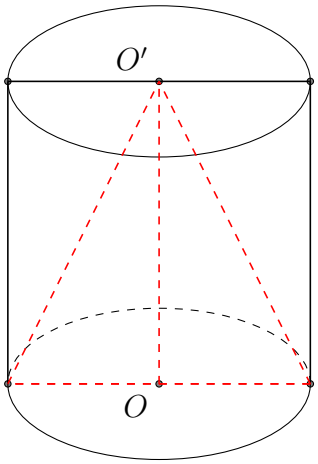
Vậy chiều cao của mực nước trong phễu sau khi úp ngược là: $15 - 5\sqrt[3]{26} = 0,188$ cm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R. Một hình nón có đỉnh (O') và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ lệ diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng?

A. 3. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



+ Diện tích xung quanh hình trụ là: $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi R^2\sqrt{3}$.

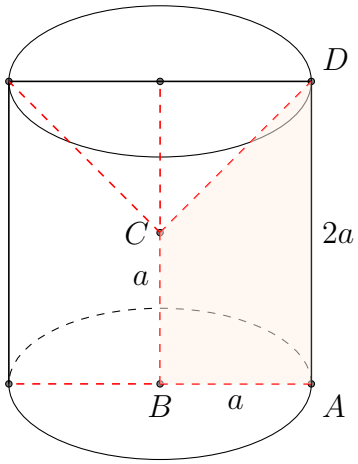
+ Độ dài đường sinh hình nón là: $l = \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 + R^2} = 2R$.

+ Diện tích xung quanh hình nón là: $S_2 = \pi Rl = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.

Suy ra tỉ lệ cần tìm là: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\pi R^2 \cdot \sqrt{3}}{2\pi R^2} = \sqrt{3}$.

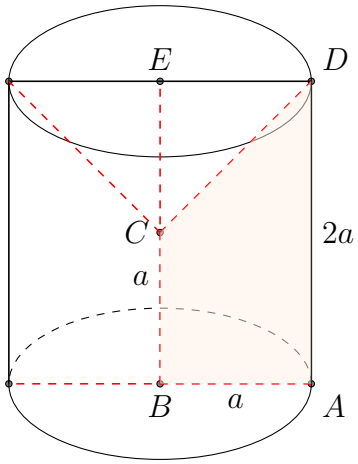
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B**. $V=\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **C**. $V=\pi a^3$. **D**. $V=\dfrac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình chữ nhật $ABED$ với E nằm trên tia BC.
Thể tích khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABED$ khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là

$$V_1=AD\cdot\pi\cdot AB^2=2a\cdot\pi\cdot a^2=2\pi a^3.$$

Thể tích khối nón sinh bởi tam giác EDC khi xoay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là

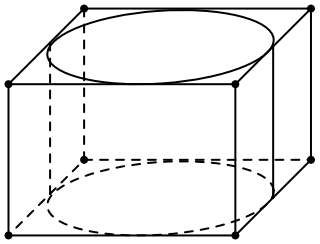
$$V_2=\frac{1}{3}CE\cdot\pi\cdot ED^2=\frac{1}{3}a\cdot\pi\cdot a^2=\frac{\pi a^3}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V=V_1-V_2=\dfrac{5\pi a^3}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích V_1. Một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích là V_2. Tỉ số $k=\dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $k=\dfrac{\pi}{4}$. **B**. $k=\dfrac{2}{\pi}$. **C**. $k=\dfrac{\pi}{2}$. **D**. $k=\dfrac{4}{\pi}$.

Lời giải.



Gọi a là cạnh của hình lập phương.

Ta có thể tích của khối lập phương là $V_1 = a^3$.

Suy ra tỉ số $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi và chỉ khi V_2 lớn nhất.

Khi đó hình trụ có chiều cao bằng cạnh của hình lập phương và có đường tròn đáy nội tiếp một mặt của hình lập phương.

Do đó hình trụ có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $V_2 = \pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \dfrac{\pi a^3}{2}$. Vậy $k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án C □

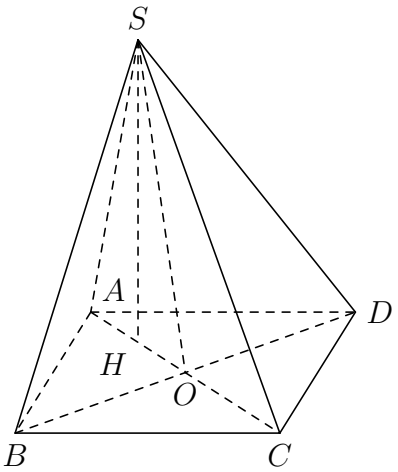
Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x \quad \left(0 < x < \sqrt{3}\right)$ các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V = Sh$.



Cách giải:

Ta có: $\triangle SBD = \triangle ABD \quad (c.c.c) \Rightarrow AO = SO = OC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S. (tam giác có đường trung tuyến từ đỉnh S đến cạnh AC bằng nửa cạnh AC).

$\Rightarrow AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}$

$\Rightarrow BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1 + x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}\sqrt{3 - x^2}$

$SH = \dfrac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.\dfrac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}\sqrt{3 - x^2}$

$= \dfrac{1}{6}x\sqrt{3 - x^2} = \dfrac{\sqrt{x^2(3 - x^2)}}{6} \le \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2 + 3 - x^2}{6} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \max V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là

A. $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}};\ h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

B. $R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}};\ h = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

C. $R = \sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}};\ h = 4\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$.

D. $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}};\ h = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$.

Lời giải.

Gọi thể tích khối trụ là V, diện tích toàn phần của hình trụ là S.

Ta có $S = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Từ đó suy ra $\dfrac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \dfrac{S}{2\pi} = R^2 + \dfrac{V}{\pi R} = R^2 + \dfrac{V}{2\pi R} + \dfrac{V}{2\pi R} \ge \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4\pi^2}}$,

tức là $27\dfrac{V^2}{4\pi^2} \le \left(\dfrac{S}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow V \le \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$.

Vậy $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{V}{2\pi R} = \dfrac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \dfrac{Rh}{2} \Leftrightarrow h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

A. $h = \sqrt{3}R$. **B.** $h = \sqrt{2}R$. **C.** $h = 2R$. **D.** $h = R$.

Lời giải.

Phương pháp: Thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h$.

Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2$.

Cách giải:

Ta có thể tích khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là: $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Diện tích xung quanh và 1 đáy của hình trụ là: $S = 2\pi Rh + \pi R^2 \Rightarrow S = 2\pi.R\dfrac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + \pi R^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{V}{R}; \dfrac{V}{R}; \pi R^2$ ta có:

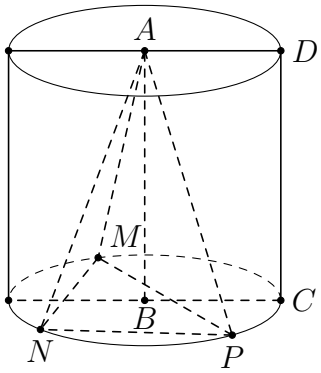
$\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R}\pi R^2} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow \dfrac{V}{R} = \pi R^2 \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{V}{\pi} \Leftrightarrow V = \pi R^3 \Rightarrow h = \dfrac{\pi R^3}{\pi R^2} = R$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB cố định, đường gấp khúc $ADCB$ cho ta hình trụ (T). Gọi $\triangle MNP$ là tam giác đều nội tiếp đường tròn đáy (không chứa điểm A). Tính tỷ số giữa thể tích khối trụ và thể tích khối chóp $AMNP$.



A. $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\pi$. **B.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\pi$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi$.

Lời giải.

Hình trụ (T) có bán kính $r = BC$ và chiều cao $h = CD$. Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h$.

Gọi cạnh của tam giác MNP là x, khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$ là

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = r\sqrt{3}.$$

Khối chóp $AMNP$ có đáy là $\triangle MNP$ đều và chiều cao $AB = DC = h$.

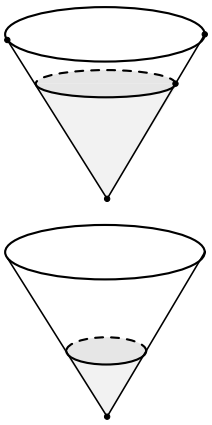
Thể tích khối chóp $V' = \dfrac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{\triangle MNP} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot \dfrac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}r^2 h}{4}$.

Tỉ số giữa thể tích khối trụ và thể tích khối chóp $AMNP$ là $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\pi r^2 h}{\dfrac{\sqrt{3}r^2 h}{4}} = \dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 19.

Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm, được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới rỗng. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.



A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của mỗi hình nón. Khi độ cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm, ta đặt bán kính của " hình nón trên của nước" bằng r , bán kính của " hình nón dưới của nước " là s, chiều cao của " hình nón dưới của nước " là x. $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}\Rightarrow r=\frac{R}{2}$.

Thể tích nước của hình nón trên tại thời điểm chiều cao bằng 1 là $V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot 1=\frac{\pi R^2}{12}$

mặt khác: $\frac{s}{R}=\frac{x}{2}\Rightarrow s=\frac{Rx}{2}$

Thể tích nước hình nón dưới $V_2=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2}\right)^2=\frac{\pi R^2x^3}{12}$.

Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước :$V=\frac{2\pi R^2}{3}$.

Ta có:$V_1+V_2=V\Leftrightarrow\frac{\pi R^2}{12}+\frac{\pi R^2x^3}{12}=\frac{\pi R^2 2}{3}\Leftrightarrow 1+x^3=8\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{7}$

Chọn đáp án A ☐

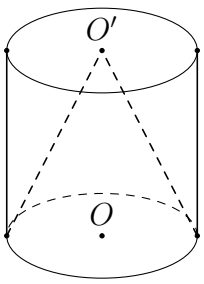
Câu 20. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Hình nón có đỉnh là tâm đáy trên của hình trụ và đáy là hình tròn đáy dưới của hình trụ. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ, V_2 là thể tích của hình nón. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Hai khối nón và khối trụ có cùng chiều cao h và cùng bán kính đáy bằng r.

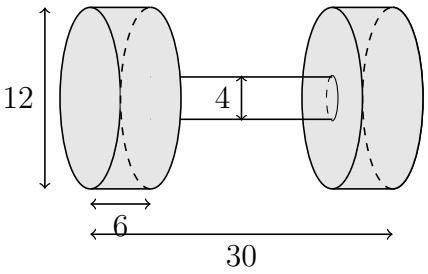
Do đó ta có $\frac{V_1}{V}=\frac{\pi r^2h}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=3$.



Chọn đáp án C ☐

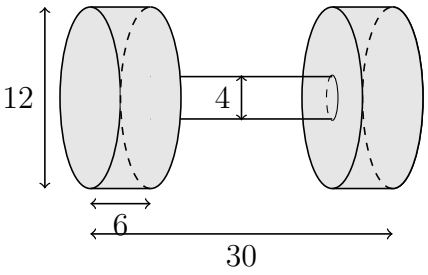
Câu 21.

Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A. 108π. **B**. 6480π. **C**. 502π. **D**. 504π.

Lời giải.



Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$V_1 = h_1 \cdot \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$V_2 = h_2 \cdot \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2 \cdot 6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi$.

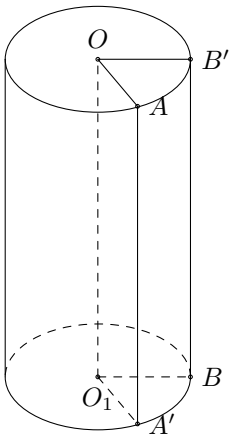
Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình trụ (T) có chiều cao bằng $2a$. Hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1 và bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện $\mathrm{OO_1}AB$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Trên (O) lấy điểm B', trên (O_1) lấy điểm A' sao cho $\mathrm{AA'} \parallel BB' \parallel \mathrm{OO_1}$. Khi đó ta được hình lăng trụ $OAB'.O_1A'B$.

Ta có $\mathrm{AA'} = h = 2a, AB = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông $\mathrm{AA'}B$ có $A'B = \sqrt{AB^2\text{-}\mathrm{AA'}^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a$.

Do đó tam giác $O_1A'B$ có $O_1A' = O_1B = A'B = a \Rightarrow \Delta O_1A'B$ đều cạnh a

$\Rightarrow S_{\Delta O_1A'B} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{OAB'.O_1A'B} = \mathrm{AA'}.S_{O_1A'B} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $V_{OAB'.O_1A'B} = V_{A.O_1A'B} = V_{OAB'.O_1A'B} + V_{B.OAB'} + V_{OO_1AB}$.

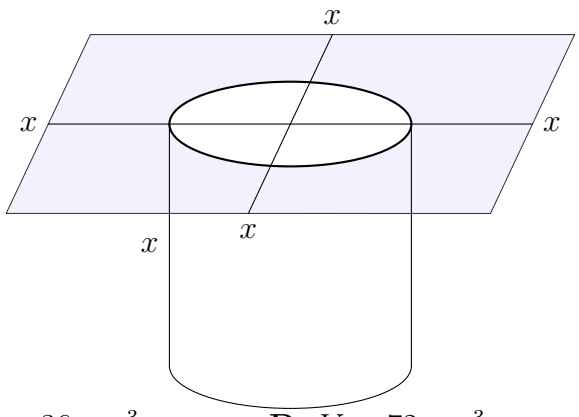
Mà $V_{A.O_1A'B} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O_1A'B}; V_{B.OAB'} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O_1AB}$

$\Rightarrow V_{OO_1AB} = \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O_1A'B} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 23.

Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V = 13{,}5\pi$ m^3. **B**. $V = 27\pi$ m^3. **C**. $V = 36\pi$ m^3. **D**. $V = 72\pi$ m^3.

Lời giải.

Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x = \dfrac{\pi}{4}f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$ ta có

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

BBT

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
y'		$+$	0	$-$	0
y	0	↗	54	↘	0

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Khi đó $V_{\max} = \dfrac{\pi}{4}.54 = \dfrac{27\pi}{2} = 13,5\pi$ m^3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh S của hình trụ là

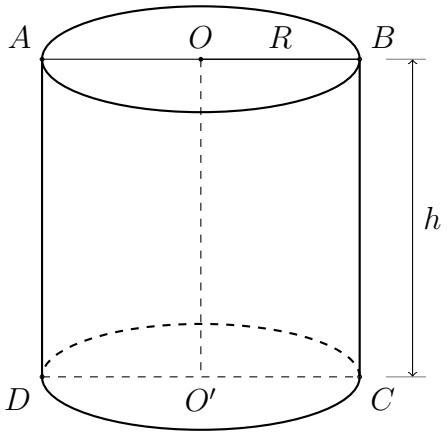
A. $S = 4\pi a^2$. **B**. $S = 8\pi a^2$. **C**. $S = 24\pi a^2$. **D**. $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

Cách giải:



Hình trụ có thiết diện đi qua trục là hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4a$.
Do đó $h = 2R = 4a \Rightarrow R = 2a$ với R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.
Vậy $S = 2\pi Rh = 16\pi a^2$

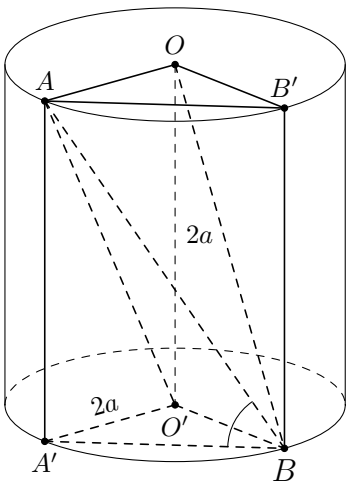
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\tan\alpha = 1$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Lấy điểm $A' \in (O')$, $B' \in (O)$ sao cho AA', BB' song song với trục OO'.
Khi đó ta có lăng trụ đứng $OAB'.O'A'B$.



Ta có $V_{OO'AB} = V_{OAB'.O'A'B} - V_{A.O'A'B} - V_{B.OAB'}$
$= V_{OAB'.O'A'B} - \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} - \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B}$
$= \dfrac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B}$.
$\Rightarrow V_{OO'AB} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{\triangle OAB'} = \dfrac{1}{6}AA' \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\widehat{AOB'}$.
Do đó $V_{OO'AB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{AOB'} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AOB'} = 90^\circ \Leftrightarrow OA \perp OB'$.
$\Rightarrow O'A' \perp O'B \Rightarrow \triangle O'A'B$ vuông tại $O' \Rightarrow A'B = O'A'\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$.
Ta có $AA' \perp (O'A'B) \Rightarrow (AB, (O'A'B)) = \widehat{ABA'} = \alpha$.
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AA'}{A'B} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

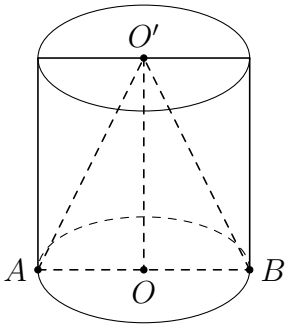
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao $R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O;R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi R^2\sqrt{3}$.
Độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{R^2 + 3R^2} = 2R$ do đó diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = 2\pi R^2$.
Vậy tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón là $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 1, AD = SA = 2$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp S.ABCD.

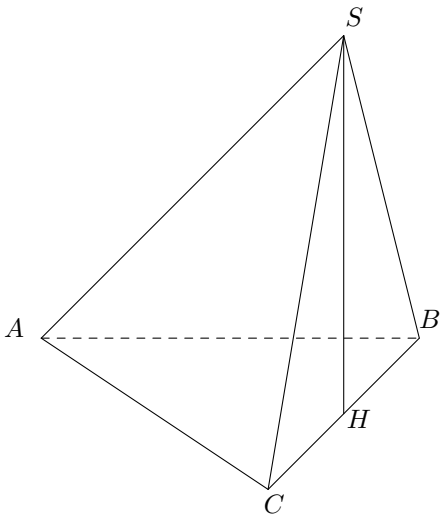
A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** 36π. **D.** 9π.

Câu 28. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = BC = 4$, $\widehat{BAC} = 90^0$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp S.ABC.

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $SA = SB = SC$ nên hình chiếu H của S lên đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tức trung điểm của BC. Vì tam giác SBC đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là tâm của mặt (SBC). Vậy $R = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$



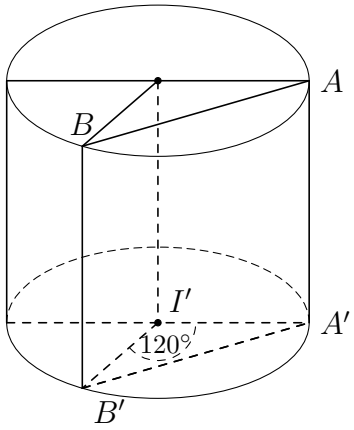
Chọn đáp án A □

Câu 29. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung $120°$. Diện tích thiết diện $ABB'A'$ là

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên $h = 2r$.
Diện tích xung quanh hình trụ bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi rh = 4\pi \Rightarrow 2\pi r.2r = 4\pi \Rightarrow r = 1$.
Theo định lý cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.
Vậy diện tích của $ABB'A'$ là $2.\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 17 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lặng trụ lục giác đều có cạnh 14 cm; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa tổng hợp vào xung quanh) mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 30 cm. Biết chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 390 cm. Tính lượng vữa hỗn hợp cần dùng (đơn vị m^3, làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A. $1,3\ \text{m}^3$. **B.** $2,0\ \text{m}^3$. **C.** $1,2\ \text{m}^3$. **D.** $1,9\ \text{m}^3$.

Câu 31. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. Diện tích chung quanh S của hình nón đó là

A. $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$. **B.** $S = 4\pi a^2$. **C.** $S = 2\pi a^2$. **D.** $S = \pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là tam giác đều nên hình nón đó có $l = 2R \Rightarrow h = R\sqrt{3}$.
Lại có $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} \Rightarrow R^3 = a^3 \Rightarrow R = a$.
Vậy diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi a^2$.
Chọn đáp án (D) □

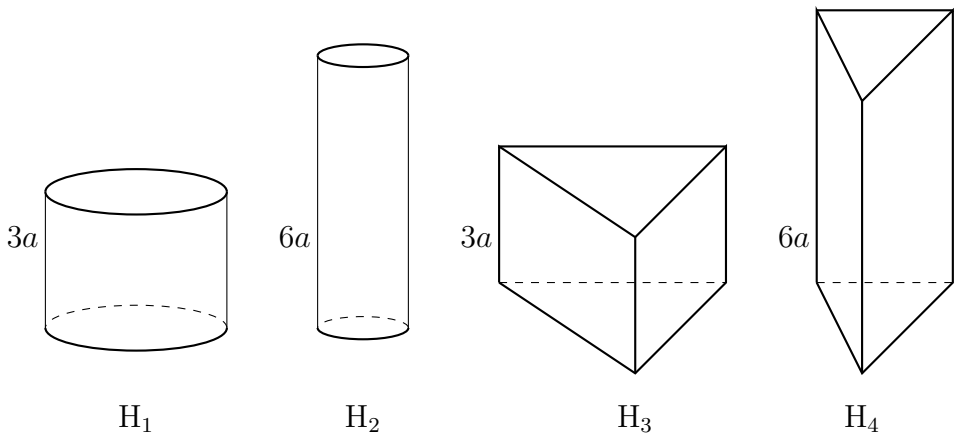
Câu 32. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích bằng V_1, một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích bằng V_2. Tính tỉ số lớn nhất $k = \dfrac{V_2}{V_1}$.

A. $k = \dfrac{1}{4}$. **B.** $k = \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $k = \dfrac{\pi}{4}$. **D.** $k = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Do V_1 không đổi nên $k = \dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi V_2 lớn nhất.
Khi đó khối trụ có hai đáy nằm trên hai mặt của hình lập phương.
Giả sử hình lập phương có cạnh $a \Rightarrow V_1 = a^3$ và $V_2 = \pi\dfrac{a^2}{4}\cdot a = \dfrac{\pi\cdot a^3}{4} \Rightarrow k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $3a, 6a$. Người ta muốn tạo từ tấm bìa đó thành 4 hình không đáy như hình vẽ, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao $3a, 6a$ và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt là $3a, 6a$. Trong bốn hình $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3, \text{H}_4$ lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là



A. $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_4$. **B**. $\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$. **C**. $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_3$. **D**. $\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_4$.

Lời giải.

☑ Hình H_1 có chu vi đáy là $6a$, ta có $2\pi r = 6a \Leftrightarrow r = \dfrac{3a}{\pi}$.
Thể tích khối H_1 là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{3a}{\pi}\right)^2 \cdot 3a = \dfrac{27a^3}{\pi}$.

☑ Hình H_2 có chu vi đáy là $3a$, ta có $2\pi r = 3a \Leftrightarrow r = \dfrac{3a}{2\pi}$.
Thể tích khối H_2 là $V_2 = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{3a}{2\pi}\right)^2 \cdot 6a = \dfrac{27a^3}{2\pi}$.

☑ Hình H_2 có chu vi đáy là $3a$, ta có $2\pi r = 3a \Leftrightarrow r = \dfrac{3a}{2\pi}$.
Thể tích khối H_2 là $V_2 = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{3a}{2\pi}\right)^2 \cdot 6a = \dfrac{27a^3}{2\pi}$.

☑ Hình H_3 có chu vi đáy là $6a$, gọi độ dài cạnh đáy là x, ta có $3x = 6a \Leftrightarrow x = \dfrac{6a}{3} = 2a$
Thể tích khối H_3 là $V_3 = 3a \cdot \dfrac{1}{2}x^2 \cdot \sin 60^\circ = a^3 3\sqrt{3}$.

☑ Hình H_4 có chu vi đáy là $3a$, gọi độ dài cạnh đáy là x, ta có $3x = 3a \Leftrightarrow x = \dfrac{3a}{3} = a$.
Thể tích khối H_4 là $V_4 = 6a \cdot \dfrac{1}{2}x^2 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a^3 3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy hình có thể tích lớn nhất là H_1 và hình có thể tích nhỏ nhất là H_4.

Chọn đáp án A □

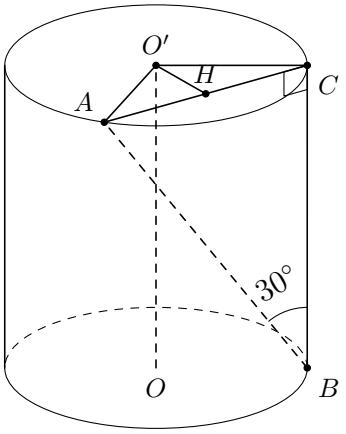
Câu 34. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30°. Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng.

A. $R\sqrt{3}$. **B**. $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **C**. $\dfrac{R\sqrt{3}}{4}$. **D**. R.

Lời giải.

Ta có $\widehat{(AB, OO')} = \widehat{(AB, BC)} = 30^\circ$
$\Rightarrow AC = BC \tan 30^\circ = R$
$\Rightarrow \triangle O'BI$ đều cạnh R.
Gọi H là trung điểm AC. Khi đó $O'H \perp (ABC)$.
Mặt khác

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(OO', AB) &= \mathrm{d}(OO', (ABC)) \\ &= \mathrm{d}(O', (ABC)) \\ &= O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (B) □

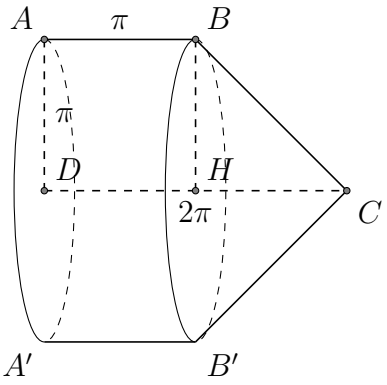
Câu 35. Một hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = \pi$, đáy nhỏ $AB = \pi$, đáy lớn $CD = 2\pi$. Cho hình thang đó quay quanh CD ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi^4$. **B.** $V = \frac{4}{3}\pi^4$. **C.** $V = \frac{4}{3}\pi^3$. **D.** $V = \frac{4}{3}\pi^2$.

Lời giải.

Khối tròn xoay là hợp thành từ khối trụ và khối nón.
- Thể tích khối trụ $V_1 = DH.S_{\text{đáy}} = \pi.\pi.R^2 = \pi^4$.
- Thể tích khối nón $V_2 = \frac{1}{3}CH.S_{\text{đáy}} = \frac{1}{3}\pi.\pi.R^2 = \frac{1}{3}\pi^4$.

Vậy thể tích khối tròn xoay $V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi^4$.



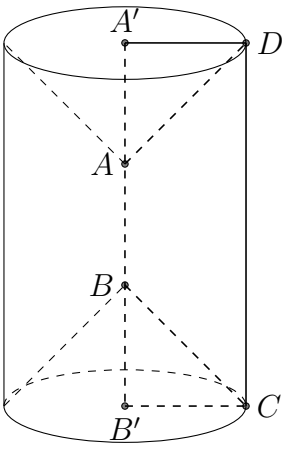
Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $BC = DA = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình thang đó quay quanh AB.

A. $V = \frac{4\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{5\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{2\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{7\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A và B' là điểm đối xứng với A qua B.
Gọi V_1 là thể tích khối trụ được tạo thành khi quay hình chữ nhật $A'DCB'$ quanh AB.
Gọi V_2 là thể tích khối nón được tạo thành khi quay tam giác BCB' quanh AB.
Khi đó $V = V_1 - 2V_2$.
Ta có $A'B' = DC = 3$, $BB' = B'C = 1$.
Do đó $V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi$ và $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$.
Vậy $V = 3\pi - 2\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.



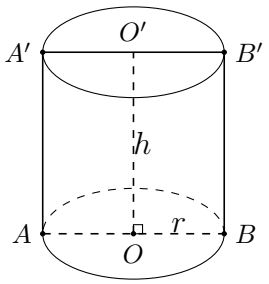
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Một hình trụ có bán kính đáy là 2 cm. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ đó.

A. 4π cm^3. **B.** 8π cm^3. **C.** 16π cm^3. **D.** 32π cm^3.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $r = 2$ cm và thiết diện là hình vuông $ABB'A'$. Khi đó $h = 2r = 4$ cm.
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$ cm^3.



Chọn đáp án C □

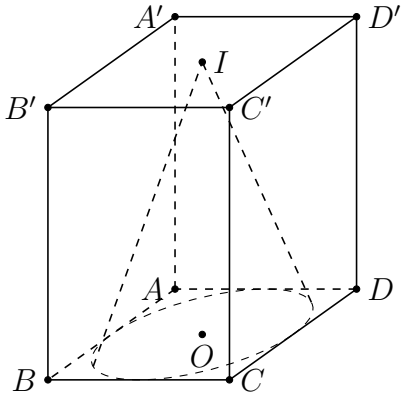
Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần khối nón đó bằng

A. $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+2)}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{5}+1)}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{5}+2)}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}+1)}{2}$.

Lời giải.

Gọi O, I lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính $r = \dfrac{a}{2}$.
Theo giả thiết thì đường cao hình nón có độ dài bằng $h = IO = a$.
Khi đó đường sinh hình nón là $l = \sqrt{IO^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy diện tích toàn phần hình nón là

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2 = \frac{\pi a^2(\sqrt{5}+1)}{4}.$$



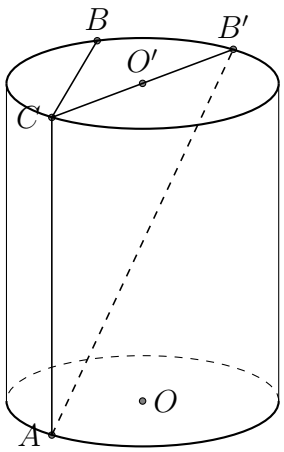
Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho khối trụ có bán kính đáy R và có chiều cao $h = 2R$. hai đáy của khối trụ là hai đường tròn có tâm lần lượt là O và O'. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm A cố định. Trên đường tròn (O') ta lấy điểm B thay đổi. Hỏi độ dài đoạn thẳng AB lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $AB_{\max} = 2R\sqrt{2}$. **B.** $AB_{\max} = 4R\sqrt{2}$. **C.** $AB_{\max} = 4R$. **D.** $AB_{\max} = R\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi C là điểm thuộc đường tròn (O') sao cho AC vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O').



Ta có: $AB^2 = AC^2 + CB^2 \leq h^2 + (2R)^2$

Hay $AB^2 \leq 4R^2 + 4R^2 \Leftrightarrow AB^2 \leq 8R^2 \Leftrightarrow AB \leq 2R\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi B đối xứng với C qua O' hay BC là đường kính của đường tròn (O').

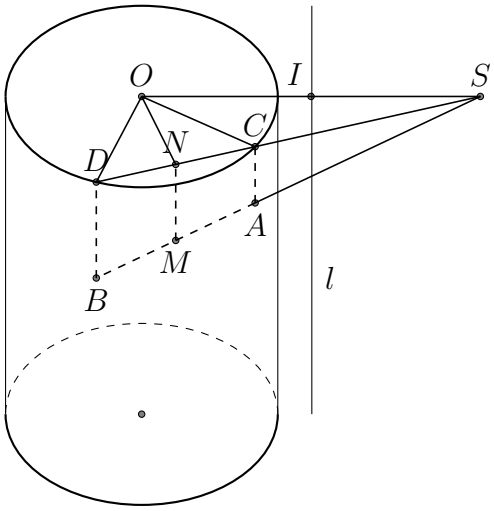
Vậy $AB_{\max} = 2R\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho mặt trụ (T) và một điểm S cố định nằm bên ngoài (T). Một đường thẳng Δ thay đổi luôn đi qua S và luôn cắt (T) tai hai điểm A, B (A, B có thể trùng nhau) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm tập hợp các điểm M.

A. Một mặt phẳng đi qua S.
B. Một mặt cầu đi qua S.
C. Một mặt nón có đỉnh là S.
D. Một mặt trụ.

Lời giải.



Gọi (α) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với trục của mặt trụ (T). Gọi (O) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt trụ (T).

Gọi I là trung điểm của OS và l là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (α).

Từ A, B kẻ các đường thẳng song song với trục của hình trụ cắt (O) tại C và D.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Dễ thấy A, B, C, D, M, N, S cùng thuộc một mặt phẳng nên S, C, N, D thẳng hàng.

Do góc $\widehat{ONS} = 90^\circ$ nên $NI = \dfrac{1}{2}OS$ (không đổi). Từ đó suy ra khoảng cách từ M đến đường thẳng l bằng NI và bằng $\dfrac{OS}{2}$.

Vậy M thuộc mặt trụ nhận đường thẳng l làm trục và có bán kính bằng $\dfrac{OS}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho khối nón đỉnh S, trục SI (I là tâm của đáy). Mặt phẳng trung trực của SI chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh S và V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{7}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy bằng R. Một mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30°, (P) cắt đường tròn đáy theo một dây cung. Tính độ dài dây cung đó theo R.

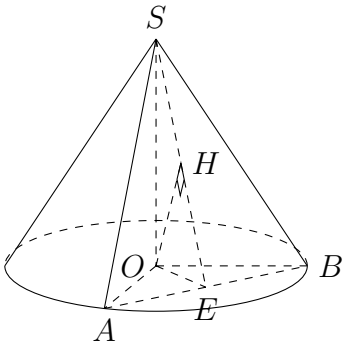
A. $\dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{2R}{3}$. **D.** $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AB, suy ra $OE\perp AB$.
Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH\perp SE$.
Ta có $\begin{cases}AB\perp OE\\ AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOE)\Rightarrow AB\perp OH$.
Từ đó suy ra $OH\perp(SAB)$ nên $d\,[O,(SAB)]=OH$.



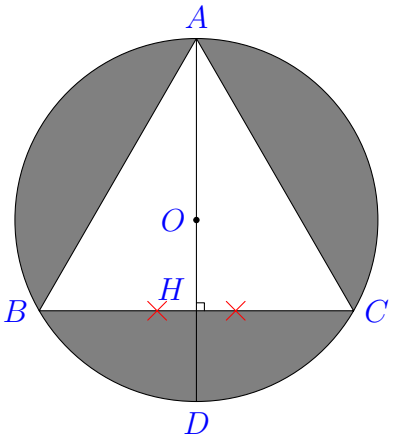
Theo giả thiết ta có: $SO=OA=2a; AB=2\sqrt{3}a\Rightarrow AE=\sqrt{3}a\Rightarrow OE^2=4a^2-3a^2=a^2$
Trong tam giác vuông SOE, ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OE^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{4a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Vậy khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) là $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44.

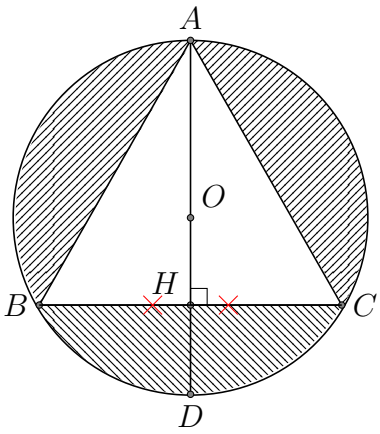
Cho tam giác ABC đều cạnh 3 và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên) quay quanh đường thẳng AD bằng

A. $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\pi$. **B.** $V=\dfrac{23\sqrt{3}}{8}\pi$.
C. $V=\dfrac{23\sqrt{3}}{24}\pi$. **D.** $V=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}\pi$.



Lời giải.

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD. V_1 là thể tích khối cầu sinh ra khi quay nửa đường tròn đường kính AD quanh đường thẳng AD, V_2 là thể tích khối nón sinh ra khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng AD.



$V_2 = \dfrac{9\sqrt{3}\pi}{8}$ và $V_1 = \dfrac{4}{3}(\sqrt{3})^3\pi = 4\sqrt{3}\pi$.

Vậy, $V = V_1 - V_2 = \dfrac{23\sqrt{3}}{8}\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cắt một khối trụ cho trước thành hai phần thì được hai khối trụ mới có tổng diện tích toàn phần nhiều hơn diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu 18π dm^2. Biết chiều cao của khối trụ ban đầu là 8 dm, tính tổng diện tích toàn phần S của hai khối trụ mới.

A. $S = 108\pi\,(\text{dm}^2)$. **B.** $S = 84\pi\,(\text{dm}^2)$. **C.** $S = 90\pi\,(\text{dm}^2)$. **D.** $S = 162\pi\,(\text{dm}^2)$.

Lời giải.

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ ban đầu (T).

và $h_1; h_2$ lần lượt là chiều cao của hai khối trụ mới $(T_1), (T_2)$.

Diện tích toàn phần khối trụ (T) là $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Diện tích toàn phần khối trụ (T_1) là $S_1 = 2\pi Rh_1 + 2\pi R^2$

Diện tích toàn phần khối trụ (T_2) là $S_2 = 2\pi Rh_2 + 2\pi R^2$

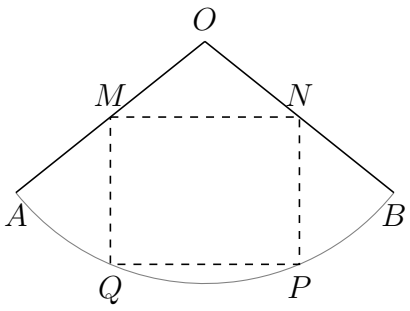
Theo đề bài, ta có $S_1 + S_2 = S + 18\pi \Leftrightarrow 2\pi R(h_1 + h_2) + 4\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 + 18\pi \Rightarrow 2\pi Rh + 4\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 + 18\pi \Rightarrow R = 3$.

Vậy $S_1 + S_2 = 2\pi Rh + 4\pi R^2 = 84\pi$

Chọn đáp án (B) □

Câu 46.

Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r = \dfrac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l = 2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của OA và OB. Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ có đường sinh PN trùng với MQ thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{3\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{8}$. **B.** $\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{4\pi}$.

C. $\dfrac{5\left(\sqrt{13}-1\right)}{12\pi}$. **D.** $\dfrac{\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{9}$.

Lời giải.

Gọi H, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ.

Độ dài cung AB chính là chu vi đường tròn đáy hình nón, do đó $l_{AB} = 2\pi r = 2\pi \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Suy ra: $\widehat{AOB} = \dfrac{l_{AB}}{OA} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác OAB ta có:
$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos(\widehat{AOB})} = 2\sqrt{3}$.

$PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

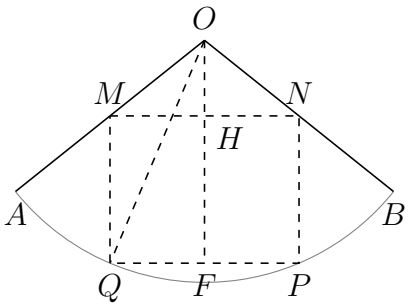
Suy ra $MH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \dfrac{1}{2}$.

$OF = \sqrt{OQ^2 - QF^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Do đó, $MQ = HF = OF - OH = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Thể tích hình trụ là $V = \pi MH^2 \cdot MQ = \dfrac{3\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{8}$.



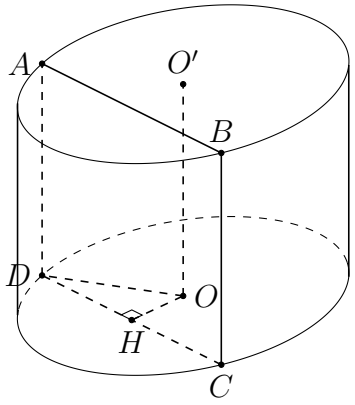
Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V = 7\sqrt{7}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{8}{3}\pi a^3$. **D.** $V = 8\pi a^3$.

Lời giải.

Vì thiết diện là hình vuông có $S = 4a^2$
$\Rightarrow h = AD = CD = 2a$.
Gọi H là trung điểm của CD.
Do $\triangle COD$ cân tại O nên $OH \perp CD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$.
Theo giả thiết $d(OO', (ABCD)) = OH = a\sqrt{3}$.
Suy ra $r = OD = \sqrt{DH^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2 + OH^2} = 2a$.
Vậy $V = \pi.r^2.h = 8\pi a^3$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 20 cm; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa vào xung quanh) mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 cm. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?

A. 25 bao. **B.** 17 bao. **C.** 18 bao. **D.** 22 bao.

Lời giải.

Thể tích khối trụ lục giác đều là $V_1 = 400.6.\dfrac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \sin 60^\circ = 240000\sqrt{3}$ cm^3.

Thể tích khối trụ sau khi trát là $V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 21^2 \cdot 400 = 176400\pi$ cm^3

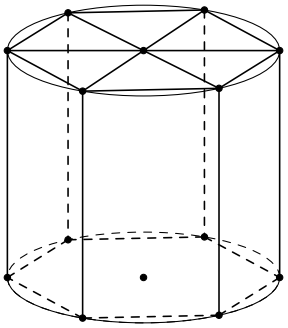
Thể tích của xi măng cần để trát vào một cột là

$V = (V_2 - V_1) \cdot 0{,}8 = \left(17640\pi - 24000\sqrt{3}\right) \cdot 8$ cm^3

Thể tích của xi măng cần để trát vào 10 cột là

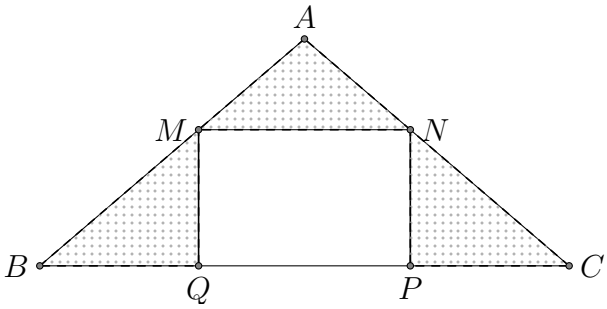
$V = (V_2 - V_1) \cdot 0{,}8 \cdot 10 = \left(176400\pi - 240000\sqrt{3}\right) \cdot 8$ cm^3.

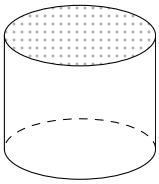
Số bao xi măng cần ít nhất để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột là $\dfrac{\left(176400\pi - 240000\sqrt{3}\right) \cdot 8}{64000} \approx 17{,}3$ bao.



Chọn đáp án C □

Câu 49. Có tấm bìa hình tam giác đều ABC cạnh bằng a. Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ.





Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^2}{8}$.

Lời giải.

Giả sử $PQ = MN = x$ $(0 < x < a)$. Do ABC là tam giác đều nên AMN là tam giác đều. Suy ra $AN = x$, $NC = a - x$ và $PC = \dfrac{a-x}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ S_{xq} bằng diện tích hình chữ nhật $MNPQ$.

Suy ra $S_{xq} = MN \cdot NP = x \cdot \sqrt{(a-x)^2 - \left(\dfrac{a-x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x(a-x) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{x+a-x}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (Theo BĐT Cô - si).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Vậy diện tích hình chữ nhật bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Một cái cốc hình trụ cao 15 cm đựng được $0,5$ lít nước. Hỏi bán kính đường tròn đáy của cái cốc xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng thập phân thứ hai)?

A. $3,26$ cm. **B.** $3,27$ cm. **C.** $3,25$ cm. **D.** $3,28$ cm.

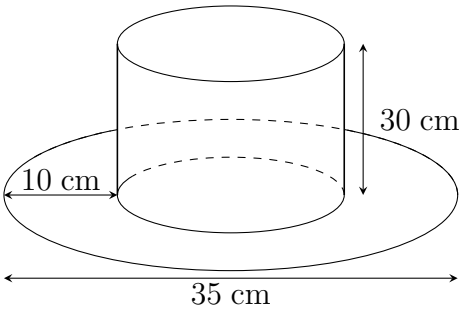
Lời giải.

Ta có $0,5$ lít $= 0,5$ dm$^3 = 500$ cm^3.

Bán kính đường tròn đáy của cái cốc $r = \sqrt{\dfrac{500}{\pi \cdot 15}} \approx 3,26$ cm.

Chọn đáp án A □

Câu 51.
Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ dưới đây. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



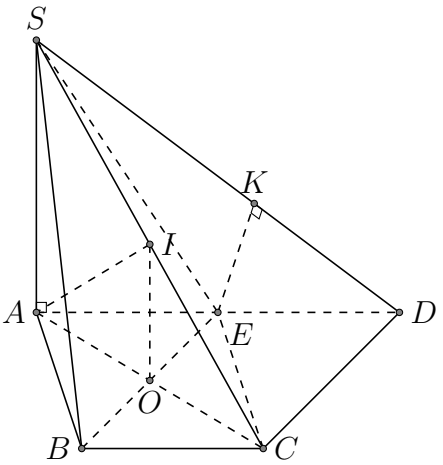
A. $750,25\pi$ cm^2. **B.** 700π cm^2.
C. $756,25\pi$ cm^2. **D.** $754,25\pi$ cm^2.

Lời giải.
Tổng diện tích được tính bằng tổng diên tích xung quanh của hình trụ và diện tích một đáy, với diện tích hình vành khăn.
Ta có: $S = 2\pi \cdot 7,5 \cdot 30 + \pi \cdot 7,5^2 + \pi\left(17,5^2 - 7,5^2\right) = 756,25\pi$.
Chọn đáp án C □

Câu 52. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK \perp SD$ tại K. Bán kính R của mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K là

A. $R = \dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = a$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.
Mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCE$.
Gọi I là trung điểm SC và O là tâm hình vuông $ABCE$. Vì $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại A, suy ra $IA = IS = IC = \dfrac{1}{2}SC = a$. Mặt khác $OI \perp (ABCE)$ và O là tâm hình vuông $ABCE$ nên $IA = IB = IC = IE$. Từ đó suy ra I là tâm mặt cầu cần tìm và bán kính mặt cầu đó là $R = a$.

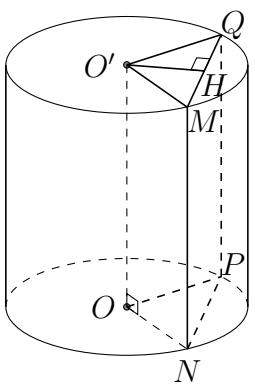


Chọn đáp án C □

Câu 53. Một hình trụ có bán kinh $r = 5$ cm và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7$ cm. Cắt khối trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Diện tích thiết diện tạo thành là

A. 56 cm^2. **B.** 55 cm^2. **C.** 53 cm^2. **D.** 46 cm^2.

Lời giải.
Giả sử hình trụ (T) có trục OO'. Thiết diện song song với trục là hình chữ nhật $MNPQ$ (N, P thuộc đường tròn tâm O và M, Q thuộc đường tròn tâm O').
Gọi H là trung điểm MQ. Khi đó, $O'H \perp MQ \Rightarrow O'H \perp (MNPQ)$.
Do đó, $\mathrm{d}\left(OO', (MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(O', (MNPQ)\right) = O'H = 3$ cm.
Ta có $MH = \sqrt{O'M^2 - O'H^2} = 4$ cm $\Rightarrow MQ = 2MH = 8$ cm.
Diện tích thiết diện là $S = MQ \cdot MN = 56$ cm^2.



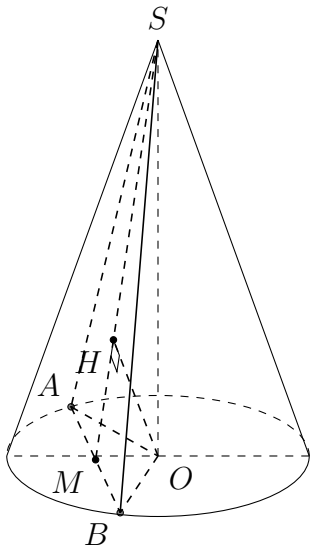
Chọn đáp án A □

Câu 54. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính $r = 25$ cm. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 500$ cm^2. **B.** $S = 400$ cm^2. **C.** $S = 300$ cm^2. **D.** $S = 406$ cm^2.

Lời giải.

Giả sử thiết diện qua đỉnh của hình nón (N) là tam giác cân SAB. Gọi M là trung điểm AB và H là hình chiếu của O lên SM.



Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OM = 15$ cm.

Tam giác SMO vuông tại O có $OH \perp SM$ nên $SO \cdot OM = OH \cdot SM \Rightarrow SM = \dfrac{SO \cdot OM}{OH} = 25$ cm.

Tam giác OMA vuông tại M nên $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2} = 20$ cm.

Diện tích thiết diện là $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} SM \cdot AB = 20 \cdot 25 = 500$ cm^2.

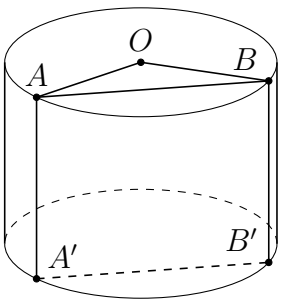
Chọn đáp án A □

Câu 55. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120°. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình trụ. Vì thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông nên chiều cao bằng đường kính đường tròn đáy hay $2r$. Suy ra $2\pi r \cdot 2r = 4\pi$ hay $r = 1$. Do đó



$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$$

Vậy diện tích thiết diện $ABB'A'$ là $S_{ABB'A'} = AD \cdot AB = 2\sqrt{3}$.

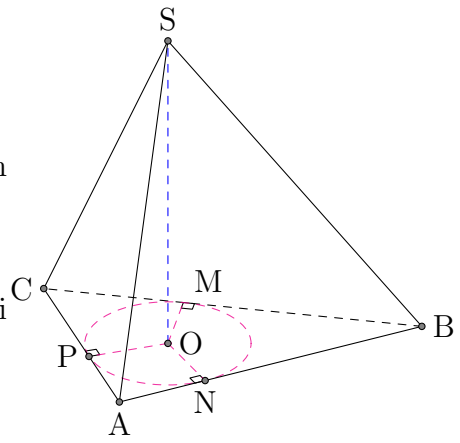
Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có: $SO \perp (ABC)$ tại O.
Suy ra, O là tâm đường tròn nội tiếp và cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi a là độ dài cạnh của tam giác ABC.
Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Do $OM = \dfrac{1}{2}OA$ nên ta có:



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot OM^2\cdot SO}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot OA^2\cdot SO} = \frac{OM^2}{OA^2} = \left(\frac{OM}{OA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

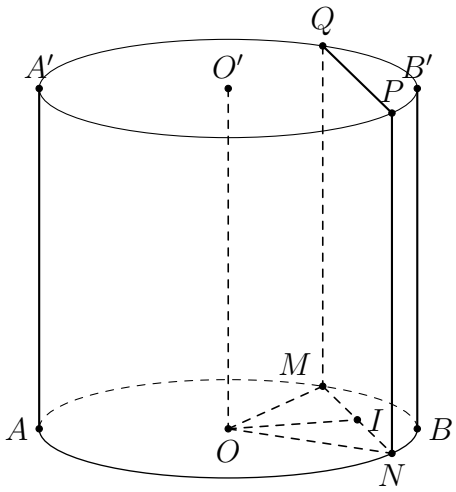
Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 cm và khoảng cách giữa hai đáy là 7 cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

A. $S = 55$ cm^2. **B.** $S = 56$ cm^2. **C.** $S = 53$ cm^2. **D.** $S = 46$ cm^2.

Lời giải.

Vì khối trụ được cắt bởi mặt phẳng song song với trục nên thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$.
Gọi I là trung điểm MN. Khi đó, $OI \perp MN$ do $\triangle OMN$ cân tại O.
Mà $OI \perp PN$ (do PN vuông góc với đáy)
$\Rightarrow OI \perp (MNPQ) \Rightarrow OI = 3$ cm.
Áp dụng định lí Pi-ta-go cho tam giác vuông OMI, ta có $MI = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow MN = 8$.
Mà $PQ = OO' = 7$ nên $S_{MNPQ} = 8 \cdot 7 = 56$ (cm^2).



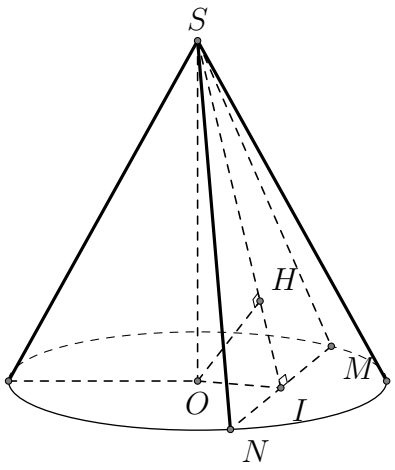
Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh của hình nón cách tâm của đáy 12 cm. Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α) .

A. $S = 400$ cm^2. **B.** $S = 406$ cm^2. **C.** $S = 300$ cm^2. **D.** $S = 500$ cm^2.

Lời giải.

Gọi S, O là đỉnh và tâm của đáy hình nón. Giả sử (α) cắt đường tròn đáy tại M và N, thiết diện là ΔSMN. Gọi I là trung điểm của MN và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (α).



Ta có $SO = 20, ON = 25, OH = 12$ và $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = 16$.

Vì $\Delta SOI \backsim \Delta SHO \Rightarrow OI = \dfrac{SO \cdot OH}{SH} = 15$.

Khi đó

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25, MN = 2IN = 2\sqrt{ON^2 - OI^2} = 40$.

Vậy diện tích thiết diện $\mathbb{S} = \dfrac{1}{2} SI \cdot MN = 500$ (cm^2).

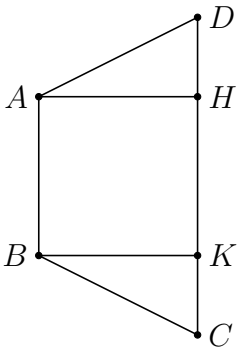
Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB = 2$ và $CD = 4$. Khi quay hình thang quanh trục CD thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng 6π. Diện tích hình thang $ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có



$$V = \pi AH^2 \cdot AB + \frac{1}{3}\pi AH^2 (DH + CK) = 2\pi AH^2 + \frac{2}{3}\pi AH^2 = 6\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow 2AH^2 + \frac{2}{3}AH^2 = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AH = \frac{9}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 60. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi thiết diện qua trục bằng $10a$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. πa^3. **B.** $5\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Lời giải.

Chu vi thiết diện qua trục là $C = 2(2r + h) = 10a \Leftrightarrow 4a + 2h = 10a \Leftrightarrow h = 3a$.

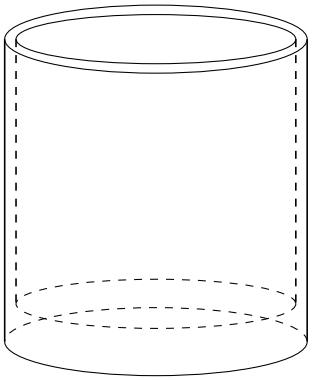
Khi đó $V = \pi r^2 h = 3\pi a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày 1,5 cm, thành xung quanh cốc dày 0,2 cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là 480π cm^3 thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?

A. $75{,}66\pi$ cm^3. **B.** $80{,}16\pi$ cm^3. **C.** $85{,}66\pi$ cm^3. **D.** $70{,}16\pi$ cm^3.

Lời giải.



Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là r và h.
Ta có: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{480}{r^2}$.
Thể tích hình trụ bên ngoài là:
$V = \pi\left(r+0{,}2\right)^2 \cdot \left(h+1,5\right) = \pi\left(r+0{,}2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)$.
Thể tích thủy tinh là: $\pi\left(r+0{,}2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{480}{r^2}+1{,}5\right) - 480\pi$.
Xét $f(r) = \pi\left(r+0{,}2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{480}{r^2}+1{,}5\right), r > 0$.
$\Rightarrow f'(r) = 2\pi\left(r+0{,}2\right)\left(\dfrac{480}{r^2}+1{,}5\right) + \pi\left(r+0{,}2\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{960}{r^3}\right)$.
$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{480}{r^2}+1{,}5\right) = (r+0,2)\cdot\dfrac{960}{r^3} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{192}{r^3} \Leftrightarrow r = 4$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(r)$

r	0		4		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27783\pi}{50}$	$\nearrow$	$+\infty$

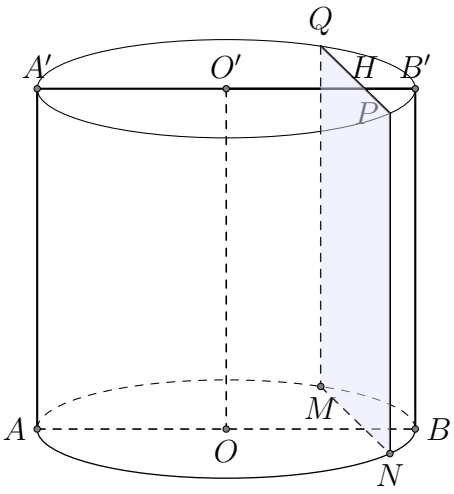
Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\dfrac{27783}{50}\pi - 480\pi \approx 75{,}66\pi\,\text{cm}^3$.
Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng $\dfrac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $2\sqrt{3}a^2$. **B.** a^2. **C.** πa^2. **D.** $\sqrt{3}a^2$.

Lời giải.

Gọi $ABB'A'$ là thiết diện qua trục của hình trụ. Từ giả thiết ta suy ra đường cao hình trụ là $AA' = 2a$, bán kính đường tròn đáy hình trụ là $R = \dfrac{AB}{2} = a$.
Mặt phẳng (P) song song với trục nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh $MQ = AA' = 2a$, và cách trục một khoảng $\dfrac{a}{2}$ nên $O'H = \dfrac{a}{2}$ với H là trung điểm của PQ.
Khi đó $PQ = 2\sqrt{O'Q^2 - O'H^2} = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}$.
Do đó diện tích thiết diện cần tìm là $MQ \cdot PQ = 2\sqrt{3}a^2$.



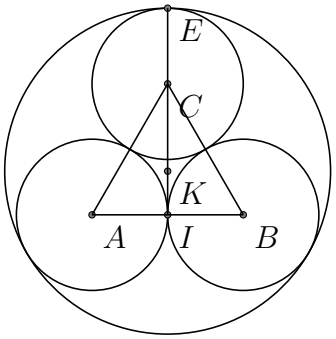
Chọn đáp án A □

Câu 63. Có ba quả bóng hình cầu bán kính bằng nhau và bằng 2 cm. Xét hình trụ có chiều cao 4 cm và bán kính R cm chứa được ba quả bóng trên sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau. Khi đó bán kính R nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}$ cm. **B**. $3\sqrt{3}$ cm. **C**. $\dfrac{4\sqrt{3}+6}{3}$ cm. **D**. $2+\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

$R_{\min} = CK + CE = \dfrac{2}{3}BC\dfrac{\sqrt{3}}{2} + CE = \dfrac{4\sqrt{3}+6}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x = \dfrac{h}{2}$. **B**. $x = \dfrac{h}{3}$. **C**. $x = \dfrac{2h}{3}$. **D**. $x = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

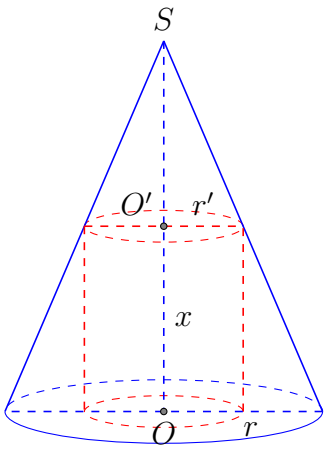
Theo định lí Ta-Let ta có $\dfrac{SO'}{SO'+x} = \dfrac{h-x}{h} = \dfrac{r'}{r}$, $(0 < x < h)$.

Thể tích hình trụ là $V = \pi r'^2 x = \pi\dfrac{[(h-x)r]^2}{h^2}\cdot x = \dfrac{\pi r^2}{h^2}\cdot x\cdot(h-x)^2$.

Xét $f(x) = x(h-x)^2 = 4\cdot\dfrac{h-x}{2}\cdot\dfrac{h-x}{2}\cdot x$

$$\le 4\left(\frac{\frac{h-x}{2}+\frac{h-x}{2}+x}{3}\right)^3 = \frac{4h^3}{27}.$$

Dấu " = " xảy ra khi $\dfrac{h-x}{2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{h}{3}$.

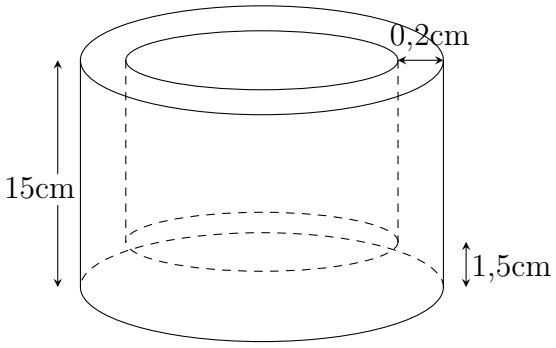


Chọn đáp án B □

Câu 65.

Người ta cần sản xuất một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ không có nắp với đáy cốc và thành cốc làm bằng thủy tinh đặc, phần đáy cốc dày đều 1,5 cm và thành xung quanh cốc dày đều 0,2 cm như hình vẽ bên.

Biết rằng chiều cao của chiếc cốc là 15 cm và khi ta đổ 180 ml nước vào thì đầy cốc. Nếu giá thủy tinh là 500 đ/1cm^3 thì giá tiền thủy tinh để sản xuất chiếc cốc đó gần nhất với số tiền nào sau đây?



A. 25 nghìn đồng. **B**. 31 nghìn đồng. **C**. 40 nghìn đồng. **D**. 20 nghìn đồng.

Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích thực của chiếc cốc có bán kính đáy là r, chiều cao h_1;

V_2 là thể tích của khối thủy tinh đặc cần tính;

V là thể tích của chiếc cốc (bao gồm thể tích thực và thể tích phần thủy tinh đặc) có bán kính đáy R

và chiều cao h.

Theo đề bài ta có $V_1 = 180 = \pi r^2 h_1 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{180}{\pi(15-1,5)}} = \sqrt{\dfrac{40}{3\pi}}$.

Theo giả thiết suy ra $R = r + 0,2 \Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi\left(\sqrt{\dfrac{40}{3\pi}} + 0,2\right)^2 \cdot 15 \approx 240{,}72 \text{ cm}^3$

$\Rightarrow$ thể tích của khối thủy tinh đặc là $V_2 = V - V_1 \approx 60,72 \text{ cm}^3$.

Suy ra số tiền để sản xuất 1 cốc thủy tinh là $60{,}72 \times 500 \approx 30.360$ đồng.

Vậy số tiền gần nhất là 31 nghìn đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho hình nón $(\mathscr{N}_1)$ có chiều cao bằng 40 cm. Người ta cắt hình nón $(\mathscr{N}_1)$ bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ $(\mathscr{N}_2)$ có thể tích bằng $\dfrac{1}{8}$ thể tích $(\mathscr{N}_1)$. Tính chiều cao h của hình nón $(\mathscr{N}_2)$.

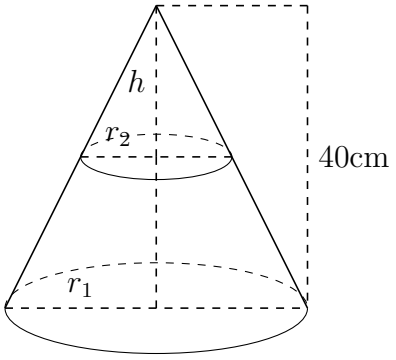
A. $h = 40$ cm. **B.** $h = 10$ cm. **C.** $h = 20$ cm. **D.** $h = 5$cm.

Lời giải.

Gọi r_1, h_1 lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón $(\mathscr{N}_1)$; r_2 là bán kính đường tròn đáy của hình nón $(\mathscr{N}_2)$.

Theo định lí Ta-lét, ta có: $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{h}{h_1}$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{r_2^2 h}{r_1^2 h_1} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{h^3}{h_1^3} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow h = \dfrac{h_1}{2} = \dfrac{40}{2} = 20(\text{cm})$.



Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π. Tính thể tích của khối trụ biết khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

A. 160π. **B.** 400π. **C.** 40π. **D.** 64π.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao, r là bán kính đáy của khối trụ. Khi đó ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi r h \Leftrightarrow r = \dfrac{S_{\text{xq}}}{2\pi h}$.

Khi đó thể tích của khối trụ là

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{S_{\text{xq}}}{2\pi h}\right)^2 \cdot h = \frac{S_{\text{xq}}^2}{4\pi h} = \frac{(80\pi)^2}{4\pi \cdot 10} = 160\pi.$$

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai, mặt phẳng $ABCD$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

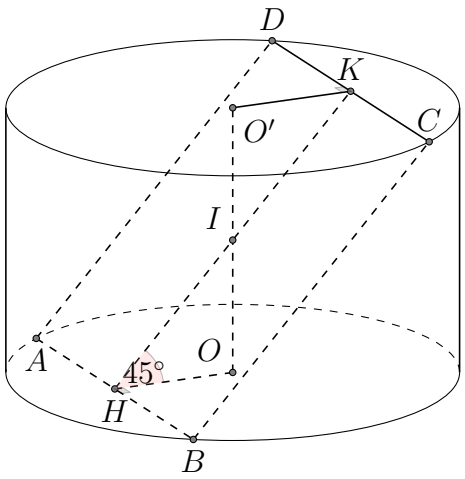
A. $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **B.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm 2 đáy và I là giao điểm của OO' và HK suy ra I là trung điểm OO' và HK. Do đó $IH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow OI = OH = \dfrac{a}{2} \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ta có $R^2 = OA^2 = OH^2 + AH^2 = \dfrac{3a^2}{8}$,

suy ra $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \dfrac{3a^2}{8} \cdot 2\dfrac{a\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.



Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA và SB là hai đường sinh biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích tam giác SAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

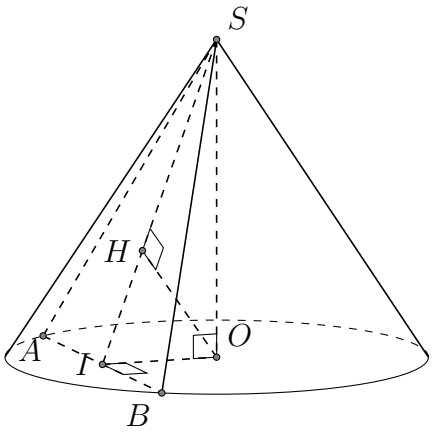
A. $\dfrac{\sqrt{674}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{530}}{4}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{23}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O lên SI, suy ra $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 1$. Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2} = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow OI^2 = \dfrac{9}{8}$.

Do đó $SI = \sqrt{OI^2 + SO^2} = \sqrt{\dfrac{9}{8} + 9} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Diện tích tam giác SAB bằng $\dfrac{1}{2} SI \cdot AB \Rightarrow AB = \dfrac{2S}{SI} = \dfrac{16}{\sqrt{2}}$, suy ra $AI = \dfrac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow AO = \dfrac{\sqrt{530}}{4} = R$.



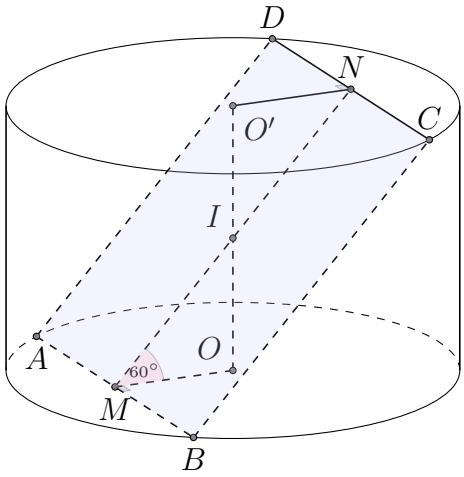
Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30°. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2R}{3}$.

Lời giải.

Giả sử (α) là mặt phẳng $(ABCD)$ như hình vẽ.
Gọi M là trung điểm của AB



Ta có $\begin{cases} IO \perp AB \\ OM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (IOM)$

$\Rightarrow [OO', (\alpha)] = \widehat{OIM} = 30^\circ$

$\Rightarrow OM = OI \tan 30^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}.$

Khi đó

$$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2}$$
$$= 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

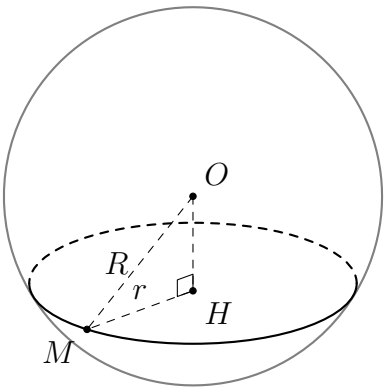
Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho một hình cầu bán kính 5 cm, cắt hình cầu này bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện tạo thành là một đường tròn đường kính 4 cm. Tính thể tích của khối nón có đường tròn đáy là thiết diện vừa tạo và đỉnh là tâm hình cầu đã cho (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 19,19 cm^3. **B.** 19,12 cm^3. **C.** 19,18 cm^3. **D.** 19,20 cm^3.

Lời giải.

Gọi M là điểm nằm trên đường tròn đáy và H là tâm của đáy hình nón. Khi đó ta có $\triangle OHM$ vuông tại H và độ dài đường sinh $l = OM = R = 5\,\text{cm}$, bán kính đáy hình nón $r = HM = 2\,\text{cm}$.



Suy ra chiều cao của hình nón là
$h = OH = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\,\text{cm}.$
Vậy thể tích khối nón là
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{21} \approx 19{,}19\,\text{cm}^3$

Chọn đáp án A □

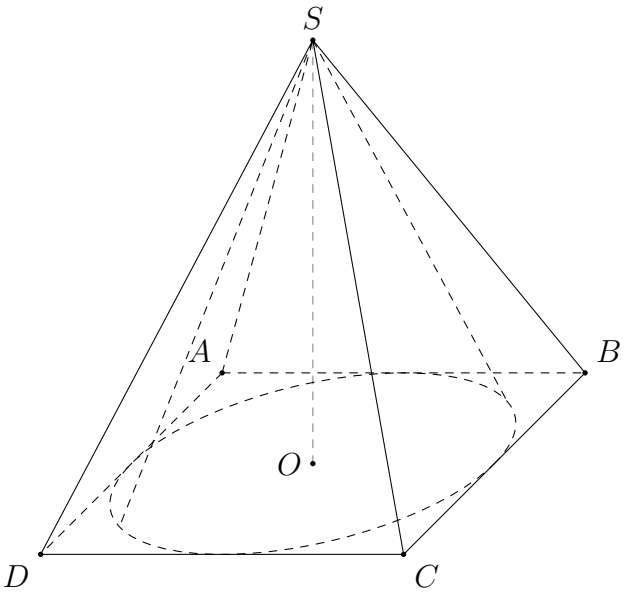
Câu 72. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **C.** $\pi a^2\sqrt{17}$. **D.** $2\pi a^2\sqrt{17}$.

Lời giải.

Ta có bán kính của hình nón là $R = \dfrac{a}{2}$.
Chiều cao hình nón bằng chiều cao hình chóp $h = SO = 2a$.
Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.
Suy ra diện tích xung của hình nón là

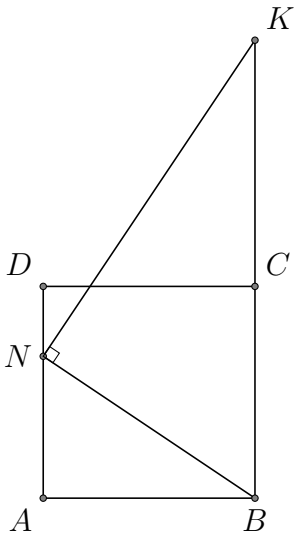
$$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 73.
Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2DN$ Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là

A. $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{3}{2}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{7}{6}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{6}{7}\pi a^3$.

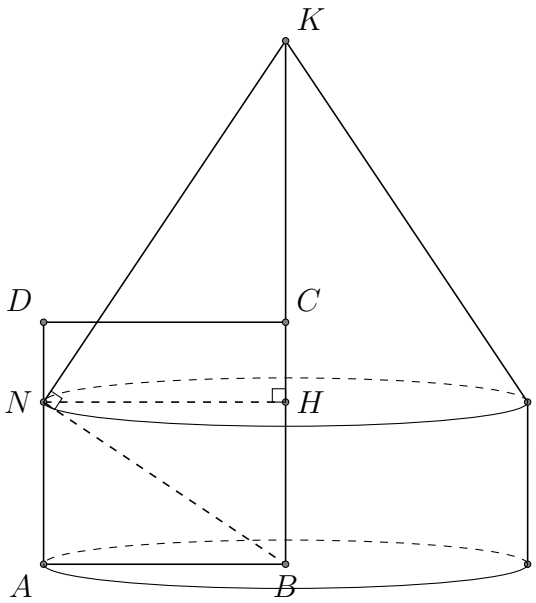


Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của N lên BK.
Khối tròn xoay tạo thành bao gồm:

- ☑ Khối nón đỉnh K, đáy là đường tròn tâm H.
- ☑ Khối trụ có trục là BH và hai đáy là đường tròn tâm B và đường tròn tâm H

Xét $\triangle KBN$ có $HK.HB = HN^2 = AB^2$
$\Rightarrow HK = \dfrac{AB^2}{HB} = \dfrac{3a}{2}$.
Thể tích khối nón là $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot NH^2 \cdot HK = \dfrac{1}{2}\pi a^3$.
Thể tích khối trụ là $V_2 = \pi \cdot AB^2 \cdot BH = \dfrac{2}{3}\pi a^3$.



Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{7}{6}\pi a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Cho một hình trụ và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ và hai đỉnh còn lại nằm trên đáy thứ hai của hình trụ sao cho mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ một góc $45°$. Diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của khối trụ là

A. $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}; V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

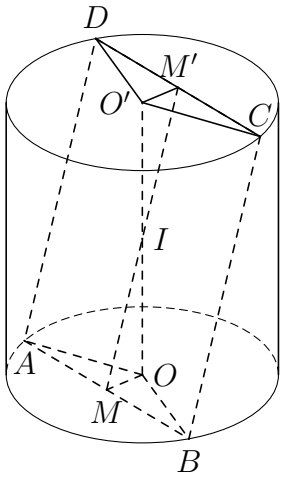
B. $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}; V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{32}$.

C. $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}; V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$.

D. $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}; V = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của đường tròn đáy của hình trụ và M, M', I lần lượt là trung điểm của AB, CD, OO'.



Ta có $MM' = AD = a \Rightarrow IM = \dfrac{a}{2}$.

Vì $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ một góc $45°$ nên $\widehat{IMO} = 45°$

$\Rightarrow IO = OM = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow OO' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $R = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ là

$S_{\text{xq}} = 2\pi R \cdot OO' = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}; V = \pi R^2 \cdot OO' = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Một xưởng cơ khí sản xuất những chiếc thùng phi có nắp đậy dạng hình trụ với thể tích mỗi chiếc là $2\pi \text{m}^3$. Người ta nên làm thùng phi với bán kính đáy r và chiều cao h bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $r = 1$ m;$h = 2$ m.

B. $r = 2$ m;$h = 0,5$ m.

C. $r = \sqrt{2}$ m; $h = 1$ m .

D. $r = 0{,}5$ m; $h = 1$ m.

Lời giải.

Ta có $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{2}{r^2} \Rightarrow S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot \dfrac{2}{r^2} + 2\pi r^2 = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$.

$S' = 2\pi\left(-\dfrac{2}{r} + 2r\right) \Rightarrow S' = 0 \Leftrightarrow 2r^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$.

bảng biến thiên

r	0		1		$+\infty$
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖ $+\infty$	↘	6π	↗	$+\infty$

Diện tích của chiếc thùng nhỏ nhất khi $r = 1$ và chiều cao $h = \dfrac{2}{r^2} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong không gian cho tam giác đều ABC cạnh a. Khi quay tam giác đó xung quanh trục BC ta được một hình tròn xoay. Tính diện tích xung quanh của hình tròn xoay đó.

A. $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{3}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

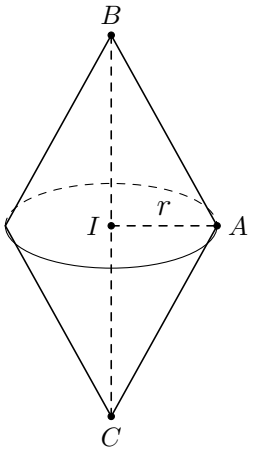
Gọi I là trung điểm BC.

Hình tròn xoay được tạo bởi hai hình nón bằng nhau như hình vẽ.

Khi đó $l = AB; r = IA$.

Do đó

$S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot l = 2\pi \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \pi a^2\sqrt{3}$.

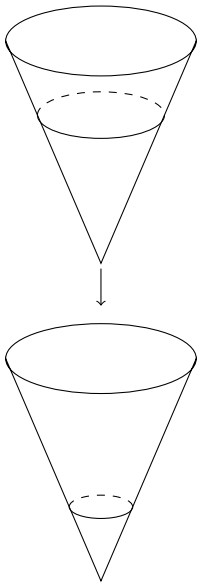


Chọn đáp án D □

Câu 77.

Cho hai cái bình có dạng hình nón quay đỉnh xuống dưới, có chiều cao cùng bằng 2 và bán kính đáy bằng nhau, mỗi bình đều đặt thẳng đứng như hình vẽ. Lúc đầu bình ở phía trên chứa đầy nước và bình ở phía dưới không có nước. Sau đó, nước chảy từ bình trên xuống bình dưới theo một lỗ nhỏ ở đỉnh hình nón phía trên. Hãy tính chiều cao của nước trong bình dưới tại thời điểm chiều cao của nước ở bình trên là 1 (chiều cao của nước được tính từ đỉnh của hình nón tới mặt nước).

A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.



Lời giải.

Gọi bán kính đáy hình nón là R. Khi đó, ta có thể tích khối nón (thể tích phần không gian chứa đầy nước) phía trên là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2 = \dfrac{2}{3}\pi R^2$.

Tại thời điểm chiều cao của nước bình trên là 1, phần không gian chứa nước là khối nón, giả sử có bán kính đáy R'. Khi đó, ta có $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow R' = \dfrac{1}{2}R$.

Suy ra thể tích nước trong bình trên lúc này là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot 1 = \dfrac{1}{12}\pi R^2$.

Do đó, thể tích nước đã chảy xuống bình dưới là $V_3 = V_1 - V_2 = \dfrac{7}{12}\pi R^2$.

Gọi chiều cao của nước bình dưới là h và bán kính mặt nước là $r \Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{2} \Rightarrow r = \dfrac{hR}{2}$.

Suy ra $V_3 = \dfrac{1}{3}\pi \left(\dfrac{hR}{2}\right)^2 \cdot h$.

Ta có phương trình $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{hR}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{7}{12}\pi R^2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, BC = 2a$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm O sao cho $OA = x$. Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với AD. Tìm x biết thể tích của hình tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh d gấp ba lần thể tích hình cầu có bán kính bằng cạnh AB.

A. $x = \frac{a}{2}$. **B.** $x = 2a$. **C.** $x = a$. **D.** $x = \frac{3a}{2}$.

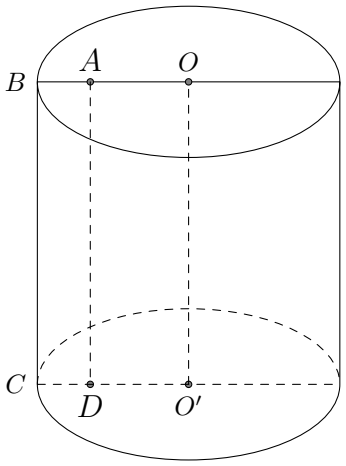
Lời giải.

Thể tích hình tròn xoay khi quay $ABCD$ quanh d là $V_1 = [\pi(x+a)^2 - \pi x^2]\,AD$.

Thể tích hình cầu có bán kính bằng cạnh AB là $V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Theo bài ra ta có phương trình

$$\begin{aligned} &\left[\pi(x+a)^2 - \pi x^2\right] AD = 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 \\ \Leftrightarrow\ &2\pi a^3 + 4\pi a^2 x = 4\pi a^3 \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án A □

Câu 79. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích V của khối nón đó bằng

A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$.

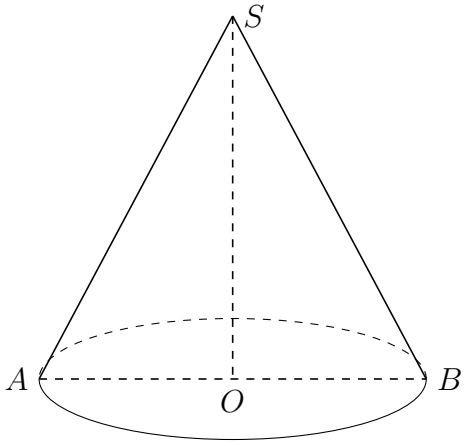
Lời giải.

Giả sử hình nón có đỉnh S và đường tròn đáy tâm O và mặt phẳng đi qua trục SO cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông cân ASB.

Khi đó $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\text{đ}}$.

Do giả thiết ta có $SO = OA = OB = \frac{AB}{2}$ nên $OA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Ta suy ra $S_{\text{đ}} = \pi \cdot OA^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 80. Cần phải thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng nước sạch có dung tích $V(\text{cm}^3)$. Hỏi bán kính $R(\text{cm})$ của đáy hình trụ nhận giá trị nào sau đây để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$. **B.** $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **C.** $R = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$. **D.** $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Lời giải.

Gọi h(cm) là chiều cao của thùng dạng hình trụ cần làm, ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Diện tích toàn phần của thùng là

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3\sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R}} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}.$$

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S nhỏ nhất là bằng $3\sqrt[3]{\pi V^2}$. Khi đó

$$2\pi R^2 = \frac{V}{R} \Leftrightarrow R^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

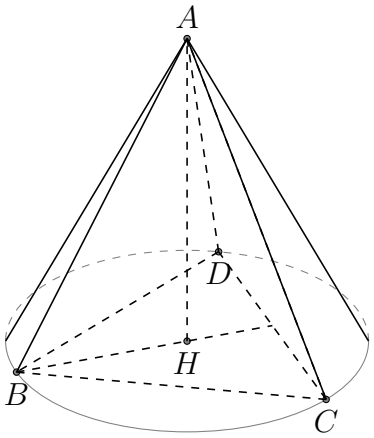
Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Tính diện tích xung quanh hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a.

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng a, gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó, hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ có bán kính đáy $r = HB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và độ dài đường sinh $l = AB = a$.



Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R, phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x. Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

A. $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$. **B.** $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$. **C.** $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $x = \dfrac{\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón tạo thành, ta có

$$x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}.$$

Độ dài đường sinh của hình nón là R nên suy ra chiều cao của hình nón là

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Thể tích khối nón tạo thành

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{x^2\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}}{8\pi^2}.$$

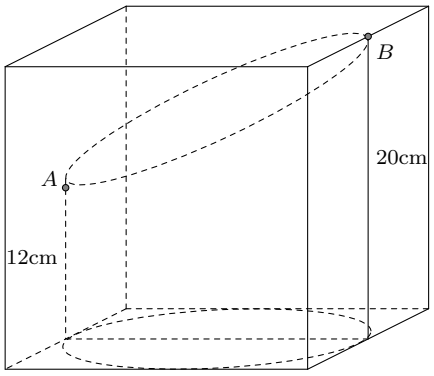
Xét hàm số $f(x)=x^2\sqrt{4\pi^2R^2-x^2}$ với $0<x<2\pi R$.
$f'(x)=\dfrac{x\left(8\pi R^2-3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2R^2-x^2}}=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$.
Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$		$2\pi R$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{16\pi^3R^3}{3\sqrt{3}}$	↘	

Như vậy, khi $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$ thì thể tích khối nón lớn nhất là bằng $V=\dfrac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm, khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm.



Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ. (Giả thiết rằng, khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

A. $R=8{,}2$ cm. **B.** $R=4{,}8$ cm.
C. $R=6{,}4$ cm. **D.** $R=5{,}2$ cm.

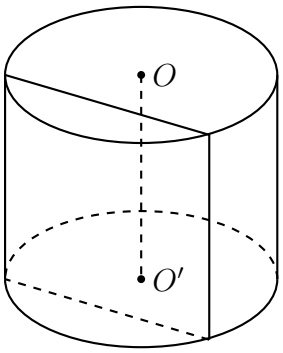
Lời giải.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V_{HCN}=(2R)^2 20=80R^2$.
Thể tích của khối gỗ là $V=20\pi R^2-\pi 4R^2=16\pi R^2$.
Suy ra $80R^2-16\pi R^2=2000\Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{2000}{80-16\pi}}\approx 8{,}2$ cm.

Chọn đáp án A □

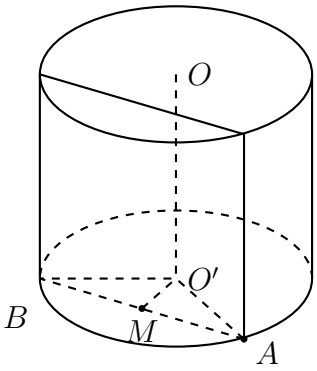
Câu 84.

Cho khối trụ T có trục OO', bán kính r và thể tích V. Cắt khối trụ T thành hai phần bởi mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{r}{2}$ (như hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích phần không chứa trục OO'. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$



A. $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
C. $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2\pi}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{4-\sqrt{3}}{4\pi}$.

Lời giải.



Gọi h là chiều cao của khối trụ (T). Thể tích khối trụ đã cho là $V = h \cdot \pi r^2$.
Gọi A và B là giao điểm của mặt phẳng (P) với đường tròn đáy tâm O' và M là trung điểm của AB.
Ta có $O'M = \dfrac{r}{2} \Rightarrow AB = 2AM = 2\sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{4}} = r\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AO'B} = 120^\circ$.
Diện tích đáy phần khối trụ không chứa trục là

$$S_1 = S_q - S_{\triangle AO'B} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\Rightarrow V_1 = h \cdot \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \right).$$

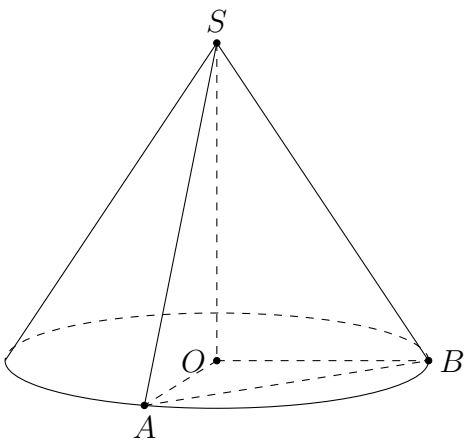
Suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S đáy là đường tròn tâm O và có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng a, A và B là hai điểm bất kỳ trên (O). Thể tích của khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $\dfrac{a^3}{96}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.

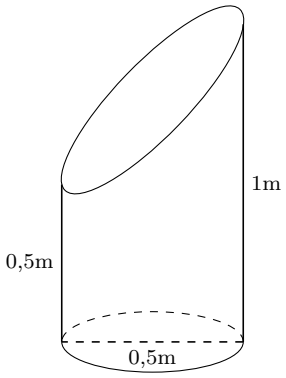


$V_{S.OAB} \le \dfrac{1}{6} SO \cdot OA \cdot OB = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$, suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp $V_{S.OAB}$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ khi $OA \perp OB$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86.

Một khối gỗ hình trụ đường kính 0,5 m và chiều cao 1 m. Người ta đã cắt khối gỗ, phần còn lại như hình vẽ bên có thể tích là V. Tính V.



A. $\dfrac{3\pi}{16}$. **B.** $\dfrac{5\pi}{64}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{64}$. **D.** $\dfrac{\pi}{16}$.

Lời giải.

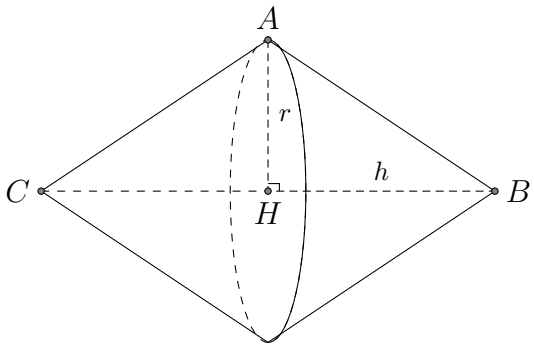
Nhận thấy khối gỗ bị cắt bỏ đi có thể tích bằng $\dfrac{1}{4}$ thể tích của khối gỗ hình trụ trước khi cắt hay phần còn lại của khối gỗ sau khi cắt có thể tích bằng $\dfrac{3}{4}$ thể tích khối gỗ hình trụ ban đầu.

Do đó $V = \dfrac{3}{4} \cdot \pi r^2 h = \dfrac{3}{4} \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 \times 1 = \dfrac{3\pi}{64}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87.

Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và $AH = 3$, $BC = 6$. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh được tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục BC.



A. $V = 9\pi$. **B.** $V = 15\pi$.

C. $V = 18\pi$. **D.** $V = 30\pi$.

Lời giải.

Vật thể tròn xoay sinh được tạo thành khi quay tam giác ABC quay quanh trục BC có dạng của hai hình nón ghép lại có chung đường tròn đáy.

Xét hình nón tròn xoay tạo thành bởi tam giác ABH quay quanh trục BH có thể tích là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi.$$

Thể tích vật thể tròn xoay sinh được tạo thành là

$$V = 2V_1 = 18\pi.$$

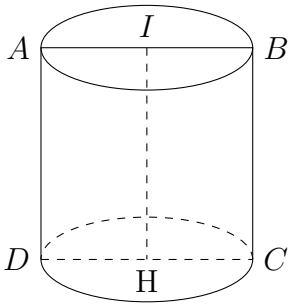
Chọn đáp án C □

Câu 88. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A. $S_{\text{xq}} = \pi\sqrt{2}a^2$. **B.** $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$. **C.** $S_{\text{xq}} = 2\pi a^2$. **D.** $S_{\text{xq}} = \pi a^2$.

Lời giải.

Đường kính đáy của hình trụ là đường chéo hình vuông là đáy của lập phương nên $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Đường cao $h = a$.
$S_{xq} = 2\pi rh = \pi a^2\sqrt{2}$

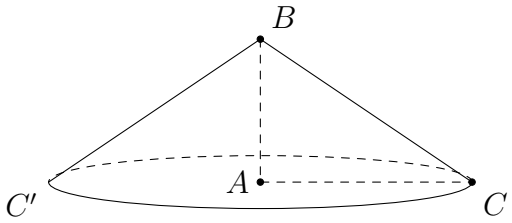


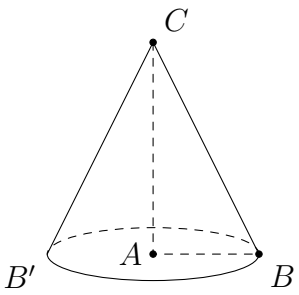
Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Gọi V_1 là thể tích của khối nón được tạo nên khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích của khối nón được tạo nên khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{4}$.

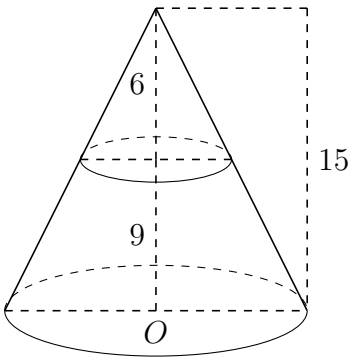
Lời giải.





Ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi AC^2 \cdot AB$; $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AB^2 \cdot AC$.
Từ đó suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 90.
Cho hình nón có đáy là đường tròn có đường kính bằng 10, chiều cao bằng 15. Mặt phẳng vuông góc với trục cắt hình nón theo giao tuyến là một đường tròn như hình vẽ. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 6.



A. 24π. **B.** 8π.
C. $\dfrac{200\pi}{9}$. **D.** 96π.

Lời giải.

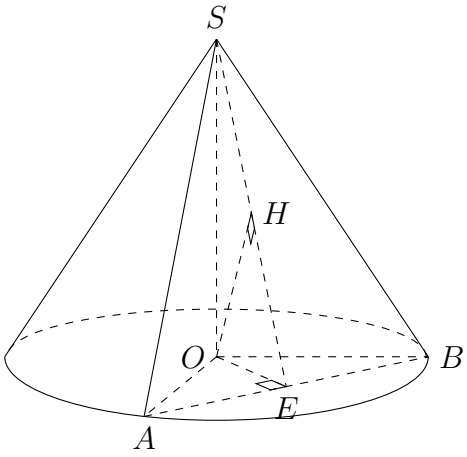
Gọi R, r là bán kính của hình nón có chiều cao bằng 15 và hình nón có chiều cao bằng 6.
Ta có: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.
Suy ra $r = \dfrac{2}{5}R = \dfrac{2}{5} \cdot 5 = 2$.
Thể tích khối nón có chiều cao bằng 6 là:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 8\pi$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Cho hình nón có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O bán kính bằng $2a$ và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác có chu vi bằng $2(1+\sqrt{5})a$. Tính khoảng cách từ d từ O đến mặt phẳng (P).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d=\dfrac{a}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $OA=OB=2a$.
Chu vi $\triangle SAB=2SA+AB=2(1+\sqrt{5})a \Leftrightarrow AB=2a$.
Suy ra $\triangle OAB$ đều $\Rightarrow OE=a\sqrt{3}$.
Ta có: $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=a$.
Ta có: $\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OE^2} \Rightarrow d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



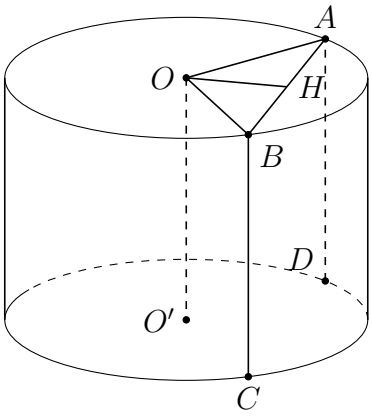
Chọn đáp án D □

Câu 92. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách hình trụ một khoảng bằng $\dfrac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ.

A. $3\pi a^3$. **B.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** πa^3.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là thiết diện hình vuông như hình bên.
Gọi O và O' là tâm 2 đáy của hình trụ,
H là hình chiếu của O lên AB.
Ta có $AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên chiều cao của hình trụ bằng $a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{\text{trụ}}=\pi a\cdot a\sqrt{3}=\pi a^3\sqrt{3}$.



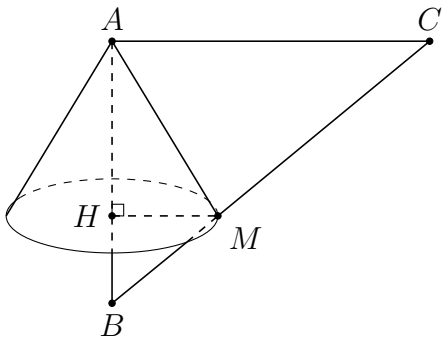
Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=6$ cm, $AC=3$ cm. Gọi M là điểm di động trên cạnh BC, MH vuông góc AB tại H. Cho tam giác AHM quay quanh cạnh AH tạo nên một hình nón, tính thể tích lớn nhất của khối nón được tạo thành.

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D.** 4π.

Lời giải.

Đặt $AH = x$ $(0 \le x \le 6)$, từ $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{HM}{AC}$
$\Rightarrow HM = \dfrac{6-x}{2}$.
Do đó $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3}\pi x \left(\dfrac{6-x}{2}\right)^2$
$= \dfrac{\pi x(6-x)^2}{12} \le \dfrac{\pi}{24}\left(\dfrac{2x+6-x+6-x}{3}\right)^3 = \dfrac{8\pi}{3}$.
Vậy $V_{\text{nón}}$ lớn nhất bằng $\dfrac{8\pi}{3}$ khi và chỉ khi $AH = 2$ cm.



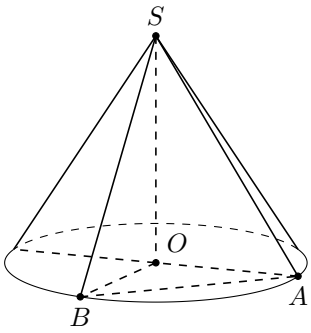
Chọn đáp án C □

Câu 94. Một hình nón có thiết diện cắt bởi mặt phẳng chứa trục của hình nón là tam giác đều có cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối nón đó là

A. $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Xét tam giác SOA vuông tại O, có $SA = 2a$.
Từ đó, có $SO = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Do đó, thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \pi a^2 = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

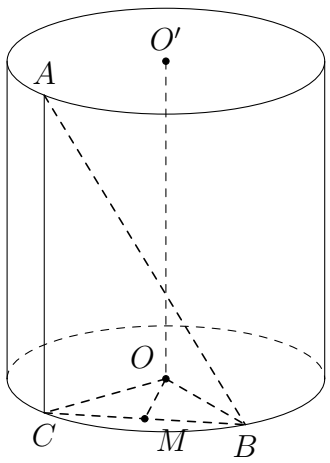


Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho hình trụ $(\mathscr{T})$ có bán kính đáy R và chiều cao $R\sqrt{3}$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách d giữa AB và trục của hình trụ theo R.

A. $d = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = 2R\sqrt{3}$. **C.** $d = R\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi C là hình chiếu của A lên đáy còn lại của hình trụ.
Ta có $AC \parallel OO'$ và $(AB, OO') = (AB, AC) = \widehat{BAC} = 30° \Rightarrow BC = AC\tan 30° = R$.
Gọi M là trung điểm BC. Ta có $OM = d(AB, OO') = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A ☐

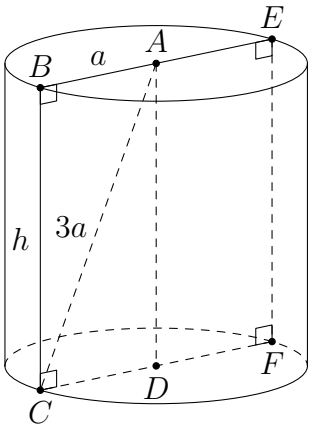
Câu 96. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AC = 3a$. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh AD bằng

A. $V = 3\pi a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = 3\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = 2\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = 2\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

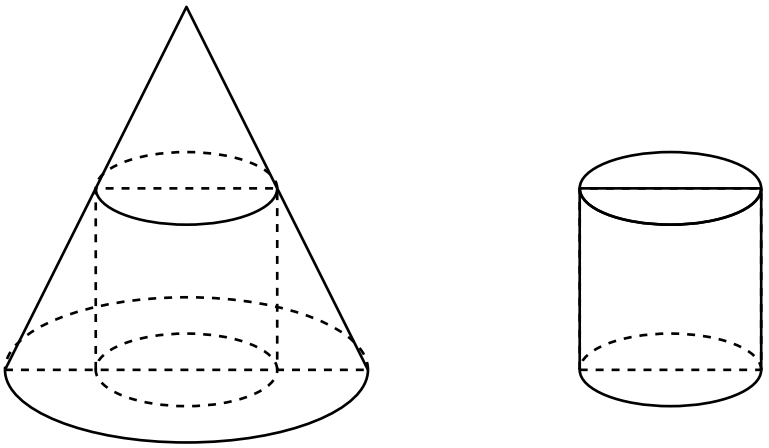
Chiều cao của khối trụ $h = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ $V = h\mathcal{S}_{\text{đáy}} = 2a\sqrt{2}\pi a^2 = 2\pi a^3\sqrt{2}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 97. Một khối gỗ dạng nón có bán kính đáy bằng 2 m, chiều cao bằng 6 m. Bác thợ mộc chế tác từ khối gỗ đó thành khúc gỗ dạng khối trụ như hình vẽ. Tính thể tích lớn nhất của khúc gỗ sau khi chế tác.



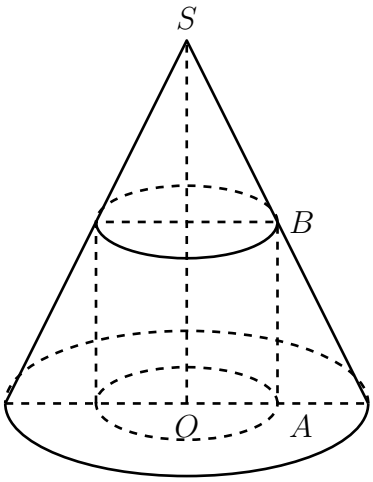
A. $\dfrac{32}{3}$ (m^3). **B.** $\dfrac{32}{3}\pi$ (m^3). **C.** $\dfrac{32}{9}\pi$ (m^3). **D.** $\dfrac{16}{3}\pi$ (m^3).

Lời giải.

Gọi $x = OA, 0 < x < 2$ (xem hình bên) là bán kính của khối trụ cần tạo ra, khi đó ta có chiều cao của khối trụ đó là $AB = 3(2 - x)$.

Thể tích của khối trụ bằng $\pi(-3x^3 + 6x^2)$.

Xét hàm số $f(x) = \pi(-3x^3 + 6x^2)$ trên $(0; 2)$ ta được giá trị lớn nhất đạt được tại $x = \dfrac{4}{3}$ nên thể tích của khối gỗ hình trụ lớn nhất bằng $\dfrac{32}{9}\pi$ (m^3).



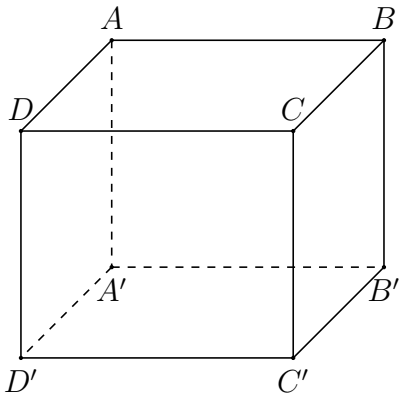
Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $AA' = 2a$. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a.

A. $S = 2\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $S = 4\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $S = \sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Lời giải.

Hình trụ ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các đáy là các đường tròn ngoại tiếp của hai hình vuông đáy. Do đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác đáy là $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Hình trụ đó có độ dài đường sinh là $l = 2a$ và bán kính đáy là r. Diện tích xung quanh là $S = 2\pi rl = 2\sqrt{2}\pi a^2$.



Chọn đáp án A □

Câu 99. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 1 dm^3 và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ dm. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ dm. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ dm.

Lời giải.

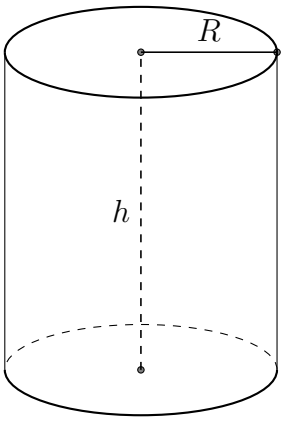
Gọi R (dm), h (dm) lần lượt là bán kính và chiều cao hình trụ.

Điều kiện: $R > 0$ và $h > 0$.

Ta có $V = \pi R^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa là

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2}{R}.$$



Ta lại có

$$2\pi R^2 + \frac{2}{R} = 2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \geq \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}}.$$

Hay $S \geq \sqrt[3]{2\pi}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{1}{R} = 2\pi R^2$ hay $R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

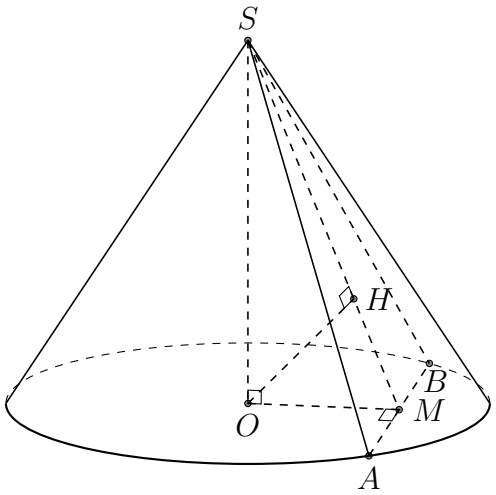
Vậy diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng $\sqrt[3]{2\pi}$ khi bán kính đáy của lon sữa bằng $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho hình nón tròn xoay có đường cao bằng 20 cm, bán kính đáy bằng 25 cm. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiến diện là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. 500 cm^2. **B**. 1000 cm^2. **C**. 250 cm^2. **D**. 250 cm^3.

Lời giải.



Ký hiệu S là đỉnh của hình nón và O là tâm của đường tròn đáy.

Gọi A, B là hai giao điểm (khác đỉnh S của hình nón) của mặt phẳng với hình nón. Suy ra thiết diện của mặt phẳng với hình nón là tam giác SAB.

Gọi M là trung điểm của AB.

Kẻ $OH \perp SM$ tại H.

Xét đường thẳng AB và mặt phẳng (SOM) có

$$\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOM).$$

Cho nên $(SAB) \perp (SOM)$.

Mà $(SAM) \cap (SOM) = SM$ và $OH \perp SM$ nên OH là khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiến diện. Suy ra $OH = 12$ cm.

Ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} \Leftrightarrow OM = \sqrt{\frac{OH^2 \cdot SO^2}{SO^2 - OH^2}} \Leftrightarrow OM = 15.$$

Khi đó $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = 25$ và $AB = 2AM = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$.

Vậy diện tích của thiết diện SAB bằng $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500$ cm^2.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

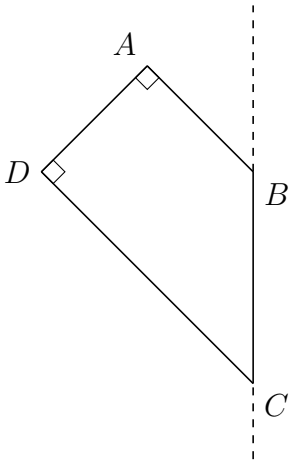
1. A	2. C	3. C	4. A	5. A	6. C	7. D	8. B	9. A	10. D
11. D	12. D	13. B	14. C	15. C	16. A	17. D	18. B	19. A	20. C
21. D	22. C	23. A	24. D	25. A	26. B	27. D	28. A	29. B	30. A
31. D	32. C	33. A	34. B	35. B	36. D	37. C	38. B	39. A	40. D
41. C	42. B	43. B	44. B	45. B	46. A	47. D	48. C	49. B	50. A
51. C	52. C	53. A	54. A	55. C	56. B	57. B	58. D	59. A	60. D
61. A	62. A	63. C	64. B	65. B	66. C	67. A	68. A	69. B	70. A
71. A	72. A	73. C	74. D	75. A	76. D	77. A	78. A	79. A	80. D
81. A	82. A	83. A	84. A	85. B	86. C	87. C	88. A	89. C	90. B
91. D	92. B	93. C	94. D	95. A	96. C	97. C	98. A	99. D	100. A

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1.

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC.

A. $V = \dfrac{20\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$. **C.** $10\pi\sqrt{2}$. **D.** $V = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

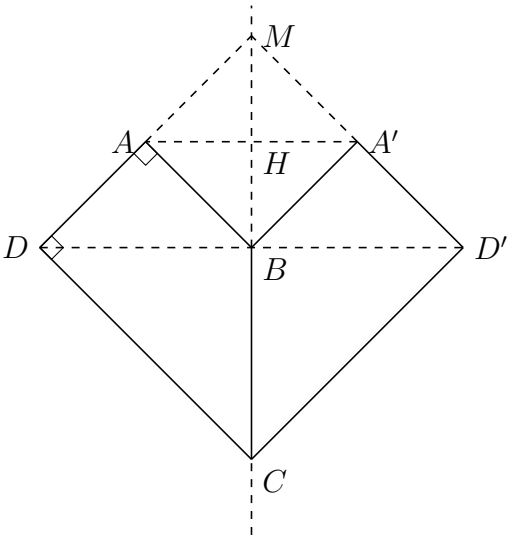
Chọn đáp án D □

Gọi A', D' lần lượt là điểm đối xứng của A, D qua đường thẳng BC.

Gọi M là giao điểm của AD và $A'D'$.

Ta có $AB = AD = 2$, $CD = 4$ suy ra $AH = BH = \sqrt{2}$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $MA = AD = 2$ và $MB = 2\sqrt{2}$.



Gọi V_1 là thể tích của khối nón có chiều cao $BC = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có chiều cao $BM = 2\sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $BD = 2\sqrt{2}$.

Gọi V_3 là thể tích của khối nón có chiều cao $BH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.

Gọi V_4 là thể tích của khối nón có chiều cao $MH = \sqrt{2}$ và bán kính đường tròn đáy là $AH = \sqrt{2}$.

Ta có $V_1 = V_2$ và $V_3 = V_4$.

Khi đó

$V = V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = 2V_1 - 2V_3$

$= 2\dfrac{1}{3}\left[(2\sqrt{2})^2\pi \cdot 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2\pi \cdot \sqrt{2}\right)] = \dfrac{28\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.BCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC; $AD = 3BC = 3a$; $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$; M là trung điểm SD, H là giao điểm của AM và SI. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $V=\dfrac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$.

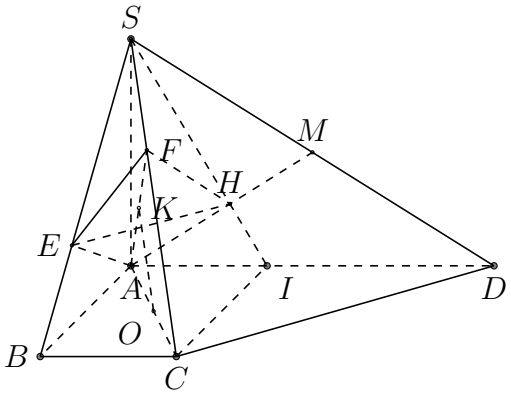
Lời giải.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $SA=a\sqrt{3}$, $AD=3a \Rightarrow \widehat{SDA}=30^\circ \Rightarrow \widehat{MAI}=30^\circ$.

Lại có tam giác SAI vuông tại A có $SA=a\sqrt{3}$, $AI=a \Rightarrow \widehat{SIA}=60^\circ$ nên tam giác AHI có $\widehat{AHI}=90^\circ$ hay $AH\perp SI$.

Mà $AH\perp IC$ do $IC\parallel BA\perp(SAD)$ nên $AH\perp(SIC)\Rightarrow AH\perp SC$.

Ngoài ra, $AE\perp SB$, $AE\perp BC$ $(BC\perp(SAB))\Rightarrow AE\perp(SBC)\Rightarrow AE\perp SC$.



Mà $AE\perp SC$ nên $SC\perp(AEFH)$ và $AEFH$ là tứ giác có $\widehat{E}=\widehat{H}=90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn tâm K là trung điểm AF đường kính AF. Gọi O là trung điểm AC thì $OK\parallel SC$ mà $SC\perp(AEFH)$ nên $OK\perp(AEFH)$ hay O chính là đỉnh hình nón và đường tròn đáy là đường tròn đường kính AF.

Ta tính AF, OK.

Xét tam giác SAC vuông tại A đường cao AF nên

$AF=\dfrac{SA\cdot AC}{SC}=\dfrac{SA\cdot AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; $OK=\dfrac{1}{2}CF=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{CA^2}{CS}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy thể tích $V=\dfrac{1}{2}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{a}{\sqrt{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. 32π cm^2. **B.** 64π cm^2. **C.** 8π cm^2. **D.** 16π cm^2.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là r và h $(r,h>0)$.

Thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi $2(AB+BC)=2(h+2r)$.

Theo giả thiết ta có $2(h+2r)=12\Leftrightarrow h+2r=6\Leftrightarrow h=6-2r$ $(r<3)$.

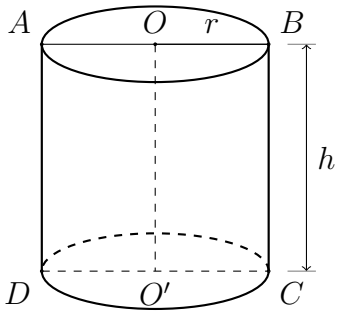
Thể tích khối trụ $V=\pi r^2h=\pi r^2(6-2r)=\pi r r(6-2r)$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số $r,r,6-2r$ ta được

$r+r+(6-2r)\geq 3\sqrt[3]{rr(6-2r)}\Leftrightarrow r^2(6-2r)\leq 8\Leftrightarrow \pi r^2(6-2r)\leq 8\pi$

Hay $V\leq 8\pi$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $r=6-2r\Leftrightarrow r=2$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị lớn nhất của khối trụ là $V=8\pi$.



Chọn đáp án C □

Câu 4. Giả sử đồ thị hàm số $y=(m^2+1)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A<x_B<x_C$.Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(4;6)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

☑ $y'=4(m^2+1)x^3-4mx=4x[(m^2+1)x^2-m]$.

☑ $y'=0\Leftrightarrow 4x\left[\left(m^2+1\right)x^2-m\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}} \quad (m>0)\end{array}\right.$

- Với $m>0$ thì hàm số có ba điểm cực trị với $x_A<x_B<x_C$ là $A\left(-\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}};-\dfrac{m^2}{m^2+1}+m^2+1\right)$, $B\left(0;m^2+1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}};-\dfrac{m^2}{m^2+1}+m^2+1\right)$.
- Quay $\triangle ABC$ quanh AC được khối tròn xoay có thể tích là

$$V=2\cdot\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi BIIC=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}}.$$

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}$ có
  - $f(x)=\dfrac{m^8\left(9-m^2\right)}{\left(m^2+1\right)^6}$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow m=3(m>0)$.
  - Bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			max		
	0				0

Chọn đáp án B ☐

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC), ABC$có tam giác vuông tại B. Biết $BC=2a, AB=2a\sqrt{3}, AD=6a$. Quay tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng:

A. $\dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{64\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính thể tích khối nón tròn xoay có chiều cao h và bán kính đáy R là: $V=\dfrac{1}{4}\pi R^2h$.

Cách giải:

Ta có:

Khối nón (N_1) được sinh bởi ΔABC khi quay quanh AB có chiều cao $h_1=AB$ và bán kính đáy $R_1=BC$.

Khối nón (N_2) được sinh bởi ΔADB khi quay quanh AB có chiều cao $h_2=AB$ và bán kính đáy $R_2=AD$.

Do hai khối nón cùng có chiều cao AB nên hai đáy của hai khối nón nằm trong hai mặt phẳng song song.

Trong mặt phẳng đáy của hình nón (N_1) kẻ đường kính $GH//DE$. Dễ dàng chứng minh được DEGH là hình thang cân.

Gọi $M = AG \cap BE; N = AH \cap BD, I = AB \cap MN$. Khi đó phần chung giữa hai khối nón (N_1) và (N_2) là hai khối nón: Khối nón (N_3) đỉnh B, đường cao BI, bán kính đáy $IN \Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.BI$

Khối nón (N_4) đỉnh A, đường cao AI, bán kính đáy $IN \Rightarrow V_4 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.AI$

Thể tích phần chung $V = V_3 + V_4 = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.BI + \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.AI = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.(AI + BI) = \dfrac{1}{3}\pi.IN^2.AB$ Áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$\dfrac{MN}{GH} = \dfrac{AI}{AB}; \dfrac{MN}{DE} = \dfrac{BI}{AB} \Rightarrow \dfrac{MN}{GH} + \dfrac{MN}{DE} = \dfrac{AI + BI}{AB} = 1$

$\Rightarrow MN\left(\dfrac{1}{2BC} + \dfrac{1}{2AD}\right) = 1 \Leftrightarrow MN.\left(\dfrac{1}{2.2a} + \dfrac{1}{2.6a}\right) = 1 \Leftrightarrow MN = 3a$

Dễ thấy I là trung điểm của MN $\Rightarrow IN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2.2a\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\dfrac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi S_2 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1; S_3 là khối tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón với S_2; ...; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi V_1, V_2, V_3, ..., V_{n-1}, V_n lần lượt là thể tích của khối cầu S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}, S_n và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị của biểu thức

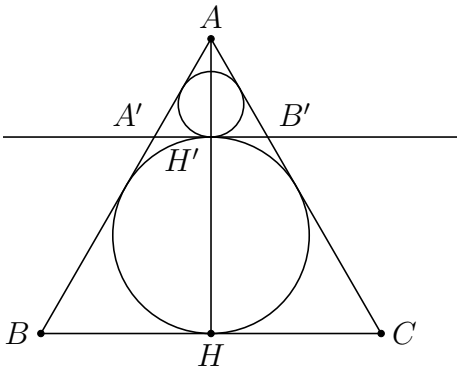
$$T = \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{V}$$

.

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{6}{13}$. **C.** $\dfrac{7}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l. Do đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chóp là $r_1 = \dfrac{1}{3}\dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$.



Áp dụng định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\dfrac{l\sqrt{3}}{2} - \dfrac{l\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{l}{3}.$$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \dfrac{l}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{l\sqrt{3}}{18} = \dfrac{r_1}{3}$.

Tiếp tục như vậy ta có $r_3 = \dfrac{r_1}{3^2}$, $r_4 = \dfrac{r_1}{3^3}$, ... $r_n = \dfrac{r_1}{3^{n-1}}$.

Ta có $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi r_1^3$, $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi r_2^3 = \dfrac{4}{3}\pi r_2^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{r_1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{3^3}V_1$, $V_3 = \dfrac{1}{(3^3)^2}V_1$, ... ; $V_n = \dfrac{1}{(3^3)^{n-1}}V_1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{V} \\
= & \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1\left(1 + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{(3^3)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(3^3)^{n-1}}\right)}{V} \\
= & \lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 \cdot S}{V}.
\end{aligned}$$

Đặt $S=1+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{(3^3)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(3^3)^{n-1}}$. Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q=\dfrac{1}{3^3}<1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S=\frac{1}{1-\dfrac{1}{3^3}}=\frac{27}{26}$$

$$\Rightarrow V_1+V_2+\ldots+V_n=\frac{27}{26}V_1=\frac{27}{26}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3\ V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}$$

$$\Rightarrow T=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{52}\pi l^3}{\dfrac{\sqrt{3}\pi l^3}{24}}=\frac{6}{13}.$$

Chọn đáp án (B) □

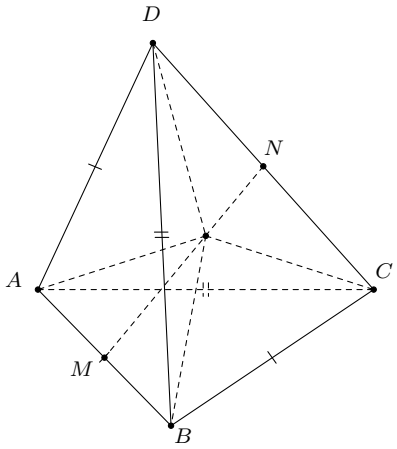
Câu 7. Cho tứ diện ABCD có $AB=AD=BC=8, AC=BD=6, CD=4$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện ABCD.

A. $\sqrt{\dfrac{187}{10}}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{\dfrac{177}{10}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{287}{30}}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có $\triangle ADC=\triangle BCD$ nên suy ra $AN=BN$, vậy MN vuông góc AB. Chứng minh tương tự ta cũng có MN vuông góc với DC nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nằm trên đường thẳng MN.



Gọi I là tâm của mặt cầu, đặt $NI=x$.

Ta có $AN=\sqrt{\dfrac{2(AD^2+AC^2)-DC^2}{4}}=\sqrt{46}$, vậy $MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\sqrt{30}$.

Đặt $NI=x\Rightarrow MI=\sqrt{30}-x$. Vì $DI^2=AI^2$ nên ta có

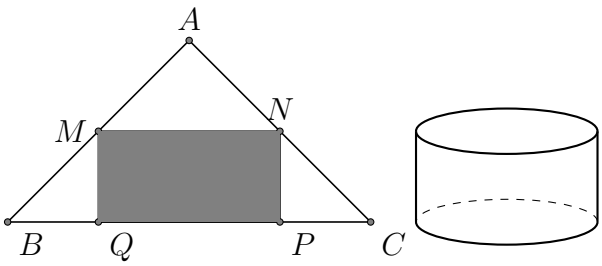
$$4+x^2=(\sqrt{30}-x)^2+16\Leftrightarrow x=7\sqrt{\frac{3}{10}}$$

Vậy $R=\sqrt{4+x^2}=\sqrt{\dfrac{187}{10}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8.

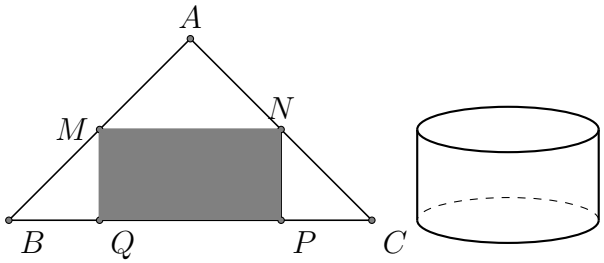
Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền bằng a. Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?



A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Lời giải.

Đặt $MQ = NP = x \Rightarrow MN = PQ = a - 2x$
với điều kiện $0 < 2x < a$
$S_{xq} = S_{MNPQ} = x(a-2x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2x(a-2x) \le \dfrac{a^2}{8}$
Dấu " = " xảy ra khi $a - 2x = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$



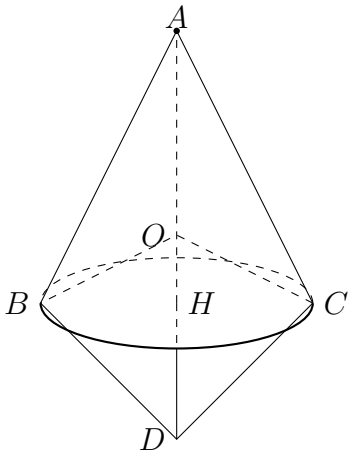
Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Tính thể tích V của khối (N).

A. $V = 3\pi$. **B.** $V = 9\pi$. **C.** $V = 3\sqrt{3}\pi$. **D.** $V = 9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện thỏa mãn đề bài là tam giác ABC nội tiếp $(O;2)$ đường kính AD, đường sinh của (N) là l.
Theo bài ra ta có $\widehat{ABH} = 60° \Rightarrow \widehat{BAD} = 30° \Rightarrow \widehat{ADB} = 60° \Rightarrow \triangle OBD$ đều $\Rightarrow BD = 2, AD = 4$.
Áp dụng Pytago cho tam giác vuông ABD : $AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow l = 2\sqrt{3}$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABH ta có: $r = BH = \sqrt{3}; h = AH = 3$.
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 3 = 3\pi$. Vậy thể tích của khối nón (N) là 3π.

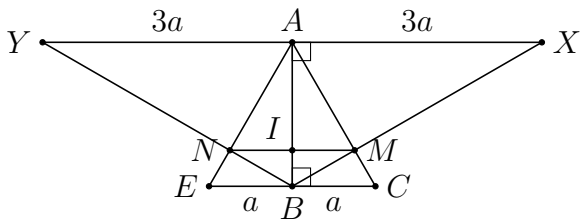


Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối trong xoay. Tính thể tích V phần chung của hai khối tròn xoay đó.

A. $V = \dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $V = \dfrac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải.



Cắt khối tròn xoay bởi mặt phẳng (ABC) ta thu được thiết diện như hình vẽ. Áp dụng định lí Thales ta có

$$\frac{BN}{YN} = \frac{NE}{NA} = \frac{BE}{AY} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{BM}{XM} = \frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AX} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $IM = \dfrac{1}{4}AX = \dfrac{3a}{4}$. Phần chung của hai khối tròn xoay thu được gồm hai khối nón khi quay các tam giác AIM và BIM quanh trục AB. Do đó thể tích của nó là

$$V = \frac{1}{3}\pi IM^2 \cdot IA + \frac{1}{3}\pi IM^2 \cdot IB = \frac{1}{3}\pi IM^2 \cdot AB = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong các khối trụ có cùng diện tích toàn phần là 6π. Tìm bán kính đáy của khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $R = 1$. **B.** $R = \dfrac{1}{3}$. **C.** $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $R = 3$.

Lời giải.

Ta có $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 6\pi \Leftrightarrow Rh + R^2 = 3 \Leftrightarrow h = \dfrac{3 - R^2}{R}$. Điều kiện: $0 < R < \sqrt{3}$.

$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot \dfrac{3 - R^2}{R} = \pi R(3 - R^2) = -\pi R^3 + 3\pi R.$

$V' = -3\pi R^2 + 3\pi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 1 \text{ (nhận)} \\ R = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

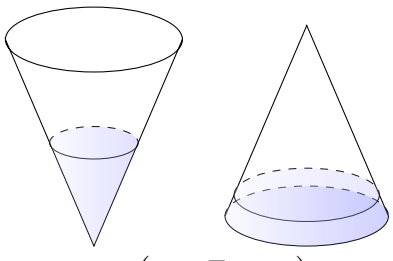
R	0		1		$\sqrt{3}$
$V'(R)$		$+$	0	$-$	
$V(R)$		↗	2π	↘	

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = V(1) = 2\pi$ (đvtt).

Chọn đáp án A □

Câu 12.

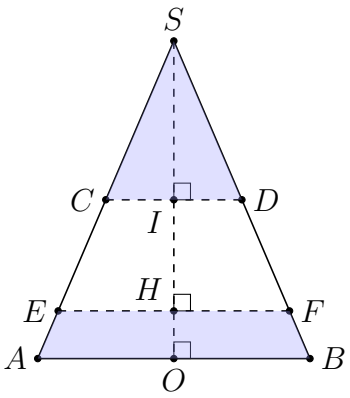
Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 10 cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?



A. $\sqrt[3]{7}$ cm. **B.** 1 cm. **C.** $\left(20 - 10\sqrt[3]{7}\right)$ cm. **D.** $\left(20\sqrt[3]{7} - 10\right)$ cm.

Lời giải.

Giả sử phễu nước là hình nón (N_1) đỉnh S, đáy là đường tròn (O) đường kính AB.
Khi đổ nước vào phễu khối nước trong phễu là khối nón (N_2) đỉnh S, đáy là hình tròn (I) đường kính CD. Phần còn lại là khối nón cụt (NC_1) đáy lớn là đường tròn (O), đáy nhỏ là đường tròn (I).
Khi lộn ngược phễu khối nước trong phễu là khối nón cụt (NC_2) đáy lớn là hình tròn (O), đáy nhỏ là hình tròn (H) đường kính EF. Phần còn lại là khối nón (N_3) đỉnh S đáy là đường tròn (H).



Vì $V_{N_2} = V_{NC_2}$ nên $V_{N_3} = V_{NC_1} = V_{N_1} - V_{N_2} = V_{N_1} - \dfrac{V_{N_1}}{8} = \dfrac{7V_{N_1}}{8}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{N_3}}{V_{N_1}} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow \dfrac{SH}{SO} = \sqrt[3]{\dfrac{7}{8}} \Rightarrow HO = \left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{7}{8}}\right) \cdot 20 = 20 - 10\sqrt[3]{7}$.

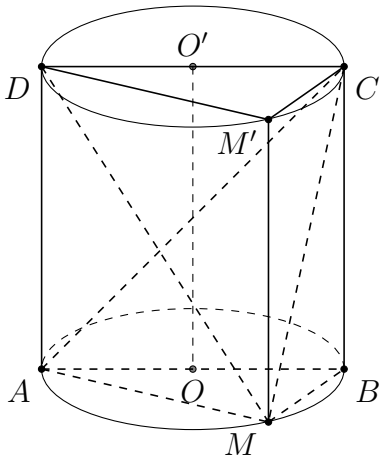
Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{3}$ cm với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\overset{\frown}{ABM} = 60°$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACDM$.

A. $V = 3$ cm^3. **B.** $V = 4$ cm^3. **C.** $V = 6$ cm^3. **D.** $V = 7$ cm^3.

Lời giải.

Giả sử hình trụ (T) có trục OO'. Thiết diện qua trục là hình chữ vuông $ABCD$ (A, B thuộc đường tròn tâm O và C, D thuộc đường tròn tâm O').
Ta có $r = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{3}$ cm, $h = l = 2\sqrt{3}$ cm.
Gọi M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.
Ta có $V_{ADMC} = \dfrac{1}{3}V_{AMB.DM'C} = 3$ cm^3.



Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $R = \sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$; $h = 4\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$. **B.** $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$; $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$.

C. $R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$; $h = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$. **D.** $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$; $h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Lời giải.

Ta có $S = 2\pi \cdot R \cdot (R + h) \Rightarrow h = \dfrac{S}{2\pi R} - R$.
Thể tích $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \left(\dfrac{S}{2\pi R} - R\right) = \dfrac{RS}{2} - \pi R^3$.
Xét hàm số $f(R) = \dfrac{RS}{2} - \pi R^3 \Rightarrow f'(R) = \dfrac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.
Vì $f'(R)$ là hàm bậc hai có hệ số $a = -3\pi < 0$ nên hàm $f(R)$ đạt giá trị lớn nhất tại $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_a, V_b, V_c tương ứng là thể tích của các hình tròn xoay tạo bởi tam giác ABC khi cho nó lần lượt quay xung quanh các cạnh BC, CA, AB. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{V_a^2}=\dfrac{1}{V_b^2}+\dfrac{1}{V_c^2}$. **B.** $V_a^2=V_b^2+V_c^2$. **C.** $V_a^2=V_b^2V_c^2$. **D.** $\dfrac{1}{V_a^2}=\dfrac{V_b^2V_c^2}{V_b^2+V_c^2}$.

Lời giải.

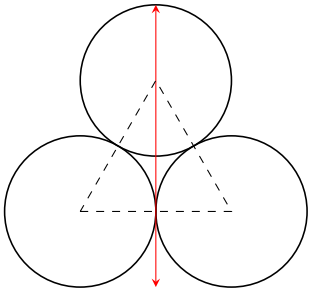
Đặt $AB=c, BC=a, AC=b$. Ta có, $V_b=\dfrac{bc^2\pi}{3}$, $V_c=\dfrac{cb^2\pi}{3}$, $V_a=\dfrac{b^2c^2\pi}{3a}$. Khi đó, $\dfrac{1}{V_a^2}=\dfrac{1}{V_b^2}+\dfrac{1}{V_c^2}$.

Chọn đáp án A □

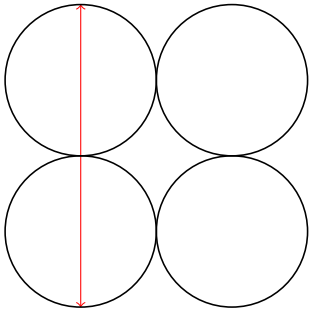
Câu 16. Một hộp đựng phấn hình hộp chữ nhật có chiều dài 30 cm, chiều rộng 5 cm và chiều cao 6 cm. Người ta xếp đứng vào đó các viên phấn giống nhau, mỗi viên phấn là khối trụ có chiều cao là 6 cm và bán kính đáy là $\dfrac{1}{2}$ cm. Hỏi có thể xếp được tối đa bao nhiêu viên phấn.

A. 150 viên. **B.** 153 viên. **C.** 151 viên. **D.** 154 viên.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Ta có hai phương án xếp phấn theo hình 1 và hình 2.

- ☑ Xếp theo hình 1 thì hai hàng liên tiếp sẽ có một hàng 4 viên và một hàng 5 viên. Chiều dài của hai hàng là $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm (hai lần bán kính đáy cộng với chiều cao của tam giác đều nối ba tâm). Chiều dài của n hàng là $1+\dfrac{(n-1)\sqrt{3}}{2}$ cm. Do chiều dài hộp là 30 cm nên $1+\dfrac{(n-1)\sqrt{3}}{2}\le 30 \Leftrightarrow n=34$. Vậy số viên phấn xếp được là $17\cdot 5+17\cdot 4=153$ viên.
- ☑ Xếp theo hình 2 thì hai hàng liên tiếp đều có 5 viên. Chiều dài của hai hàng 2 cm. Chiều dài hộp là 30 cm nên ta sẽ xếp được 30 hàng, tức là 150 viên.

Vậy có thể xếp được tối đa 153 viên.

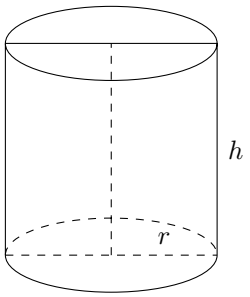
Chọn đáp án B □

Câu 17. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π m^3. Tìm bán kính r của đáy bồn sao cho bồn được làm tốn ít nguyên vật liệu nhất.

A. $r=0{,}8$ m. **B.** $r=1{,}2$ m. **C.** $r=2$ m. **D.** $r=2{,}4$ m.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{16}{r^2}$.



Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \dfrac{32\pi}{r}, (r > 0)$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{32\pi}{r}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có:

$f'(r) = 4\pi r - \dfrac{32\pi}{r^2}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số là

r	0		2		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	24π	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra diện tích đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = 2$ m.

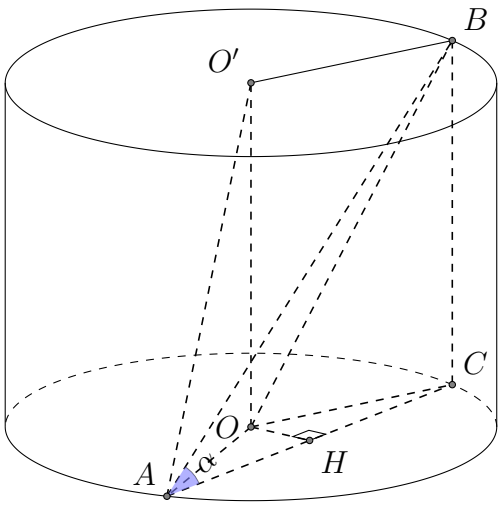
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải.

Kẻ đường sinh BC của hình trụ, ta có AC là hình chiếu của AB lên mặt đáy nên $\widehat{BAC} = \alpha$.



Gọi H là hình chiếu của O lên AC.

$\triangle ABC$ có $AC = BC \cdot \cot\alpha = 2a\cot\alpha$.

$\triangle OAC$ có $OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = a\sqrt{4 - \cot^2\alpha}$

Ta có $V_{OO'AB} = \dfrac{1}{2}V_{A.OO'BC} = V_{B.AOC}$

$= \dfrac{1}{3} \cdot BC \cdot S_{AOC} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2a\cot\alpha \cdot 2a\sqrt{4 - \cot^2\alpha}$

$= \dfrac{4a^3}{3}\sqrt{4\cot^2\alpha - \cot^4\alpha}$.

Đặt $t = \cot\alpha$, xét $f(t) = 4t^2 - t^4$

$$f'(t) = 8t - 4t^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$, suy ra hàm số $f(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = \sqrt{2}$.

Vậy khi $\cot\alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì thể tích khối $OO'AB$ sẽ lớn nhất.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Một nhà máy cần sản suất các hộp hình trụ kín cả hai đầu có thể tích V cho trước. Tìm mối quan hệ giữa bán kính đáy R và chiều cao h của hình trụ để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất.

A. $h = 2R$. **B**. $R = h$. **C**. $R = 2h$. **D**. $h = 3R$.

Lời giải.

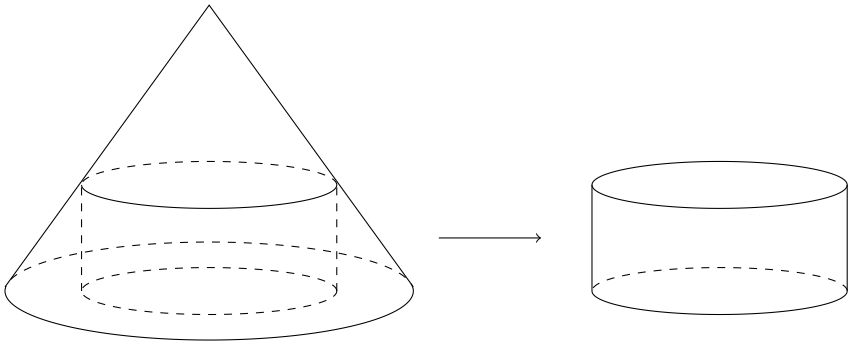
Diện tích toàn phần hình trụ $S = 2\pi R(R+h) = \pi(2R^2 + hR + hR) \geq \pi 3\sqrt[3]{2R^4h^2} = 3\pi\sqrt[3]{\dfrac{2V^2}{\pi^2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $hR = 2R^2 \Leftrightarrow h = 2R$.

Vậy $\min S = 3\pi\sqrt[3]{\dfrac{2V^2}{\pi^2}}$ khi $h = 2R$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Một khúc gỗ có dạng khối nón có bán kính đáy $r = 30$ cm, chiều cao $h = 120$ cm. Anh thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ dạng khối trụ có thể chế tác được. Tính V.



A. $V = 0{,}16\pi$ m^3. **B**. $V = 0{,}36\pi$ m^3. **C**. $V = 0{,}024\pi$ m^3. **D**. $V = 0{,}016\pi$ m^3.

Lời giải.

Ta có $AH = 120$ cm, $BH = 30$ cm.

Đặt $NH = x$ $(0 < x < 30)$, $MN = y$, $BN = 30 - x$.

Vì $MN \parallel AH$

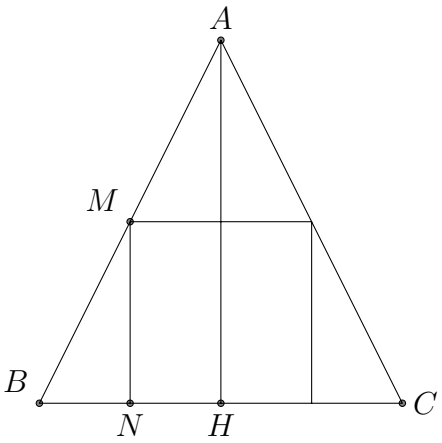
nên $\dfrac{BN}{BH} = \dfrac{MN}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{30-x}{30} = \dfrac{y}{120} \Leftrightarrow y = 4(30-x)$.

Gọi V là thể tích khối trụ. Khi đó

$V = \pi \cdot NH^2 \cdot MN = \pi x^2 y = 4\pi x^2(30-x) = 4\pi(30x^2 - x^3)$.

Xét hàm số $f(x) = 30x^2 - x^3$ với $0 < x < 30$.

$f'(x) = 60x - 3x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$.



Bảng biến thiên của $f(x)$

x	0		20		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4000	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra V lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;30)$.
Vậy $V_{\max} = 4\pi \cdot 4000 = 16000\pi \text{ cm}^3 = 0{,}016\pi \text{ m}^3$.
Chọn đáp án D □

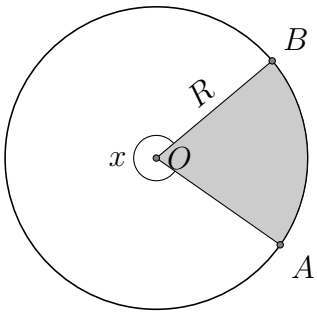
Câu 21. Cắt bỏ hình quạt tròn AOB (phần sẫm màu trong hình dưới) từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là số đo góc ở tâm của hình quạt tròn dùng làm phễu, $0 < x < 2\pi$. Tìm x để khối nón có thể tích lớn nhất.

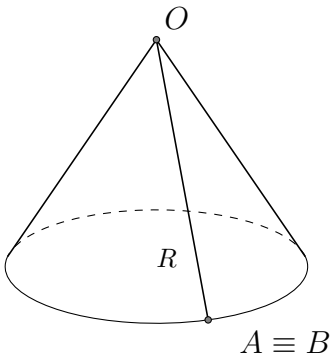
A. $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\pi$.

B. $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}\pi$.

C. $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

D. $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{27}\pi$.





Lời giải.

Vì độ dài của đường tròn đáy hình nón bằng độ dài cung AB của quạt tròn dùng làm phễu nên ta có

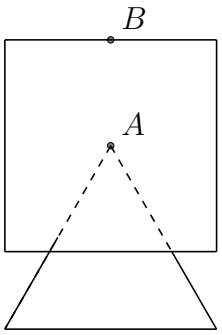
$$2\pi r = Rx \Rightarrow r = \frac{Rx}{2\pi} \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

Do đó thể tích của hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.
Ta có $V = \dfrac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{x^4\left(4\pi^2 - x^2\right)} = \dfrac{R^3}{24\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{x^2 \cdot x^2\left(8\pi^2 - 2x^2\right)}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $x^2 \cdot x^2\left(8\pi^2 - 2x^2\right) \le \left(\dfrac{x^2 + x^2 + 8\pi^2 - 2x^2}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{8\pi^2}{3}\right)^3$.
Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = 8\pi^2 - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8\pi^2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22.

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều và hình vuông cùng có độ dài cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác trùng với trục của hình vuông (như hình bên). Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục AB bằng



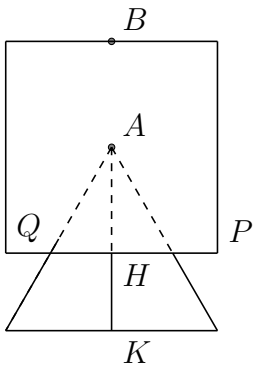
A. $\dfrac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

B. $\dfrac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

D. $\dfrac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Khi xoay quanh trục AB ta được hình gồm hai phần:

- ☑ Phần hình vuông phía trên trở thành hình trụ có bán kính đáy bằng 2, chiều cao bằng 4. Suy ra thể tích khối trụ là $V_1 = \pi.2^2.4 = 16\pi$.
- ☑ Phần dưới trở thành hình nón cụt. Ta có AK là đường cao của tam giác đều cạnh bằng 4 nên $AK = 2\sqrt{3}$.

  Gọi H là giao điểm của AK và PQ, R' là bán kính đáy nhỏ, R là bán kính của đáy lớn, h là chiều cao của hình nón cụt.

  Ta có $h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$ và $R = 2$.

  Mà $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R' = \dfrac{R}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

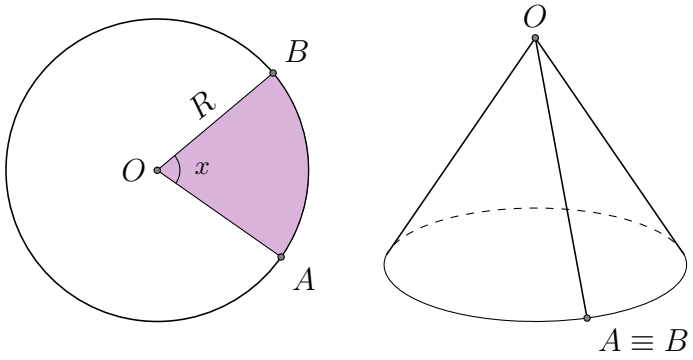
  Áp dụng công thức tính thể tích khối nón cụt ta có

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + R'^2 + RR'\right) = \frac{24\sqrt{3} - 8}{9}.$$

  Vậy thể tích của khối tròn xoay là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

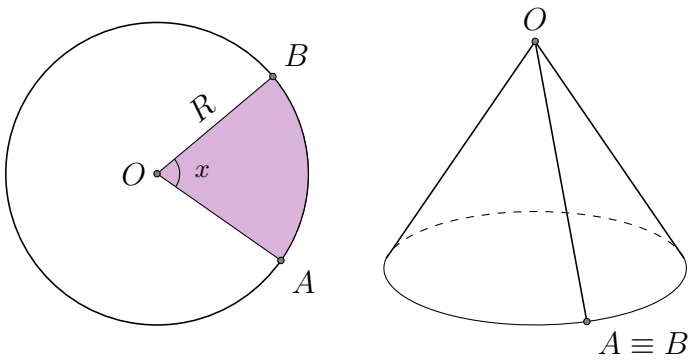
Câu 23. Cho miếng tôn hình tròn tâm O, bán kính R. Cắt bớt từ miếng tôn một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không đáy (OA trùng với OB) như hình vẽ.



Gọi S và S' lần lượt là diện tích của miếng tôn ban đầu và miếng tôn còn lại sau khi cắt bớt. Tìm tỷ số $\dfrac{S'}{S}$ để thể tích khối nón lớn nhất.

A. $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.



Đặt $\widehat{AOB} = x$.

Độ dài cung tròn AB dùng làm phễu là $Rx = 2\pi r \Leftrightarrow r = \dfrac{Rx}{2\pi}$.

Chiều cao hình nón là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Thể tích khối nón $V = f(x) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ với $x \in (0; 2\pi)$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{R^3}{24\pi^2} \cdot \dfrac{x\left(8\pi^2 - 3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	$f\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)$	↘	

Giá trị của $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ thì thể tích phễu lớn nhất.

Diện tích miếng tôn ban đầu $S = \pi R^2$.

Diện tích miếng tôn còn lại sau khi cắt $S' = S_{xq} = \pi rl = \pi\dfrac{Rx}{2\pi}R = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\pi R^2$.

Suy ra $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

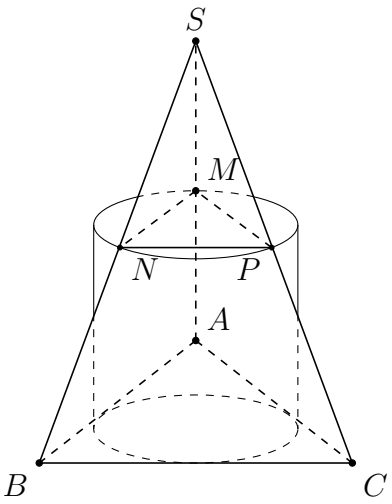
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC. Dựng một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, một đáy thuộc mặt phẳng (ABC). Biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng tổng diện tích hai đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{1}{4}a^3$. **B.** $\dfrac{1}{12}a^3$. **C.** $\dfrac{1}{8}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{6}a^3$.

Lời giải.

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$. Tương tự ta cũng có $NP = MP = \dfrac{a}{2}$, dẫn tới $\triangle MNP$ đều.



Khi đó bán kính đáy của hình trụ là $r = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Gọi h là chiều cao của hình trụ, khi đó ta có:

$2r\pi h = 2r^2\pi \Rightarrow h = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì M là trung điểm SA nên

$\mathrm{d}\,[S,(ABC)] = 2\mathrm{d}\,[M,(ABC)] = 2h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dẫn tới $V_{S.ABC} = \dfrac{S_{ABC} \cdot \mathrm{d}\,[S,(ABC)]}{3} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$.

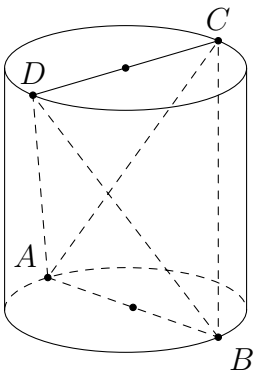
Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình trụ (T) có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng 2. Gọi AB là đường kính của đáy dưới và CD là đường kính của đáy trên sao cho AB và CD chéo nhau. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối tứ diện được tính theo công thức $V = \dfrac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot d \cdot \sin\alpha$, trong đó a, b là độ dài hai cạnh đối diện, d là khoảng cách giữa hai cạnh đó, α là góc giữa hai cạnh đó.



Suy ra $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD)$.

Theo đề ta có $AB = CD = 4$, $\mathrm{d}(AB, CD) = 2$ không đổi nên để V đạt giá trị lớn nhất khi $\sin(AB, CD) = 1$.

Vậy $V_{\max} = \dfrac{1}{6} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = \dfrac{16}{3}$.

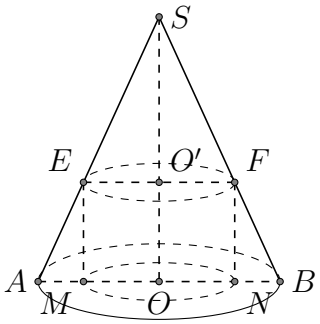
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r = 20(\mathrm{cm})$, chiều cao $h = 60(\mathrm{cm})$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính thể tích V của hình trụ (T) có diện tích xung quanh lớn nhất?

A. $V = 3000\pi(\mathrm{cm}^3)$. **B.** $V = \dfrac{32000}{9}\pi(\mathrm{cm}^3)$. **C.** $V = 3600\pi(\mathrm{cm}^3)$. **D.** $V = 4000\pi(\mathrm{cm}^3)$.

Lời giải.

Giả sử hình nón (N) có đường tròn đáy tâm O, bán kính r, S là đỉnh và hình trụ (T) có hai đường tròn đáy tâm O, O' bán kính R. Do giả thiết ta có $SO = h = 60\,\text{cm}$.



Xét tam giác SOB vì $FN \parallel SO$ theo định lý Talet ta có

$$\frac{NB}{BO} = \frac{FN}{SO} = \frac{BF}{SB}.$$

Suy ra

$$FN = \frac{NB \cdot SO}{BO} \Leftrightarrow FN = \frac{60\,(20-R)}{20} \Leftrightarrow FN = 3\,(20-R)\,.$$

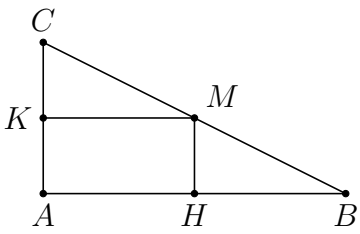
Gọi S_{xq} là diện tích xung quang của hình trụ (T) khi đó
$S_{xq} = 2\pi R \cdot FN = 6\pi R\,(20-R)$.

Do giả thiết $0 < R < 20$ nên theo bất đẳng thức Côsi $R\,(20-R) \le \left(\dfrac{R+20-R}{2}\right)^2 \le 100$. Do đó $S_{xq} \le 200\pi$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $R = 20 - R \Leftrightarrow R = 10\,(\text{cm})$ suy ra $FN = 30.\,(\text{cm})\,.$
Khi đó thể tích hình trụ $V = \pi R^2 \cdot FN = \pi \cdot 100 \cdot 30 = 3000\pi\,(\text{cm}^3)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2AC$. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC. Gọi V và V' tương ứng là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi tam giác ABC và hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB. Tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

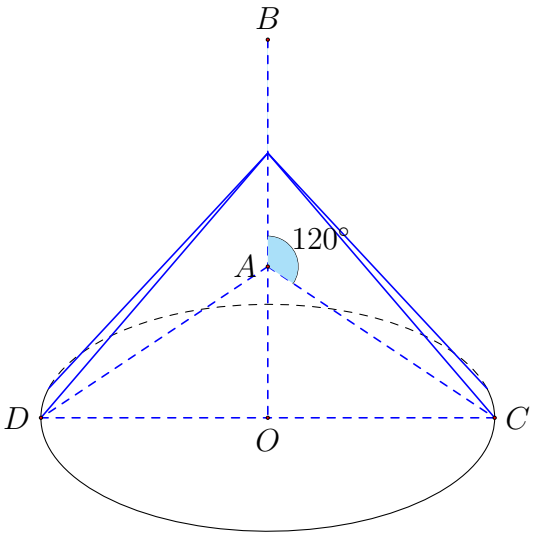
Lời giải.



Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi AB \cdot AC^2$; $V' = \pi AH \cdot AK^2$; $\dfrac{V'}{V} = 3 \cdot \dfrac{AH}{AB} \cdot \left(\dfrac{AK}{AC}\right)^2$.
Đặt $x = \dfrac{BM}{BC}$, $(0 < x < 1)$, suy ra $\dfrac{AK}{AC} = x$, $\dfrac{AH}{AB} = 1 - x$. Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có $(1-x)x^2 = \dfrac{1}{2}(2-2x)x^2 \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-2x+x+x}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{27}$. Suy ra $\dfrac{V'}{V}$ lớn nhất bằng $\dfrac{4}{9}$ khi $x = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Quay tam giác ABC bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.



Lời giải.

Quay tam giác ABC quanh đường thẳng AB ta được khối tròn xoay có thể tích bằng V_1 thể tích khối nón lớn có đỉnh B và thiết diện qua trục là BDC(hình vẽ) trừ đi V_2 thể tích khối nón nhỏ có đỉnh A và thiết diện qua trục là ADC.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy của hai khối nón.

Xét tam giác AOC vuông tại O có:

$\sin 60^\circ = \dfrac{OC}{AC} \Rightarrow OC = AC \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a.\cos 60^\circ = \dfrac{AO}{AC} \Rightarrow OA = AC\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BO = \dfrac{3}{2}a.$

$V = V_1 - V_2 = \dfrac{1}{3}BO \cdot \pi OC^2 - \dfrac{1}{3}AO \cdot \pi OC^2 = \dfrac{1}{3}\pi OC^2(BO - AO) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2 \cdot a = \dfrac{\pi a^3}{4}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Trong các khối trụ có cùng diện tích toàn phần bằng π, gọi $(\Im)$ là khối trụ có thể tích lớn nhất, chiều cao của $(\Im)$ bằng:

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao khối trụ.

Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \pi \Rightarrow h = \dfrac{1-2R^2}{2R}$.

Thể tích khối trụ: $V = h\pi R^2 = \dfrac{1-2R^2}{2R} \cdot \pi R^2 = \dfrac{\pi}{2}(R - 2R^3)$.

Xét $g(R) = \dfrac{\pi}{2}(R - 2R^3)$ trên $\left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ta có: $g'(R) = \dfrac{\pi}{2}(1 - 6R^2)$.

$g'(R) = 0 \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Bản biến thiên:

x	0		$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$g'(R)$		$+$	0	$-$	
$g(R)$		↗		↘	

Vậy, thể tích khối trụ lớn nhất khi $R = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

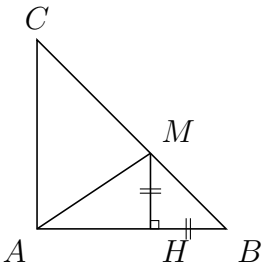
Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = 12$. Lấy một điểm M thuộc cạnh huyền BC và gọi H là hình chiếu của M lên cạnh góc vuông AB . Quay tam giác AMH quanh trục là đường thẳng AB tạo thành mặt nón tròn xoay (N), hỏi thể tích V của khối nón tròn xoay (H) lớn nhất là bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{256\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{128\pi}{3}$. **C.** $V = 256\pi$. **D.** $V = 72\pi$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên tam giác BHM cũng vuông cân tại H.
Tức ta được $V = \dfrac{1}{3}B \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi MH^2 \cdot AH = \dfrac{1}{3}\pi BH^2 \cdot (12 - BH)$.
Gọi chiều dài của BH là x, vậy thể tích đạt giá trị lớn nhất khi $y = x^2 \cdot (12 - x) = -x^3 + 12x^2$ đạt giá trị lớn nhất.

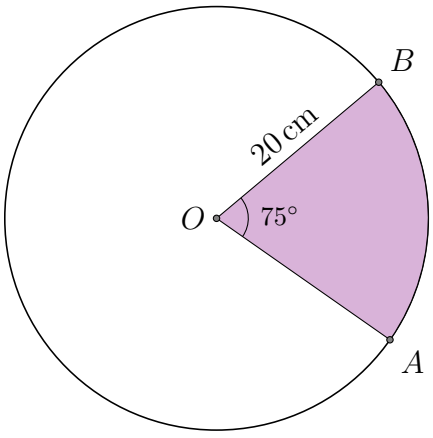


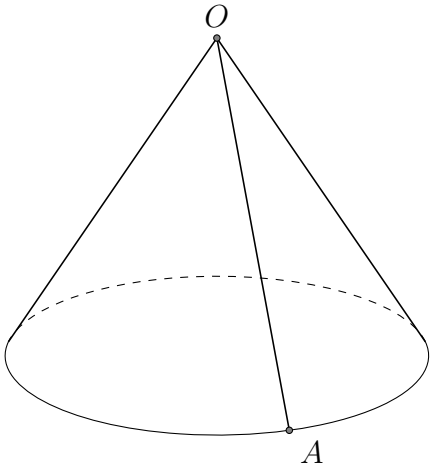
Có $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 8. \end{array}\right.$.

Suy ra thể tích lớn nhất bằng $V = \dfrac{256\pi}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Nhân dịp Trường THPT Nguyễn Khuyến tổ chức đi học tập ngoại khóa ở Đà Lạt. Đoàn Trường có tổ chức một cuộc thi làm nón để vui chơi Noel. Hưởng ứng cuộc thi đó, tập thể lớp 12A10 làm những chiếc nón theo các bước như sau: Cắt một mảnh giấy hình tròn tâm O bán kính 20 cm. Sau đó cắt bỏ đi phần hình quạt OAB như hình vẽ sao cho góc ở tâm $\widehat{AOB} = 75°$. Tiếp theo dán phần hình quạt còn lại theo hai bán kính OA và OB với nhau thì sẽ được một hình nón có đỉnh là O và đường sinh là OA. Hỏi thể tích V của khối nón được tạo thành bằng bao nhiêu?





A. $V=\dfrac{3125\pi\sqrt{551}}{648}$. **B.** $V=\dfrac{8000\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{45125\pi\sqrt{215}}{648}$. **D.** $V=\dfrac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình quạt OAB bị cắt đi qua là $S=\dfrac{\pi\times 20^2\times 75}{360}=\dfrac{250\pi}{3}$.

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón được tạo thành là $S_{\text{xq}}=400\pi-\dfrac{250\pi}{3}=\dfrac{950\pi}{3}$.

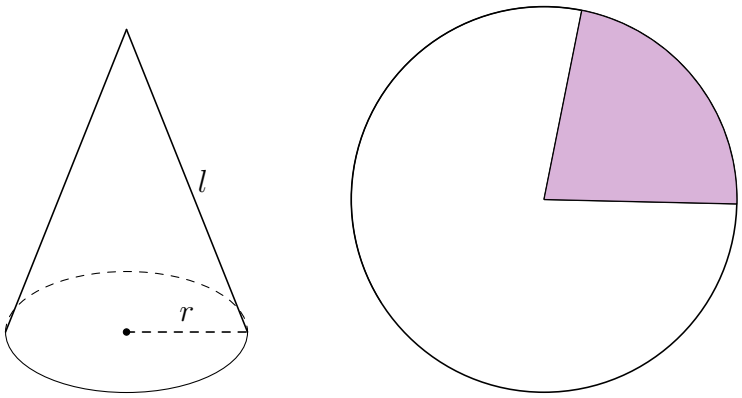
Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón, ta có $20\pi r=\dfrac{950\pi}{3}\Rightarrow r=\dfrac{95}{6}$.

Gọi h là đường cao của hình nón, ta có $h^2=20^2-\left(\dfrac{95}{6}\right)^2=\dfrac{5375}{36}\Rightarrow h=\dfrac{5\sqrt{215}}{6}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo thành là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\dfrac{95}{6}\right)^2\times\dfrac{5\sqrt{215}}{6}=\dfrac{45125\pi\sqrt{215}}{648}$.

Chọn đáp án C □

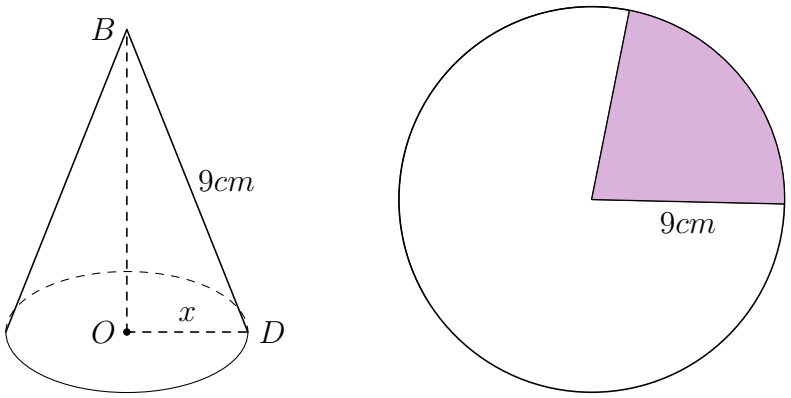
Câu 32. Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R=9$cm. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ).



Hình nón có thể tích lớn nhất khi độ dài cung tròn của hình quạt tạo thành hình nón bằng

A. $8\pi\sqrt{6}$ cm. **B.** $2\pi\sqrt{6}$ cm. **C.** $\pi\sqrt{6}$cm. **D.** $6\pi\sqrt{6}$cm.

Lời giải.



Gọi $x>0$ cm là bán kính đáy của hình nón. khi đó chu vi đáy của hình nón là $2\pi x$ và đường cao BO của hình nón là $BO=\sqrt{81-x^2}$ từ đó suy ra thể tích của khối nón được tạo ra là $V=\dfrac{1}{3}\pi x^2\cdot\sqrt{81-x^2}$.

Xét hàm số $y=x^2\cdot\sqrt{81-x^2}$ xác định và liên tục trên nữa khoảng $(0;9]$ ta có :

$y'=-\dfrac{3x(x^2-54)}{\sqrt{81-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=3\sqrt{6}\in(0;9]$.

Ta có bảng biến thiên:

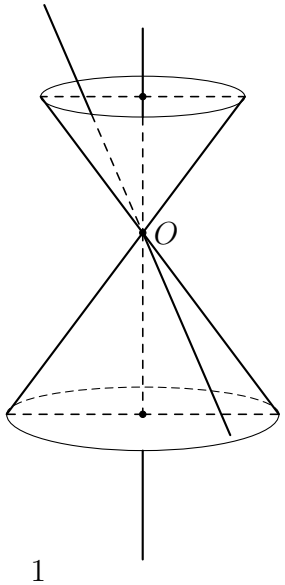
x	0		$3\sqrt{6}$		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$162\sqrt{3}$	↘	0

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 3\sqrt{6}$, khi đó thể tích lớn nhất của hình nón là $\frac{1}{3}\pi \cdot 162\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$. Từ đó suy ra độ dài cung tròn tạo thành hình quạt cũng chính là độ dài đường tròn đáy của hình nón bằng $2\pi x = 6\pi\sqrt{6}cm$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33.

Cho một đồng hồ cát như hình vẽ bên dưới (gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc $60°$. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng của thể tích của đồng hồ là 1000π cm^3. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ lệ thể tích cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?



A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{27}$. **C.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Lời giải.

Gọi chiều cao hình nón nhỏ, hình nón lớn, thể tích khối nón nhỏ, khối nón lớn lần lượt là h_1, h_2, V_1, V_2. Khi đó ta có $h_1 + h_2 = 30$ (1) và $V_1 = \frac{1}{9}\pi h_1^3; V_2 = \frac{1}{9}\pi h_2^3$.

Do đó $V_1 + V_2 = \frac{1}{9}(h_1^3 + h_1^3) = 1000\pi \Rightarrow h_1^3 + h_1^3 = 9000$ (2).

Từ (1), (2) ta được $h_1 = 10; h_2 = 20$ do đó $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 = \left(\frac{10}{20}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ (có hai nắp) có thể tích $1000l$ để chứa nước. Tính bán kính đáy R (đơn vị mét) của cái bồn hình trụ đó sao cho ít tốn vật liệu nhất.

A. $R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}(m)$. **B.** $R = 10.\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}(m)$. **C.** $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}(m)$. **D.** $R = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}(m)$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của cái bồn hình trụ.

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi R^2}$.

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot \dfrac{1000}{\pi R^2 + 2\pi R^2} = 2\pi\left(\dfrac{1000}{\pi R} + R^2\right) = 2\pi\left(\dfrac{500}{\pi R} + \dfrac{500}{\pi R} + R^2\right) \geq 6\pi\sqrt[3]{\dfrac{500^2}{\pi^2}}$.

Dẳng thức xảy ra khi $\dfrac{500}{\pi R} = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = 10.\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

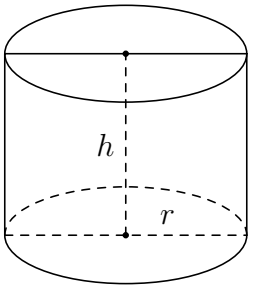
Chọn đáp án B □

Câu 35. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{2\pi}$.

Lời giải.

Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của lon. Ta có $V = h\pi r^2 \Rightarrow h = \dfrac{2}{\pi r^2}$.



Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \dfrac{2}{r} + \dfrac{2}{r} + 2\pi r^2$.

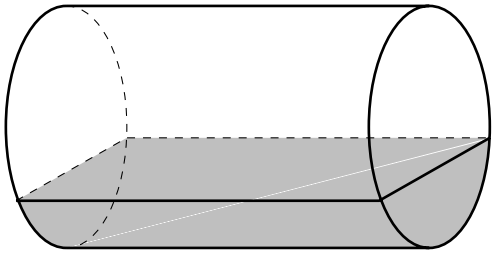
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $S_{\text{xq}} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{r} \cdot \dfrac{2}{r} \cdot 2\pi r^2} = 6\sqrt[3]{\pi}$.

Dẳng thức xảy ra khi $\dfrac{2}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36.

Một bồn nước có dạng hình trụ, chiều cao 2 m, bán kính đáy là $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m được đặt nằm ngang trên mặt sàn bằng phẳng. Hỏi khi chiều cao mực nước trong bồn là $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ m thì thể tích nước trong bồn là bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

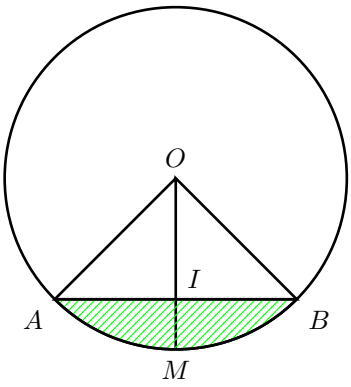


A. 197,01 lít. **B.** 200,70 lít.

C. 285,40 lít. **D.** 512,80 lít.

Lời giải.

Ta có $OI = OM - IM = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} = \dfrac{1}{2}$.



Suy ra $\cos\widehat{AOI} = \dfrac{OI}{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{AOI} = 45°$.

$S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \dfrac{1}{4}$.

Diện tích hình tròn $S_0 = \pi R^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ $S_1 = \dfrac{1}{4}S_0 - S_{\triangle OAB} = \dfrac{\pi - 2}{8}$.

Do đó $\dfrac{S_1}{S_0} = \dfrac{\pi - 2}{4\pi}$.

Thể tích hình trụ $V_0 = \pi R^2 h = \pi$ (m^3).

Gọi thể tích nước trong bồn là V_1. Ta có $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{S_1}{S_0}$. Vậy

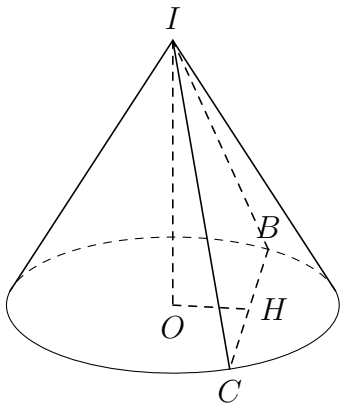
$$V_1 = \frac{\pi - 2}{4\pi} \cdot \pi = \frac{\pi - 2}{4} \text{ (m}^3\text{)} \approx 285{,}40 \text{ (lít)}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S=\dfrac{a^2}{3}$. **B.** $S=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **D.** $S=\dfrac{2a^2}{3}$.

Lời giải.



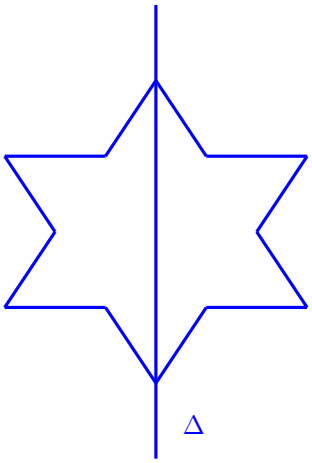
Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên bán kính của hình nón là $r=OB=OC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, đường sinh $l=IB=IC=a$ và đường cao $h=SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là trung điểm BC, khi đó góc hợp bởi mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng chứa đường tròn đáy là $\widehat{IHO}=60°$. Suy ra $IH=\dfrac{IO}{\sin 60°}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và $BC=2CH=2\sqrt{IC^2-IH^2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích S của tam giác IBC là $S_{IBC}=\dfrac{1}{2}\cdot IH\cdot BC=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

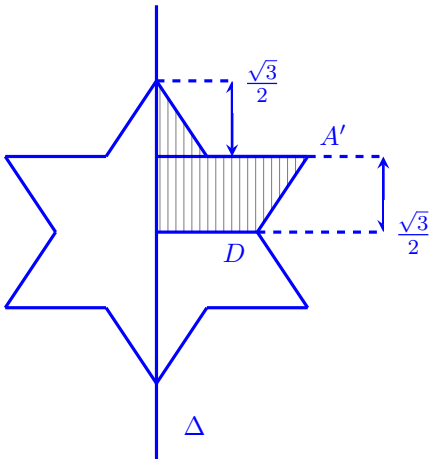
Chọn đáp án B □

Câu 38. Khi cho hình ngôi sao (xem hình vẽ bên dưới), có tất cả các cạnh đều bằng 1, quay xung quanh trục Δ ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.



A. $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Xét phần hình ngôi sao thuộc góc phần tư thứ nhất. Cắt hình trên bởi hai đường thẳng đi qua A' và D, đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ ta được một tam giác vuông với độ dài các cạnh góc vuông là $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và một hình thang vuông với chiều cao bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, đáy lớn bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, đáy nhỏ bằng 1.
Quay tam giác vuông trên quanh trục Δ ta được khối nón tròn xoay có thể tích

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Quay hình thang vuông trên quanh trục Δ ta được khối nón cụt có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{19\pi\sqrt{3}}{24}.$$

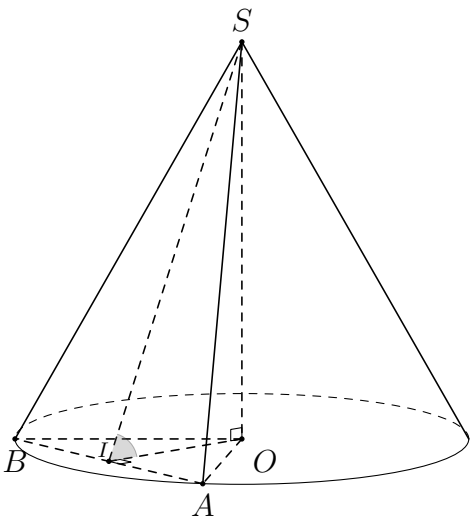
Do đó thể tích khối nón tròn xoay cần tìm là $V = 2(V_1 + V_2) = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Một khối nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân và đường sinh có độ dài bằng $3\sqrt{2}$ cm. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$ chia khối nón thành 2 phần. Tính thể tích phần nhỏ (Tính gần đúng đến hàng phần trăm).

A. 4,36 cm^3. **B**. 4,53 cm^3. **C**. 5,37 cm^3. **D**. 5,61 cm^3.

Lời giải.

Xét khối nón như hình vẽ.
Ta có $\triangle SBO$ là nửa tam giác vuông cân đỉnh S nên
$BO = \frac{SB \times \sqrt{2}}{2} = 3$.
Mặt phẳng qua đỉnh S cắt đáy theo dây cung AB, tâm đường tròn đáy là O.
Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên $AB \Rightarrow \widehat{SIO} = 60°$.
Xét $\triangle SOB$, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 3$.
Xét $\triangle SIO$, $OI = \frac{SO}{\tan 60°} = \sqrt{3}$.
Xét $\triangle IOA$, $\cos \widehat{IOA} = \frac{IO}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Suy ra $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{IOA} \approx 109{,}47°$.



Gọi **S** là diện tích hình phẳng tạo bởi dây cung AB và đường tròn (O) (phần nhỏ).

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \times 109{,}47 \times \frac{\pi}{180} \times OB^2 - \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin 109{,}47^\circ \approx 4{,}36 \text{ cm}^2.$$

Gọi V_n là thể tích phần nhỏ, $V_n = \frac{1}{3}\mathbf{S} \times SO \approx 4{,}36 \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án A □

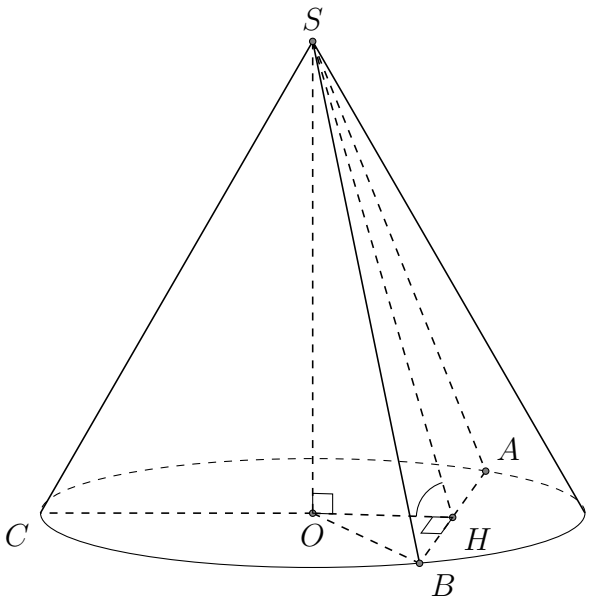
Câu 40. Cho hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng 60°. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A. $S = \frac{4\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3}$. **D.** $S = \frac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có tam giác SOC vuông cân ở O suy ra $OC = SO = a\sqrt{2}$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60^\circ$.



Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông OHB có

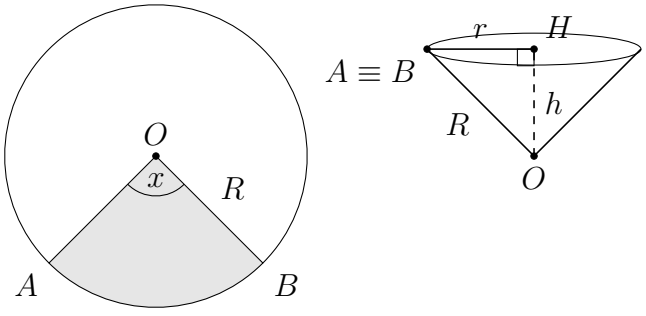
$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 2a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó ta có diện tích thiết diện $S_{\triangle SAB} = \frac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot BH = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

Bạn An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, An muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó An phải cắt bỏ hình quạt tròn OAB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất.



A. $x = \frac{\pi}{4}$. **B.** $x = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

C. $x = \frac{\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của phễu.
Xét tam giác vuông OAH có $h=\sqrt{R^2-r^2}$, từ đó suy ra thể tích của phễu

$$V=\frac{1}{3}h\pi r^2=\frac{\pi}{3}\sqrt{(R^2-r^2)r^4}. \ (1)$$

Nhận thấy $(R^2-r^2)r^4=4(R^2-r^2)\cdot\dfrac{r^2}{2}\cdot\dfrac{r^2}{2}\le 4\left(\dfrac{R^2-r^2+\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{r^2}{2}}{3}\right)^3=\dfrac{4R^6}{27}. \ (2)$

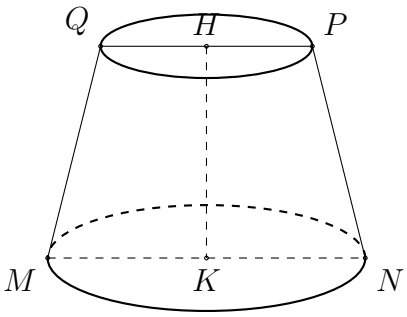
Từ (1) và (2) suy ra V lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{r^2}{2}=R^2-r^2\Leftrightarrow r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.
Theo giả thiết ta có chu vi đáy phễu bằng chiều dài cung $\overset{\frown}{AB}$ hay

$$Rx=2\pi r\Leftrightarrow x=\frac{2\pi r}{R}=\frac{2\pi\dfrac{R\sqrt{6}}{3}}{R}=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42.

Có một chiếc cốc làm bằng giấy được úp ngược như hình vẽ bên. Chiều cao của chiếc cốc là $HK=2\sqrt{143}$ cm, bán kính đáy cốc $HP=1$ cm, bán kính miệng cốc là $KN=3$ cm. Một con kiến đang đứng ở điểm M của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở đi ểm P. Tính quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình.



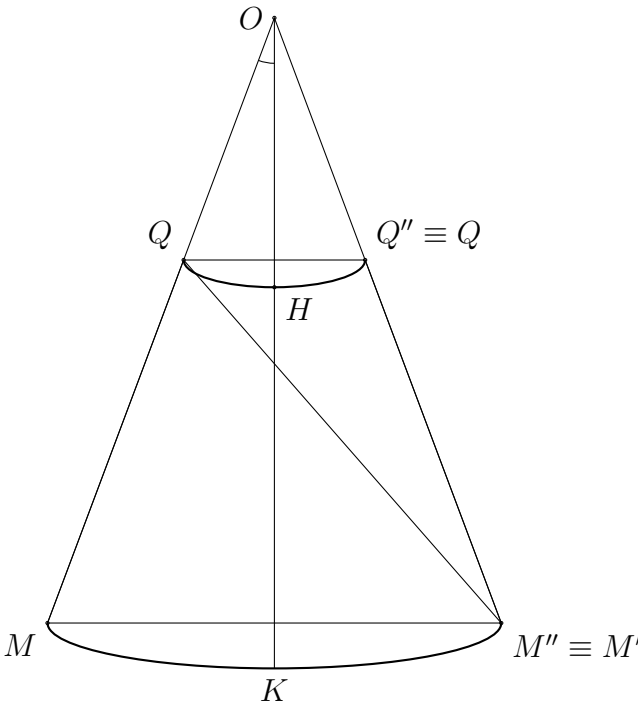
A. $1+\sqrt{579}$ cm. **B**. $12\sqrt{7}$ cm.
C. $24+6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm. **D**. $\sqrt{579}$ cm.

Lời giải.

Đặt b,a,h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ bên. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $QQ'=4\pi b$ và và cung lớn $MM'=4\pi a$. Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng QM". Áp dụng định lí hàm số cosin ta được

$$l=\sqrt{QO^2+OM''^2-2QO\cdot OM''\cdot\cos 2\alpha}.$$

Ta có $Q''M''=MQ=\sqrt{(a-b)^2+h^2}$.
Gọi l_1, l_2 lần lượt là độ dài cung nhỏ QQ'' và MM'', ta có



$$\frac{a}{b}=\frac{4\pi a}{4\pi b}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{OM}{OQ}=\frac{OQ+AM}{OQ}=1+\frac{MQ\alpha}{2\pi b}\Rightarrow\alpha=\frac{2\pi(a-b)}{MQ}=\frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+h^2}}\quad(2)$$

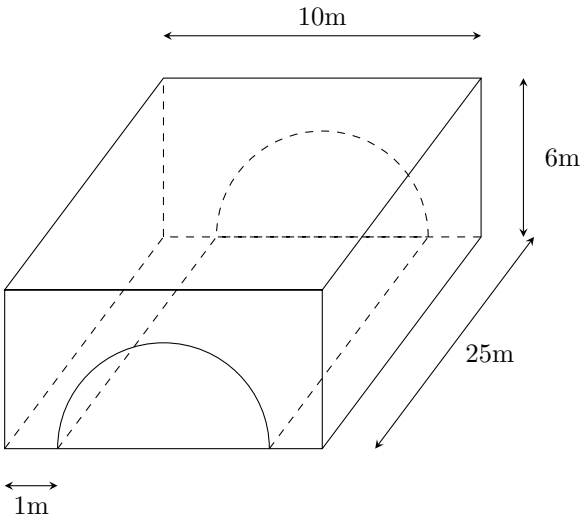
$$\frac{MQ}{OQ}=\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}\Rightarrow OQ=\frac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}\quad(3)$$

$$OM''=OQ+QM=\frac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}+\sqrt{(a-b)^2+h^2}\quad(4).$$

Thay $(2),(3),(4)$ vào (1) ta được $l=12\sqrt{7}$ cm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Viện Hải dương học dự định làm một bể cá bằng kính phục vụ khách tham quan (như hình vẽ), biết rằng mặt cắt dành cho lối đi là nửa hình tròn.



Tổng diện tích mặt kính của bể cá gần nhất với số nào sau đây?

A. 872 m^2. **B**. 914 m^2. **C**. 984 m^2. **D**. 949 m^2.

Lời giải.

Diện tích mặt ngoài

$$S_1=2\cdot25\cdot6+25\cdot10+2\cdot\left(6\cdot10-\frac{1}{2}\pi\cdot4^2\right)=670-16\pi\ (\text{m}^2).$$

Diện tích mái vòm và mặt dưới

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot8\cdot\pi\cdot25+2\cdot1\cdot25=100\pi+50\ (\text{m}^2).$$

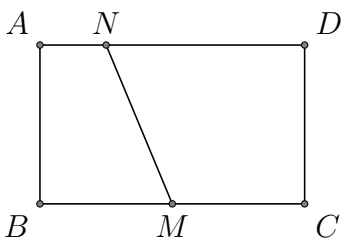
Vậy diện tích mặt kính của bể cá bằng

$$S=S_1+S_2=670-16\pi+100\pi+50=720+84\pi\simeq984\ (\text{m}^2).$$

Chọn đáp án (C) □

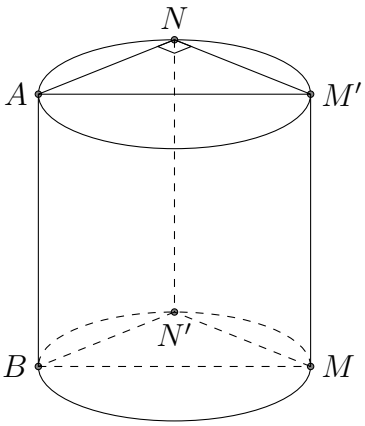
Câu 44.

Có một mảnh bìa hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo $AC=1$. Người ta đánh dấu M là trung điểm của BC, N là điểm thuộc cạnh AD với $AD=4AN$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh AB trùng với cạnh CD tạo thành một hình trụ. Tìm độ dài cạnh BC sao cho thể tích của tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất với các đỉnh A, B, M, N nằm trên hình trụ vừa tạo thành.



A. $BC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $BC=\dfrac{1}{3}$. **C.** $BC=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $BC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình trụ như hình vẽ. Kẻ các đường sinh MM', NN'. Khi đó N là điểm chính giữa cung $AM' \Rightarrow$ tam giác ANM' vuông cân tại N.
Đặt $BC=x \Rightarrow AB=\sqrt{1-x^2}$.
Gọi R là bán kính đường tròn đáy, ta có $AD=2\pi R=x \Rightarrow R=\dfrac{x}{2\pi} \Rightarrow AN=\dfrac{x}{\sqrt{2}\pi}$.

Ta có $V_{ABMN}=\dfrac{1}{3}V_{AM'N.BMN'}=\dfrac{1}{3}AB\cdot\dfrac{1}{2}AN^2$
$=\dfrac{1}{12\pi^2}x^2\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{12\pi^2}\sqrt{x^4(1-x^2)}$.

Ta có $x^4(1-x^2)=\dfrac{1}{2}x^2\cdot x^2(2-2x^2)\le\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{x^2+x^2+2-2x^2}{3}\right)^3=\dfrac{4}{27}$.

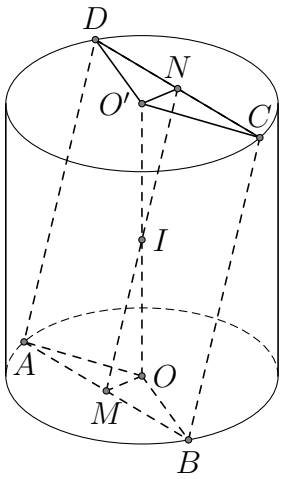
Đẳng thức xảy ra khi $x^2=2-2x^2\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45.

Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có 2 đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ góc $45°$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\pi a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{16}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.



Lời giải.

• Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD, O và O' lần lượt là tâm hai mặt đáy. Gọi I là giao điểm của MN và OO'.

• Góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt đáy là góc $(MN,OM)=\widehat{IMO}$. Do đó $\widehat{IMO}=45°$. Suy ra $\triangle IMO$ vuông cân tại O.

• Ta có $MN=BC=a$ nên $IM=\dfrac{a}{2}$ và $AM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$. Suy ra $OM=OI=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\Rightarrow OO'=2OI=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$\triangle OMA$ vuông tại M nên $OA^2=OM^2+AM^2=\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{3a^2}{8}$. Suy ra $R=OA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

• Ta có $V_{\text{trụ}}=\pi R^2h=\pi\cdot\dfrac{3a^2}{8}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

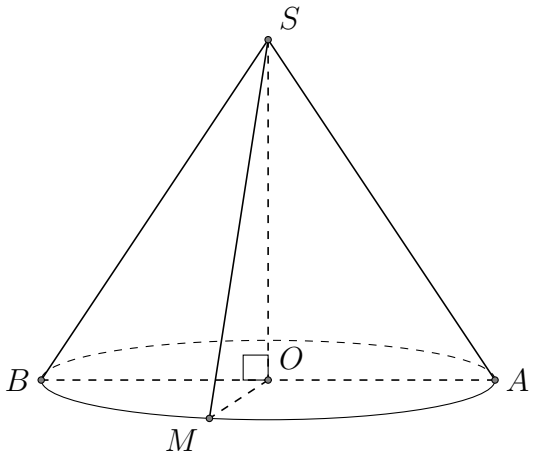
Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là bao nhiêu?

A. $S_{\max}=8a^2$. **B.** $S_{\max}=4a^2\sqrt{2}$. **C.** $S_{\max}=4a^2$. **D.** $S_{\max}=16a^2$.

Lời giải.

Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón.



Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM.

Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R=OA=2a\sqrt{3}$, $\widehat{ASB}=120^\circ$ nên $\widehat{ASO}=60^\circ$.

Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $\sin 60^\circ=\dfrac{OA}{SA}\Rightarrow SA=\dfrac{OA}{\sin 60^\circ}=4a$.

Diện tích thiết diện là $S_{SAM}=\dfrac{1}{2}SA\cdot SM\cdot\sin\widehat{ASM}=\dfrac{1}{2}\cdot 4a\cdot 4a\cdot\sin\widehat{ASM}=8a^2\cdot\sin\widehat{ASM}$.

Do $0<\sin\widehat{ASM}\leqslant 1$ nên S_{SAM} lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{ASM}=1$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $\widehat{ASB}=120^\circ>90^\circ$ nên tồn tại tam giác ASM thoả mãn).

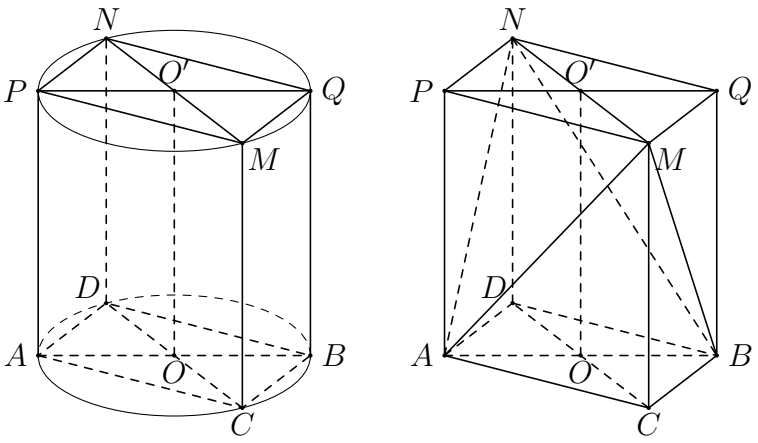
Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là $S_{\max}=8a^2$ (đvdt).

Chọn đáp án A □

Câu 47. Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và MN là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABMN$.

A. $V_{\max}=2$. **B.** $V_{\max}=6$. **C.** $V_{\max}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $V_{\max}=1$.

Lời giải.



Dựng hình hộp chữ nhật $ABCD.PMNQ$ nội tiếp hình trụ như hình vẽ.

Dễ thấy $V_{ACBD.PMQN}=V_{PAMN}+V_{QBMN}+V_{CAMB}+V_{DNAB}+V_{ABMN}$.

Mà $V_{PAMN}=V_{QBMN}=V_{CAMB}=V_{DNAB}=V_{ABMN}=\dfrac{1}{6}V$ nên $V_{ABMN}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD.PMQN}$.

$V_{ABCD.PMQN}=S_{PMQN}\cdot OO'\leq\dfrac{1}{2}MN\cdot PQ\cdot OO'=2\cdot 3=6$.

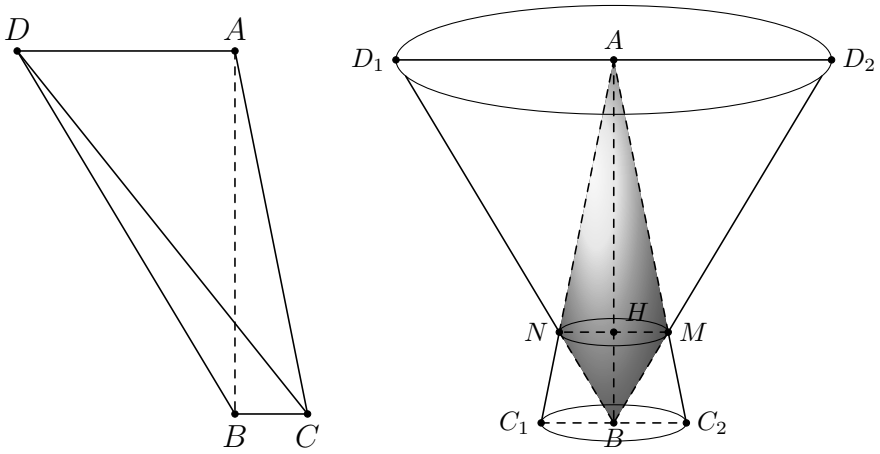
Vậy $V_{ABMN}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD.PMQN}\leq\dfrac{1}{3}\cdot 6=2\Rightarrow V_{\max}=2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AB và MN vuông góc với nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

A. $\dfrac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Lời giải.



Tứ diện $ABCD$ có $\begin{cases} DA \perp (ABC) \\ BC \perp (ABD) \end{cases}$, do đó khi quay hai tam giác ABC và ABD quanh trục AB ta sẽ được hai hình nón tròn xoay, và phần chung của hai hình nón này là phần tô màu xám ở hình trên.
Khi đó xét mặt phẳng qua trục AB của hai hình nón $(C_1C_2D_2D_1)$, gọi $M = BD_2 \cap AC_2$; $N = BD_1 \cap AC_1$.
Ta có $\triangle BMC_2 \backsim \triangle D_2MA$, nên

$$\frac{BM}{D_2M} = \frac{BC_2}{AD_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HM}{AD_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{HM}{BC_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow HM = \frac{3a}{4}.$$

Suy ra

- ☑ Thể tích khối nón (ANM) là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi HM^2 \cdot AH = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{9a^2}{16} \cdot AH$.
- ☑ Thể tích khối nón (BNM) là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi HM^2 \cdot BH = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{9a^2}{16} \cdot BH$.

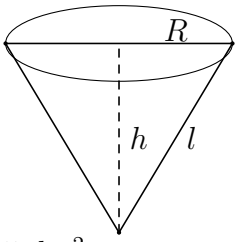
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \frac{9a^2}{16}(AH + BH) = \frac{1}{3}\pi \frac{9a^2}{16} \cdot AH = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49.

Khi sản xuất cái phễu hình nón (không có nắp) bằng nhôm, các nhà thiết kế luôn đạt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm phễu ít nhất, tức là diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất. Hỏi nếu ta muốn sản xuất cái phễu có thể tích là 2 dm^3 thì diện tích xung quanh của cái phễu sẽ có giá trị nhỏ nhất gần với giá trị nào sau đây nhất?



A. 6,85 dm^2. **B.** 6,75 dm^2. **C.** 6,65 dm^2. **D.** 6,25 dm^2.

Lời giải.

Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và độ dài đường sinh của cái phễu.
Khi đó $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = 2 \Leftrightarrow h = \dfrac{6}{\pi R^2}$ và $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{\dfrac{36}{\pi^2 R^4} + R^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi R\sqrt{\dfrac{36}{\pi^2 R^4} + R^2} = \sqrt{\dfrac{36}{R^2} + \pi^2 R^4}$.

Ta có $\dfrac{36}{R^2} + \pi^2 R^4 = \dfrac{18}{R^2} + \dfrac{18}{R^2} + \pi^2 R^4 \geq 3\sqrt[3]{(18\pi)^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{18}{R^2} = \pi^2 R^4 \Leftrightarrow R = \sqrt[6]{\dfrac{18}{\pi^2}}$.

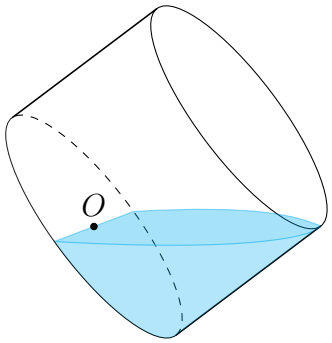
Suy ra $\min S_{xq} = \sqrt{3\sqrt[3]{(18\pi)^2}} \approx 6,65$.

Chọn đáp án C □

Câu 50.

Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy bằng 6cm, chiều cao 15cm chứa đầy nước. Nghiêng cốc cho nước chảy từ từ ra ngoài đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy cốc (tham khảo hình vẽ). Khi đó diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng

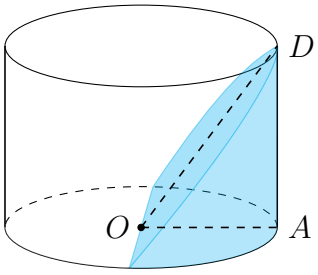
A. $\dfrac{9\sqrt{26}}{10}\pi$ cm^2. **B.** $9\sqrt{26}\pi$ cm^2. **C.** $\dfrac{9\sqrt{26}}{2}\pi$ cm^2. **D.** $\dfrac{9\sqrt{26}}{5}\pi$ cm^2.



Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra diện tích bề mặt cốc chính là nửa elip có trục nhỏ $2b = 2R = 6 \Rightarrow b = 3$cm và nửa độ dài trục lớn là

$$a = OD = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{15^2 + 3^2} = 3\sqrt{26}\text{cm}.$$



Diện tích bề mặt nước trong cốc là

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab\pi = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{26} = \frac{9\sqrt{26}}{2}\pi\text{cm}^2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 51. Một khối cầu (S) tâm I bán kính R không đổi. Một khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nhưng nội tiếp trong khối cầu. Tính chiều cao h theo R để thể tích khối trụ lớn nhất.

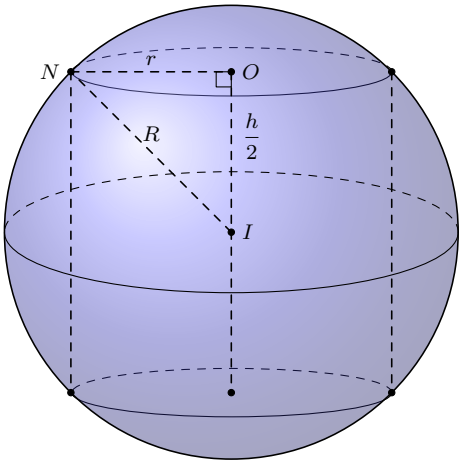
A. $h = \sqrt{2}R$. **B.** $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$. **C.** $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$.

Lời giải.

Ta có $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$.

$V_{\text{Trụ}} = h \cdot \pi r^2 = h\pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) = h\pi R^2 - \dfrac{\pi h^3}{4}$

$\Rightarrow V'(h) = \pi R^2 - \dfrac{3\pi h^2}{4} = 0 \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R.$



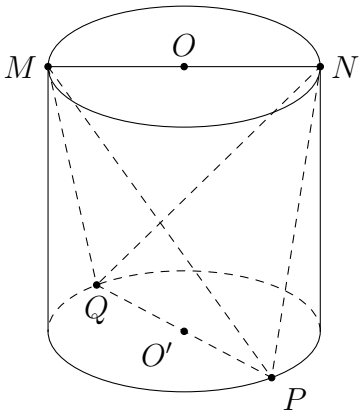
x	0		$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$		$2R$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Vậy thể tích khối trụ lớn khi $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Chọn đáp án B □

Câu 52.

Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được khối đá có hình tứ diện $MNPQ$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30 dm^3. Hãy tìm thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).



A. 101,3 dm^3. **B.** 141,3 dm^3. **C.** 121,3 dm^3. **D.** 111,3 dm^3.

Lời giải.

Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$, biết rằng d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD, α là góc giữa hai đường thẳng đó là $V = \dfrac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\alpha$.

Áp dụng ta có

$V_{MNPQ} = \dfrac{1}{6}MN \cdot PQ \cdot h \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow h = \dfrac{6 \cdot 30}{6 \cdot 6} = 5$ dm (với h là độ dài đường cao của hình trụ).

Khi đó thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi$ dm^3.

Suy ra thể tích của lượng đá bị cắt bỏ là $45\pi - 30 \approx 111{,}3$ dm^3.

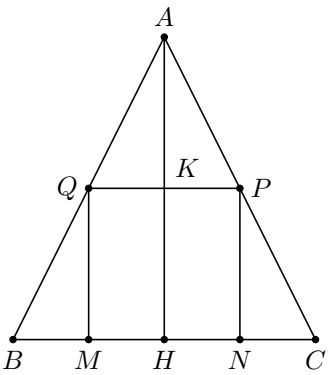
Chọn đáp án D □

Câu 53. Cho hình nón có bán kính đáy R, chiều cao h. Bán kính r của hình trụ nội tiếp hình nón mà có thể tích lớn nhất là

A. $r = \dfrac{R}{4}$. **B.** $r = \dfrac{R}{2}$. **C.** $r = \dfrac{2R}{3}$. **D.** $r = \dfrac{R}{3}$.

Lời giải.

Cắt hình nón (N) theo mặt phẳng đi qua trục AH của nó ta được thiết diện là tam giác cân ABC, mặt phẳng này cắt hình trụ (T) nội tiếp hình nón theo thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$ (như hình vẽ).



Gọi h' là độ dài đường cao của hình trụ. Ta có

$$\frac{h'}{h}=\frac{KH}{AH}=\frac{QB}{AB}=\frac{AB-AQ}{AB}=1-\frac{AQ}{AB}=1-\frac{r}{R}.$$

Do đó $h'=h\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$.

Thể tích khối trụ nội tiếp hình nón là

$$V=\pi r^2h'=\pi h\left(r^2-\frac{r^3}{R}\right).$$

Xét hàm số $f(r)=\pi h\left(r^2-\dfrac{r^3}{R}\right)$ với $0<r<R$.

Ta có $f'(r)=\pi h\left(2r-\dfrac{3r^2}{R}\right)$, $f'(r)=0\Leftrightarrow r=\dfrac{2R}{3}$.

Bảng biến thiên

r	0		$\dfrac{2R}{3}$		R
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$	0	↗	$\dfrac{4\pi R^2}{27}$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max V=\dfrac{4\pi R^2}{27}$ đạt được khi $r=\dfrac{2R}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Bác An cần làm một cái bể đựng nước hình trụ (có đáy và nắp đậy) có thể tích 16π m^3. Tính bán kính đáy của hình trụ để nguyên vật liệu làm bể ít nhất.

A. 0,8 m. **B**. 1,2 m. **C**. 2 m. **D**. 2,4 m.

Lời giải.

Gọi bán kính mặt đáy là $R, R>0$. Khi đó chiều cao của hình trụ là $\dfrac{16}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$\begin{aligned}S_{tp}&=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi R\cdot\frac{16}{R^2}+2\pi R^2\\&=2\pi\left(\frac{16}{R}+R^2\right)=2\pi\left(\frac{8}{R}+\frac{8}{R}+R^2\right)\\&\geq 2\pi\cdot 3\sqrt[3]{64}=24\pi.\end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\dfrac{8}{R}=R^2\Leftrightarrow R=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích V_1. Một người thợ mộc muốn gọt giũa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích V_2. Tính tỷ số lớn nhất $k = \dfrac{V_2}{V_1}$.

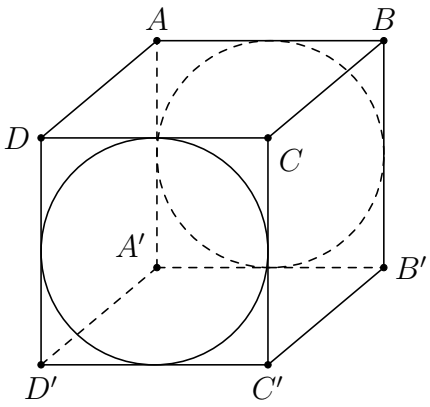
A. $k = \dfrac{\pi}{4}$. **B.** $k = \dfrac{2}{\pi}$. **C.** $k = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $k = \dfrac{4}{\pi}$.

Lời giải.

Giả sử khối lập phương có cạnh $2a$, suy ra $V_1 = 8a^3$.
Khối trụ có thể tích lớn nhất khi hai đáy nội tiếp hai mặt đối diện của khối lập phương, khi đó bán kính đáy của khối trụ là $R = a$, chiều cao $h = 2a$. Từ đó suy ra

$$V_2 = h \cdot S = 2a \cdot \pi a^2 = 2\pi a^3.$$

Vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 56. Anh T dự định làm một cái bể đựng nước hình trụ bằng inox có nắp đậy, thể tích 20m^3. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 500 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 300 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 400 ngàn đồng. Để chi phí làm bể là ít nhất thì anh T cần chọn bán kính bể gần nhất với số nào sau đây? (*Xem độ dày của tấm inox là không đáng kể*)

A. 1,45m. **B.** 1,47m. **C.** 1,08m. **D.** 1,50m.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của bể lần lượt là r, h (mét).
Khi đó $\pi r^2 h = 20$.
Tổng chi phí làm bể là $\pi r^2 \cdot 500 + \pi r^2 \cdot 300 + 2\pi rh \cdot 400 = 800\pi(r^2 + rh)$ ngàn đồng.
Áp dụng BĐT AM-GM ta có

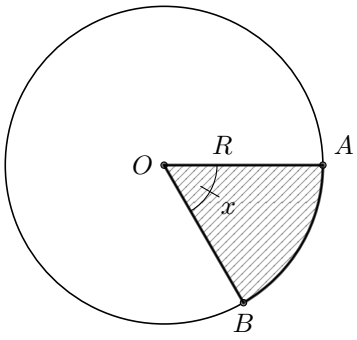
$$r^2 + rh = r^2 + \frac{rh}{2} + \frac{rh}{2} \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{rh}{2} \cdot \frac{rh}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{r^4h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{100}{\pi^2}}.$$

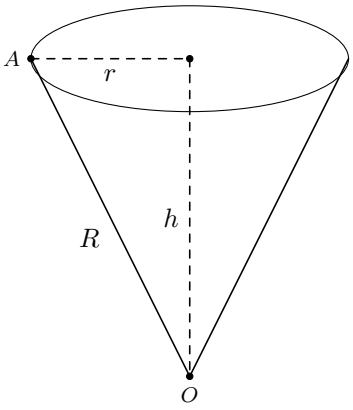
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} r^2 = \dfrac{rh}{2} \\ \pi r^2 h = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2r \\ \pi r^2 h = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} \approx 1{,}47 \\ h = 2\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}. \end{cases}$

Vậy để chi phí làm bể là ít nhất thì anh T cần chọn bán kính bể là 1,47 mét.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?





A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của phễu hình nón.

Để tiện cho việc tính toán, ta chuẩn hóa $R = 1$.

Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{3} r^2\sqrt{1-r^2}$.

Xét hàm số $f(r) = r^2\sqrt{1-r^2}$ trên $(0;1)$. Ta có $f'(r) = \dfrac{2r - 3r^3}{\sqrt{1-r^2}}$; $\forall r \in (0;1)$.

Do đó $f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2r - 3r^3 = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó ta có bảng biến thiên

r	0		$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$		1
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$		↗	$f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$	↘	

Do đó hàm $f(r)$ đạt giá trị lớn nhất khi $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Vậy $V_{\max} = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

Mà độ dài cung phần cuộn làm phễu chính là chu vi đáy hình tròn nên $x = 2\pi r = \dfrac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

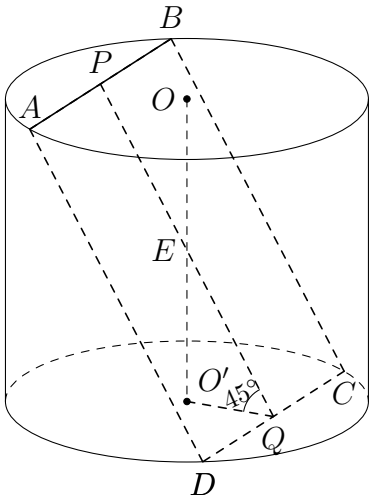
Câu 58. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $ABCD$ tạo với đáy hình trụ góc $45°$. Tính diện tích xung quanh hình trụ?

A. $S_{\text{xq}} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{5}$. **B.** $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, OO'.
Góc giữa $(ABCD)$ và mặt đáy là $\widehat{O'QE} = 45°$.
Ta có $EQ = \dfrac{a}{2}$, do đó $O'Q = EO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Suy ra $h = OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $r = O'C = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}.$$



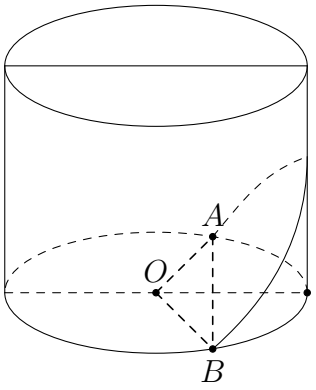
Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 4 cm và chiều cao bằng 5 cm. Gọi AB là một dây cung của đáy sao cho $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Người ta dựng một mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng đáy của hình trụ góc 60°. Diện tích của thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) và hình trụ là bao nhiêu?

A. $\dfrac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}\text{cm}^2$. **D.** $\dfrac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}\text{cm}^2$.

Lời giải.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích của thiết diện và hình chiếu của thiết diện trên mặt phẳng đáy.
Khi đó ta có $S' = S \cdot \cos 60°$, suy ra $S = 2S'$.
Ta lại có $S' = S_{\text{quạt}OAB} - S_{\triangle OAB}$.
Trong đó, $\widehat{AOB} = 120°$, $S_{\text{quạt}OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi}{3} \cdot OA^2 = \dfrac{16\pi}{3}$;
$S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
Vậy $S = 2 \cdot \left(\dfrac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) = 8 \cdot \left(\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)$ (cm^2).



Chọn đáp án (A) □

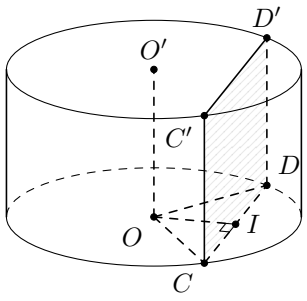
Câu 60. Một hình trụ có bán kính R, chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Thiết diện song song và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ có diện tích là

A. $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R^2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện song song với trục là hình chữ nhật $CDD'C'$ như hình vẽ bên.
Gọi I là trung điểm CD. Ta chứng minh được $OI \perp (CDD'C')$.
Mặt khác, do $OO' \parallel (CDD'C')$ nên

$$\text{d}(OO', (CDD'C')) = \text{d}(O, (CDD'C')) = OI = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$



$$CD = 2IC = 2\sqrt{OC^2 - OI^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = R.$$

Suy ra $S_{CDD'C'} = CD \cdot CC' = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$.

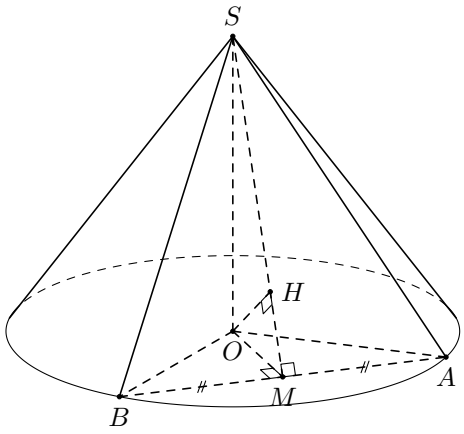
Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 400$ cm^2. **B.** $S = 500$ cm^2. **C.** $S = 406$ cm^2. **D.** $S = 300$ cm^2.

Lời giải.

Giả sử thiết diện đã cho là tam giác SAB, với S là đỉnh và O là tâm đường tròn đáy của hình nón.



Gọi M là trung điểm AB, H là hình chiếu vuông góc của O trên SM. Khi đó ta có $OH \perp (SAB)$, suy ra

$$OH = \mathrm{d}\,[O;(SAB)] = 12\,\mathrm{cm}.$$

Xét tam giác SOM vuông tại O, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \\ \Rightarrow\ & OM = 15. \end{aligned}$$

$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 2AM = 40$ cm.

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm.

Diện tích thiết diện SAB là

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500\,\mathrm{cm}^2.$$

Chọn đáp án (B) □

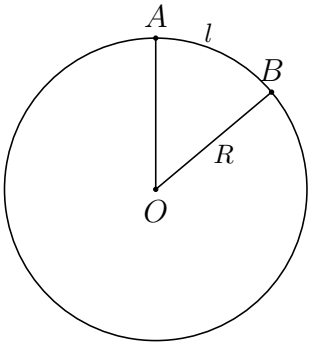
Câu 62. Cho một miếng tôn hình tròn có tâm O, bán kính R. Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không có đáy (OA trùng với OB). Gọi S, S' lần lượt là diện tích của miếng tôn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{S'}{S}$ để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi độ dài của cung tròn của quạt bị cắt là l và bán kính hình tròn là R, thế thì

$$\frac{S'}{S} = 1 - \frac{lR}{2\pi R^2} = 1 - \frac{l}{2\pi R}. \quad (1)$$



Gọi r là bán kính đường tròn đáy khi tạo thành nón. Thế thì $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} = \dfrac{1}{3}\pi\sqrt{(R^2 - r^2)\,.r^4}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}(2R^2-2r^2)\cdot r^2\cdot r^2}\le\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2R^2-2r^2+r^2+r^2}{3}\right)^3}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2R^2}{3}\right)^3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $r^2=2R^2-2r^2\Rightarrow\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (2)

Hơn nữa, $r=\dfrac{2\pi R-l}{2\pi}\Rightarrow\dfrac{r}{R}=1-\dfrac{l}{2\pi R}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{S'}{S}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hình nón đỉnh O, I là tâm đường tròn đáy. Mặt trung trực của OI chia khối chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần chứa đỉnh S và phần không chứa S là

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.

Hình nón nhỏ và hình nón lớn đồng dạng với tỉ lệ $\dfrac{1}{2}$ nên tỉ số thể tích của chúng là $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$.

Do đó tỉ lệ cần tìm là $\dfrac{1}{7}$.

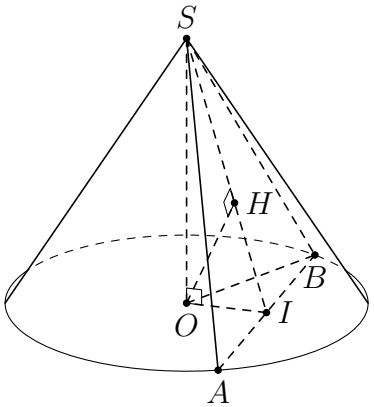
Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho khối nón (N) có chiều cao $h=20$ cm, bán kính đáy $r=25$ cm. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy 12 cm. Khi đó, (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích bằng

A. 300 cm^2. **B.** 500 cm^2. **C.** 406 cm^2. **D.** 400 cm^2.

Lời giải.

Giả sử thiết diện là tam giác SAB. Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu vuông góc của O trên SI.



Ta có: $\begin{cases}AB\perp OI\\AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOI)\Rightarrow AB\perp IH$.

Vậy $OH\perp(SAB)$.

Suy ra $\mathrm{d}(O,(SAB))=OH=12$.

Xét tam giác SOI, ta có

$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OI^2}+\dfrac{1}{SO^2}\Rightarrow\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{1}{225}\Rightarrow OI=15$. Xét tam giác SOI, ta có $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=25$.

Xét tam giác BOI, ta có $BI=\sqrt{OB^2-OI^2}=20\Rightarrow AB=2BI=40$.

Vậy $S_{SAB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot SI=\dfrac{1}{2}\cdot40\cdot25=500$ cm^2.

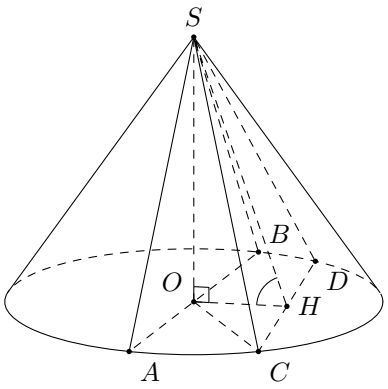
Chọn đáp án B □

Câu 65. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60°. Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $2a^2$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Gọi thiết diện qua trục là $\triangle SAB$ và thiết diện qua đỉnh nón tạo với đáy một góc 60° là $\triangle SCD$.



Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ$.

Khi đó diện tích thiết diện SCD là $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} SH \cdot CD$.

Ta có $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = SO$.

Tam giác SHO vuông tại O, ta có $SH = \dfrac{SO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ta có $CD = 2CH = 2\sqrt{OC^2 - OH^2} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{SH^2}{4}} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{6}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

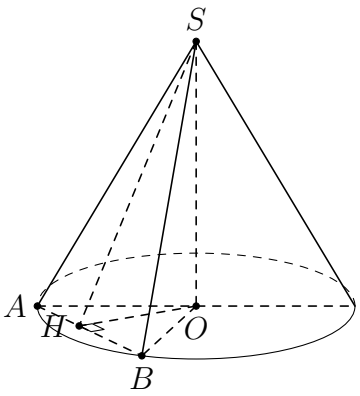
Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy 2 điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2\sqrt{2}$, thể tích khối nón đã cho bằng

A. $V = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $OH \perp AB$, $(H \in AB) \Rightarrow H$ là trung điểm AB và $SH \perp AB$.



Do tam giác OAB vuông $\Rightarrow AB = R\sqrt{2}$ và $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} SH \cdot AB \Rightarrow SH = \dfrac{2\sqrt{2}R^2}{\sqrt{2}R} = 2R$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - \dfrac{R^2}{2}} = \dfrac{R\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích của khối nón đã cho là

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi R^2 . \dfrac{R\sqrt{14}}{2} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$.

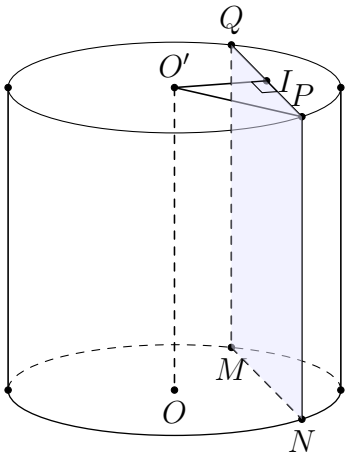
Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Cho hình trụ có trục OO' và có bán kính đáy bằng 4. Một mặt phẳng song song với trục OO' và cách OO' một khoảng bằng 2 cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $26\sqrt{3}\pi$. **B.** $8\sqrt{3}\pi$. **C.** $16\sqrt{3}\pi$. **D.** $32\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm đoạn QP, khi đó ta có $O'I \perp PQ$.
Suy ra $O'I \perp (MNPQ)$.
hay $O'I = d(O';(MNPQ)) = d(OO';(NMPQ)) = 2$.
Ta có $PI = \sqrt{R^2 - O'I^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow PQ = 4\sqrt{3}$.
Từ giả thiết $MNPQ$ là hình vuông suy ra $l = NP = PQ = 4\sqrt{3}$.
Diện tích xung quanh hình trụ là $S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot l = 2\pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\pi$.



Chọn đáp án (D) □

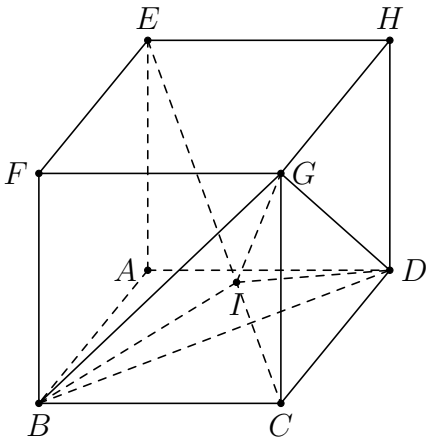
Câu 68. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng 1. Thể tích khối nón có đỉnh là C, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Dễ thấy hình chóp $C.BDG$ là hình chóp đều với đáy là tam giác đều cạnh $\sqrt{2}$, cạnh bên bằng 1. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG, suy ra $CI \perp (BDG)$; $BI = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và

$$CI = \sqrt{BC^2 - BI^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Thể tích của khối nón cần tìm là

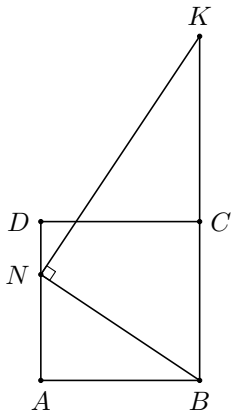
$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 69.

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnhAD sao cho $AN = 2DN$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là

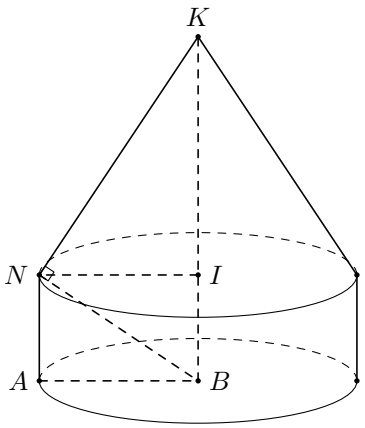
A. $V = \frac{7}{6}\pi a^3$. **B.** $V = \frac{9}{14}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{6}{7}\pi a^3$. **D.** $V = \frac{14}{9}\pi a^3$.



Lời giải.

Ta có $AN = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2}{3}a$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của N trên BK, tam giác BNK vuông tại N, đường cao NI nên

$$IK = \frac{IN^2}{IB} = \frac{a^2}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}a.$$



Khối tròn xoay thu được khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK gồm khối trụ tạo thành khi hình chữ nhật $ABIN$ quay quanh BK và khối nón tạo thành khi quay tam giác vuông NIK quanh cạnh góc vuông IK. Do đó thể tích khối tròn xoay thu được là

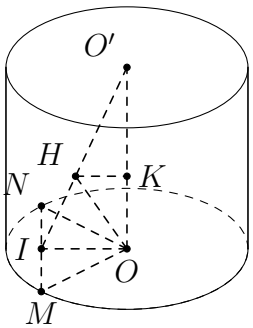
$$V = \pi AB^2 \cdot AN + \frac{1}{3}\pi NI^2 \cdot IK = \frac{2a^3\pi}{3} + \frac{a^3\pi}{2} = \frac{7a^3\pi}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Cho hình trụ có trục OO', bán kính đáy r và chiều cao $h = \dfrac{3r}{2}$. Hai điểm M, N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho OMN là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng $(O'MN)$. Khi M, N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, tính diện tích S của mặt này.

A. $S = \dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$. **B.** $S = \dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$. **C.** $S = \dfrac{9\pi r^2}{32}$. **D.** $S = \dfrac{9\pi r^2}{16}$.

Lời giải.



☑ Gọi I là trung điểm của MN.
Ta có $\begin{cases} OI \perp MN \\ O'O \perp MN \end{cases} \Rightarrow MN \perp (OIO')$.
Suy ra $(O'MN) \perp (O'OI)$ theo giao tuyến là $O'I$.
Kẻ $OH \perp O'I$, ta có $OH \perp (O'MN)$.

☑ Kẻ HK vuông góc với OO' tại K.
Ta có $OI = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$, $OH = \dfrac{OI \cdot OO'}{\sqrt{OI^2 + OO'^2}} = \dfrac{3r}{4}$, $\cos\widehat{HOI} = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra OH là đường sinh của hình nón có bán kính đáy là HK.

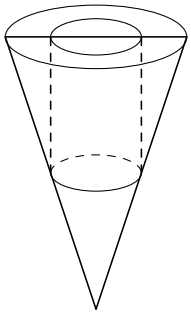
☑ Ta có $\cos\widehat{HOI} = \sin\widehat{HOK} = \dfrac{HK}{OH} \Rightarrow HK = \dfrac{3\sqrt{3}r}{8}$.

☑ $S_{\text{xq}} = \pi \cdot HK \cdot OH = \pi \cdot \dfrac{3\sqrt{3}r}{8} \cdot \dfrac{3r}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 71.

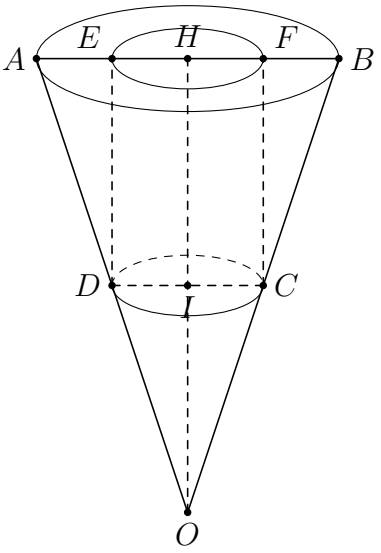
Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đậy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}$ dm^3. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (hình vẽ). Tính bán kính đáy R của bình nước.



A. $R = 4$ dm. **B.** $R = 3$ dm. **C.** $R = 5$ dm. **D.** $R = 2$ dm.

Lời giải.

Theo đề ta có $AH = R$, $OH = 3R$, $HI = 2R$.



Theo định lý Ta-let, ta có

$$\frac{ID}{AH} = \frac{OI}{OH} = \frac{OH - IH}{OH} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}.$$

Do đó khối trụ có bán kính đáy là $ID = \frac{R}{3}$. Thể tích khối trụ là

$$V = \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot 2R = \frac{16\pi}{9} \Leftrightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow R = 2 \text{ dm}.$$

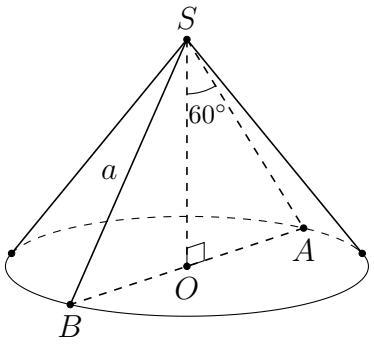
Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho khối nón có thiết diện qua trục là tam giác cân có một góc bằng 120° và cạnh bên bằng a. Tính thể tích khối nón.

A. $\frac{\pi a^3}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra tam giác SAB cân tại S và $\widehat{ASB} = 120°$. Suy ra $\triangle SOA$ là nửa của tam giác đều. Từ đó



$$SO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2},\ OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích của khối nón bằng

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\text{đáy}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^3\pi}{8}.$$

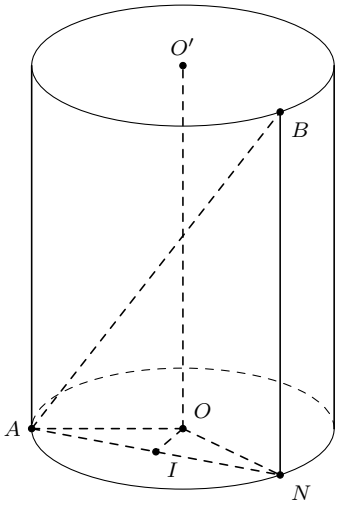
Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng

A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{9}$.

Lời giải.

Kẻ $BN \parallel OO'$, đặt $ON = x$, khi đó $BN = 2x$.
Do $OO' \parallel BN \Rightarrow OO' \parallel (ABN)$ nên
$\mathrm{d}(OO', AB) = \mathrm{d}(OO', (ABN)) = \mathrm{d}(O, (ABN))$.
Gọi I là trung điểm AN thì $OI \perp (ABN)$.
Vậy $\mathrm{d}(O, (ABN)) = OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle ABN$ vuông tại N, ta có
$AN^2 = AB^2 - BN^2 = 4a^2 - 4x^2$.
Xét $\triangle OIN$ vuông tại I, ta có
$ON^2 = OI^2 + IN^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{1}{4}(4a^2 - 4x^2) \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.
Vậy bán kính đáy là $R = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.



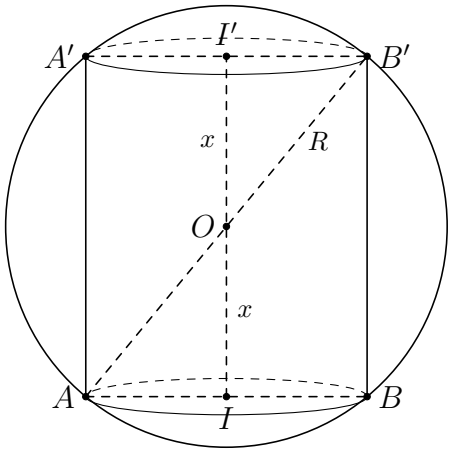
Chọn đáp án C □

Câu 74. Tính chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R.

A. $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử chiều cao của hình trụ là $2x$, $0 < x < R$. Khi đó bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - x^2\right) 2x$.
Xét hàm số $V(x) = 2\pi x\left(R^2 - x^2\right)$ với $0 < x < R$.
Ta có $V'(x) = 2\pi\left(R^2 - 3x^2\right)$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.
Bảng biến thiên:



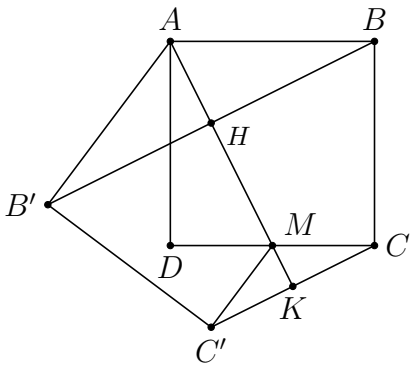
x	0		$\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$		R
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất là $V_{\max} = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$ khi chiều cao của khối trụ là $h = 2x = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 1, điểm M là trung điểm của CD. Cho hình vuông (tính cả điểm trong của nó) quay quanh trục là đường thẳng AM ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.

A. $\dfrac{7\sqrt{10}\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{5}\pi}{30}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{2}\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{2}\pi}{15}$.

Lời giải.



Thể tích V của khối tròn xoay là $V = V_1 + V_2 - V_3$. Trong đó V_1 là thể tích của khối nón với đường sinh AB, bán kính đáy BH, V_2 là thể tích của khối nón cụt với đường sinh BC, bán kính đáy lớn BH, bán kính đáy nhỏ CK, V_3 là thể tích của khối nón với đường sinh MC, bán kính đáy CK.
Ta có $AH = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $BH = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $CK = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $MK = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.
Khi đó

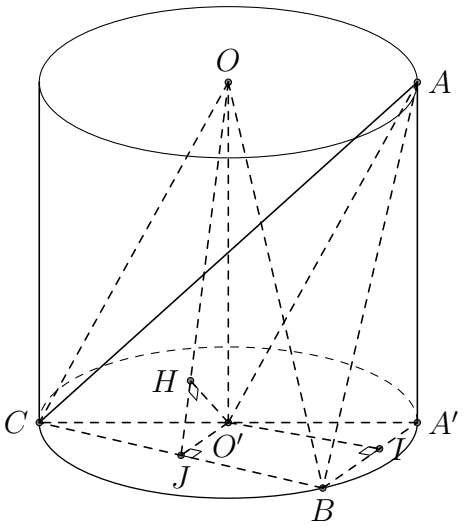
$$V_1 = \frac{1}{3}AH{\cdot}\pi{\cdot}HB^2 = \frac{4\sqrt{5}\pi}{75}; V_2 = \frac{1}{3}\pi(BH^2{+}CK^2{+}BH{\cdot}CK)HK = \frac{14\sqrt{5}\pi}{75}; V_3 = \frac{1}{3}MK{\cdot}\pi{\cdot}CK^2 = \frac{\sqrt{5}\pi}{150}.$$

Vậy $V = \dfrac{7\sqrt{5}\pi}{30}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng 4 cm. Điểm A nằm trên đường tròn đáy tâm O, điểm B nằm trên đường tròn đáy tâm O' của hình trụ. Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng OO' và AB bằng $2\sqrt{2}$ cm. Khi đó khoảng cách giữa $O'A$ và OB bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. **C.** $2\sqrt{3}$ cm. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

Lời giải.



Gọi AA' là đường sinh của hình trụ, ta có

$$OO' \parallel AA' \Rightarrow OO' \parallel (AA'B).$$

Suy ra $\mathrm{d}(OO', AB) = \mathrm{d}(OO', (AA'B)) = \mathrm{d}(O', (AA'B))$.
Kẻ $O'I \perp A'B$. Ta có $\begin{cases} O'I \perp A'B \\ O'I \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'I \perp (AA'B)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(OO', AB) = O'I = 2\sqrt{2}$.
Trong $\triangle O'A'I$ vuông tại I có

$$A'I = \sqrt{O'A'^2 - O'I} = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $A'B = 2A'I = 4\sqrt{2}$.
Kẻ $\begin{cases} OC \parallel O'A \\ OC = O'A \end{cases} \Rightarrow O'A \parallel (OBC)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(O'A, OB) = \mathrm{d}(O'A, (OBC)) = \mathrm{d}(O', (OBC))$.
Kẻ $O'J \perp BC$, mà $BC \perp (OO'J)$ (vì $OO' \perp (A'BC)$)
$\Rightarrow BC \perp (OO'J)$.

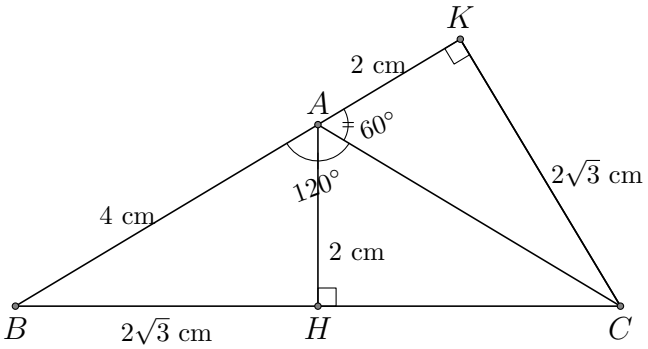
$\Rightarrow (OO'J) \perp (OBC), (OO'J) \cap (OBC) = OJ$. Kẻ $O'H \perp OJ \Rightarrow O'H \perp (OBC)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(O'A, OB) = \mathrm{d}(O', (OBC)) = O'H$.
Trong $\triangle A'BC$ vuông tại B có $BC = \sqrt{A'C^2 - A'B^2} = \sqrt{64 - 32} = 4\sqrt{2}$.
Suy ra $\triangle A'BC$ vuông cân tại B, kẻ $O'J \perp BC \Rightarrow O'J = O'I = 2\sqrt{2}$.
Trong $\triangle OO'J$ vuông tại $O' \Rightarrow O'H = \dfrac{OO' \cdot O'J}{OJ} = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = 4$ cm. Tính thể tích khối tròn xoay lớn nhất có thể khi ta quay $\triangle ABC$ quanh đường thẳng chứa một cạnh của $\triangle ABC$.

A. $16\sqrt{3}\pi$. **B.** 16π. **C.** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{3}$.

Lời giải.



Trường hợp 1: Khối tròn xoay khi quay $\triangle ABC$ quanh đường thẳng chứa AB (hoặc AC) có thể tích bằng hiệu thể tích của hai khối nón (N_1) và (N_2).

Dựng $CK \perp BA$ tại K suy ra $\begin{cases} AK = AC \cdot \cos \widehat{CAK} = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ cm} \\ BK = BA + AK = 4 + 2 = 6 \text{ cm} \\ CK = AC \cdot \sin \widehat{CAK} = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ cm}. \end{cases}$

$+$ (N_1) có $h_1 = BK = 6$ cm, $r_1 = CK = 2\sqrt{3}$ cm.
$+$ (N_2) có $h_1 = AK = 2$ cm, $r_2 = CK = 2\sqrt{3}$ cm.
Do đó $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot CK^2 \cdot (BK - AK) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot (6 - 2) = 16\pi$ (cm^3).
Trường hợp 2: Khối tròn xoay khi quay $\triangle ABC$ quanh đường thẳng chứa BC có thể tích bằng tổng thể tích của hai khối nón (N_3) và (N_4).

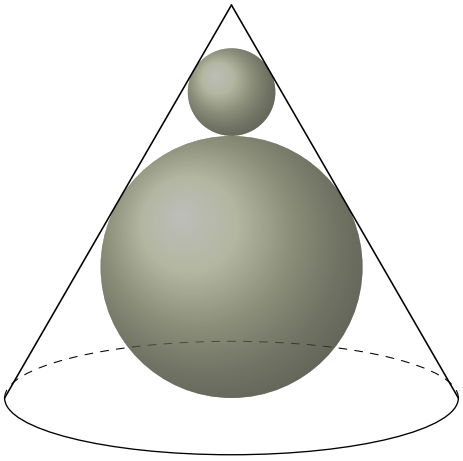
Kẻ đường cao $AH, (H \in BC)$ suy ra $\begin{cases} AH = AB \cdot \cos \widehat{BAH} = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ cm} \\ BH = CH = AB \cdot \sin \widehat{BAH} = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ cm}. \end{cases}$

(N_3) và (N_4) có $h_3 = h_4 = BH = CH = 2\sqrt{3}$ cm,$r_3 = r_4 = HA = 2$ cm.
Do đó $V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{16\pi}{\sqrt{3}}$ (cm^3).
Vậy $V_{\max} = 16\pi$ (cm^3).

Chọn đáp án (B) □

Câu 78.

Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi S_2 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1, S_3 là khối tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_2;...; S_n là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1}. Gọi V_1, V_2, V_3, ..., V_{n-1}, V_n lần lượt là thể tích của khối cầu S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}, S_n và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị biểu thức $T = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_1+V_2+\cdots+V_n}{V}$.



A. $\frac{7}{9}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{6}{13}$.

Lời giải.

Gọi đường kính đáy là a. Bán kính đáy là $R = \dfrac{a}{2}$. Vì góc ở đỉnh là $\dfrac{\pi}{3}$ nên thiết diện qua trục là một tam giác đều, suy ra $l = a$.

Đường cao $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$.

Bán kính của khối cầu S_1 là $R_1 = \dfrac{h}{3}$, bán kính của khối cầu S_2 là $R_2 = \dfrac{h-2R_1}{3} = \dfrac{h}{9} = \dfrac{h}{3^2}$, bán kính của khối cầu S_n là $\dfrac{h}{3^n}$.

Như vậy ta có

$$\frac{V_1+V_2+\cdots+V_n}{V} = \frac{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{h^3}{3^3}+\frac{h^3}{3^6}+\cdots+\frac{h^3}{3^{3n}}\right)}{\frac{\pi}{3}h\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\frac{4h^3}{27}\left(1+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{27^{n-1}}\right)}{h\cdot\frac{h^2}{3}} = \frac{4}{9}\frac{1-\frac{1}{27^n}}{1-\frac{1}{27}}.$$

Suy ra

$$T = \lim_{n\to+\infty}\frac{V_1+V_2+\cdots+V_n}{V} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{9}\frac{1-\frac{1}{27^n}}{1-\frac{1}{27}} = \frac{6}{13}.$$

Chọn đáp án (D) □

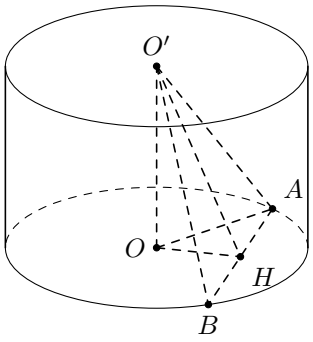
Câu 79. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc $60°$. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **B.** $V = \dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **C.** $V = \dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **D.** $V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó $\widehat{O'HO} = 60^\circ$. Suy ra

$$\frac{O'A\sqrt{3}}{2} = O'H = \frac{O'O}{\sin 60^\circ} = \frac{2O'O\sqrt{3}}{3} \Rightarrow O'A = \frac{4O'O}{3}.$$



Suy ra

$$\frac{16O'O^2}{9} = O'A^2 = O'O^2 + OA^2 \Rightarrow O'O = \frac{3\sqrt{7}R}{7}.$$

Vậy $V = \pi R^2 \cdot \dfrac{3\sqrt{7}R}{7} = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

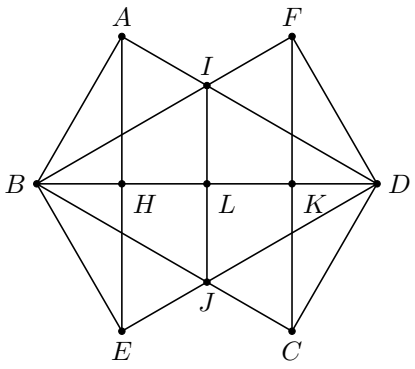
Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\dfrac{28\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{28\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{56\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{56\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi các điểm E, F, I, J, H, L, K như hình vẽ.
Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích các khối nón nhận được khi quay các tam giác ABH, ADH, IDL một vòng quanh đường thẳng BD.
Ta có $AH = \sqrt{3}$, $IL = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $BH = 1$, $HD = 3$, $LD = 2$. Khi đó thể tích khối tròn xoay được tạo thành là



$$\begin{aligned} V &= 2\left(V_1 + V_2 - V_3\right) \\ &= 2\left[\frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot DH - \frac{1}{3}\pi \cdot IL^2 \cdot LD\right] \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - \frac{4}{3} \cdot 2\right) \\ &= \frac{56\pi}{9}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 81. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là

A. $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$; $h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. **B.** $R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$; $h = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

C. $R = \sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$; $h = 4\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$. **D.** $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$; $h = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$.

Lời giải.

Ta có diện tích toàn phần $S = S_{2\text{ đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ và thể tích hình trụ $V = \pi R^2 h$.

Suy ra

$$\frac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \frac{S}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R} = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geq 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{27V^2}{4\pi^2} \leq \left(\frac{S}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

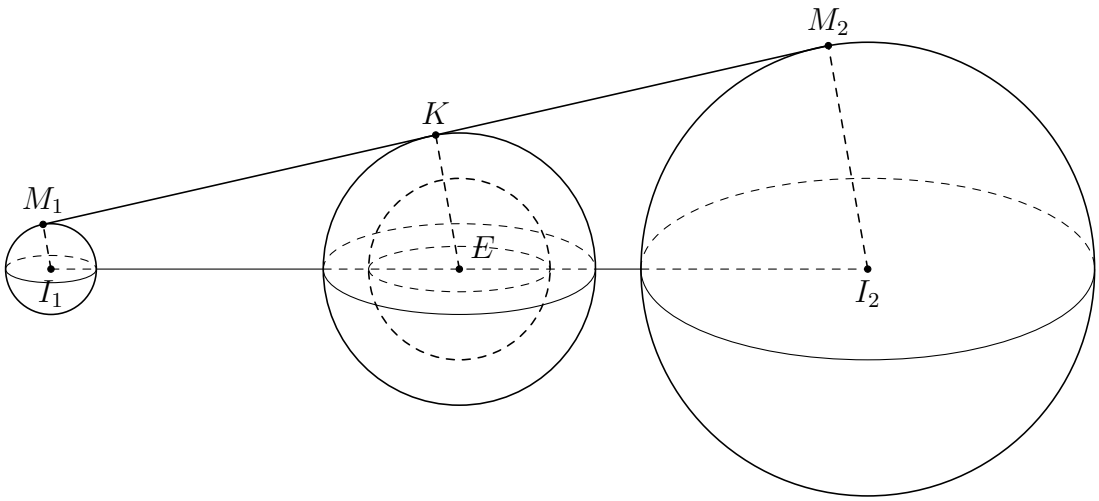
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $R^2 = \dfrac{V}{2\pi R} \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \dfrac{Rh}{2}$.
Suy ra $h = 2R$ và $S = 6\pi R^2$.
Khi đó ta có $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hai mặt cầu (S_1) có tâm I_1, bán kính $R_1 = 1$, (S_2) có tâm I_2 bán kính $R_2 = 5$. Lần lượt lấy hai điểm M_1, M_2 thuộc hai mặt cầu (S_1), (S_2). Gọi K là trung điểm của M_1M_2. Khi M_1, M_2 di chuyển trên (S_1), (S_2) thì K quét miền không gian là một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{55\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{68\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{76\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{82\pi}{3}$.

Lời giải.



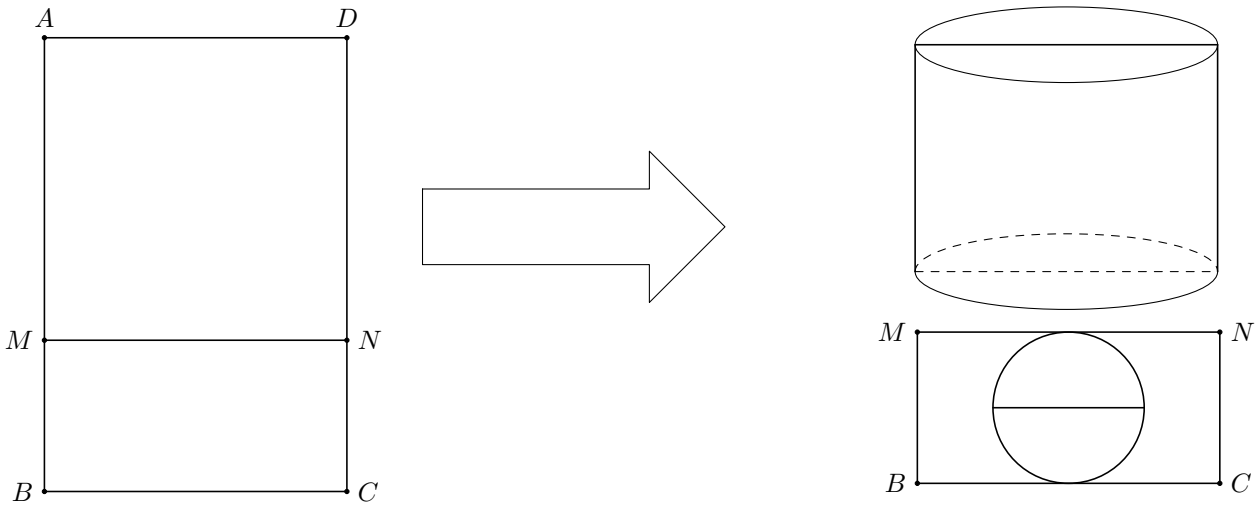
Gọi E là trung điểm của đoạn I_1I_2. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{I_1M} + \overrightarrow{I_2N} &= \left(\overrightarrow{I_1E} + \overrightarrow{EM}\right) + \left(\overrightarrow{I_2E} + \overrightarrow{EN}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{I_1E} + \overrightarrow{I_2E}\right) + \left(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}\right) \\
&= \vec{0} + 2 \cdot \overrightarrow{EK} \\
&\Rightarrow |I_1M - I_2N| \leq 2EK \leq I_1M + I_2N \\
&\Rightarrow 2 \leq EK \leq 3.
\end{aligned}$$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3^3 - 2^3) = \dfrac{76\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1 (m^2), cạnh $BC = x$ (m) để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau:



Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).

A. 1,37 m. **B**. 1,02 m. **C**. 0,97 m. **D**. 1 m.

Lời giải.

Ta có $AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \dfrac{1}{x}$.

Gọi R (m) là bán kính đáy của hình trụ inox gò được, chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x$ (m).

Do đó $2\pi R = x \Leftrightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$, $BM = 2R = \dfrac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}\right) = \dfrac{x(\pi - x^2)}{4\pi^2}$.

Xét $f(x) = x(\pi - x^2)$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \pi - 3x^2$, giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$ (vì $x > 0$). Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{\pi}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$.

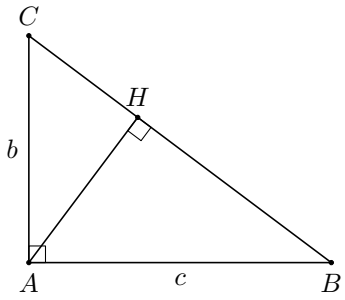
Thể tích V lớn nhất khi và chỉ khi $f(x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \approx 1{,}02$ (m).

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích hình tròn xoay bởi tam giác ABC khi nó quay quanh các cạnh BC, AC, AB. Biết $V_2 = 3\pi$, $V_3 = 4\pi$. Tính V_1.

A. $\dfrac{19\pi}{5}$. **B**. $\dfrac{8\pi}{5}$. **C**. $\dfrac{16\pi}{5}$. **D**. $\dfrac{12\pi}{5}$.

Lời giải.



Đặt $AB = c$, $AC = b \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2}$.

☑ Khi quay $\triangle ABC$ quanh cạnh AC ta có khối nón tròn xoay có bán kính đáy $r_2 = AB = c$, chiều cao $h_2 = AC = b$. Do đó

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi b c^2 \Rightarrow bc^2 = 9. \qquad (1)$$

☑ Khi quay $\triangle ABC$ quanh cạnh AB ta có khối nón tròn xoay có bán kính đáy $r_3 = AC = b$, chiều cao $h_3 = AB = c$. Do đó

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi r_3^2 h_3 = \frac{1}{3}\pi b^2 c \Rightarrow b^2 c = 12. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $b = 2\sqrt[3]{2}$ và $c = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. Từ đó $BC = \sqrt{b^2 + c^2} = \dfrac{5\sqrt[3]{2}}{2}$.

☑ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC, ta có

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5}.$$

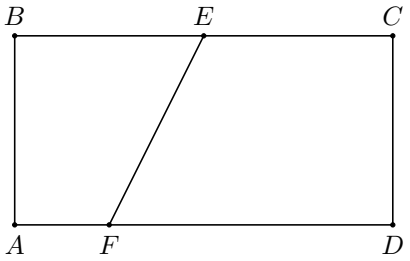
Khi quay $\triangle ABC$ quanh cạnh BC ta có khối tròn xoay hợp bởi khối nón sinh bởi $\triangle ABH$ và khối nón sinh bởi $\triangle ACH$. Do đó, thể tích của khối tròn xoay này là

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot (BH + CH) \\ &= \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BC \\ &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6\sqrt[3]{2}}{5}\right)^2 \cdot \frac{5\sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \frac{12\pi}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 85.

Có một mảng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a$, $AD = 4a$. Người ta đánh dấu điểm E là trung điểm BC và $F \in AD$ sao cho $AF = a$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh DC trùng với cạnh AB tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ABEF$ với các đỉnh A, B, E, F nằm trên hình trụ vừa tạo thành.

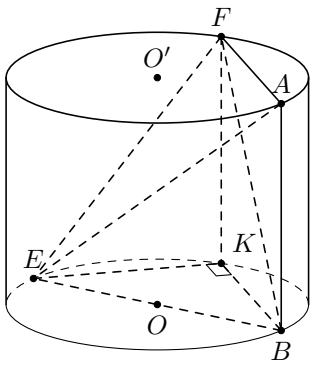


A. $\dfrac{16a^3}{3\pi^2}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3\pi^2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{8a^3}{\pi^2}$.

Lời giải.

Gọi O, O' là tâm các đường tròn đáy của hình trụ tạo thành khi cuốn mảnh bìa. Gọi R là bán kính đường tròn đáy, ta có

$$2\pi R = 4a \Rightarrow R = \frac{2a}{\pi}.$$



Vì E là trung điểm BC nên suy ra BE là đường kính của đường tròn đáy. Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm F trên mặt đáy là đường tròn tâm O, khi đó $\widehat{BKE} = 90^\circ$ và tứ giác $ABKF$ là hình chữ nhật.

Do $AF = a$, $AD = 4a$ nên cung $AF = \dfrac{1}{4}$ cung $AD = \dfrac{1}{4}$ chu vi đường tròn đáy, do đó $\widehat{AO'F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOK} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle BKE$ vuông cân tại K.

Từ đó ta có $EK = KB = \dfrac{BE}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\pi}$ và $EK \perp (ABF)$.

Vậy nên

$$\begin{aligned} V_{ABEF} &= V_{E.ABF} = \frac{1}{3} S_{ABF} \cdot EK \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AF \cdot EK \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{\pi} = \frac{8a^3}{3\pi^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Khi cắt hình nón chiều cao bằng 16 cm, đường kính đáy bằng 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

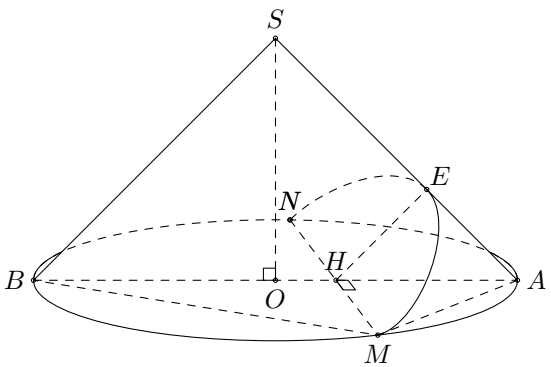
A. 170. **B.** 208. **C.** 294. **D.** 260.

Lời giải.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Với dây cung bất kỳ chứa đoạn MH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp MH$.

Trong tam giác SAB, kẻ $HE \parallel SB$, $E \in SA$ nên thiết diện là parabol nhận HE làm trục.



Đặt $AH = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABM có: $HM^2 = BH \cdot AH = x(24 - x)$.

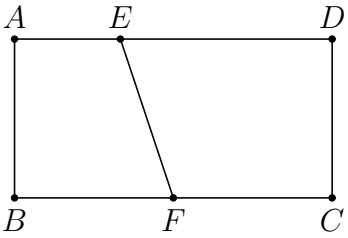
Trong tam giác SAB có: $\dfrac{HE}{BS} = \dfrac{AH}{AB} \Leftrightarrow HE = \dfrac{AH}{AB} \cdot BS = \dfrac{AH}{AB} \cdot \sqrt{SO^2 + OB^2} = \dfrac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích:

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3}MH\cdot HE = \frac{10}{9}\cdot\sqrt{24x^3-x^4} \\ &= \frac{10}{9}\sqrt{x\cdot x\cdot x(24-x)} \\ &= \frac{10}{9\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x\cdot x\cdot x\cdot(72-3x)} \\ &\le \frac{10}{9\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{x+x+x+(72-3x)}{4}\right)^4} \approx 207{,}8 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

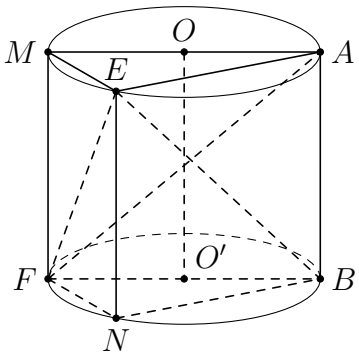
Dấu "=" xảy ra khi $x = 72-3x \Leftrightarrow x = 18$.
Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207{,}8$ cm^2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 87.
Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3$, $AD = 6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm của BC. Cuốn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.



A. $V = \frac{\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **C.** $V = \frac{2}{3\pi^2}$. **D.** $V = \frac{3\pi^3}{2}$.

Lời giải.



Vì $AD = 6$ nên suy ra chu vi đáy hình trụ là $2\pi r = 6 \Rightarrow r = \frac{3}{\pi}$.
Do F là trung điểm của BC nên BF là đường kính và $BF = \frac{6}{\pi}$.
Ta tính được $FE = \sqrt{10}$.
Dựng hình lăng trụ $MAE.FNB$ (như hình vẽ), đáy MEA là tam giác vuông tại E, suy ra $V_{AEBF} = \frac{1}{3}V_{MAE.FNB}$.
Ta có

$$AE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}2\pi r \Rightarrow \widehat{EOA} = \frac{1}{3}2\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Xét trong tam giác cân OEA có

$$EA = \sqrt{2OA^2 - 2OA^2\cos\frac{2\pi}{3}} = OA\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Suy ra $ME = \sqrt{\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)^2} = \frac{3}{\pi}$.
Khi đó

$$V_{MAE.FNB} = \left(\frac{1}{2}ME\cdot EA\right)AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{2\pi^2}.$$

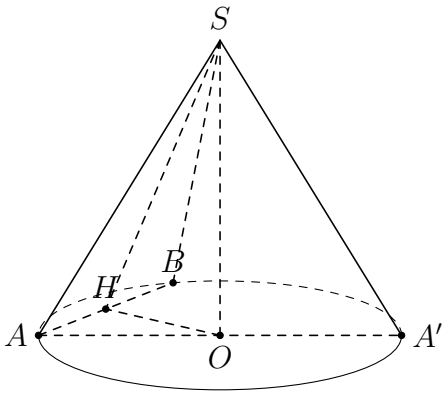
Vậy $V_{AEBF} = \frac{1}{3}V_{MAE.FNB} = V = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và chiều cao $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón này theo một thiết diện. Tính giá trị lớn nhất của thiết diện này.

A. $2a^2\sqrt{3}$. **B**. $a^2\sqrt{3}$. **C**. $2a^2$. **D**. $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Xét hình nón như hình vẽ.



Giả sử (P) đi qua đỉnh cắt hình nón theo một thiết diện là $\triangle SAB$ (theo hình vẽ). Ta có

$SA = SB = \sqrt{SO^2 + OA^2} = 2a$.

Do đó $\triangle SAA'$ là tam giác đều.

$S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \widehat{ASB}$.

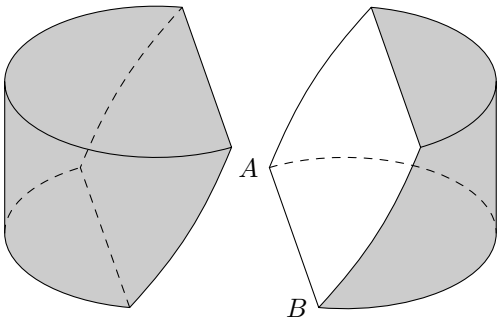
$S_{\triangle SAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \widehat{ASB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{ASB} = 90^\circ$.

Vậy $\max\left(S_{\triangle SAB}\right) = 2a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 89.

Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó lấy hai điểm A, B sao cho cung AB có số đo 120°. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua A, B và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Biết diện tích thiết diện thu được có dạng $S = a\pi + b\sqrt{3}$. Tính $P = a + b$.



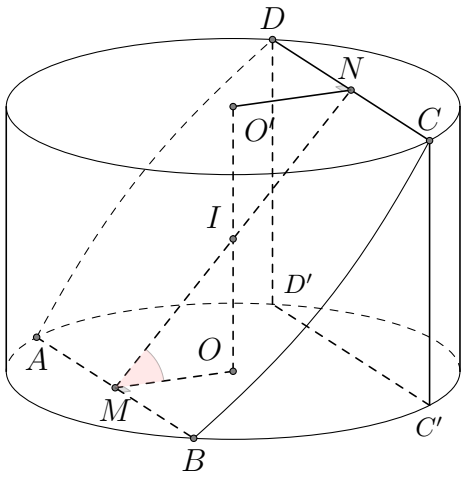
A. $P = 60$. **B**. $P = 30$. **C**. $P = 50$. **D**. $P = 45$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa thiết diện.

Gọi M là trung điểm AB; I là trung điểm OO'.

MI cắt đáy trên tại N; kẻ CD qua N, song song với AB thì ta được thiết diện được giới hạn bởi các đoạn thẳng AB, CD và các cung AD, BC như hình vẽ.



M là trung điểm AB thì $OM \perp AB$ nên góc giữa (α) và (ABO) là $\widehat{IMO}$.

Ta có $OM = OB \cdot \cos 60^\circ = 3 \Rightarrow MI = 5$ nên $\cos\left((\alpha), (ABO)\right) = \dfrac{3}{5}$.

Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu của C, D lên (ABO) thì $ABC'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ lên (ABO).

Ta có

$$S_{ABC'D'} = 2\left(S_{\triangle OAB} + S_{\text{quạt}OBC'}\right) = 2\left(\frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{6}\pi \cdot 36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi.$$

Suy ra $S_{ABCD} = \dfrac{S_{ABC'D'}}{\cos\left((\alpha), (ABO)\right)} = 30\sqrt{3} + 20\pi$.

Vậy $P = 20 + 30 = 50$.

Chọn đáp án C □

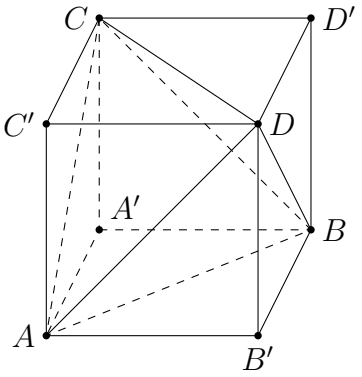
Câu 90. Cho hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và có hai đường kính AB, CD lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy. Biết AB vuông góc với CD và thể tích của khối tứ diện $A.BCD$ bằng 18.

Tính diện tích xung quanh hình trụ.

A. 24π. **B**. $18\pi\sqrt[3]{2}$. **C**. 72π. **D**. 48π.

Lời giải.

Dựng thêm hai đường kính vuông góc với các đường kính AB và CD.
Ta được hình hộp chữ nhật như hình bên $AA'BB'.C'CD'D$.
Theo giả thiết ta có chiều cao $AC' = AB = h$, gọi V là thể tích hình hộp.
Ta có $V = V_{DABB'} + V_{BCDD'} + V_{CABA'} + V_{ACDC'} + V_{ABCD}$.
$V_{DABB'} = V_{BCDD'} = V_{CABA'} = V_{ACDC'} = \dfrac{1}{3}AC' \cdot S_{CDC'} = \dfrac{1}{6}V$.
Khi đó $V = \dfrac{2}{3}V + V_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{1}{3}V = 18 \Rightarrow V = 54$.
Ta có $V = h \cdot S_{AA'BB'} = \dfrac{h^3}{2} \Rightarrow h^3 = 108 \Rightarrow h = 3\sqrt[3]{4}$.
Do đó diện tích xung quanh hình trụ $S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot r \cdot h = 18\pi\sqrt[3]{2}$.



Chọn đáp án (B) □

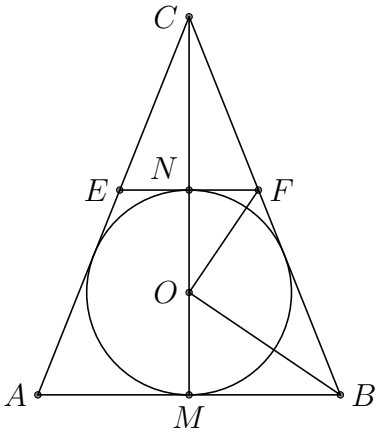
Câu 91. Một hình nón cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón thành 2 phần (N_1) và (N_2). Cho hình cầu nội tiếp (N_2) sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2). Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón (như hình vẽ).
Đặt $MB = x > 0$ và $\widehat{MBF} = \alpha$. Ta có

- ☑ $OM = MB \cdot \tan\widehat{MBO} = x \cdot \tan\dfrac{\alpha}{2}$;
- ☑ thể tích khối cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi OM^3 = \dfrac{4}{3}\pi x^3 \tan^3\dfrac{\alpha}{2}$;
- ☑ $\widehat{NFB} + \widehat{MBF} = 180^\circ$ (trong cùng phía)
  $\Rightarrow 2\widehat{NFO} + 2\widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NFO} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$;
- ☑ $NF = ON \cdot \cot\widehat{NFO} = x \cdot \tan\dfrac{\alpha}{2} \cdot \tan\dfrac{\alpha}{2} = x \cdot \tan^2\dfrac{\alpha}{2}$;
- ☑ $MN = 2OM = 2x\tan\dfrac{\alpha}{2}$;



- ☑ thể tích hình nón cụt (N_2) là

$$V_2 = \frac{\pi \cdot MN}{3}\left(MB^2 + NF^2 + MB \cdot NF\right) = \frac{2\pi x\tan\dfrac{\alpha}{2}}{3}\left(x^2 + x^2\tan^4\frac{\alpha}{2} + x^2\tan^2\frac{\alpha}{2}\right);$$

Ta có $V_2 = 2V_1 \Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha}{2} \cdot \left(1 + \tan^4\dfrac{\alpha}{2} + \tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = 4\tan^3\dfrac{\alpha}{2}$.
Đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$. Do $\alpha \in \left(0; \dfrac{pi}{2}\right)$ nên $t = \tan\dfrac{\alpha}{2} \in (0;1)$. Ta có phương trình

$$t \cdot (t^4 + t^2 + 1) = 4t^3 \Leftrightarrow t^4 + t^2 + 1 = 4t^2 \Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & \text{(loại vì } t \in (0;1)\text{)} \\ t^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

$t^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2} = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $MNPQ$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp M, N nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(MNPQ)$ tạo với đáy hình trụ góc $45°$. Tính thể tích khối lăng trụ.

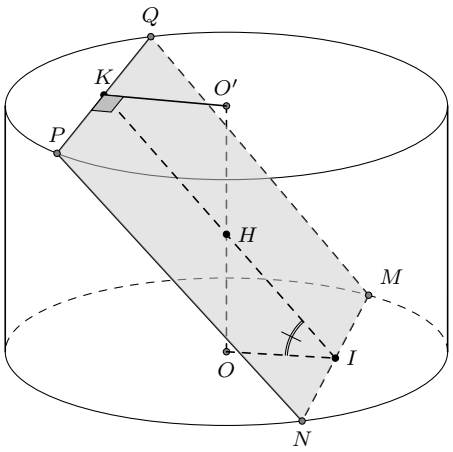
A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{16}\pi$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}\pi$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}\pi$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}\pi$.

Lời giải.

Theo giả thiết, suy ra H là trung điểm đoạn OO'.

Đặt $x = OH$. Trong tam giác HOI vuông tại O, ta có

$$\frac{OH}{IH} = \sin 45° \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow OO' = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



Lại có $OI = OH = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, suy ra bán kính của đường tròn đáy là $r = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{8}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}a.$

Do đó, thể tích khối lăng trụ là $V = OO' \cdot \pi \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}\pi.$

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a, BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm ID. Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $4\pi a^2$. **B.** $\dfrac{125\pi}{4}a^2$. **C.** $\dfrac{125\pi}{2}a^2$. **D.** $\dfrac{25\pi}{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của SB lên mặt đáy là SH nên $\widehat{SBH}$ là góc giữa SB và $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SBH} = 45°$.

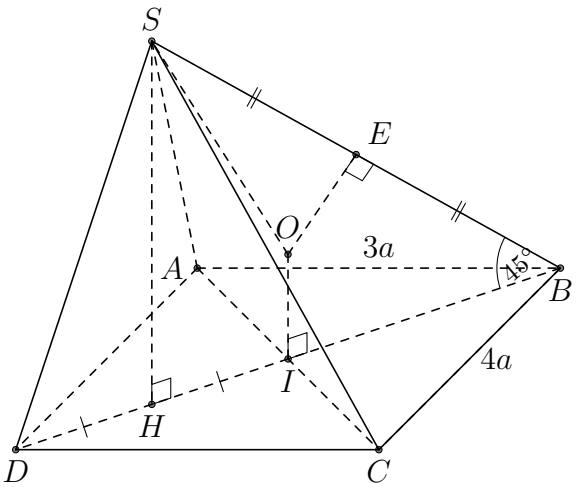
Trong mặt phẳng (SBD) dựng O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBD$.

Ta có $OI \parallel SH \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

Ta có $BD = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$

$\Rightarrow BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{15}{4}a.$

Tam giác SHB vuông cân tại H do $\widehat{SBH} = 45°$



$\Rightarrow SH = HB = \dfrac{15a}{4} \Rightarrow SD = \sqrt{SH^2 + DH^2} = \dfrac{5\sqrt{5}a}{2\sqrt{2}}.$

Trong tam giác SBD, ta có $2OS = \dfrac{SD}{\sin\widehat{SBD}} \Rightarrow OS = \dfrac{5\sqrt{5}a}{4}.$

Diện tích khối cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$:

$$S = 4\pi \left(\frac{5\sqrt{5}a}{4}\right)^2 = \frac{125\pi}{4}a^2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 94. Trong không gian $0xyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4); B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), có đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

A. -4. **B**. 8. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$; bán kính $R=3\sqrt{3}$.
Gọi bán kính của đường tròn (C) là r và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) là h.
Ta có: $r^2+h^2=R^2=27$.
Thể tích của khối nón có đỉnh I và đáy là (C) là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{r^2}{2}+h^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{r^4h^2}{4}} \Leftrightarrow 27 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{r^4h^2}{4}} \Leftrightarrow r^2h \leq 54$.
$\Rightarrow V \leq 18\pi$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} h=3 \\ r=3\sqrt{2} \end{cases}$.
Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;0;4)$; $\vec{n}=(a;b;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow 2a-4=0 \Leftrightarrow a=2$.
$\Rightarrow (\alpha)\colon 2x+by-z+c=0$.
Ta có: $A\in(\alpha) \Leftrightarrow c+4=0 \Leftrightarrow c=-4$.
$\Rightarrow (\alpha)\colon 2x+by-z-4=0$.
$\mathrm{d}\,(I;(\alpha))=h=3 \Leftrightarrow \dfrac{|-2b-5|}{\sqrt{b^2+5}}=3 \Leftrightarrow |2b+5|=3\sqrt{b^2+5} \Leftrightarrow 4b^2+20b+25=9\,(b^2+5) \Leftrightarrow b=2$.
$\Rightarrow a-b+c=2-2-4=-4$.

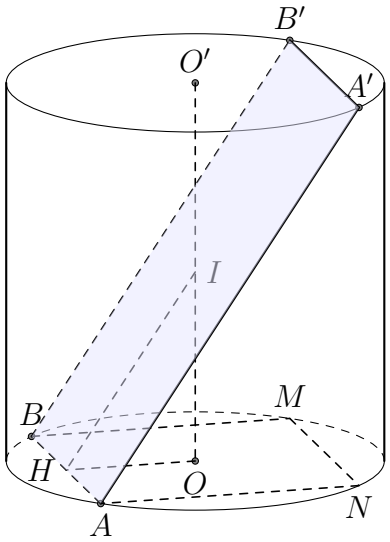
Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho khối trụ có chiều cao $h=16$ và hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' với bán kính $R=12$. Gọi I là trung điểm của OO' và AB là một dây cung của đường tròn (O) sao cho $AB=12\sqrt{3}$. Tính diện tích thiết diện của khối trụ với mặt phẳng (IAB).

A. $120\sqrt{3}+80\pi$. **B**. $48\pi+24\sqrt{3}$. **C**. $60\sqrt{3}+40\pi$. **D**. $120\sqrt{3}$.

Lời giải.

(IAB) cắt khối trụ theo thiết diện như hình vẽ.



Gọi α là góc giữa (IAB) và đáy; H là trung điểm của AB.

Ta có: $IH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6$.

$\Rightarrow IH = \sqrt{IO^2 + OH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ta có: $\cos\alpha = \cos\widehat{IHO} = \dfrac{OH}{IH} = \dfrac{6}{10}$.

Diện tích của thiết diện của khối trụ cắt bởi (IAB) là S.

Hình chiếu của S trên mặt đáy tâm O là hình giới hạn bởi đường tròn tâm O, bán kính 12 và hai đường thẳng AB và MN; gọi diện tích của hình này là S_1.

Khi đó, $S_1 = 4\displaystyle\int_0^6 \sqrt{144 - x^2}\mathrm{d}x = 4\left(18\sqrt{3} + 12\pi\right) = 72\sqrt{3} + 48\pi$.

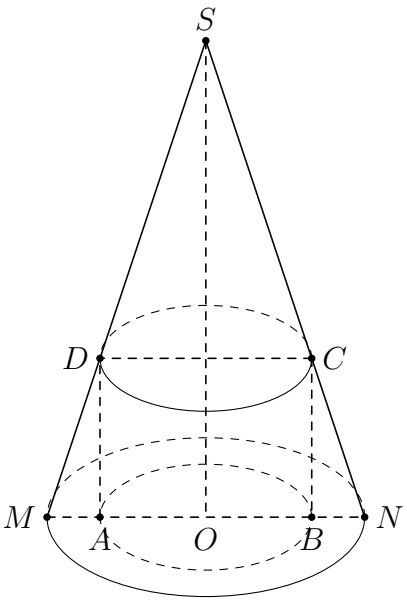
Ta có: $S_1 = S \cdot \cos\alpha \Rightarrow S = \dfrac{10}{6}\left(72\sqrt{3} + 48\pi\right) = 120\sqrt{3} + 80\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 96. Một hình nón có bán kính đáy bằng 2 và chiều cao bằng 4. Một mặt phẳng (P) song song với đáy và cắt hình nón theo một đường tròn. Khối trụ (H) có một đáy là đường tròn giao của (P) và hình nón và đáy còn lại nằm trên đáy của hình nón, trục của hình trụ (H) cũng là trục của hình nón. Thể tích của khối trụ (H) trong trường hợp thể tích đó lớn nhất là

A. $\dfrac{24}{13}\pi$. **B.** $\dfrac{64}{27}\pi$. **C.** $\dfrac{42}{13}\pi$. **D.** $\dfrac{32}{27}\pi$.

Lời giải.



Giả sử $r_t = x \cdot h_n = 2x$ $(0 < x < 1)$.

Khi đó $h_t = (1 - x)h_n = 4(1 - x)$.

Thể tích khối trụ (H) là $V = \pi r_t^2 \cdot h_t = \pi \cdot 4x^2 \cdot 4(1 - x) = 16\pi(x^2 - x^3)$.

Xét hàm số $y = x^2 - x^3$ trên khoảng $(0; 1)$.

Ta có $y' = 2x - 3x^2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

x	0		$\dfrac{2}{3}$		1
y'	0	$+$	0	$-$	$\vert$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{27}$	$\searrow$	0

Suy ra $\max V = \dfrac{64}{27}\pi$.

Chọn đáp án (B) □

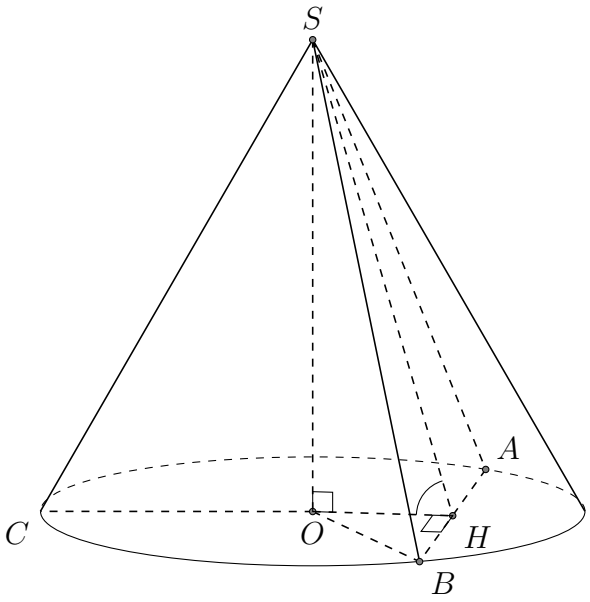
Câu 97. Cho hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc ở đỉnh bằng $90°$. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (P) và mặt đáy hình nón bằng $60°$. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành.

A. $S = \dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $S = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **C.** $S = \dfrac{8\sqrt{2}a^2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có tam giác SOC vuông cân ở O suy ra $OC = SO = a\sqrt{2}$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$, kết hợp với SO vuông góc với đáy suy ra $AB \perp (SOH)$, từ đó suy ra $\widehat{SHO} = 60°$.



Trong tam giác vuông SOH có

$$OH = SO\tan 30° = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60°} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông OHB có

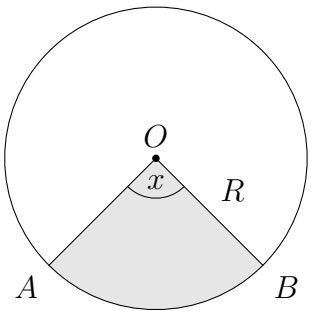
$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = 2a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

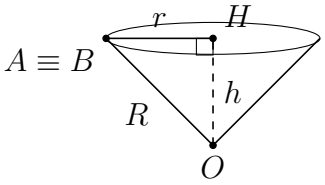
Từ đó ta có diện tích thiết diện $S_{\triangle SAB} = \dfrac{SH \cdot AB}{2} = SH \cdot BH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 98.

Bạn An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, An muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó An phải cắt bỏ hình quạt tròn OAB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất.





A. $x = \dfrac{\pi}{4}$. **B.** $x = \dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{3}$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của phễu.

Xét tam giác vuông OAH có $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, từ đó suy ra thể tích của phễu

$$V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}\sqrt{(R^2 - r^2)r^4}. \quad (1)$$

Nhận thấy $(R^2 - r^2)r^4 = 4(R^2 - r^2) \cdot \dfrac{r^2}{2} \cdot \dfrac{r^2}{2} \le 4\left(\dfrac{R^2 - r^2 + \dfrac{r^2}{2} + \dfrac{r^2}{2}}{3}\right)^3 = \dfrac{4R^6}{27}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra V lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{r^2}{2}=R^2-r^2\Leftrightarrow r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.
Theo giả thiết ta có chu vi đáy phễu bằng chiều dài cung $\overset{\frown}{AB}$ hay

$$Rx=2\pi r\Leftrightarrow x=\frac{2\pi r}{R}=\frac{2\pi\dfrac{R\sqrt{6}}{3}}{R}=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}.$$

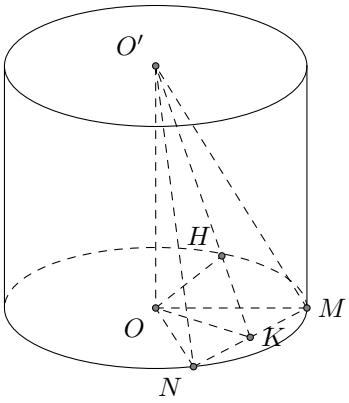
Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Cho hình trụ có trục OO', bán kính đáy r và chiều cao $h=\dfrac{3r}{2}$. Hai điểm M,N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho tam giác OMN đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng $(O'MN)$. Khi M,N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, tính diện tích S của mặt này.

A. $S=\dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$. **B.** $S=\dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$. **C.** $S=\dfrac{9\pi r^2}{32}$. **D.** $S=\dfrac{9\pi r^2}{16}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm MN. Khi đó $OK=\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{O'O^2}+\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{4}{9r^2}+\dfrac{4}{3r^2}=\dfrac{16}{9r^2}\Rightarrow OH=\dfrac{3r}{4}$.
Ta có $O'K^2=O'O^2+OK^2=3r^2$.
Trong tam giác $O'OK$ vuông tại O, đường cao OH ta có
$\dfrac{O'H}{O'K}=\dfrac{O'H\cdot O'K}{O'K^2}=\dfrac{O'O^2}{O'K^2}=\dfrac{3}{4}$. Từ đó suy ra bán kính đáy của hình nón do đoạn OH quay tạo thành là $r_1=\dfrac{3r}{4}$.
Vậy $S=\pi r_1 OH=\dfrac{9\pi r^2}{16}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại A,B. Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V. Giá trị nhỏ nhất của V bằng

A. 3π. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải.

Cách 1: Dùng đạo hàm.
Do d có hệ số góc âm, đi qua điểm $M(1;1)$ và cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại $A(a;0),B(0;b)$ nên $a,b>1$.
Khi đó ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$. Thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác OAB quanh trục Oy bằng

$$V=\frac{1}{3}\pi a^2 b=\frac{1}{3}\pi a^2 b=\frac{1}{3}\pi\frac{a^3}{a-1}.$$

Đặt $f(a)=\dfrac{a^3}{a-1}$ ta có $f'(a)=\dfrac{2a^3-3a^2}{(a-1)^2}$; $f'(a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\ (\text{loại})\\ a=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

a	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	

Vậy giá trị lớn nhất của $f(a)=\dfrac{a^3}{a-1}$ bằng $\dfrac{27}{4}$ khi $a=\dfrac{3}{2}$.

Khi đó thể tích lớn nhất bằng $V=\dfrac{9\pi}{4}$.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức.

Ta có $1=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4a^2b}}\Rightarrow a^2b\geqslant\dfrac{27}{4}$.

Suy ra $V=\dfrac{1}{3}\pi a^2b\geqslant\dfrac{9\pi}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{2a}=\dfrac{1}{b}\\ a+b=ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=3\end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. C	4. B	5. B	6. B	7. A	8. C	9. A	10. A
11. A	12. D	13. A	14. D	15. A	16. B	17. C	18. B	19. A	20. D
21. C	22. A	23. B	24. B	25. A	26. A	27. B	28. B	29. B	30. A
31. C	32. D	33. A	34. B	35. B	36. C	37. B	38. B	39. A	40. A
41. B	42. B	43. C	44. A	45. D	46. A	47. A	48. B	49. C	50. C
51. B	52. D	53. C	54. C	55. A	56. B	57. A	58. D	59. A	60. B
61. B	62. C	63. D	64. B	65. B	66. B	67. D	68. C	69. A	70. A
71. D	72. A	73. C	74. B	75. B	76. D	77. B	78. D	79. D	80. C
81. A	82. C	83. B	84. D	85. B	86. B	87. B	88. C	89. C	90. B
91. C	92. B	93. B	94. A	95. A	96. B	97. A	98. B	99. D	100. B

5 Bài toán thực tế

Câu 1. Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 70 cm. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. 40 cm. **B**. $10\sqrt{2}$ cm. **C**. $70\sqrt{2}$ cm. **D**. 35 cm.

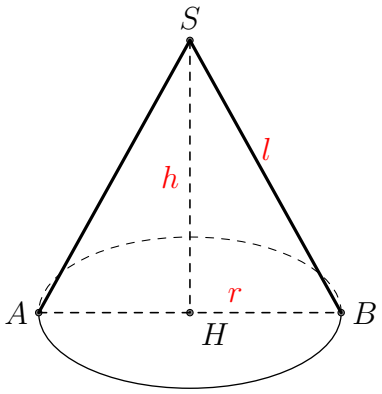
Lời giải.

Phương pháp:

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$.

Cách giải:



Miếng tôn hình tròn có diện tích: $\pi.70^2 = 4900\pi$ cm^2.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $r, h (r, h > 0)$.

Khi đó ta có $l = SA = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Suy ra diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp} = \pi r^2 + r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = 4900\pi &\Leftrightarrow r\sqrt{r^2 + h^2} = 4900 - r^2\\ &\Leftrightarrow r^2\left(r^2 + h^2\right) = 4900^2 - 2.4900r^2 + r^4\\ &\Leftrightarrow r^2 = \frac{4900^2}{h^2 + 9800}.\end{aligned}$$

Thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4900^2}{h^2 + 9800}h = \frac{4900^2\pi}{3} \cdot \frac{h}{h^2 + 9800}.$$

Suy ra V đạt max $\Leftrightarrow f(h) = \dfrac{h^2 + 9800}{h}$ đạt min.

Ta có: $f'(h) = \dfrac{2h^2 - h^2 - 9800}{h^2} = \dfrac{h^2 - 9800}{h^2}$.

$\Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow h^2 = 9800 \Leftrightarrow h = 70\sqrt{2}$ cm.

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{4900^2}{h^2 + 9800} = \dfrac{4900^2}{9800.2} = 1225$ cm.

$\Rightarrow r = \sqrt{1225} = 35$ cm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được

khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết rằng $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 36 dm^2. Tìm thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

A. 133,6 dm^3. **B**. 113,6 dm^3. **C**. 143,6 dm^3. **D**. 123,6 dm^3.

Lời giải.

Phương pháp:

Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = Sh$.

Cách giải:

Dựng hình lăng trụ $MP'NQ'.M'PN'Q$ (như hình vẽ).

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} V_{MNPQ} &= V_{MP'NQ'.M'PN'Q} - (V_{P.MNP'} + V_{Q.MNQ'} + V_{M.M'PQ} + V_{N.N'PQ}) \\ &= V_{MP'NQ'.N'PN'Q} - 4.V_{P.MNP'} \\ &= V_{MP'NQ'.M'PN'Q} - 4.\frac{1}{2}.V_{P.MQ'NP'} = V_{MP'NQ'.M'PN'Q} - 2V_{P.MQ'NP'} \\ &= V_{MP'NQ'.M'PN'Q} - 2.\frac{1}{3}.V_{MP'NQ'.PN'Q} \\ &= \frac{1}{3}V_{MP'NQ'.PN'Q'} \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{1}{3}V_{MP'NQ'.PN'Q} = 36\,\text{dm}^3 \Leftrightarrow V_{MP'NQ'.PN'Q} = 108\,\text{dm}^3$.

Thể tích của lượng đó bị cắt bỏ là: $54\pi - 36 \approx 133,6$ dm^3.

Do $MN \perp PQ, PQ \parallel P'Q'$ nên

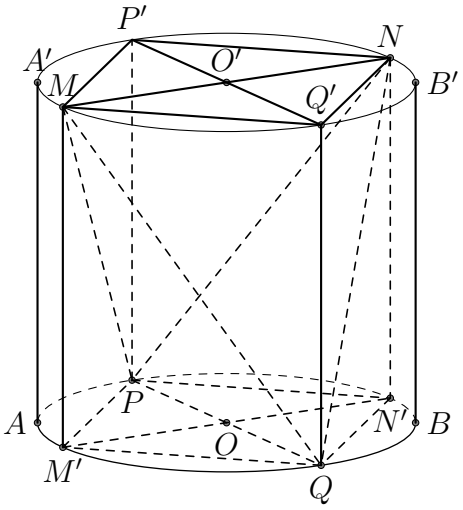
$MN \perp P'Q' \Rightarrow MP'NQ'$ là hình vuông.

Ta có

$$MN = 60cm \Rightarrow \begin{cases} MQ = \dfrac{60}{\sqrt{2}} = 30\sqrt{2}\,\text{cm} = 3\sqrt{2}\,\text{dm} \\ OM = \dfrac{60}{2} = 30\,\text{cm} = 3\,\text{dm} \end{cases}$$

Suy ra $S_{MP'NQ'} = (3\sqrt{2})^2 = 18$ dm^2.

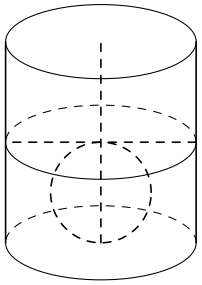
$V_{MP'NQ'.PN'Q} = S_{MP'NQ'}.h \Rightarrow 18h = 108 \Leftrightarrow h = 6$ dm.



Chọn đáp án A □

Câu 3.

Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính 2,7 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là



A. 5,4 cm. **B**. 5,7 cm. **C**. 5,6 cm. **D**. 5,5 cm.

Lời giải.

Gọi $R = 2{,}7$ cm là bán kính của viên bi.

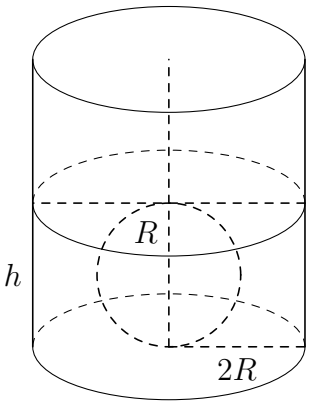
Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là $V_1 = \pi \cdot (2R)^2 \cdot 4{,}5 = 18\pi R^2$.

Thể tích viên bi là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi là $V = V_1 + V_2 = 2\pi R^2 \left(9 + \dfrac{2}{3}R\right)$.

Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.



Mà $V = \pi(2R)^2 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi(2R)^2} = \dfrac{9 + \dfrac{2}{3}R}{2} = 5{,}4$ (cm).

Chọn đáp án A □

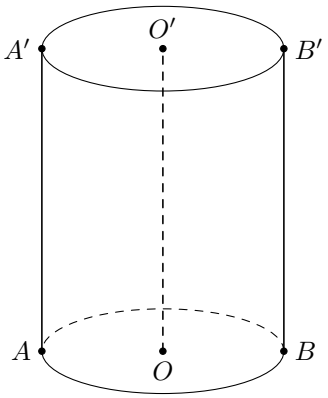
Câu 4. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp ít nhất (diện tích toàn phần của lon nhỏ nhất). Bán kính đáy của vỏ lon là bao nhiêu khi muốn thể tích của lon là 314 cm^3.

A. $r = \sqrt[3]{\dfrac{314}{4\pi}}$ cm. **B**. $r = 942\sqrt[3]{2\pi}$ cm. **C**. $r = \sqrt[3]{\dfrac{314}{2\pi}}$ cm. **D**. $r = \sqrt[3]{\dfrac{314}{\pi}}$ cm.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của vỏ lon là x (cm), với $x > 0$.

Theo đề bài, thể tích của lon là 314 cm^3 nên chiều cao của lon là $h = \dfrac{314}{\pi x^2}$.



Diện tích toàn phần của lon

$$S_{\text{toàn phần}} = 2S_{\text{đáy}} + S_{\text{xung quanh}} = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi\left(x^2 + \frac{314}{\pi x}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$x^2 + \frac{314}{2\pi x} + \frac{314}{2\pi x} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{314}{2\pi}\right)^2}$$

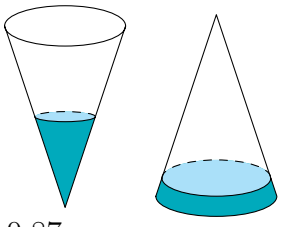
$$\Rightarrow S_{\text{toàn phần}} \geq 2\pi \cdot 3\sqrt[3]{\left(\frac{314}{2\pi}\right)^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \dfrac{314}{2\pi x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{314}{2\pi}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5.

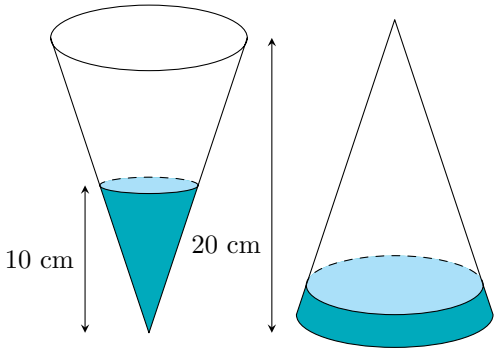
Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 10 cm. Nếu bịt kín miệng phễu và lật ngược phễu lên thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng nhất với giá trị nào sau đây.



A. 1,07 cm. **B**. 10 cm. **C**. 9,35 cm. **D**. 0,87 cm.

Lời giải.

Gọi r_1, h_1, V_1 lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi phần chứa nước lúc ban đầu; r, h, V lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi cái phễu; h_2 là chiều cao mực nước sau khi lộn ngược phễu. Theo tính chất tam giác đồng dạng ta có



$$\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\left(\frac{h_1}{h}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

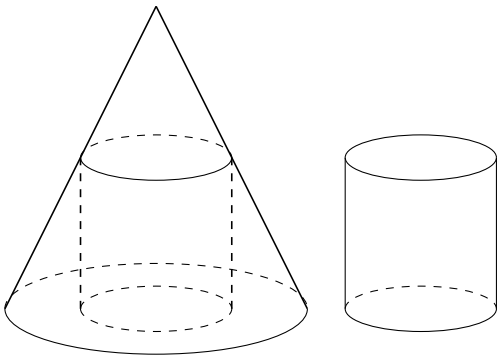
Sau khi lộn ngược phễu, tỉ số thể tích giữa phần không gian trong phễu không chứa nước và thể tích phễu bằng

$$1-\frac{1}{8}=\frac{(h-h_2)^3}{h^3}\Leftrightarrow\frac{7}{8}=\frac{(20-h_2)^3}{20^3}\Leftrightarrow 20-h_2=10\sqrt[3]{7}\Leftrightarrow h_2=20-10\sqrt[3]{7}\approx 0{,}87.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6.

Một khúc gỗ có dạng khối nón có bán kính đáy $r=30$ cm, chiều cao $h=120$ cm. Anh thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng khối trụ như hình vẽ. Tính thể tích lớn nhất V của khúc gỗ dạng khối trụ có thể chế tác được.



A. $V=0,16\pi$ m^3. **B.** $V=0,0246\pi$ m^3.

C. $V=0,36\pi$ m^3. **D.** $V=0,016\pi$ m^3.

Lời giải.

Ta có $AH=120$ cm, $BH=30$ cm.

Đặt $NH=x$ $(0<x<30)$, $MN=y$, $BN=30-x$.

Vì $MN\parallel AH$

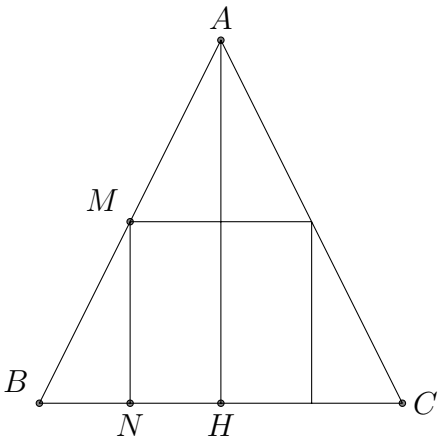
nên $\dfrac{BN}{BH}=\dfrac{MN}{AH}\Leftrightarrow\dfrac{30-x}{30}=\dfrac{y}{120}\Leftrightarrow y=4(30-x)$.

Gọi V là thể tích khối trụ. Khi đó

$V=\pi\cdot NH^2\cdot MN=\pi x^2y=4\pi x^2(30-x)=4\pi(30x^2-x^3)$.

Xét hàm số $f(x)=30x^2-x^3$ với $0<x<30$.

$f'(x)=60x-3x^2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=20$.



Bảng biến thiên của $f(x)$

x	0		20		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	4000	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra V lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;30)$.

Vậy $V_{\max}=4\pi\cdot 4000=16000\pi$ cm$^3=0,016\pi$ m^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Một bồn nước inox được thiết kế có dạng hình trụ (có nắp) đựng được 10 m^3 nước. Tìm bán kính r của đáy bồn nước, biết lượng inox được sử dụng để làm bồn nước là ít nhất (bỏ qua độ dày của bồn).

A. $r = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2\pi}}$ m . **B.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}$ m . **C.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ m . **D.** $r = \sqrt[3]{5\pi}$ m .

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của bồn nước.

Thể tích bồn nước hình trụ là $V = \pi r^2 h = 10 \Leftrightarrow h = \dfrac{10}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của bồn nước là $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{10}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{20}{r}$.

Xét $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{20}{r}$ với $r > 0$.

$\Rightarrow f'(r) = 4\pi r - \dfrac{20}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 20}{r^2}$.

Ta có: $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 5 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}$.

r	0		$r = \sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}$		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

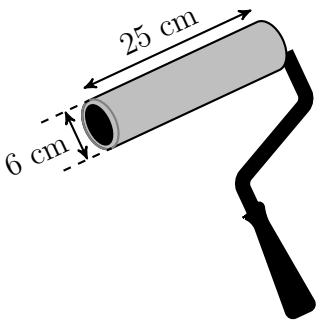
Vậy lượng inox làm bồn nước ít nhất khi và chỉ khi $f(r)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8.

Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính cả đường tròn đáy là 6 cm, chiều dài lăn là 25 cm. Sau khi lăn trọn 10 vòng không đè lên nhau thì trục lăn phủ lên bức tường phẳng một diện tích là

A. 1500π cm^2. **B.** 150π cm^2. **C.** 3000π cm^2. **D.** 300π cm^2.



Lời giải.

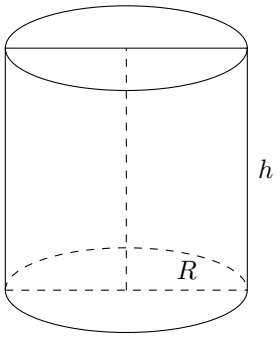
Diện tích xung quanh của mặt trụ của cái trục lăn sơn là $S = 150\pi$. Do đó diện tích cần tính bằng 1500π.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là 2π m^3. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R=2$ m, $h=\dfrac{1}{2}$ m. **B.** $R=4$ m, $h=\dfrac{1}{5}$ m. **C.** $R=\dfrac{1}{2}$ m, $h=8$ m. **D.** $R=1$ m, $h=2$ m.

Lời giải.



Từ giả thiết ta có: $V=\pi R^2h=2\pi \Rightarrow h=\dfrac{2}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi\left(R^2+\dfrac{2}{R}\right)$.

Xét hàm số $f(R)=R^2+\dfrac{2}{R}$ với $R\in(0;+\infty)$. Ta có:

$f'(R)=2R-\dfrac{2}{R^2}=\dfrac{2\left(R^3-1\right)}{R^2}$; $f'(R)=0\Leftrightarrow R=1$.

Bảng biến thiên

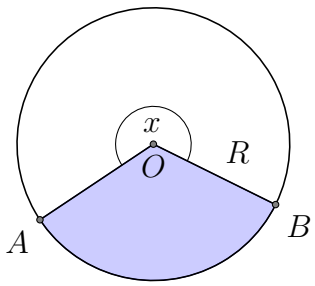
R	0		1		$+\infty$
$f'(R)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(R)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

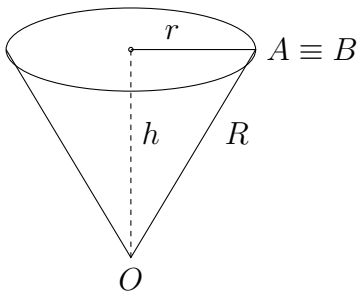
Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R=1\Rightarrow h=2$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R=1\,\text{m}, h=2\,\text{m}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Bạn A có một tấm bìa hình tròn (như hình vẽ), bạn ấy muốn dùng tấm bìa đó tạo thành một cái phễu hình nón, vì vậy bạn phải cắt bỏ phần quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm của hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm giá trị của x để thể tích phễu lớn nhất.





A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\left(6-2\sqrt{6}\right)\pi}{3}$.

Lời giải.

Độ dài cung tròn AB dùng làm phễu là $Rx=2\pi r\Leftrightarrow r=\dfrac{Rx}{2\pi}$;

$h=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

Thể tích phễu $V=f(x)=\dfrac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ với $x\in(0;2\pi)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\cdot\dfrac{x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 8\pi^2-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	$f\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)$	↘	

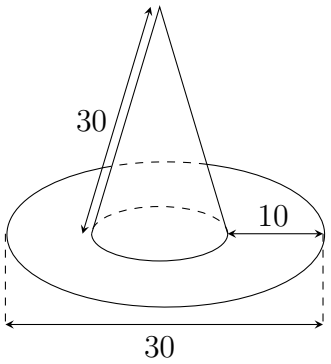
Giá trị của $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ thì thể tích phễu lớn nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 11.

Tính diện tích vải cần để may một cái mũ (có vành) có hình dạng và kích thước được cho bởi hình vẽ bên, giả sử rằng đường may không đáng kể.

A. $S=400\pi$. **B**. $S=175\pi$. **C**. $S=350\pi$. **D**. $S=375\pi$.



Lời giải.

Phần vải cần để may có diện tích là $S=S_{xq\text{ nón}}+S_{\text{vành khăn}}$.

Hình nón có bán kính đáy là $r=15-10=5$, suy ra $S_{xq\text{ nón}}=\pi r\ell=150\pi$.

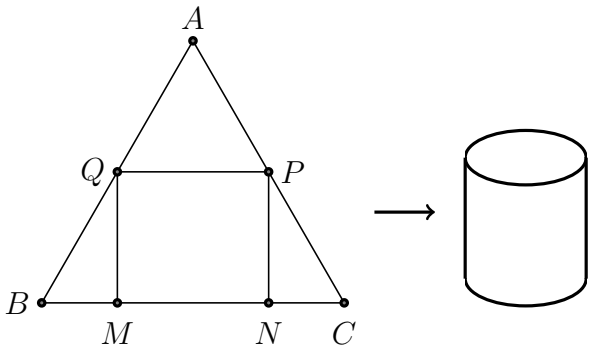
$S_{\text{vành khăn}}=\pi\cdot 15^2-\pi\cdot 5^2=200\pi$.

Vậy diện tích vải cần dùng là $S=350\pi$.

Chọn đáp án C □

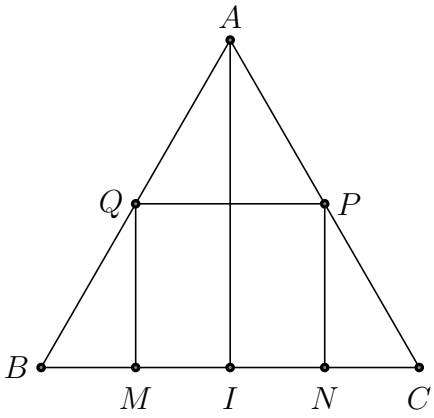
Câu 12.

Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 (cm). Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M,N thuộc cạnh BC; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là



A. $\dfrac{91125}{4\pi}$ (cm^3). **B.** $\dfrac{91125}{2\pi}$ (cm^3). **C.** $\dfrac{13500\sqrt{3}}{\pi}$ (cm^3). **D.** $\dfrac{108000\sqrt{3}}{\pi}$ (cm^3).

Lời giải.



Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN. Đặt $MN = x, (0 < x < 90)$.

Ta có $\dfrac{MQ}{AI} = \dfrac{BM}{BI} \Leftrightarrow MQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(90 - x)$; gọi R là bán kính của hình trụ $\Rightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$.

Thể tích khối trụ là

$V = \pi \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}(90 - x) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3 + 90x^2)$.

Xét $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3 + 90x^2)$ với $(0 < x < 90)$.

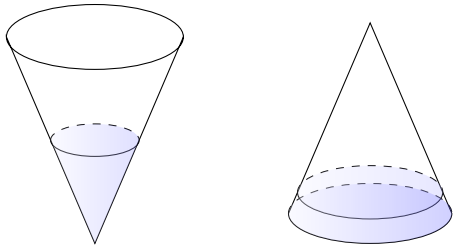
$f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-3x^2 + 180x),\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 60. \end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{x\in(0;90)} f(x) = f(60) = \dfrac{13500\sqrt{3}}{\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13.

Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 10 cm (hình trái). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình phải) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?



A. 0,87 cm. **B.** 10 cm. **C.** 1,07 cm. **D.** 1,35 cm.

Lời giải.

Ta có 2 hình nón có đỉnh và trục trùng nhau thì $\dfrac{V}{V'} = \left(\dfrac{R}{R'}\right)^3 = \left(\dfrac{h}{h'}\right)^3$.

Đặt x cm là chiều cao của cột nước trong hình bên phải.

Áp dụng vào hình bên trái ta có $\dfrac{V_{\text{nước}}}{V_{\text{phễu}}} = \left(\dfrac{h_{\text{nước}}}{h_{\text{phễu}}}\right)^3 = \left(\dfrac{10}{20}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

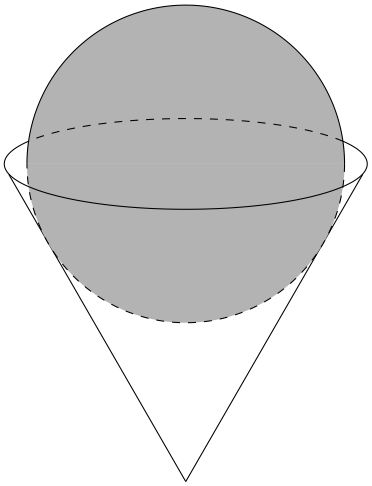
Áp dụng vào hình bên phải ta có $\dfrac{V_{\text{nước}}}{V_{\text{phễu}}} = 1 - \left(\dfrac{20 - x}{20}\right)^3$.

Vậy $1 - \left(\dfrac{20 - x}{20}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = 20 - 10\sqrt[3]{7} \approx 0{,}87$ cm.

Chọn đáp án A □

Câu 14.

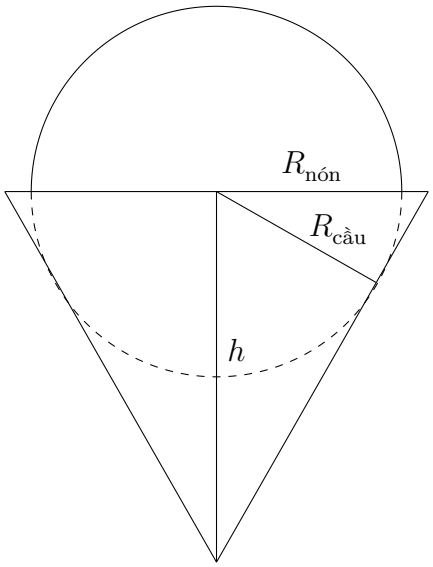
Một bình đựng đầy nước có dạng hình nón (không có đáy). Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là 18π (dm^3). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình dưới đây). Tính thể tích nước còn lại trong bình.



A. 12π (dm^3). **B**. 4π (dm^3).
C. 6π (dm^3). **D**. 24π (dm^3).

Lời giải.

Gọi chiều cao khối nón, bán kính đáy của khối nón và bán kính khối cầu lần lượt là $h, R_{\text{nón}}, R_{\text{cầu}}$.



Thể tích nước tràn ra chính là thể tích của nửa khối cầu hay suy ra thể tích cả khối cầu là 36π (dm^3).

Ta có $V = \dfrac{4}{3}\pi R_{\text{cầu}}^3 = 36\pi \Rightarrow R_{\text{cầu}} = 3 \Rightarrow h = 6$ (dm).

Ta có: $\dfrac{1}{R_{\text{cầu}}^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{R_{\text{nón}}^2} \Rightarrow R_{\text{nón}} = 2\sqrt{3}$ (dm).

Suy ra $V_{\text{nón}} = 24\pi \Rightarrow V_{\text{còn lại}} = V_{\text{nón}} - \dfrac{V_{\text{cầu}}}{2} = 6\pi$ (dm^3).

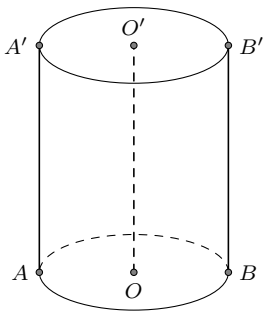
Chọn đáp án C □

Câu 15. Một nhà máy muốn làm một cái bồn nước hình trụ tròn xoay có tất cả vỏ được làm bằng inox. Bồn cao 10 mét, đường kính đáy là 6 mét. Tính gần đúng diện tích inox cần mua để làm vỏ một chiếc bồn như trên (coi như phần inox thừa trong khi làm là không đáng kể).

A. 245,1 m^2. **B**. 603,2 m^2. **C**. 414,7 m^2. **D**. 490,1 m^2.

Lời giải.

Diện tích cần mua để làm bồn chính là diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 + 2\pi \cdot 3^2 \approx 245{,}1$ m^2.



Chọn đáp án A □

Câu 16. Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng 4,2 m. Trong số các cây đó có 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, 6 cây cột còn lại phân bố đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ nhà thuê nhân công để sơn các cây cột bằng loại sơn giả đá, biết giá thuê là 380000 đồng/1m^2 (kể cả vật liệu sơn và nhân công thi

công). Hỏi người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)? (lấy $\pi = 3{,}14159$).

A. $\approx 11.833.000$. **B**. $\approx 12.521.000$. **C**. $\approx 10.400.000$. **D**. $\approx 15.642.000$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của 2 cây cột trước đại sảnh là $S_1 = 2(2\pi r_1 h) = 2 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 4{,}2 = \dfrac{84\pi}{25}$ (m^2).

Diện tích xung quanh của 6 cây cột còn lại là $S_2 = 6(2\pi r_2 h) = 6 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{13}{100} \cdot 4{,}2 = \dfrac{819\pi}{125}$ (m^2).

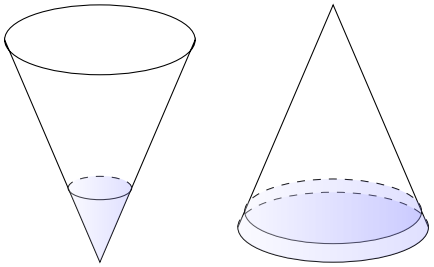
Diện tích xung quanh của 8 cây cột là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{1239\pi}{125}$ (m^2).

Số tiền ít nhất để sơn hết các cây cột là $S \cdot 380000 = \dfrac{1239\pi}{125} \cdot 380000 = 11832997{,}23 \approx 11.833.000$

Chọn đáp án A □

Câu 17.

Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 cm.



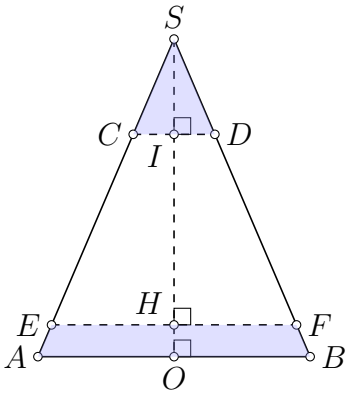
A. $0,5$ cm. **B**. $0,3$ cm. **C**. $0,188$ cm. **D**. $0,216$ cm.

Lời giải.

Giả sử phễu nước là hình nón (N_1) đỉnh S, đáy là đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$.

Khi đổ nước vào phễu khối nước trong phễu là khối nón (N_2) đỉnh S, đáy là hình tròn (I) đường kính CD. Phần còn lại là khối nón cụt (NC_1) đáy lớn là đường tròn (O), đáy nhỏ là đường tròn (I).

Khi lộn ngược phễu khối nước trong phễu là khối nón cụt (NC_2) đáy lớn là hình tròn (O), đáy nhỏ là hình tròn (H) đường kính EF. Phần còn lại là khối nón (N_3) đỉnh S đáy là đường tròn (H).



Vì $V_{N_2} = V_{NC_2}$ nên $V_{N_3} = V_{NC_1} = V_{N_1} - V_{N_2} = 5\pi R^2 - \dfrac{5\pi R^2}{27} = \dfrac{130\pi R^2}{27}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{N_3}}{V_{N_1}} = \dfrac{26}{27} \Rightarrow \dfrac{SH}{SO} = \sqrt[3]{\dfrac{26}{27}} \Rightarrow HO = \left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{26}{27}}\right) \cdot 15 \approx 0{,}1875.$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Khi thiết kế vỏ lon sữa hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí làm vỏ lon nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ là V mà diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính R của đường tròn đáy khối trụ bằng?

A. $\sqrt{\dfrac{V}{\pi}}$. **B**. $\sqrt{\dfrac{V}{2\pi}}$. **C**. $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **D**. $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Lời giải.

Thể tích lon sữa là $V = \pi R^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Diện tích toàn phần lon sữa là $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2$.

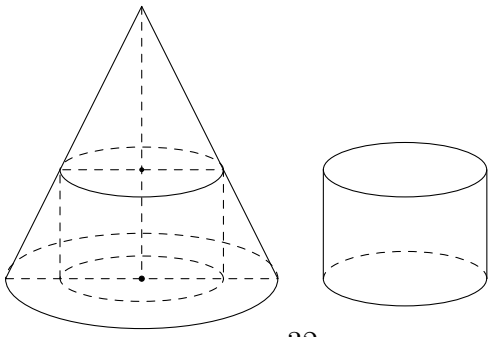
Ta có $S' = -\dfrac{2V}{R} + 4\pi R$, $S' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19.

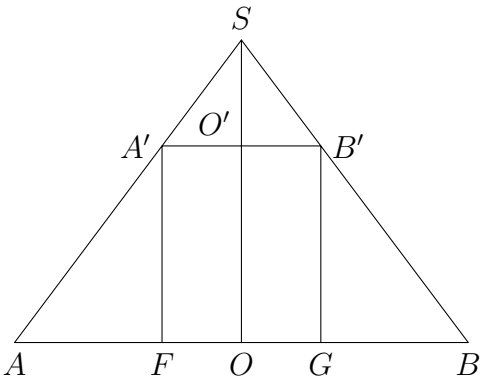
Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2$m, chiều cao $h = 6$m. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



A. $V = \dfrac{32\pi}{9}\text{m}^3$. **B.** $V = \dfrac{32}{9}\text{m}^3$. **C.** $V = \dfrac{32\pi}{3}\text{m}^3$. **D.** $V = \dfrac{32\pi}{9}\text{m}^3$.

Lời giải.

Giả sử cắt nón bởi mặt phẳng đi qua trục nón ta được thiết diện là tam giác như hình vẽ



Đặt $SO' = x$, $(0 < x < 6) \Rightarrow OO' = 6 - x$.

Do $A'B' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{A'O'}{AO} = \dfrac{SO'}{SO} \Rightarrow A'O' = \dfrac{SO' \cdot AO}{SO} = \dfrac{x \cdot 2}{6} = \dfrac{x}{3}$.

$V_{\text{trụ}} = \pi \cdot A'O'^2 \cdot OO' = \pi(6-x)\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi}{18}(12-2x)\cdot x \cdot x \leqslant \dfrac{\pi}{18}\left(\dfrac{(12-2x)+x+x}{3}\right)^3 = \dfrac{32\pi}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 4$m.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột hình trụ, tất cả đều có chiều cao bằng 4,2 m. Trong số các cây đó có 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, 6 cây cột còn lại phân bố đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ nhà thuê công nhân để sơn các cây cột bằng loại sơn giả đá, biết giá thuê là 380.000 đồng/m^2 (kể cả vật liệu sơn và phần thi công). Hỏi người chủ phải trả chi phí ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)?

A. $\approx 12.521.000$. **B.** $\approx 15.642.000$. **C.** $\approx 10.400.000$. **D.** $\approx 11.833.000$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$. Ta có:

- ☑ 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm nên có bán kính bằng 20 cm = 0,2 m.
- ☑ 6 cây ở hai bên đại sảnh có đường kính bằng 26 cm nên có bán kính bằng 13 cm = 0,13 m.

Tổng diện tích xung quanh của 8 cây cột hình trụ này là

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4{,}2) + 6 \cdot (2\pi \cdot 0{,}13 \cdot 4{,}2) \\ &= 9{,}912\pi \, (\text{m}^2). \end{aligned}$$

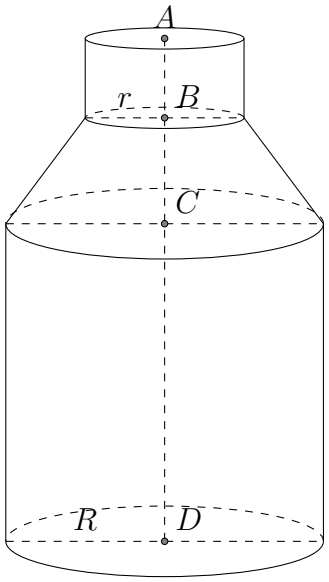
Chi phí ít nhất để sơn hết các cây cột nhà đó là

$$9{,}912\pi \cdot 380000 \approx 11.833.000 \, (\text{đồng}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 21.

Ông An đặt hàng cho một cơ sở sản xuất chai lọ thủy tinh chất lượng cao X để làm loại chai nước có kích thước phần không gian bên trong của chai như hình bên, có bán kính đáy $R = 5$ cm, bán kính cổ chai $r = 2$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 16$ cm. Tính thể tích V phần không gian bên trong chai nước.



A. $V = 490\pi$ cm^3. **B**. $V = 412\pi$ cm^3.

C. $V = 464\pi$ cm^3. **D**. $V = 494\pi$ cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối trụ có hai hình tròn đáy là hai hình tròn tâm (C) và (D) là:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot CD = \pi 5^2 \cdot 16 = 400\pi \, (\text{cm}^3).$$

Thể tích khối trụ có hai hình tròn đáy là hai hình tròn tâm (A) và (B) là:

$$V_2 = \pi r^2 \cdot AB = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi \, (\text{cm}^3).$$

Thể tích khối nón cụt có hai hình tròn đáy là hai hình tròn tâm (B) và (C) là

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{BB'} + B'\right) \\ &= \frac{BC}{3}\left(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right) \\ &= \frac{6}{3}\left(\pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2\right) = 78\pi \, (\text{cm}^3). \end{aligned}$$

Thể tích V phần không gian bên trong chai nước là:

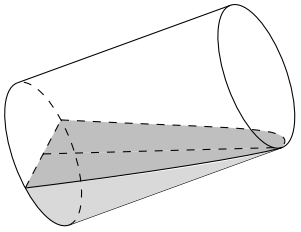
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 400\pi + 12\pi + 78\pi = 490\pi \, (\text{cm}^3).$$

Chọn đáp án A □

Câu 22.

Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy 6 cm, chiều cao 15 cm chứa đầy nước. Nghiêng cốc cho nước chảy từ từ ra ngoài cho đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy. Khi đó diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng

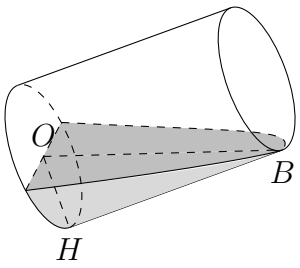
A. $9\sqrt{26}\pi$ cm^2. **B**. $\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{2}$ cm^2. **C**. $\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{5}$ cm^2. **D**. $\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{10}$ cm^2.



Lời giải.

Cách 1:

Ta có $OH = 3$, $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = 3\sqrt{26}$,
$\cos\widehat{HOB} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.



Hình chiếu vuông góc của mặt nước trong cốc lên mặt đáy cốc là nửa hình tròn có đường kính bằng 6 cm. Do đó:

$$\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = S \cdot \cos\widehat{HOB} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2}{\frac{1}{\sqrt{26}}} = \frac{9\pi\sqrt{26}}{2}.$$

Vậy diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng $\dfrac{9\pi\sqrt{26}}{2}$ cm^2.

Cách 2:

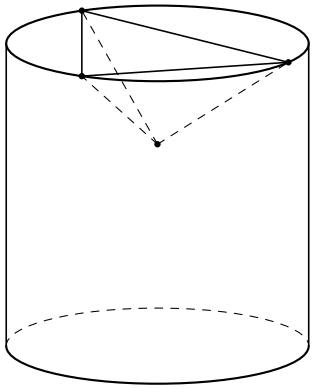
Ta có: diện tích S của bề mặt nước trong cốc bằng một nửa diện tích elip có hai trục là $2b = 6$ cm và $2a = 2\sqrt{15^2 + 3^2} = 6\sqrt{26}$ cm.
Suy ra $S = \dfrac{1}{2}\pi ab = \dfrac{1}{2}\pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{26} = \dfrac{9\pi\sqrt{26}}{2}$ cm^2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23.

Có một cái bể hình trụ cao 10 dm với bán kính đáy 4 dm chứa đầy nước bị một thùng gỗ hình lập phương đóng kín rơi vào làm cho một lượng nước V tràn ra. Biết rằng cạnh thùng gỗ là 8 dm và khi nó rơi vào miệng bể, một đường chéo dài nhất của nó vuông góc với mặt bể, ba cạnh của thùng chạm vào thành của bể như hình vẽ. Tính V.

A. $6\sqrt{6}$. **B**. $10\sqrt{6}$. **C**. $5\sqrt{6}$. **D**. $8\sqrt{6}$.



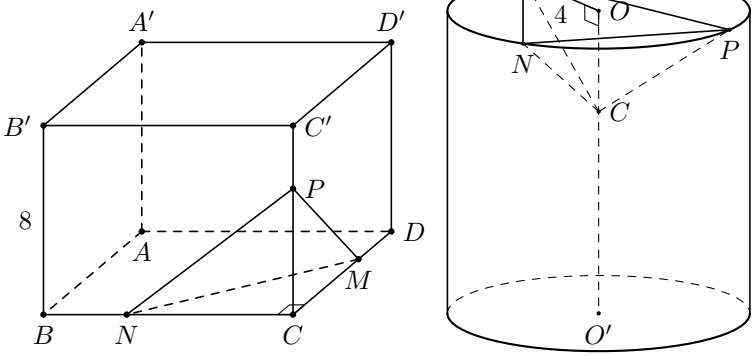
Lời giải.

Gọi khối chóp có thể tích V cần tìm là $C.MNP$ như hình vẽ.

Theo giả thiết đường chéo dài nhất của hình lập phương (giả sử đường chéo $A'C$) vuông góc với mặt bể nên khối chóp $C.MNP$ là khối chóp đều và O là tâm tam giác đều MNP.

Giả sử $MN = x > 0$.

Vì $\triangle MNP$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R = 4$ nên $\dfrac{x}{\sin 60^\circ} = 2R \Leftrightarrow x = 2 \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.



Vì $\triangle CMN$ vuông cân tại C nên $2CM^2 = MN^2 \Rightarrow CM = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow CM = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$.

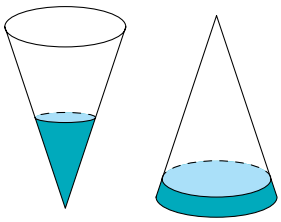
Xét tam giác OMC vuông tại $O \Rightarrow OC = \sqrt{CM^2 - OM^2} = \sqrt{24 - 16} = 2\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $C.MNP$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle MNP} \cdot CO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24.

Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 10 cm. Nếu bịt kín miệng phễu và lật ngược phễu lên thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng nhất với giá trị nào sau đây.

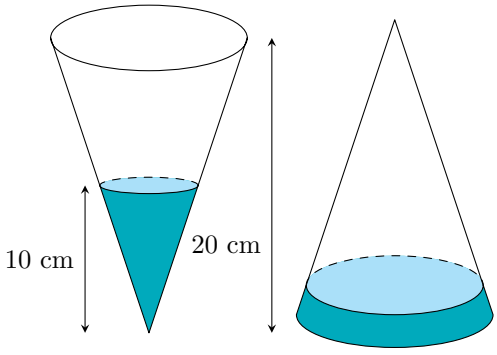


A. 1,07 cm. **B**. 10 cm. **C**. 9,35 cm. **D**. 0,87 cm.

Lời giải.

Gọi r_1, h_1, V_1 lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi phần chứa nước lúc ban đầu; r, h, V lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi cái phễu; h_2 là chiều cao mực nước sau khi lộn ngược phễu. Theo tính chất tam giác đồng dạng ta có

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

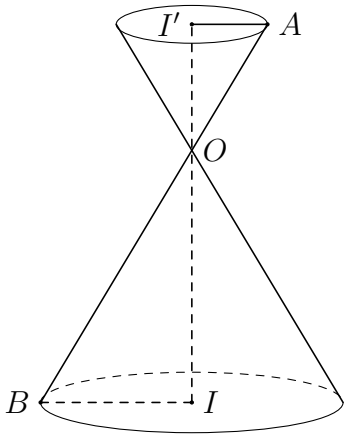


Sau khi lộn ngược phễu, tỉ số thể tích giữa phần không gian trong phễu không chứa nước và thể tích phễu bằng

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{(h - h_2)^3}{h^3} \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \frac{(20 - h_2)^3}{20^3} \Leftrightarrow 20 - h_2 = 10\sqrt[3]{7} \Leftrightarrow h_2 = 20 - 10\sqrt[3]{7} \approx 0{,}8706.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho một đồng hồ cát như hình bên dưới (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kì của hình nón tạo với đáy một góc 60°.



Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và tổng thể tích của đồng hồ là 1000π cm^3. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ số thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{64}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{27}$. **D.** $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi r, h_1, V_1 là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón ở bên trên (lượng cát chiếm chỗ).
và R, h_2, V_2 là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón ở bên dưới.
Ta có $h_1 = r\sqrt{3}$ và $h_2 = R\sqrt{3}$.

Theo giả thiết $\begin{cases} r\sqrt{3} + R\sqrt{3} = 30 \\ V_1 + V_2 = 1000\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r + R = 10\sqrt{3} \\ r^3 + R^3 = 1000\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \\ R = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{1}{3}r\sqrt{3}\cdot\pi r^2}{\dfrac{1}{3}R\sqrt{3}\cdot\pi R^2} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Công ty của ông Bình dự định đóng một thùng phi hình trụ (có đáy dưới và nắp đậy phía trên) bằng thép không rỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho 1 m^2 thép không rỉ là 350000 đ. Với chi phí không quá 6594000 đ, hỏi công ty ông Bình có thể có được một thùng phi đựng được tối đa bao nhiêu tấn nước? (Lấy $\pi = 3{,}14$)

A. 12,56. **B.** 6,28. **C.** 3,14. **D.** 9,52.

Lời giải.

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy là chiều cao của hình trụ.
Ta có $S_{\text{tp}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi(R^2 + Rh)$.
Với chi phí không quá 6594000 đ, công ty đó sẽ có tối đa $\dfrac{6594000}{350000} = 18{,}84$ m^2 thép không rỉ.
Tức là $2\pi(R^2 + Rh) \le 18{,}84$ suy ra $R^2 + Rh \le \dfrac{9{,}42}{\pi}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $R^2 + \dfrac{Rh}{2} + \dfrac{Rh}{2} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{R^4h^2}{4}}$.
Mà $R^2 + \dfrac{Rh}{2} + \dfrac{Rh}{2} = R^2 + Rh \le \dfrac{9{,}42}{\pi}$ nên $3\sqrt[3]{\dfrac{R^4h^2}{4}} \le \dfrac{9{,}42}{\pi}$.
Suy ra $R^2h \le 2\sqrt{\left(\dfrac{3{,}14}{\pi}\right)^3}$.

Mặt khác $V_{\text{khối trụ}} = \pi R^2 h$ nên $V_{\text{khối trụ}} \le \pi \cdot 2\sqrt{\left(\dfrac{3,14}{\pi}\right)^3} \approx 6{,}28$ m^3.

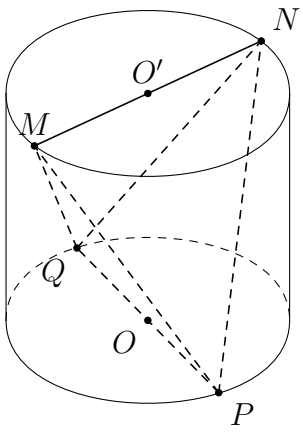
Vậy công ty ông Bình có thể đựng được tối đa 6,28 tấn nước.

Chọn đáp án B □

Câu 27.

Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được khối đá có hình tứ diện $MNPQ$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện bằng 30 dm^3. Hãy tính thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (là tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

A. $101,3$ dm^3. **B**. $141,3$ dm^3. **C**. $121,3$ dm^3. **D**. $111,4$ dm^3.



Lời giải.

Dựng hình hộp $IPJQ.MENF \Rightarrow IPJQ.MENF$ là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông (do $MN = PQ$ và $MN \perp PQ$). Chia khối hộp đó thành 5 khối tứ diện $NJPQ$, $MIPQ$, $PEMN$, $QFMN$, $MNPQ$.

4 khối tứ diện $NJPQ$, $MIPQ$, $PEMN$, $QFMN$ đều có thể tích bằng $\dfrac{1}{6}$ thể tích khối hộp.

Do đó 30 dm^3 $= V_{MNPQ} = \dfrac{1}{3} V_{IPJQ.MENF} \Rightarrow V_{IPJQ.MENF} = 90$ dm^3.

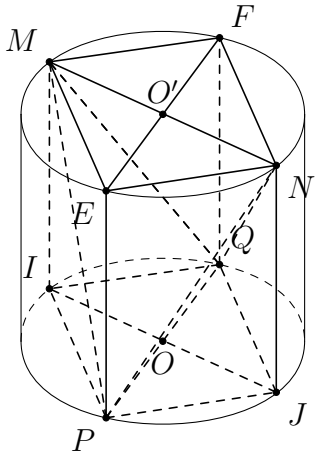
$MN = 60$ cm $\Rightarrow ME = 30\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow S_{MENF} = 1800$ cm^2 $= 18$ dm^2

$\Rightarrow EP = \dfrac{90}{18} = 5$ dm.

$r = \dfrac{1}{2} MN = 3$ dm, $h = EP = 5$ dm

$\Rightarrow$ thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = 45\pi$ dm^3.

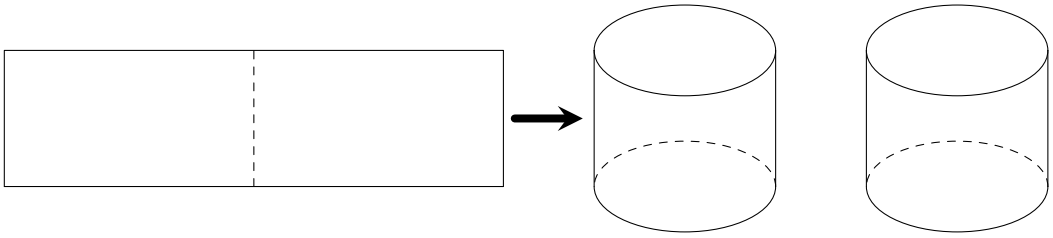
Vậy thể tích của lượng đá bị cắt bỏ là: $45\pi - 30 \approx 111{,}4$ dm^3.



Chọn đáp án D □

Câu 28. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 5 m × 40 m, người ta làm thành hai thùng nước hình trụ có cùng chiều cao 5 m, bằng cách cắt tấm tôn đó thành hai tấm tôn bằng nhau, rồi gò thành mặt xung quanh của một thùng (tham khảo hình bên dưới). Tổng thể tích của hai cái thùng hình trụ bằng

A. 1000π m^3. **B**. 2000π m^3. **C**. $\dfrac{2000}{\pi}$ m^3. **D**. $\dfrac{1000}{\pi}$ m^3.



Lời giải.

Gọi R là bán kính của khối trụ, h là chiều cao khối trụ ta có $h = 5$ m.
Ta có tổng diện tích xung quanh của hai khối trụ là $S_{xq} = 2 \cdot \pi R^2$.
Do chiều dài tấm tôn ban đầu là $l = 40$ m.
Suy ra ta có $2 \cdot 2\pi R = 40 \Leftrightarrow R = \dfrac{10}{\pi}$.
Tổng thể tích của hai thùng hình trụ là

$$V = 2 \cdot \pi R^2 \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot \frac{10^2}{\pi^2} \cdot 5 = \frac{1000}{\pi} \text{ m}^3.$$

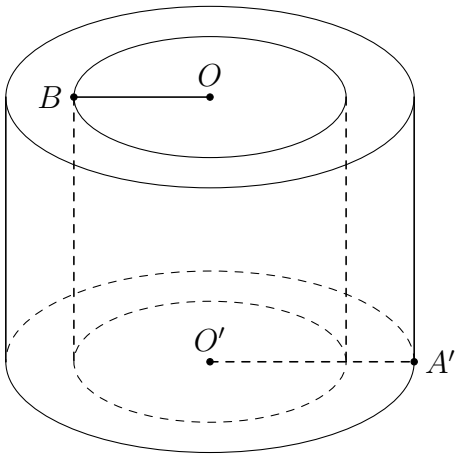
Chọn đáp án D □

Câu 29. Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao 2 m, độ dày thành ống là 10 cm. Đường kính ống là 50 cm. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó.

A. $0{,}18\pi$ m^3. **B**. $0{,}045\pi$ m^3. **C**. $0{,}5\pi$ m^3. **D**. $0{,}08\pi$ m^3.

Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích hình trụ có chiều cao $h = 2$ m, bán kính đáy $R_1 = O'A' = 25$ cm $= 0{,}25$ m.
Gọi V_2 là thể tích hình trụ có chiều cao $h = 2$ m, bán kính đáy $R_2 = OB = 25 - 10 = 15$ cm $= 0{,}15$ m.
Thể tích bê tông cần dùng sẽ bằng
$V = V_1 - V_2 = \pi R_1^2 h - \pi R_2^2 h = 2\pi(0{,}25^2 - 0{,}15^2) = 0{,}08\pi$ m^3.

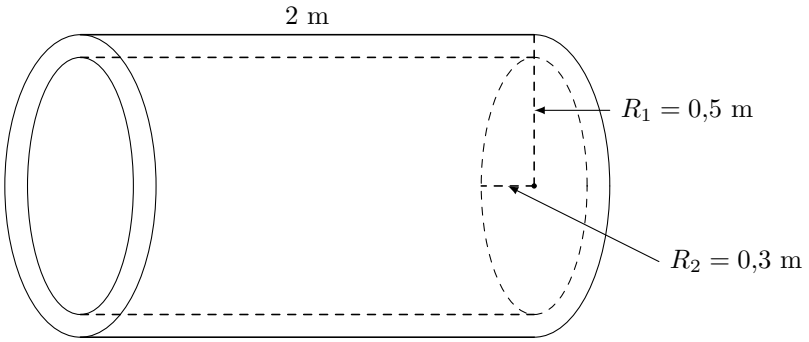


Chọn đáp án D □

Câu 30.

Người ta đổ một cái cống bằng cát, đá, xi măng và sắt thép như hình vẽ bên dưới. Thể tích nguyên vật liệu cần dùng là

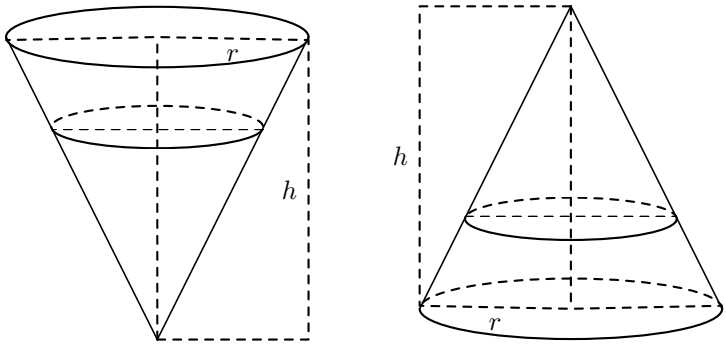
A. $0{,}32\pi$. **B**. $0{,}16\pi$.
C. $0{,}34\pi$. **D**. $0{,}4\pi$.



Lời giải.

Ta có $V = V_1 - V_2 = \pi \cdot l \cdot (R_1^2 - R_2^2) = \pi \cdot 2 \cdot (0{,}5^2 - 0{,}3^2) = 0{,}32\pi$.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.



A. $0,501$(cm). **B**. $0,302$(cm). **C**. $0,216$(cm). **D**. $0,188$(cm).

Lời giải.

Gọi h_1 là chiều cao của nước ta có $h_1 = \dfrac{1}{3}h$. Từ hình vẽ ta có

$$\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}r; \frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} \Leftrightarrow \frac{h_2}{r_2} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{h}h_2 = r_2.$$

Ta có thể tích của nước trước và sau khi lộn ngược là như nhau:

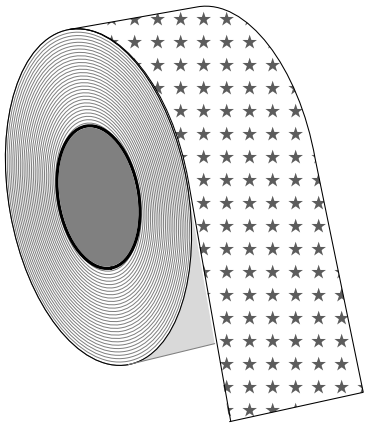
$$\begin{aligned}
& h_1\pi r_1^2 = h\cdot\pi r^2 - h_2\cdot\pi r_2^2 \\
\Leftrightarrow\ & h_2 = \frac{h\pi r^2 - h_1\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{hr^2 - h_1\cdot r_1^2}{r_2^2} = \frac{hr^2}{r_2^2} - \frac{h_1r_1^2}{r_2^2} = \frac{h^3}{h_2^2} - \frac{h_1\cdot\dfrac{1}{9}r^2}{h_2^2} = \frac{h^3}{h_2^2} - \frac{h_1\cdot\dfrac{1}{9}}{\dfrac{1}{h^2}h_2^2} \\
\Leftrightarrow\ & h_2 = \frac{15^3}{h_2^2} - \frac{5\cdot 15^2}{h_2^2} \\
\Leftrightarrow\ & h_2^3 = 15^3 - 5\cdot\frac{1}{9}\cdot 15^2 \Leftrightarrow h_2^3 = 3250 \Leftrightarrow h_2 = \sqrt[3]{3250}
\end{aligned}$$

Vậy bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng $0,188$ (cm).

Chọn đáp án (D) □

Câu 32.

Một cuộn decal có dạng hình trụ có đường kính 44,9 cm. Trong thời gian diễn ra AFF Cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn decal còn lại là 12,5 cm. Biết độ dày của tấm decal là 0,06 cm, hãy tính chiều dài L của tấm decal đã sử dụng? (làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $L = 24344$ cm. **B**. $L = 97377$ cm.
C. $L = 848$ cm. **D**. $L = 7749$ cm.

Lời giải.

Gọi h, V lần lượt là chiều cao và thể tích của cuộn decal.

Ta có: $V = \pi(R_1^2 - R_2^2)\cdot h = 464{,}94\pi h$, với $R_1 = \dfrac{44{,}9}{2} = 24{,}45$ cm; $R_2 = \dfrac{12{,}5}{2} = 6{,}25$ cm.

Lại có: $V = d\cdot h\cdot 0{,}06$.

Do đó $d\cdot h\cdot 0{,}06 = 464{,}94\pi h \Leftrightarrow d = 7749\pi \approx 24344$ cm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$.

Lời giải.

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R, chiều cao là h $(R, h > 0)$.

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần S_{tp} nhỏ nhất.

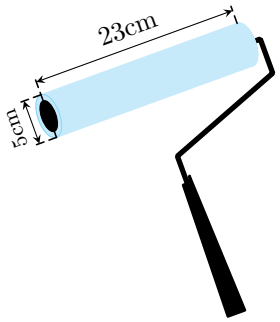
Ta có $S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{V}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34.

Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5 cm, chiều dài của trục lăn là 23 cm (tham khảo hình vẽ bên). Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo lên tường phẳng một lớp sơn có diện tích là



A. $862,5\pi$ cm^2. **B.** 5230π cm^2. **C.** 2300π cm^2. **D.** 1150π cm^2.

Lời giải.

Trục lăn có dạng hình trụ đường kính đáy 5 cm, chiều dài trục lăn 23 cm nên diện tích xung quanh của trục lăn là

$$S_{xq} = 2\pi rl = 5 \cdot 23\pi = 115\pi.$$

Mỗi vòng lăn, trục lăn tạo trên tường phẳng một lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của nó. Do đó sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn sẽ tạo lên tường phẳng một lớp sơn có diện tích là

$$S = 10S_{xq} = 1150\pi \text{cm}^2.$$

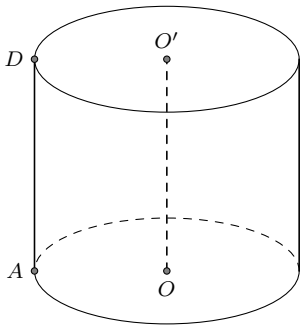
Chọn đáp án D □

Câu 35. Một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$ cm và $AD = 5$ cm. Cuộn tấm bìa sao cho hai cạnh AD và BC chồng khít lên nhau thu được mặt xung quanh của hình trụ. Tính thể tích V của khối trụ thu được.

A. $V = \dfrac{320}{\pi}$ (cm^3). **B.** $V = \dfrac{50}{\pi}$ (cm^3). **C.** $V = \dfrac{200}{\pi}$ (cm^3). **D.** $V = \dfrac{80}{\pi}$ (cm^3).

Lời giải.

Cuộn tấm bìa sao cho hai cạnh AD và BC chồng khít lên nhau thu được mặt xung quanh của hình trụ.



Khi đó $AB = 2\pi R \Leftrightarrow R = \dfrac{AB}{2\pi} = \dfrac{4}{\pi}$. Và $h = AD = 5$ (cm).

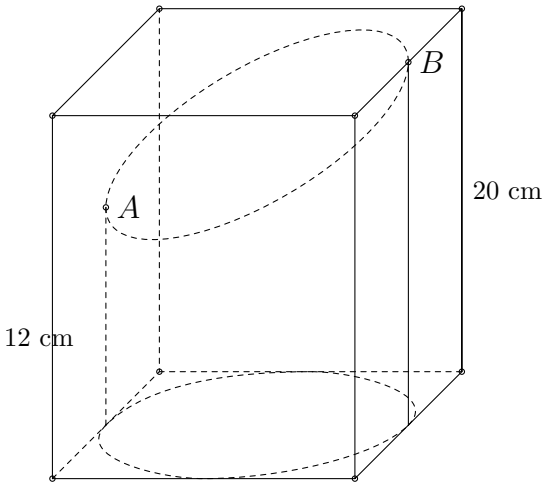
Vậy thể tích của khối trụ thu được là

$$V_{\text{trụ}} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot 5 = \frac{80}{\pi} \text{(cm}^3\text{)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 36.

Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ.



A. $R = 5{,}2$ cm. **B**. $R = 4{,}8$ cm. **C**. $R = 6{,}4$ cm. **D**. $R = 8{,}2$ cm.

Lời giải.

Giả sử R có đơn vị là m.

Ta có 2 l $= 0{,}002$ m^3.

Thể tích khối hộp bằng $4R^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8R^2$ m^3.

Thể tích khúc gỗ bằng $\pi R^2 \left(\dfrac{0{,}12 + 0{,}2}{2}\right) = 0{,}16\pi R^2$ m^3.

Ta có $0{,}8R^2 - 0{,}16\pi R^2 = 0{,}002 \Rightarrow R \approx 0{,}08201$ m $\Rightarrow R \approx 8{,}2$ cm.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Để làm cống thoát nước cho một con đường người ta cần đúc 200 ống hình trụ bằng bê tông có đường kính trong lòng ống là 1 m và chiều cao của mỗi ống bằng 2 m, độ dày của thành ống là 8 cm. Biết rằng 1 m^3 bê tông thì cần đúng 10 bao xi-măng. Hỏi cần bao nhiêu bao xi-măng để đúc 200 ống trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 1086 bao. **B**. 1025 bao. **C**. 2091 bao. **D**. 523 bao.

Lời giải.

Bán kính trong lòng ống cống là $r = 0{,}5$ m.

Độ dày của thành ống là 8 cm $= 0{,}08$ m nên bán kính ngoài của ống là $R = 0{,}58$ m.

Chiều cao $h = 2$ m nên thể tích của mỗi thành ống là

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi \cdot 2\left(0{,}58^2 - 0{,}5^2\right) = 0{,}1728\pi \text{ m}^3.$$

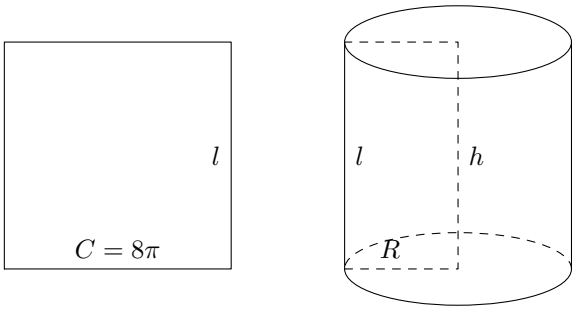
Vậy số bao xi-măng cần dùng để đúc 200 ống cống là $200 \times 0{,}1728\pi \times 10 \approx 1086$ bao.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cắt mặt xung quanh của một hình trụ dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng ta được hình vuông có chu vi bằng 8π. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $2\pi^2$. **B**. $2\pi^3$. **C**. 4π. **D**. $4\pi^2$.

Lời giải.

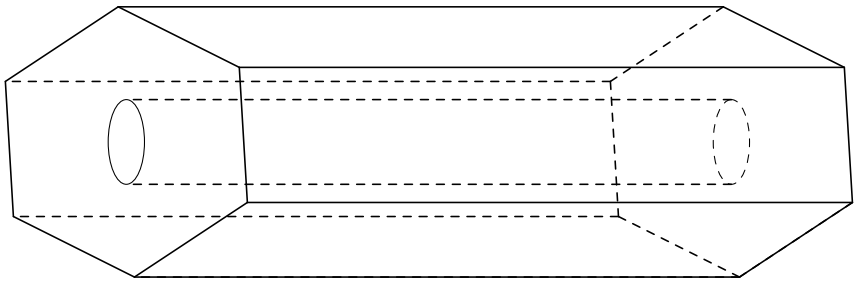


Ta có chu vi hình vuông bằng 8π, suy ra cạnh hình vuông bằng 2π.
Do đó hình trụ có bán kính $R = 1$, đường sinh $l = 2\pi$ (cũng chính là đường cao).
Khi đó thể tích hình trụ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 2\pi^2$.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao 18 cm và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính 1 cm. Bút chì được cấu tạo từ 2 thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\frac{1}{4}$ cm, giá thành 540 đồng/cm^3. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm^3. Tính giá của một cây bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm 15,58% giá thành sản phẩm.

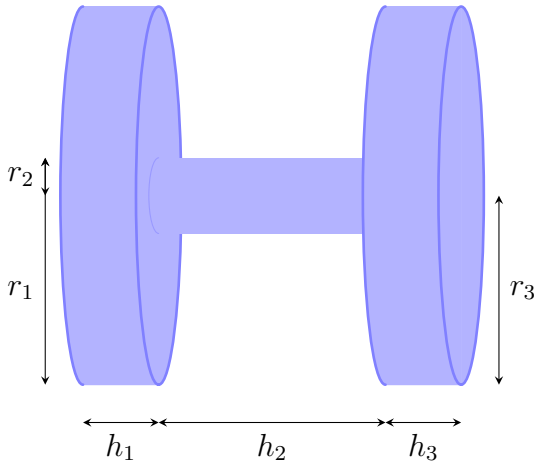
A. 10000 đồng. **B**. 8000 đồng. **C**. 5000 đồng. **D**. 3000 đồng.

Lời giải.



Diện tích hình lục giác đều cạnh 0,5 cm là $S = 6 \cdot (0{,}5)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ cm^2.
Thể tích khối lăng trụ lục giác đều là $V_1 = 18 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^3.
Thể tích khối trụ (than chì) là $V_2 = \pi \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 \cdot 18 = \dfrac{9\pi}{32}$ cm^3.
Thể tích bột gỗ ép xung quanh là $V = V_1 - V_2 = \dfrac{216\sqrt{3} - 9\pi}{32}$ cm^3.
Suy ra chi phí để sản xuất ra một cây bút chì là $\dfrac{216\sqrt{3} - 9\pi}{32} \cdot 100 + \dfrac{9\pi}{32} \cdot 540 \approx 1558$ đồng.
Vậy giá của một cây bút chì được công ty bán ra là $1558 : 15{,}58\% = 10000$ đồng.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Một quả tạ tập tay gồm 3 khối trụ (H_1), (H_2), (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là $r_1, h_1, r_2, h_2, r_3, h_3$ thỏa mãn $r_3 = r_1, h_3 = h_1, r_2 = \dfrac{1}{3} r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng



A. $\pi \cdot \dfrac{16(9-2h_1)}{16h_1+9}$. **B.** $\pi \cdot \dfrac{36(9-2h_1)}{16h_1+9}$. **C.** $\pi \cdot \dfrac{60(9-2h_1)}{16h_1+9}$. **D.** $\pi \cdot \dfrac{46(9-2h_1)}{16h_1+9}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} h_2+2h_1=9 \\ 2\pi r_1^2 h_1+\pi r_2^2 h_2=60\pi \end{cases} \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} h_2=9-2h_1 \\ 2r_1^2 h_1+\dfrac{1}{9}r_1^2 h_2=60 \end{cases} \\
\Rightarrow\ & r_1^2\left(2h_1+1-\frac{2}{9}h_1\right)=60 \\
\Rightarrow\ & r_1^2\frac{16h_1+9}{9}=60 \\
\Rightarrow\ & r_2^2=\frac{60}{16h_1+9}
\end{aligned}$$

Vậy $V_{(H_2)}=\pi\dfrac{60\,(9-2h_1)}{16h_1+9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao 2 m, độ dày thành ống là 10 cm. Đường kính ống là 50 cm. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó?

A. $0{,}08\pi$ m^3. **B.** $0{,}18\pi$ m^3. **C.** $0{,}5\pi$ m^3. **D.** $0{,}045\pi$ m^3.

Lời giải.

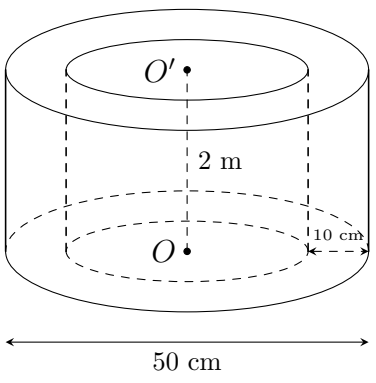
Bán kính ống cống là $R=\dfrac{50}{2}=25$ cm $=0{,}25$ m.

Độ dày thành ống là 10 cm nên bán kính trong lòng ống cống là $r=15$ cm $=0{,}15$ m.

Thể tích phần bê tông là

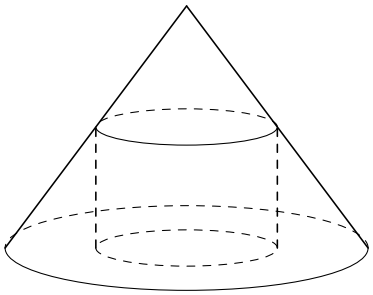
$$V=\pi h\left(R^2-r^2\right)=\pi\cdot 2\left(0{,}25^2-0{,}15^2\right)=0{,}08\pi.$$

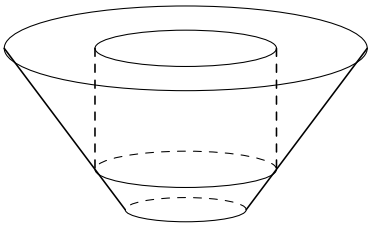
Vậy lượng bê tông cần dùng là $0{,}08\pi$ m^3.



Chọn đáp án A □

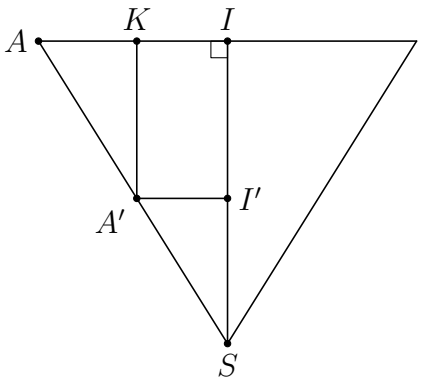
Câu 42. Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9 cm và bán kính đáy 6 cm. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.





A. 48π. **B**. $\dfrac{81}{2}\pi$. **C**. 36π. **D**. 54π.

Lời giải.



Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ.

Đặt $r = IK$ là bán kính đáy hình trụ, $h = II'$ là chiều cao của hình trụ.

Thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất khi khối trụ có thể tích lớn nhất.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h$.

Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng nên

$$\frac{SI}{SI'} = \frac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \frac{9}{9-h} = \frac{6}{r} \Rightarrow h = 9 - \frac{3r}{2}.$$

Khi đó $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(9 - \dfrac{3r}{2}\right) = \pi \left(-\dfrac{3r^3}{2} + 9r^2\right)$.

Khảo sát hàm số V, biến số r, $(0 < r < 6)$.

Ta có $V' = \pi \left(-\dfrac{9r^2}{2} + 18r\right)$ và $V' = 0 \Leftrightarrow \pi \left(-\dfrac{9r^2}{2} + 18r\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} r = 0 & \text{(loại)} \\ r = 4 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm V như sau

r	0		4		6
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$	0	↗	48π	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max V = 48\pi$ khi $r = 4$.

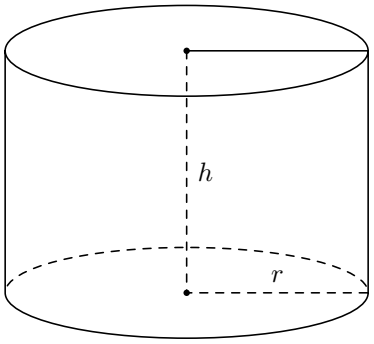
Vậy thớ mì tôm có thể tích lớn nhất là 48π.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng/m^2, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/m^2, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng /m^2. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}$ (m). **B.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ (m). **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ (m). **D.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$(m).

Lời giải.



Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.
Thể tích khối trụ là

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 72 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{72}{\pi r^2}.$$

Chi phí xây dựng là

$$\begin{aligned} S &= 100 \cdot \pi r^2 + 90 \cdot 2\pi r h + 140 \cdot \pi r^2 \\ &= 240\pi r^2 + \frac{12960}{r} \\ &= 240\pi r^2 + \frac{6480}{r} + \frac{6480}{r} \\ &\geq 3\sqrt[3]{240\pi r^2 \cdot \frac{6480}{r} \cdot \frac{6480}{r}} \\ &\geq 6480\sqrt[3]{\pi}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $240\pi r^2 = \dfrac{6480}{r} = \dfrac{6480}{r} \Leftrightarrow r^3 = \dfrac{27}{\pi} \Leftrightarrow r = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Vậy để chi phí xây dựng là thấp nhất thì $r = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $9{,}7a$ (đồng). **B.** $97{,}03a$ (đồng). **C.** $90{,}7a$ (đồng). **D.** $9{,}07a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:
$V = B \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0{,}2) = \dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6}$ m^3.
Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: $V_t = V - V_r = \dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:
$0,2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 8a + \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 9,07 \cdot 10^{-6}a$ (triệu đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 45. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1mm. Giả định 1m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá $6a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 84,5a (đồng). **B**. 78,2a (đồng). **C**. 8,45a (đồng). **D**. 7,82a (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì là

$$V_r = \pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \text{ m}^3.$$

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều là

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}(3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}2 = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ là

$$V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \text{ m}^3.$$

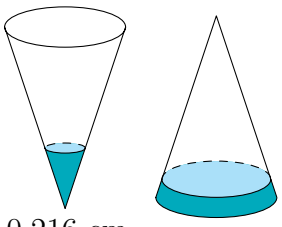
Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì là

$$0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 6a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 7{,}82 \cdot 10^{-6}a \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 46.

Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước **xấp xỉ** bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 cm.

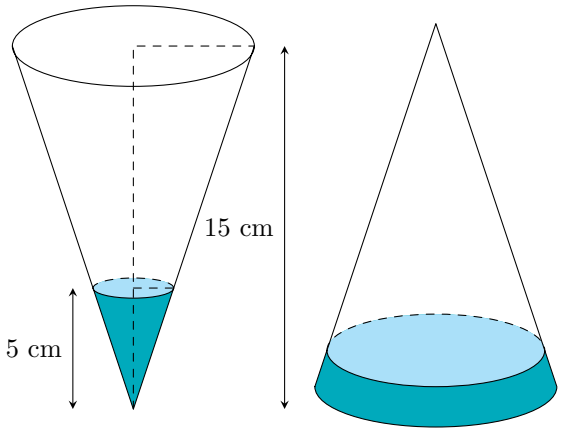


A. 0,5 cm. **B**. 0,3 cm. **C**. 0,188 cm. **D**. 0,216 cm.

Lời giải.

Gọi r_1, h_1, V_1 lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi phần chứa nước lúc ban đầu; r, h, V lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và thể tích khối nón giới hạn bởi cái phễu; h_2 là chiều cao mực nước sau khi lộn ngược phễu. Theo tính chất tam giác đồng dạng ta có

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$



Sau khi lộn ngược phễu, tỉ số thể tích giữa phần không gian trong phễu không chứa nước và thể tích phễu bằng

$$1 - \frac{1}{27} = \frac{(h - h_2)^3}{h^3} \Leftrightarrow \frac{26}{27} = \frac{(15 - h_2)^3}{15^3} \Leftrightarrow h_2 = 15 - 5\sqrt[3]{26} \approx 0{,}188.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Một tấm đề can hình chữ nhật được cuộn lại theo chiều dài tạo thành một khối trụ có đường kính 50 cm. Người ta trải ra 250 vòng để cắt chữ và in tranh, phần còn lại là một khối trụ có đường kính 45 cm. Chiều dài phần trải ra gần với số nào nhất trong các số sau? (chiều dài tính bằng đơn vị mét).

A. 373. **B**. 180. **C**. 275. **D**. 343.

Lời giải.

Gọi $l_1, l_2, \ldots, l_{250}$ là chiều dài phần trải ra vòng thứ nhất, thứ hai, ..., thứ 250 của khối trụ.
Vì khi trải ra 250 vòng, bán kính khối trụ giảm đi 2,5 cm nên bề dày tấm đề can là $\dfrac{2{,}5}{250} = 0{,}01$ cm.
Khi đó $l_1, l_2, \ldots, l_{250}$ lần lượt là chu vi các đường tròn có các bán kính $r_1, r_2, \ldots, r_{250}$, với $r_1, r_2, \ldots, r_{250}$ lập thành một cấp số cộng có công sai $d = -0{,}01$ và số hạng đầu bằng 25.
Nên $r_1 + r_2 + \cdots + r_{250} = 25 \cdot 250 + \dfrac{250 \cdot 249}{2} \cdot (-0{,}01) = 5938{,}75$.
Vậy chiều dài phần trải ra là $l_1 + l_2 + \cdots + l_{250} = 2\pi \cdot 5938{,}75 \approx 37314$ cm ≈ 373 m.
Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. C	5. D	6. D	7. B	8. A	9. D	10. C
11. C	12. C	13. A	14. C	15. A	16. A	17. C	18. D	19. D	20. D
21. A	22. B	23. D	24. D	25. B	26. B	27. D	28. D	29. D	30. A
31. D	32. A	33. A	34. D	35. D	36. D	37. A	38. A	39. A	40. C
41. A	42. A	43. B	44. D	45. D	46. C	47. A			

BÀI 2 MẶT CẦU

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Mặt cầu

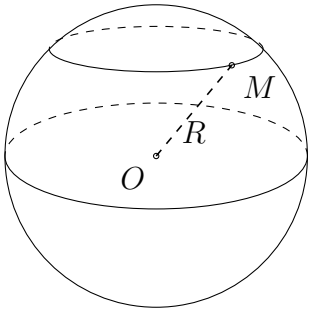
Định nghĩa 1.

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là *mặt cầu* tâm O, bán kính R, kí hiệu là $S(O;R)$.

Khi đó, $S(O;R)=\{M|OM=R\}$.

Với hai điểm $C,D\in S(O;R)$ thì đoạn thẳng CD gọi là *dây cung* của mặt cầu.

Dây cung đi qua tâm gọi là *đường kính* của mặt cầu. Khi đó, độ dài đường kính bằng $2R$.



Định nghĩa 2. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là một điểm bất kì trong không gian.

- ☑ Nếu $OA=R$ thì ta nói điểm A *nằm trên* mặt cầu $S(O;R)$.
- ☑ Nếu $OA<R$ thì ta nói điểm A *nằm trong* mặt cầu $S(O;R)$.
- ☑ Nếu $OA>R$ thì ta nói điểm A *nằm ngoài* mặt cầu $S(O;R)$.

Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O;R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó gọi là *khối cầu* hoặc *hình cầu* tâm O bán kính R.

Tính chất 1. Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến mặt phẳng (P). Ta có:

- ☑ Nếu $h>R$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu $S(O;R)$.
- ☑ Nếu $d=R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ có một điểm chung duy nhất. Khi đó, ta nói mặt phẳng (P) *tiếp xúc* với mặt cầu $S(O;R)$.
  Điểm tiếp xúc gọi là *tiếp điểm*, (P) gọi là *mặt phẳng tiếp xúc* hay *tiếp diện* của mặt cầu.
- ☑ Nếu $d<R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo một đường tròn bán kính $R'=\sqrt{R^2-d^2}$.
  Đặc biệt, khi $d=0$ thì tâm O thuộc mặt phẳng (P), giao tuyến của (P) và $S(O;R)$ là đường tròn tâm O bán kính R. Đường tròn này gọi là *đường tròn lớn*.

⚠ *Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là (P) vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.*

Tính chất 2. Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi d là khoảng cách O đến đường thẳng Δ. Khi đó,

- ☑ $d>R\Leftrightarrow\Delta$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$.
- ☑ $d<R\Leftrightarrow\Delta$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- ☑ $d=R\Leftrightarrow\Delta$ và mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc nhau. Do đó, điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là $d=R$.

Định lí 1. *Cho mặt cầu $S(O;R)$ và điểm A nằm ngoài mặt cầu. Khi đó,*

- ☑ *Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu.*

- ☑ *Tập hợp các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh A.*
- ☑ *Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.*

Định lí 2. *Cho mặt cầu $S(O;R)$ và điểm A nằm trên mặt cầu. Khi đó,*

- ☑ *Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu.*
- ☑ *Tất cả các tiếp tuyế này đều vuông góc với bán kính của mặt cầu tại A và nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A.*

⚠ *Người ta nói mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện, nói mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đó đều nằm trên mặt cầu.*

Tính chất 3. Cho mặt cầu bán kính R. Khi đó,

- ☑ Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- ☑ Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

⚠

- ☑ *Diện tích S của mặt cầu bán kính R bằng 4 lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.*
- ☑ *Thể tích V của khối cầu bán kính R bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.*

B CÁC DẠNG TOÁN

🗀 DẠNG 1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy (hình chóp đều)

Phương pháp giải.

1) **Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có cạnh bên SA_1 vuông góc với đáy $(A_1A_2...A_n)$ và đáy $A_1A_2...A_n$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp được xác định như sau

- ☑ Dựng trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy d (đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy).
- ☑ Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh bện SA_1 cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n = IS$.

2) **Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều**

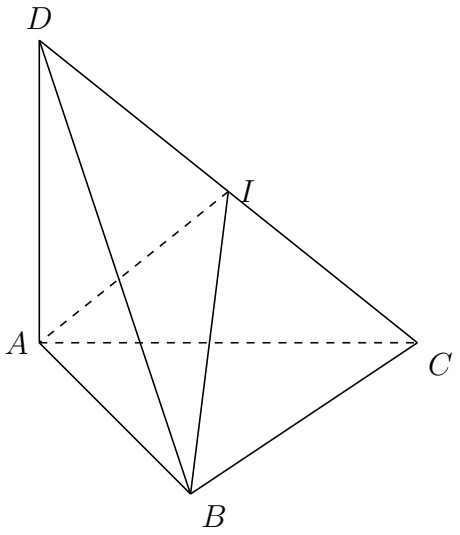
Cho hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác đều nôi tiếp đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp được xác định như sau

- ☑ Dựng trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy d.
- ☑ Trong mặt phẳng chứa d và một cạnh bên của hình chóp, chẳng hạn SA_1, dựng đường thẳng trung trực của cạnh SA_1 cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, bán kính $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n = IS$.

⚠ *Tập hợp các điểm trong không gian nhìn hai điểm cho trước dưới một góc vuông là mặt cầu có đường kính là đoạn thẳng nối hai điểm cho trước đó.*

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $DA \perp (ABC)$. Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Biết $AB = 3a, BC = 4a, DA = 5a$.

Lời giải.



Ta có $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp AC \Rightarrow \widehat{DAC} = 90^\circ \quad (1)$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp DA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (DAB)$

$\Rightarrow BC \perp BD \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính DC.

Gọi I là trung điểm của DC, R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD \Rightarrow R = IA = IB = IC = ID = \dfrac{DC}{2}$.

Mặt khác

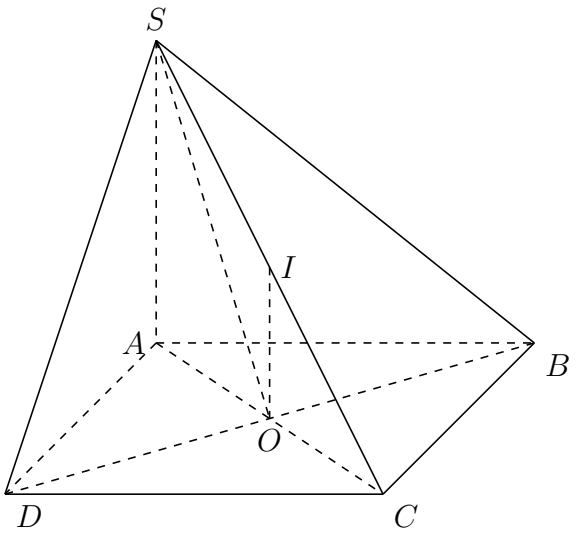
$DC = \sqrt{DA^2 + AC^2} = \sqrt{DA^2 + AB^2 + AC^2} = 5a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow R = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh $2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Ta có

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow [\widehat{SO, (ABCD)}] = \widehat{SOA} = 45^\circ$

$\Rightarrow SA = AO = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2}$

Qua O dựng đường thẳng song song với SA cắt mặt phẳng trung trực của cạnh SA tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm của SC.

$\Rightarrow IA = IS = IB = IC = ID \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Dễ thấy $IO = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

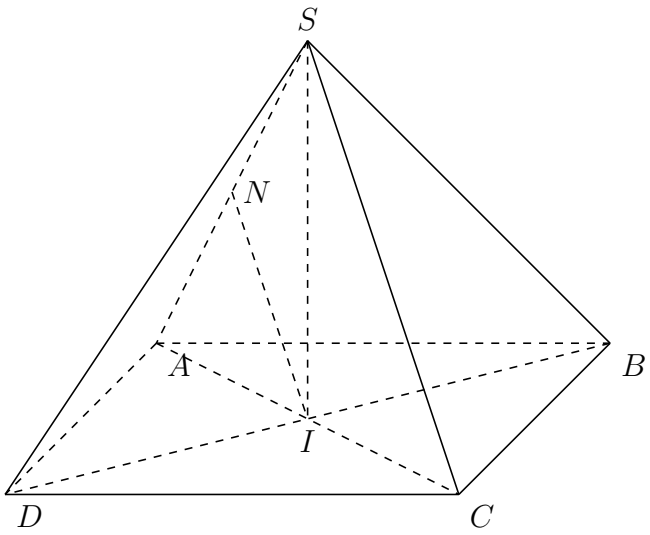
$\Rightarrow R = \sqrt{IO^2 + AO^2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{2}$

□

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.
Trung điểm của SA là N.
Ta có $AC = \sqrt{2} \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại S
$\Rightarrow \triangle SIA$ vuông cân tại I.
$\Rightarrow \ = IA = IB = IC = ID \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
$\Rightarrow$ Bán kính của mặt cầu $R = IA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

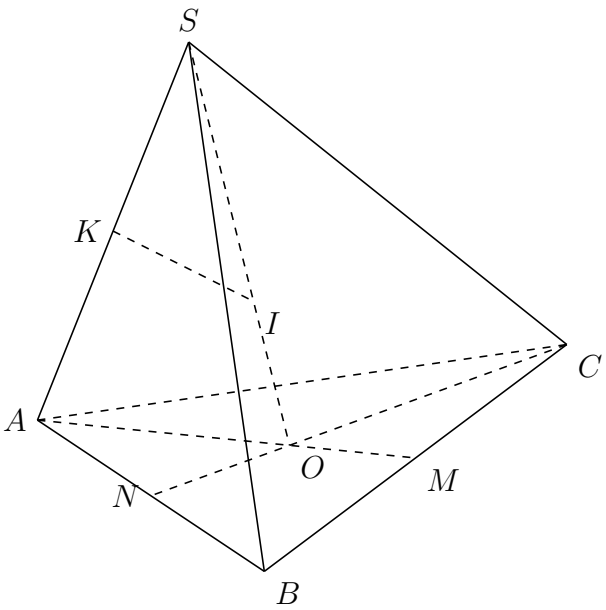


□

Ví dụ 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tính thể tích khối cầu và diện tích mặt cầu đó.

Lời giải.

Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BC, AB, SA.
Mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
$\triangle SKI \sim \triangle SOA \Rightarrow SI = \dfrac{SK \cdot SA}{SO}$
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4\pi a^3}{9\sqrt{3}}$
Diện tích của mặt cầu $S = \dfrac{4\pi a^2}{3}$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{SAC} = 90^\circ$ (1)

Lại có: $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

$\Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ$. (2)

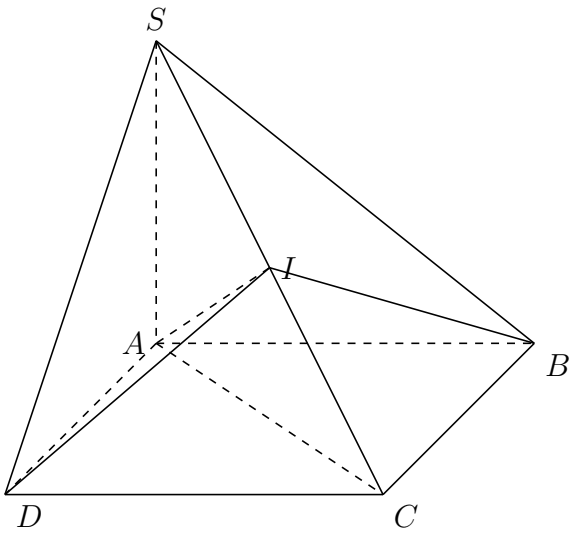
Tương tự ta có $\widehat{SDC} = 90^\circ$ (3).

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ Năm điểm S, A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu, đường kính SC.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD \Rightarrow R = \dfrac{SC}{2}$

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5a^3\sqrt{5}}{6}$



□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau, $SB = SC$, trung tuyến SM của tam giác SBC có độ dài bằng a. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của SA.

d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (ABC).

Mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt đường thẳng d tại I.

I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

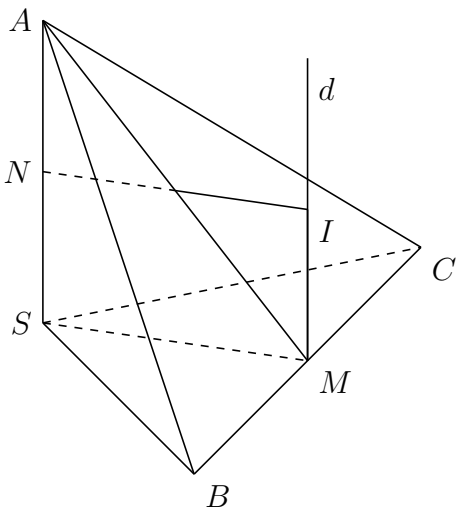
$\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow AB = AC$

$\begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow [\widehat{(SBC), (ABC)}] = \widehat{SMA} = 60^\circ \Rightarrow AM = 2a$

$\Rightarrow SA = AM \sin \widehat{SMA} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow IS = \sqrt{IM^2 + SM^2} = \sqrt{\dfrac{SA^2}{4} + SM^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$



$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot IA^3 = \dfrac{7a^3\sqrt{7}}{6}$ □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = 4a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AMD$.

Lời giải.

Ta có:Tam giác AMD vuông cân tại M.

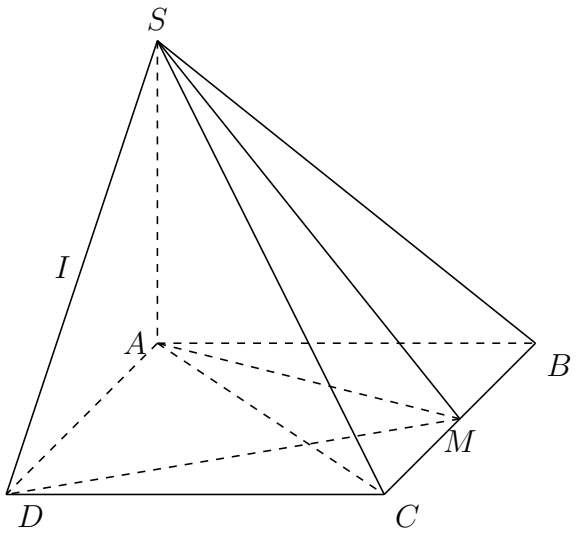
Có: $\begin{cases} DM \perp AM \\ DM \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow DM \perp SM.$

Lại có: $DA \perp SA$. Gọi I là trung điểm của SD.

Ta chứng minh được: $IS = IA = ID = IM$.

Hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AMD$.

Từ đó ta có $R = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{9a^2+16a^2}}{2} = \dfrac{5a}{2}$



□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $ABCD$ với $AB = 2a, BC = CD = DA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB và cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Tính bán kính khối cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCDMNP$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thang cân và $AB = 2AD = 2BC = 2CD = 2a$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$

$SB \perp (AMNP) \Rightarrow AM \perp SB \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ.$

$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AN$

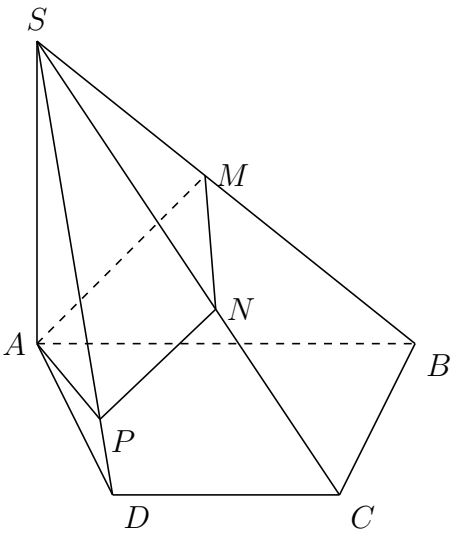
$\begin{cases} AN \perp BC \\ AN \perp SB \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{ANB} = 90^\circ$

$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AP$

$\begin{cases} AP \perp BD \\ AP \perp SB \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SBD) \Rightarrow AP \perp BP \Rightarrow \widehat{APB} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Các điểm C, D, M, N, P cùng nhìn đoạn AB dưới một góc bằng 90°.

$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu cần tim $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^3 = \dfrac{4\pi a^3}{3}$



□

DẠNG 2. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy (hình chóp khác)

Phương pháp giải. Phương pháp :

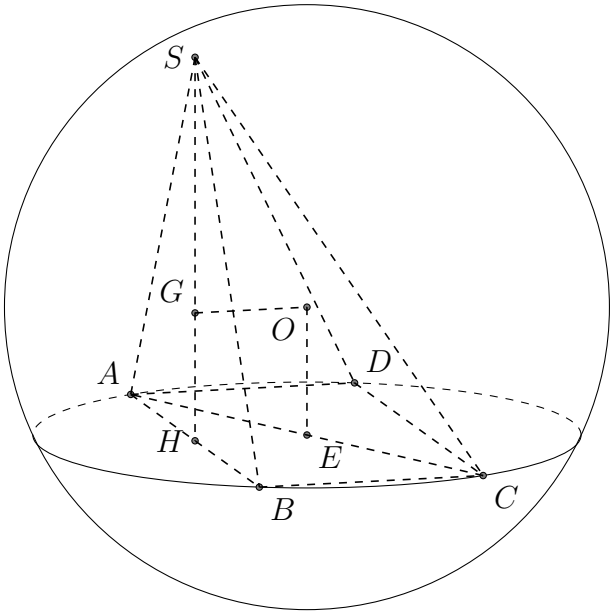
- Xác định (Δ_1) là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Xác định (Δ_2) là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác thuộc mặt bên vuông góc đáy.

- Tìm tâm mặt cầu O là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2).

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ biết SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ biết $ABCD$ là hình vuông cạnh a.

Lời giải.

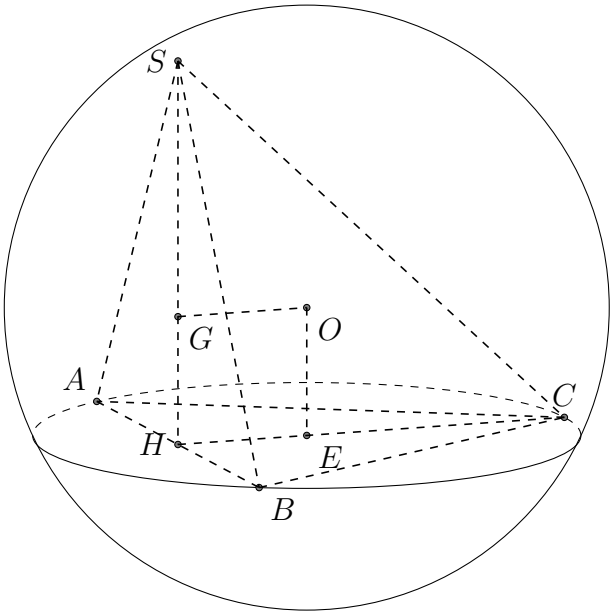
Gọi E là tâm hình vuông $ABCD$.
Gọi H là trung điểm cạnh AB.
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$.
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua S, H, E.
Từ E kẻ (Δ_1) song song với $SH \Rightarrow (\Delta_1) \subset (\alpha)$.
Từ G kẻ (Δ_2) song song với $HE \Rightarrow (\Delta_2) \subset (\alpha)$.
Ta thấy (Δ_1) và (Δ_2) cùng thuộc (α).
Gọi O là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2).
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ có bán kính $R = OS$.
Ta có $OS = \sqrt{GO^2 + GS^2}$.
Ta có $GO = \dfrac{a}{2}$.
Ta có $GS = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.



□

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.

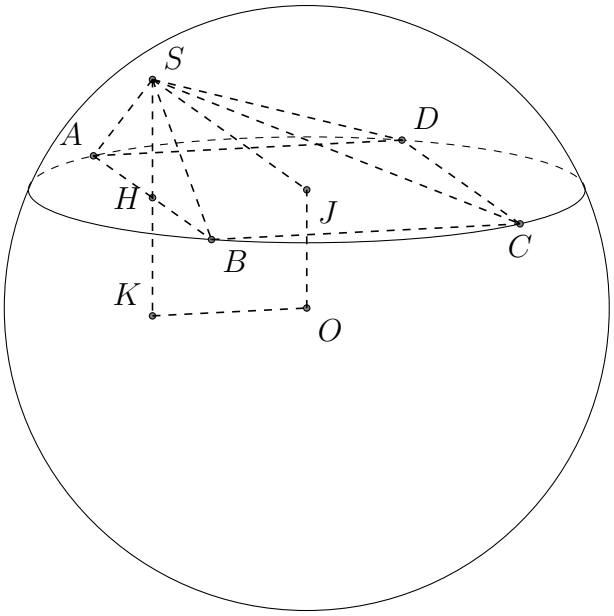


Gọi E là trọng tâm $\triangle ABC$.
Gọi H là trung điểm cạnh AB.
Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.
Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$.
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua S, H, E.
Từ E kẻ (Δ_1) song song với $SH \Rightarrow (\Delta_1) \subset (\alpha)$.
Từ G kẻ (Δ_2) song song với $HE \Rightarrow (\Delta_2) \subset (\alpha)$.
Ta thấy (Δ_1) và (Δ_2) cùng thuộc (α).
Gọi O là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2).
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ có bán kính $R = OS$.
Ta có $OS = \sqrt{GO^2 + GS^2}$.
Ta có $GO = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
Ta có $GS = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Ta được $R = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$.
Vậy thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

□

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông có cạnh bằng 6, mặt bên SAB là tam giác cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh AB.
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Gọi K là điểm đối xứng của S qua H suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.
Gọi J là tâm hình vuông $ABCD$.
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua S, H, J.
Từ J kẻ (Δ_1) song song với $SH \Rightarrow (\Delta_1) \subset (\alpha)$.
Từ K kẻ (Δ_2) song song với $HJ \Rightarrow (\Delta_2) \subset (\alpha)$.
Ta thấy (Δ_1) và (Δ_2) cùng thuộc (α).
Gọi O là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2).
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Gọi r_1, r_2, R lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$, $\square ABCD$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.
Ta có $R = SO = \sqrt{SK^2 + KO^2}$.

Ta có SKB là tam giác đều có chiều cao bằng 3 suy ra bán kính $r_1 = KS = 2\sqrt{3}$.

Ta có $r_2 = BJ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta được $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Vậy $S_{mc} = 4\pi R^2 = 14\pi$. □

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\triangle SAB$ là tam giác đều, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$. Biết $ABCD$ là hình thang cân có $AC = 3, AD = \sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle SAB} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2$.

Ta có $\begin{cases} AB = 2 \\ AC = 3 \Rightarrow \triangle ACD \text{ vuông tại } C. \\ AD = \sqrt{13} \end{cases}$

Gọi E, H lần lượt là trung điểm AD, AB.

Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua S, H, E.

Từ E kẻ (Δ_1) song song với SH.

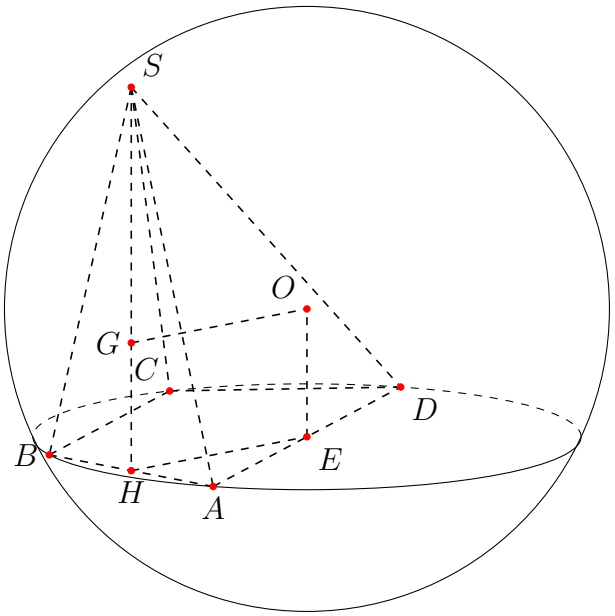
Từ G kẻ (Δ_2) song song với HE.

Ta thấy (Δ_1) và (Δ_2) thuộc (α).

Gọi O là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2).

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB, \square ABCD$.



Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

Ta có $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$.

Ta có $\begin{cases} r_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ r_2 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

Vậy $R = \dfrac{\sqrt{129}}{6}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Hướng dẫn:

Tính được $r_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $r_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-\dfrac{AB^2}{4}}$.

Đáp án: $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. □

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với $AB=4$ và $BC=CD=DA=2$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Lời giải.

Hướng dẫn:

Trục đường tròn ngoại tiếp nửa lục giác đều $ABCD$ trùng với đường cao SH của tam giác đều SAB suy ra bán kính mặt cầu bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Đáp án: $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. □

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với (ABC), $AB=AC=3$, $\widehat{ABC}=75^\circ$, $SA=4$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCM$, $SB\cap(S)=\{B,N\}, SC\cap(S)=\{C,P\}$. Tính thể tích khối tứ diện $MNPS$.

Lời giải.

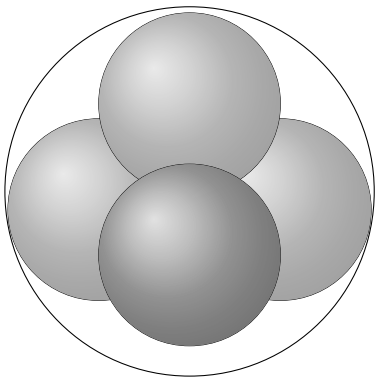
Ta có $SM.SA=SN.SB=SP.SC$. Từ đó lập được tỉ số thể tích.

Đáp án: $\dfrac{96}{625}$. □

Bài 8.

Cho bốn hình cầu (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và đều có bán kính bằng r. Hình cầu (S) chứa và tiếp xúc với cả bốn hình cầu đã cho (như hình bên).

Tính tỉ số $\dfrac{R}{r}$, với R là bán kính hình cầu (S).



Lời giải.

Hướng dẫn:

Tâm của các mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3),(S_4)$ là bốn đỉnh của tứ diện đều $I_1I_2I_3I_4$ có cạnh bằng $2r$.

Tính $r_{\text{tứ diện}}$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều $I_1I_2I_3I_4$.

Bán kính mặt cầu S là $R=r+r_{\text{tứ diện}}$.

Đáp án: $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$. □

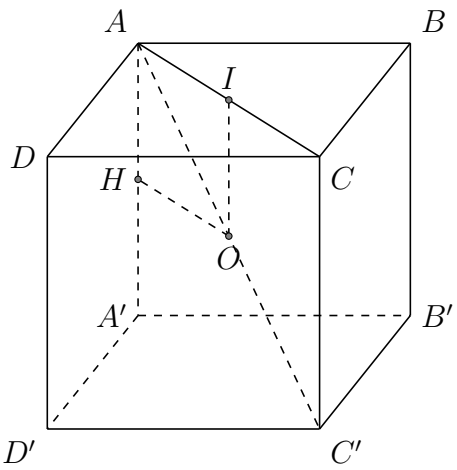
DẠNG 3. Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp, nội tiếp hình chóp

Phương pháp giải. *Mặt cầu nội tiếp hình đa diện* nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện, còn *mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện* nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm

trên mặt cầu.
Khi mặt cầu nội tiếp (ngoại tiếp) hình đa diện, người ta cũng nói hình đa diện ngoại tiếp (nội tiếp) mặt cầu.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu trong các trường hợp sau đây:
a) Đi qua 8 đỉnh của hình lập phương;
b) Tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương;
c) Tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương.

Lời giải.

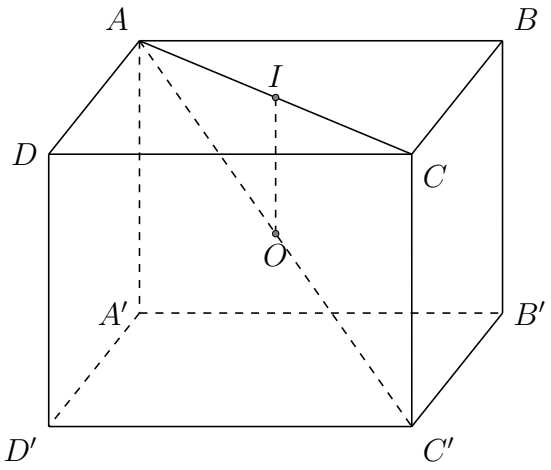


Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
a) Ta có: O cách đều 8 đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vậy mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính $r_1 = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
b) Ta có: O cách đều 12 cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
Gọi H là trung điểm của cạnh AA'. Ta có $OH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy mặt cầu tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính $r_2 = OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
c) Ta có: O cách đều 6 mặt bên của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OI = \dfrac{a}{2}$.
Vậy mặt cầu tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính $r_3 = OI = \dfrac{a}{2}$.

□

Ví dụ 10. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$.
a) Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp;
b) Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$ với mặt cầu trên.

Lời giải.



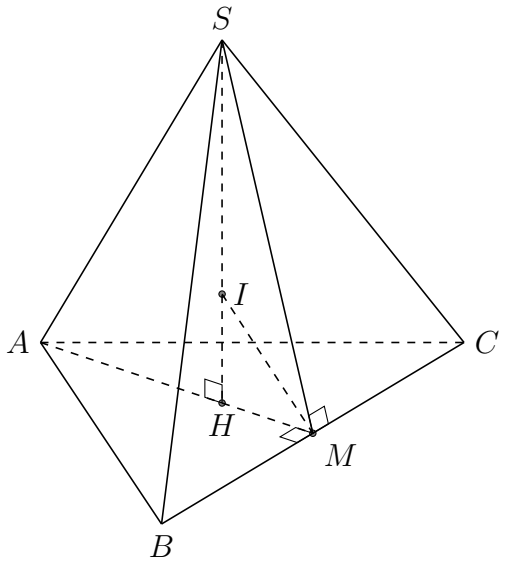
a) Gọi O là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có: O cách đều 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.
Vậy mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

b) Giao tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$ với mặt cầu trên là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.
Vậy đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$ với mặt cầu trên có tâm là trung điểm I của AC và có bán kính là $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$.

□

Ví dụ 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc α $(0° < \alpha < 90°)$. Xác định tâm và tính theo a và α bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

Lời giải.



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC, ta có $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\ SM\perp BC\\ AM\perp BC\end{cases}\Rightarrow \widehat{SMA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Do đó, ta có $\widehat{SMA}=\alpha$.

Gọi I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$, khi đó, $I\in SH$.

Vì I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$ nên MI là đường phân giác của góc $\widehat{SMA}$.

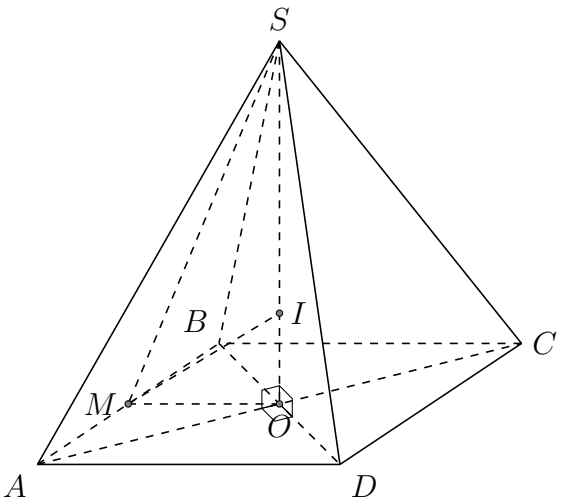
Khi đó, ta có IH là bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

Tam giác IHM vuông tại H có $\widehat{IMH}=\dfrac{\alpha}{2}$ nên $IH=MH\times\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\times\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

Vậy $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\times\tan\dfrac{\alpha}{2}$. □

Ví dụ 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc $\widehat{ASB}=\alpha$. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO\perp(ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của AB.

Gọi I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$, khi đó, $I\in SO$.

Vì I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ nên MI là đường phân giác của góc $\widehat{SMO}$.

Khi đó, ta có IO là bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tam giác SMA vuông tại M có $\widehat{ASM}=\dfrac{\alpha}{2}$ nên $SA=\dfrac{AM}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Tam giác SOA vuông tại O nên $SO^2=SA^2-OA^2=\dfrac{a^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2\cos^2\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Suy ra $SO=\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác SOM, ta có:
$\dfrac{IO}{IS}=\dfrac{MO}{MS}\Leftrightarrow\dfrac{IO}{IS+IO}=\dfrac{MO}{MS+MO}$.

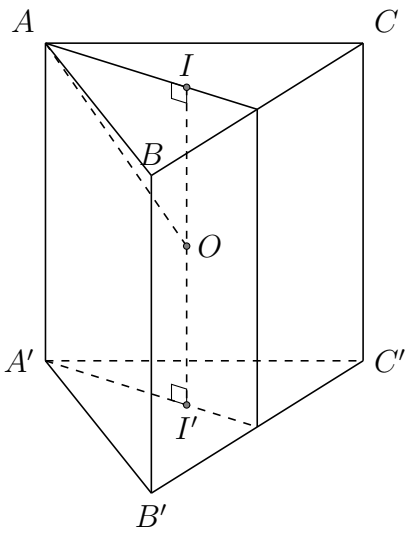
$$\Rightarrow \frac{r}{SO} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy $r = \dfrac{SO}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh đều bằng a. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp đó và tính thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải.



Gọi I và I' lần lượt là tâm của các tam giác đều ABC và $A'B'C'$, ta có $II' \perp (ABC)$ và $II' \perp (A'B'C')$.
Gọi O là trung điểm của II', ta có O cách đều các đỉnh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
Suy ra O chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
Tam giác OIA vuông tại I nên $OA^2 = AI^2 + IO^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{12}$.
Vậy bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $r = OA = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

☑ Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

☑ Thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \dfrac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54}$.

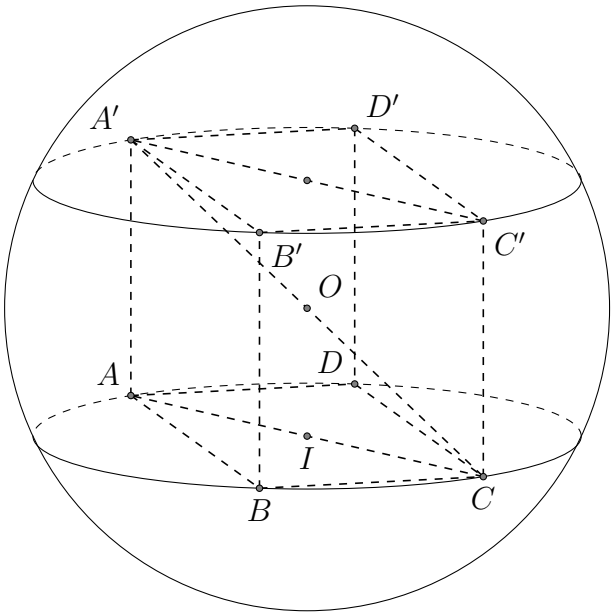
□

Bài 10.

a) Chứng minh rằng một hình hộp nội tiếp nội tiếp mặt cầu thì đó là hình hộp chữ nhật.

b) Trong các hình hộp nội tiếp mặt cầu hãy xác định hình hộp có diện tích toàn phần lớn nhất.

Lời giải.



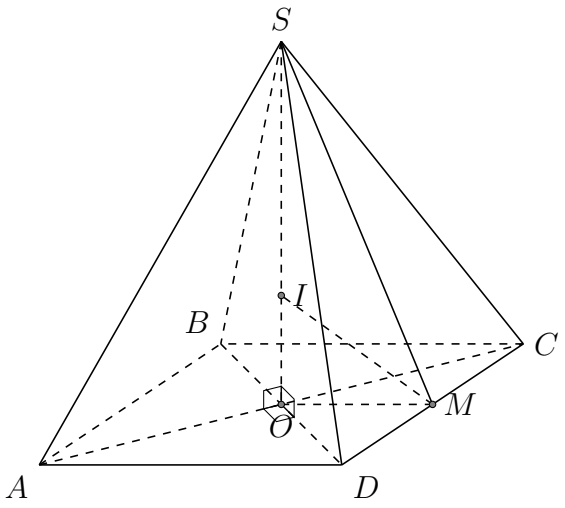
a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp mặt cầu $S(O;R)$.
Giả sử mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo một đường tròn tâm I như hình vẽ.
Ta có hình bình hành $ABCD$ nội tiếp đường tròn (I) nên phải là hình chữ nhật.
Chứng minh tương tự ta cũng có các mặt khác của hình hộp là hình chữ nhật.
Vậy hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

b) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước là $AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$ nội tiếp mặt cầu $S(O;R)$.
Ta có độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $d=2R$.
Khi đó, ta có: $d^2=a^2+b^2+c^2=4R^2$.
Diện tích toàn phần của hình hộp là $S=2ab+2bc+2ca\le a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2=8R^2$.
Vậy S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, tức là $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

□

Bài 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, đường cao bằng a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$.

Gọi M là trung điểm của CD.

Gọi I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$, khi đó, $I \in SO$.

Vì I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ nên MI là đường phân giác của góc $\widehat{SMO}$.

Khi đó, ta có IO là bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác SOM, ta có:

$$\frac{IO}{IS} = \frac{MO}{MS} \Leftrightarrow \frac{IO}{IS + IO} = \frac{MO}{MS + MO} \Leftrightarrow \frac{IO}{SO} = \frac{MO}{MS + MO}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{SO \times MO}{MS + MO} = \frac{a \times \dfrac{a}{2}}{\dfrac{a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{1 + \sqrt{5}}.$$

Vậy $r = IO = \dfrac{a}{1 + \sqrt{5}}$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Thể tích khối cầu có bán kính bằng $\frac{a}{2}$ là

A. $\frac{\pi a^3}{2}$. **B.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **D.** πa^2.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Cách giải: Thể tích khối cầu có bán kính bằng $\frac{a}{2}$ là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Một mặt cầu có đường kính bằng a có diện tích S bằng bao nhiêu?

A. $S = \frac{4\pi a^2}{3}$. **B.** $S = \frac{\pi a^2}{3}$. **C.** $S = \pi a^2$. **D.** $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Vì đường kính mặt cầu bằng a nên bán kính mặt cầu là $r = \frac{a}{2}$.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Thể tích của khối cầu có bán kính R là

A. πR^3. **B.** $\frac{4\pi R^3}{3}$. **C.** $2\pi R^3$. **D.** $\frac{\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Phương pháp:

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi \cdot R^2$.

Cách giải:

Ta có: $S = \pi = 4\pi \cdot R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 144π. **B.** 288π. **C.** 48π. **D.** 72π.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Từ đó suy ra thể tích khối cầu đã cho là $V = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 2$.

A. $\frac{32}{3}\pi$. **B.** 8π. **C.** 32π. **D.** 16π.

Lời giải.

Phương pháp

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Cách giải

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính $r = 2$ là $S = 4\pi r^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Thể tích khối cầu bán kính a bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính a là $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Một hình nón có góc ở đỉnh bằng 60^0. Hãy tính tỷ số của diện tích toàn phần chia cho diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 9. Tính diện tích xung quanh của khối trụ có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 2\sqrt{5}$.

A. $8\sqrt{5}\pi$. **B.** $2\sqrt{5}\pi$. **C.** 2π. **D.** $4\sqrt{5}\pi$.

Lời giải.

$S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.2.2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Khối cầu bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 72π. **B.** 48π. **C.** 288π. **D.** 144π.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối cầu được tính theo công thức: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$.

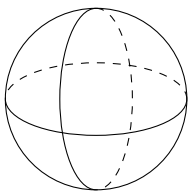
Chọn đáp án C □

Câu 11. Thể tích V của một khối cầu có bán kính R là

A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $V = \frac{1}{3}\pi R^3$. **C.** $V = \frac{4}{3}\pi R^2$. **D.** $V = 4\pi R^3$.

Lời giải.

Thể tích V của khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Chọn đáp án A □

Câu 12. Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R.

A. $S = \frac{4\pi R^3}{3}$. **B.** $S = \pi R^2$. **C.** $S = \frac{3\pi R^2}{4}$. **D.** $S = 4\pi R^2$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích của mặt cầu. bán kính R.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho mặt cầu có diện tích bằng $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. Tính bán kính r của mặt cầu.

A. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B**. $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C**. $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D**. $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu đã cho là $4\pi r^2=\dfrac{8\pi a^2}{3}$. Suy ra $r=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong các hình đa diện sau đây, hình đa diện nào **không** nội tiếp được một mặt cầu?

A. Hình tứ diện. **B**. Hình hộp chữ nhật.

C. Hình chóp ngũ giác đều. **D**. Hình chóp có đáy là hình thang vuông.

Lời giải.

Hình chóp nội tiếp được một mặt cầu thì đáy là đa giác nội tiếp được đường tròn.Mà hình thang vuông không nội tiếp được đường tròn nên hình chóp có đáy là hình thang vuông không nội tiếp được một mặt cầu.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD.

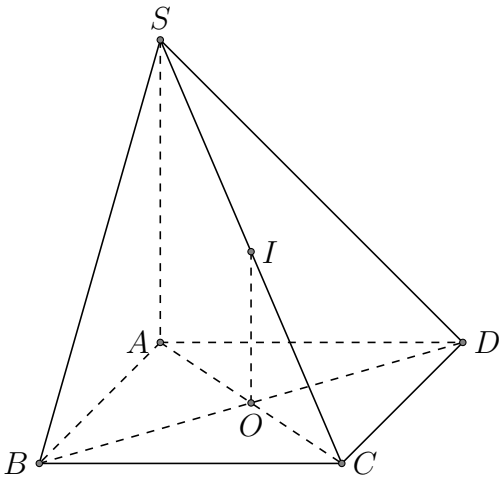
B. I là trung điểm SC.

C. I là giao điểm của AC và BD.

D. I là trung điểm SA.

Lời giải.

Ta có tam giác SBC, SCD vuông. Gọi I là trung điểm SC, khi đó $IC=IS=ID=IB=IA$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Chọn đáp án B □

Câu 16. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hình có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình có đáy là hình tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải.

Vì hình thanh cân có đường tròn ngoại tiếp nên hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Diện tích của mặt cầu có bán kính R bằng

A. $2\pi R^2$. **B**. πR^2. **C**. $4\pi R^2$. **D**. $2\pi R$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính R bằng $4\pi R^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. 12π. **B**. 9π. **C**. 30π. **D**. 15π.

Lời giải.

Độ dài đường sinh của hình nón là $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S=\pi\cdot 3\cdot 5=15\pi$.

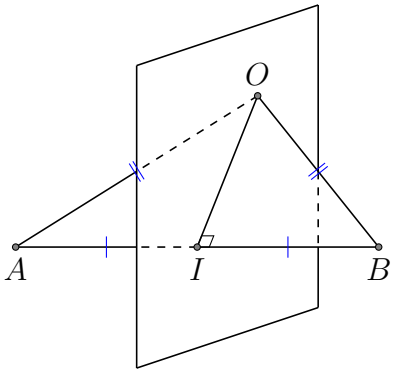
Chọn đáp án D □

Câu 19. Tập hợp tâm các mặt cầu luôn đi qua hai điểm cố định A và B cho trước là

A. Một đường thẳng. **B**. Một mặt phẳng. **C**. Một điểm. **D**. Một đoạn thẳng.

Lời giải.

Gọi O là tâm mặt cầu đi qua hai điểm A và B, khi đó $OA=OB$. Do vậy tập hợp các tâm mặt cầu luôn đi qua hai điểm cố định A và B là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.



Chọn đáp án B □

Câu 20. Nếu điểm M trong không gian luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông thì M thuộc

A. Một mặt cầu cố định. **B**. Một khối cầu cố định.

C. Một đường tròn cố định. **D**. Một hình tròn cố định.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Do tam giác AMB vuông tại M nên $MO=\dfrac{1}{2}AB=\text{const}$. Vậy tập hợp các điểm M nhìn AB dưới một góc vuông nằm trên mặt cầu đường kính AB, đây là một mặt cầu cố định.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{6}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a}{4}$.

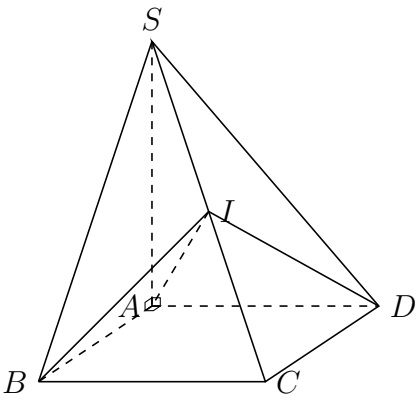
Lời giải.

Ta có $\triangle SBC, \triangle SDC, \triangle SAC$ là các tam giác vuông chung cạnh huyền SC.

Gọi I là trung điểm SC khi đó ta có $IS = IC = IB = ID = IA$.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $R_{\text{cầu}} = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 22. Cho điểm A nằm trên mặt cầu (S). Qua A kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với mặt cầu (S)?

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Trong không gian, tại một điểm cho trước nằm trên mặt cầu có **vô số** tiếp tuyến của mặt cầu đó.

Chọn đáp án B ☐

Câu 23. Cho khối cầu có bán kính R. Thể tích của khối cầu đó là

A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $V = 4\pi R^3$. **C.** $V = \frac{1}{3}\pi R^3$. **D.** $V = \frac{4}{3}\pi R^2$.

Lời giải.

Theo lý thuyết giáo khoa, khối cầu có bán kính là R thì

- ☑ Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$.
- ☑ Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 24. Bán kính R của khối cầu có thể tích $V = 36\pi a^3$ là

A. $R = 3a$. **B.** $R = 3a\sqrt{3}$. **C.** $R = a\sqrt{3}$. **D.** $R = a\sqrt[3]{9}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi a^3 \Leftrightarrow R = 3a$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 25. Cho hình trụ bán kính đáy $R = a$, mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2$. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ là

A. $8\pi a^2$, $4\pi a^3$. **B.** $6\pi a^2$, $6\pi a^3$. **C.** $16\pi a^2$, $16\pi a^3$. **D.** $6\pi a^2$, $3\pi a^3$.

Lời giải.

Chiều cao của hình trụ là $h = \frac{8a^2}{2R} = 4a$. Diện tích xung quanh của khối trụ là $S = 2\pi Rh = 8\pi a^2$, thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = 4\pi a^3$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 26. Tính diện tích mặt cầu bán kính $r = 1$.

A. $S = \pi$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = 4\pi^2$. **D.** $S = \frac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu bán kính r, ta có $S = 4\pi r^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Số tiếp tuyến kẻ từ một điểm nằm ngoài mặt cầu đến mặt cầu đó là

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Từ một điểm nằm ngoài mặt cầu kẻ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu đó.

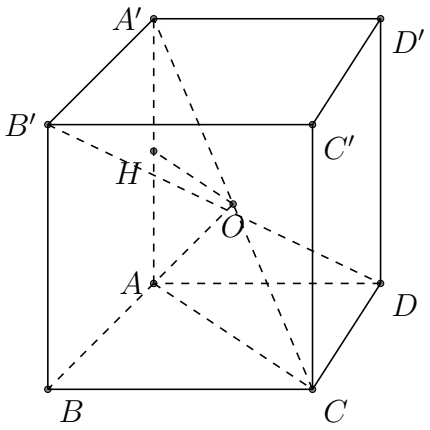
Chọn đáp án A □

Câu 28. Tính bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của một hình lập phương cạnh a.

A. $\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của các đường chéo hình lập phương, H là trung điểm AA' khi đó bán kính mặt cầu tiếp xúc tất cả các cạnh của hình lập phương là $R = OH = \dfrac{AC}{2} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 29. Khối cầu có thể tích là 36π. Diện tích của mặt cầu là

A. $S = 9\pi$. **B.** $S = 18\pi$. **C.** $S = 36\pi$. **D.** $S = 27\pi$.

Lời giải.

Ta có $V_{\text{khối cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$.

Do đó diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Khối cầu (S) có bán kính bằng r và thể tích bằng V. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. **B.** $V = \dfrac{4}{3}\pi^2 r^2$. **C.** $V = \dfrac{4}{3}\pi^2 r^3$. **D.** $V = \dfrac{4}{3}\pi r$.

Lời giải.

Đây là công thức của khối cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Diện tích của mặt cầu có bán kính $r = 5a$ là

A. $40\pi a^2$. **B.** $100\pi a^2$. **C.** $25\pi a^2$. **D.** $\dfrac{100\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (5a)^2 = 100\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tính thể tích V của khối cầu có đường kính bằng 3 cm.

A. $V = 36\pi$ cm^3. **B.** $V = \dfrac{9\pi}{8}$ cm^3. **C.** $V = \dfrac{9\pi}{2}$ cm^3. **D.** $V = 9\pi$ cm^3.

Lời giải.

Bán kính của khối cầu đó là: $R = \dfrac{3}{2}$. Từ đó ta có: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{9\pi}{2}$ cm^3.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng $2a$.

A. $S = 4\pi a^2$. **B.** $S = 2\pi a^2$. **C.** $S = \pi a^2$. **D.** $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Do mặt cầu có đường kính là $2a$ nên bán kính $R = a$, vậy $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật đó bằng

A. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. **D.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là trung điểm đường chéo.

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Thể tích của khối cầu bán kính R bằng

A. $\dfrac{1}{3}\pi R^3$. **B.** $\dfrac{2}{3}\pi R^3$. **C.** πR^3. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích của khối cầu bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Biết rằng khi quay một đường tròn có bán kính bằng 1 quay quanh một đường kính của nó ta được một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

A. $V = \dfrac{4}{3}\pi$. **B.** $V = 4\pi$. **C.** $V = \pi$. **D.** $V = 2\pi$.

Lời giải.

Vì bán kính $R = 1$, nên áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho khối cầu có thể tích 36π (cm^3). Bán kính R của khối cầu là

A. $R = \sqrt{6}$ cm. **B.** $R = 3\sqrt{2}$ cm. **C.** $R = 3$ cm. **D.** $R = 6$ cm.

Lời giải.

Ta có thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Công thức tính diện tích mặt cầu là

A. $S = 3\pi R^2$. **B.** $S = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. **C.** $S = \pi R^2$. **D.** $S = 4\pi R^2$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích mặt cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Thể tích của khối cầu có bán kính R là

A. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $V = \frac{3}{4}\pi R^3$. **C.** $V = 4\pi R^3$. **D.** $V = \frac{1}{3}\pi R^3$.

Lời giải.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ là công thức tính thể tích khối cầu bán kính R.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng $2a$. Tính thể tích V của mặt cầu (S) theo a.

A. $V = 16\pi a^3$. **B.** $V = 8\pi a^3$. **C.** $V = \frac{32}{3}\pi a^3$. **D.** $V = \frac{22}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) thì ta có $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Một mặt cầu có diện tích là 16π. Tính bán kính R của mặt cầu.

A. $R = 2\pi$. **B.** $R = 2$. **C.** $R = 4$. **D.** $R = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi R^2$ nên $16\pi = 4\pi R^2$ suy ra $R = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Một mặt cầu có bán kính $R\sqrt{3}$ có diện tích bằng

A. $4\pi R^2\sqrt{3}$. **B.** $8\pi R^2$. **C.** $4\pi R^2$. **D.** $12\pi R^2$.

Lời giải.

Diện tích $S = 4\pi(R\sqrt{3})^2 = 12\pi R^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho khối trụ có thể tích là πa^3 và bán kính đáy là $2a$. Độ dài đường cao của khối trụ đó là

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải.

$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{\pi a^3}{\pi \cdot (2a)} = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Một hình cầu có bán kính bằng $2(m)$. Hỏi diện tích của mặt cầu bằng bao nhiêu?

A. $4\pi(m^2)$. **B.** $16\pi(m^2)$. **C.** $8\pi(m^2)$. **D.** $\pi(m^2)$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 16\pi(m^2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h. Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 18 lần. **B.** 12 lần. **C.** 6 lần. **D.** 36 lần.

Lời giải.

Ta có $V_{\text{trụ}} = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới $V'_{\text{trụ}} = B' \cdot h' = \pi \cdot (3r)^2 \cdot (2h) = 18 \cdot B \cdot h$.

Vậy $\dfrac{V'_{\text{trụ}}}{V_{\text{trụ}}} = 18$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng $(P) : 4x - y - 3z + 2 = 0$.

A. $\vec{n} = (4; -1; -3)$. **B.** $\vec{n} = (-1; -3; 2)$. **C.** $\vec{n} = (4; 0; -3)$. **D.** $\vec{n} = (4; -3; 2)$.

Lời giải.

Từ phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P) : 4x - y - 3z + 2 = 0$ ta có $\vec{n} = (4; -1; -3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Công thức tính thể tích V của khối cầu có bán kính bằng R là

A. $V = 4\pi R^2$. **B.** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^2$. **C.** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. **D.** $V = \pi R^3$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Mặt cầu có bán kính bằng 1 thì diện tích bằng

A. 4π. **B.** 16π. **C.** $\dfrac{4}{3}\pi$. **D.** 2π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Khối cầu bán kính $R = 2a$ có thể tích là

A. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $\dfrac{32\pi a^3}{3}$. **D.** $6\pi a^3$.

Lời giải.

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi (2a)^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. $R = a$. **B.** $R = 2a\sqrt{3}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có tâm là tâm của khối lập phương và đường kính là đường chéo của hình lập phương.

Ta có độ dài đường chéo hình lập phương là $d = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow R = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải.

Có vô số mặt cầu có tâm trùng với tâm của đường tròn cho trước, bán kính là bán kính của đường tròn cho trước.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Diện tích S của một mặt cầu có bán kính R bằng

A. $S = 4\pi R$. **B**. $S = 4\pi R^2$. **C**. $S = 4\pi^2 R^2$. **D**. $S = 4R^2$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích mặt cầu ta có: $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Khối cầu bán kính $R = 2a$ có thể tích là

A. $\dfrac{32\pi a^3}{3}$. **B**. $6\pi a^3$. **C**. $16\pi a^2$. **D**. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Mọi hình lăng trụ luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Mọi hình chóp luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Mọi hình lăng trụ đứng luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Mọi hình tứ diện luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải.

Điều kiện để một lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là: Lăng trụ đứng, có đáy là đa giác nội tiếp được đường tròn.

Điều kiện để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là: Đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp được đường tròn.

Do đó, ta suy ra mọi tứ diện luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho mặt cầu có bán kính là $2a$. Tính diện tích của mặt cầu.

A. $16\pi a^2$. **B**. $\dfrac{3}{4}\pi a^2$. **C**. $4\pi a^2$. **D**. $8\pi a^2$.

Lời giải.

$S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Với B là diện tích đáy, h là chiều cao và R là bán kính. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Thể tích của khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

B. Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rh$.

C. Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2$.

D. Thể tích của khối trụ là $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

☑ Thể tích của khối cầu có bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

☑ Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính R và chiều cao h là $S = 2\pi Rh$.

☑ Diện tích của mặt cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

☑ Thể tích của khối trụ có bán kính R và chiều cao h là $V = Bh$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Cho khối cầu có thể tích $V = 4\pi \cdot a^3, (a > 0)$. Tính theo a bán kính của khối cầu.

A. $R = a$. **B.** $R = a\sqrt[3]{3}$. **C.** $R = a\sqrt[3]{4}$. **D.** $R = a\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi a^3 \Rightarrow R^3 = 3a^3 \Rightarrow R = a\sqrt[3]{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Cho một mặt cầu có diện tích là S, thể tích khối cầu đó là V. Tính bán kính R của mặt cầu.

A. $R = \dfrac{3V}{S}$. **B.** $R = \dfrac{S}{3V}$. **C.** $R = \dfrac{4V}{S}$. **D.** $R = \dfrac{V}{3S}$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu là $S = 4\pi R^2$; $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$\Rightarrow R = \dfrac{3V}{S}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Cho khối cầu có thể tích $V = 4\pi a^3 (a > 0)$. Tính theo a bán kính R của khối cầu.

A. $R = a$. **B.** $R = a\sqrt[3]{3}$. **C.** $R = a\sqrt[3]{4}$. **D.** $R = a\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$V = 4\pi a^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi a^3 \Leftrightarrow R^3 = 3a^3 \Leftrightarrow R = a\sqrt[3]{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Thể tích khối cầu đường kính $2a$ bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $2\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\pi a^3}{4}$.

Lời giải.

Khối cầu có bán kính $R = \dfrac{2a}{2} = a$. Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

A. $V = \dfrac{64\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi x là độ dài cạnh của hình lập phương. Theo giả thiết, ta có

$$V_{\text{lập phương}} = 64a^3 \Leftrightarrow x^3 = 64a^3 \Leftrightarrow x = 4a.$$

Suy ra bán kính khối cầu nội tiếp của hình lập phương là $r = \dfrac{4a}{2} = 2a$.

Do đó, thể tích của khối cầu là

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2a)^3 = \frac{32\pi a^3}{3}.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 62. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng $2a$.

A. $S = 16\pi a^2$. **B.** $S = 4\pi a^2$. **C.** $S = \dfrac{32}{3}\pi a^3$. **D.** $S = \dfrac{16}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (2a)^2 = 16\pi a^2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 63. Cho khối cầu (T) tâm O bán kính R. Gọi S và V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $S = 2\pi R^2$. **B.** $V = 4\pi R^3$. **C.** $S = \pi R^2$. **D.** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Lời giải.

Ta có diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$ và thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 64. Diện tích của mặt cầu bán kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $16a^2$. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu bán kính $2a$ là $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 65. Mặt cầu bán kính a có diện tích bằng

A. $\dfrac{4}{3}\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi r^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 66. Tập hợp điểm M trong không gian cách đều đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi $(R > 0)$ là

A. hai đường thẳng song song. **B.** một mặt cầu.

C. một mặt nón. **D.** một mặt trụ.

Lời giải.

Tập hợp điểm M trong không gian cách đều đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi $(R > 0)$ là một mặt trụ.

Chọn đáp án D ☐

Câu 67. Mặt cầu có bán kính a thì có diện tích xung quanh bằng

A. $\dfrac{4}{3}\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $2\pi a$. **D.** πa^2.

Lời giải.

Diện tích xung quanh mặt cầu là

$$S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 68. Thể tích của khối cầu bán kính R bằng

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $4\pi R^3$. **C.** $2\pi R^3$. **D.** $\frac{3}{4}\pi R^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu bán kính R bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Tập hợp tâm các mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng là

A. một mặt phẳng. **B.** một đường thẳng. **C.** một mặt trụ. **D.** một mặt cầu.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C. Suy ra $IA = IB = IC$, do đó I nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Thể tích V của khối cầu bán kính 6cm là

A. $V = 216\pi(\text{cm}^3)$. **B.** $V = 288\pi(\text{cm}^3)$. **C.** $V = 432\pi(\text{cm}^3)$. **D.** $V = 864\pi(\text{cm}^3)$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính 6cm là $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi(\text{cm}^3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Một mặt cầu đường kính bằng 6 cm. Khi đó mặt cầu có diện tích là

A. 36π cm^2. **B.** 144π cm^2. **C.** 9π cm^2. **D.** 12π cm^2.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là 3 cm. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$ (cm^2).

Chọn đáp án A □

Câu 72. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 2$.

A. 16π. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 8π. **D.** 32π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Khối cầu có bán kính R có thể tích là

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $\frac{4}{3}\pi R^2$. **C.** πR^3. **D.** $4\pi R^2$.

Lời giải.

Khối cầu có bán kính R có thể tích là $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Mặt cầu có bán kính a có diện tích bằng

A. $\frac{4}{3}\pi a^2$. **B.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải.

Ta có diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi r^2$, với $r = a$.

Suy ra $S = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Thể tích của khối cầu có bán kính bằng 4 là

A. $\dfrac{256\pi}{3}$. **B.** 64π. **C.** 256π. **D.** $\dfrac{64\pi}{3}$.

Lời giải.

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{256\pi}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Tính diện tích S của mặt cầu và thể tích V của khối cầu có bán kính bằng 3 cm.

A. $S = 36\pi$ (cm^2) và $V = 36\pi$ (cm^3). **B.** $S = 18\pi$ (cm^2) và $V = 108\pi$ (cm^3).

C. $S = 36\pi$ (cm^2) và $V = 108\pi$ (cm^3). **D.** $S = 18\pi$ (cm^2) và $V = 36\pi$ (cm^3).

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi r^2 = 36\pi$ (cm^2) và $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$ (cm^3).

Chọn đáp án A □

Câu 77. Thể tích của khối cầu có bán kính R là

A. $\dfrac{4\pi R^3}{3}$. **B.** πR^3. **C.** $\dfrac{\pi R^3}{3}$. **D.** $2\pi R^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là

A. $S = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $S = \pi R^2$. **C.** $S = \dfrac{3}{4}\pi R^2$. **D.** $S = 4\pi R^2$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Một mặt cầu có bán kính bằng 2 có diện tích bằng

A. 16π. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** 64π. **D.** $\dfrac{64\pi}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Diện tích mặt cầu có bán kính a bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Tính thể tích khối cầu có bán kính bằng a.

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V = 4\pi a^3$. **D.** $V = 2\pi a^3$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1, mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1).

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Gọi S_1, S_2 là diện tích của mặt cầu (S_1), (S_2).

Ta có: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \frac{4\pi(2R_1)^2}{4\pi R_1^2} = \frac{4 \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi R_1^2} = 4$.

Vậy $\frac{S_2}{S_1} = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Hình đa diện **không** luôn luôn nội tiếp được trong một mặt cầu là

A. Hình chóp tứ giác. **B.** Hình hộp chữ nhật.

C. Hình chóp tam giác. **D.** Hình chóp ngũ giác đều.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A. Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy r là $S_{xq} = \pi rh$.

B. Thể tích khối trụ có chiều cao h, bán kính đáy r là $V = \pi r^2 h$.

C. Thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

D. Thể tích khối nón có chiều cao h, bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Ý đầu sai vì diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy r là $S_{xq} = 2\pi rh$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Hình cầu có đường kính bằng 2 thì thể tích bằng

A. $\frac{32}{3}\pi$. **B.** $\frac{4}{3}\pi$. **C.** 4π. **D.** 16π.

Lời giải.

Hình cầu có đường kính bằng 2 nên bán kính của nó là $R = 1$.

Thể tích của khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Biết rằng diện tích mặt cầu có bán kính r được tính theo công thức $S = 4\pi r^2$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính bằng 3.

A. 9π. **B.** 12π. **C.** 4π. **D.** 36π.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu có bán kính bằng 3 là $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Thể tích khối cầu bán kính $\frac{3}{2}a$ bằng

A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\frac{9}{2}\pi a^3$. **D.** $\frac{9}{8}\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}a\right)^3 = \dfrac{9}{2}\pi a^3$.

Chọn đáp án C □

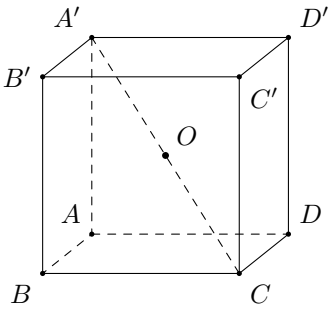
Câu 88. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là

A. $\pi\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $3\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có tâm O là giao điểm các đường chéo của hình lập phương và có bán kính $R = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$. Vậy thể tích cần tìm là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 89. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng a.

A. $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2$. **B.** $S = \pi a^2$. **C.** $S = 4\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính bằng a là $S = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Bán kính r của khối cầu có thể tích $V = 36\pi$ (cm^3) là

A. $r = 3$ (cm). **B.** $r = 6$ (cm). **C.** $r = 4$ (cm). **D.** $r = 9$ (cm).

Lời giải.

Theo đề bài ta có $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Gọi R là bán kính, S là diện tích mặt cầu và V là thể tích của khối cầu. Công thức nào sau đây **sai**?

A. $S = \pi R^2$. **B.** $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. **C.** $S = 4\pi R^2$. **D.** $3V = SR$.

Lời giải.

Ta có các công thức $S = 4\pi R^2$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Suy ra $3V = SR$.

Công thức sai là $S = \pi R^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 144π. **B.** 288π. **C.** 48π. **D.** 72π.

Lời giải.

Thể tích của khối cầu có bán kính $R = 6$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng $2a$.

A. $S = 2\pi a^2$. **B.** $S = 16\pi a^2$. **C.** $S = \pi a^2$. **D.** $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Mặt cầu có đường kính bằng $2a$ nên có bán kính $R = a$.

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Diện tích của mặt cầu bán kính $R = 3$ bằng

A. 36π. **B.** 18π. **C.** 12π. **D.** 6π.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu đã cho là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng $2a$.

A. $S = 16\pi a^2$. **B.** $S = 4\pi a^2$. **C.** $S = \dfrac{32}{3}\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{16}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính $R = 2a$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Tính diện tích S của mặt cầu có đường kính bằng 6.

A. $S = 12\pi$. **B.** $S = 36\pi$. **C.** $S = 48\pi$. **D.** $S = 144\pi$.

Lời giải.

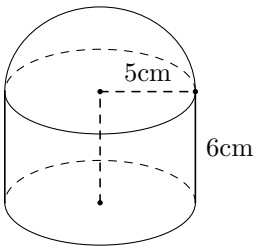
☑ Bán kính mặt cầu là $R = 3$.

☑ Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 97.

Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5$cm, chiều cao $h = 6$cm và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S = 110\pi$ cm^2 . **B.** $S = 130\pi$ cm^2.

C. $S = 160\pi$ cm^2. **D.** $S = 80\pi$ cm^2.

Lời giải.

Diện tích nửa hình cầu (nắp hộp) là $S_1 = 2\pi r^2 = 50\pi$ cm^2.

Diện tích thân hộp là $S_2 = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi$ cm^2.

Diện tích S cần sơn là $S = S_1 + S_2 = 110\pi$ cm^2.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Mặt cầu bán kính R có diện tích là

A. $\dfrac{4}{3}\pi R^2$. **B.** $2\pi R^2$. **C.** $4\pi R^2$. **D.** πR^2.

Lời giải.

Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là $\dfrac{4}{3}\pi R^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Diện tích mặt cầu bán kính a bằng

A. $4\pi a^3$. **B**. $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **C**. $4\pi a^2$. **D**. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính bằng a là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Một quả bóng chuyền có mặt ngoài là mặt cầu có đường kính 20 cm. Diện tích mặt ngoài quả bóng chuyền là

A. 1600 cm^2. **B**. $1{,}6\pi$ m^2. **C**. 400π cm^2. **D**. 16 dm^2.

Lời giải.

Bán kính mặt ngoài của quả bóng chuyền là $r = \dfrac{20}{2} = 10$ cm.

Do đó diện tích mặt ngoài quả bóng chuyền là $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ cm^2.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. B	4. C	5. B	6. D	7. A	8. C	9. A	10. C
11. A	12. D	13. A	14. D	15. B	16. D	17. C	18. D	19. B	20. A
21. A	22. B	23. A	24. A	25. A	26. B	27. A	28. D	29. C	30. A
31. B	32. C	33. A	34. C	35. D	36. B	37. C	38. D	39. A	40. C
41. B	42. D	43. C	44. B	45. A	46. A	47. C	48. A	49. C	50. D
51. D	52. B	53. A	54. D	55. A	56. D	57. B	58. A	59. B	60. A
61. C	62. A	63. D	64. B	65. C	66. D	67. B	68. A	69. B	70. B
71. A	72. A	73. A	74. C	75. A	76. A	77. A	78. D	79. A	80. A
81. B	82. C	83. A	84. A	85. B	86. D	87. C	88. C	89. C	90. A
91. A	92. B	93. D	94. A	95. A	96. B	97. A	98. A	99. C	100. C

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực dương và a, $b \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.
B. $a^{\log_a b} = b$.
C. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.
D. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Lời giải.

Ta có

① Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

② Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Thể tích khối cầu bán kính a bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.
B. $4\pi a^3$.
C. $\dfrac{\pi a^3}{3}$.
D. $2\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính a là $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3 = \dfrac{4\pi a^3}{3}$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tâm mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ là điểm có tọa độ

A. $(-2; -4; -6)$.
B. $(1; 2; 3)$.
C. $(-1; -2; -3)$.
D. $(2; 4; 6)$.

Lời giải.

Viết lại phương trình mặt cầu ta có: $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$, suy ra tâm mặt cầu có tọa độ $I(1; 2, 3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π.

A. $S = 32\pi$.
B. $S = 16\pi$.
C. $S = 64\pi$.
D. $S = 8\pi$.

Lời giải.

Đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính R của mặt cầu.

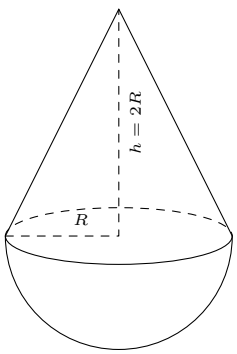
Do đó, chu vi của đường tròn lớn là $2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$.

Vậy diện tích của mặt cầu (S) là $4\pi R^2 = 16\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 5.

Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên. Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng 36π cm^3. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng



A. $\pi(\sqrt{5}+3)$ cm^2.
B. $9\pi(\sqrt{5}+2)$ cm^2.
C. $9\pi(\sqrt{5}+3)$ cm^2.
D. $\pi(\sqrt{5}+2)$ cm^2.

Lời giải.

Ta có thể tích của toàn bộ đồ vật V bằng tổng thể tích khối nón V_1 và nữa thể tích khối cầu V_2.
$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 h + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3 + \dfrac{2}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r = 3$ cm.
$\Rightarrow$ đường sinh của khối nón $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$.
Diện tích bề mặt toàn bộ đồ vật S bằng tổng diện tích xung quanh khối nón S_1 và nữa diện tích xung quanh khối cầu S_2.
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \pi rl + \dfrac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = \pi r^2\sqrt{5} + 2\pi r^2 = \pi r^2(\sqrt{5} + 2) = \pi \cdot 3^2(\sqrt{5} + 2) = 9\pi(\sqrt{5} + 2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Hình cầu có đường kính bằng 2 thì thể tích bằng
A. $\dfrac{32}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{4}{3}\pi$. **C.** 4π . **D.** 16π.

Lời giải.

Thể tích hình cầu bán kính R được tính theo công thức $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, với $R = 1$ ta có $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \dfrac{4}{3}\pi$.
Chọn đáp án (B) □

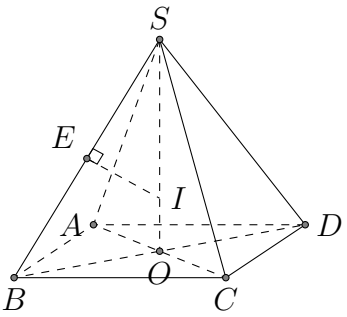
Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.
A. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $R = a\sqrt{2}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và E là trung điểm SB.
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Trong mặt phẳng (SBO) kẻ đường trung trực của SB cắt SO tại I, khi đó

$$IA = IB = IC = ID = IS$$

nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính mặt cầu là $R = IS$.



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \dfrac{BD}{2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $SA = SB = SC = SD = 2a$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều) nên $SE = EB = \dfrac{2a}{2} = a$.
Xét tam giác SBO vuông tại O, ta có $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.
Ta có ΔSEI đồng dạng với tam giác $SOB(g-g) \Rightarrow \dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SE}{SO} \Leftrightarrow IS = \dfrac{SB.SE}{SO} = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.
Vậy bán kính $R = a\sqrt{2}$.
Chú ý:
Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều có cạnh bên là $SA = l$ và chiều cao $S0 = h$ là $R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{l^2}{2h}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Diện tích mặt cầu có đường kính bằng $2a$ là
A. $16\pi a^3$. **B.** πa^2. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.

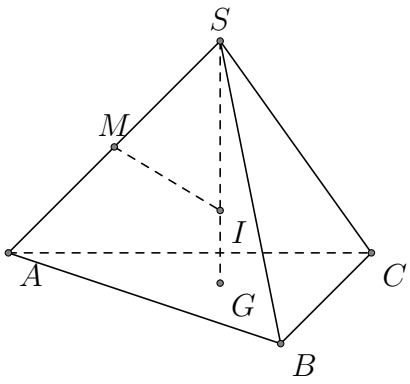
Đường kính $d = 2a$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.
Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h = 1$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó là

A. $S = 9\pi$. **B.** $S = 27\pi$. **C.** $S = 6\pi$. **D.** $S = 5\pi$.

Lời giải.

Gọi hình chóp tam giác đều là $S.ABC$. Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra đường cao hình chóp tam giác đều là $S.ABC$ là SG.
Ta có: $AG = \sqrt{2}; SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{3}$.
Tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy.
Gọi d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì d là SG.
Gọi M trung điểm của SA, dựng mặt phẳng trung trực SA cắt d tại I, khi đó $IA = IB = IC = IS$. Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $R = IS$.
Ta có ΔSMI đồng dạng với ΔSGA, suy ra $SI = \dfrac{SA^2}{2SG} = \dfrac{3}{2}$.
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là
$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$.

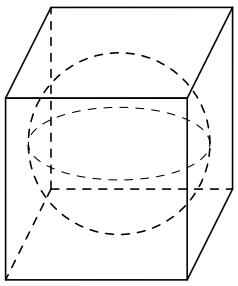
Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp hình lập phương đó bằng

A. $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{64\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Khối lập phương có thể tích $64a^3$ nên cạnh bằng $4a$.
Khối cầu nội tiếp khối lập phương có bán kính $R = \dfrac{4a}{2} = 2a$ nên thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là hai tam giác đều cạnh chung $BC = 2$. Gọi I là trung điểm của BC, $\widehat{AID} = 2\alpha$ mà $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Hãy xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

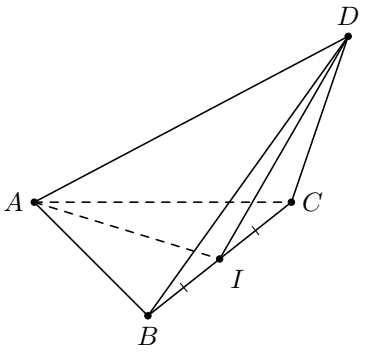
A. O là trung điểm của AD. **B.** O là trung điểm của BD.
C. O thuộc mặt phẳng (ADB). **D.** O là trung điểm của AB.

Lời giải.

Ta có $AI = DI = \sqrt{3}$ và $\cos AID = -\dfrac{1}{3}$ nên

$$AD^2 = AI^2 + DI^2 - 2 \cdot AI \cdot DI \cdot \cos \widehat{AID} = 8.$$

Sử dụng định lí Pytago đảo dễ dàng suy ra tam giác ACD và tam giác ABD vuông có chung cạnh huyền AD.
Vậy tâm cầu ngoại tiếp tứ diện là trung điểm O của AD.



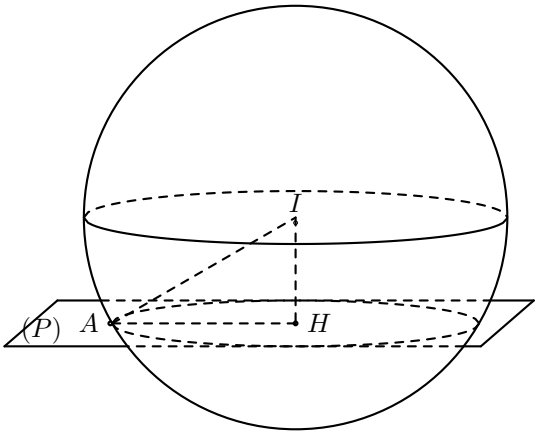
Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm được thiết diện là một hình tròn có diện tích $9\pi \text{cm}^2$. Tính thể tích khối cầu (S).

A. $\dfrac{250\pi}{3}$ cm^3. **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}$ cm^3. **C.** $\dfrac{25\pi}{3}$ cm^3. **D.** $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.

- ☑ Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là tâm đường tròn giao tuyến, A là một điểm bất kì trên đường tròn, R là bán kính của (S).
- ☑ Ta có $\text{d}(I,(P)) = 4$.
- ☑ $S_{(C)} = \pi AH^2 = 9\pi \Rightarrow AH = 3$.
- ☑ Ta có $R = \sqrt{AH^2 + \text{d}(I,(P))} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- ☑ Thể tích khối cầu (S) là $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó là

A. $S = \pi a^2$. **B.** $S = \dfrac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $S = 3\pi a^2$. **D.** $S = 12\pi a^2$.

Lời giải.

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh bằng a có bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đó là: $S = 4\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$, khi đó bán kính R của mặt cầu là

A. $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D ☐

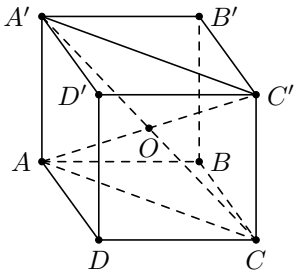
Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\dfrac{3\pi a^2}{4}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$. **D.** $9\pi a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3a$.

Gọi O là giao điểm của AC' và $A'C$, khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Suy ra $R = OA = \dfrac{3a}{2}$, do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp $ABCD.A'B'C'D'$ là $S = 4piR^2 = 4\pi \cdot \dfrac{9a^2}{4} = 9\pi a^2$.



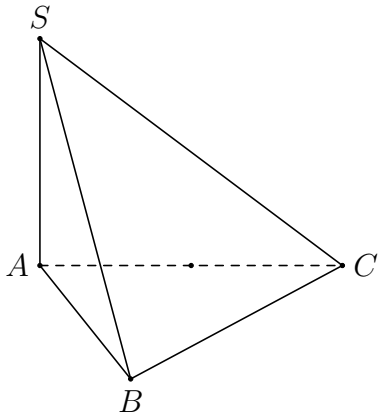
Chọn đáp án D ☐

Câu 16. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.

- ☑ Ta có SA, AB, BC đôi một vuông góc $\Rightarrow SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông tại B.
- ☑ Gọi I là trung điểm của là tâm AC thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- ☑ Khi đó bán kính đường tròn tâm I ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $r = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2}$.
- ☑ Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ là $R = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2+c^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 17. Một hình nón có bán kính đáy bằng 3cm, độ dài đường sinh bằng 4cm. Khối nón giới hạn bởi hình nón đó có thể bằng bao nhiêu?

A. $3\pi\sqrt{7}\text{cm}^2$. **B.** $12\pi\text{cm}^2$. **C.** $15\pi\text{cm}^2$. **D.** $2\pi\sqrt{7}\text{cm}^2$.

Câu 18. Một hình nón (N) có đỉnh I, có O là tâm của mặt đáy. (N) có độ dài đường sinh $l = 10$ và góc ở đỉnh bằng 60^0. Một mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của đoạn IO và vuông góc với IO, cắt khối nón (N) thành hai phần, trong đó có một khối nón cụt. Tính thể tích của khối nón cụt đó.

A. $\dfrac{875\pi\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{125\pi\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{875\pi}{24}$. **D.** $\dfrac{875\pi\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ biết rằng diện tích của thiết diện qua trục của hình trụ là 8.

A. 64. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** 4π.

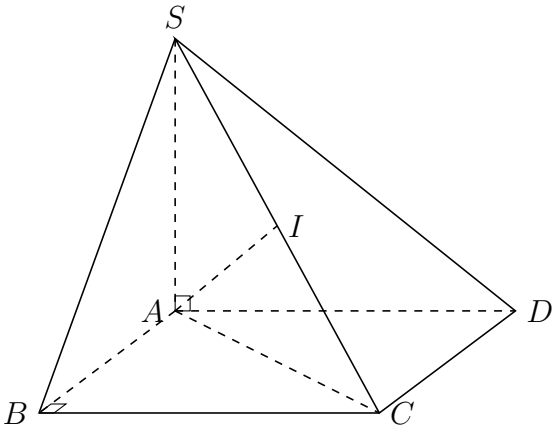
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{5a}{2}$. **B.** $R = \dfrac{17a}{2}$. **C.** $R = \dfrac{13a}{2}$. **D.** $R = 6a$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của SC, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Vậy bán kính $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = \dfrac{13a}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho mặt cầu (S) có diện tích bằng $4a^2\pi$ cm^2. Tính thể tích khối cầu (S).

A. $16a^3\pi$ cm^3. **B.** $32a^3\pi$ cm^3. **C.** $\dfrac{4a^3\pi}{3}$ cm^3. **D.** $\dfrac{16a^3\pi}{3}$ cm^3.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$, SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC đều cạnh $3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = a$. **B.** $R = 2a$. **C.** $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC và G là trọng tâm tam giác ABC.

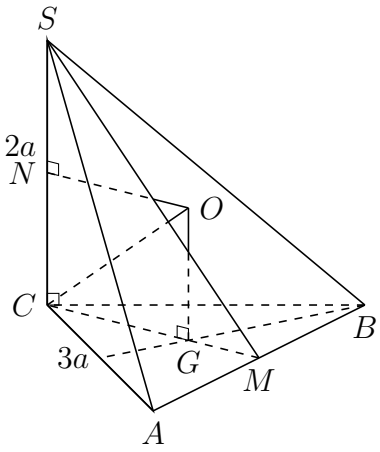
Trong (SCM), dựng đường thẳng d đi qua G và song song với SC.

$\Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SCM) kẻ đường trung trực d' của SC: $d' \cap d = O$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in d \\ O \in d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OS = OC \end{cases} \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$\Rightarrow R = OC = \sqrt{CG^2 + GO^2} = 2a$.



Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình chóp có đáy là hình thoi thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là tứ giác thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình chóp có đáy là hình tam giác thì luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải.

Đáy là tam giác thì luôn có đường tròn ngoại tiếp, do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt trung trực của một cạnh bên.

Các phương án lựa chọn còn lại thì không chắc tồn tại đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hình lăng trụ tam giác đều có chín cạnh đều bằng a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó là

A. $\frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{18}$. **C.** $\frac{7\pi a^3\sqrt{3}}{54}$. **D.** $\frac{7\pi a^3\sqrt{7}}{54}$.

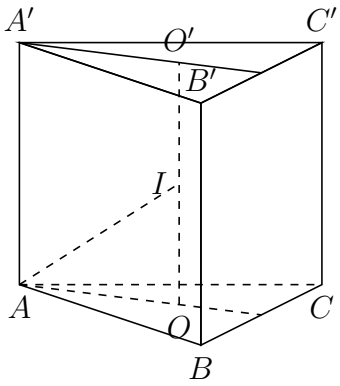
Lời giải.

Gọi hình lăng trụ đã cho là $ABC.A'B'C'$

Gọi O ,O' lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABC, A'B'C'$

Do tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đều nên OO' là trục của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và $A'B'C'$

Gọi M là trung điểm của AA'. Qua M dựng đường thẳng trung trực của AA', giả sử đường thẳng đó cắt OO' tại I thì I là tâm cần tìm. Bán kính là $R = IA$



Ta có: $AO = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $IO = \frac{1}{2}\cdot AA' = \frac{a}{2}$

Khi đó: $R = IA = \sqrt{AO^2 + IO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54}$

Chọn đáp án A □

Câu 25. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tồn tại mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình lăng trụ có đáy là tứ giác lồi.

B. Tồn tại mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp đa giác đều.

C. Tồn tại mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình tứ diện bất kì.

D. Tồn tại mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình hộp chữ nhật.

Lời giải.

Ta nhận thấy, không phải tứ giác lồi nào cũng nội tiếp được một đường tròn.

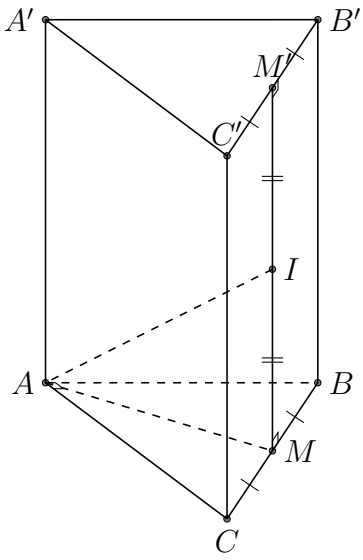
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

A. $R = 2a\sqrt{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = a\sqrt{2}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.
Vì ABC và $A'B'C'$ là các tam giác vuông nên M, M' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của chúng.
Gọi I là trung điểm của MM'. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và bán kính mặt cầu đó là $R = IA$.
Ta có:
$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$; $AM = \dfrac{BC}{2} = a$
và $IM = \dfrac{MM'}{2} = \dfrac{AA'}{2} = a$.
Vậy $R = IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 27. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1, mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1).

A. 4. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1) bằng $\dfrac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = 4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 28. Tính đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

A. $6a$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $3a$.

Lời giải.

Đường chéo hình lập phương chính là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương. Khi đó, đường kính bằng $\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 3a$.

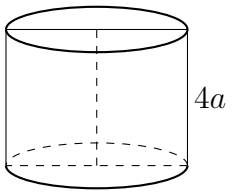
Chọn đáp án D ☐

Câu 29. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S = 4\pi a^2$. **B.** $S = 16\pi a^2$. **C.** $S = 8\pi a^2$. **D.** $S = 24\pi a^2$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên ta có: $r = 2a$ và $h = 4a$.
Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2a \cdot 4a = 16\pi a^2$



Chọn đáp án B ☐

Câu 30. Trong không gian mặt cầu (S) tiếp xúc với sáu mặt của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích V của khối cầu tương ứng.

A. $V = \dfrac{\pi a^3}{24}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. **D.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Dễ thấy bán kính mặt cầu bằng nửa độ dài cạnh hình lập phương.
Vậy thể tích khối cầu đó là $V = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{a^3}{8} = \dfrac{\pi a^3}{6}$.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có độ dài đường chéo bằng $4a$.

A. $64\pi a^2$. **B.** $16\pi a$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải.

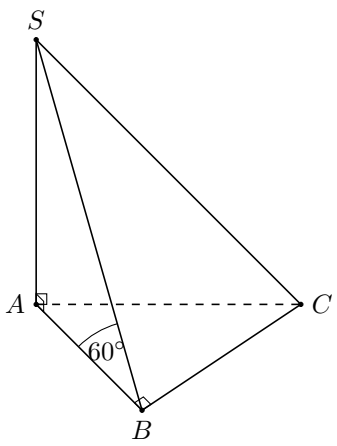
Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{4a}{2} = 2a$.
Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$.
Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AC = 2a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB với đáy bằng $60°$. Tính diện tích mặt cầu tâm S và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC).

A. $16\pi a^2$. **B.** $24\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $48\pi a^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $AB^2 = BC^2 = \dfrac{1}{2}AC^2 = 4a^2$
$\Rightarrow AB = 2a$.
Theo giả thiết $(\widehat{SB;(ABC)}) = 60° \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$
$\Rightarrow SA = AB.\tan 60° = 2a\sqrt{3}$.
Vì $SA \perp (ABC)$ nên mặt cầu tâm S và tiếp xúc với (ABC) có bán kính $R = SA = 2a\sqrt{3}$.
Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4.\left(2a\sqrt{3}\right)^2 = 48\pi a^2$.



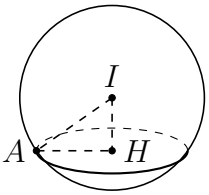
Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình cầu đường kính $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P).

A. a. **B.** $a\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $HI = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.



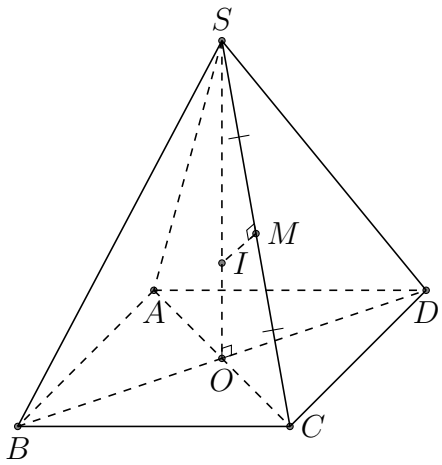
Chọn đáp án A □

Câu 34. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{6}\pi a^3}{27}$.

Lời giải.

Kẻ trung trực SC cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Cạnh bên tạo với đáy một góc $60^\circ \Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ$.

Suy ra $SO = \tan 60^\circ \cdot AO = \sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$SA = \dfrac{AO}{\cos 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = a\sqrt{2}$.

Ta có $\triangle SMI \backsim \triangle SOC \Rightarrow \dfrac{SI}{SC} = \dfrac{SM}{SO}$

$\Rightarrow R = SI = \dfrac{SM \cdot SC}{SO} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8}{27}\pi a^3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Hình trụ có bán kính đáy r. Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy, với $OO' = 2r$. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ trên. Khi đó

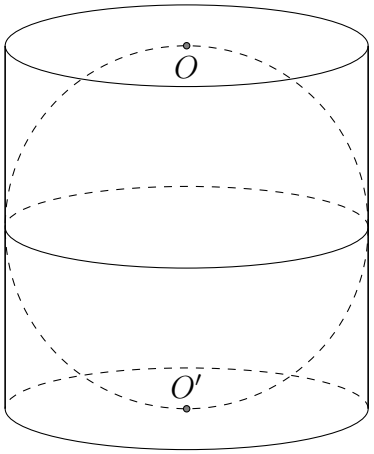
A. $S_1 = \dfrac{2S_2}{3}$. **B.** $S_1 = S_2$. **C.** $S_1 = \dfrac{3S_2}{4}$. **D.** $S_1 = \dfrac{S_2}{2}$.

Lời giải.

Ta có: mặt cầu (S) có bán kính là r.

Do đó: $S_1 = 4\pi r^2$. $S_2 = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$.

Suy ra: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2}{3}$ hay $S_1 = \dfrac{2S_2}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho mặt cầu có diện tích bằng 72π cm^2. Tính bán kính R của khối cầu giới hạn bởi mặt cầu đó.

A. $R = \sqrt{6}$ cm. **B.** $R = 3\sqrt{2}$ cm. **C.** $R = 6$ cm. **D.** $R = 3$ cm.

Lời giải.

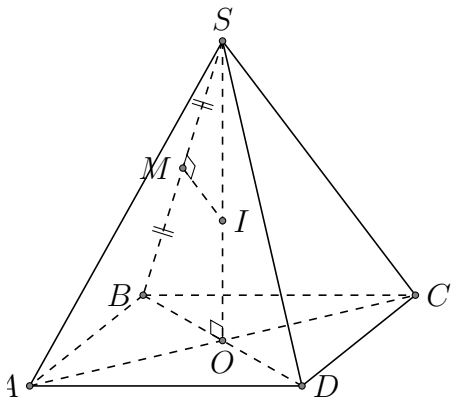
Ta có diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 72\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 2 và cạnh đáy bằng 1.

A. $\dfrac{32\pi}{7}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{7}$. **C.** $\dfrac{128\pi}{21\sqrt{14}}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.



Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SB.
Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với SB và cắt SO tại I. Suy ra, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Xét $\triangle MSI$ và $\triangle OSB$ là hai tam giác đồng dạng, ta có

$$\frac{MS}{OS}=\frac{SI}{SB}\Rightarrow R=SI=\frac{MS\cdot SB}{OS}.$$

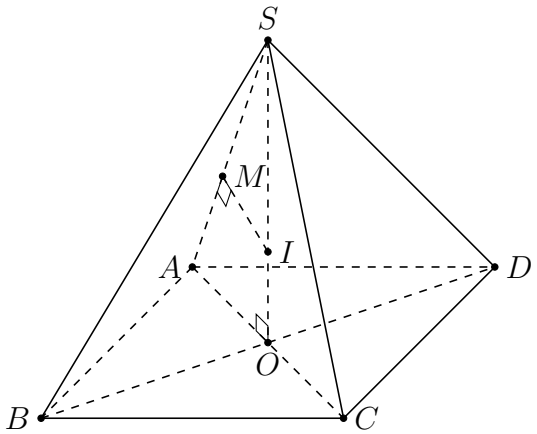
Mặt khác $OS=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. Do đó $R=\dfrac{1\cdot 2}{\frac{\sqrt{14}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$.
Vậy diện tích mặt cầu ngoài tiếp là $S=4\pi R^2=\dfrac{32\pi}{7}$ (đvdt).
Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $4\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm SA, trên SO lấy điểm I sao cho $MI\perp SA$.
Khi đó $IS=IA=IB=IC=ID$ và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Lại có $\triangle SMI\backsim\triangle SOA$ nên $IS=\dfrac{SM\cdot SA}{SO}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Diện tích mặt cầu là $4\pi\cdot IS^2=2\pi a^2$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Thể tích khối cầu có diện tích mặt ngoài bằng 36π là

A. 9π. **B.** 36π. **C.** $\dfrac{\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu, khi đó $S=4\pi R^2=36\pi\Leftrightarrow R=3$.
Vậy thể tích khối cầu là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

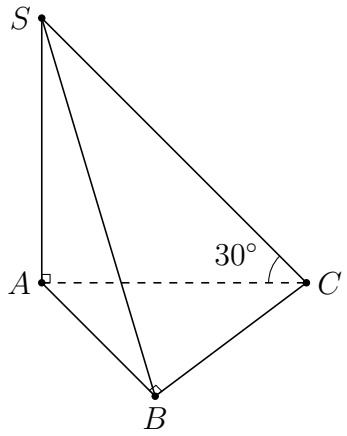
Chọn đáp án B ☐

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $SC = 2a$ và $\widehat{SCA} = 30^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

A. $R = a\sqrt{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = a$. **D.** $R = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $AC = SC\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.
Do $AB^2 + BC^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2$ suy ra tam giác ABC vuông tại B. Mà tam giác SAC vuông tại A. Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là trung điểm cạnh SC, bán kính mặt cầu $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 41. Trong mặt phẳng cho góc xOy. Một mặt phẳng (P) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Trong (P) lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

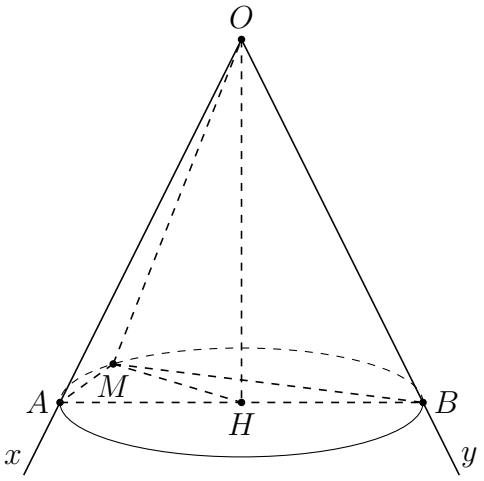
A. M chạy trên một mặt cầu. **B.** M chạy trên một mặt nón.
C. M chạy trên một mặt trụ. **D.** M chạy trên một đường tròn.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó H là hình chiếu của O trên (P). Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính AB. Suy ra $\triangle MOH = \triangle AOH$, do đó

$$\widehat{MOH} = \widehat{AOH} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$$

không đổi. Vậy M chạy trên mặt nón sinh ra khi quay đường thẳng Ox quanh đường thẳng OH.



Chọn đáp án B ☐

Câu 42. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định, phân biệt và điểm M thay đổi sao cho diện tích tam giác MAB không thay đổi. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng. **B.** Tập hợp các điểm M là một mặt trụ.
C. Tập hợp các điểm M là một mặt nón. **D.** Tập hợp các điểm M là một mặt cầu.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có khoảng cách từ M đến AB là $d(M, AB) = \dfrac{2S_{ABC}}{AB}$ không đổi. Do đó tập hợp các

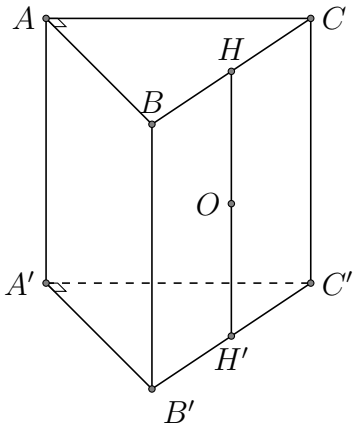
điểm M là mặt trụ với trục là đường thẳng AB, bán kính $\dfrac{2S_{ABC}}{AB}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$, $AA' = \sqrt{2}a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'A'C$ là

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC. Ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $BC = a\sqrt{2}$ (Áp dụng định lý Py-ta-go).

Dựng đường thẳng d song song với AA' từ H. Gọi H' là giao điểm của d với $B'C'$.

Gọi O là trung điểm của HH'. Ta có O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'A'C$.

OA là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'A'C$.

$AH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = a$.

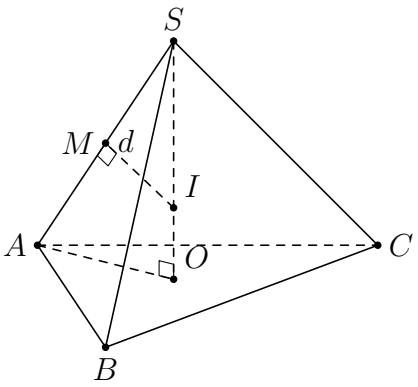
Vậy $V_{AB'A'C} = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết các cạnh đáy có độ dài bằng a, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$.

A. $\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của tam giác ABC. Suy ra $SO \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm SA. Kẻ $d \perp SA$ tại M. Suy ra d là trung trực của cạnh AB.

Trong mặt phẳng (SAO), gọi I là giao điểm của SO và d. Suy ra

$$\begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow I \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC.$$

Bán kính mặt cầu là $R = IS = \dfrac{SA \cdot SM}{SO} = \dfrac{SA^2}{2SO}$.

Ta có

- ☑ $AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- ☑ $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.
- ☑ $SI = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là $\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Tính diện tích bề mặt của khinh khí cầu, biết rằng khinh khí cầu là một hình cầu có đường kính 11 m (lấy $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

A. 380,29 m^2. **B**. 697,19 m^2. **C**. 190,14 m^2. **D**. 95,07 m^2.

Lời giải.

$S_{xq} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 \simeq 380{,}29 \text{ m}^2$. .

Chọn đáp án A □

Câu 46. Một hình trụ có bán kính đáy là R. Gọi O, O' là tâm hai đáy với $OO' = 2R$. Mặt cầu S tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O, O'. Phát biểu nào dưới đây **SAI**?

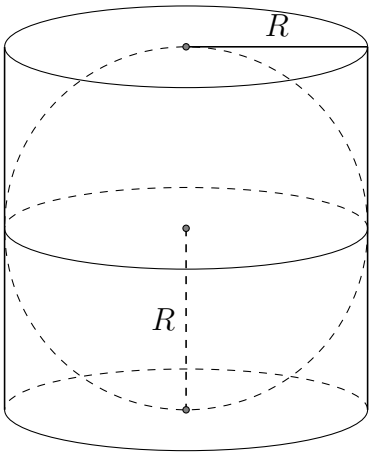
A. Diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh hình trụ.

B. Diện tích mặt cầu bằng $\dfrac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ.

C. Thể tích khối cầu bằng $\dfrac{2}{3}$ thể tích khối trụ.

D. Thể tích khối cầu bằng $\dfrac{3}{4}$ thể tích khối trụ.

Lời giải.



Mặt cầu S tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O, O' nên OO' là đường kính mặt cầu S suy ra bán kính mặt cầu S cũng là R.

Thể tích khối cầu là $V_C = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích khối trụ là $V_T = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi \cdot R^3$.

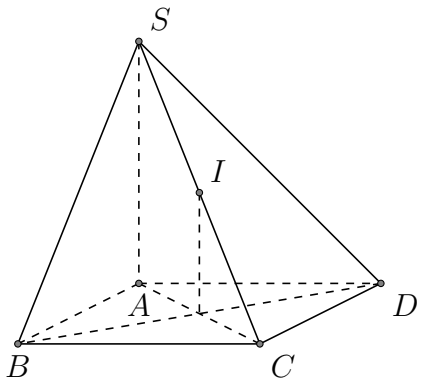
$\dfrac{V_C}{V_T} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}{2\pi R^3} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{13a}{2}$. **B**. $R = \dfrac{5a}{2}$. **C**. $R = \dfrac{17a}{2}$. **D**. $R = 6a$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.
Gọi I là trung điểm SC.
$\Rightarrow OI \parallel SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.
$\Rightarrow OI$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow IA = IB = IC = ID$.
Mà ΔSAC vuông tại $A \Rightarrow IA = IS = IC$.
Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.
Xét ΔSAC vuông tại A có:
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$.
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{144a^2 + 25a^2} = 13a$.
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ là $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{13a}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Biết rằng khi quay một đường tròn có bán kính bằng 1 quanh một đường kính của nó ta được một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

A. 4π. **B**. $\dfrac{4}{3}\pi$. **C**. 2π. **D**. π.

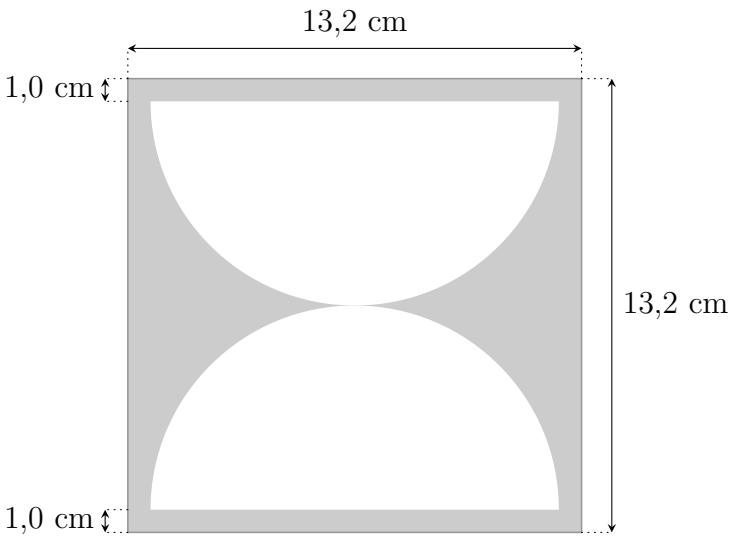
Lời giải.

Mặt cầu nhận được khi quay một đường tròn bán kính bằng 1 quanh đường kính của nó là mặt cầu có bán kính bằng bán kính đường tròn, và bằng 1. Diện tích của mặt cầu đó là $4\pi R^2 = 4\pi$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 49.

Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ. Phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế qua trục của chiếc đồng hồ này (phần tô màu làm bằng thủy tinh). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

A. 711,6 cm^3. **B**. 1070,8 cm^3.
C. 602,2 cm^3. **D**. 6021,3 cm^3.



Lời giải.

Thể tích của khối trụ là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 6{,}6^2 \cdot 13{,}2 = 1806{,}39$ cm^3.
Thể tích của hình cầu chứa cát là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3 = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{13{,}2-2}{2}\right)^3 = 735{,}62$ cm^3.
Vậy lượng thủy tinh là cần phải sử dụng là $V = V_1 - V_2 = 1070{,}77$ cm^3.

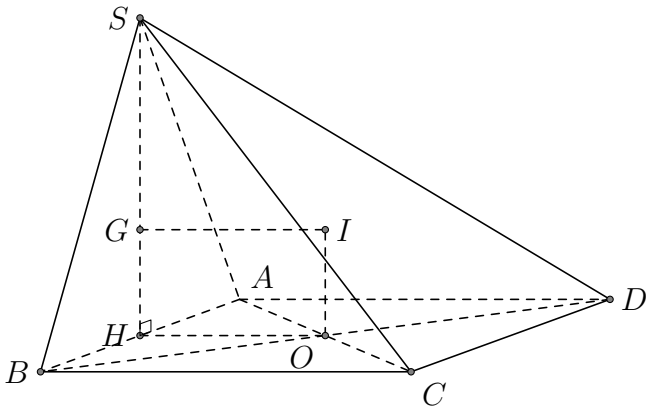
Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 2$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho

A. $V = \dfrac{20\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{10\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{16\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác SAB, O là giao điểm của AC và BD.
Từ O dựng đường thẳng song song với SH cắt đường thẳng dựng từ G song song với HO tại I.
Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện và $OIHG$ là hình chữ nhật.



Ta có $GH = \dfrac{1}{3}\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = IO$.
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp
$R = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{13}{4}} = 2$.
Thể tích khối cầu ngoại tiếp $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

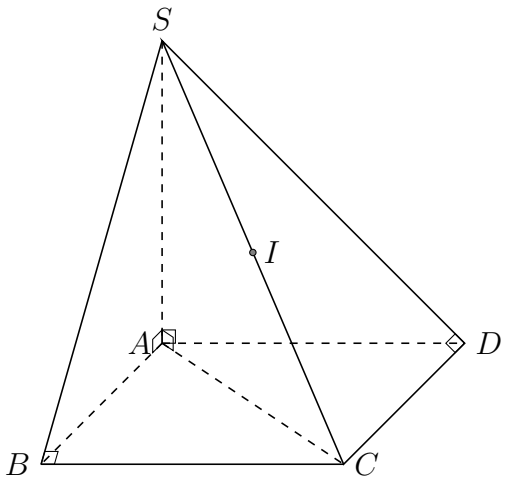
Câu 51. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{13\sqrt{13}\pi a^3}{6}$. **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{10}\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{13\sqrt{13}\pi a^3}{24}$. **D.** $V = \dfrac{5\sqrt{5}\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm SC khi đó $IS = IC$.
Mặt khác ta có $\triangle SAC$ vuông tại A, $\triangle SCD$ vuông tại D và $\triangle SBC$ vuông tại B nên các điểm S, A, B, C, D cùng nhìn SC dưới 1 góc vuông.
Do vậy I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$, bán kính $R = IS = \dfrac{SC}{2}$.
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$,
$SA = AB \tan \widehat{SBA} = \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 3a$
$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{13}$
$\Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
Vậy thể tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{13\sqrt{13}\pi a^3}{6}.$$



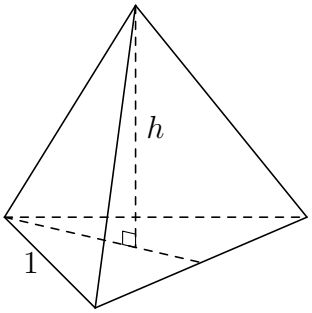
Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Một hình cầu có bán kính bằng 2 m. Diện tích của mặt cầu bằng bao nhiêu?
A. 4π m^2. **B**. 16π m^2. **C**. 8π m^2. **D**. π m^2.

Lời giải.

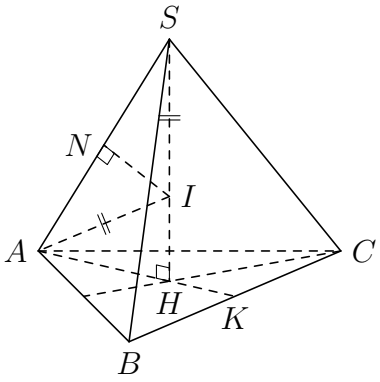
$S = 4\pi R^2 = 16\pi$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 53.
Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 1 và chiều cao $h = \sqrt{3}$ (hình vẽ). Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là
A. $\dfrac{100\pi}{3}$. **B**. $\dfrac{25\pi}{3}$. **C**. $\dfrac{100\pi}{27}$. **D**. 100π.



Lời giải.

Giả sử $S.ABC$ là hình chóp đều đã cho và gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$ và AH cắt BC tại trung điểm K của BC.
Ta có $AH = \dfrac{2}{3} \cdot AK = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, khi đó $I \in SH$ và $IS = IA$.
Gọi N là trung điểm SA, khi đó $IN \perp SA \Rightarrow \Delta SNI \backsim \Delta SHA$. Từ đó suy ra
$\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SN}{SH} \Rightarrow R = SI = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{SH^2 + AH^2}{2SH} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$.
Vậy mặt cầu có diện tích $S = 4\pi R^2 = \dfrac{100\pi}{27}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho hình lập phương cạnh a nội tiếp mặt cầu (S). Tính diện tích mặt cầu (S).

A. πa^2. **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $\dfrac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương nên có đường kính là đường chéo của hình lập phương đó. Do đó diện tích của (S) là $4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Khi quay tứ diện đều $ABCD$ quanh trục AB có bao nhiêu khối nón khác nhau được tạo thành?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 56. Mặt cầu (S) có diện tích bằng 20π, thể tích khối cầu (S) bằng

A. $\dfrac{20\pi\sqrt{5}}{3}$. **B.** $20\pi\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{20\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu (S): $4\pi R^2 = 20\pi \Rightarrow R = \sqrt{5}$.

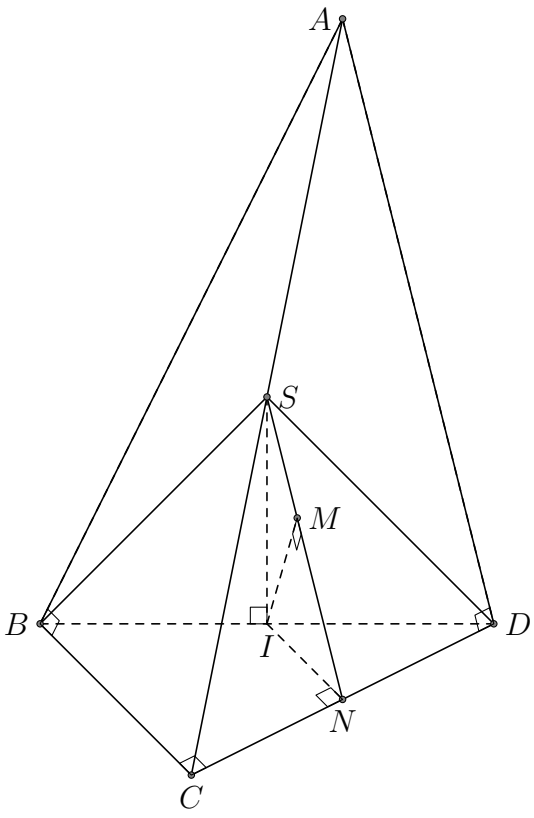
Thể tích khối cầu (S) là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}\right)^3 = \dfrac{20\pi\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$ có đáy BCD là tam giác vuông tại C, $BC = CD = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, khoảng cách từ điểm B đến (ACD) là $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $4\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $12\pi^3$. **C.** $12\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi S là trung điểm AC. Vì hai tam giác ABC, ACD vuông có chung cạnh huyền AC nên $SA = SB = SC = SD$ hay S là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm BD, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Khi đó SI là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD hay $SI \perp (BCD)$.

Gọi N, M lần lượt là hình chiếu của I lên CD, SN. Suy ra $SM \perp (SCN)$. Khi đó

$IM = d(I;(SCN)) = d(I;(ACD)) = \dfrac{1}{2}d(B;(ACD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

N là trung điểm CD nên $IN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $\dfrac{1}{IN^2} + \dfrac{1}{IS^2} = \dfrac{1}{IM^2} \Rightarrow SI^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.

Ta có $R = SC = \sqrt{SI^2 + CI^2} = a\sqrt{3}$. Thể tích mặt cầu cần tìm $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Gọi S, V lần lượt là diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu có bán kính R. Nếu coi S, V là các hàm số của biến R thì V là một nguyên hàm của S trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Khối nón có chiều cao h, bán kính đáy R thì có thể tích bằng $\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

C. Diện tích của mặt cầu có bán kính R bằng $4\pi R^2$.

D. Khối trụ có chiều cao h, đường kính đáy R thì có thể tích bằng $\pi R^2 h$.

Lời giải.

Khối trụ có chiều cao h, đường kính đáy R thì có thể tích bằng $\pi \cdot \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Một hình trụ có trục OO' chứa tâm của một mặt cầu bán kính R, các đường tròn đáy của hình trụ đều thuộc mặt cầu trên, đường cao của hình trụ đúng bằng R. Tính thể tích V của khối trụ.

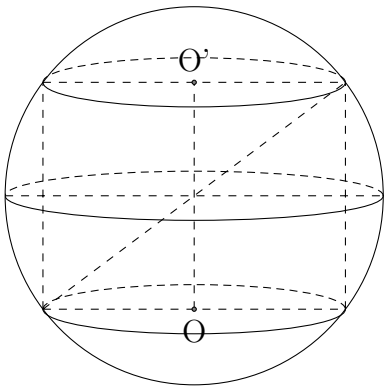
A. $V = \dfrac{3\pi R^3}{4}$. **B**. $V = \pi R^3$. **C**. $V = \dfrac{\pi R^3}{4}$. **D**. $V = \dfrac{\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Đường kính đáy của khối trụ $2r = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$.

$\Rightarrow r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 R = \dfrac{3\pi R^3}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho khối cầu (S) có thể tích bằng 36π (cm^3). Diện tích mặt cầu bằng bao nhiêu?

A. 64π (cm^2). **B**. 18π (cm^2). **C**. 36π (cm^2). **D**. 27π (cm^2).

Lời giải.

Thể tích khối cầu bằng $36\pi \Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là: $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$ (cm^2).

Chọn đáp án C □

Câu 61. Một người dùng một cái ca hình bán cầu có bán kính bằng 3 cm để múc nước đổ vào trong một thùng hình trụ chiều cao 3 cm và bán kính đáy bằng 12 cm. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng? Biết rằng mỗi lần đổ, nước trong ca luôn đầy.

A. 10 lần. **B**. 20 lần. **C**. 24 lần. **D**. 12 lần.

Lời giải.

Thể tích của chiếc ca là $V_c = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 18\pi$.

Thể tích của khối trụ là $V_t = \pi \cdot 3 \cdot 12^2 = 432\pi$.

Ta có $V_t = 24V_c$ nên sau 24 lần đổ thì nước đầy thùng.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Chỉ ra khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Khối lăng trụ có đáy có diện tích là B, đường cao của lăng trụ là h, khi đó thể tích khối lăng trụ là $V = Bh$.

B. Diện tích xung quanh của mặt nón có bán kính đường tròn đáy r và đường sinh l là $S = \pi rl$.

C. Mặt cầu có bán kính là R thì thể tích khối cầu là $V = 4\pi R^3$.

D. Diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đường tròn đáy r và chiều cao của trụ l là $S_{\text{tp}} = 2\pi r(l + r)$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối cầu bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Do đó khẳng định: Mặt cầu có bán kính là R thì thể tích khối cầu là $V = 4\pi R^3$ là sai.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho 3 điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và góc $\widehat{ACB} = 90°$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. AB là đường kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt cầu và mặt phẳng (ABC).

B. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn lớn.

C. $\triangle ABC$ vuông cân tại C.

D. AB là một đường kính của mặt cầu đã cho.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu.

Mệnh đề "Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn lớn" và mệnh đề "AB là một đường kính của mặt cầu đã cho" chỉ đúng khi mặt phẳng (ABC) đi qua tâm I.

Mệnh đề "$\triangle ABC$ vuông cân tại C" cần thêm điều kiện $AC = BC$.

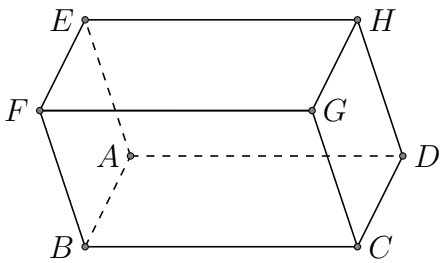
Chọn đáp án A □

Câu 64. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật đó. Tính diện tích của hình cầu (S) theo a, b, c.

A. $\dfrac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. **B**. $2\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. **C**. $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. **D**. $4\pi(a^2 + b^2 + c^2)$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD.EFGH$ là hình hộp chữ nhật có $AB = a, AD = b, AE = c$.



Ta có: $FD^2 = FB^2 + BD^2 = FB^2 + CD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Do hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu nên FD là đường kính của mặt cầu đó.

Suy ra bán kính của mặt cầu $r = \dfrac{FD}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$.

Khi đó diện tích mặt cầu là

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} \right)^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp tâm của các mặt cầu đi qua hai điểm A, B.

A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.

C. Đường tròn đường kính AB.

D. Chỉ có một tâm duy nhất đó là trung điểm của AB.

Lời giải.

Tập hợp tâm của các mặt cầu đi qua hai điểm A, B cách đều A và B. Vậy tập hợp các tâm mặt cầu đó là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = 2a$. Diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S = 4\pi a^2$. **B**. $S = \dfrac{16\pi a^2}{3}$. **C**. $S = a^2$. **D**. $S = \dfrac{4\pi a^2}{3}$.

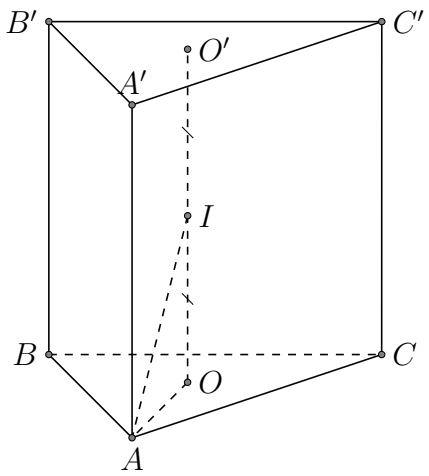
Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ, gọi O, O' lần lượt là hình chiếu của I lên mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Do $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$ nên O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A'B'C'$.

Do IO và IO' vuông góc với mặt đáy, suy ra I, O, O' thẳng hàng.

Do hai tam giác vuông AOI và $A'O'I$ bằng nhau nên $IO = IO'$.



Ta có $r = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.

Khi đó bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{AA'}{2}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S = 4\pi R^2 = \dfrac{16\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có $SA = 6$, $SB = 8$, $SC = 10$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc.

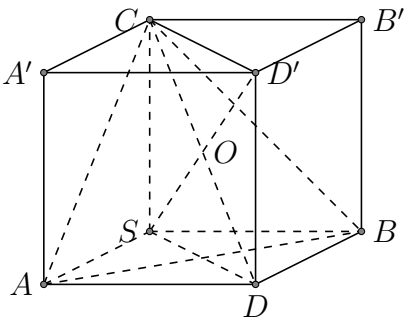
A. $S = 100\pi$. **B**. $S = 400\pi$. **C**. $S = 200\pi$. **D**. $S = 150\pi$.

Lời giải.

Dựng hình hộp chữ nhật $SABD.CA'B'D'$. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ cũng chính là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $SABD.CA'B'D'$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo SD' và CD của hình hộp, suy ra O là tâm của mặt cầu cần tìm và bán kính của mặt cầu là SO. Áp dụng định lí Pitago ta có: $CD = 2SO = \sqrt{SC^2 + SD^2} = \sqrt{SC^2 + SA^2 + SB^2}$

$\Rightarrow R = SO = \dfrac{\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}}{2} = 5\sqrt{2}.$

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 200\pi$.



Chọn đáp án C □

Câu 68. Quay một miếng bìa hình tròn có diện tích bằng $16\pi a^2$ quanh một trong những đường kính, ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\dfrac{64}{3}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{128}{3}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{256}{3}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{32}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Bán kính của miếng bìa hình tròn là $R = 4a$. Khối tròn xoay nhận được là khối cầu có bán kính $R = 4a$ và có thể tích là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{256}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Mặt bên SBC là tam giác vuông tại S. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. 100π (cm^2). **B.** 20π (cm^2). **C.** 400π (cm^2). **D.** $\dfrac{500\pi}{3}$ (cm^2).

Lời giải.

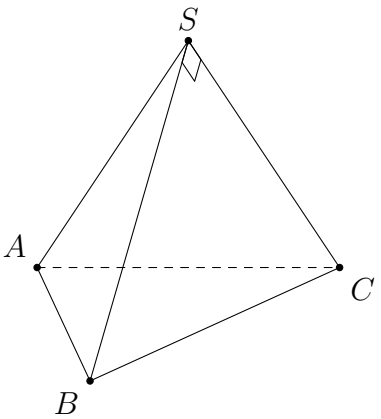
Ta có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BC^2$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$. (1)

Mặt khác tam giác SBC vuông tại $S \Rightarrow \widehat{BSC} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S, A, B, C cùng thuộc mặt cầu đường kính BC.

Bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 5 \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (cm^2).



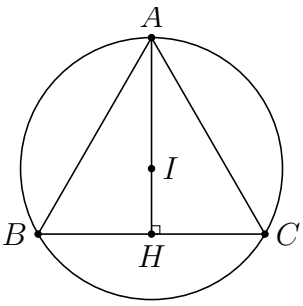
Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a, chiều cao AH. Quay đường tròn $(\mathscr{C})$ xung quanh trục AH ta được một mặt cầu. Tính thể tích V của khối cầu tương ứng đó.

A. $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{9}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}$.

Lời giải.

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là trọng tâm của tam giác ABC. Suy ra, I cũng là tâm của mặt cầu khi quay đường tròn $(\mathscr{C})$ xung quanh trục AH. Vậy bán kính của mặt cầu bằng $IA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Vậy thể tích của khối cầu đó là

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Tính thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó.

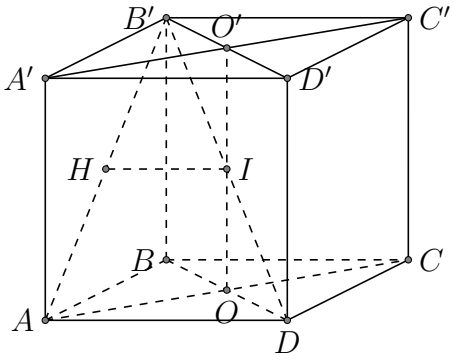
A. $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{64a^3\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{32a^3\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{8a^3\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương bằng $64a^3$ nên cạnh hình lập phương $4a$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương $R = \dfrac{4a}{2} = 2a$.

Vậy thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương. $V = \dfrac{4}{3}\pi(2a)^3 = \dfrac{32}{3}\pi a^3$.



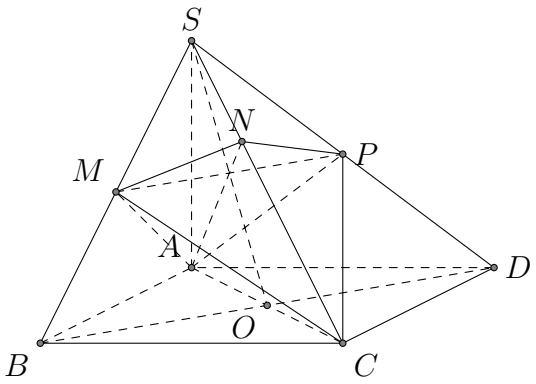
Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \dfrac{125\pi}{6}$. **B.** $V = \dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{108\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải.

Vì mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P nen $AM \perp SC$, $AN \perp SC$, $AP \perp SC$.



Từ $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp AM$, kết hợp với $AM \perp SC$ ta được $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp CM$.

Từ $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP$, kết hợp với $AP \perp SC$ ta được $AP \perp (SDC) \Rightarrow AP \perp CP$.

Từ $AN \perp SC$, $AM \perp CM$, $AP \perp CP$ suy ra M, N, P thuộc mặt cầu đường kính AC. Hay mặt cầu ngoại tiếp Bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. Cắt hình nón tròn xoay bằng một mặt phẳng đi qua trục thu được thiết diện là tam giác cân.

B. Cắt hình trụ tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc với trục thu được thiết diện là hình tròn.

C. Hình cầu có vô số mặt phẳng đối xứng.

D. Mặt cầu là mặt tròn xoay sinh ra bởi một đường tròn khi quay quanh đường kính của nó.

Lời giải.

Dựa vào định nghĩa và tính chất của hình trụ tròn xoay ta suy ra khẳng định sai là: Cắt hình trụ tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc với trục thu được thiết diện là hình tròn.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho hình trụ nội tiếp hình cầu $S(O;R)$. Gọi x là khoảng cách từ tâm hình cầu đến đáy của hình trụ. Tìm x theo R khi hình trụ có diện tích xung quanh lớn nhất.

A. $x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **B**. $x = \dfrac{R}{2}$. **C**. $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D**. $x = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

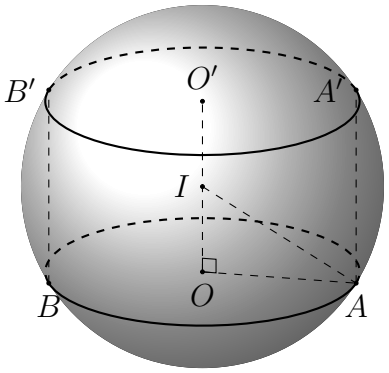
Bán kính đáy của khối trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}, h = 2x$.

Diện tích xung quanh của khối trụ là

$S_{xq} = 2\pi rh = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$ mà

$x\sqrt{R^2 - x^2} \leqslant \dfrac{x^2 + R^2 - x^2}{2} = \dfrac{R^2}{2} \Rightarrow S_{xq} \leqslant 2\pi R^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, $SA = SB = 2a$, $SC = 4a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là

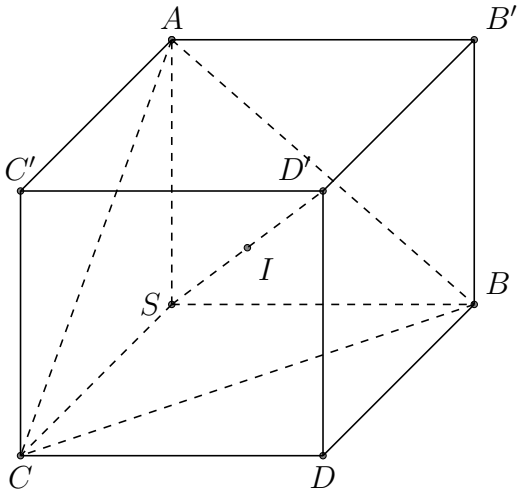
A. $8\sqrt{6}\pi a^3$. **B**. $32\sqrt{6}\pi a^3$. **C**. $16\sqrt{6}\pi a^3$. **D**. $24\sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải.

•$SABC$ là tam diện vuông. Dựng hình hộp chữ nhật $SBDC.AB'D'C'$ như hình vẽ. Tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là trung điểm I của SD'.

• $R = \dfrac{1}{2}SD' = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+SB^2+SD^2} = a\sqrt{6}$.

• Thể tích mặt cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 8\sqrt{6}\pi a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho hình lập phương có cạnh bằng 4. Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương có bán kính bằng

A. 2. **B**. $2\sqrt{3}$. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. $4\sqrt{2}$.

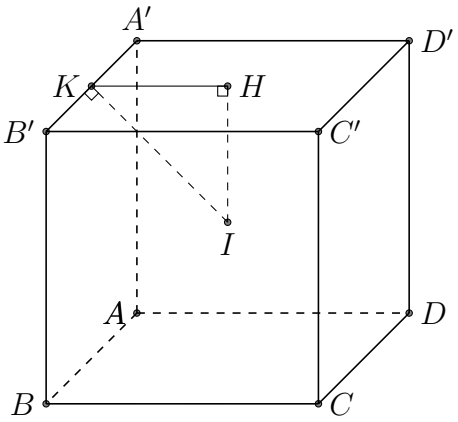
Lời giải.

Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương có tâm trùng với tâm của hình lập phương và bán kính bằng khoảng cách từ tâm của hình lập phương đến cạnh của hình lập phương đó.

Gọi I là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $(ABCD)$ và cạnh $A'B'$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là

$$IK = \sqrt{IH^2+HK^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Khối cầu có bán kính 3 cm thì có thể tích là

A. $9\pi\,\text{cm}^3$. **B**. $12\pi\,\text{cm}^3$. **C**. $36\pi\,\text{cm}^3$. **D**. $27\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Tính thể tích V của khối lập phương biết rằng khối cầu ngoại tiếp khối lập phương có thể tích là $\dfrac{32}{3}\pi$.

A. $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **B**. $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. **C**. $V = \dfrac{64\sqrt{3}}{9}$. **D**. $V = 8$.

Lời giải.

$V_{\text{khối cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32}{3}\pi \Leftrightarrow R = 2$.

Giả sử hình lập phương có cạnh $a \Rightarrow$ độ dài đường chéo của hình lập phương là

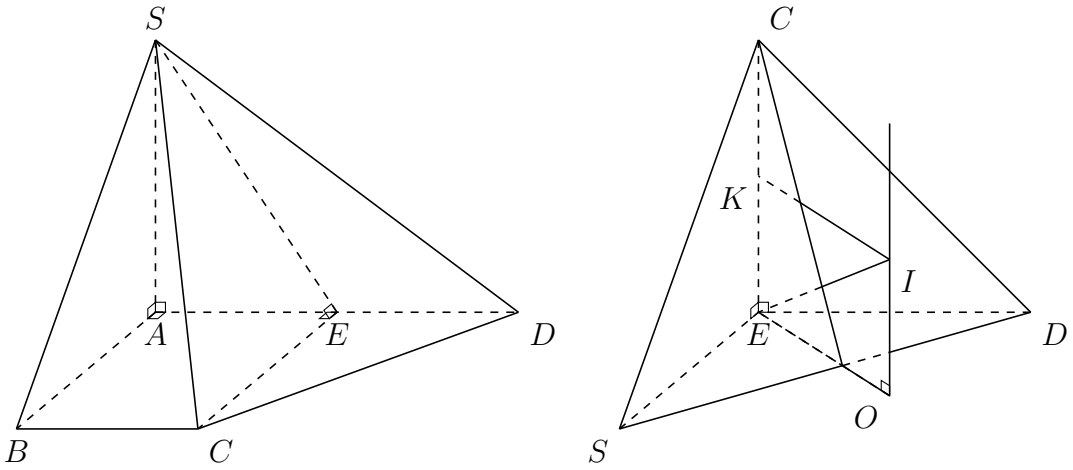
$$a\sqrt{3} = 2R \Leftrightarrow a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{\text{hình lập phương}} = \frac{64\sqrt{3}}{9}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, B. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Biết rằng $AB = BC = a, AD = 2a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CDE$ theo a.

A. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.



Xét khối chóp $C.SED$ có các cạnh $CE = a, SE = a\sqrt{5}, SD = 2a\sqrt{2}$ và $ED = a$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SED và d là đường thẳng qua O, vuông góc (SED), do đó $d \parallel CE$.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực CE (vuông góc với CE tại trung điểm K của CE) và I là giao điểm của (P) và d. Lúc đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $C.SED \Rightarrow IO = KE = \frac{CE}{2}$.

Vì tam giác SAD vuông cân tại A nên $\widehat{SDE} = 45°$, do đó $S = S_{\Delta SED} = \frac{1}{2}SD \cdot DE \cdot \sin\widehat{SDE} = a^2$.

Ta có $OE = \frac{SE \cdot ED \cdot SD}{4S} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. Suy ra $R = IE = \sqrt{IO^2 + OE^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho mặt cầu (S) có tâm O, bán kính r. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính R. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $R = \sqrt{r^2 + d^2(O, (\alpha))}$.

B. $d(O, (\alpha)) = r$.

C. Diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi r^2$.

D. Đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

Lời giải.

Dựa vào vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.

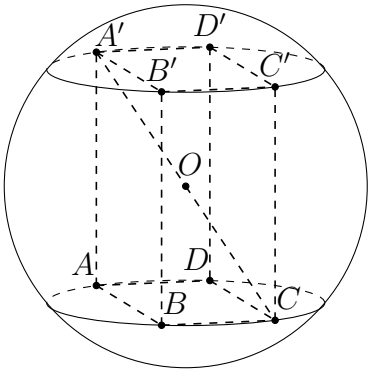
Chọn đáp án A □

Câu 81. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = 3$, $BB' = 4$, $B'C' = 12$.

A. 19. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** 13.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm đoạn $A'C$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $AA'C'C$ và $BB'D'D$ là các hình chữ nhật bằng nhau.
Do vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.
Ta có $A'C = \sqrt{AC^2 + AA'^2}$.
$A'C = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 13 \Rightarrow R = \dfrac{13}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 82. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước và đi qua một điểm cho trước không nằm trên mặt phẳng chứa đường tròn đó là mấy?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn cho trước và có tâm là H.
Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathscr{C})$ và K là điểm nằm ngoài (α).
Gọi I là tâm mặt cầu. Khi đó I nằm trên đường thẳng d đi qua H vuông góc với (α) và thỏa mãn $IK^2 - IH^2 = r^2$ (với r là bán kính của $(\mathscr{C})$).
$IK^2 - IH^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IH}\right)\left(\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IH}\right) = r^2$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{HK} = r^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{HK} = \dfrac{r^2}{2}$.
(với M là trung điểm của HK).

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = AC = a\sqrt{2}; SC = 3a$. Tìm thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

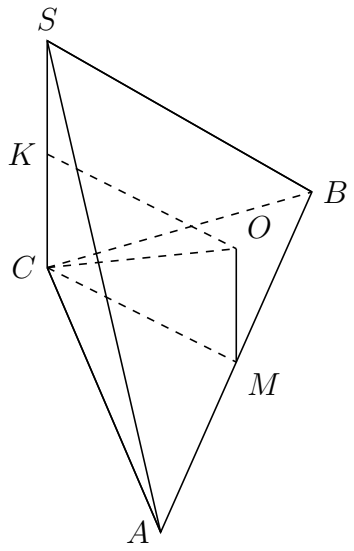
A. $11\pi a^3$. **B.** $13\pi a^3$. **C.** $\dfrac{13\pi a^3\sqrt{13}}{6}$. **D.** $\dfrac{11\pi a^3\sqrt{11}}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $R = OC$.

$OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\dfrac{13a^2}{4}}$

$V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\dfrac{13a^2}{4}}\right)^3 = \dfrac{13\pi a^3\sqrt{13}}{6}$.



Chọn đáp án C □

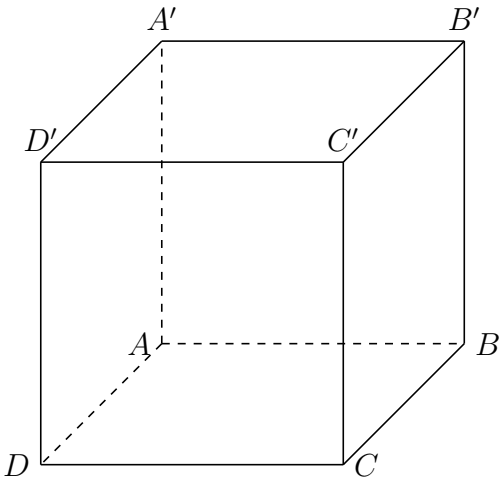
Câu 84. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng DD'.

A. $S = \dfrac{8}{3}\pi a^2$. **B.** $S = 8\pi a^2$. **C.** $S = 4\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với đường thẳng DD' có bán kính $R = AD = a$.

Suy ra $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.



Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$, khi đó đường kính của mặt cầu là

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng trực tiếp công thức tính thể tích khối cầu:

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 2R = \dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Khẳng định nào đúng?

A. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trùng với đỉnh S.

B. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là tâm của mặt đáy $ABCD$.

C. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trung điểm của đoạn thẳng nối S với tâm của mặt đáy $ABCD$.

D. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là trọng tâm của tam giác SAC.

Lời giải.

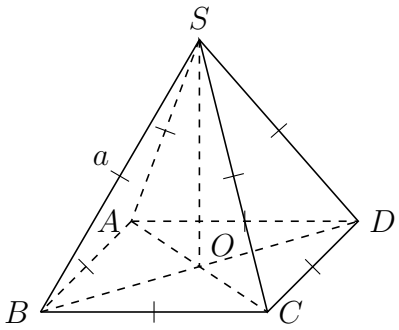
Gọi các cạnh hình chóp là a.

Ta có: $OA = OB = OC = OD = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác SAO ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS$.

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là tâm của mặt đáy $ABCD$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Xét các hình đa diện

(I). Hình lăng trụ đứng;

(II). Hình hộp chữ nhật;

(III). Hình lăng trụ xiên (cạnh bên không vuông góc với đáy);

(IV). Hình hộp thoi (6 mặt là 6 hình thoi).

Hình nào nội tiếp được trong một mặt cầu?

A. (IV). **B**. (I). **C**. (III). **D**. (II).

Lời giải.

Điều kiện cần để các hình đa diện nội tiếp được trong một mặt cầu là các mặt của nó nội tiếp được trong một đường tròn. Do đó, các phương án (IV), (I), (III) loại.

Hình hộp chữ nhật nội tiếp được trong mặt cầu có tâm là tâm của nó (giao điểm của các đường chéo) và bán kính bằng khoảng cách từ tâm đến một đỉnh của hình hộp chữ nhật đó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Cho khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. Khi đó bán kính mặt cầu là

A. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B**. $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C**. $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D**. $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27} \Leftrightarrow R^3 = \frac{3.8a^3\sqrt{6}}{4.27} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{6}}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{a\sqrt{\sqrt[3]{6^3}}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2, 3, 4$ nội tiếp trong một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.

A. $\sqrt{29}$. **B**. $29\sqrt{29}\pi$. **C**. $\dfrac{29}{2}\pi$. **D**. 29π.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đó là $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$. Từ đó suy ra diện tích của mặt cầu đó bằng $4\pi R^2 = 29\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Có bao nhiêu mặt cầu chứa một đường tròn cho trước?

A. Vô số. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Ta xét đường tròn (I, R) nằm trong mặt phẳng (P), (Δ) là đường thẳng đi qua I và $\Delta \perp (P)$, khi đó mọi mặt cầu có tâm nằm trên Δ và đi qua một điểm của đường tròn (I, R) sẽ chứa cả đường tròn đó. Vậy có vô số mặt cầu chứa (I, R).

Chọn đáp án A □

Câu 91. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hình có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình có đáy là hình tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải.

Trong các hình: hình bình hành, hình thang vuông, hình thang cân, hình tứ giác chỉ có hình thang cân là có đường tròn ngoại tiếp nên hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Gọi (S) là khối cầu bán kính R, (N) là khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h. Biết rằng thể tích của khối cầu (S) và khối nón (N) bằng nhau, tính tỉ số $\dfrac{h}{R}$.

A. 1. **B**. $\dfrac{4}{3}$. **C**. 12. **D**. 4.

Lời giải.

Do thể tích khối cầu (S) và khối nón (N) bằng nhau nên $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{1}{3}\pi h R^2 \Leftrightarrow \dfrac{h}{R} = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a$, $AD = 5a$, $AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}a$. **B**. $6a$. **C**. $\dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$. **D**. $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Ta có AC' là đường kính của mặt cầu và

$$AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{16a^2 + 25a^2 + 9a^2} = 5\sqrt{2}a.$$

Suy ra bán kính mặt cầu cần tìm là $\dfrac{AC'}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Nếu tăng bán kính của khối cầu lên 2 lần thì thể tích của khối cầu đó thay đổi như thế nào?

A. Không đổi. **B**. Tăng lên 8 lần. **C**. Tăng lên 2 lần. **D**. Tăng lên 4 lần.

Lời giải.

Giả sử bán kính của khối cầu đã cho là R.

Khi đó thể tích của khối cầu với bán kính R là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Bán kính của khối cầu khi tăng lên 2 lần là $R' = 2R$.

Khi đó thể tích của khối cầu ứng với bán kính R' là $V' = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 = \dfrac{4}{3}\pi (2R)^3 = 8 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 8V$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho mặt cầu (S) có diện tích bằng $36a^2\pi$ $(a>0)$. Tính thể tích của khối cầu (S).

A. $18\pi a^3$. **B.** $72\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $36\pi a^3$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu $S=4\pi r^2=36a^2\pi \Rightarrow r=3a$

$\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi(3a)^3=36\pi a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Hình đa diện nào sau đây không có mặt cầu ngoại tiếp?

A. Hình chóp có đáy là tam giác. **B.** Hình chóp tứ giác đều.

C. Hình hộp. **D.** Hình lập phương.

Lời giải.

∘ Hình chóp nội tiếp được một mặt cầu khi và chỉ khi đáy của chóp tồn tại đường tròn ngoại tiếp. ∘ Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu khi và chỉ khi nó là lăng trụ đứng và đáy có đường tròn ngoại tiếp.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a và đường chéo tạo với đáy một góc $45°$. Tính thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $V=4\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{1}{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{4}{3}a^3$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

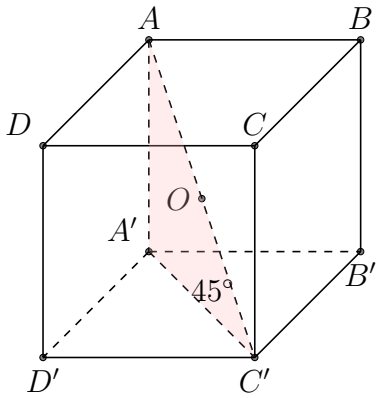
Góc giữa đường chéo và mặt đáy là góc $\widehat{AC'A'}=45°$.

Theo giả thiết ta có: $A'C'=a\sqrt{2}\Rightarrow AC'=2a$

Gọi O là trung điểm $AC'\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Khi đó bán kính mặt cầu $R=\dfrac{AC'}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$

$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu ngoại tiếp $V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.



Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp theo a.

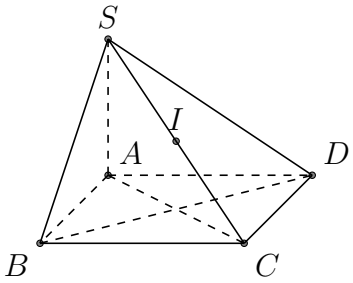
A. $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3 3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của SC.

Dễ thấy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp với bán kính $r=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+2a^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối cầu cần tìm: $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

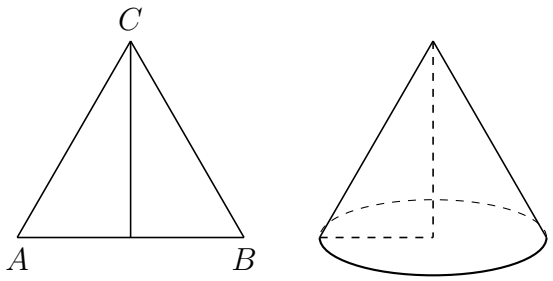


Chọn đáp án B □

Câu 99. Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì bán kính của mặt cầu là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Xét tam giác đều cạnh $a \Rightarrow$ đường cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

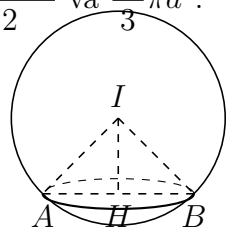
$S_{\text{tp}} = \pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi.\frac{a}{2}.a = \frac{3\pi a^2}{4} \Rightarrow S_{\text{cầu}} = \frac{3\pi a^2}{4} = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Cho một hình cầu (S). Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo một hình tròn có chu vi là $2,4\pi a$ và khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) bằng $1,6a$. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu lần lượt là

A. $\pi a^2\sqrt{2}$ và $\frac{32}{3}\pi a^3$. **B.** $16\pi a^2$ và $\frac{32}{3}\pi a^3$. **C.** $\pi a^2\sqrt{2}$ và $\frac{8}{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ và $\frac{32}{3}\pi a^3$.

Lời giải.



Chu vi đường tròn giao tuyến là $2\pi HA = 2,4\pi a$

$\Rightarrow HA = 1,2a \Rightarrow IA = \sqrt{HA^2 + IH^2} = \sqrt{(1,2a)^2 + (1,6a)^2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu là $4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$.

Thể tích mặt cầu là $\frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. B	4. B	5. B	6. B	7. C	8. D	9. A	10. D
11. A	12. D	13. C	14. D	15. D	16. D	17. A	18. A	19. B	20. C
21. C	22. B	23. D	24. A	25. A	26. C	27. A	28. D	29. B	30. C
31. C	32. D	33. A	34. B	35. A	36. B	37. A	38. D	39. B	40. C
41. B	42. B	43. A	44. A	45. A	46. D	47. A	48. A	49. B	50. C
51. A	52. B	53. C	54. C	55. B	56. A	57. A	58. D	59. A	60. C
61. C	62. C	63. A	64. C	65. A	66. B	67. C	68. C	69. A	70. B
71. C	72. B	73. B	74. A	75. A	76. C	77. C	78. C	79. B	80. A
81. B	82. A	83. C	84. C	85. C	86. B	87. D	88. C	89. D	90. A
91. C	92. D	93. C	94. B	95. D	96. C	97. D	98. B	99. B	100. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Từ một khối đất sét hình trụ có chiều cao bằng $36(cm)$ và đường tròn đáy có đường kính bằng $24(cm)$. Bạn Toán muốn chế tạo khối đất đó thành nhiều khối cầu và chúng có cùng bán kính $6(cm)$. Hỏi bạn Toán có thể làm ra được tối đa bao nhiêu khối cầu như thế ?

A. 108. **B**. 54. **C**. 72. **D**. 18.

Lời giải.

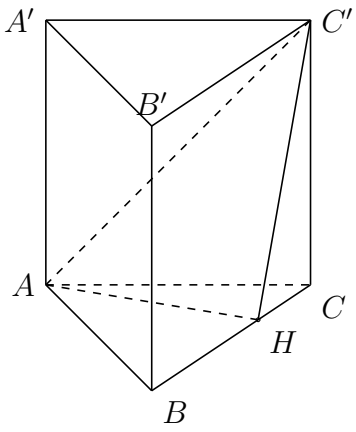
Thể tích khối trụ đất sét là:$V_T = \pi R_T^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 5184\pi$.
Thể tích khối cầu $V_C = \dfrac{4}{3}\pi R_C^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.
Số khối cầu có thể chế tạo từ khối trụ là $\dfrac{V_T}{V_C} = \dfrac{5184\pi}{288\pi} = 18$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30°. Diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

A. $S = 6\pi a^2$. **B**. $S = 3\pi a^2$. **C**. $S = 4\pi a^2$. **D**. $S = 24\pi a^2$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$.
Lại có $AH \perp BB'$ (do $BB' \perp (ABC)$ suy ra $AH \perp (BCC'B')$.
Suy ra $(AC', (BCC'B')) = \widehat{AC'H} = 30^\circ$.
Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$, $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$AC' = \dfrac{AH}{\sin \widehat{AC'H}} = a\sqrt{3} \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.
Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ, khi đó $R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$ với $r = \dfrac{BC}{2} = a$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC và $h = CC' = a\sqrt{2}$.
Do đó $R = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án (A) □

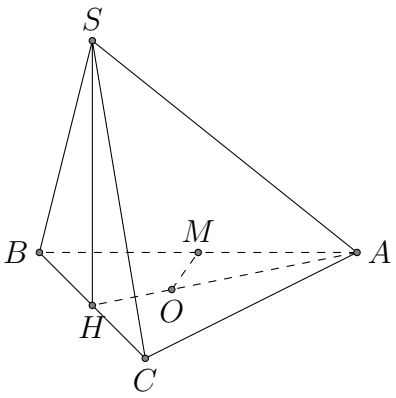
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, biết $AB = a$, $SA = SB = a$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính SC biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng a.

A. $SC = a\sqrt{3}$. **B**. $SC = a\sqrt{2}$. **C**. $SC = a$. **D**. $SC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC suy ra $AH \perp BC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A).

Lại có $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases}$ nên $AH \perp (SBC)$.



Từ đề bài ta có $AS = AB = AC$ nên A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC, lại có $AH \perp (SBC)$ tại H nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Suy ra $HB = HS = HC$ nên tam giác SBC vuông tại S.

Gọi M là trung điểm của AB, kẻ đường trung trực của AB cắt AH tại O. Khi đó, ta có $OA = OB = OC = OS$ hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC \Rightarrow OA = R = a$.

Ta có ΔOMA đồng dạng với $\Delta BHA\,(g-g) \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{MA}{HA} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a} = \dfrac{\frac{a}{2}}{HA} \Rightarrow HA = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông AHC có $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2HC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBC vuông tại S có $SC = \sqrt{BC^2 - SB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

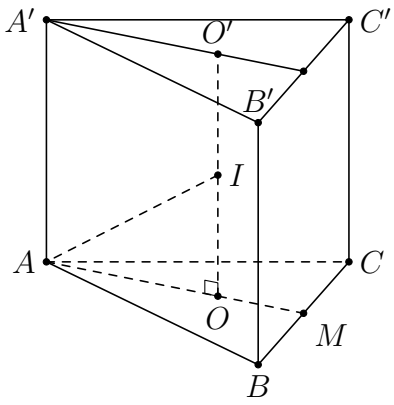
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và $A'B'C'$.



Trên OO' lấy trung điểm I. Khi đó, $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Bán kính mặt cầu là

$$R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

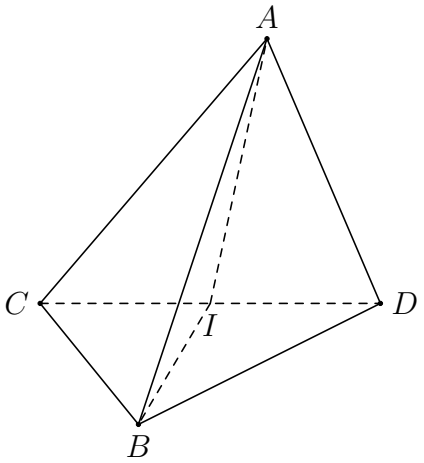
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $S = 4\pi \left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{64\pi a^2}{27}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{27}$. **C.** $\dfrac{16\pi a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD. Do $BC = BD$ nên $BI \perp CD$.
Theo bài ra $(ACD) \perp (BCD)$ nên $BI \perp (ACD)$.
Xét các tam giác vuông AIB và DIB có: BI chung và $AB = BD = 2a$ nên hai tam giác đó bằng nhau, suy ra $AI = ID$.
Do đó tam giác ACD vuông tại A. Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thuộc đường thẳng BI.
Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.
Áp dụng định lí Pitago ta có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$.
Diện tích tam giác BCD là

$$S_{BCD} = \sqrt{p(p-BC)(p-CD)(p-BD)} = \frac{3a\sqrt{4}}{7}$$

với $p = \dfrac{BC + CD + DB}{2}$.

Bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{BC.CD.DB}{4S_{BCD}} = \dfrac{4a}{3}$.

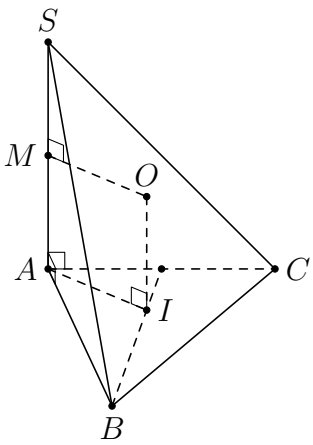
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Dựng tam giác đều IAB (I và C cùng phía bờ AB). Ta có $\widehat{IBC} = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ và $IB = BC$ nên $\triangle IBC$ đều, $IA = IB = IC = a$.
Qua I dựng đường thẳng song song với SA, cắt đường trung trực của SA tại O thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Gọi M là trung điểm của SA. Ta có $OM = IA = a$; $AM = \dfrac{SA}{2} = a$ nên $OA = \sqrt{OM^2 + MA^2} = \sqrt{2}a$, $R = \sqrt{2}a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Gọi S là tổng diện tích của ba hình tròn đó. Khi đó S bằng

A. 32π. **B.** 36π. **C.** 38π. **D.** 16π.

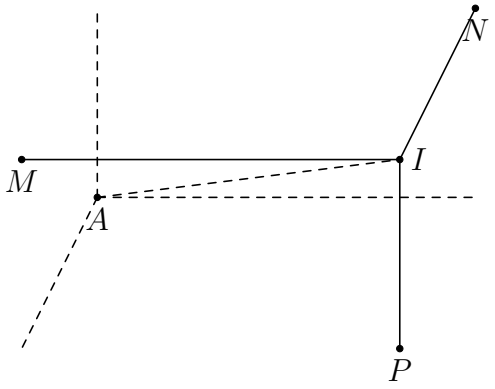
Lời giải.

Phương pháp:

Cách giải:

$(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$ có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=4$.

Gọi M,N,P là các hình chiếu vuông góc của I lên 3 mặt phẳng, r_1,r_2,r_3 là bán kính của đường tròn giao tuyến tương ứng. Khi đó A,I,P,N là 4 đỉnh của một hình hộp chữ nhật, ta có:



$$IM^2+IP^2+IN^2=IA^2=0^2+3^2+1^2=10.$$

$\Leftrightarrow R^2-r_1^2+R^2-r_2^2+R^2-r_3^2=10\Leftrightarrow 3\cdot 16-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=10\Leftrightarrow r_1^2+r_2^2+r_3^2=18.$

Tổng diện tích của ba hình tròn đó là $S=\pi\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)=38\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{ABC}=60^\circ$, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ACD$.

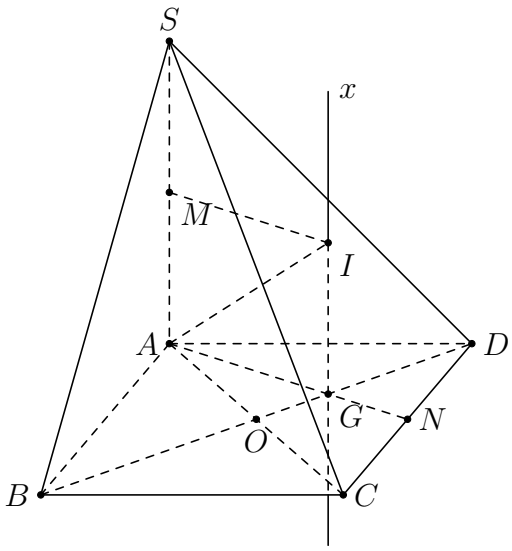
A. $R=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $R=a$. **C.** $R=a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. **D.** $R=\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}=60^\circ$, suy ra tam giác ADC là tam giác vuông cạnh a. Gọi N là trung điểm cạnh DC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong mặt phẳng (SAM), kẻ đường thẳng $Gx\parallel SA$, suy ra Gx là trục của tam giác ADC.

Gọi M là trùng điểm cạnh SA. Trong mặt phẳng (SAN) kẻ trung trực của SA cắt Gx tại I thì $IS=IA=ID=IC$ nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ACD$. Bán kính R của mặt cầu bằng độ dài đoạn IA.



Trong tam giác AIG vuông tại G, ta có

$$IA=\sqrt{IG^2+GA^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

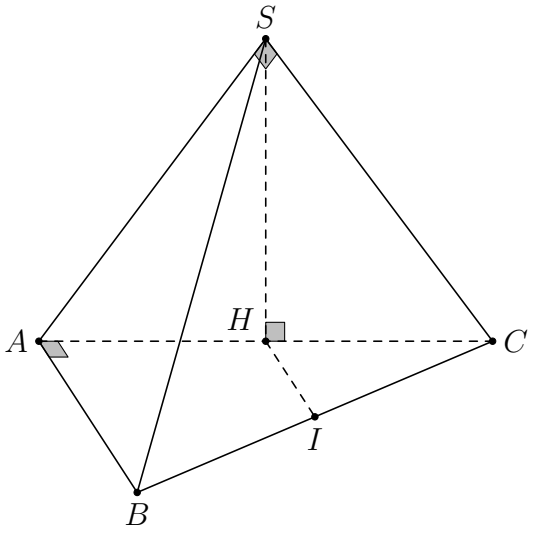
Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, tam giác SAC vuông cân tại S. Biết $AB=a, AC=2a, (SAC)\perp(ABC)$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $2\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $5\pi a^2$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi $H,\ I$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ AC$.
$\triangle SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SH \perp AC$ và $HA = HC = HS$.
$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow IA = IB = IC \quad (1)$.
Lại có $\begin{cases} (ABC) \perp (SAC) \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$.
Mà HI là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow H \parallel AB \Rightarrow HI \perp (SAC)$.
$\Rightarrow IA = IC = IS \quad (2)$.
Từ $(1), (2) \Rightarrow LA = IB = IC = IS$. Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
$R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.



Chọn đáp án C □

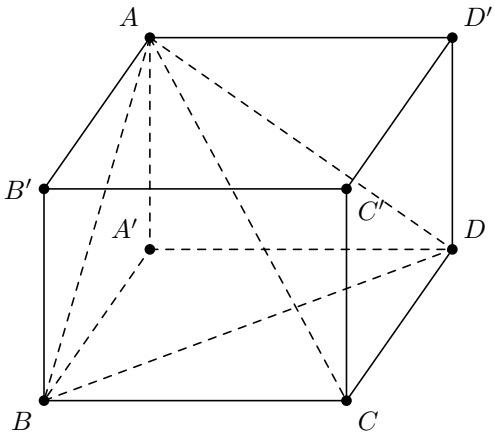
Câu 10. Cho tứ diện ABCD có $BC = a, CD = a\sqrt{3}, \widehat{BCD} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $60°$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.

Xét hình hộp chữ nhật $AB'C'D' \cdot A'BCD$.
Ta có

- ☑ $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$.
- ☑ Vì $BC \parallel A'D \Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng góc giữa hai đường thẳng AD và $A'D$ bằng góc $\widehat{ADA'} \Rightarrow \tan\widehat{ADA'} = \tan 60° = \dfrac{AA'}{A'D} = \sqrt{3} \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$.
  Do vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $AB'C'D'.A'BCD \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{A'A^2 + A'B^2 + A'D^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.
  Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.



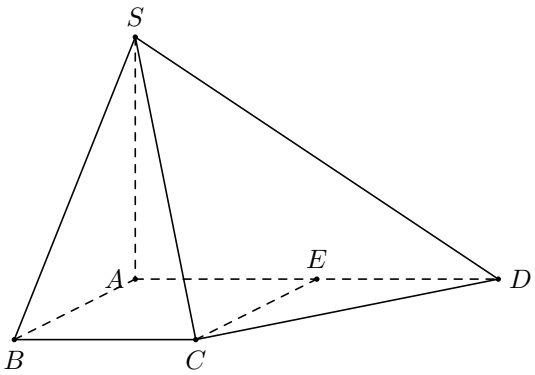
Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $SA \perp (ABCD)$, $AB = BC = a,\ AD = 2a,\ SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, D, E.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải.

Phương pháp:



Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, sử dụng công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \sqrt{\dfrac{h^2}{4} + R_d^2}$ trong đó h là chiều cao khối chóp, R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.

Cách giải:

Xét tứ giác $ABCE$ có $AE \parallel BC$, $AE = BC = a$ $\Rightarrow$ $ABCE$ là hình bình hành. Lại có $\widehat{BAE} = 90^\circ$ (gt), $AC = BC \Rightarrow ABCE$ là hình vuông cạnh a.

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCE là $R_d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Sử dụng công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCE$ là:

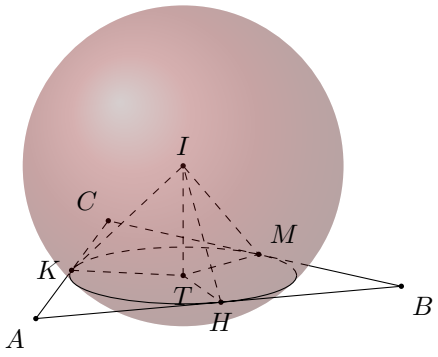
$$R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = a.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hình cầu (S) có tâm I, bán kính bằng 13 cm. Tam giác (T) với độ dài ba cạnh là 27 cm, 29 cm, 52 cm được đặt trong không gian sao cho các cạnh của tam giác tiếp xúc với mặt cầu (S). Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng chứa tam giác (T) là

A. 12 cm. **B.** $3\sqrt{2}$ cm. **C.** 5 cm. **D.** $2\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.



Nửa chu vi tam giác là

$$p = \frac{27 + 29 + 52}{2} = 54.$$

Diện tích tam giác là

$$S = \sqrt{54 \cdot (54 - 27) \cdot (54 - 29) \cdot (54 - 52)} = 270.$$

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là

$$r = \frac{S}{p} = \frac{270}{54} = 5 \text{ (cm)}.$$

Suy ra khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm).

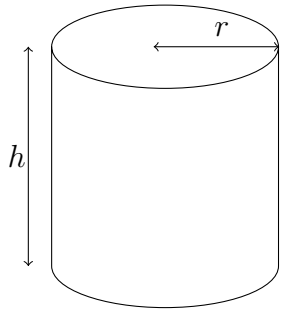
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Một hình trụ có bán kính mặt đáy bằng 5cm. Thiết diện qua trục của hình trụ có diện tích bằng 40cm^2. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S_{xq} = 30\pi\text{cm}^2$. **B.** $S_{xq} = 45\pi\text{cm}^2$. **C.** $S_{xq} = 40\pi\text{cm}^2$. **D.** $S_{xq} = 15\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.

Ta có: Diện tích qua trục của hình nón là một hình chữ nhật.
$S_{hcn} = 2R.h = 40\text{cm}^2 \Rightarrow h = 4\text{cm}$.
$S_{xq} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 40\pi\text{cm}^2$.



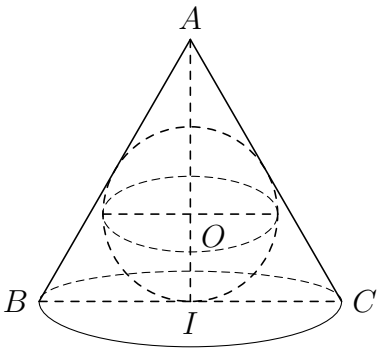
Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trong (P), xét đường tròn (C) đường kính BC. Diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón có đáy là (C), đỉnh là A bằng

A. $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2}{3}$. **C.** πa^2. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải.

Mặt cầu nội tiếp hình nón đỉnh A, đáy là đường tròn đường kính BC nên mặt cầu có tâm O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC.
Do đó $OI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C và $CA = CB = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có bán kính là

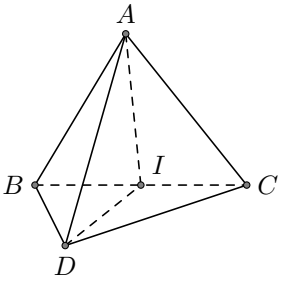
A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là hai tam giác đều cạnh chung $BC = 2$. Gọi I là trung điểm của BC, $\widehat{AID} = 2\alpha$ mà $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Hãy xác định tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

A. O là trung điểm AD. **B.** O là trung điểm BD.
C. O thuộc mặt phẳng (ADB). **D.** O là trung điểm AB.

Lời giải.

Ta có $AI = DI = \sqrt{3}$. Áp dụng định lý cosin ta có: $AD^2 = AI^2 + DI^2 - 2AI \cdot DI \cdot \cos\widehat{AID} = 8$. Suy ra 3 cạnh của các tam giác ADC, ADB thỏa mãn định lý Pytagore. Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là trung điểm O của AD.

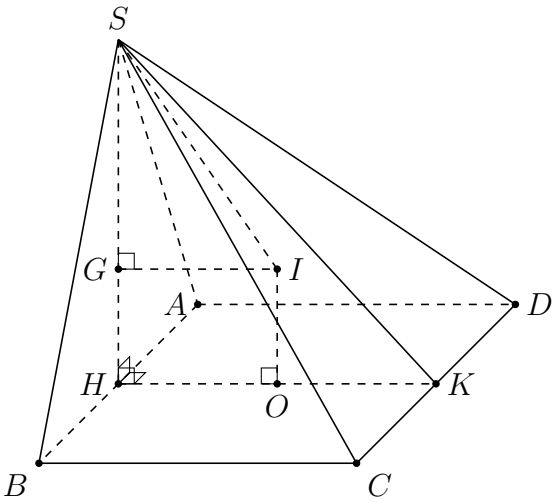


Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\text{ theo giao tuyến }AB\\SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của CD, ta có $\begin{cases}KH\perp AB\\KH\perp SH\end{cases}\Rightarrow KH\perp(SAB)$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm tam giác SAB.

Trong mặt phẳng (SHK), kẻ đường thẳng $Ox\parallel SH$ và kẻ đường thẳng $Gy\parallel KH$.

Gọi $I=Ox\cap Gy$, ta có $\begin{cases}IO\perp(ABCD)\\IG\perp(SAB)\end{cases}\Rightarrow IO$ là trục của hình vuông $ABCD$ và IG là trục của tam giác SAB.

Do đó ta có $IS=IA=IB=IC=ID$ hay I chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tứ giác $OHGI$ là hình chữ nhật nên $IG=OH=\dfrac{a}{2}$.

Tam giác SAB đều nên $SG=\dfrac{2}{3}SH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SGI vuông tại G nên $SI^2=SG^2+GI^2=\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{7a^2}{12}$.

Vậy $R=SI=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ và thể tích khối cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hình lập phương (H) nội tiếp một mặt cầu (S). Biết rằng, khối cầu được giới hạn bởi mặt cầu (S) có thể tích $\dfrac{4\pi}{3}$, tính thể tích của khối lập phương giới hạn bởi hình lập phương (H).

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, bán kính mặt cầu là r.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương là $\dfrac{4\pi r^3}{3}=\dfrac{4\pi}{3}\Leftrightarrow r=1\Rightarrow AC'=2r=2$

Ta có $AC'^2 = 3AA'^2 \Rightarrow AA' = \dfrac{AC'\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'^3 = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho một hình lập phương có bán kính mặt cầu ngoại tiếp, mặt cầu nội tiếp và mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương lần lượt là R_1, R_2, R_3. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $R_1 > R_3 > R_2$. **B.** $R_1 > R_2 > R_3$. **C.** $R_3 > R_1 > R_2$. **D.** $R_2 > R_1 > R_3$.

Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương

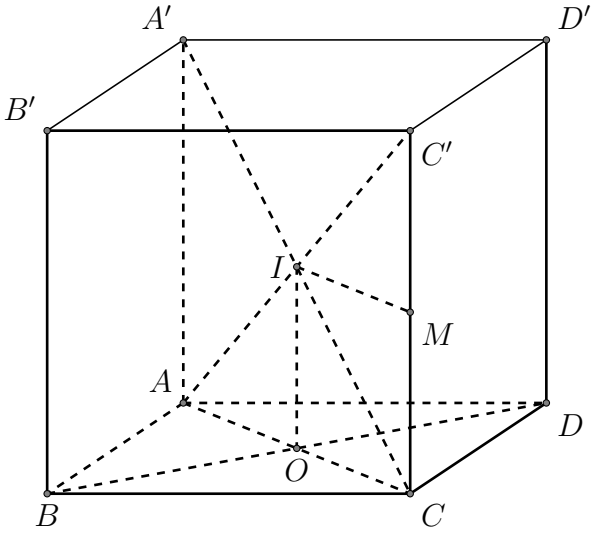
$\Rightarrow \begin{cases} AC = a\sqrt{2} \\ A'C = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Có R_1 là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương nên $R_1 = IC = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có R_2 là bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương nên $R_2 = IO = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Có R_3 là bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của hình lập phương nên $R_3 = IM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy ta có $R_1 > R_3 > R_2$.



Chọn đáp án A □

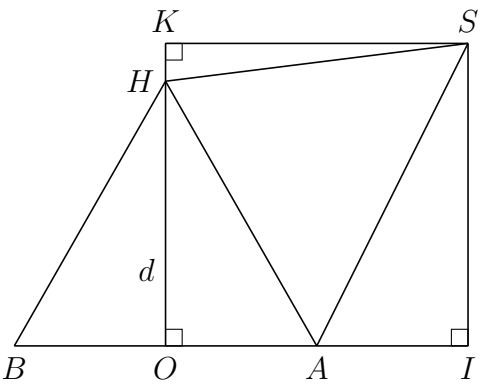
Câu 20. Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính $R = 5$. Một đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm M, N phân biệt nhưng không đi qua I. Đặt $MN = 2m$. Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IMN lớn nhất?

A. $m = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $m = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Câu 21. Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P). Gọi I là điểm đối xứng với O qua A. Lấy điểm S sao cho $SI \perp (P)$ và $SI = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S.

A. $R = \dfrac{7a}{4}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{16}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{65}}{2}$.

Lời giải.



Dựng đường thẳng $d \perp (P)$ tại O. Gọi H là tâm của mặt cầu đi qua điểm S và đường tròn tâm O, K là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng d, ta có tứ giác $SKOI$ là hình vuông.

Nếu K nằm giữa O và H thì gọi $x = HK \Rightarrow OH = 2a + x, (0 < x)$ ΔSHK vuông tại K.
ΔOAHvuông tại O có $SH = AH = R$.
$\Rightarrow SK^2 + HK^2 = OA^2 + OH^2 \Leftrightarrow 4a^2 + x^2 = a^2 + (2a + x)^2 \Leftrightarrow a^2 + 4ax = 0$ (vô lí vì $x > 0, a > 0$)
$\Rightarrow H$ nằm giữa O và $K \Rightarrow OH = 2a - x$
Ta có $SK^2 + HK^2 = OA^2 + OH^2 \Leftrightarrow 4a^2 + x^2 = a^2 + (2a - x)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4ax = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$
$\Rightarrow R = \sqrt{SK^2 + HK^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{65}}{4}$

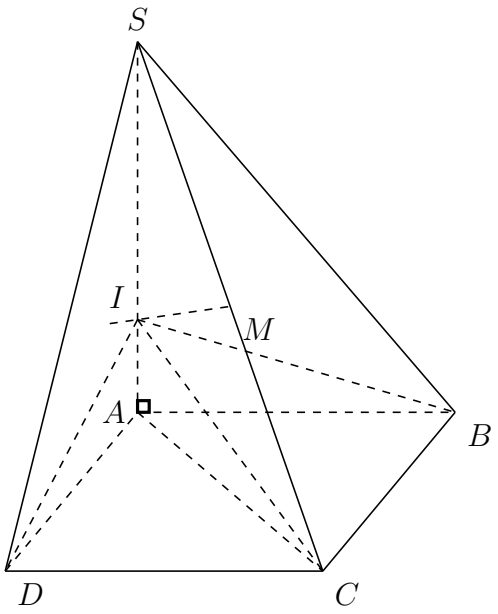
Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$.

A. $R = \dfrac{5a}{4}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow$
$AC = AD = a$. Suy ra A là tâm đường tròn ngoại t
giác BCD. Gọi M là trung điểm SC; đường thẳng d đ
và vuông góc SC cắt SA tại $I \Rightarrow IS = IB = IC =$
là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$
Đặt $IS = IC = x \Rightarrow IA = 2a - x$ mà $IA^2 + AC^2 =$
ra
$(2a - x)^2 + a^2 = x^2 \Leftrightarrow 4ax = 5a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5a}{4} \Rightarrow R =$



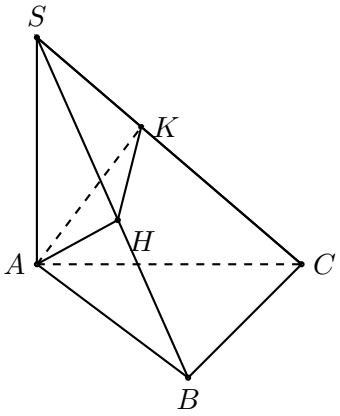
Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tính thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKB$.

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $BC \perp (SAB)$. Suy ra $BC \perp AH$.
Hơn nữa, $AH \perp SB$.
Nên $AH \perp (SBC)$.
Suy ra $AH \perp HC$. Hay H thuộc mặt cầu đường kính AC.
Mặt khác, B, K cũng thuộc mặt cầu đường kính AC.
Do đó, $A.HKB$ nội tiếp mặt cầu đường kính AC.
Thể tích mặt cầu này là $V = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.



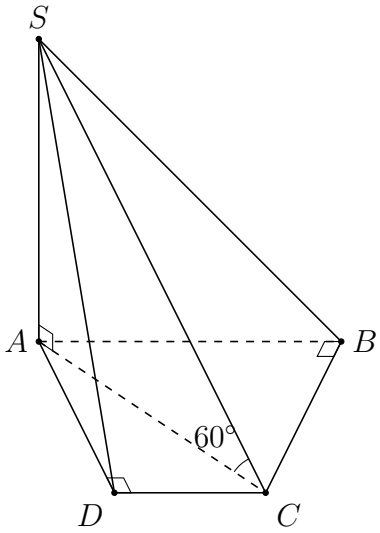
Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng $60°$, $CD = a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S_{\text{mc}} = 16\pi a^2$. **B.** $S_{\text{mc}} = 4\pi a^2$. **C.** $S_{\text{mc}} = 32\pi a^2$. **D.** $S_{\text{mc}} = 8\pi a^2$.

Lời giải.

Từ $S_{ADC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $DC = a$ ta có $AD = a\sqrt{3}$ và $AC = 2a$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AC$, suy ra $SC = \dfrac{2a}{\cos 60°} = 4a$. Cũng từ $SA \perp (ABCD)$, ta có $SA \perp DC$, mà $DC \perp AD$ nên $DC \perp (SAD)$, suy ra $DC \perp DS$. Chứng minh tương tự ta có $BC \perp BS$. Từ đó mặt cầu đường kính SC là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Vậy $S_{\text{mc}} = \pi SC^2 = 16\pi a^2$.



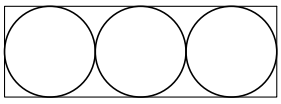
Chọn đáp án A □

Câu 25. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_b là tổng diện tích ba quả bóng bàn, S_t là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số $\dfrac{S_b}{S_t}$.

A. 1,2. **B.** 1. **C.** 1,5. **D.** 2.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của 1 quả bóng bàn $\Rightarrow S_b = 3 \cdot 4\pi R^2 = 12\pi R^2$.
Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_t = 2\pi R \cdot 6R = 12\pi R^2$.
Vậy tỉ số $\dfrac{S_b}{S_t} = 1$.



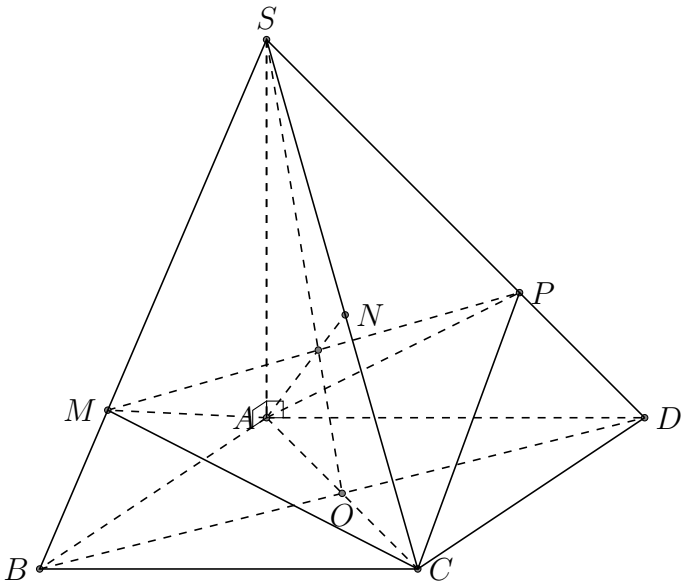
Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, các tam giác SAB và SAD là những tam giác vuông tại A. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với cạnh bên SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại các

điểm M, N, P. Biết $SC = 8a, \widehat{ASC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$.

A. $V = 24\pi a^3$. **B**. $V = 32\sqrt{3}\pi a^3$. **C**. $V = 18\sqrt{3}\pi a^3$. **D**. $V = 6\pi a^3$.

Lời giải.



Mặt phẳng $(AMNP) \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$ (1), $SC \perp AM$.

Do $(SAB) \perp BC \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$ (2).

Tương tự ta có $\widehat{APC} = 90^\circ$ (3).

Do $ABCD$ là hình vuông nên từ (1), (2), (3) suy ra AC là đường kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$.

Xét tam giác SAC có $\sin 60^\circ = \dfrac{AC}{SC}$.

$\Rightarrow AC = 4\sqrt{3}a \Rightarrow R = 2\sqrt{3}a \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^3 = 32\sqrt{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B. Biết $SA \perp (ABCD)$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm AD. Tính bán kính mặt cầu đi qua các đỉnh S, A, B, C, E.

A. $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. a.

Lời giải.

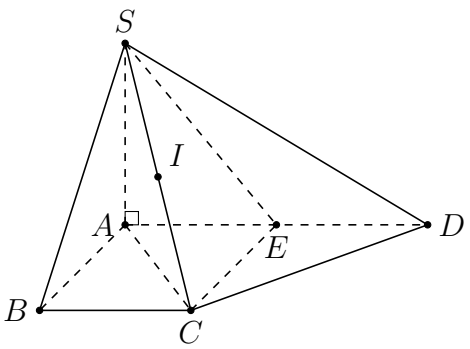
Ta có $ABCE$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CE \perp AE$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên

$\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow S, A, B, C, E$ nằm trên mặt cầu đường kính SC.

Mà $SA = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = 2a$

$\Rightarrow$ bán kính mặt cầu đi qua S, A, B, C, E bằng a.



Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = 6a$, các cạnh còn lại có độ dài bằng $a\sqrt{22}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{79}}{3}$. **B.** $R=\dfrac{5a}{2}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{85}}{3}$. **D.** $R=3a$.

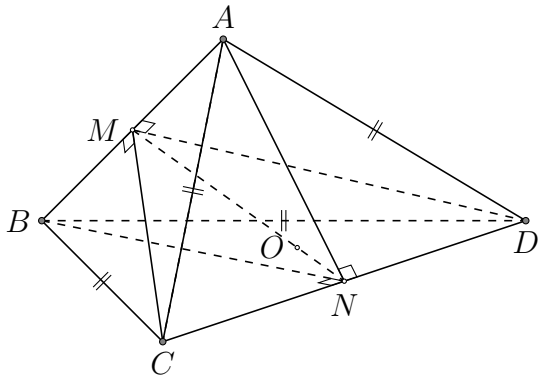
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

Từ giả thiết ta dễ chứng minh được $AB\perp(MCD)$; $CD\perp(ABN)$

$\Rightarrow (MCD),(ABN)$ là các mặt phẳng trung trực của AB và CD. Lại có $(ABN)\cap(MCD)=MN\Rightarrow O\in MN$ là tâm cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Gọi bán kính là R.

Xét tam giác ACD có $AN^2=\dfrac{AC^2+AD^2}{2}-\dfrac{CD^2}{4}\Rightarrow AN^2=13a^2=BN^2$.



Xét tam giác CAB có $CM^2=\dfrac{AC^2+BC^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}\Rightarrow CM^2=18a^2=MB^2$.

Xét tam giác MCD có $MN^2=\dfrac{MC^2+MD^2}{2}-\dfrac{CD^2}{4}=9a^2\Rightarrow MN=3a$.

Lại có $\dfrac{OA^2+OB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}=OM^2\Rightarrow R^2=OM^2+\dfrac{AB^2}{4}$; tương tự $R^2=ON^2+\dfrac{CD^2}{4}$.

Đặt $OM=x; ON=y$, $(x>0, y>0)$ ta có hệ $\begin{cases}x^2+4a^2=y^2+9a^2\\ x+y=3a.\end{cases}$

Giải hệ ta được $x=\dfrac{7}{3}a, y=\dfrac{2}{3}a\Rightarrow R=\sqrt{x^2+4a^2}=\dfrac{a\sqrt{85}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=3, AD=2$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{10\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{20\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$.

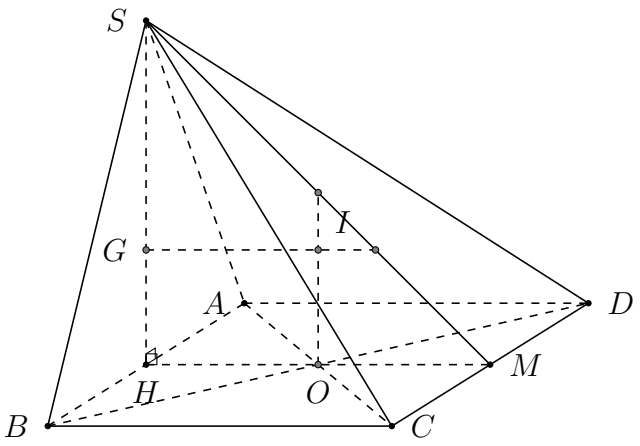
Lời giải.

Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trọng tâm của tam giác SAB.

Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH\perp(ABCD)$.

Tam giác SAB đều cạnh bằng 3 nên $SH=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow GH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=OI$.

Xét tam giác ABC có: $AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\Rightarrow AO=BO=CO=DO=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.



Xét tam giác BOI có: $BI=\sqrt{BO^2+OI^2}=\sqrt{\dfrac{13}{4}+\dfrac{3}{4}}=2\Rightarrow R=BI=2$.

Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}$.

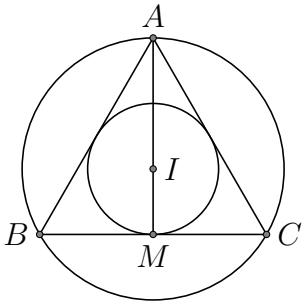
Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình nón đã cho. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. 8. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 16.

Lời giải.

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều ABC có độ dài cạnh là 1 với A là đỉnh của hình nón và BC là đường kính đáy của hình nón. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp của hình nón thành hai đường tròn trong đó có một đường tròn ngoại tiếp có bán kính R và nội tiếp có bán kính r của tam giác ABC.



Ta có $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$R = \dfrac{2}{3} \cdot AM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $r = \dfrac{1}{3} \cdot AM = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{R^3}{r^3} = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$ và $AD = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ bằng

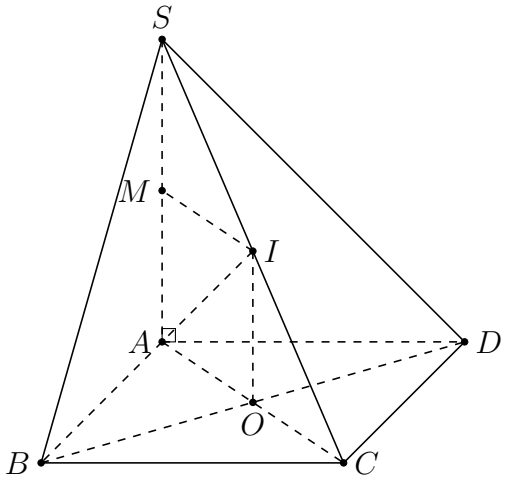
A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$. **B**. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{24}$. **C**. $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{5}}{25}$. **D**. $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cũng chính là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Do đó khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ là khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Dễ thấy O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Mặt phẳng trung trực của SC cắt trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ tại I. Do đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Tứ giác $AOIM$ là hình chữ nhật nên

$OI = AM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $AO = \dfrac{AC}{2} = a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là

$$R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ là

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{5a^3\pi\sqrt{5}}{6}.$$

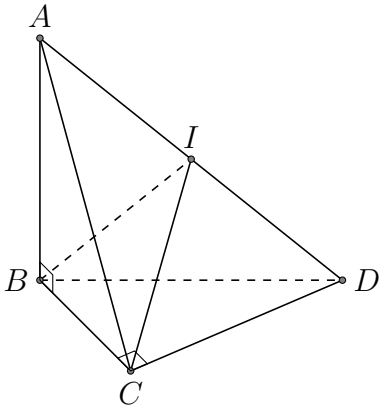
Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp BC$; $BC \perp CD$; $CD \perp AB$, biết $AB = 5$, $BC = 4$, $CD = 3$. Bán kính khối cầu đi qua các điểm A, B, C, D là

A. $R=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{5}{2}$. **D.** $R=5$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AD.



$\begin{cases} AB\perp BC \\ AB\perp CD \end{cases} \Rightarrow AB\perp (BCD) \Rightarrow AB\perp BD$ (vì $BD\subset (BCD)$).

$\begin{cases} CD\perp BC \\ CD\perp AB \end{cases} \Rightarrow CD\perp (ABC) \Rightarrow CD\perp AC$ (vì $AC\subset (ABC)$).

Hai tam giác ABD, ACD vuông tại B và C suy ra $IB=IC=IA=ID=\dfrac{AD}{2}$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$\triangle BCD$ vuông tại C, do đó $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$\triangle ABD$ vuông tại B, do đó $AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu $R=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

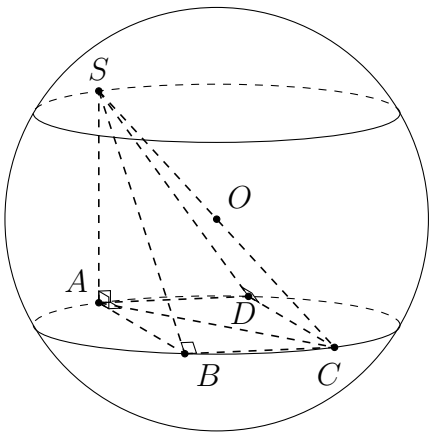
Chọn đáp án (B) □

Câu 33 (Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018). [Vinh Vo, dự án (12EX6)][2H2K2-2] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Biết $SA=AB=a, AD=2a, SA\perp (ABCD)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $SA\perp (ABCD)\Rightarrow SA\perp AC\Rightarrow \widehat{SAC}=90^\circ$. (1)



Ta có $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp BA \end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow \widehat{SBC}=90^\circ$. (2)

Ta có $\begin{cases} CD\perp SA \\ CD\perp AD \end{cases}$

$\Rightarrow CD\perp SD\Rightarrow \widehat{SDC}=90^\circ$. (3)

Từ (1), (2), (3), ta thấy các điểm A, B, D cùng nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Do vậy, các điểm S, A, B, C, D cùng thuộc mặt cầu đường kính SC.

Ta có $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{SA^2+AB^2+BC^2}=a\sqrt{6}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

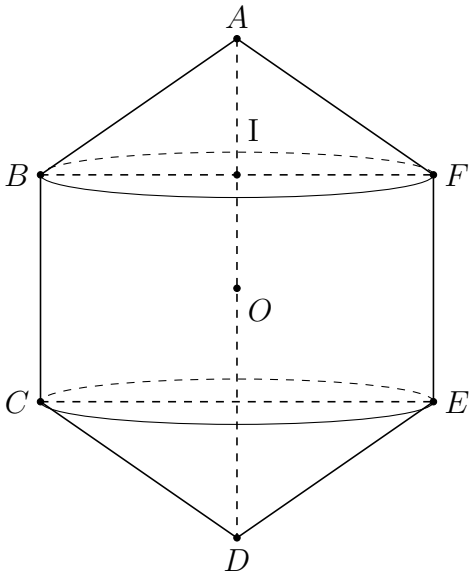
Chọn đáp án (D) □

Câu 34 (Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018). [Vinh Vo, dự án (12EX6)][2H2K2-6] Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 4. Quay lục giác đều đó quanh đường thẳng AD. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra.

A. $V=128\pi$. **B.** $V=32\pi$. **C.** $V=16\pi$. **D.** $V=64\pi$.

Lời giải.

Khối tròn xoay sinh ra gồm hai khối nón (N) và một khối trụ (T) có thiết diện qua trục lần lượt là $\triangle ABF$, $\triangle DCE$ và hình chữ nhật $BCEF$.



Vì $\triangle ABF = \triangle DCE \Rightarrow$ hai khối nón có thể tích bằng nhau.

Ta được $V = 2V_N + V_T$.

Gọi I, O lần lượt là trung điểm FB và AD.

Ta có $V_N = \dfrac{1}{3}AI \cdot \pi FI^2 = \dfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi(2\sqrt{3})^2 = 8\pi$.

Ta có $V_T = EF \cdot \pi(FI)^2 = 48\pi$.

Vậy $V = 64\pi$.

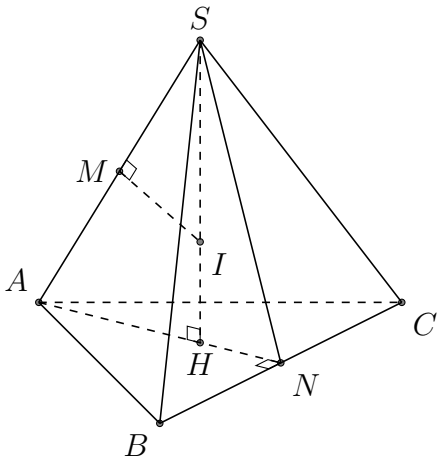
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h = 1$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

A. 9π. **B.** 6π. **C.** 5π. **D.** 27π.

Lời giải.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Trong (SAN), kẻ đường trung trực của đoạn thẳng SA cắt SH tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABC$.



Ta có $SH = 1; AB = \sqrt{6}; AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$.

$SA = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{3}$.

Ta có $SI \cdot SH = SM \cdot SA \Rightarrow r = SI = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{3}{2}$.

Mặt cầu có bán kính $r = \dfrac{3}{2}$ nên diện tích mặt cầu 9π.

Chọn đáp án A □

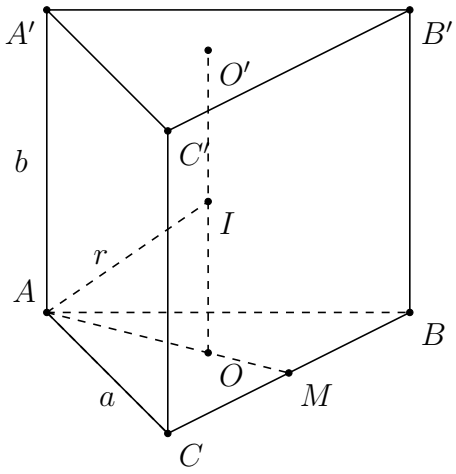
Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh a cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối cầu qua các đỉnh của lăng trụ.

A. $\dfrac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

C. $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+b^2)^3}$. **D.** $\dfrac{1}{18\sqrt{2}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

Lời giải.

Giả sử hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có O, O' lần lượt tâm của hai đáy. Khi đó tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm I của đoạn OO'.



Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, OI = \dfrac{1}{2}OO' = \dfrac{b}{2}$,

suy ra $r^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{4a^2+3b^2}{12} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{4a^2+3b^2}}{2\sqrt{3}}$.

Thể tích khối cầu (S) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

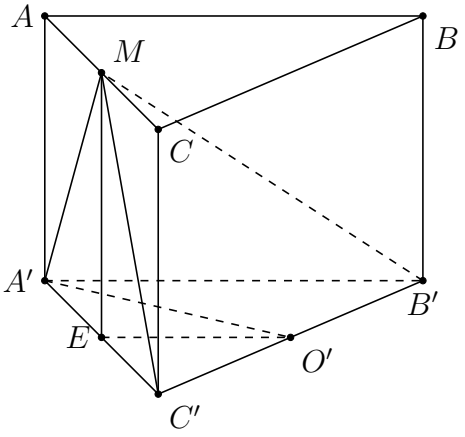
Chọn đáp án B □

Câu 37 (Đề GHK2, Sở GDĐT, Vũng Tàu 2017-2018). [Nhật Thiện - 12EX6][2H2K2-2] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $M.A'B'C'$ bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $5\pi a^2$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi O', O lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và BC.



Do tam giác $A'B'C'$ vuông tại A' có O' là trung điểm cạnh $B'C'$ nên O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác hay $O'A = O'C' = O'B'$.

Ta có $MA' = MC' = \sqrt{AM^2 + AA'^2} = a\sqrt{2}$ mà $MA'^2 + MC'^2 = A'C'^2$ suy ra tam giác $MA'C'$ vuông cân tại M. Gọi E là trung điểm $A'C'$ suy ra E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $MA'C'$.

Ta có $EO' \parallel A'B' \Rightarrow EO' \perp A'C' \Rightarrow EO' \perp (MA'C')$. Do $EM = EA' = EC' \Rightarrow O'A' = O'C' = O'M'$ suy ra O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MA'B'C'$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông tại A' suy ra $B'C' = \sqrt{A'C'^2 + A'B'^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $M.A'B'C'$ là $R = O'C' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $M.A'B'C'$ là $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.

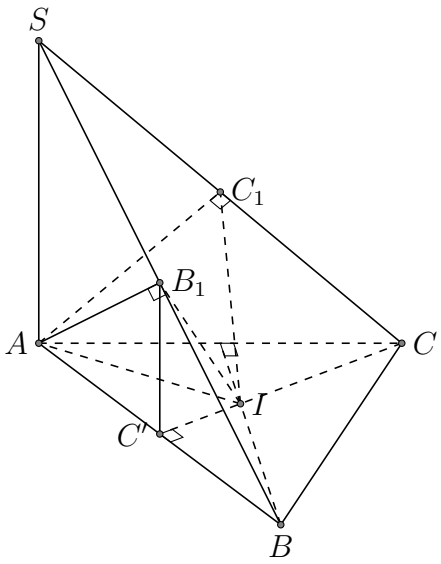
Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính theo a bán kính R của mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB và I là tâm tam giác đều ABC, khi đó $BB' \perp CA, CC' \perp AB$ và I là giao điểm của các đường thẳng BB', CC'.
Tam giác AB_1B vuông tại B_1 và có C' là trung điểm AB nên $C'A = C'B = C'B_1$.
Dễ thấy $CC' \perp (SAB)$ và do $I \in CC'$ nên $IA = IB = IB_1$. (1)
Tương tự ta có $IA = IC = IC_1$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, B_1, C_1.
Vậy $R = IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



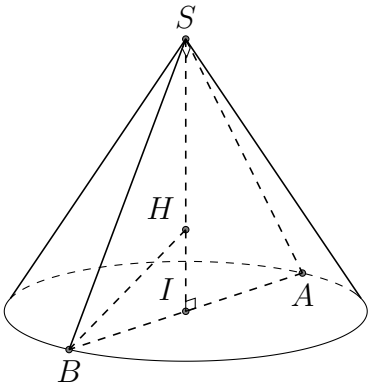
Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

A. $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $R = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Gọi thiết diện qua trục là tam giác SAB, gọi I là tâm đường tròn đáy và H là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón.
$HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
$BI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $BH = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



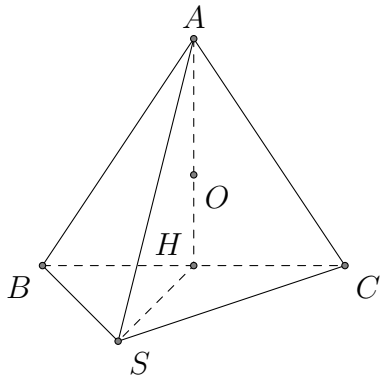
Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = SB = AB = AC = a$, $SC = a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $2\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC ta có $AH \perp BC$.
Do $(ABC) \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Đặt $AH = x \Rightarrow HC = \sqrt{a^2 - x^2} = HB = SH$
$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại S
(do đường trung tuyến bằng một nửa cạnh đối diện).
Suy ra $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{3}$.
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC
$\Rightarrow O \in AH \Rightarrow OA = OB = OC = OS$.
Ta có $R = R_{ABC} = \dfrac{AC}{2\sin B}$,
trong đó $\sin B = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{AS^2 - SH^2}}{AB} = \dfrac{1}{2}$.
Do đó $R = a \Rightarrow S_{\text{xq}} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.



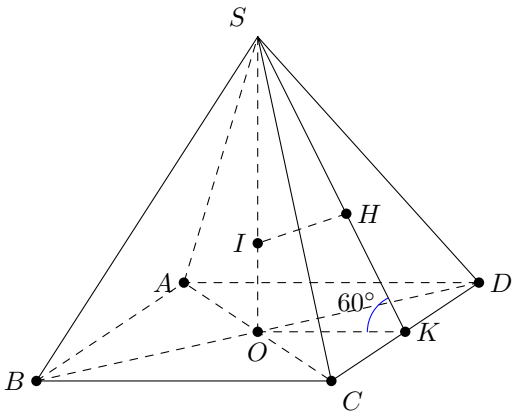
Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{5a}{12}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của đoạn CD, khi đó $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SKO} = 60°$. Nếu H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SCD thì tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là giao điểm I giữa SO và trục của hình tròn ngoại tiếp tam giác SCD. Tính được $SH = \dfrac{SC \cdot SD \cdot CD}{4S_{\Delta SCD}} = \dfrac{5}{8}a$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mặt khác, xét tam giác vuông SOK có $\dfrac{R}{SK} = \dfrac{SH}{SO} \Rightarrow R = \dfrac{5\sqrt{3}a}{12}$.



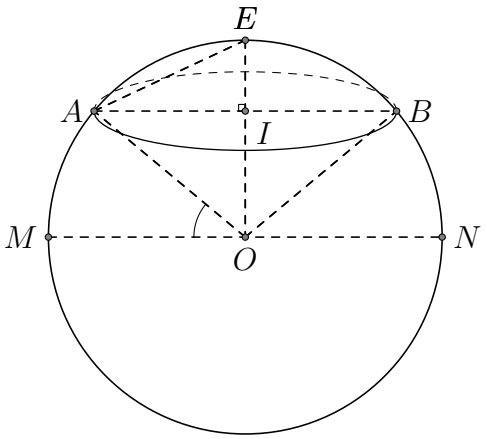
Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho quả địa cầu có độ dài đường kinh tuyến $30°$ Đông là 40πcm. Độ dài đường xích đạo là

A. $40\pi\sqrt{3}$ cm. **B.** 40π cm. **C.** $\dfrac{80\pi}{\sqrt{3}}$ cm. **D.** 80π cm.

Lời giải.

Gọi MN là đường kính xích đạo. Gọi đường kinh tuyến 30° Đông là đường tròn đường kính AB có tâm tại I. Góc $\widehat{AOM} = 30°$ hay $\widehat{AOE} = 60°$ (với M, N, A, B, E đồng phẳng) suy ra tam giác AOE đều nên $AI = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (với R là bán kính quả địa cầu). Theo giả thiết chu vi đường tròn đường kính AB là 40π cm nên $AI = 20$ cm.
Suy ra $R = \dfrac{2AI}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ cm. Khi đó độ dài đường xích đạo là $2\pi \cdot R = \dfrac{80\pi}{\sqrt{3}}$ cm.



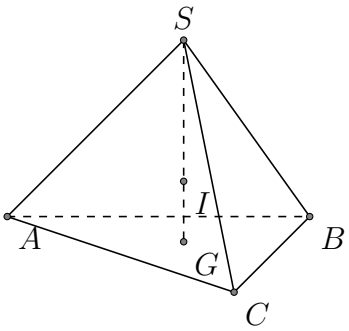
Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh $2a$. Tính bán kính r của mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện.

A. $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{12}$. **B.** $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{8}$. **C.** $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **D.** $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SG \perp (ABC)$.
Ta có $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.



Ta có

$$\begin{aligned} & V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.SAB} + V_{I.SBC} + V_{I.SAC} \\ \Leftrightarrow & V_{S.ABC} = 4V_{I.ABC} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\triangle ABC} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot r \cdot S_{\triangle ABC} \\ \Leftrightarrow & r = \frac{SG}{4} \end{aligned}$$

Vậy $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{6}$.

Chọn đáp án C □

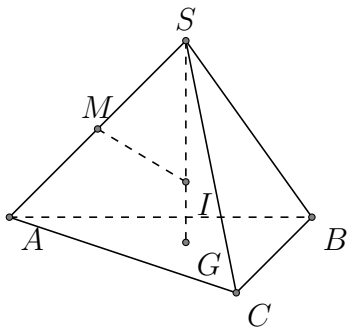
Câu 44. Cho (S) là mặt cầu ngoại tiếp một hình tứ diện đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC; I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều $S.ABC$.

Khi đó, $R = SI = \dfrac{SM.SA}{SG} = \dfrac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AG^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 45. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

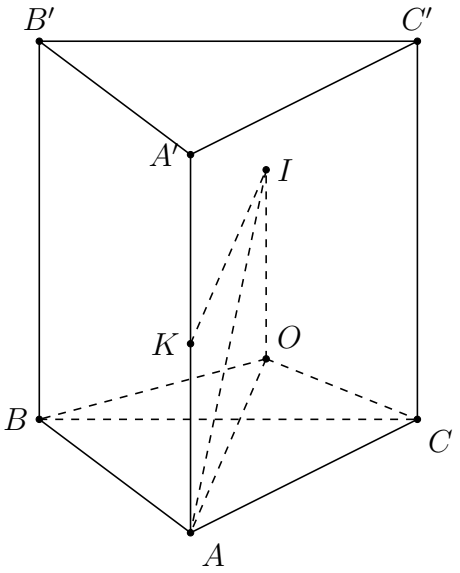
Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Xét tam giác ABC, ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 120^\circ \Rightarrow OA = a.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là

$$R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = a\sqrt{2}.$$

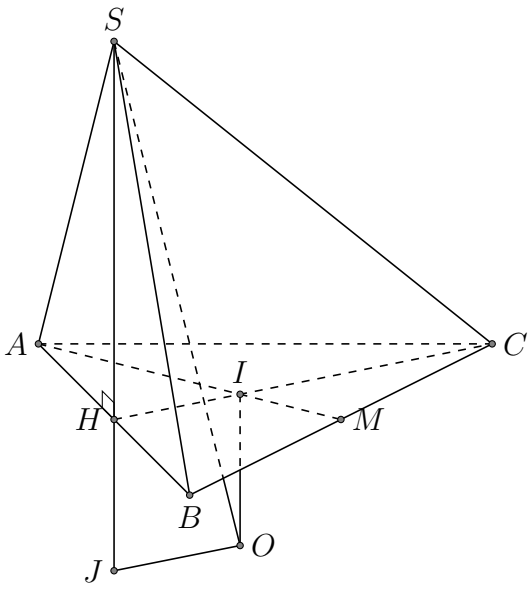


Chọn đáp án D ☐

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho biết $\widehat{ASB} = 120^\circ$.

A. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **C.** $V = \dfrac{5\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{13\sqrt{78}\pi}{27}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB, do $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác ABC đều và tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp (ABC)$ và $CH \perp (SAB)$.

Gọi I và J là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác SAB. Dựng đường thẳng $Ix \parallel SH$ và $Jy \parallel CH$ thì $Ix \perp (ABC)$ và $Jy \perp (SAB)$ nên Ix là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Jy là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Khi đó $Ix \cap Jy = O$ thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có $OJ = IH = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $R_{(SAB)} = SJ = \dfrac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 120^\circ} = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

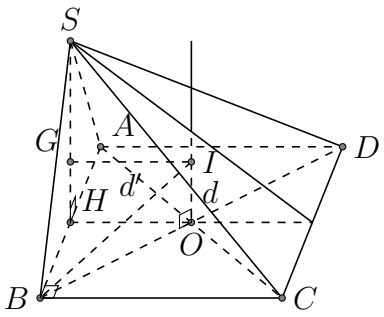
Vậy $R = SO = \sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12}} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$ nên $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \dfrac{5\pi\sqrt{15}}{54}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Vì $\triangle SAB$ đều và vuông góc với đáy nên SH là đường cao của hình chóp. Ta có $O = AC \cap BD$ là tâm của mặt đáy, trọng tâm G của tam giác SAB là tâm của mặt SAB, $OH \perp (SAB)$. Gọi d là trục của mặt đáy, d' là trục của mặt SAB. Ta có d qua O, $d \parallel SH$; d' qua G, $d' \parallel OH$. Trong (SHO), $d \cap d' = I \Rightarrow$ $\begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IB = IS. \end{cases}$ Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

Ta có $IGHO$ là hình chữ nhật nên $OI = HG$. Khi đó

$$R = IB = \sqrt{OI^2 + OB^2} = \sqrt{HG^2 + \frac{BD^2}{4}} = \sqrt{\frac{HS^2}{9} + \frac{BD^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 2a^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$.

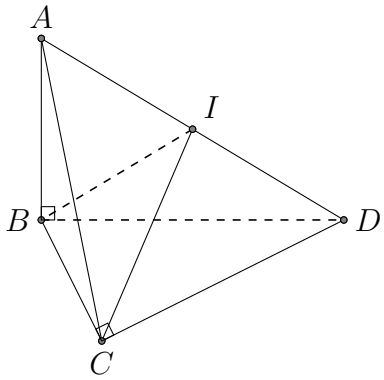
Lời giải.

Ta có $CD \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ = \widehat{ABD}$.

Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm của AD.

Mà $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5a$

$\Rightarrow AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 5\sqrt{2}a \Rightarrow R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{2}$, $AB = a$. Tính bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R = a\sqrt{2}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

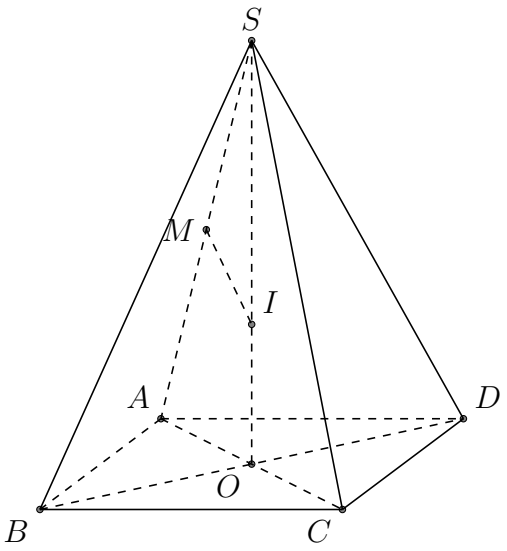
Gọi O là tâm của đáy, do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$, suy ra SO là trục đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

Gọi M là trung điểm của SA, dựng trung trực Mt của SA trong (SAO).

Gọi I là giao điểm của Mt và SO trong (SAO), ta chứng minh được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

Do $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} = SA = SC$ nên tam giác SAC đều.

Vậy $R = SI = \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{SA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{6}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S = \dfrac{9\pi a^2}{2}$. **B.** $S = 4\pi a^2$. **C.** $S = 9\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{9\pi a^2}{4}$.

Lời giải.

Do $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \dfrac{\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp là $S = 4\pi R^2 = 9\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là

A. $3a$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm SC.

Vì $\triangle SAC$ vuông tại A nên $IS = IA = IC$.

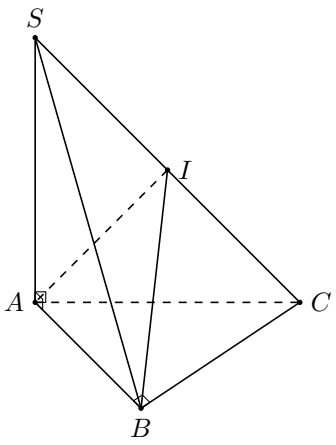
Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B

$\Rightarrow IC = IB = IS$.

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Bán kính

$R = IB = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + AC^2}$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 + a^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên hợp với đáy một góc bằng $60°$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

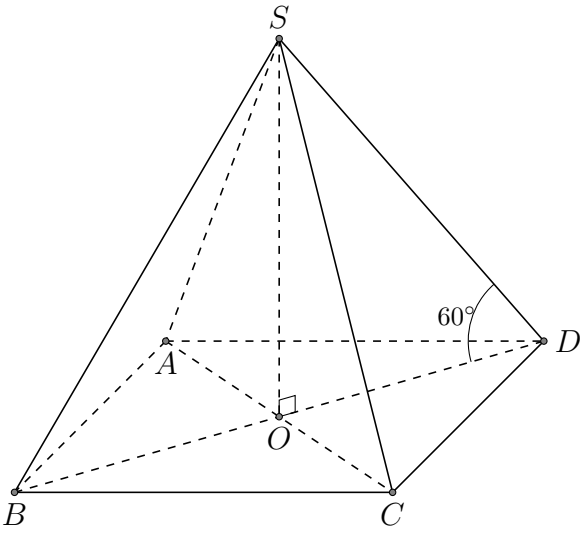
A. $V = \dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{6}\pi a^3}{9}$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **D.** $V = \dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác SBD là tam giác đều cạnh $BD = a\sqrt{2}$. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ cũng là trọng tâm của tam giác SBD.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \dfrac{2}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$.

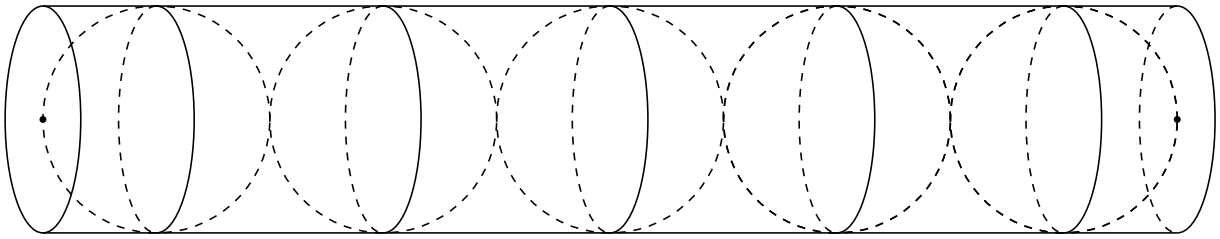


Chọn đáp án A □

Câu 53. Một hộp bóng bàn hình trụ có bán kính R, chứa được 5 quả bóng sao cho các quả bóng tiếp xúc với thành hộp theo một đường tròn và tiếp xúc với nhau. Quả trên cùng và dưới cùng tiếp xúc với hai nắp hộp. Tính phần thể tích của khối trụ mà thể tích của các quả bóng bàn không chiếm chỗ.

A. $5\pi R^3$. **B.** $\dfrac{3\pi R^3}{4}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{10\pi R^3}{3}$.

Lời giải.



Thể tích khối trụ là $V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 10R = 10\pi R^3$.

Thể tích của 5 khối cầu có bán kính R là $V_{\text{cầu}} = 5 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{20R^3}{3}$.

Thể tích của các quả bóng không chiếm chỗ là $V = V_{\text{trụ}} - V_{\text{cầu}} = 10\pi R^3 - \dfrac{20\pi R^3}{3} = \dfrac{10\pi R^3}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng a là

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{7}$. **C.** $\dfrac{7\pi a^2}{5}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{6}$.

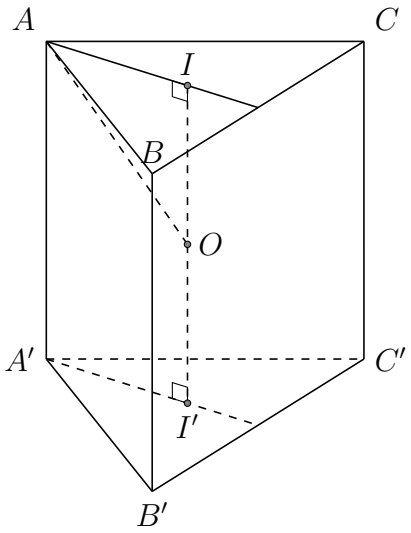
Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$.

Tâm O mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ là trung điểm của II'.

Ta có $IO = \dfrac{a}{2}$, $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $R^2 = AO^2 = IO^2 + IA^2 = \dfrac{7a}{12}$.

Vậy, diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.



Câu 55. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. Khối cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có thể tích là

A. $\dfrac{125\sqrt{2}\pi^3}{3}$. **B.** $\dfrac{125\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{1000\sqrt{2}\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{1000\sqrt{2}\pi^3}{3}$.

Lời giải.

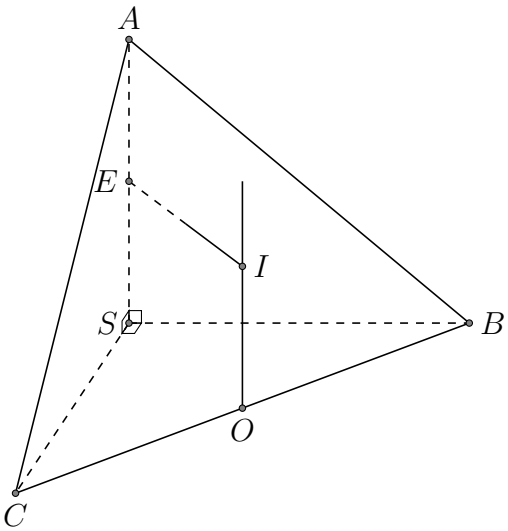
Gọi O là trung điểm BC, dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Ta có d là trục của đáy. Trung trực của SA cắt d tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

Ta có $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = \sqrt{41}$.

Ta có $R^2 = IS^2 = SO^2 + SE^2 = \dfrac{25}{2} \Rightarrow R = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{125\sqrt{2}\pi}{3}$.

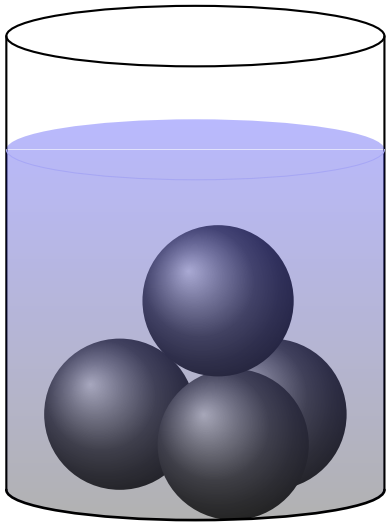


Chọn đáp án B □

Câu 56. Một cốc nước có dạng hình trụ có chiều cao 12 cm, đường kính đáy 4 cm. Lượng nước trong cốc cao 8 cm. Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính 2 cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu cen-ti-mét? (làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số thập phân, bỏ qua độ dày của cốc)

A. 2,67 cm. **B**. 2,75 cm. **C**. 2,25 cm. **D**. 2,33 cm.

Lời giải.



Thể tích của một viên bi là $V_{\text{bi}} = \dfrac{4\pi}{3}$ cm^3.

Suy ra 4 bi có thể tích $\dfrac{16\pi}{3}$ cm^3.

Thể tích của 4 viên bi khi thả vào cốc nước cũng chính là thể tích nước trong cốc tăng lên.

Do đó, chiều cao nước tăng thêm $\dfrac{4V_{\text{bi}}}{4\pi} = \dfrac{4}{3}$ cm.

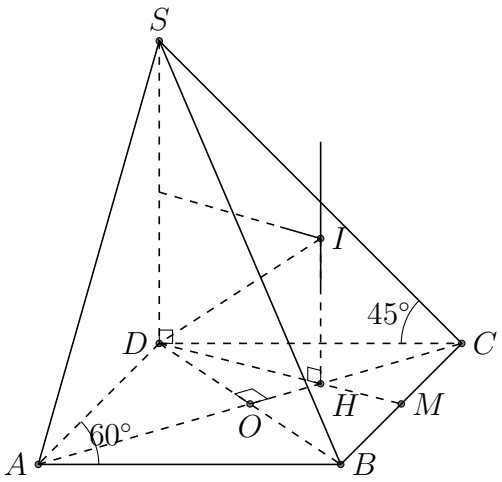
Vậy nước dâng cao cách mép cốc là $12 - 8 - \dfrac{4}{3} \approx 2{,}67$ cm.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, (SCD) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 45°. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCD$.

A. $\dfrac{7\pi}{4}$. **B**. $\dfrac{7\pi}{2}$. **C**. $\dfrac{7\pi}{6}$. **D**. $\dfrac{7\pi}{3}$.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác BDC đều. Gọi M là trung điểm của BC, DM cắt OC tại H. Dựng đường thẳng d vuông góc với (BDC) tại H, mặt phẳng trung trực của SD cắt d tại I. Khi đó, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $SBCD$. Ta có

$$DH = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác SDC vuông cân tại D nên $SD = 1$ suy ra $IH = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}$. Tam giác IDH vuông tại H nên

$$ID^2 = IH^2 + DH^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCD$ là $S = 4\pi ID^2 = \dfrac{7\pi}{3}$.

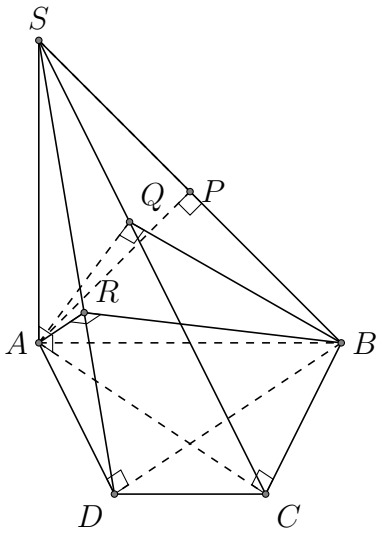
Chọn đáp án D □

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB = 2AD = 2DC = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB. Mặt phẳng (α) cắt SB, SC, SD lần lượt tại P, Q, R. Tính thể tích V của khối cầu đi qua các điểm A, B, C, P, Q, R.

A. $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào hình thang cân $ABCD$ với các kích thước đã cho tính được $AC = BD = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác ABC vuông tại C và tam giác ABD vuông tại D hay C và D nhìn AB dưới góc 90°.



Có $AP \perp SB$ suy ra P nhìn AB dưới góc 90°.

Có $BC \perp AC$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ$.

Mà $AQ \perp SB \Rightarrow AQ \perp (SBC) \Rightarrow AQ \perp QB$ hay Q nhìn AB dưới góc 90°. Chứng minh tương tự

$$BD \perp AD, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AR.$$

Mà $AR \perp SB \Rightarrow AR \perp (SBD) \Rightarrow AR \perp RB$ hay R nhìn AB dưới góc 90°.

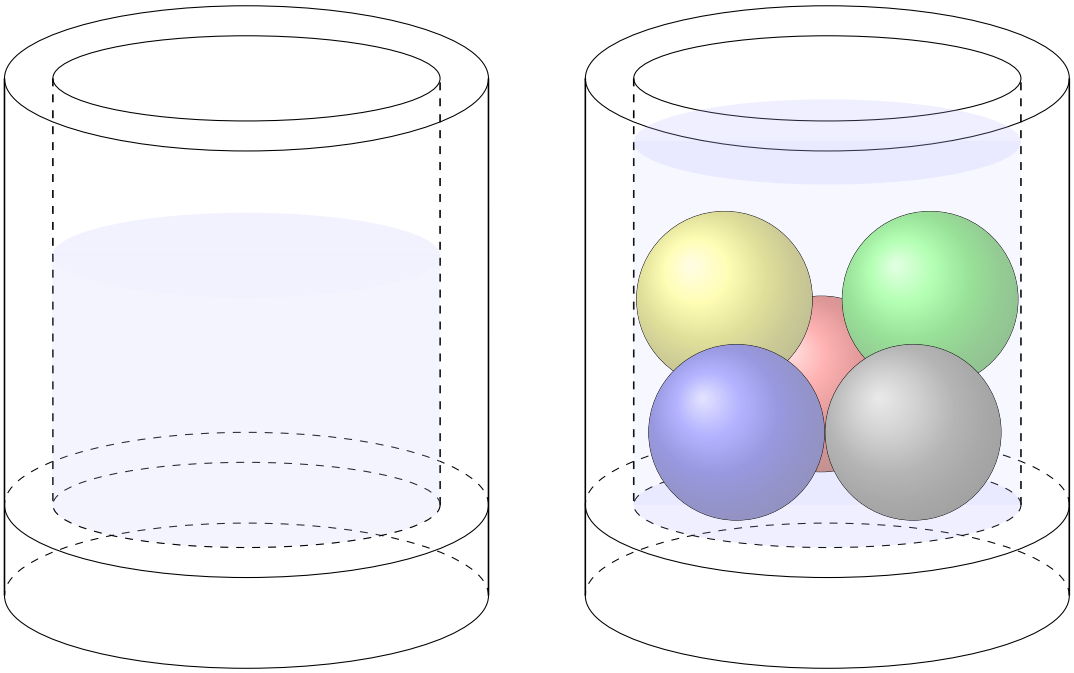
Vậy các điểm C, P, Q, R cùng nhìn AB dưới góc vuông hay A, B, C, P, Q, R cùng thuộc mặt cầu đường kính AB suy ra $R = \dfrac{AB}{2} = a$ và $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9 cm, đường kính 6 cm. Mặt đáy phẳng dày 1 cm, thành cốc dày 0,2 cm. Đổ vào cốc nước 120 ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2 cm. Mặt nước cách mép cốc gần nhất với giá trị bằng

A. 3,67 cm. **B.** 3,08 cm. **C.** 2,28 cm. **D.** 2,62 cm.

Lời giải.



Thể tích của 5 viên bi $V_1 = 5 \cdot \dfrac{4\pi}{3} \approx 20{,}944$.

Thể tích của nước và 5 viên bi là $V \approx 120 + 20{,}944 = 140{,}944$.

Chiều cao của mực nước sau khi bỏ 5 viên bi vào: $h = \dfrac{V}{\pi \cdot R^2} = \dfrac{140{,}944}{\pi \cdot 2{,}8^2} \approx 5{,}722$.

Mặt nước cách mép cốc một khoảng bằng $8 - 5{,}722 \approx 2{,}28$ cm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Thể tích khối cầu giới hạn bởi mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng 2 là

A. $16\pi\sqrt{3}$. **B.** $4\pi\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}\pi\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Thể tích của khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, các cạnh bên hợp với đáy góc 30°. Hãy tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{32\sqrt{3}a^3\pi}{27}$. **B.** $\dfrac{32a^3\pi}{27}$. **C.** $\dfrac{8a^3\pi}{81}$. **D.** $\dfrac{32a^3\pi}{81}$.

Lời giải.

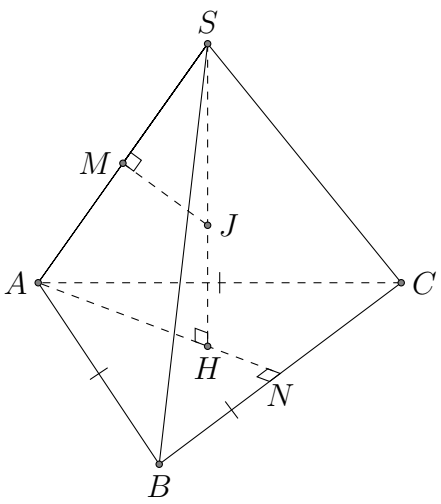
Gọi N là trung điểm của BC thì $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $SH = AH \cdot \tan 30° = \dfrac{a}{3}$.

Dựng mặt phẳng trung trực của SA cắt SA tại M, cắt SH tại J thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là SJ.

Ta có $R = SJ = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{SH^2 + AH^2}{2SH} = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

$V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{2a}{3}\right)^3 = \dfrac{32a^3\pi}{81}$.



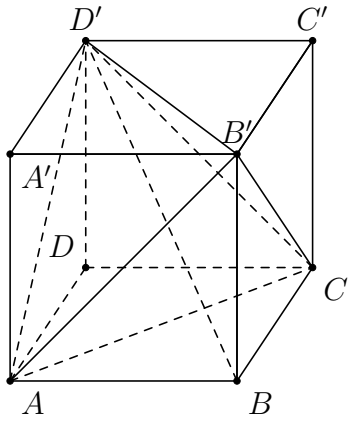
Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACB'D'$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACB'D'$ chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Ta có $BD' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{14a^2} = a\sqrt{14}$.

Suy ra $R = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

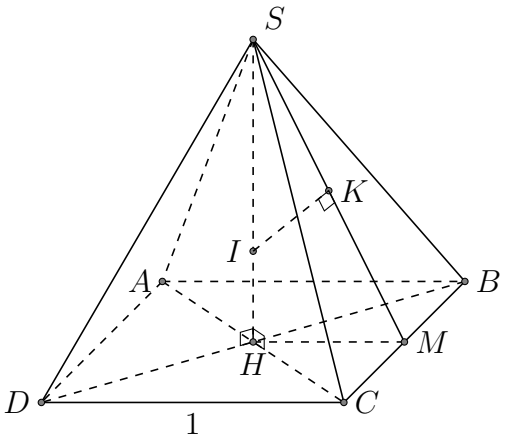
Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đều đó.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, suy ra $SM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$, suy ra I nằm trên đường thẳng SH với $SH = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $\mathrm{d}(I;(ABCD)) = \mathrm{d}(I;(SBC))$.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên SM, suy ra $IK \perp (SBC)$.

Do đó, đặt $IH = IK = x \geq 0$.

Ta có $\dfrac{IK}{HM} = \dfrac{SI}{SM} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} - x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB} = 120^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAB$, biết $SH = 4\sqrt{3}$.

A. $R = \sqrt{5}$. **B.** $R = 3\sqrt{5}$. **C.** $R = \sqrt{15}$. **D.** $R = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

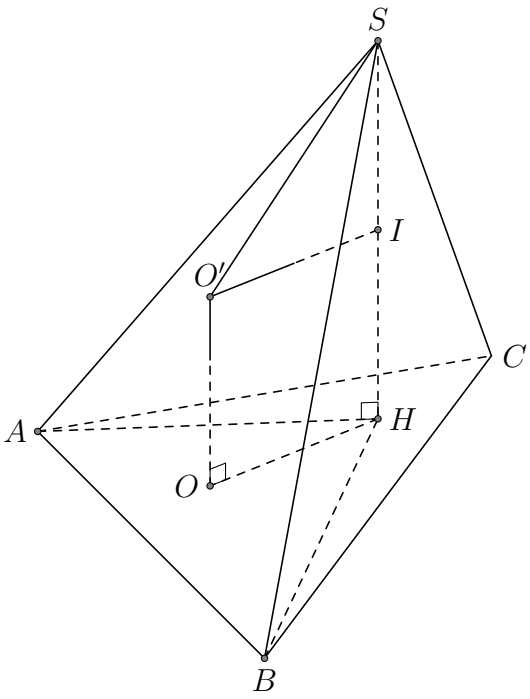
Gọi I là trung điểm của SH và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là OH.

Theo định lí sin ta có:
$\dfrac{AB}{\sin \widehat{AHB}} = 2OH \Rightarrow OH = \dfrac{3}{2\sin 120^\circ} = \sqrt{3}.$

Trong mặt phẳng $(O'OH)$ dựng hình chữ nhật $OHIO'$ suy ra $O'I$ là đường trung trực của cạnh SI và tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABH$ là O'.

Xét tam giác $SO'I$ vuông tại I có $O'I = OH = \sqrt{3}$, $SI = \dfrac{SH}{2} = 2\sqrt{3}$ nên $O'S = \sqrt{O'I^2 + SI^2} = \sqrt{15}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAB$ là $R = \sqrt{15}$.



Chọn đáp án C □

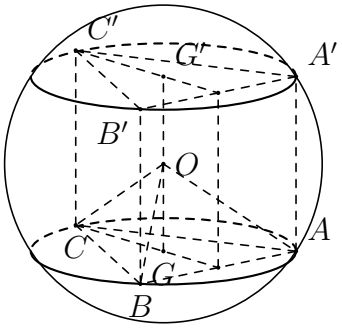
Câu 65. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích của mặt cầu đi qua sáu đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{49\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{49\pi a^2}{144}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải.

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$, O là trung điểm của GG'. Vì ABC và $A'B'C'$ là các tam giác đều nên G, G' là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác tương ứng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên GG' vuông góc với đáy của lăng trụ $\Rightarrow$ GG' là trục của các đường tròn ngoại tiếp các đáy ABC và $A'B'C' \Rightarrow O$ cách đều các đỉnh của hình lăng trụ.



Ta có $GC = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Mà $GG' = a \Rightarrow GO = \dfrac{a}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là
$S = 4\pi \cdot \dfrac{7a^2}{12} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

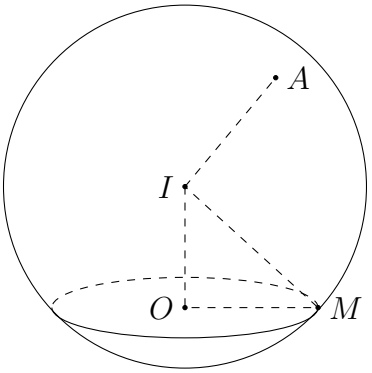
Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ và điểm A nằm ngoài mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$. Có tất cả bao nhiêu mặt cầu chứa đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua A?

A. Vô số. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi O, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$. Xét đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathscr{C})$. Khi đó tâm I của mặt cầu thuộc đường thẳng d và thỏa mãn $IA^2 = IO^2 + r^2$. Ta tìm được duy nhất một điểm I như thế. Vậy có một mặt cầu chứa đường tròn $(\mathscr{C})$ và điểm A nằm ngoài mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$.



Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-16=0$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-2=0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là

A. $r=\sqrt{6}$. **B.** $r=2\sqrt{2}$. **C.** $r=4$. **D.** $r=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt cầu (S)

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-16=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25.$$

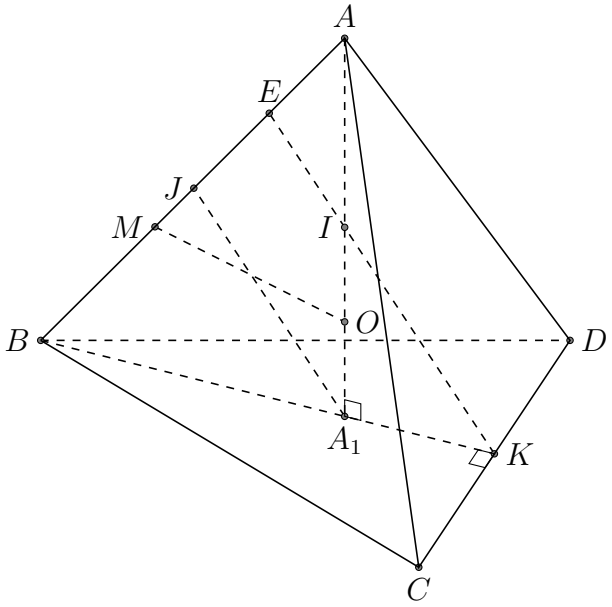
Gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu ta có $I(1;-2;2)$ và $R=5$.
Hạ $IH \perp (P)$ khi đó $HI = \dfrac{|1\cdot 1+2\cdot(-2)-2\cdot 2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 3$.
Gọi r là bán kính đường tròn khi đó $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.
Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho tứ diện đều $ABCD$ có một đường cao AA_1. Gọi I là trung điểm AA_1. Mặt phẳng (BCI) chia tứ diện $ABCD$ thành hai tứ diện. Tính tỉ số hai bán kính của hai mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

A. $\sqrt{\dfrac{43}{51}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{48}{153}}$.

Lời giải.

Gọi cạnh của tứ diện đều là a.
Gọi K là trung điểm của CD và $E = IK \cap AB$. Qua A_1 kẻ đường thẳng song song với IK cắt AB tại J.
Ta có $\dfrac{BJ}{BE}=\dfrac{BA_1}{BK}=\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{AE}{EJ}=\dfrac{AI}{IA_1}=1$.
Nên suy ra $AE=\dfrac{1}{4}AB=\dfrac{a}{4}$ và $BE=\dfrac{3a}{4}$.
Gọi M là trung điểm của BE, trong mặt phẳng (ABK) dựng đường trung trực của BE cắt AA_1 tại O. Ta dễ dàng chứng minh được O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp $EBCD$.
Ta có $BA_1=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}, AA_1=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Đặt $BE = x$, tam giác ABA_1 đồng dạng với tam giác AOM nên suy ra

$$\frac{AM}{AA_1} = \frac{OM}{BH} \Rightarrow OM = \frac{AM.BH}{AA_1} = \left(a - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $EBCD$ ta suy ra

$$R = OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{x}{2}\right)^2}.$$

Với $x = \dfrac{3a}{4}$ ta có

$$R = \sqrt{\frac{9a^2}{64} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{3a}{8}\right)^2} = a\sqrt{\frac{43}{128}}.$$

Tương tự với $x = \dfrac{a}{4}$ ta có bán kính R' của mặt cầu ngoại tiếp $EACD$ là

$$R' = \sqrt{\frac{a^2}{64} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{4}\right)^2} = a\sqrt{\frac{51}{128}}.$$

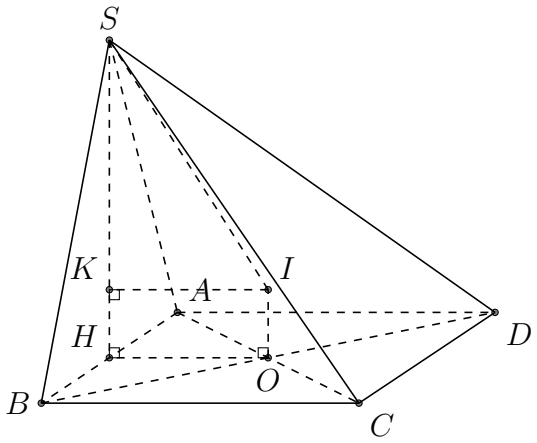
Do đó $\dfrac{R}{R'} = \sqrt{\dfrac{43}{51}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác cân nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $\widehat{ASB} = 120^\circ$. Tính thể tích mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}a^3$. **B.** $28\sqrt{21}a^3$. **C.** $\dfrac{28\sqrt{21}a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}a^3$.

Lời giải.



• Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, O là giao điểm 2 đường chéo. Ta có $IO \perp (ABCD)$. • Gọi H là trung điểm AB, K là hình chiếu của I trên SH. Khi đó, $IK \perp (SAB)$ nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

• $OH = \dfrac{1}{2}AD = a$ và $SK = \dfrac{AB}{2\sin 120^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ta có $IS^2 = IK^2 + SK^2 = OH^2 + SK^2 = a^2 + \dfrac{4a^2}{3} = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow IS = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

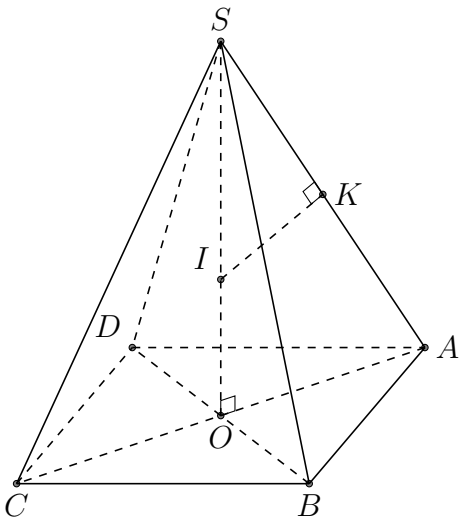
• Ta có $R = IS = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$ nên $V_{\text{cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{28\sqrt{21}a^3}{27}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2$ và $SA = 3\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{33}}{4}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Khi đó $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 4$.

Gọi K là trung điểm SA, lấy điểm I thuộc đoạn SO sao cho $IK \perp SA$, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có $\triangle SKI \backsim \triangle SOA \Rightarrow \dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SK}{SO}$

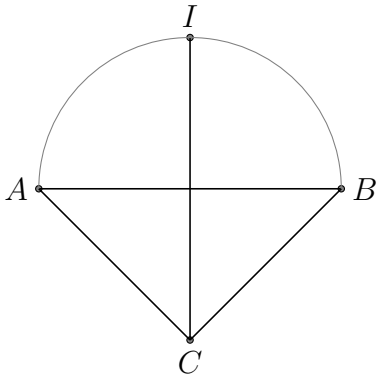
$\Rightarrow SI = \dfrac{SK \cdot SA}{SO} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71.

Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 6$, điểm I nằm chính giữa cung AB và tam giác ABC vuông cân tại C tạo thành hình phẳng (H) (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quanh hình (H) quanh trục CI.

A. 18π. **B.** 9π. **C.** 8π. **D.** 27π.



Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích nửa khối cầu đường kính $AB = 6$ và khối nón tròn xoay CAB với bán kính đáy $R = \dfrac{AB}{2} = 3$, chiều cao $h = \dfrac{CI}{2} = 3$.

Thể tích V của vật thể tròn xoay khi quanh hình (H) quanh trục CI bằng tổng thể tích của V_1, V_2.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{2}{3}\pi R^3 + \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 18\pi + 9\pi = 27\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên hợp với đáy một góc bằng $60°$. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu ngoại tiếp, thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

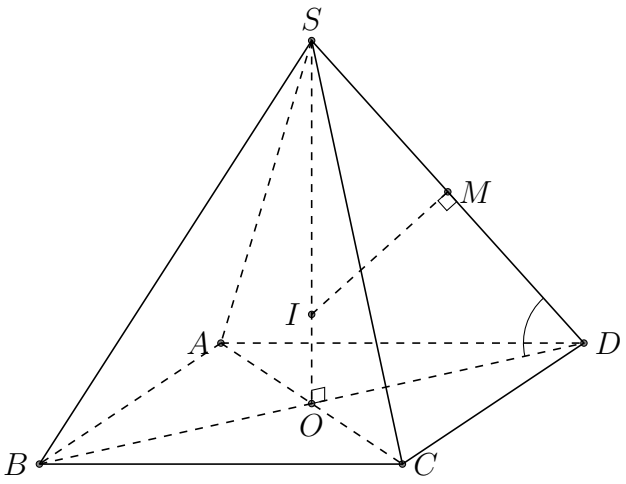
A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{32}{9}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{32}{27}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $SO \perp (ABCD)$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
Ta có góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60° suy ra $\widehat{SDO} = 60^\circ$.
Ta có $SO = OD \tan \widehat{ODS} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$SD = \frac{OD}{\cos \widehat{ODS}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\cos 60^\circ} = a\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Ta có mặt phẳng trung trực (α) của SD cắt SO tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính $R = IS = ID = IA = IB = IC$.



Ta có $\triangle SIM \backsim \triangle SDO \Rightarrow \dfrac{SI}{SD} = \dfrac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SD^2}{2SO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó thể tích khối cầu ngoại tiếp $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right) = \dfrac{8a^3\sqrt{6}}{27}\pi$.

Thể tích khối nón ngoại tiếp $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi OD^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}\pi$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{8a^3\sqrt{6}\pi}{27}}{\dfrac{a^3\sqrt{6}\pi}{12}} = \dfrac{32}{9}$.

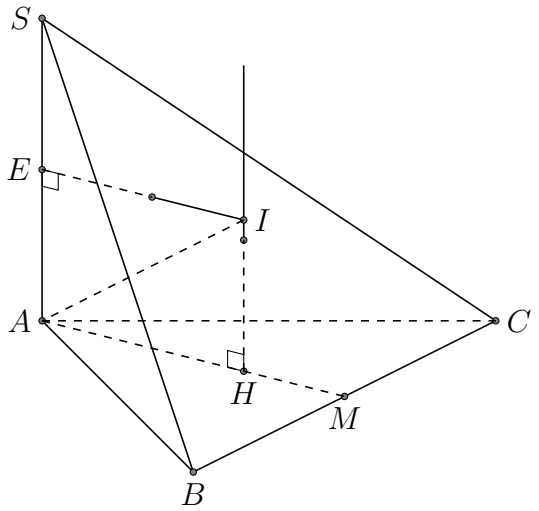
Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh $a = 3$ cm, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{8a^3\pi}{3\sqrt{3}}$ cm^3. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ cm^3. **C.** $32\pi\sqrt{3}$ cm^3. **D.** $16\pi\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi E, M lần lượt là trung điểm của SA, BC và H là trọng tâm của tam giác ABC.
Kẻ $IH \parallel SA$ và $EI \parallel AH$
$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Có $AH = \dfrac{2}{3}.AM = \sqrt{3}$.
$IH = AE = \dfrac{SA}{2} = a = 3$
$\Rightarrow R = IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = 2\sqrt{3}$
Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là
$V = 4\pi R^3 = 32\pi\sqrt{3}$ cm^3



Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Trong các hình hộp chữ nhật nằm trong mặt cầu bán kính R, thể tích lớn nhất có thể khối

hộp chữ nhật là

A. $\dfrac{8R^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{8R^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{16R^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4R^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $x, y, z > 0$ lần lượt là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. Do hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu bán kính R nên $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có, $3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le 4R^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \dfrac{4R^2}{3} \Leftrightarrow x^2y^2z^2 \le \dfrac{64R^6}{27} \Leftrightarrow xyz \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.
Dấu " = " khi chỉ khi $x = y = z = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.
Vậy thể tích khối lập phương là $V = \left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{8R^3\sqrt{3}}{9}$.

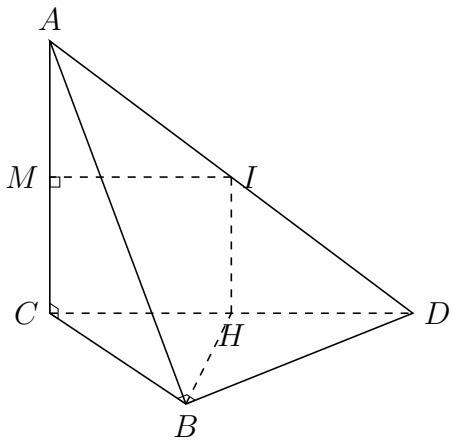
Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại B, AC vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AC = 5a$, $BC = 3a$ và $BD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Trong $\triangle CBD$ vuông tại B gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow HB = HC = HD$
$\triangle ACD$ vuông tại C gọi I là trung điểm của AD
$\Rightarrow IA = IC = ID$ và $IH \perp (BCD)$
Từ đó IH là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ hay $IA = IB = IC = ID$.
Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ bán kính IA.
$\triangle BCD$ có $CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.
$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông cân tại $C \Rightarrow AD = 5a\sqrt{2} \Rightarrow IA = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án D □

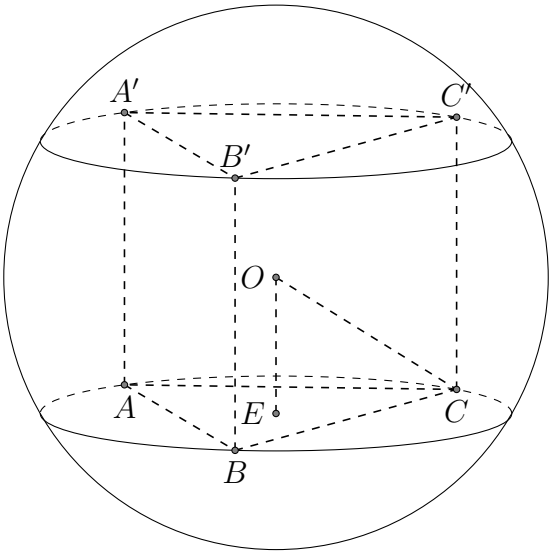
Câu 76. Cho hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích khối cầu giới hạn bởi mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lăng trụ.

A. $\dfrac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

C. $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+b^2)^3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

Lời giải.

Xét lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$.
Gọi I là trung điểm CC'.
Gọi E là trọng tâm tam giác ABC.
Dựng hình chữ nhật $ECIO$. Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABC.A'B'C'$.
Ta có $EC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Ta có $AI = OE = \dfrac{b}{2}$.
Ta được bán kính mặt cầu
$R = OC = \sqrt{OE^2 + EC^2} = \dfrac{\sqrt{4a^2 + 3b^2}}{2\sqrt{3}}$.
Thể tích khối cầu
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi}{18\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.



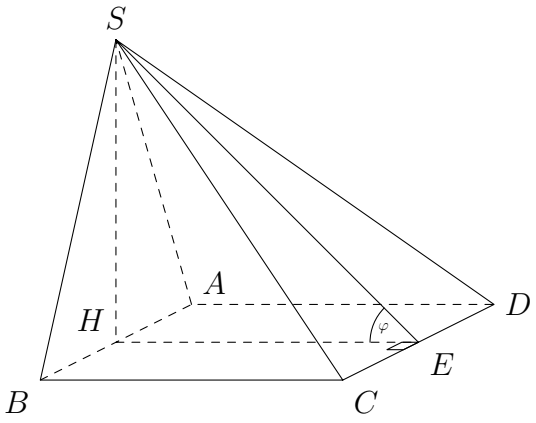
Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$.Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$. **B**. $9\pi a^2$. **C**. $4\pi a^2$. **D**. $2\pi a^2$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp mặt đáy $r_d = a\sqrt{2}$
Bán kính đường tròn ngoại tiếp mặt bên vuông góc với đáy $r_b = a$
Độ dài giao tuyến của mặt bên và đáy là $GT = AB = 2a$
$R = \sqrt{a^2 + 2a^2 - \dfrac{4a^2}{4}} = a\sqrt{2}$
$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2a^2 = 8\pi a^2$.



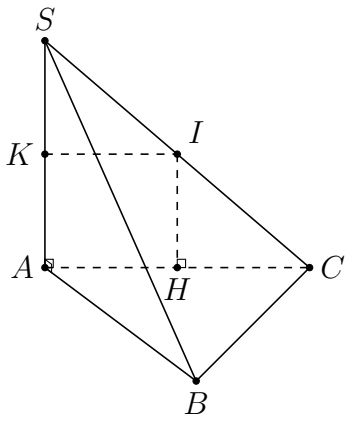
Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. **B**. $12\pi a^2$. **C**. $32\pi a^2$. **D**. $8\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AC, vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên $HA = HB = HC$.
Trong mặt phẳng (SAC) dựng $HI \parallel SA$ $(I \in SC)$. Nên $IH \perp (ABC)$ dẫn đến $IA = IB = IC$. Mặt khác IH là đường trung bình tam giác SAC nên $IS = IC$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Ta có $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.
Từ đó, diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là
$S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Một kiện hàng hình lập phương cạnh a chứa những quả bóng hình cầu có đường kính bằng $\dfrac{a}{4}$. Hỏi kiện hàng đó chứa tối đa bao nhiêu quả bóng?

A. 16. **B**. 122. **C**. 32. **D**. 64.

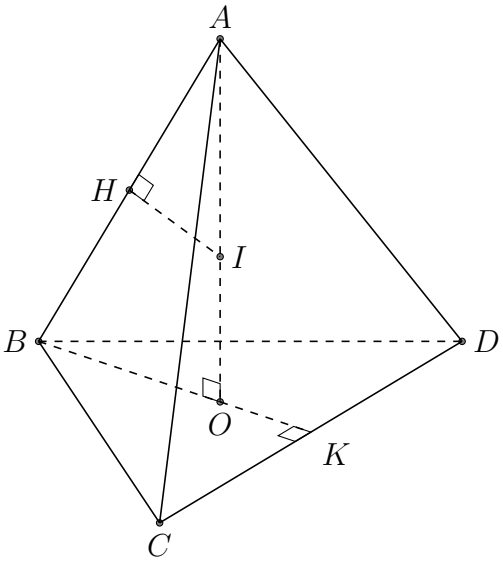
Lời giải.

Xếp các quả bóng vào đáy thùng: cạnh hình lập phương có độ dài gấp 4 lần đường kính quả bóng nên xếp được $4 \cdot 4 = 16$ quả bóng.
Chiều cao bằng 4 lần đường kính, suy ra xếp được tất cả: $16 \cdot 4 = 64$ quả bóng.
Chọn đáp án (D) □

Câu 80. Cho khối tứ diện đều cạnh a. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối tứ diện đó là

A. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **B**. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **C**. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$. **D**. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của tam giác đều BCD, ta có $AO \perp (BCD)$. Suy ra AO là trục của tam giác đều BCD.
Trong mặt phẳng (ABO), kẻ đường trung trực của AB cắt AO tại I, ta có I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\triangle AHI \backsim \triangle AOB$.
Suy ra $\dfrac{IA}{AB} = \dfrac{AH}{AO}$ hay $IA = \dfrac{AB \cdot AH}{BO} = \dfrac{AB^2}{2AO}$.

Gọi K là trung điểm của BC, ta có $BK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $OA = \dfrac{2}{3}BK = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác AOB vuông tại O nên $AO^2 = AB^2 - OB^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $IA = \dfrac{a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi IA^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$.

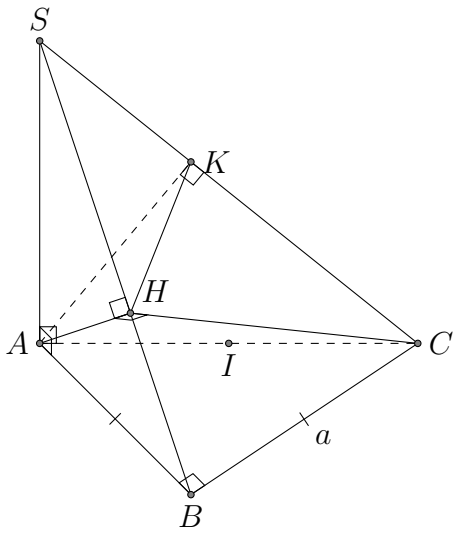
Chọn đáp án (B) □

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **C.** $\sqrt{2}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $AH \perp SB$ (giả thiết) (1), $BC \perp AB$ (giả thiết) (2), $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) (3).
Từ (2) và (3) suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$ (4).
Từ (1) và (4) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC \Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại H.
Gọi I là trung điểm của AC. Do AHC, AKC, ABC là các tam giác vuông có chung cạnh huyền AC nên $IA = IB = IC = IH = IK = R$ (R là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$).



Do tam giác ABC vuông cân tại B có $BC = a$ nên $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

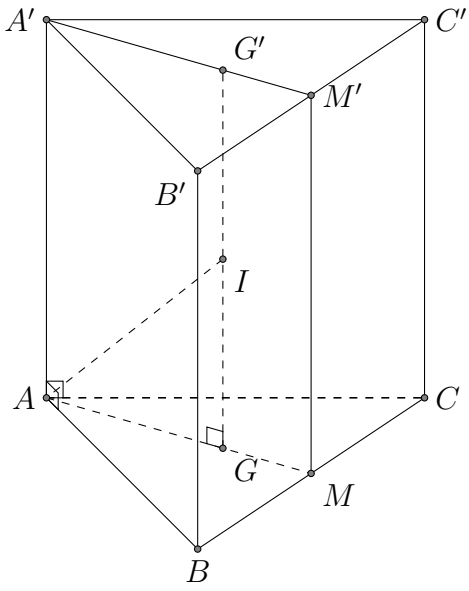
Câu 82. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$ là

A. $R = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $R = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$ và G, G' lần lượt là trọng tâm của $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$.
Lấy I là trung điểm của $GG' \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
và $IG = \dfrac{1}{2}AA' = a$.

Suy ra bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{AG^2 + IG^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



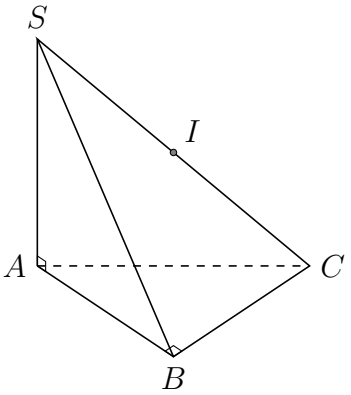
Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{5}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $11\pi a^2$. **B.** $22\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $\dfrac{11}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của SC ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$.
Tính được $SI = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{\sqrt{11}a}{2}$ là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp đó.
Từ đó ta có diện tích mặt cầu ngoại tiếp bằng $11\pi a^2$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = 1$, $AB = 2$, $AC = 3$. Tính bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $r = \sqrt{14}$. **B.** $r = 2\sqrt{14}$. **C.** $r = 4$. **D.** $r = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.

Đây là tứ diện vuông nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

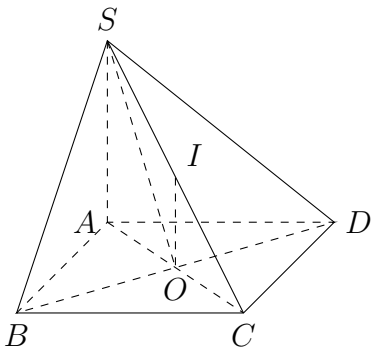
Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, AD = a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ bằng

A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{5}}{25}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Từ O dựng đường thẳng song song với SA và cắt SC tại trung điểm I của SC. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$.



Mặt khác: $OI = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}, OC = \dfrac{AC}{2} = a$.

Khi đó $R = IC = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$.

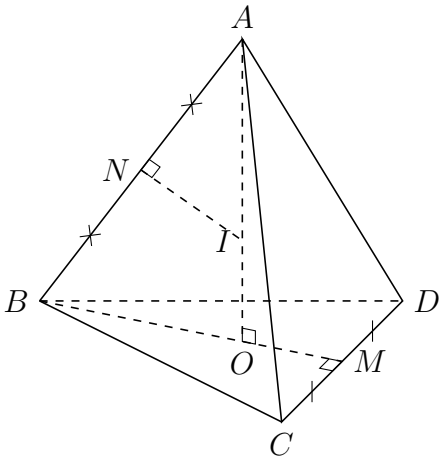
Chọn đáp án A □

Câu 86. Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$.

A. $R = a\sqrt{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{3a}{2}$. **D.** $V = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB. Gọi O là trọng tâm của $\triangle BCD$.



Trong $\triangle ABO$ dựng $NI \perp AO \quad (I \in AO)$, suy ra $R = AI$.

Ta có $AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $BM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $BO = \dfrac{2BM}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$,

$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $\triangle ANI \sim \triangle AOB$ nên $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AN}{AO}$.

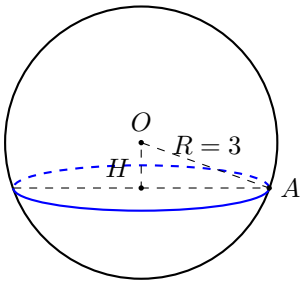
Do đó $AI = \dfrac{AB \cdot AN}{AO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho mặt cầu tâm O, bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) nằm cách tâm O một khoảng bằng 1 và cắt mặt cầu theo một đường tròn có chu vi bằng

A. $4\sqrt{2}\pi$. **B.** $6\sqrt{2}\pi$. **C.** $3\sqrt{2}\pi$. **D.** $8\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.



- ☑ Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm O theo một đường tròn tâm H và bán kính $r = HA$
- ☑ Ta có $OH = d(O, (P)) = 1$; $OA = R = 3$
- ☑ Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông HOA ta có $r = HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$

Vậy chu vi đường tròn thiết diện là: $2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh $3a$, cạnh bên $SC = 2a$ và SC vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

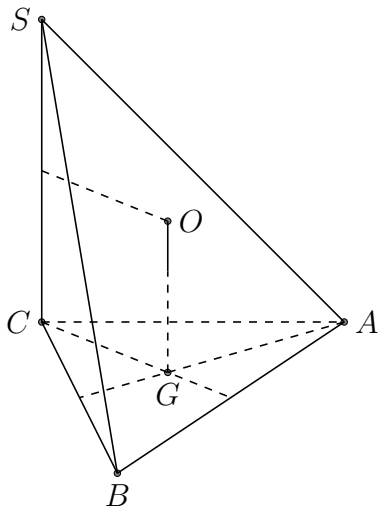
A. $\dfrac{32\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **B.** $36\pi a^3$. **C.** $\dfrac{13\pi a^3\sqrt{13}}{6}$. **D.** $\dfrac{32\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều nên $CG = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Bán kính $R = CO = \sqrt{\left(\dfrac{SC}{2}\right)^2 + CG^2} = 2a$.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

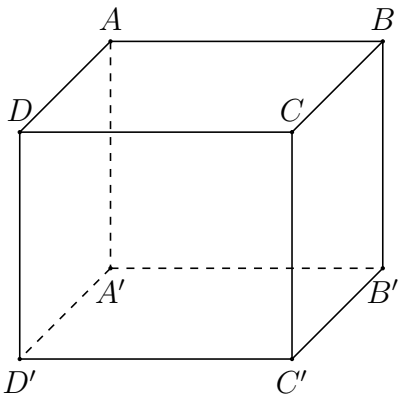
Câu 89. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu nội tiếp hình lập phương đó theo a.

A. $S = 4\pi a^2$. **B.** $S = \pi a^2$. **C.** $S = 2\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Theo tính chất hình lập phương, mặt cầu nội tiếp có bán kính là $r = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $S = 4\pi r^2 = \pi a^2$.



Chọn đáp án (B) □

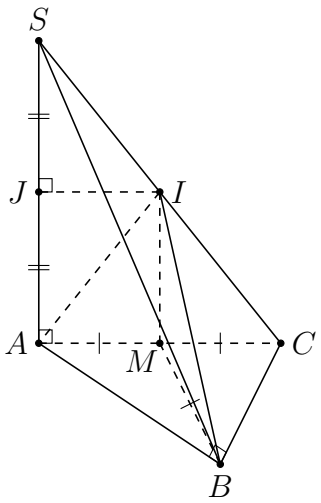
Câu 90. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó là điểm nào?

A. Trung điểm của SC. **B.** Trung điểm của AC.

C. Điểm A. **D.** Đỉnh S.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC. Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khi đó $\Delta \parallel SA$.
Trong mặt phẳng $(SA, \Delta) \equiv (SAC)$ kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Δ tại I. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Khi đó I là trung điểm của SC. Thật vậy,
Vì Δ đi qua trung điểm M của AC và song song với SA nên Δ cũng đi qua trung điểm của SC. Lại có $d \perp SA$, $AC \perp AC$ nên $d \parallel AC$. Mà d đi qua qua trung điểm của SA nên d cũng đi qua trung điểm của AC.



Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a, tâm của đáy hình chóp là O. Gọi $(\mathcal{S})$ là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Tâm của (S) là O.

B. (S) có bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

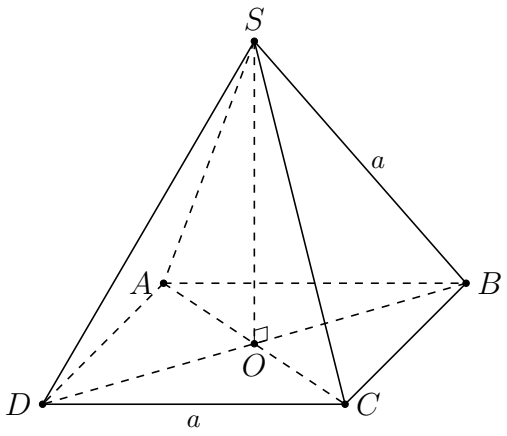
C. Diện tích của (S) bằng $2\pi a^2$.

D. Thể tích của khối cầu $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Vì O là tâm của hình vuông $ABCD$ cạnh a nên

$$OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Xét tam giác SAO vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy O cách đều các điểm S, A, B, C, D hay O là tâm của mặt cầu $(\mathcal{S})$ ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu $(\mathcal{S})$ là $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối cầu $(\mathcal{S})$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 92 (Đề HK1, Sở Hà Nam 2018,12EX-5). [Nhật Thiện, ID6][2H2K2-2] Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện theo $S.ABC$ theo a.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

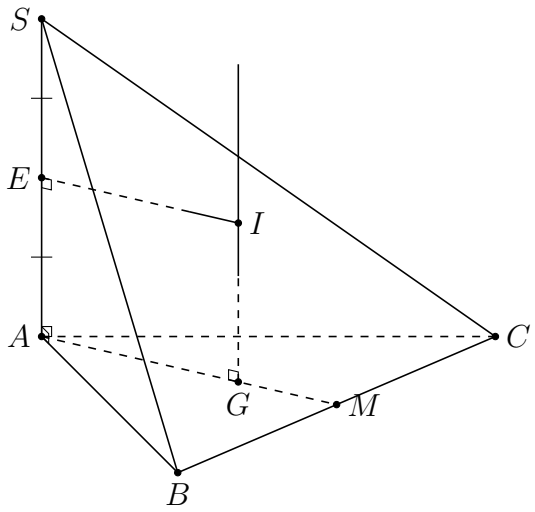
B. $R = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$.

C. $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

D. $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{12}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. E, M lần lượt là trung điểm SA, BC.
Qua G kẻ đường thẳng d song song SA, qua E dựng mặt phẳng trung trực đoạn SA cắt d tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.
Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là



$$R = IA = \sqrt{AE^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AM\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

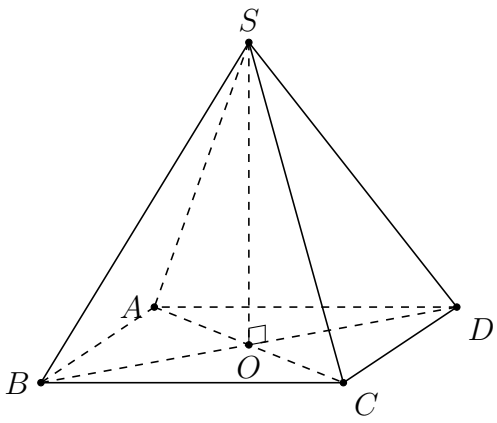
Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$

A. $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **B.** $V = 8\pi a^2$. **C.** $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Các tam giác BAC, DAC, SBC vuông và bằng nhau nên $OA = OB = OC = OD = OS$. Hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$. Suy ra bán kính $R = OA = a\sqrt{2}$.
Thể tích $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.



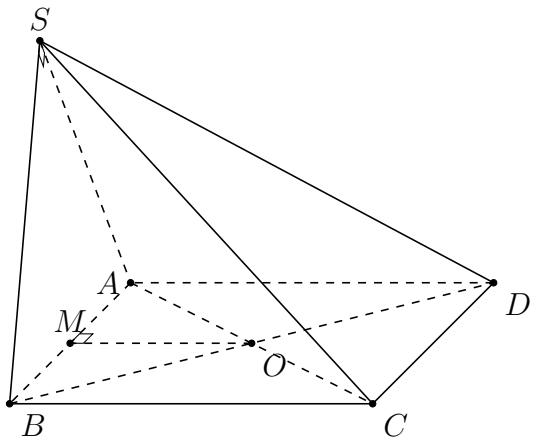
Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $S = 2\pi a^2$. **B.** $S = 8\pi a^2$. **C.** $S = \pi a^2$. **D.** $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB và $O = AC \cap BD$. Khi đó $OM \perp (SAB) \Rightarrow OM$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông $SAB \Rightarrow OS = OA = OB$.
Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$. Hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.
Bán kính $R = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$.



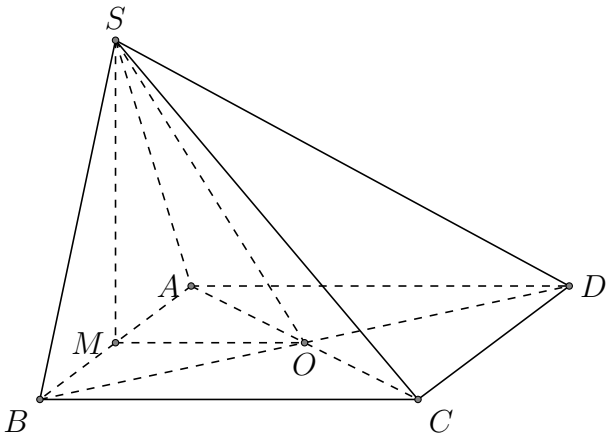
Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \dfrac{3\pi a^2}{4}$. **B.** $S = \pi a^2$. **C.** $S = 4\pi a^2$. **D.** $S = 3\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB, suy ra $OM \perp AB$
Do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow OM \perp (SAB)$
$\Rightarrow OM$ là trục đường tròn ngoại tiếp SAB.
Có $\begin{cases} OA = OB = OC = OD \\ OA = OB = OS \end{cases}$
$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ và bán kính là $R = OA = \dfrac{AC}{2} = a$.
Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi a^2$.



Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 6$. Một mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC cắt đoạn SC tại M và cắt đoạn SB tại N. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ACMN$.

A. 108π. **B.** 36π. **C.** 27π. **D.** 72π.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AN.$

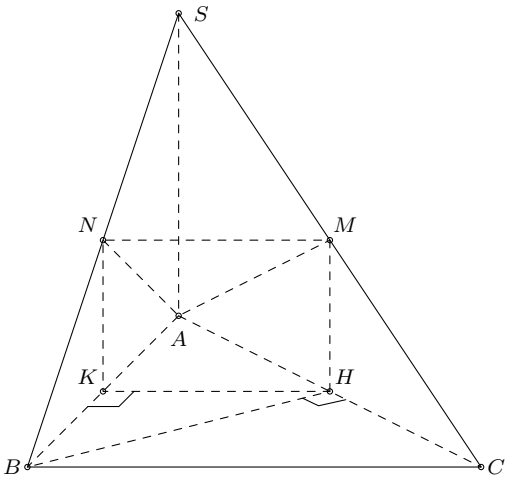
Mặc khác do $SC \perp (\alpha)$ nên $SC \perp AN$.

Do đó $AN \perp (SBC)$, suy ra $AN \perp SB$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AC, AB.

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$.

HK là đường trung bình của tam giác ABC nên $HK \parallel BC$, suy ra $HK \perp AB$.

Hơn nữa do $SC \perp (\alpha)$ nên $SC \perp AM$.



Vậy đường thẳng BH là trục của tam giác MAC, đường thẳng HK là trục của tam giác ABN và $H = HK \cap BH$ nên H là tâm mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N và cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ACMN$. Độ dài bán kính của mặt cầu chính là độ dài của BH.

$R = BH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 6^2} = 3\sqrt{2}.$

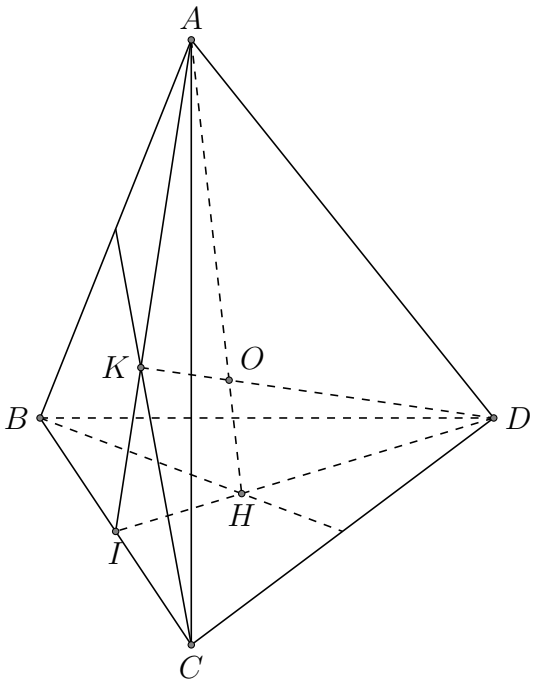
$S = 4\pi R^2 = 4\pi(3\sqrt{2})^2 = 72\pi.$

Chọn đáp án D □

Câu 97. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $2a$. Tính bán kính r của mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện.

A. $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{8}$. **B.** $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **C.** $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{12}$. **D.** $r = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A và D

Khi đó O là tâm mặt cầu nó

Ta có $DH = \dfrac{2}{3}\sqrt{(2a)^2 - a^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Ta có $\triangle$

Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Mặt cầu tâm I bán kính $R = 11$cm cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn đi qua ba điểm A, B, C. Biết $AB = 8$cm, $AC = 6$cm, $BC = 10$cm. Tính khoảng cách d từ điểm I đến mặt phẳng (P).

A. $d = \sqrt{21}$cm. **B.** $d = \sqrt{146}$cm. **C.** $d = 4\sqrt{6}$cm. **D.** $d = 4$cm.

Lời giải.

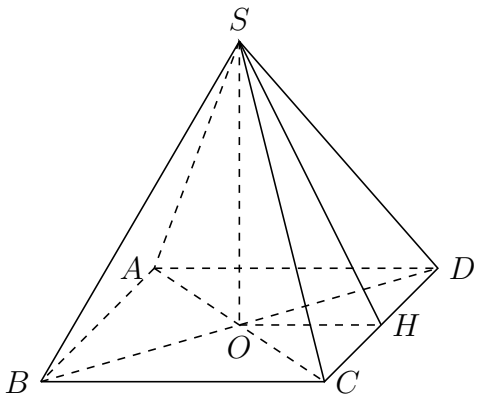
Tam giác ABC vuông tại A nên $r_{ABC} = \dfrac{BC}{2} = 5$cm suy ra $d\,(I; (ABC)) = \sqrt{R^2 - r^2} = 4\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 99. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp.

A. $S = \dfrac{25\pi a^2}{3}$. **B.** $S = \dfrac{32\pi a^2}{3}$. **C.** $S = \dfrac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{12}$.

Lời giải.



Kẻ $OH \perp CD$, ta có $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SHO)$.
$\Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ$. Ta có $OH = \dfrac{AD}{2} = a \Rightarrow SO = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Mặt khác $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = a\sqrt{5}$.
Áp dụng công thức tính nhanh thì $R = \dfrac{SD^2}{2SO} = \dfrac{5a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \dfrac{25\pi a^2}{3}$.

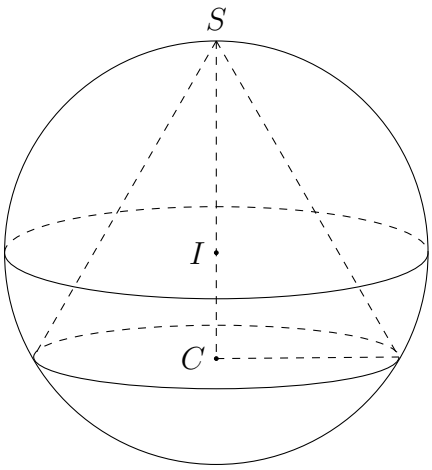
Chọn đáp án A □

Câu 100. Cho mặt cầu có bán kính là a, ngoại tiếp hình nón. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều. Thể tích V của hình nón là

A. $V = \dfrac{1}{8}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{5}{4}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{3}{8}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{3}{4}\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của mặt cầu và thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều SAB. Khi đó O là tâm của tam giác đều SAB.
Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH = \dfrac{3}{2}SO = \dfrac{3a}{2}$ và $AH = SH.\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi AH^2 \times SH = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{3a^2}{4} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3}{8}\pi a^3$.



Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. B	4. A	5. D	6. B	7. C	8. C	9. C	10. D
11. B	12. A	13. C	14. B	15. D	16. A	17. A	18. A	19. A	20. C
21. C	22. A	23. D	24. A	25. B	26. B	27. D	28. C	29. D	30. A
31. A	32. B	33. D	34. D	35. A	36. B	37. C	38. D	39. B	40. D
41. D	42. C	43. C	44. C	45. D	46. A	47. A	48. C	49. D	50. C
51. D	52. A	53. D	54. A	55. B	56. A	57. D	58. C	59. C	60. B
61. D	62. A	63. B	64. C	65. A	66. D	67. C	68. A	69. C	70. D
71. D	72. A	73. C	74. B	75. D	76. B	77. A	78. D	79. D	80. B
81. A	82. D	83. A	84. D	85. A	86. B	87. A	88. D	89. B	90. A
91. B	92. B	93. D	94. A	95. C	96. D	97. B	98. C	99. A	100. C

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \dfrac{108\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{125\pi}{6}$. **D.** $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

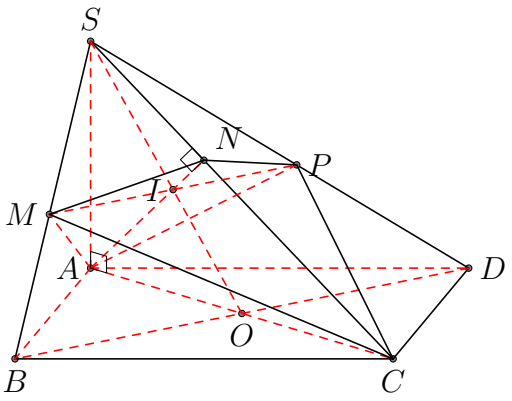
Lời giải.

Phương pháp:

+ Chứng minh: O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).

+ Thể tích khối cầu có bán kính r là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Cách giải:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là trung điểm AC.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP.$

Mặt khác, $\begin{cases} SC \perp AP (\text{do } SC \perp (\alpha)) \\ CD \perp AP \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp CP.$

Vậy ΔAPC vuông tại $P \Rightarrow OA = OC = OP$.

Tương tự, ta có: ΔAMC vuông tại $M \Rightarrow OA = OC = OM$.

Lại có, $SC \perp AN$ (do $SC \perp (\alpha)$) $\Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N.

$\Rightarrow OA = OC = ON$

$\Rightarrow OA = OC = OP = OM = ON \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính: $R = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi.2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B**. $\sqrt{2}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

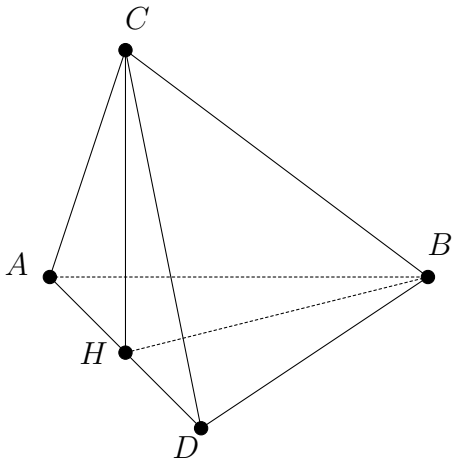
Lời giải.

Phương pháp:

Ta xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D.

Dựa vào tính chất tam giác cân, hai tam giác bằng nhau, tỉ số lượng giác để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau từ đó tìm được tâm mặt cầu.

Cách giải:



Các tam giác đều ABC và BCD có cạnh 2.

$\Rightarrow BD = DC = BC = AB = AC = 2$.

Nên tam giác CAD cân tại C và tam giác BAD cân tại B.

Lấy H là trung điểm $AD \Rightarrow CH \perp AD$ (do tam giác CAD cân tại C)

Ta có $\begin{cases} (CAD) \perp (BAD) \\ (CAD) \cap (BAD) = AD \\ CH \perp AD, BH \subset (CAD) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (BAD) \Rightarrow CH \perp BH$ (1)

Mặt khác, ta có $\Delta CAD = \Delta BAD\,(c-c-c)$ nên $BH = CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác CHB vuông cân tại H có cạnh huyền $CB = 2$.

Suy ra $BC^2 = BH^2 + CH^2 \Leftrightarrow 2BH^2 = 2^2 \Rightarrow BH = CH = \sqrt{2}$.

Xét tam giác CAH vuông tại H có $\cos \widehat{ACH} = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ACH} = 45^\circ$.

Lại thấy CH là phân giác của góc $\widehat{ACD}$ (vì ΔCAD cân tại C)

nên $\widehat{ACH} = \widehat{HCD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Hay tam giác CAD vuông cân tại $C \Rightarrow CH = \dfrac{1}{2}AD = HA = HD$ (3)

Vì $\Delta CAD = \Delta BAD\,(c-c-c)$ nên ΔABD vuông cân tại $B \Rightarrow BH = \dfrac{AD}{2} = HD = HA$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $HA = HB = HC = HD = \sqrt{2}$ hay H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp

☑ Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

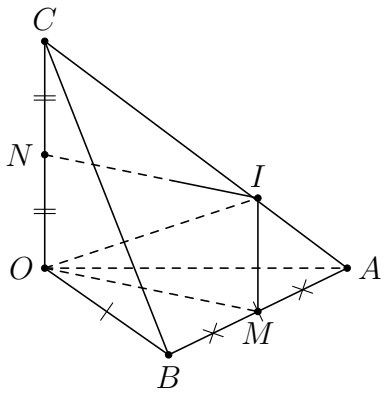
☑ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Cách giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0) \Rightarrow OA = |a|, OB = |b|$. Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và OC. Ta có

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB).$$



Qua M dựng đường thẳng song song với OC, qua N dựng đường thẳng song song với OM. Hai đường thẳng này cắt nhau tại I.

ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB \Rightarrow IO = IA = IB$.

$I \in IN \Rightarrow IO = IC \Rightarrow IO = IA = IB = IC$;

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $O.ABC$. Ta có $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\begin{aligned} R &= OI = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\frac{\sqrt{a^2+(1-a^2)+1}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2-2a+2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2(a^2-a+1)}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(a^2-2.a.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}{2} \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

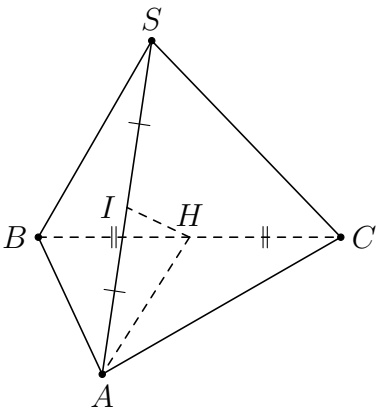
Vậy $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ cm^3. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$ cm.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của SA.
Tam giác SAB, SAC vuông tại $B, C \Rightarrow IS = IA = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.
Gọi H là trung điểm của BC. Vì ΔABC vuông tại A;
$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
$\Rightarrow IH \perp (ABC)$.
Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$. Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R^3 = \frac{5\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{125}}{8} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2};\\ \Rightarrow IS &= IA = IB = IC = \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Xét tam giác vuông ABC có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2 \Rightarrow AH = 1$.
Xét tam giác vuông IAH có: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \Rightarrow V_{I.ABC} &= \frac{1}{3}IH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}SI \cap (ABC) = A \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(S,(ABC))}{\mathrm{d}(I,(ABC))} &= \frac{SA}{IA} = 2\\ \Rightarrow \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.IBC}} &= 2\\ \Rightarrow V_{S.ABC} &= 2V_{I.ABC} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

Xét tam giác vuông SAB có $IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow SA = 2IB = \sqrt{5} \Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 2 \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned}V_{S.ABC} &= \frac{1}{3}\mathrm{d}(C,(SAB)).S_{\Delta SAB}\\ \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAB)) &= \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

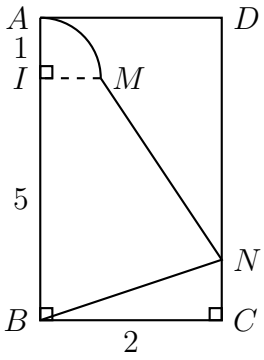
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hình nón có đường cao và bán kính đáy bằng nhau và bằng 3. Trong tất cả các khối trụ nằm trong hình nón có một đáy thuộc mặt đáy của hình nón và đường tròn đáy còn lại thuộc hình nón, thể tích khối trụ lớn nhất là

A. $4\pi\sqrt{3}$. **B**. $\frac{9\pi}{2}$. **C**. 27π. **D**. 4π.

Câu 6.

Có một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 6, BC = 2$. Trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm I, N sao cho $AI = CN = 1$. Gọi (l) là đường cong bao gồm: cung tròn AM tâm I với $\widehat{AIM} = 90^\circ$ (như hình vẽ bên), và đường gấp khúc MNB. Thể tích của khối tròn xoay khi quay (l) quanh cạnh AB bằng



A. $\dfrac{28\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{34}{3}\pi$. **C.** 10π. **D.** 20π.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên AB, gọi K là giao điểm của CM và AB. Gọi V_1 là thể tích nửa khối cầu tạo bởi cung tròn AM, V_2 là thể tích khối nón tạo bởi tam giác BNH, V_3 là thể tích khối nón cụt tạo bởi hình thang $IMNH$. Ta có

$V_1 = \dfrac{4}{3}\pi.1^2 = \dfrac{2}{3}\pi.$

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.2^2.1 = \dfrac{4}{3}\pi.$

Gọi V_4 là thể tích khối nón tạo bởi tam giác KHN, gọi V_5 là thể tích khối nón tạo bởi tam giác KIM.

Ta có $V_4 = \dfrac{1}{3}\pi.2^2.8 = \dfrac{32}{3}\pi.$

$V_5 = \dfrac{1}{3}\pi.1^2.4 = \dfrac{4}{3}\pi.$

Suy ra $V_3 = V_4 - V_5 = \dfrac{28}{3}\pi.$

Thể tích khối cần tính

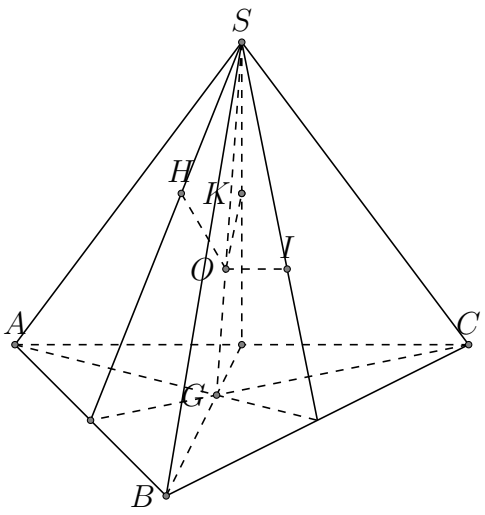
$V = V_1 + V_2 + V_3 = \dfrac{34}{3}\pi.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết thể tích của hình chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{12}$, tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.

A. $r = \dfrac{2a}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $r = 2a$. **C.** $r = \dfrac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D.** $r = \dfrac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải.



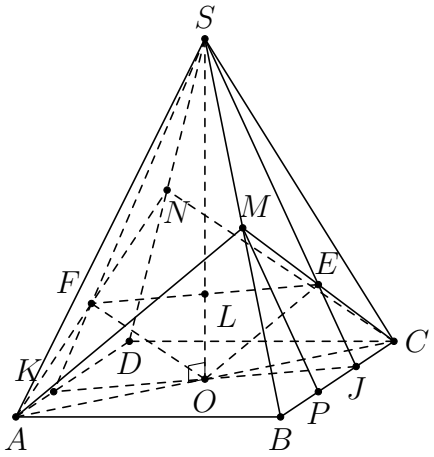
Vì hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ta có $SA = SB = SC$ mà các cạnh bên SA, SB, SC

vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có
$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}.SA.SB.SC=\dfrac{1}{6}.SA^3$. Do đó: $\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{SA^3}{6}\Rightarrow SA=a$
Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp thì: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}r\left(S_{SAB}+S_{SBC}+S_{SCA}+S_{ABC}\right)$ Với $S_{SAB}=S_{SBC}=S_{SCA}=\dfrac{a^2}{2}$, $\triangle ABC$ đều, vì $AB=BC=CA=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$
Do đó: $S_{ABC}=\left(a\sqrt{2}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Gọi G,H,I,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên $(ABC),(SAB),(SBC),(SCA)$.
Ta có $OG=OH=OI=OK=r$
Lại có: $V_{S.ABC}=V_{O.ABC}+V_{O.SAB}+V_{O.SBC}+V_{O.SCA}=\dfrac{r}{3}\left(3S_{\Delta SAB}+S_{\Delta ABC}\right)$.
Suy ra: $r=\dfrac{3\cdot\dfrac{a^3}{6}}{3\cdot\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{a}{3+\sqrt{3}}$
Chọn đáp án (A) □

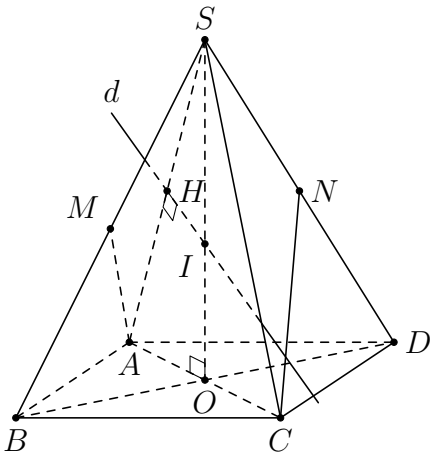
Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Biết AM vuông góc với CN. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
A. $\dfrac{2a}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{4a}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm AC, E là trung điểm CM, F là trung điểm AN.
Khi đó OE là đường trung bình $\triangle ACM$ nên $OE\parallel AM$. Tương tự $OF\parallel CN$ nên suy ra $OE\perp OF$.
Gọi J là giao điểm của SE và BC, kẻ $MP\parallel SJ$.
Khi đó ta có P là trung điểm BJ và J là trung điểm PC, hay $BP=PJ=JC=\dfrac{a}{3}$.
Tương tự, gọi K là giao điểm của SF và AD, khi đó $AK=\dfrac{a}{3}$.
Từ đó suy ra KJ đi qua O và EF cắt SO tại L.



Ta có $\dfrac{EJ}{MP}=\dfrac{MP}{SJ}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{EJ}{SJ}=\dfrac{1}{4}$.
Tương tự $\dfrac{KF}{SK}=\dfrac{1}{4}$ nên $EF\parallel KJ$.
Suy ra $\dfrac{EF}{KJ}=\dfrac{SE}{SJ}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow EF=\dfrac{3}{4}KJ$.
Mà $KJ=\sqrt{KP^2+PJ^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}\Rightarrow EF=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.
Ta có L là trung điểm EF nên $OL=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{a\sqrt{10}}{8}$.
Lại có $\dfrac{OL}{SO}=\dfrac{EJ}{SJ}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.



Gọi H là trung điểm của SA. Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường trung trực d của SA và I là giao điểm của d và SO.
Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm I, bán kính $R=SI$.

Ta có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $\triangle SHI \backsim \triangle SOA \Rightarrow \dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SH}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA \cdot SH}{SO} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{3a}{\sqrt{10}}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $R = \dfrac{3a}{\sqrt{10}}$.

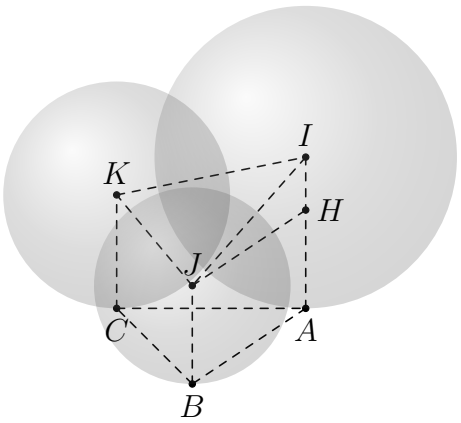
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho ba hình cầu tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Các tiếp điểm của các hình cầu trên mặt phẳng lập thành tam giác có các cạnh bằng 4, 2 và 3. Tích bán kính của ba hình cầu trên là

A. 12. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 9.

Lời giải.

Gọi I, J, K lần lượt là tâm của ba hình cầu và A, B, C lần lượt là hình chiếu của I, J, K trên mặt phẳng đã cho.
Đặt $IA = R_1, JB = R_2, KC = R_3$ là bán kính của ba hình cầu (không mất tính tổng quát giả sử $R_1 > R_2 > R_3$).
Trong hình thang vuông $IABJ$ kẻ $JH \perp IA$ thì ta có $JH = AB$ và $IH = R_1 - R_2$.
Trong tam giác IJH vuông ta có



$$IJ^2 = JH^2 + IH^2 \Leftrightarrow (R_1 + R_2)^2 = AB^2 + (R_1 - R_2)^2 \Leftrightarrow R_1R_2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Tương tự ta có $R_2R_3 = \dfrac{BC^2}{4}, R_1R_3 = \dfrac{AC^2}{4} \Rightarrow R_1R_2R_3 = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{8} = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2, CD = 4$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

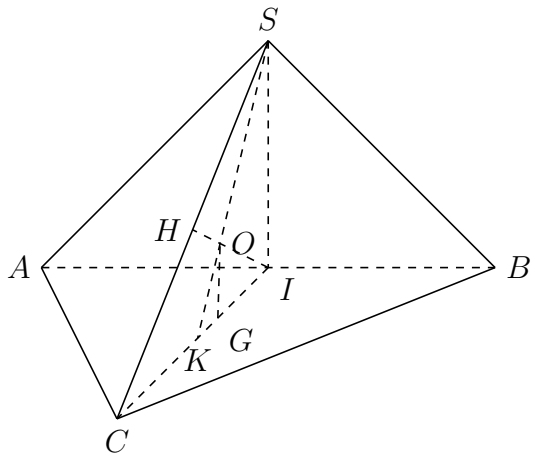
A. $\dfrac{1156\pi}{31}$. **B**. $\dfrac{1156\pi}{93}$. **C**. $\dfrac{1280\pi}{31}$. **D**. $\dfrac{1280\pi}{93}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{5\pi}{3}$. **B**. $V = \dfrac{20\sqrt{15}\pi}{27}$. **C**. $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D**. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Lời giải.

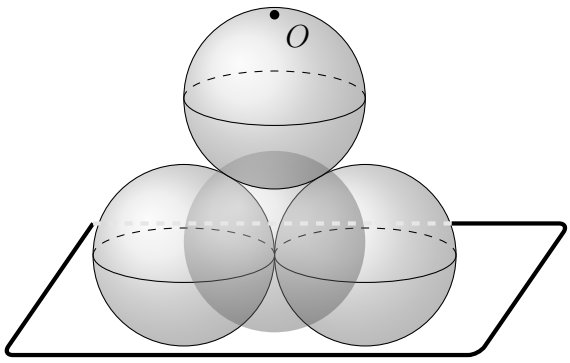
Gọi O, G, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trung điểm của AB. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với (ABC) cho nên $SI \perp (ABC)$, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp suy ra $OG \perp (ABC)$, cho nên O thuộc (SCI), mặt khác tam giác SCI cân tại I và O các đều hai điểm S, C suy ra O là trọng tam tam giác SCI.



Gọi K là trung điểm IC và $SO = \dfrac{2}{3}SK = \dfrac{2}{3}\sqrt{SI^2 + IK^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Vậy thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot SO^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 = \dfrac{20\sqrt{15}\pi}{27}$.

Chọn đáp án (B) □

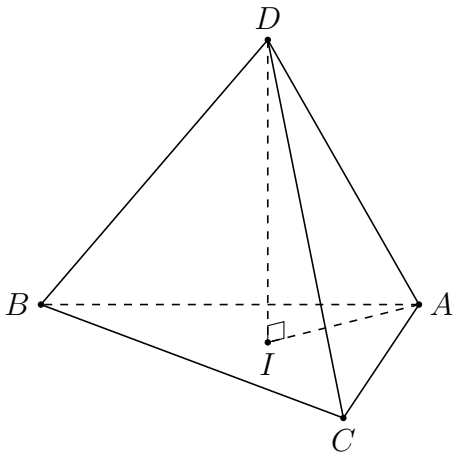
Câu 12. Có bốn viên bi hình cầu bán kính bằng 1cm. Người ta đặt 3 viên bi tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt bàn. Sau đó đai chặt ba viên bi đó lại và đặt một viên bi thứ tư tiếp xúc với cả ba viên bi như hình vẽ. Gọi O là điểm thuộc bề mặt của viên bi thứ tư có khoảng cách đến mặt bàn là lớn nhất. Tính khoảng cách d từ O đến mặt bàn.



A. $d = \dfrac{6+2\sqrt{6}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{7}{2}$. **C.** $d = \dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi A, B, C là tâm của ba viên bi tiếp xúc với bàn, D là tâm của viên vi thứ tư. Khi đó $ABCD$ là một tứ diện đều cạnh 2 cm. Do đó $AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. Suy ra ta có $DI = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm. Khoảng cách từ O đến mặt bàn bằng tổng cách khoảng cách từ O đến D, khoảng cách từ D đến I và khoảng cách từ I đến bàn. Từ đó ta có $d = DI + 2r = \dfrac{6+2\sqrt{6}}{3}$.

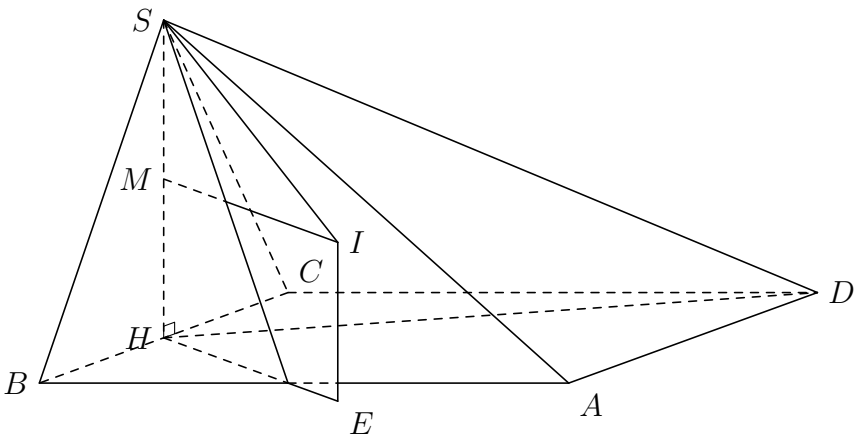


Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của BC, $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BHD$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm SH, E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBHD và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BHD$.

Ta có $HD = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $BD = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

$$S_{\Delta BHD} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HE = \frac{BH \cdot HD \cdot BD}{4S_{\Delta BHD}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{3}}{4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$

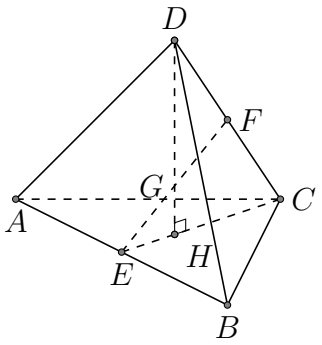
Vì $HMIE$ là hình chữ nhật nên $MI = HE = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SI = \sqrt{\dfrac{a^2}{8} + \dfrac{9a^2}{8}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, (S) là mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$, M là một điểm thay đổi trên (S). Tính tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

A. $2a^2$. **B.** $\dfrac{3a^2}{8}$. **C.** a^2. **D.** $4a^2$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện $ABCD$, nên đường kính của (S) chính là độ dài đường vuông góc chung của các cặp cạnh bên là EF với E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Khi đó $DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra $EF = \sqrt{DE^2 - DF^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó bán kính mặt cầu (S) là $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Gọi H là tâm của tam giác ABC, G là giao điểm của EF và DH.

Khi đó G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ và $DG = \dfrac{3}{4}DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ vì $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$T = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2 = 4MG^2 + 4GA^2 = 2a^2.$$

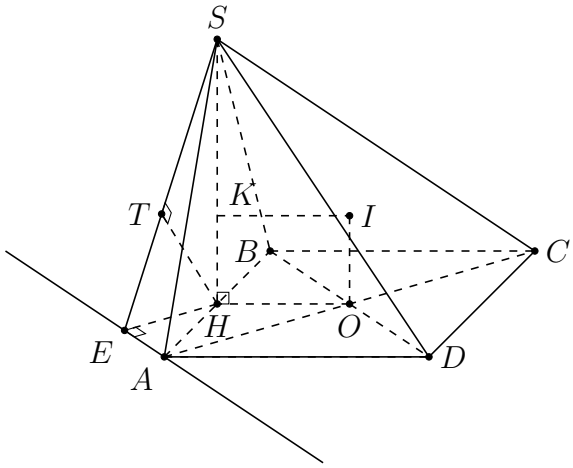
Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích 84π cm^2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là

A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ cm. **B.** $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ cm. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ cm. **D.** $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ cm.

Lời giải.

Đặt $AB = x$.
Gọi H là trung điểm của AB, $O = AC \cap BD$ và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB. Dựng d là đường thẳng đi qua O và $d \perp (ABCD)$, suy ra d song song SH.
Trong mặt phẳng (SH, d), gọi d' là đường thẳng đi qua K và vuông góc SH; $I = d \cap d'$.
Dễ chứng minh được I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $SABCD$ có bán kính $r = IA$.
Khi đó:



$$r = IA = \sqrt{OA^2 + IO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}x.$$

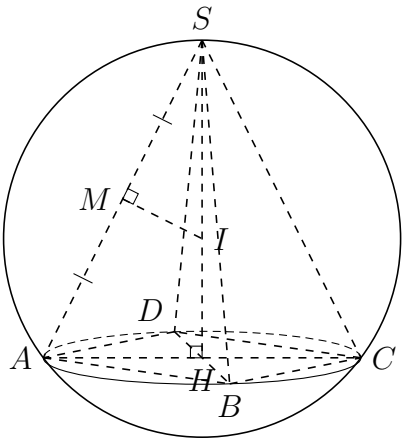
Theo đề bài ta có: $S = 4\pi r^2 = 84\pi \Rightarrow x = 6$ cm.
Kẻ $Ay \parallel BD$, $HE \perp Ay$ $(H \in Ay)$ và $HT \perp SE$ $(T \in SE)$.
Dễ dàng chứng minh được:
$\mathrm{d}(SA, BD) = \mathrm{d}(BD, (SAy)) = \mathrm{d}(B, (SAy)) = 2\mathrm{d}(H, (SAy)) = 2HT$.
Tam giác EAH là tam giác vuông cân tại E nên:
$EH = \dfrac{AH}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
Tính được $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(SA, BD) = 2HT = 2\dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác nội tiếp một mặt cầu bán kính bằng 3.

A. $\dfrac{49}{3}$. **B.** 12π. **C.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{64}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình chóp $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu (S) có tâm I bán kính $R = 3$, đường cao của hình chóp là SK.

Gọi H là hình chiếu của I lên $mp(ABCD)$ và cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Dễ thấy đường cao hình chóp lớn nhất khi K trùng H và I nằm giữa đoạn SH. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm H có diện tích lớn nhất khi $ABCD$ là hình vuông.

Vậy để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất cần có $S.ABCD$ là khối chóp đều.

Qua trung điểm M của SA kẻ đường thẳng vuông góc với SA cắt SH tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$.

Đặt $AB = x$ và $SH = h$.

Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle SMI$ và $\triangle SHA$ có $\dfrac{SM}{SH} = \dfrac{SI}{SA}$

$\Rightarrow R = SI = \dfrac{SM \cdot SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} \Rightarrow SA^2 = 6SH.$

Xét tam giác vuông SHA có $SA^2 = SH^2 + AH^2 = SH^2 + \dfrac{AB^2}{2} = h^2 + \dfrac{x^2}{2}.$

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}hx^2 = -\dfrac{2}{3}h^3 + 4h^2.$

Xét hàm số $V = -\dfrac{2}{3}h^3 + 4h^2$. Ta có $V' = -2h^2 + 8h = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 0 \\ h = 4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

h	$-\infty$		0		4		$+\infty$
V'		$-$	0	$+$	0	$-$	
V		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{64}{3}$	$\searrow$	

Vậy, thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác là $\dfrac{64}{3}$.

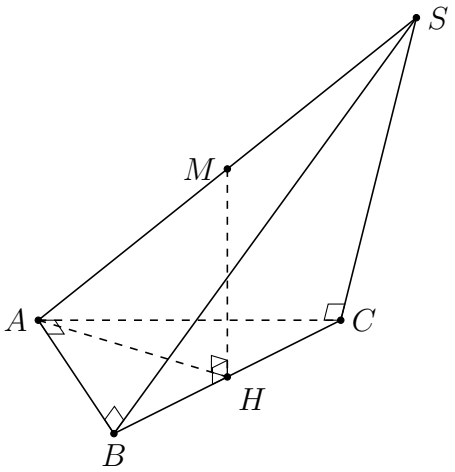
Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt bên (SAB), (SAC) lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R = a\sqrt{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = \frac{3a}{2}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AS và BC. Do $\triangle ABS$, $\triangle ACS$ vuông tại B và C nên $MB = MC = MA = MS$ hay M là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, do đó $MH \perp (ABC)$.



Ta có $S_{ABC} = a^2 \Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABC)) = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = 2a$.

Mà $SM \cap (ABC) = A$ nên $\dfrac{\mathrm{d}(S,(ABC))}{\mathrm{d}(M,(ABC))} = \dfrac{SA}{MA} = 2$.

$\Rightarrow MH = \mathrm{d}(M,(ABC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABC)) = a$.

Vậy bán kính là $R = MA = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \dfrac{3a}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

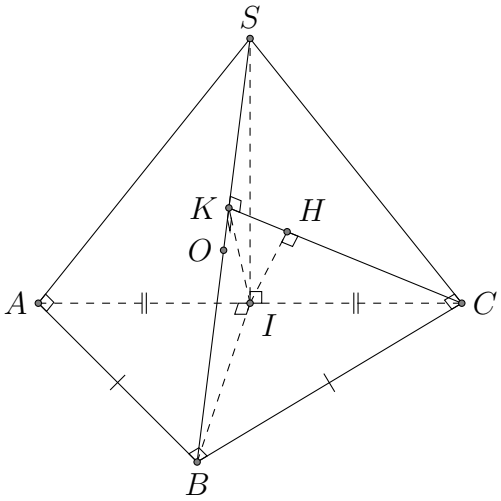
A. $2\pi a^2$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của SB.

Ta có $\begin{cases} OA = OS = OB \\ OC = OS = OB \end{cases} \Rightarrow OS = OA = OB = OC$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = \dfrac{1}{2}SB$.



Gọi I là trung điểm của AC

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = 2d(I;(SBC))$.

Ta có $\triangle SAB = \triangle SCB \Rightarrow SA = SC \Rightarrow SI \perp AC$ (1).

Mặt khác, $BI \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CI \perp (SIB)$ (3).

Gọi K là điểm thuộc SB sao cho $CK \perp SB$, H là điểm thuộc CK sao cho $IH \perp CK$ (4).

Ta có $\begin{cases} BS \perp CK \\ BS \perp CI(\text{ do (3)}) \end{cases} \Rightarrow BS \perp IH(5)$.

Từ (4) và (5) suy ra $IH \perp (SBC) \Rightarrow d(I;(SBC)) = IH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có:

$IC = IB = AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, CH = \sqrt{IC^2 - IH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a;$

$\triangle CHI \sim \triangle CIK \Rightarrow \dfrac{CK}{CI} = \dfrac{CI}{CH} \Rightarrow CK = \dfrac{CI^2}{CH} = \dfrac{6a^2}{4a} = \dfrac{3}{2}a.$

Suy ra $BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\dfrac{3}{2}a\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ta có $\triangle BKC \sim \triangle BCS \Rightarrow \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BC}{BS} \Rightarrow BS = \dfrac{BC^2}{BK} = \dfrac{3a^2}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}BS = a\sqrt{3}.$

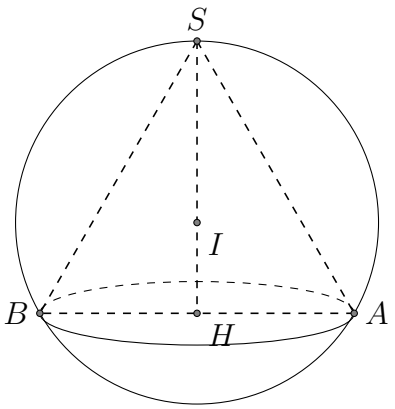
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi(a\sqrt{3})^2 = 12\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (H) bất kì nội tiếp mặt cầu (S). Thể tích khối nón (H) là V_1 và thể tích phần còn lại của khối cầu là V_2. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{81}{32}$. **B.** $\dfrac{76}{32}$. **C.** $\dfrac{32}{81}$. **D.** $\dfrac{32}{76}$.

Lời giải.



Gọi I, S là tâm mặt cầu và đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} + 1 = \dfrac{V}{V - V_1}$. Do đó để $\dfrac{V_1}{V_2}$ đạt GTLN thì V_1 đạt GTLN.

TH 1: Xét trường hợp $SI \le R$

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SI = R$. Lúc đó $V_1 = \dfrac{\pi R^3}{3}$.

TH 2: $SI > RI$, I nằm trong tam giác SAB như hình vẽ.

Đặt $IH = x (x > 0)$. Ta có

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi HA^2 \cdot SH = \dfrac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x) = \dfrac{\pi}{6}(2R - 2x)(R + x)(R + x) \le \dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3 = \dfrac{32\pi}{81}R^3.$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{R}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V}{V - V_1} - 1 = \dfrac{\dfrac{4}{3}\pi R^3}{\dfrac{4}{3}\pi R^3 - \dfrac{32}{81}\pi R^3} - 1 = \dfrac{8}{19}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hình lăng trụ đứng có chiều cao h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A, B, C, D di động. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA \cdot IC = IB \cdot ID = h^2$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

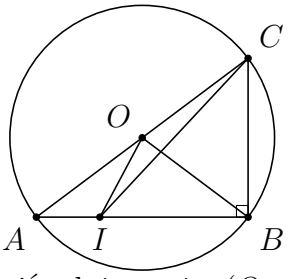
A. $2h$. **B.** $\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. **C.** h. **D.** $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Bổ đề. Cho đường tròn $(O; r)$, dây cung AB. Nếu I nằm trên dây cung AB thì $IA \cdot IB = r^2 - OI^2$.

Thật vậy, kẻ đường kính AC. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}&=\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{IO}-\overrightarrow{IA}\right)=OI^2-r^2.\end{aligned}$$



Do đó $IA\cdot IB=r^2-OI^2$.

Quay trở lại bài toán, theo giả thiết $IA\cdot IC=IB\cdot ID$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;r)$. Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp của đáy còn lại, khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm S của OO'. Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $R=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{\dfrac{h^2}{4}+r^2}$.

Áp dụng bổ đề ta có

$$R=\sqrt{\frac{h^2}{4}+IA\cdot IC+OI^2}=\sqrt{\frac{5h^2}{4}+OI^2}\geq\frac{h\sqrt{5}}{2}.$$

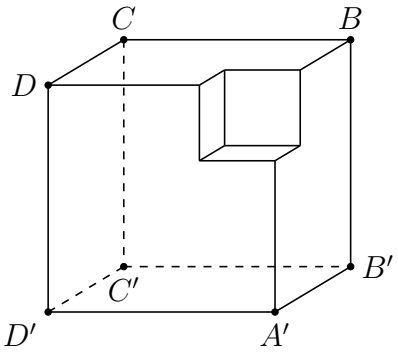
Đẳng thức xảy ra khi $I\equiv O$ hay tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho là $\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

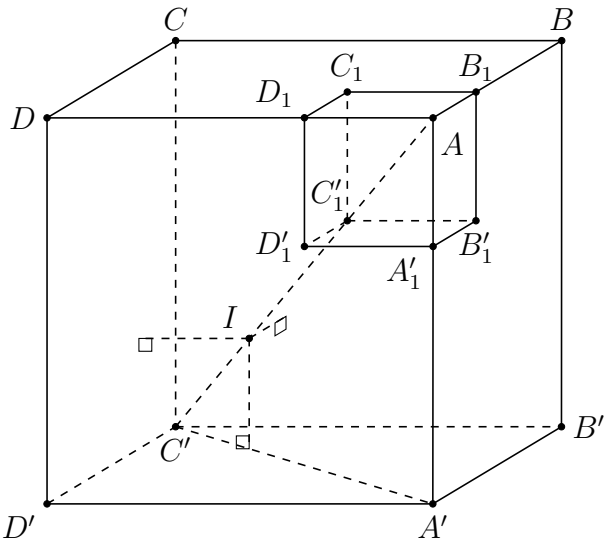
Câu 21.

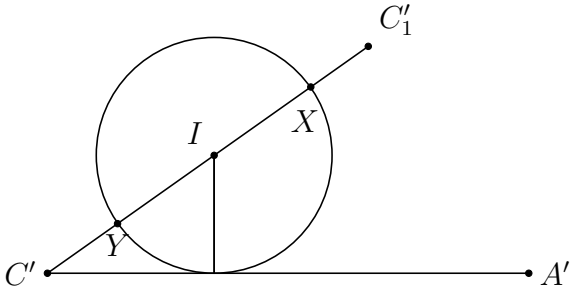
Một khối đa diện H được tạo thành bằng cách từ một khối lập phương cạnh bằng 3, ta bỏ đi khối lập phương cạnh bằng 1 ở một "góc" của nó như hình vẽ. Gọi S là khối cầu có thể tích lớn nhất chứa trong H và tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$, $(DCC'D')$. Tìm bán kính của S.

A. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$. **B.** $3-\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.



Lời giải.





Gọi hình lập phương được cắt ra là $AB_1C_1D_1.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Dễ thấy C'_1 nằm trên đoạn và AC' và $C'C'_1=\dfrac{2}{3}AC'=2\sqrt{3}$.

Gọi I, r lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu S. Vì mặt cầu S tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$, $(DCC'D')$ nên I cách đều các mặt phẳng này. Suy ra I nằm trên đoạn $C'C_1'$. Khi đó mặt cầu S cắt tia IC_1' tại điểm X. Để mặt cầu S nằm trong H thì $IX \leq IC_1'$. Ta lại có $IC' = r\sqrt{3}$ nên suy ra

$$r\sqrt{3} + r = IC' + IX \leq IC' + IC_1' = C'C_1' = 2\sqrt{3}.$$

Suy ra $r \leq 3 - \sqrt{3}$. Vậy bán kính lớn nhất của S là $3 - \sqrt{3}$, đạt được khi I cách C' một khoảng $3\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước vào cốc rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra đúng bằng một nửa lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính miệng cốc và bán kính đáy cốc, h là chiều cao của cốc, V_1 và V_2 lần lượt là thể tích viên bi và thể tích của cốc, khi đó ta có $R \geq r$ và

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3, V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

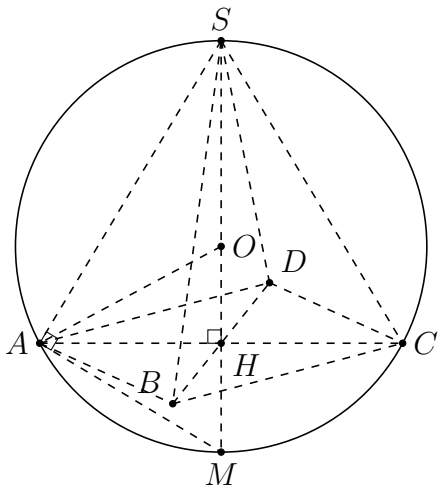
Theo giả thiết ta có $V_2 = 2V_1$, do đó ta có $\dfrac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + Rr) = \dfrac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{h}{2}\right)^3 \Leftrightarrow R^2 + r^2 + R \cdot r = h^2$.
Mặt khác $h^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$ nên suy ra $R^2 - 3Rr + r^2 = 0$.
Khi đó $\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\dfrac{R}{r}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{R}{r} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{R}{r} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (do $R \geq r$).

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = 144$. **B.** $V = 576\sqrt{2}$. **C.** $V = 576$. **D.** $V = 144\sqrt{6}$.

Lời giải.



Giả sử hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu tâm O bán kính bằng 9, có đường cao $SH = x$ $(0 < x < 18)$.

Gọi SM là đường kính của mặt cầu. Khi đó tam giác SAM vuông tại A.

$\Rightarrow AH^2 = SH \cdot MH = x(18 - x)$.

Do tam giác ABH vuông cân tại H nên $AB^2 = 2AH^2 = 2x(18 - x)$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = AB^2 = 2x(18 - x)$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \dfrac{1}{3} \cdot x \cdot 2x(18 - x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + 12x^2$.

Xét hàm số $y = -\dfrac{2}{3}x^3 + 12x^2$ trên khoảng $(0; 18)$.

Ta có $y' = -2x^2 + 24x$.

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 12$.

Dễ thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 12)$ và nghịch biến trên $(12; 18)$.

Vậy $\max\limits_{x \in (0;18)} y = y(12) = 576$ nên khối chóp có thể tích lớn nhất là $V = 576$.

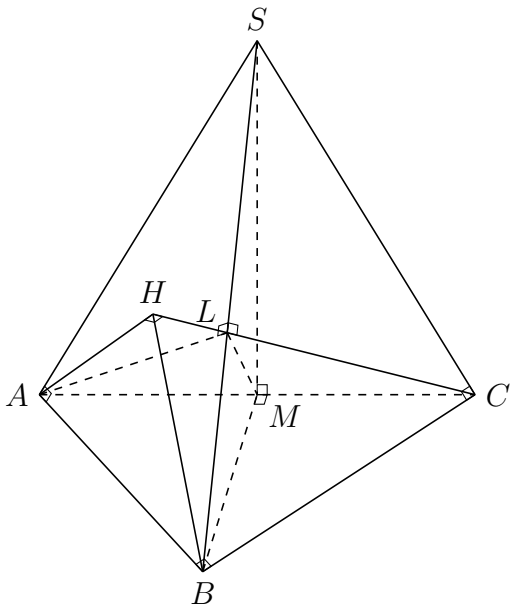
Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. **B**. $12\pi a^2$. **C**. $8\pi a^2$. **D**. $2\pi a^2$.

Lời giải.

Kẻ $AL \perp SB \Rightarrow CL \perp SB$.
Suy ra $SB \perp (ALC)$.
Kẻ $AH \perp LC \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Suy ra $AH = d(A,(SBC)) = a\sqrt{2}$.
$AC = a\sqrt{6}$, $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 2a$.
Và $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = a$.
Đặt $LM = x$, ta có:
$S_{\triangle LAC} = \dfrac{1}{2} \cdot LM \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot LC$
Suy ra: $LC = x\sqrt{3}$.
Ta có: $BL^2 = BM^2 - LM^2 = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2} - x^2}$
và $LH^2 = BH^2 - BL^2 = x^2 - \dfrac{a^2}{2}$.



Ta có: $LH = HC - LC \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \dfrac{a^2}{2}} = 2a - x\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \\ x^2 - \dfrac{a^2}{2} = 4a^2 - 4\sqrt{3}ax + 3x^2 \end{cases}$

Hay $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Suy ra: $AL = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SA = 3a \Rightarrow SB = 2\sqrt{3}a$.

Gọi I là trung điểm SB, do $\triangle SAB, \triangle SBC$ vuông nên ta có $IS = IB = IA = IC$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Suy ra $R = \dfrac{SB}{2} = a\sqrt{3}$. Từ đó ta có $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$.

Chọn đáp án (B) □

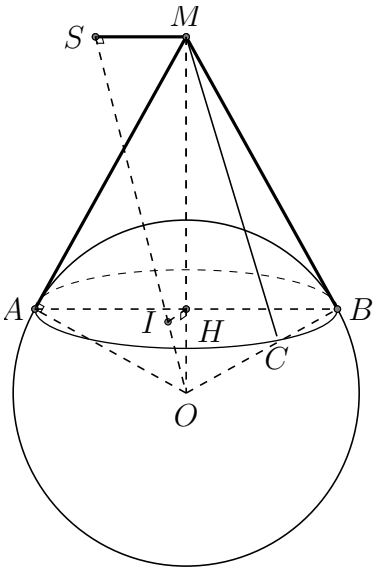
Câu 25. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính bằng 2 và mặt phẳng (P). Khoảng cách từ O đến (P) bằng 4. Từ điểm M thay đổi trên (P) kẻ các tiếp tuyến MA, MB, MC tới (S) với A, B, C là các tiếp điểm. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm I cố định. Tính độ dài OI.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Đặc biệt hóa, ta giả sử M trùng với hình chiếu S của O lên mặt phẳng (P). Khi đó các tiếp tuyến di động qua M là MA, MB, MC, mặt phẳng (ABC) là mặt phẳng cố định và cắt đường thẳng SO tại một điểm I cố định duy nhất. Do đó điểm I là điểm cố định mà bài toán nêu ra.

Thật vậy với bấy kì M trên mặt phẳng (P) ta kẽ 3 tiếp MA, MB, MC tới (S) với A, B, C là các tiếp điểm. Gọi I là giao điểm của mặt phẳng (ABC) với đường thẳng OS và H là giao điểm của OM với mặt phẳng (ABC).



Khi đó ta có $OM \perp (ABC)$ nên $OM \perp IH$. Mặt khác $OS \perp (P)$ nên $OS \perp SM$. Do đó tứ giác $SMIH$ nội tiếp có hai cạnh bên cắt nhau tại O nên ta có $OI \cdot OS = OH \cdot OM$. Hơn nữa tam giác OMA vuông tại A có đường cao AH nên $OA^2 = OH \cdot OM = 4$. Khi đó $OI = 1$ không đổi mà I nằm trên đường thẳng OS cố định nên I chính là điểm cần tìm và OI có độ dài là 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho mặt cầu (S) bán kính R. Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là

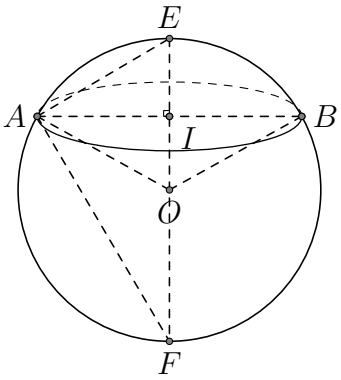
A. $\dfrac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $\dfrac{32R^3}{81}$. **C.** $\dfrac{32\pi R^3}{27}$. **D.** $\dfrac{32R^3}{27}$.

Lời giải.

Giả sử mặt cầu (S) có tâm O và bán kính R như hình vẽ, hình nón có đỉnh F và đường tròn đáy tâm I bán kính IA.

Xét mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn ngoại tiếp tam giác AFB và đường kính EF như hình vẽ.

Đặt $FI = x$ suy ra $EI = 2R - x$ và bán kính đường tròn đáy hình nón $r = AI = \sqrt{FI \cdot EI} = \sqrt{x(2R - x)}$.



Khi đó thể tích của khối nón (N) là:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AI^2 \cdot FI = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x) = \frac{1}{6}\pi x^2(4R - 2x) \le \frac{1}{6}\pi \left(\frac{x + x + 4R - 2x}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

Vậy thể tích lớn nhất của khối nón là $\dfrac{32\pi R^3}{81}$.

Chọn đáp án (A) □

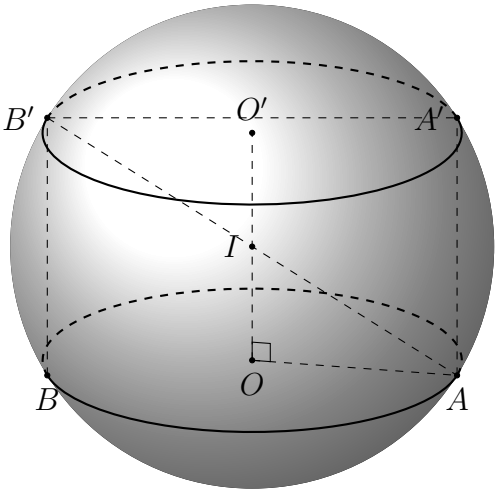
Câu 27. Cho hình cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp hình cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất.

A. $h = R\sqrt{2}$. **B.** $h = R$. **C.** $h = \dfrac{R}{2}$. **D.** $h = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $R = IA$ là bán kính mặt cầu, $r = OA$ là bán kính hình trụ, $h = OO' = 2IO$ là chiều cao hình trụ. Xét $\triangle IOA$ ta có

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$



Mà diện tích xung quanh hình trụ là

$$S = 2\pi rh = 2\pi h\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

Xét hàm số

$$f(h) = \frac{h}{2}\sqrt{4R^2 - h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2\left(4R^2 - h^2\right)} \leqslant R^2,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h = \sqrt{2}R$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều, đường cao SH với H nằm trong $\triangle ABC$ và $2SH = BC$, (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Biết có một điểm O nằm trên đường cao SH sao cho $\mathrm{d}(O;AB) = \mathrm{d}(O;AC) = \mathrm{d}(O;(SBC)) = 1$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\frac{256\pi}{81}$. **B.** $\frac{125\pi}{162}$. **C.** $\frac{500\pi}{81}$. **D.** $\frac{343\pi}{48}$.

Lời giải.

Kẻ $HM \perp BC$ tại M, $HN \perp AB$ tại N, $HP \perp AC$ tại P, $OK \perp SM$ tại K. Khi đó

$AB \perp (SHN) \Rightarrow AB \perp ON \Rightarrow \mathrm{d}(O;AB) = ON$.

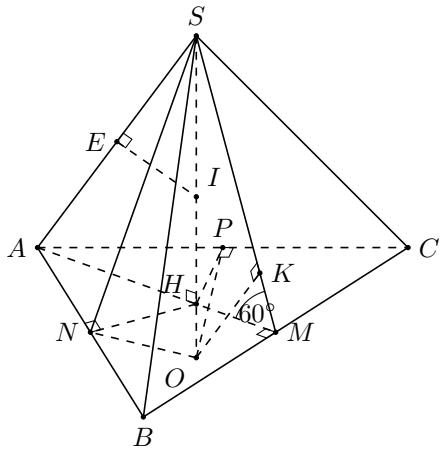
$AC \perp (SHP) \Rightarrow AC \perp OP \Rightarrow \mathrm{d}(O;AC) = OP$.

$BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp OK \Rightarrow \mathrm{d}(O;(SBC)) = OK$.

Theo giả thiết $\Rightarrow ON = OP = OK = 1$ và $\widehat{SMH} = 60°$.

Vì $ON = OP \Rightarrow HN = HP \Rightarrow H$ thuộc đường phân giác trong góc A của tam giác đều ABC.

Mặt khác $HM \perp BC \Rightarrow A, H, M$ thẳng hàng và M là trung điểm BC. Gọi $BC = x \Rightarrow SH = \frac{BC}{2} = \frac{x}{2}$.



Ta có: $\triangle SKO \backsim \triangle SHM \Rightarrow \frac{SO}{SM} = \frac{OK}{HM}$

$\Rightarrow SO = \frac{SM \cdot OK}{HM} = \frac{SM \cdot 1}{SM \cdot \cos 60°} = 2$

$\Rightarrow OH = \left|\frac{x}{2} - 2\right|$

Xét $\triangle SHM \Rightarrow HM = SH \cdot \cot 60° = \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow HM = \frac{1}{3}AM \Rightarrow H$ là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow S.ABC$ là hình chóp đều.

$\Rightarrow NH = HM = \frac{x\sqrt{3}}{6} \Rightarrow OH^2 + NH^2 = ON^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + \frac{x^2}{12} = 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow (2x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có: $SH = \dfrac{3}{2}$, $AH = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow SA^2 = SH^2 + AH^2 = \dfrac{9}{4} + 3 = \dfrac{21}{4}$.
Gọi E là trung điểm SA. Trong mặt phẳng (SAM), kẻ đường trung trực SA cắt SH tại I
$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC \Rightarrow R = SI$
Ta có: $\triangle SEI \backsim \triangle SHA \Rightarrow \dfrac{SE}{SH} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{21}{4.3} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow R = \dfrac{7}{4}$.
Thể tích khối cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{7}{4}\right)^3 = \dfrac{343\pi}{48}$.

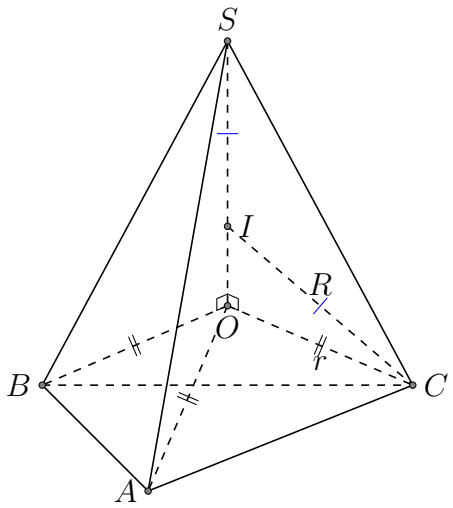
Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2a$ và tam giác ABC có góc A bằng 120° và $BC = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

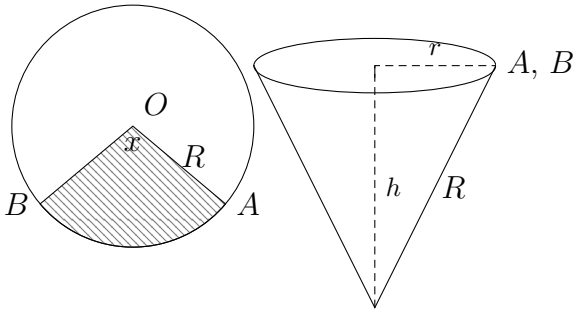
Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta có $R = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - r^2}}$, trong đó b là cạnh bên và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.
Ta có $r = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{2a}{2\sin 120^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.
Vậy $R = \dfrac{(2a)^2}{2\sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 30.

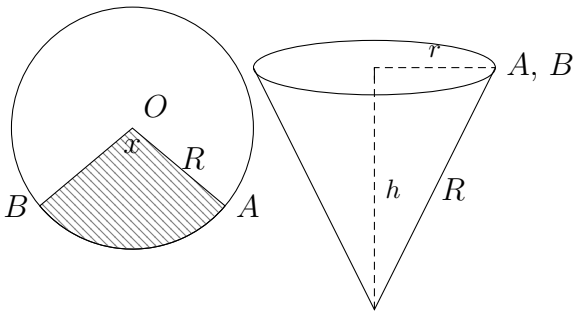
Bạn Hoàn có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Hoàn muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Hoàn phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất.



A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính hình tròn. Khi đó cái phễu hình nón có độ dài đường sinh là R, bán kính đáy $r = \dfrac{xR}{2\pi}$, chiều cao $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.



Thể tích phễu:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\pi\sqrt{r^2.r^2.(2R^2 - 2r^2)} \\ &\le \frac{2}{9\sqrt{3}}R^3. \end{aligned}$$

V lớn nhất khi $r^2 = 2R^2 - 2r^2$. Khi đó $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, đáy thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{2} = \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CA}{BC \cdot BA} + \frac{AB}{CA \cdot CB}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên DB, DC. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCHK$.

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 10π. **D.** 16π.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}\right) \\ &= \frac{R}{2}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}\right) \\ &= \frac{R}{2}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\right). \end{aligned}$$

Theo giả thiết suy ra

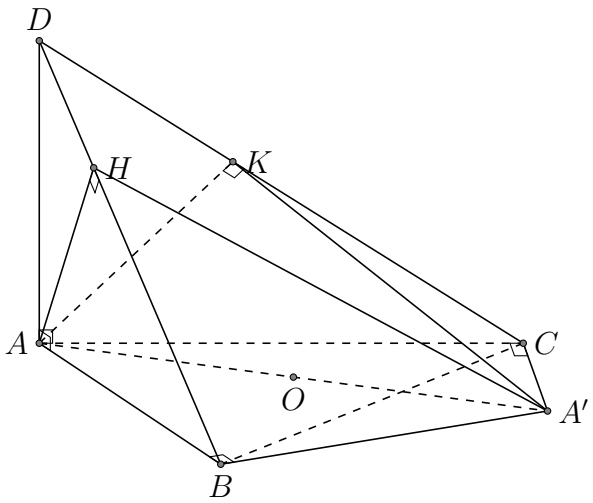
$$\begin{aligned} &\frac{R}{2}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\right) = \frac{a}{c \cdot b} + \frac{b}{a \cdot c} + \frac{c}{b \cdot a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \\ \Rightarrow\ & R = 2. \end{aligned}$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, A' là điểm đối xứng của A qua O nên AA' là đường kính của đường tròn (O,R). Suy ra $\widehat{ABA'}=\widehat{ACA'}=90^\circ$. (1)

Ta lại có $\begin{cases}A'C\perp AC\\ A'C\perp DA\ (\text{ do } DA\perp(ABC))\end{cases}\Rightarrow$ $A'C\perp(DAC)\Rightarrow A'C\perp AK$.

Mà $AK\perp DC$ nên $AK\perp(DCA')\Rightarrow AK\perp KA'$ hay $\widehat{AKA'}=90^\circ$. (2)

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{AHA'}=90^\circ$. (3)



Từ (1), (2) và (3) suy ra 5 điểm A,B,C,H,K cùng thuộc mặt cầu tâm O, bán kính $R=2$.
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp $A.BCHK$ là $S=4\pi R^2=16\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho mặt cầu tâm O, bán kính $2a$. Mặt phẳng (α) cố định, cách O một khoảng bằng a, (α) cắt mặt cầu theo đường tròn (T). Trên (T) lấy điểm A cố định. Một đường thẳng đi qua A, vuông góc với (α) và cắt mặt cầu tại điểm $B\neq A$. Trong mặt phẳng (α), một góc vuông xAy quay quanh điểm A và cắt đường tròn (T) tại hai điểm C và D không trùng với A. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{21}a^2$.

B. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{21}a^2$.

C. Diện tích tam giác BCD đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{21}a^2$.

D. Do mặt phẳng (α) không qua O nên không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BCD.

Lời giải.

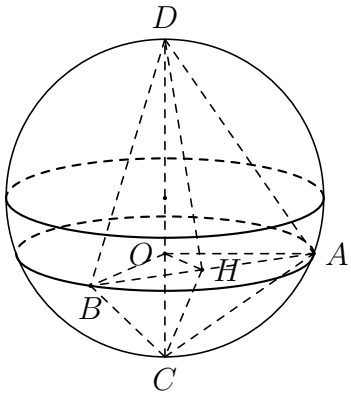
Đường tròn (T) có bán kính $r=\sqrt{4a^2-\mathrm{d}^2(O;(\alpha))}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$. Gọi I là tâm của đường tròn (T), ta có $OIAM$ là hình chữ nhật (M là trung điểm của AB) nên $AB=2AM=2OI=2a$. Kẻ $BH\perp CD=H$, ta có $AH\perp CD$. Vì $CAD=90^\circ$ nên I là trung điểm của CD và $CD=2a\sqrt{3}$. Ta có $S_{BCD}=\dfrac{1}{2}BH\cdot CD=a\sqrt{3}\cdot\sqrt{AB^2+AH^2}\le a\sqrt{3}\cdot\sqrt{4a^2+AI^2}=\sqrt{21}a^2$. Dấu bằng xảy ra khi $H\equiv I\Leftrightarrow CD\perp IA=I$. Vậy diện tích tam giác BCD đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{21}a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB cân tại O, $OA=OB=2a$, $\widehat{AOB}=120^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O, lấy hai điểm C và D nằm về hai phía của mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại C và tam giác ABD đều. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C**. $\dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. **D**. $\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



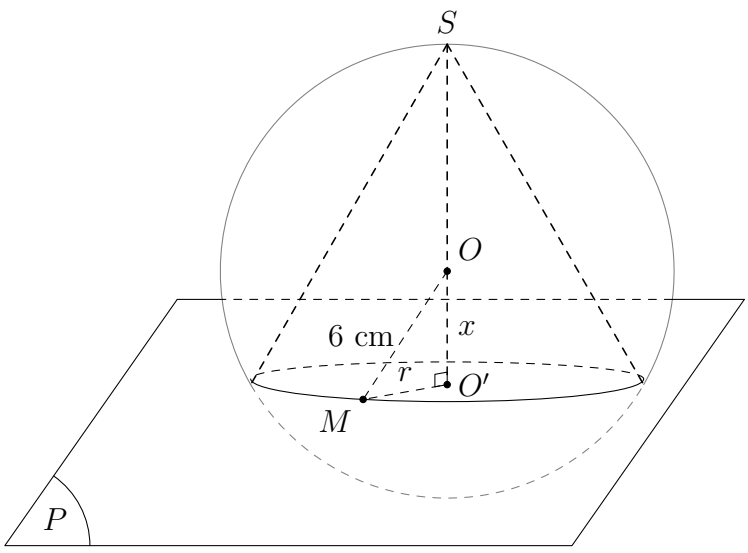
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH = a$ và $AB = 2\sqrt{3}a$.
Xét tam giác CAB vuông cân tại C có $CH = a\sqrt{3}$ và $CA = a\sqrt{6}$.
Xét tam giác COH có $CO = \sqrt{CH^2 - OH^2} = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác DAB đều có $DA = AB = 2a\sqrt{3}$ và $DH = \sqrt{DA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = 3a$.
Xét tam giác DOH có $DO = \sqrt{DH^2 - OH^2} = 2\sqrt{2}a$
$\Rightarrow CD = CO + OD = 3a\sqrt{2}$.
Vì $\begin{cases} CD \perp AB \\ OH \perp AB \\ H \text{ là trung điểm } AB \end{cases}$
$\Rightarrow (CDH)$ là mặt phẳng trung trực của $AB \Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$.
Xét $\triangle ACD$ có $AD^2 + AC^2 = 18a^2 = CD^2 \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^\circ$
$\Rightarrow CD$ là đường kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ là $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho khối cầu tâm O bán kính 6 cm. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng x cm và cắt khối cầu theo đường tròn (C). Một khối nón có đỉnh thuộc mặt cầu, đáy là hình tròn (C). Biết khối nón có thể tích lớn nhất, khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

A. 2 cm. **B**. 3 cm. **C**. 4 cm. **D**. 0 cm.

Lời giải.



Gọi đỉnh của khối nón là S, tâm của hình tròn là O'.
Ta có $S,\ O,\ O'$ thẳng hàng, đặt $OO' = x\ (0 \le x \le 6)$.
Để khối nón có thể tích lớn nhất thì O nằm giữa S và O', khi đó $h = SO' = SO + OO' = x + 6$.
Bán kính hình tròn (C) bằng $r = \sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2}$.
Diện tích hình tròn (C) bằng $S = \pi R^2 = \pi(36 - x^2)$.

Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}\pi(36 - x^2)(x + 6) = \dfrac{1}{3}\pi(x + 6)^2(6 - x)$.
Xét hàm số $f(x) = (x + 6)^2(6 - x)$. Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có

$$f(x) = (x + 6)^2(6 - x) = 4 \cdot \frac{x + 6}{2} \cdot \frac{x + 6}{2} \cdot (6 - x) \le 4 \cdot \left(\frac{\dfrac{x + 6}{2} + \dfrac{x + 6}{2} + 6 - x}{3} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \le 4 \cdot \left(\frac{12}{3} \right)^3 = 4^4.$$

Dấu " = " xảy ra khi $\dfrac{x + 6}{2} = 6 - x \Leftrightarrow x = 2$.
Vậy khối nón có thể tích lớn nhất khi $x = 2$.

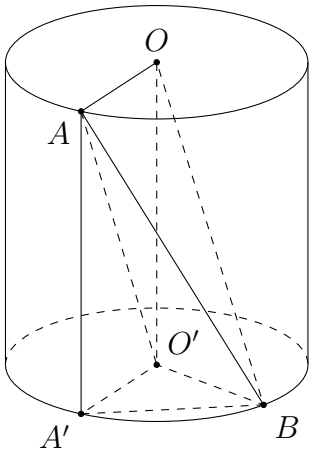
Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình trụ (T) có đáy là các đường tròn tâm O và O', bán kính bằng 1, chiều cao hình trụ bằng 2. Các điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho góc $(OA, O'B) = 60°$. Tính diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$.

A. $S = \dfrac{4 + \sqrt{19}}{2}$. **B.** $S = \dfrac{4 + \sqrt{19}}{4}$. **C.** $S = \dfrac{3 + 2\sqrt{19}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{1 + 2\sqrt{19}}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $S_{AOO'} = \dfrac{AO \cdot OO'}{2} = 1, S_{BOO'} = \dfrac{BO' \cdot OO'}{2} = 1$.
Kẻ đường sinh AA', khi đó ta có $AA' = OO' = 2$.
Mà $(O'A', O'B) = (OA, O'B) = 60°$ nên $A'B = O'B = 1$.
Suy ra: $AB = \sqrt{A'A^2 + A'B^2} = \sqrt{5}$, $OB = \sqrt{O'O^2 + O'B^2} = \sqrt{5}$.
Lấy M là trung điểm OA, khi đó $BM \perp AO$.
Ta có $OM = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{BO^2 - OM^2} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$, suy ra $S_{AOB} = \dfrac{AO \cdot BM}{2} = \dfrac{\sqrt{19}}{4}$.
Lại có $O'A = \sqrt{A'A^2 + A'O'^2} = \sqrt{5}$ nên ta cũng có $S_{ABO'} = \dfrac{\sqrt{19}}{4}$.
Từ đó dẫn tới diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$ là $\dfrac{4 + \sqrt{19}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 36. Hình nón được gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của khối nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu bán kính là R cho trước.

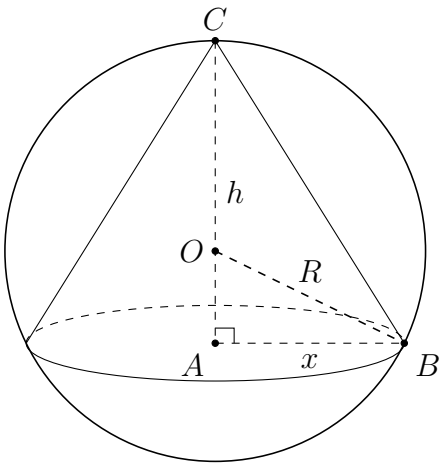
A. $h = \dfrac{3R}{2}$. **B.** $h = \dfrac{5R}{3}$. **C.** $h = \dfrac{5R}{4}$. **D.** $h = \dfrac{4R}{3}$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(O; R)$ và hình nón có đáy là hình tròn tâm A nội tiếp mặt cầu như hình vẽ.

Đặt $h = CA, x = AB$. Khi đó: $OC = |h - R|$.
Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác OAB ta có: $(h-R)^2 + x^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = 2hR - h^2$.
Thể tích khối nón là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h x^2 = \frac{1}{3}\pi h\left(2hR - h^2\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h) \\ &\le \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}. \end{aligned}$$



Dấu bằng xảy ra khi $\frac{h}{2} = 2R - h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

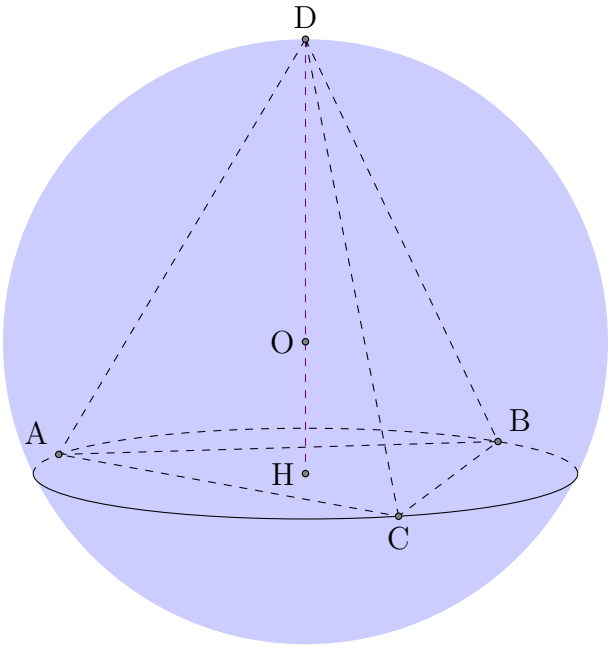
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho mặt cầu (S) bán kính $R = 5$ cm . Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π cm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C), điểm D thuộc (S) (D không thuộc đường tròn (C)) và tam giác ABC đều. Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$.

A. $32\sqrt{3}$ cm^3. **B.** $60\sqrt{3}$ cm^3. **C.** $20\sqrt{3}$ cm^3. **D.** $96\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (P).
Ta có $V_{ABCD} = V_{D.ABC} = \frac{1}{3}DH \cdot S_{ABC}$.
Tam giác đều ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$ cm, nên có cạnh $a = 4\sqrt{3}$ cm.
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ cm^2 không đổi.
Do đó thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi DH lớn nhất.
Khi đó $DH = DO + OH = DO + \sqrt{OA^2 - AH^2} = 5 + \sqrt{25-16} = 8$.
$(V_{D.ABC})_{\max} = \frac{1}{3}\cdot 8 \cdot 12\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ cm^3.



Chọn đáp án A □

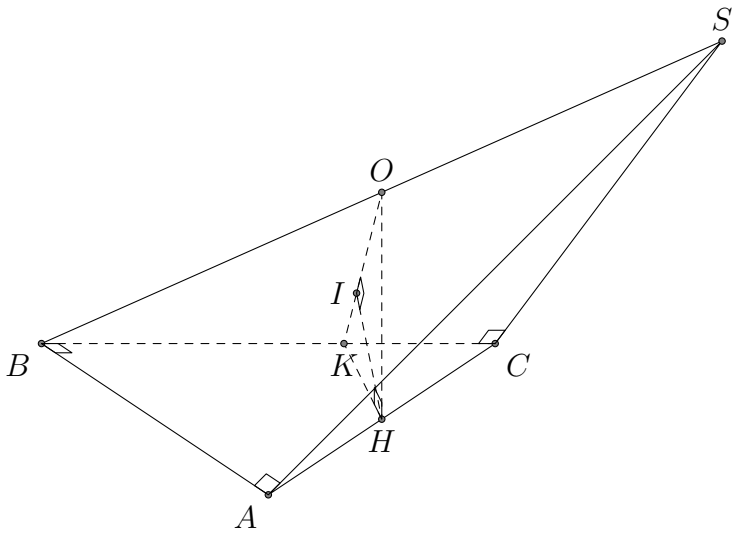
Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $S = 4\pi a^2$. **B.** $S = 8\pi a^2$. **C.** $S = 12\pi a^2$. **D.** $S = 16\pi a^2$.

Lời giải.

Từ tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$ suy ra $AC = a\sqrt{6}$.
Gọi O là trung điểm SB. Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ nên suy ra $OA = OC = OB = OS$, hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Gọi H, K lần lượt là trung điểm AC, BC. Từ $OA = OB = OC$ và $HA = HB = HC$ suy ra $OH \perp (ABC)$. Ta cũng có $HK \perp BC$ và $HK = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên $HB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Đặt $OH = x$. Kẻ $HI \perp (OK)$, suy ra $HI \perp (SBC)$, nên $HI = d(H;(SBC))$.
Mặt khác H là trung điểm AC nên $HI = d(H;(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(A;(SBC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ta có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là
$R = OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a}{2}$.
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 12\pi a^2.$$

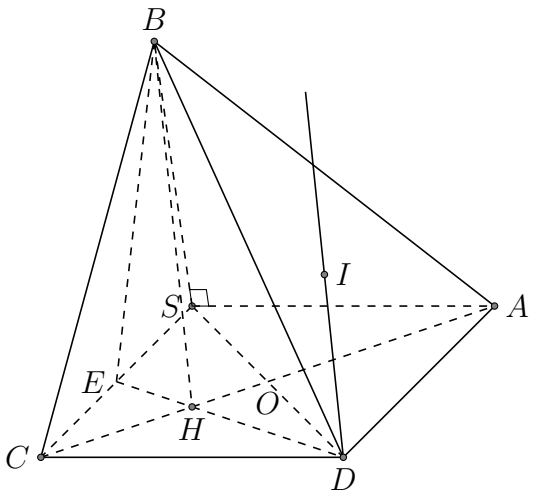


Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của SC. Dựng hình thoi $ASCD$, H là giao điểm của AC và DE. Dễ thấy $BH \perp SA$ và $BH \perp SC$ cho nên $BH \perp (ASCD)$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm I thuộc đường thẳng qua D và song song với BH.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $R^2 = r^2 + \mathrm{d}^2(I,(ABC))$, dễ thấy tam giác ABC vuông tại B nên $r = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{d}(I,(ABC)) = \mathrm{d}(D,(ABC)) = OD = \dfrac{a}{2}$. Suy ra $R^2 = a^2$ và diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = CD = 6$, $AC = BD = 3$, $AD = 3\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đã cho.

A. $\dfrac{\sqrt{39}}{2}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

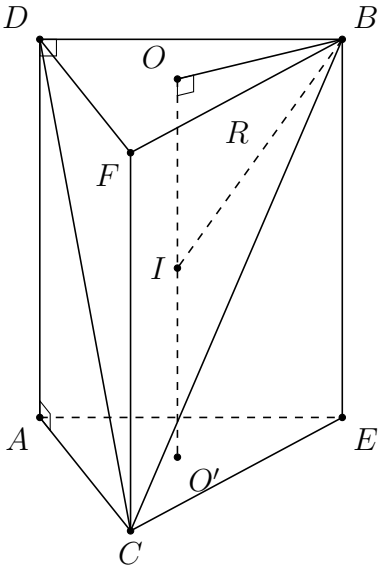
Theo định lý Pitago ta chứng minh được $AD \perp AC$, $AD \perp DB$.

Dựng lăng trụ đứng $ACE.DFB$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $3\sqrt{3}$.

Do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cũng là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đều, có tâm là trung điểm OO' (với O, O' là tâm của hai đáy).

Suy ra bán kính mặt cầu là

$$R = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có cạnh đáy bằng a và có thể tích $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Gọi J là điểm cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính khoảng cách d từ J đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

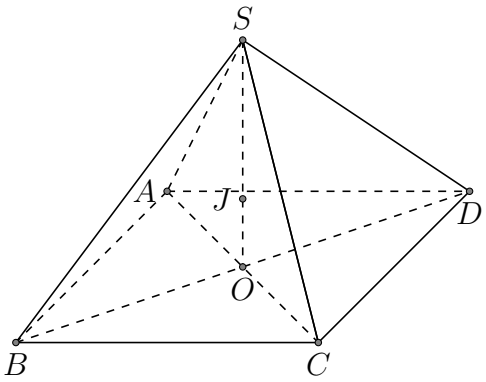
Lời giải.

Với hình chóp có mặt cầu nội tiếp ta có công thức sau:

$$V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r,$$

trong đó S_{tp} là diện tích toàn phần và r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

Ta thấy J chính là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và d là bán kính mặt cầu này.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD, M$ là trung điểm BC ta có

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = a \Rightarrow \mathrm{S}_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

nên diện tích toàn phần của hình chóp $S.ABCD$ bằng

$$\mathrm{S}_{tp} = 4\mathrm{S}_{\triangle SBC} + a^2 = 3a^2.$$

Lại có

$$V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot d$$

nên $d = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho (S) là một mặt cầu cố định có bán kính R. Một hình trụ (H) thay đổi nhưng luôn có hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối cầu (S) và V_2 là thể tích lớn nhất của khối trụ (H). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $IA = R$, $OO' = h$ suy ra $OI = \dfrac{h}{2}$ Ta có: $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$V_2 = h \cdot \pi \left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\pi h(4R^2 - h^2)$.

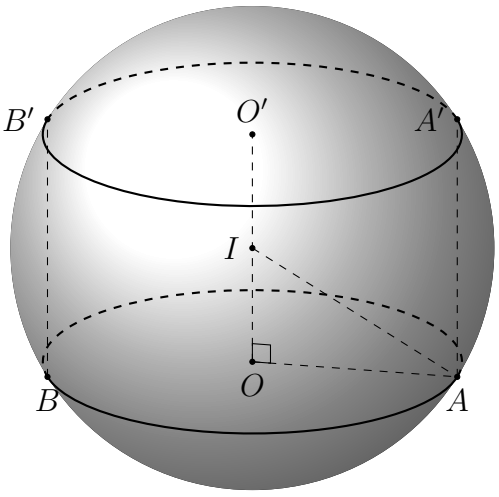
Đặt $f(h) = h(4R^2 - h^2) = 4R^2h - h^3$.

$f'(h) = 4R^2 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \pm\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Dựa vào bảng xét dấu và do $h > 0$ nên ta có V_{2max} khi $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Khi đó: $V_{2max} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \pi \cdot \left(R^2 - \dfrac{R^2}{3}\right) = \dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_{2max}} = \sqrt{3}$.

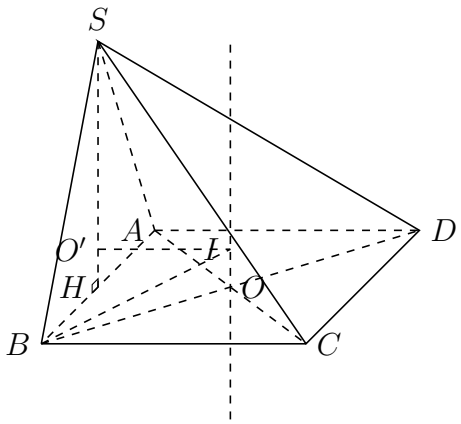


Chọn đáp án C □

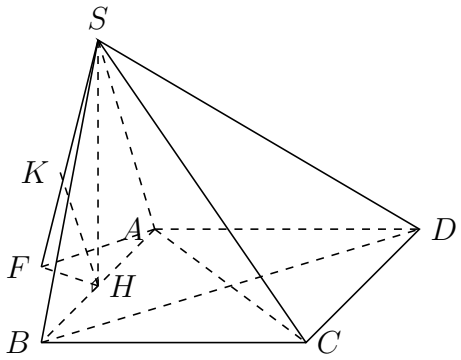
Câu 43. Cho khối chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$ có diện tích 84π cm^2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là bao nhiêu?

A. $\frac{3\sqrt{21}}{7}cm.$ **B.** $\frac{2\sqrt{21}}{7}cm.$ **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}cm.$ **D.** $\frac{6\sqrt{21}}{7}cm.$

Lời giải.

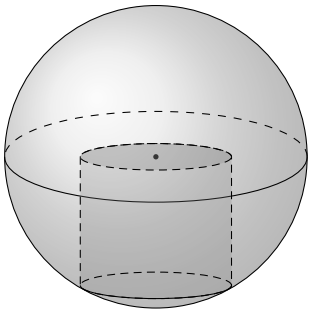


Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Dựng đường thẳng d đi qua O và vuông góc với $(ABCD) \Rightarrow d$ là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.
Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB dựng đường thẳng d' qua O' và vuông góc (SAB) cắt d tại I suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABCD$
Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{OB^2 + OI^2}(*)$
Gọi độ dài $AB = x \Rightarrow OB = x\frac{\sqrt{2}}{2}$
Vì tam giác SAB đều nên O' là trọng tâm của tam giác SAB nên: $OI = O'H = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$ theo giả thuyết diện tích mặt cầu bằng 84π nên $R = \sqrt{21} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng đường thẳng Ax song song BD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên Ax
$\Rightarrow BD \parallel AF \Rightarrow BD \parallel (SAF) \Rightarrow d(BD, SA) = d(BD, (SAF) = d(B, (SAF)) = 2d(H, (SAF)).$
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SF nên $d(H, (SAF)) = HK$ Ta có $AH = \frac{1}{2}AB = 3$
Tam giác AHF vuông tại F và $\widehat{FAH} = \widehat{DBA} = 45°$(so le trong)$\Rightarrow HF = AH.\sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow HK = \frac{SH.HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \frac{3\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d(BD, SA) = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$
Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Một công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế một khối cầu như một viên ngọc trai, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem (như hình vẽ minh họa). Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính $R = 2\sqrt{3}$cm. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



A. 16π cm^3. **B.** 54π cm^3. **C.** 32π cm^3. **D.** $8\sqrt{2}\pi$ cm^3.

Lời giải.

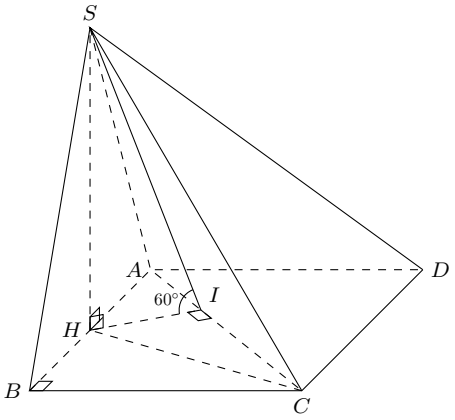
Ta có:
$\dfrac{h^2}{4} + r^2 = R^2 = 12$
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:
$12 = \dfrac{h^2}{4} + \dfrac{r^2}{2} + \dfrac{r^2}{2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{r^4h^2}{16}}$
$\Rightarrow r^4h^2 \leq 1024$
$\Rightarrow r^2h \leq 32$
Vậy $V \leq 32\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi H là trung điểm của AB. Biết rằng tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHC$

A. $\dfrac{9\sqrt{2}a}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{62}a}{16}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{62}a}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{31}a}{32}$.

Lời giải.



Từ H dựng HI vuông góc với AC.
Ta có $((SAC);(ABCD)) = \widehat{SIH} = 60^\circ$.
$\triangle IAH \backsim \triangle BAC \Rightarrow \dfrac{IH}{BC} = \dfrac{AH}{AC}$
$\Rightarrow IH = \dfrac{AH \cdot BC}{AC} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$
$\Rightarrow SH = IH \cdot \tan \widehat{SIH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a.$
Ta có $SH \perp (AHC) \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{SH^2}{4} + R^2_{\triangle AHC}}$
$AH = \dfrac{a}{2}, HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a.$
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}.$
$S_{\triangle AHC} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2.$
Mà $S_{\triangle AHC} = \dfrac{AH \cdot AC \cdot HC}{4R_{\triangle AHC}}$
$\Rightarrow R_{\triangle AHC} = \dfrac{AH \cdot AC \cdot HC}{4S_{AHC}} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot \sqrt{3}a}{4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}a^2}{4}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}a.$
$\Rightarrow R_{\text{mc}} = \sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}{4} + \left(\dfrac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{62}}{8}a.$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;r)$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA = AB = \dfrac{8r}{5}$. Tính theo r khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)?

A. $\dfrac{2\sqrt{2}r}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{13}r}{20}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}r}{20}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}r}{20}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB$ đều cạnh $\dfrac{8r}{5} \Rightarrow SI = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{8}{5}r = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}r.$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SIO) \Rightarrow (SIO) \perp (SAB)$.

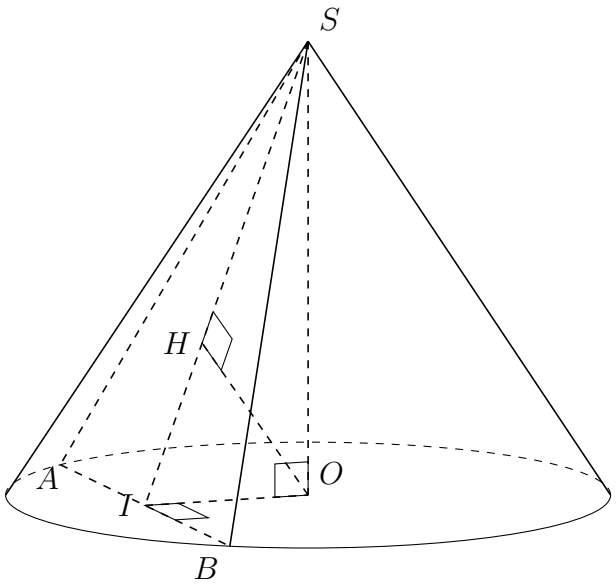
Từ O dựng $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$

$\Rightarrow d(O;(SAB)) = OH.$

$IO = \sqrt{AO^2 - AI^2} = \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{4r}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}r.$

$$\Rightarrow OH = \frac{OI \cdot SO}{SI} = \frac{\dfrac{3r}{5} \cdot \sqrt{SI^2 - OI^2}}{\dfrac{4\sqrt{3}r}{5}}$$

$$= \frac{\dfrac{3r}{5} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{3}r}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2}}{\dfrac{4\sqrt{3}r}{5}} = \frac{3\sqrt{13}}{20}r.$$

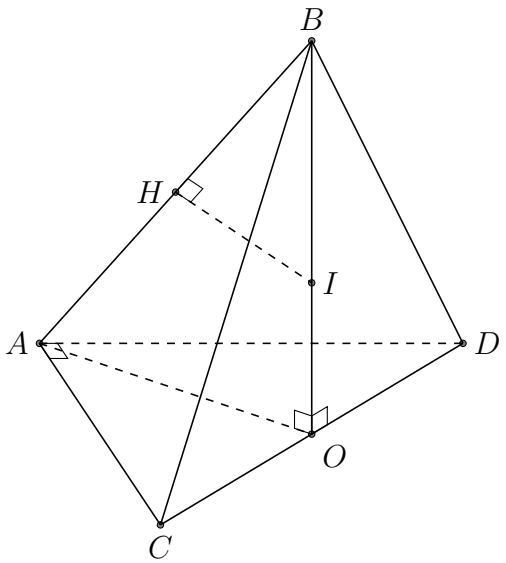


Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết $AD = a$ và $BA = BC = BD = CA = b$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $\dfrac{4\pi a^4}{3a^2 - b^2}$. **B.** $\dfrac{4\pi b^4}{3b^2 - a^2}$. **C.** $\dfrac{4a^4}{3a^2 - b^2}$. **D.** $\dfrac{4b^4}{3b^2 - a^2}$.

Lời giải.



Gọi O là trung điểm của CD, ta có: $BO \perp CD$.

Mà $(ACD) \perp (BCD)$ theo giao tuyến CD nên $BO \perp (ACD)$.

Ta lại có: $BA = BC = BD$ nên $OA = OB = OC$.

Suy ra tam giác ACD vuông tại A và BO là trục của tam giác ACD.

Trong mặt phẳng (ABO), kẻ đường trung trực của AB cắt BO tại I, ta có I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\triangle BHI \backsim \triangle BOA$.

Suy ra $\dfrac{IB}{AB}=\dfrac{BH}{BO}$ hay $IB=\dfrac{AB\cdot BH}{BO}=\dfrac{AB^2}{2BO}$.

Tam giác ACD vuông tại A nên $OA=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Tam giác ABO vuông tại O nên $BO^2=AB^2-OA^2=b^2-\dfrac{a^2+b^2}{4}=\dfrac{3b^2-a^2}{4}$

$\Rightarrow BO=\dfrac{\sqrt{3b^2-a^2}}{2}$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $IB=\dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2-a^2}}$.

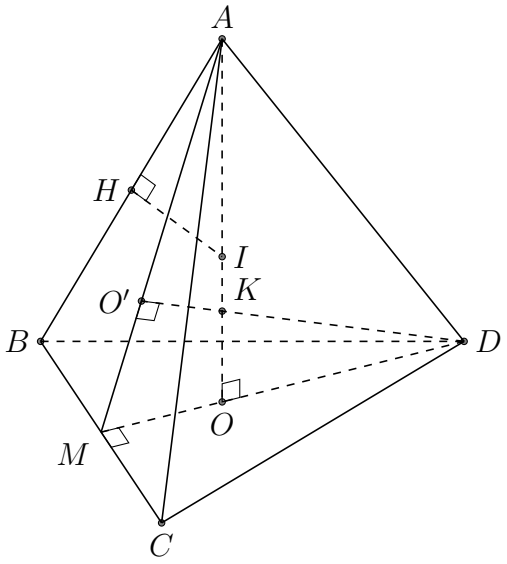
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $S=4\pi\cdot IB^2=\dfrac{4\pi b^4}{3b^2-a^2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho khối tứ diện đều. Tỉ số thể tích khối cầu nội tiếp và ngoại tiếp khối tứ diện đó là

A. $\dfrac{1}{27}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{81}$.

Lời giải.



Giả sử khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của các tam giác đều BCD, ABC. Khi đó, ta có: $AO\perp(BCD)$ và $DO'\perp(ABC)$. Suy ra AO, DO' lần lượt là trục của các tam giác đều BCD, ABC và AO, DO' đồng phẳng.

Gọi $K=AO\cap DO'$, ta có K là tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\triangle KOD\backsim\triangle MO'D$.

Suy ra $\dfrac{KO}{MO'}=\dfrac{OD}{O'D}$ hay $KO=\dfrac{OD.MO'}{O'D}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Trong mặt phẳng (ABO), kẻ đường trung trực của AB cắt AO tại I, ta có: I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\triangle AHI\backsim\triangle AOB$.

Suy ra $\dfrac{IA}{AB}=\dfrac{AH}{AO}$ hay $IA=\dfrac{AB\cdot AH}{AO}=\dfrac{AB^2}{2AO}=\dfrac{a^2}{2\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, ta có:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^3}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

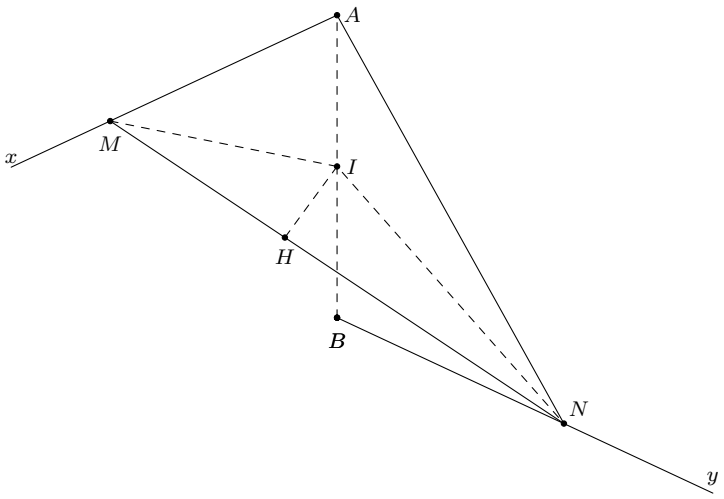
Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho (S) là mặt cầu có đường kính $AB = 10$. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với mặt cầu (S) sao cho $Ax \perp By$. Gọi M là điểm di động trên Ax, N là điểm di động trên By sao cho MN luôn tiếp xúc với mặt cầu (S). Tính giá trị của tích $AM \cdot BN$.

A. $AM \cdot BN = 20$. **B.** $AM \cdot BN = 50$. **C.** $AM \cdot BN = 100$. **D.** $AM \cdot BN = 10$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB.
MN tiếp xúc với mặt cầu tại H.
Khi đó rõ ràng $AM \perp AB$, $BN \perp AB$ và $IH \perp MN$. IH là bán kính của mặt cầu.
Xét tam giác AMI vuông tại A và tam giác IMH vuông tại H, ta có:
$AM = MH = \sqrt{MI^2 - R^2}$ với R là bán kính của mặt cầu (S).
Tương tự , ta cũng có $BN = HN$.



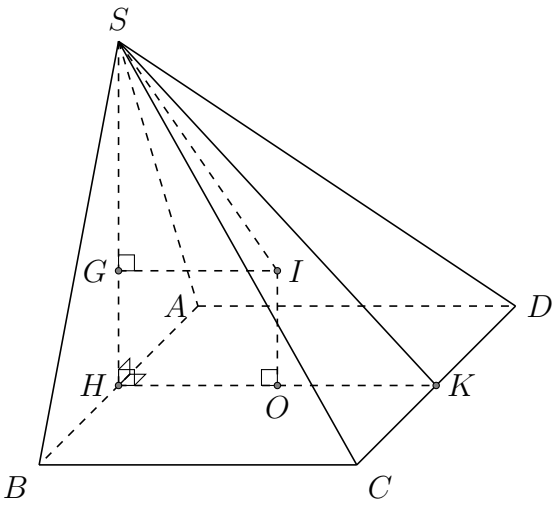
Ngoài ra ta có $AM \perp AB$ và $AM \perp BN$ nên $AM \perp (ABN)$ suy ra $AM \perp AN$.
Xét tam giác AMN vuông tại A
$AM + BN = MH + HN = MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{AM^2 + AB^2 + BN^2}$.
Suy ra $AM \cdot BN = \frac{1}{2}AB^2 = 50$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $r = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** $r = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. **C.** $r = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. **D.** $r = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD) \text{ theo giao tuyến } AB\\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của CD, ta có $\begin{cases}KH\perp AB\\ KH\perp SH\end{cases}\Rightarrow KH\perp(SAB)$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm tam giác SAB.

Trong mặt phẳng (SHK), kẻ đường thẳng $Ox\parallel SH$ và kẻ đường thẳng $Gy\parallel KH$.

Gọi $I=Ox\cap Gy$, ta có $\begin{cases}IO\perp(ABCD)\\ IG\perp(SAB)\end{cases}\Rightarrow IO$ là trục của hình vuông $ABCD$ và IG là trục của tam giác SAB.

Do đó ta có $IS=IA=IB=IC=ID$ hay I chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tứ giác $OHGI$ là hình chữ nhật nên $IG=OH=a$.

Tam giác SAB đều nên $SG=\dfrac{2}{3}SH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SGI vuông tại G nên $SI^2=SG^2+GI^2=a^2+\dfrac{4a^2}{3}=\dfrac{7a^2}{3}$.

Vậy $r=SI=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

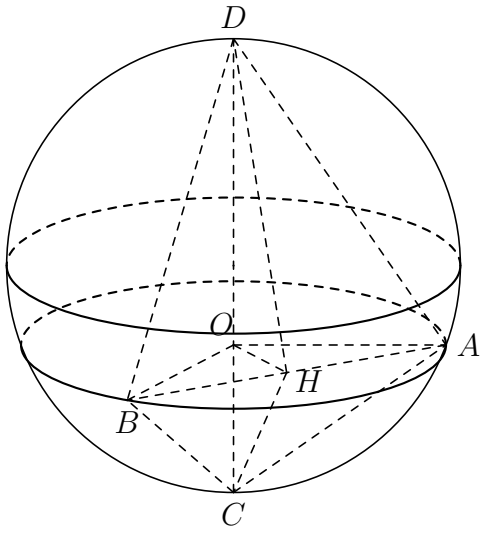
Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB cân tại O, $OA=OB=2a$, $\widehat{AOB}=120^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O, lấy hai điểm C và D nằm về hai phía của mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại C và tam giác ABD đều. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH = a$ và $AB = 2\sqrt{3}a$.
Xét tam giác CAB vuông cân tại C có $CH = a\sqrt{3}$ và $CA = a\sqrt{6}$.
Xét tam giác COH có $CO = \sqrt{CH^2 - OH^2} = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác đều DAB có
$DA = AB = 2a\sqrt{3}$ và $DH = \sqrt{DA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = 3a$.
Xét tam giác DOH có $DO = \sqrt{DH^2 - OH^2} = 2\sqrt{2}a$
$\Rightarrow CD = CO + OD = 3a\sqrt{2}$.



Vì $\begin{cases} CD \perp AB \\ OH \perp AB \\ H \text{ là trung điểm } AB \end{cases}$

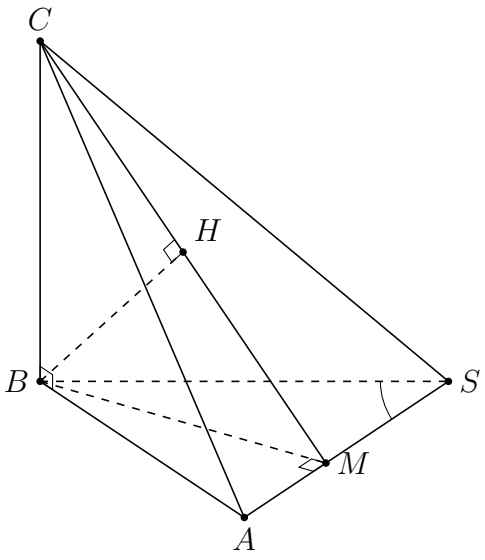
$\Rightarrow (CDH)$ là mặt phẳng trung trực của $AB \Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$.
Xét $\triangle ACD$ có $AD^2 + AC^2 = 18a^2 = CD^2 \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow CD$ là đường kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ là $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = 2a$. Mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy, biết $\widehat{ASB} = 60^\circ, SB = a$. Gọi (S) là mặt cầu tâm B và tiếp xúc với mặt phẳng (SAC). Tính bán kính r của mặt cầu (S).

A. $r = 2a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{19}}$. **B.** $r = a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{19}}$. **C.** $r = 2a$. **D.** $r = 2a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ BC \perp AB \end{cases}$. Suy ra $BC \perp (SAB)$.



Kẻ $BM \perp SA$ tại M, $BH \perp CM$ tại H.
Ta có $SA \perp (BCM) \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow r = BH$.
Ta có $BM = SB \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle CBM$, ta có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BM^2}$
$\Rightarrow BH = 2a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{19}}$.
Vậy $r = 2a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

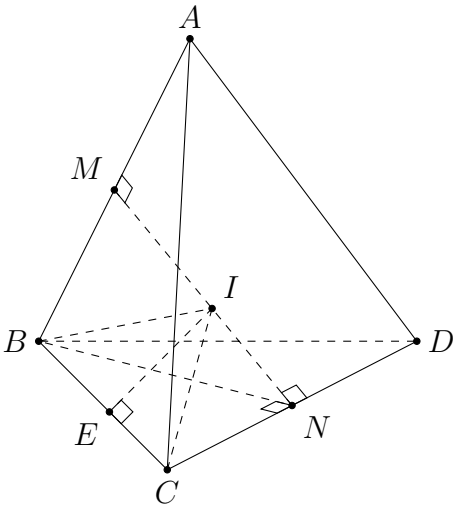
Chọn đáp án A □

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = a$, $CD = b$ và các cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD và $MN = m$. Biết rằng tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện đã cho. Tìm hệ thức đúng biểu diễn mối liên hệ giữa a, b và m.

A. $ab = m^2$. **B.** $ab = 2m^2$. **C.** $2ab = m^2$. **D.** $3ab = 2m^2$.

Lời giải.

Ta có $AB \perp (MCD)$, $CD \perp (NAB)$ nên MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD.
Gọi I là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của $ABCD$, suy ra I là trung điểm MN.
Kẻ $IE \perp BC$ khi đó $\triangle IEC = \triangle INC$ nên $EC = NC = \dfrac{b}{2}$.
Tương tự $BM = BE = \dfrac{a}{2}$. Do đó $BC = \dfrac{a+b}{2}$.
Lại có $MN^2 = BN^2 - BM^2 = BC^2 - CN^2 - BM^2 = \dfrac{ab}{2}$. Vậy $m^2 = \dfrac{ab}{2}$.

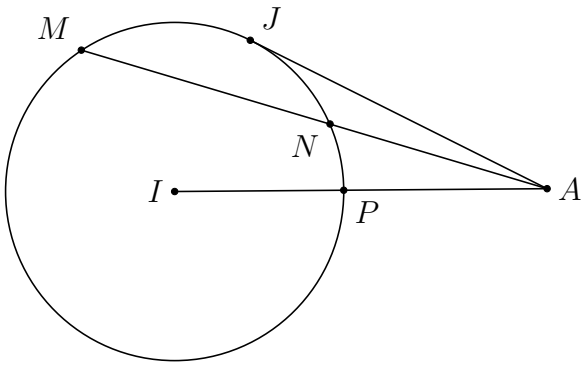


Chọn đáp án B □

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

A. $S_{\min} = 30$. **B.** $S_{\min} = 20$. **C.** $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$. **D.** $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

Lời giải.



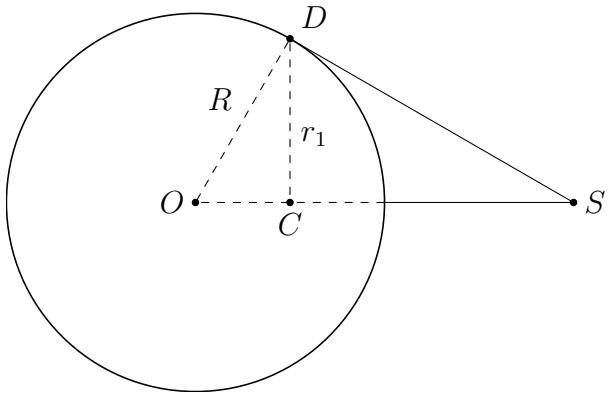
Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$. Kẻ tiếp tuyến AJ, $P = AI \cap (S)$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + 4AN$ xảy ra trong trường hợp $AM > AN$.
Ta có $AP \le AN < AJ$. Lại có $AI = \sqrt{34}$, $AJ = \sqrt{AI^2 - R^2} = 5$.
Do đó $\sqrt{34} - 3 \le x < 5$, với $x = AN$.
Mà $AM \cdot AN = AJ^2 \Rightarrow AM = \dfrac{25}{x} \Rightarrow S = 4x + \dfrac{25}{x}$.
Xét $f(x) = 4x + \dfrac{25}{x}$ trên $\left[\sqrt{34} - 3; 5\right)$. Có $f'(x) = 4 - \dfrac{25}{x^2} > 0, \forall x \in \left[\sqrt{34} - 3; 5\right)$.
Suy ra $S_{\min} = f\left(\sqrt{34} - 3\right) = 5\sqrt{34} - 9$.
Chọn đáp án D □

Câu 55. Trong không gian cho một hình cầu (S) tâm O có bán kính R và một điểm S cho trước sao cho $SO = 2R$. Từ S kẻ các tiếp tuyến với mặt cầu với tiếp điểm thuộc đường tron (C_1). Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C_1) ta lấy điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi N là hình nón có đỉnh là E và đáy là đường tròn (C_2) gồm các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E đến mặt cầu (S). Biết

rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) luôn có cùng bán kính. Tính theo R bán kính R' của đường tròn cố định mà E di động trên đó.

A. $R'=\dfrac{R\sqrt{15}}{4}$. **B.** $R'=\dfrac{R\sqrt{15}}{2}$. **C.** $R'=\dfrac{3R}{2}$. **D.** $R'=\dfrac{R\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.



Gọi bán kính của (C_1), (C_2) lần lượt là r_1, r_2. Gọi C là tâm của (C_1) và D là một điểm trên (C_1).

Ta có $\triangle OSD$ vuông tại D nên $CD\cdot OS=DO\cdot DS$.

Do đó $r_1=CD=\dfrac{R\sqrt{OS^2-R^2}}{OS}=R\sqrt{1-\dfrac{R^2}{OS^2}}$.

Tương tự ta có $r_2=R\sqrt{1-\dfrac{R^2}{OE^2}}$. Mà $r_1=r_2$ nên $OE=OS=2R$.

Suy ra E di động trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm O bán kính $2R$ với mặt phẳng (P).

Lại có $OC=\dfrac{OD^2}{OS}=\dfrac{R}{2}\Rightarrow R'=\sqrt{OE^2-OC^2}=\sqrt{4R^2-\dfrac{R^2}{4}}=\dfrac{R\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{7\pi a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{7\pi a^2}{12}$. **C.** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB.

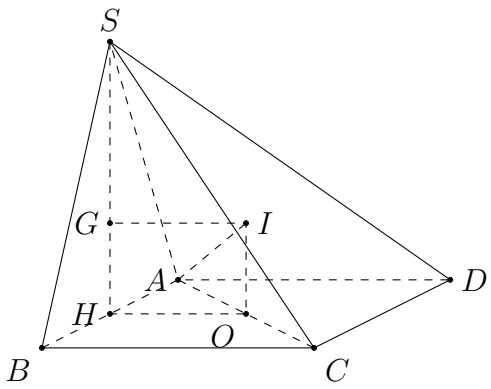
Suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Gọi O và G là tâm của đáy $ABCD$ và mặt bên SAB.

Xét mặt phẳng (SHO).

Gọi I là điểm sao cho $OI\parallel SH$, $GI\parallel HO$.

Ta có $OH\perp(SAB)$ và $SH\perp(ABCD)$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Ta có $AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $HG=\dfrac{1}{3}SH=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Suy ra $R^2=IA^2=AO^2+OI^2=\dfrac{7}{12}a^2$.

Diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=\dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Cho ba mặt cầu có bán kính R_1, R_2, R_3 đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Một mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu lần lượt tại A, B, C. Biết tam giác ABC có số đo ba cạnh lần lượt là $2, 3, 4$. Tìm tích $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$.

A. 6. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 24.

Lời giải.

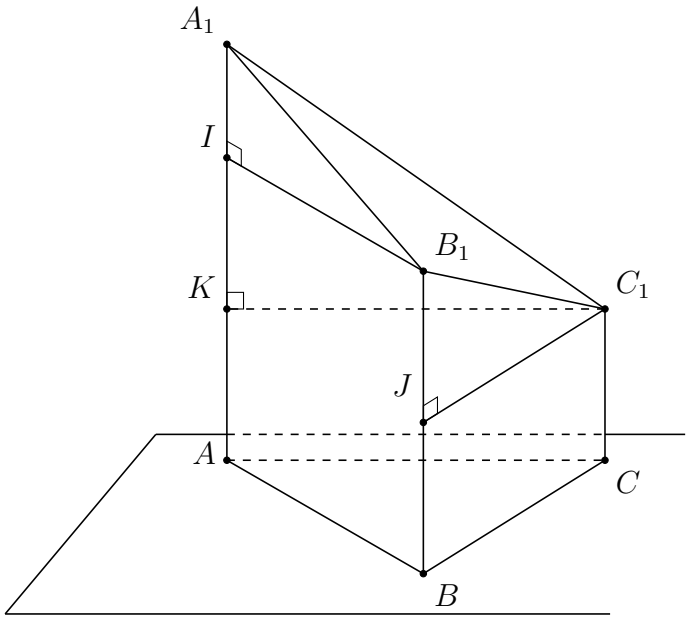
Giả sử $R_1 > R_2 > R_3$.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm ba mặt cầu có bán kính R_1, R_2, R_3.

Gọi I là hình chiếu của B_1 lên AA_1.

Gọi J là hình chiếu của C_1 lên BB_1.

Gọi K là hình chiếu của C_1 lên CC_1.



Ta có $A_1B_1 = R_1 + R_2$.

Ta có $\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ A_1I = R_1 - R_2. \end{cases}$

Do vậy

$$\begin{aligned} & AB^2 = A_1B_1^2 - A_1I^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2 = 4 \cdot R_1 \cdot R_2. \end{aligned}$$

Tương tự như trên, ta được $AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2 = 4^3 \cdot (R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)^2 \Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = 3$.

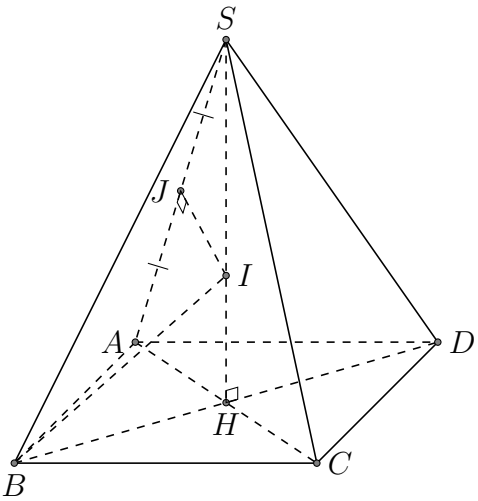
Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 3. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $\dfrac{64}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là giao điểm của AC và BD. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, ta có $IS = IB = 3$.



Đặt $AB = x$, ta có $BH = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle BIH$ ta có $HI = \sqrt{IB^2 - BH^2} = \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}$.

Suy ra $SH = 3 + \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}$. Mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = x^2 + \dfrac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}$.

Đặt $x^2 = t$, điều kiện $t \in (0; 18)$. Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{1}{3} \cdot t \cdot \sqrt{9 - \dfrac{t}{2}}$ với $t \in (0; 18)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{12\sqrt{9 - \dfrac{t}{2}} + 36 - 3t}{4\sqrt{9 - \dfrac{t}{2}}} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 12\sqrt{36 - \dfrac{t}{2}} = 3t - 36 \Leftrightarrow t = 16$.

Bảng biến thiên

x	0		16		18
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	$\frac{64}{3}$	↘	

Vậy $\max V_{ABCD} = \dfrac{64}{3}$, xảy ra khi cạnh đáy hình chóp bằng 4.

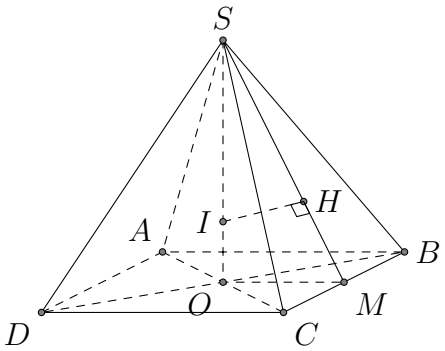
Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều ngoại tiếp mặt cầu có bán kính bằng a, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = \dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{10a^3}{3}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = \dfrac{32a^3}{3}$.

Lời giải.

Với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ ngoại tiếp mặt cầu (S) tâm I bán kính a thì $I \in SO$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.
Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của I trên (SBC).
Theo cách dựng thì $IH \perp (SBC)$ nên $IH = IO = a$.



Đặt $SO = h$, $AB = 2x$ ta có

$$\frac{a}{h-a} = \sin\widehat{OSM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \Rightarrow h = \frac{2x^2 a}{x^2-a^2}.$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot 4x^2 \cdot \dfrac{2x^2 a}{x^2-a^2} = \dfrac{8a}{3}\cdot\dfrac{x^4}{x^2-a^2}$.
Xét $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-a^2}$ trên $(a;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{2x^3(x^2-2a^2)}{(x^2-a^2)^2}$.
Nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên

x	a		$a\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$4a^2$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(x) \geq f(a\sqrt{2}) = 4a^2$.
Suy ra $V_{S.ABCD} \geq \dfrac{8a}{3}\cdot 4a^2 = \dfrac{32a^2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác cân với $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết thể tích tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{a^3}{16}$.

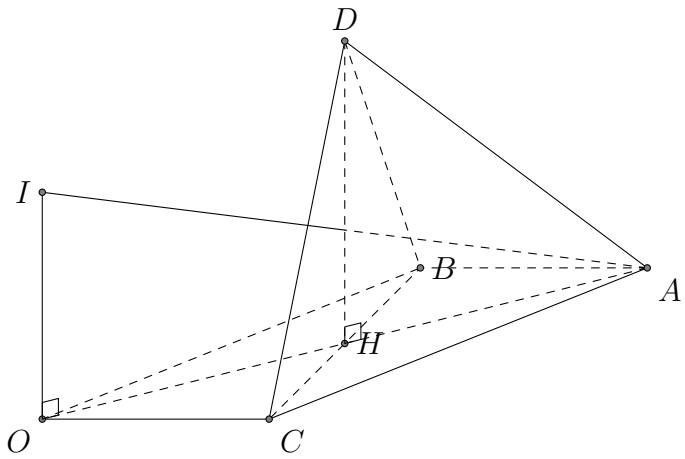
A. $R = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{13a}{2}$. **D.** $R = 6a$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có H là trung điểm của AO. Ta có $DH = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IO \perp (ABC)$. Do $IA = R$, $OA = a$ nên $IO = \sqrt{R^2 - a^2}$.
Do $HO \perp IO$, $HO \perp HD$ nên ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{R^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

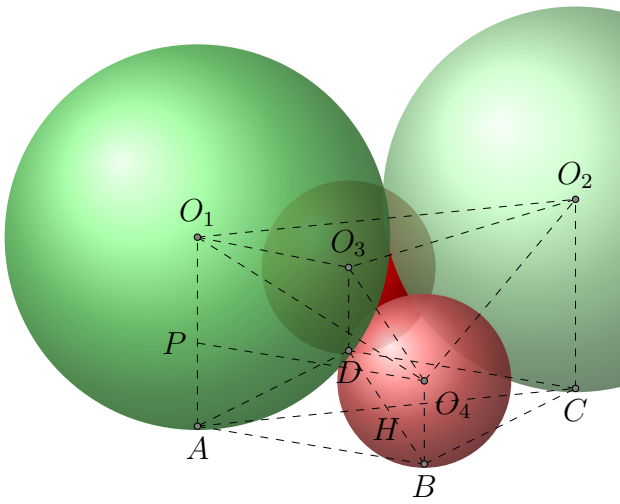
Giải phương trình trên ta được $R = \dfrac{a\sqrt{91}}{8}$.



Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho bốn hình cầu $S(O_1; R)$, $S(O_2; R)$, $S(O_3; R')$, $S(O_4; R')$, trong đó $R > R'$. Biết rằng mỗi hình cầu trong chúng đều tiếp xúc với ba hình cầu còn lại và tất cả chúng cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Tính tỉ số $\dfrac{R}{R'}$.

A. $\dfrac{R}{R'} = 3$. **B.** $\dfrac{R}{R'} = 2 + \sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{R}{R'} = 4$. **D.** $\dfrac{R}{R'} = 4 - \sqrt{3}$.



Lời giải.

Gọi A, B, C, D lần lượt là các tiếp điểm của $S(O_1;R)$, $S(O_2;R)$, $S(O_3;R')$, $S(O_4;R')$ với mặt phẳng, H là giao điểm của AC và BD. Qua O_4 dựng đường thẳng song song với AB cắt AO_1 tại P.

Ta có: $HB=\dfrac{1}{2}DB=\dfrac{1}{2}O_3O_4=R'$; $AH=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}O_1O_2=R.$;

$AB=PO_4=\sqrt{O_1O_4^2-O_1P^2}=\sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}=4RR'$.

Tứ giác $ABCD$ có $AB=BC=CA=AD=R+R'$ nên nó là hình thoi, suy ra $AC\perp BD$.

Xét tam giác AHB vuông tại H nên:

$$AH^2+HB^2=AB^2\Rightarrow R^2+R'^2=4RR'\Leftrightarrow\left(\frac{R}{R'}\right)^2-4\frac{R}{R'}+1=0\Leftrightarrow\frac{R}{R'}=2+\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho hình trụ (T) có trục $OO'=2a$, bán kính đường tròn đáy bằng a. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với hai mặt đáy của hình trụ và tiếp xúc với các đường sinh của hình trụ. Gọi (N) là hình nón đỉnh O' và đáy là hình tròn (O) của hình trụ. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích của khối trụ (T), khối cầu (S) và khối nón (N). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $V_2=\sqrt{V_3\cdot V_1}$. **B.** $\dfrac{1}{V_3}=\dfrac{1}{V_1}+\dfrac{1}{V_2}$. **C.** $V_1=V_2+V_3$. **D.** $V_3=\sqrt{V_1\cdot V_2}$.

Lời giải.

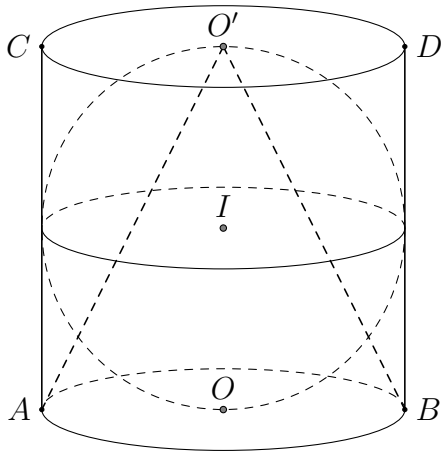
Ta có $V_1=\pi R^2h\Rightarrow V_1=\pi R^2\cdot OO'=2\pi a^3$.

$V_2=\dfrac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow V_2=\dfrac{4\pi a^3}{3}$ và $V_3=\dfrac{1}{3}\pi R^2h$

$\Rightarrow V_3=\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot OO'=\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Suy ra $V_2+V_3=\dfrac{4\pi a^3}{3}+\dfrac{2\pi a^3}{3}=2\pi a^3$.

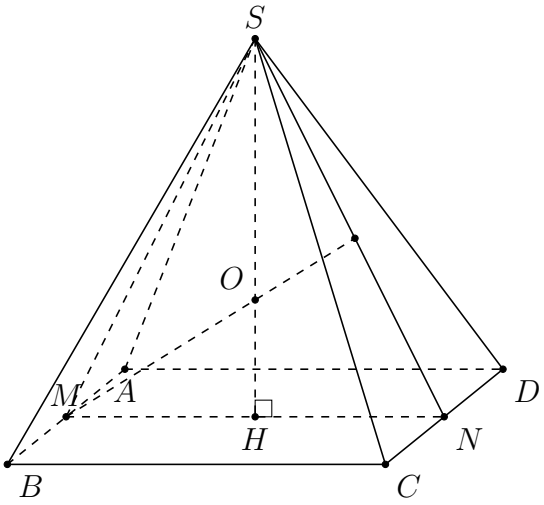
Vậy $V_1=V_2+V_3$.



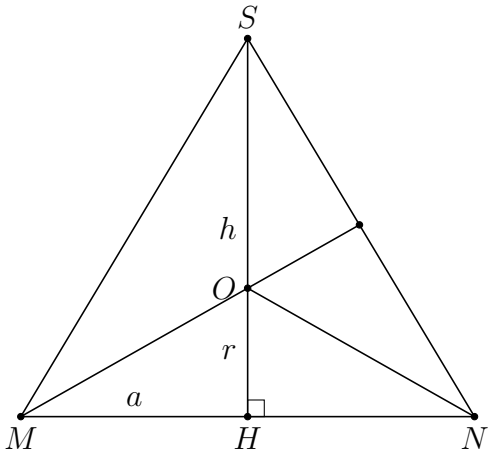
Chọn đáp án C □

Câu 63. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có chiều cao h và bán kính mặt cầu nội tiếp r $(h > 2r > 0)$.

A. $V = \dfrac{4h^2r^2}{3(h+2r)}$. **B.** $V = \dfrac{4h^2r^2}{h-2r}$. **C.** $V = \dfrac{4h^2r^2}{3(h-2r)}$. **D.** $V = \dfrac{4h^2r^2}{4(h-2r)}$.



Lời giải.



Gọi SH là đường cao của chóp tứ giác đều $S.ABCD$, khi đó $SH = h$ và mọi điểm thuộc SH đều cách đều các mặt bên của hình chóp. Vậy tâm mặt cầu nội tiếp O của hình chóp thuộc SH.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Xét tam giác SMN, $SM = SN$, $SH \perp MN$ tại trung điểm H.

Trong tam giác SMN kẻ phân giác của góc $\widehat{SMN}$ cắt SH tại O. Vậy O là tâm của mặt cầu nội tiếp chóp $S.ABCD$, đồng thời là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác SMN.

Giả sử a là độ dài cạnh đáy, khi đó diện tích tam giác SMN là

$$S = p \cdot r = \frac{1}{2}a \cdot h \Leftrightarrow \left(SM + \frac{a}{2}\right) r = \frac{ah}{2} \Rightarrow SM = \frac{ah - ar}{2r} = \frac{a(h-r)}{2r} \ (1).$$

Mặt khác, trong tam giác SMH có $SM = \sqrt{MH^2 + SH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + h^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{a(h-r)}{2r} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2} \Rightarrow a^2 = \dfrac{4h^2r^2}{(h-r)^2 - r^2} = \dfrac{4r^2h}{h-2r}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}h \cdot a^2 = \frac{4h^2r^2}{3(h-2r)}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90°, \widehat{BSC} = 60°, \widehat{CSA} = 120°$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

C. $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có tam giác SAB vuông cân tại S nên $AB = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBC đều nên $BC = a$.

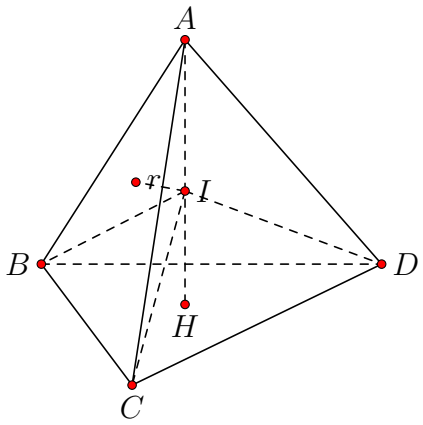
$CA^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos 120° = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Do đó tam giác ABC vuông tại B.

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$ và có bán kính r.

Vì $SA = SB = SC = a$ nên hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH trong đó H là trung điểm của AC.

Và $BH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.



Ta có:

$V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.SAB} + V_{I.SAC} + V_{I.SBC}$

$\Leftrightarrow SH \cdot S_{\triangle ABC} = r\left(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SBC}\right)$

$$\Rightarrow r = \frac{SH \cdot BA \cdot BC}{BA \cdot BC + SA \cdot SB + SB \cdot SC \cdot \sin 60° + SA \cdot SC \cdot \sin 120°}$$

$$= \frac{\dfrac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{2} \cdot a + a \cdot a + a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

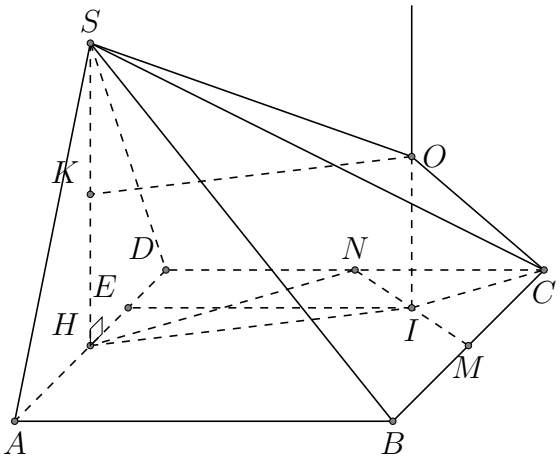
A. $R = \dfrac{a\sqrt{29}}{8}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{93}}{12}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{37}}{6}$. **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi:

- H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
- I là trung điểm của $MN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.
- d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.
- E là hình chiếu của I lên AD.
- O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.
- K là hình chiếu của O lên SH.

Đặt $OI = x$.



Ta có: $CI = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; $OC = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{8} + x^2}$;

$KO = HI = \sqrt{IE^2 + EH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$;

$SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \dfrac{22a^2}{16}}$.

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$ nên $SO = OC$

Suy ra: $\sqrt{\dfrac{a^2}{8} + x^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \dfrac{22a^2}{16}} \Leftrightarrow \sqrt{3}ax = \dfrac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5\sqrt{3}a}{12}$.

Vậy $R = OC = \sqrt{\dfrac{a^2}{8} + \dfrac{25a^2}{48}} = \dfrac{\sqrt{93}}{12}a$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mỗi cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

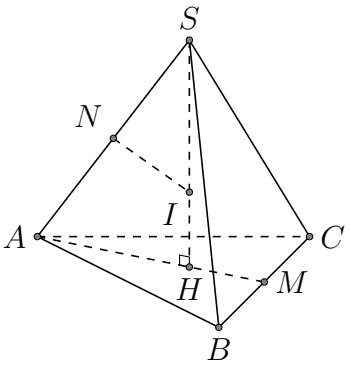
A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

Gọi N là trung điểm SA, mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại I.

Khi đó $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Bán kính mặt cầu là

$$R = SI = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{\frac{1}{2}SA^2}{\sqrt{SA^2 - AH^2}}$$

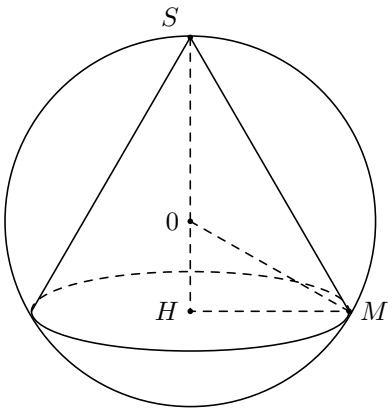
$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 67. Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

A. $h = \dfrac{3R}{2}$. **B.** $h = \dfrac{5R}{2}$. **C.** $h = \dfrac{5R}{4}$. **D.** $\dfrac{4R}{3}$.

Lời giải.



Gọi chiều cao của hình nón là x, $(0 < x < 2R)$. Gọi bán kính đáy của hình nón là T ta có
$r^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2 = x(2R-x)$.
Thể tích của hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 x = \dfrac{1}{3}\pi x^2(2R-x)$.
Mặt khác ta lại có
$$\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot(2R-x) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2R-x}{3}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}(2R-x) \le \frac{8R^3}{27}$$
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x) \le \frac{32\pi R^3}{27}.$$
Vậy $\max V = \dfrac{32\pi R^3}{27}$.
Dấu $=$ xảy ra khi $\dfrac{x}{2} = 2R - x \Leftrightarrow x = \dfrac{4R}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M=(1;-1;1)$.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $x-y+z-3=0$. **B.** $x-y+z-1=0$. **C.** $2x-y-3z=0$. **D.** $x+y+z-1=0$.

Lời giải.

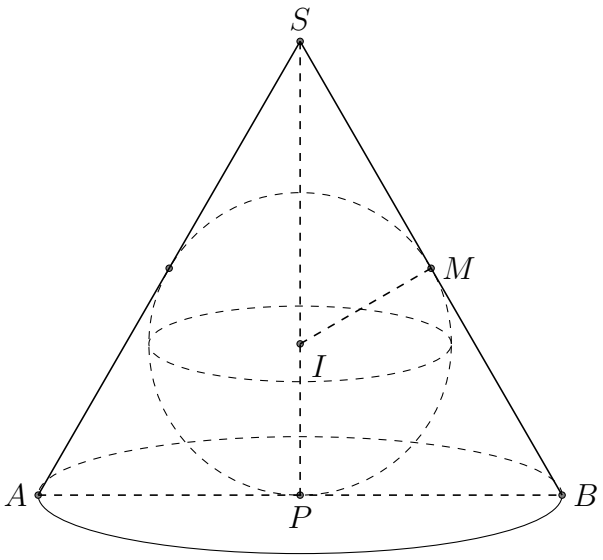
Mặt cầu (S) có tâm là $O(0;0;0)$.
$1^2+(-1)^2+1^2 < 9 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu.
Do đó mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất khi $OM \perp (P) = M$. $\overrightarrow{OM} = (1;-1;1) \Rightarrow 1(x-1)-1(y-1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y+z-1=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Một hình cầu (S) có thể tích $\dfrac{4\pi}{3}$ dm^3. Người ta muốn đặt hình cầu này nội tiếp một hình nón. Tính thể tích nhỏ nhất V của hình nón đó.

A. $V=2\pi$ dm^3. **B.** $V=4\pi$ dm^3. **C.** $V=\dfrac{10\pi}{3}$ dm^3. **D.** $V=\dfrac{8\pi}{3}$ dm^3.

Lời giải.



Gọi h, R lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình nón.
Theo bài ra ta có thể tích hình cầu $V_{(S)}=\dfrac{4\pi r^3}{3}=\dfrac{4\pi}{3}\Rightarrow r=1$.
Dễ dàng chứng minh được tam giác SMI và SPB đồng dạng suy ra

$$\frac{SI}{SB}=\frac{MI}{PB}\Rightarrow\frac{h-r}{\sqrt{h^2+R^2}}=\frac{r}{R}\Rightarrow h=\frac{2R^2}{R^2-1}.$$

Khi đó thể tích hình nón là $V_{\text{nón}}=\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{R^4}{R^2-1}$.
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$ với $t>1$ có $f'(t)=\dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$. Từ đó ta suy ra được giá trị nhỏ nhất của hàm số $f_{\min}=f(2)=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d\colon y=9x-14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (C)?

A. 4 điểm. **B**. 2 điểm. **C**. 3 điểm. **D**. 1 điểm.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C).
Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $\Delta\colon y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+(x_0^3-3x_0+2)$.
Lấy điểm $A(a;9a-14)\in(d)$.
Để có hai đường tiếp tuyến Δ đi qua A thì phương trình ẩn x_0 sau có hai nghiệm phân biệt

$$9a-14=(3x_0^2-3)(a-x_0)+(x_0^3-3x_0+2)\,(1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 9a-14=3ax_0^2-3a-3x_0^3+3x_0+x_0^3-3x_0+2\\ &\Leftrightarrow 2x_0^3-16=3ax_0^2-12a\\ &\Leftrightarrow 9a-14=3ax_0^2-3a-3x_0^3+3x_0+x_0^3-3x_0+2\\ &\Leftrightarrow 2x_0^3-16=3ax_0^2-12a\\ &\Leftrightarrow 2(x_0-2)(x_0^2+2x_0+4)=3a(x_0-2)(x_0+2)\\ &\Leftrightarrow (x_0-2)(2x_0^2+4x_0-3ax_0+8-6a)=0\,(2)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2\\ 2x_0^2+4x_0-3ax_0+8-6a=0\,(3)\end{array}\right.\end{aligned}.$$

Để (2) có hai nghiệm thì (3) có đúng một nghiệm khác 2 hoặc hai nghiệm phân biệt với một nghiệm là 2.

Trường hợp (3) có một nghiệm là 2 thì ta có $8+8-6a+8-6a=0\Leftrightarrow a=2$.

Để (3) có đúng một nghiệm thì $\Delta_3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-4\\ a=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của a. Nghĩa là có ba điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ bán kính 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$. Đặt M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M+m$ bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B**. 9. **C**. 8. **D**. $\sqrt{15}$.

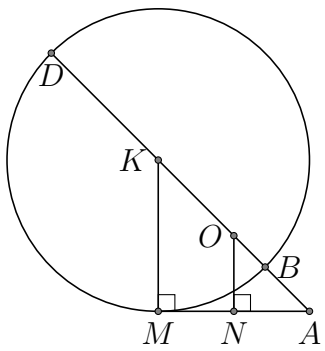
Lời giải.

Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng IJ tại điểm S và J là trung điểm của SI suy ra $S(2;1;9)$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với hai mặt cầu tại E,F, dễ thấy góc giữa EF và IJ bằng 30°. Gọi M là giao điểm của EF và mặt phẳng (Oxy), (P) cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến Δ. Khi (P) thay đổi, điểm M tạo nên đường tròn (C) tâm $K(2;1;0)$, bán kính $R=9\tan 30^\circ=3\sqrt{3}$ và Δ là tiếp tuyến của (C).

Gọi N là hình chiếu vuông góc của O trên Δ. Ta có

$$d(O,(P))=\frac{ON}{R}\cdot d(K,(P))=\frac{ON\sqrt{3}}{2}$$

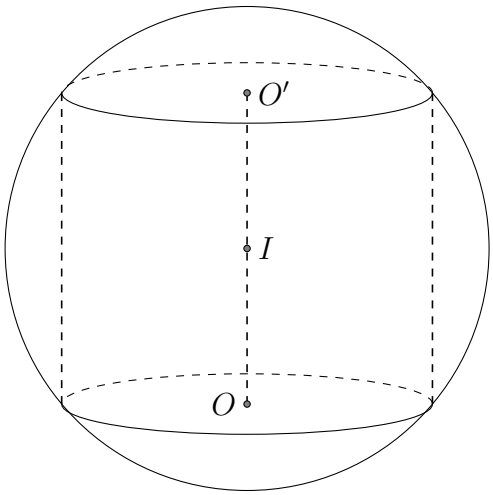
Suy ra $d(O,(P))$ lớn nhất, nhỏ nhất khi ON lớn nhất, nhỏ nhất tương ứng.



Dễ thấy ON lớn nhất bằng OD, ON nhỏ nhất bằng OB. Vậy $M+m=\dfrac{2R\sqrt{3}}{2}=9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



A. $h=R\sqrt{2}$. **B.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích V của khối trụ là $V=\pi hr^2=\pi h\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(h)=-\dfrac{h^3}{4}+hR^2$ $(0<h<2R)$.

h	0		$\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	0	↗	$\dfrac{4R^3}{3\sqrt{3}}$	↘	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

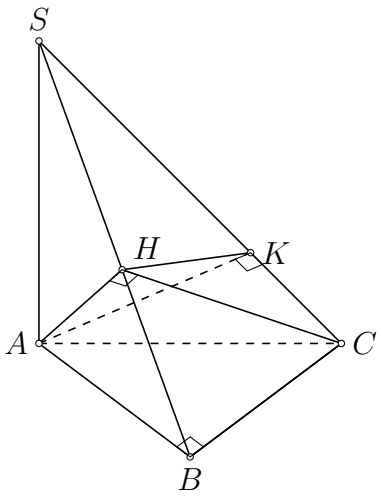
Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC=a$. Cạnh bên $SA\perp(ABC)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB, SC. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKB$ là

A. $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{2}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ACB$, $\triangle ACH$, $\triangle ACK$ là các tam giác vuông chung cạnh huyền AC. Nên A, C, B, H, K cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC.
Do đó mặt cầu ngoại tiếp $A.HKB$ có bán kính là $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.
$\Rightarrow V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.



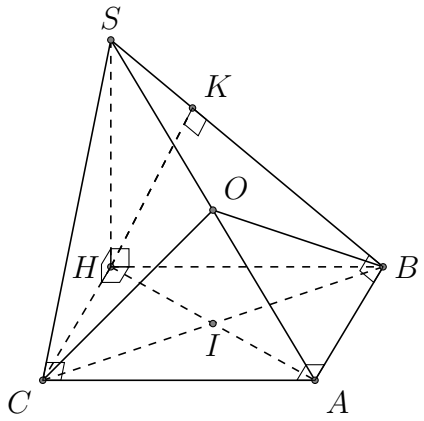
Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ cm^3. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ cm. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** 1 cm.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của SA. Ta có các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C nên $OS = OA = OB = OC = \dfrac{SA}{2}$.
Suy ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Bán kính mặt cầu tương ứng là $R = \dfrac{SA}{2}$.
Theo giả thiết, ta có $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{5}$.
Gọi I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của A qua I, ta có $ABHC$ là hình chữ nhật.



Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp BH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp SH.$ (1)

Lại có $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp CH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SCH) \Rightarrow AC \perp SH.$ (2)

Từ (1) & (2) suy ra $SH \perp (ABHC)$.
Ta có $AB \parallel HC \Rightarrow d(C, (SAB)) = d(H, (SAB))$.
Lại có $AB \perp (SBH) \Rightarrow (SAB) \perp (SBH)$ theo giao tuyến SB.
Trong mặt phẳng (SBH), kẻ $HK \perp SB$ tại K, ta có $HK \perp (SAB) \Rightarrow HK = d(H, (SAB))$.
Tam giác ABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2 \Rightarrow AH = BC = 2$.
Tam giác SAH vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 1$.
Tam giác SHB vuông tại H có HK là đường cao nên ta có:
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm.
Chọn đáp án (C) □

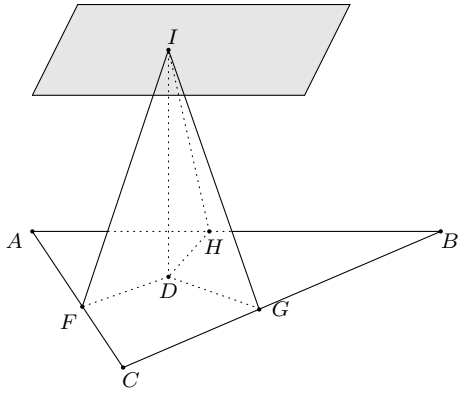
Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1) : x^2+y^2+z^2+4x+2y+z = 0$,

$(S_2): x^2+y^2+z^2-2x-y-z=0$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn $(\mathcal{C})$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathcal{C})$ và tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, BC.

A. Một mặt cầu. **B**. Hai mặt cầu. **C**. Bốn mặt cầu. **D**. Vô số mặt cầu.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu, H là hình chiếu của I lên (ABC), và F, G, H lần lượt là hình chiếu của I lên AC, CB, BA.
Khi đó, $DF\perp AC$, $DG\perp BC$, $DH\perp AB$ và $DF=DG=DH$.
Vậy D là tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp của ΔABC. Có tất cả bốn vị trí của D.



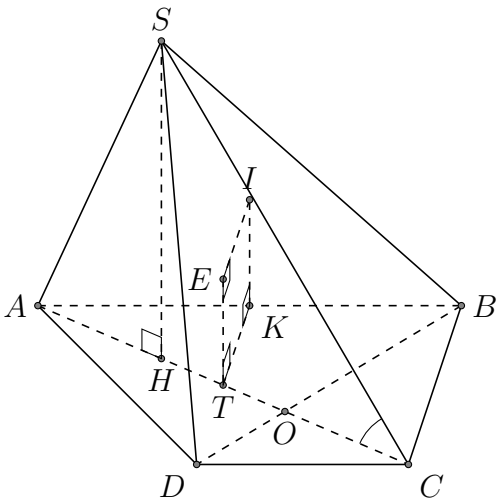
Ngược lại, với mỗi vị trí của D, ta có các vị trí phân biệt của I là giao của đường thẳng đi qua D, vuông góc với (ABC) và mặt phẳng chứa đường tròn $(\mathcal{C})$.
Vậy có tất cả bốn mặt cầu tương ứng với bốn vị trí của I xác định như trên.
Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD=DC=CB=a$; $AB=2a$. Chân đường cao là trung điểm OA, đường thẳng AC cắt BD tại O, góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{61\pi\sqrt{61}}{162}a^3$. **B**. $V=\dfrac{31\pi\sqrt{61}}{81}a^3$. **C**. $V=\dfrac{31\pi\sqrt{51}}{162}a^3$. **D**. $V=\dfrac{17\pi\sqrt{59}}{54}a^3$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của OA, ta có $SH\perp(ABCD)\Rightarrow(SAC)\perp(ABCD)$.
Gọi K là trung điểm của AB, ta có K là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình thang $ABCD$.
Gọi T là trung điểm của AC; E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC; I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, ta có $IETK$ là hình chữ nhật.
Tam giác ABC vuông tại C nên $AC^2=AB^2-BC^2=3a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.
$ABCD$ là hình thang có hai đáy AB, CD thỏa $AB=2CD$ nên $OA=2OC$.



$\Rightarrow CH=\dfrac{2}{3}AC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $AH=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Ta có $SH\perp(ABCD)\Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.
$\Rightarrow \widehat{SCH}=60^\circ\Rightarrow SH=HC\cdot\tan 60^\circ=2a$.
$\Rightarrow SA^2=SH^2+AH^2=4a^2+\dfrac{3a^2}{9}=\dfrac{39a^2}{9}\Rightarrow SA=\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.
Áp dụng định lí sin trong tam giác SAC, ta có $AE=\dfrac{SA}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.
Tam giác ATE vuông tại T nên $ET^2=AE^2-AT^2=\dfrac{13a^2}{9}-\dfrac{3a^2}{4}=\dfrac{25a^2}{36}$.

Tam giác IAK vuông tại K nên $IA^2 = AK^2 + IK^2 = a^2 + \dfrac{25a^2}{36} = \dfrac{61a^2}{36}$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = IA = \dfrac{a\sqrt{61}}{6}$.

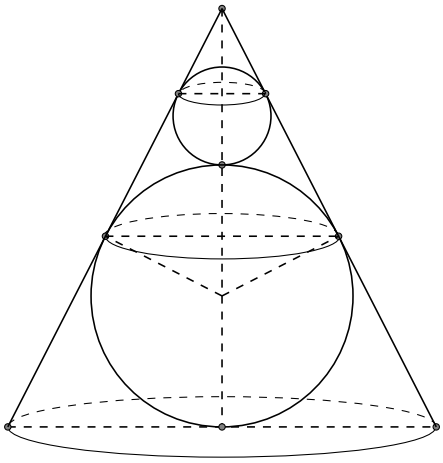
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{61}}{6}\right)^3 = \frac{61\pi\sqrt{61}}{162}a^3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 77.

Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón bằng . Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng

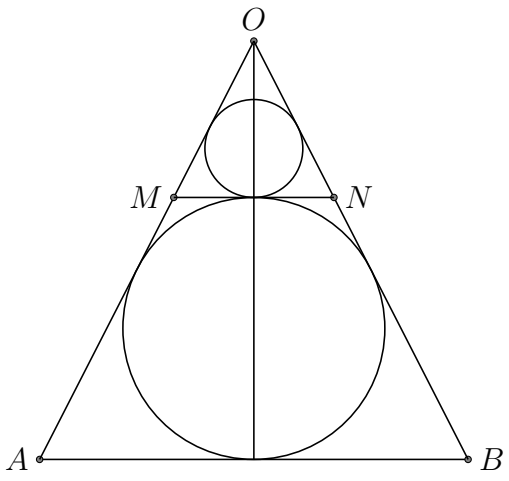


A. $\dfrac{112\pi}{3}$ cm^3. **B.** $\dfrac{40\pi}{3}$ cm^3. **C.** $\dfrac{38\pi}{3}$ cm^3. **D.** $\dfrac{100\pi}{3}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi AB là đường kính mặt nón, O là đỉnh, M, N lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến chung của hai mặt cầu và OA, OB (hình vẽ). Ta có tam giác OAB đều nên bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = \dfrac{1}{3}h = 3$. Tương tự, tam giác OMN đều, có chiều cao $h = 9 - 2r = 3$ nên có bán kính đường tròn nội tiếp $r' = \dfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$. Thế tích hai khối cầu bằng

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot r'^3 = \frac{112\pi}{3}.$$



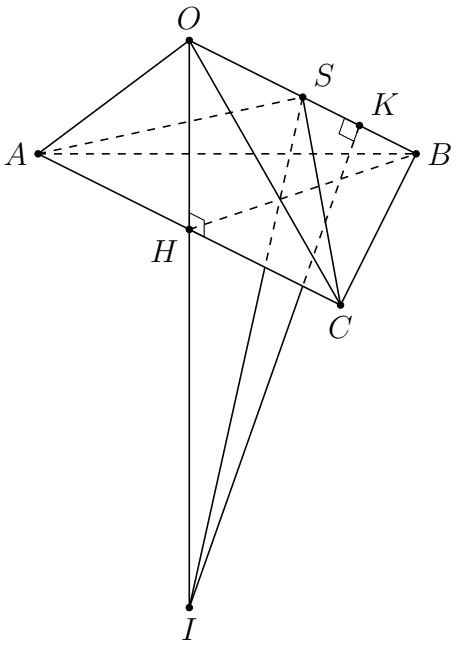
Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COA} = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm của OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $AB = a, BC = a\sqrt{2}, CA = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là trung điểm AC thì $HA = HB = HC$, mà $OA = OB = OC$ nên $OH \perp (ABC)$.
Ta có $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \dfrac{a}{2}$.
Trong mặt phẳng (OHB), gọi K là trung điểm SB và trung trực SB cắt đường thẳng OH tại I. Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.
Vì $\triangle OIK \backsim \triangle OBH \Rightarrow OI = \dfrac{OK \cdot OB}{OH} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow IH = a$.
Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $IA = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.



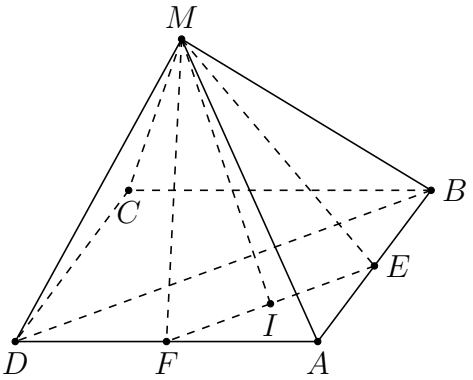
Chọn đáp án B □

Câu 79. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Điểm M thay đổi trong không gian sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} = 90°$. Biết rằng luôn tồn tại một đường tròn cố định đi qua M. Bán kính của đường tròn đó là

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm AB, AD, EF. Vì $\triangle AMB$, $\triangle AMD$ vuông tại M nên $ME = MF = \dfrac{a}{2}$.
Mà $EF = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $MI^2 = \dfrac{1}{2}(ME^2 + MF^2) - \dfrac{1}{4}EF^2 = \dfrac{a^2}{8} \Rightarrow MI = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Mà $MI \perp EF$ nên M nằm trên giao tuyến của mặt cầu tâm I, bán kính $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ và mặt phẳng đi qua I vuông góc với EF, giao tuyến này là một đường tròn cố định với tâm I, bán kính $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



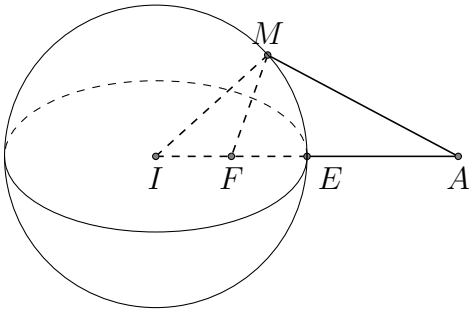
Chọn đáp án B □

Câu 80. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và các điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0)$ và có bán kính $R=2\sqrt{2}$. Ta có $IA=4\sqrt{2}=2R$.



Gọi E là giao điểm của IA với (S) ta có E là trung điểm của IA, $E(1;2;0)$.

Gọi F là trung điểm của IE, $F(0;3;0)$. Với $M\in(S)$, vì $\triangle IFM$ và $\triangle IMA$ có $\widehat{AIM}$ chung và có $\dfrac{IF}{IM}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{IM}{IA}$ nên $\triangle AIM\backsim\triangle MIF$.

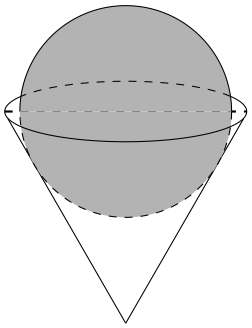
Từ đó ta có $MA=2MF$, $MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2FB=6\sqrt{2}$. (Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của FB và (S) do F nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S).)

Vậy $MA+2MB$ có giá trị nhỏ nhất bằng $6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 81.

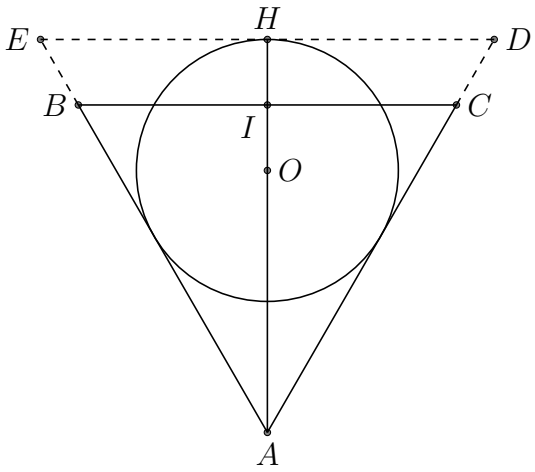
Một chiếc ly đựng nước giải khát có hình dạng (không kể chân ly) là hình nón như hình vẽ (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Biết rằng bán kính miệng ly bằng 5 cm, thiết diện qua trục là tam giác đều. Ban đầu chiếc ly chứa đầy nước, sau đó người ta bỏ vào ly một viên đá hình cầu có đường kính bằng $4\sqrt{3}$ cm . Gọi V cm^3 là lượng nước tràn ra ngoài. Chọn khẳng định đúng.



A. $50<V<75$.
B. $75<V<100$.
C. $100<V<150$.
D. $V>150$.

Lời giải.

Xét một thiết diện qua trục như hình vẽ. Vì đường tròn (O) có bán kính lớn hơn bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($R_{ABC}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}<4\sqrt{3}$) nên sau khi bỏ viên đá vào ly, nước trong ly không ngập hết viên đá. Ta tính được tam giác ADE ngoại tiếp đường tròn (O) có cạnh bằng 12 nên phần ngập nước có kích thước như hình vẽ.



Lượng nước tràn ra ngoài bằng thể tích phần viên đá ngập nước.

Ta có $IH=AH-AI=\dfrac{12\sqrt{3}}{2}-\dfrac{10\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Thể tích phần mặt cầu nằm ngoài ly là (công thức tính thể tích chỏm cầu)

$$\pi\cdot IH^2\cdot\left(R_{\text{viên đá}}-\frac{IH}{3}\right)=5\pi\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích nước tràn ra ngoài là

$$V_{\text{viên đá}}-V_{\text{chỏm cầu}}=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3-5\pi\sqrt{3}=32\pi\sqrt{3}-5\pi\sqrt{3}=27\pi\sqrt{3}\approx 146{,}91774\in(100;150).$$

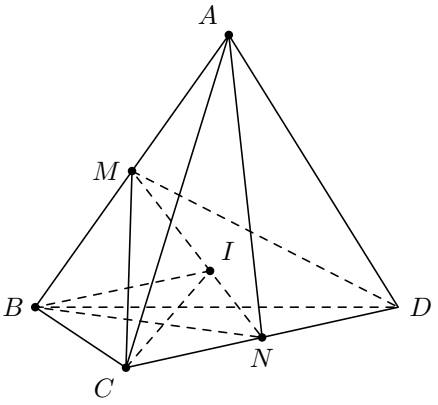
Chọn đáp án (C) □

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = BC = 8$, $AC = BD = 6$ và $CD = 4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\sqrt{\dfrac{187}{10}}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{\dfrac{177}{10}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{287}{30}}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD.



Xét hai tam giác ACD và BCD có

$BC = AD = 8$, $\quad BD = AC = 6$, $\quad CD$ chung $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$.

Suy ra, $AN = BN$ nên tam giác ANB cân tại N. Vậy MN là đường trung trực của đoạn AB.

Xét hai tam giác ABC và ABD có

$AB = AD = 8$, $\quad BD = AC = 6$, $\quad AB$ chung $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD$.

Suy ra, $CM = DM$ nên tam giác MCD cân tại M. Vậy MN là đường trung trực của đoạn CD.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, suy ra $I \in MN$. Đặt $IM = x$ với $x > 0$.

Xét tam giác ACD có $AD = 8$, $CD = 4$ và $AC = 6$ và AN là trung tuyến nên

$$AN^2 = \frac{2AC^2 + 2AD^2 - CD^2}{4} = \frac{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 - 4^2}{4} = 46 \Rightarrow AN = BN = \sqrt{46}.$$

Xét tam giác ANB có

$$MN^2 = \frac{2AN^2 + 2BN^2 - AB^2}{4} = \frac{4 \cdot 46 - 8^2}{4} = \frac{120}{4} = 30 \Rightarrow MN = \sqrt{30}.$$

Vì I là tâm của mặt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên

$$IB^2 = IC^2 \Rightarrow IM^2 + BM^2 = IN^2 + NC^2 \Rightarrow x^2 + 4^2 = \left(\sqrt{30} - x\right)^2 + 2^2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{30}}.$$

Khi đó, suy ra $IB^2 = x^2 + 4^2 = \dfrac{9^2}{30} + 16 = \dfrac{561}{30} \Rightarrow IB = \sqrt{\dfrac{187}{10}}$.

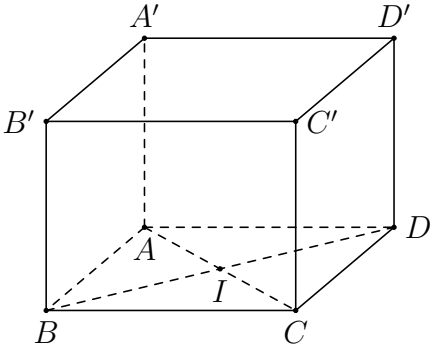
Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài chiều cao bằng h không đổi. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Biết rằng khi A, B, C, D di động thì $IA \cdot IC = IB \cdot ID = h^2$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $2h$. **B.** $\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. **C.** h. **D.** $\dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

• $IA \cdot IC = IB \cdot ID$ nên $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm K bán kính r. Ta có $IA \cdot IC = IB \cdot ID = r^2 - IK^2$ nên $r^2 = IK^2 + h^2$.



• Giả sử $(O; R)$ là mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ. Suy ra $OK \perp (ABCD)$ và $OK = \dfrac{1}{2}h$.

• Ta có $R^2 = r^2 + OK^2 = h^2 + IK^2 + \dfrac{1}{4}h^2 \geq \dfrac{5}{4}h^2 \Rightarrow R \geq \dfrac{h\sqrt{5}}{2}$.

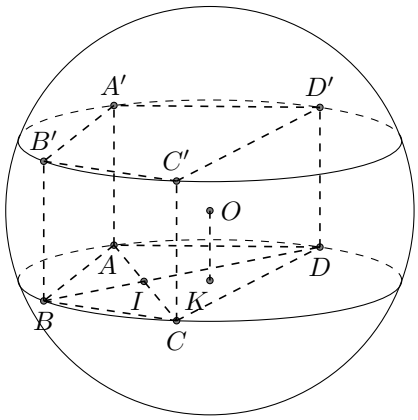
Dẳng thức xảy ra khi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Cho lăng trụ đứng có chiều cao bằng h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A, B, C, D di động. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA.IC = IB.ID = h^2$. Tính giá trị nhỏ nhất bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

A. $2h$. **B.** $\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. **C.** h . **D.** $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Do lăng trụ nội tiếp mặt cầu nên gọi $(K; r)$ là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$. Khi đó $IA \cdot IC = IB \cdot ID = r^2 - IK^2$. Suy ra $r^2 - IK^2 = h^2 \Rightarrow r^2 = h^2 + IK^2$.

Gọi $(O; R)$ là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ta có $R^2 = OA^2 + OK^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4} = \dfrac{5}{4}h^2 + IK^2 \geq \dfrac{5}{4}h^2 \Rightarrow R \geq \dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. Vậy $R_{\min} = \dfrac{h\sqrt{5}}{2}$ khi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Cho lăng trụ đứng có chiều cao bằng h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A, B, C, D di động. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA.IC = IB.ID = h^2$. Tính giá trị nhỏ nhất bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

A. $2h$. **B.** $\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. **C.** h . **D.** $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Do lăng trụ nội tiếp mặt cầu nên gọi $(K; r)$ là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$. Khi đó $IA \cdot IC = IB \cdot ID = r^2 - IK^2$. Suy ra $r^2 - IK^2 = h^2 \Rightarrow r^2 = h^2 + IK^2$.

Gọi $(O; R)$ là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ta có $R^2 = OA^2 + OK^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4} = \dfrac{5}{4}h^2 + IK^2 \geq \dfrac{5}{4}h^2 \Rightarrow R \geq \dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. Vậy $R_{\min} = \dfrac{h\sqrt{5}}{2}$ khi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60°$, $\widehat{BOC} = 90°$, $\widehat{COA} = 120°$. Gọi S là trung điểm OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

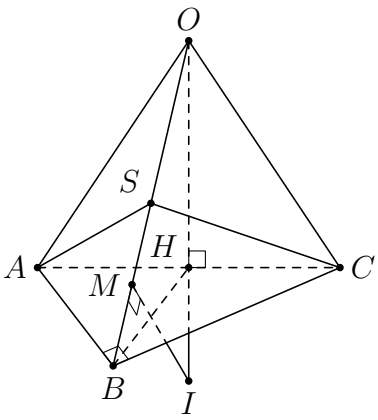
Lời giải.

Vì $\triangle OBC$ vuông tại O nên $BC = a\sqrt{2}$.
Vì $\triangle OAB$ cân có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Do đó $AB = a$.
Trong $\triangle OAC$, ta có:

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle ABC$ có

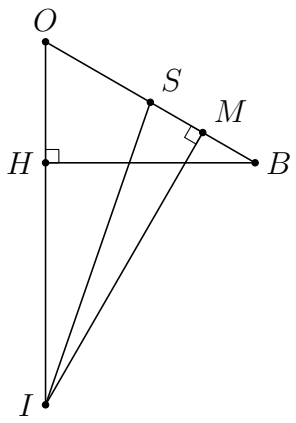
$$AB^2 + BC^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2 = BC^2.$$



Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B. Khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là trung điểm H của AC.

Mặt khác hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ nên $OH \perp (ABC)$ hay OH là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Trong mặt phẳng (OBH), dựng đường trung trực của SB cắt OH tại I, ta suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm I và bán kính $R = IS$.
Gọi M là trung điểm của SB, ta có $OM = \dfrac{3a}{4}$ và $OH = \dfrac{a}{2}$ nên $\widehat{HOB} = 60^\circ$.
Suy ra $MI = OM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó

$$R^2 = IS^2 = IM^2 + MS^2 = \frac{27a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$



Chọn đáp án C □

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABSI$, α là góc giữa đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC). Tính $\cos\alpha$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $\begin{cases} BA \perp SI \\ BA \perp CH \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SHC)$.

Trong (SCH) kẻ $CK \perp SH$ tại K, suy ra $CK \perp (SAB)$.

Vì $\triangle SBA$ vuông nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

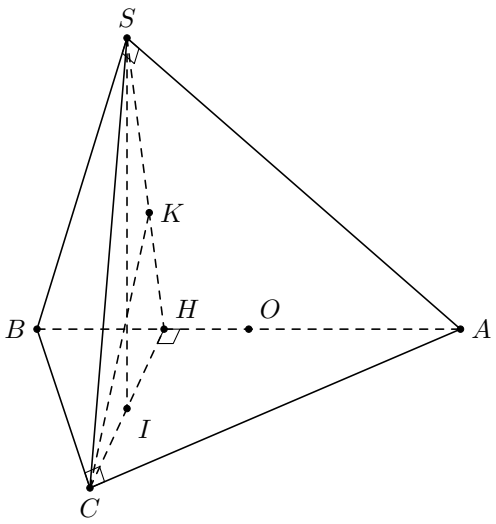
Suy ra $OO' \perp (SAB) \Rightarrow OO' \parallel CK$.

Suy ra góc α bằng góc giữa đường thẳng CK và (ABC) bằng góc $\widehat{KCH}$.

Có $SO = OC = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \triangle SOH = \triangle COH$.

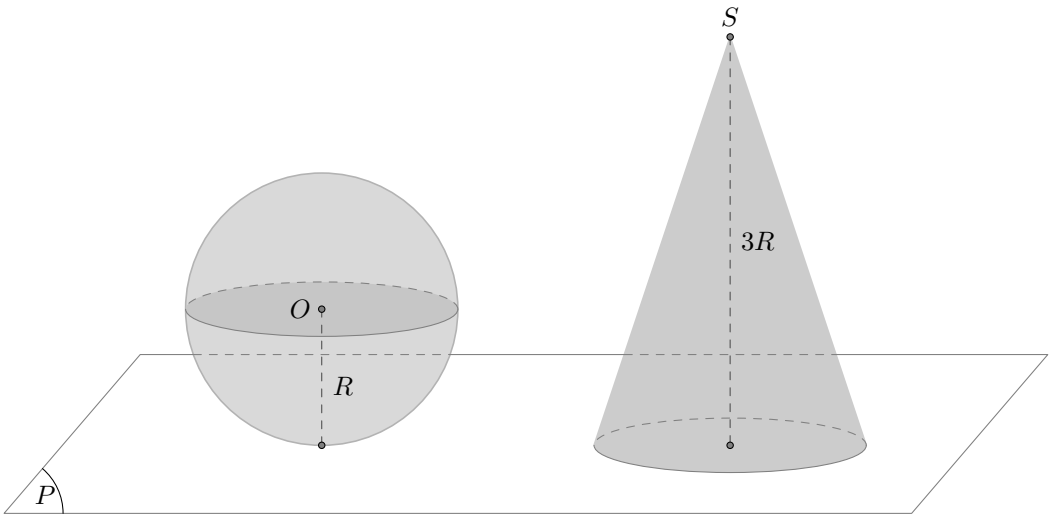
$\Rightarrow SH = CH$.

Suy ra $\triangle SCH$ đều suy ra $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 88. Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao $h = 15$, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q) $(0 < x \leq 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{b}$ $\left(\text{phân số } \dfrac{a}{b} \text{ tối giản}\right)$. Tính giá trị $T = a + b$.

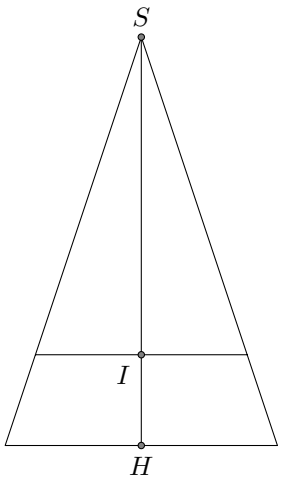


A. $T = 17$. **B.** $T = 19$. **C.** $T = 18$. **D.** $T = 23$.

Lời giải.

Vì $\mathrm{d}\left((P),(Q)\right)=x\in(0;5]\Rightarrow \mathrm{d}\left(O,(Q)\right)=R-x=5-x$ nên mặt cầu (S) sẽ cắt (Q) theo giao tuyến là đường tròn (C_1) có bán kính

$$R_{(C_1)}=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2\left(O,(Q)\right)}=\sqrt{25-(5-x)^2}.$$



Diện tích của hình tròn thiết diện là $S_{(C_1)}=\pi R_{(C_1)}^2=\pi\left[25-(5-x)^2\right]$.
Giả sử hình nón (N) có tâm đường tròn đáy là H và mặt phẳng (Q) cắt (N) theo giao tuyến là đường tròn (C_2) có tâm I. Theo định lí Thales ta có

$$\frac{SI}{SH}=\frac{R_{(C_2)}}{R_{(N)}}\Leftrightarrow\frac{h-x}{h}=\frac{R_{(C_2)}}{5}\Leftrightarrow R_{(C_2)}=\frac{15-x}{3}.$$

Diện tích của hình tròn thiết diện là $S_{(C_2)}=\pi R_{(C_2)}^2=\pi\left(\dfrac{15-x}{3}\right)^2$.
Tổng diện tích thiết diện là

$$S=S_{(C_1)}+S_{(C_2)}=\pi\left[25-(5-x)^2\right]+\pi\left(\frac{15-x}{3}\right)^2=\pi\left[-\frac{8}{9}\left(x-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{75}{2}\right]\le\frac{75\pi}{2}.$$

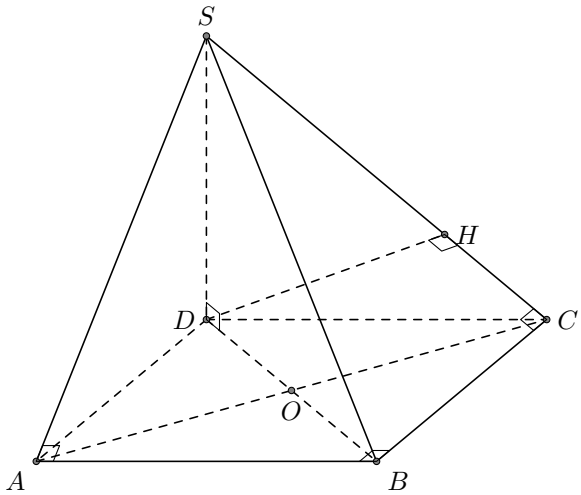
Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{15}{4}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. **B.** $18\sqrt{18}\pi a^3$. **C.** $6\sqrt{18}\pi a^3$. **D.** $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$ nên mặt cầu đường kính SB ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Gọi O là trung điểm của AC và D là điểm đối xứng với B qua O, ta có $ABCD$ là hình vuông.



Ta có $\begin{cases}AB\perp SA\\AB\perp AD\end{cases}\Rightarrow AB\perp SD$ và $\begin{cases}BC\perp SC\\BC\perp CD\end{cases}\Rightarrow BC\perp SD$.
Suy ra $SD\perp(ABCD)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên SC, ta có $DH\perp(SBC)$.
$\Rightarrow DH=\mathrm{d}\left(D,(SBC)\right)=\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)=2a\sqrt{3}$.
Tam giác SCD vuông tại D có đường cao DH nên

$$\frac{1}{SD^2}=\frac{1}{DH^2}-\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{12a^2}-\frac{1}{18a^2}=\frac{1}{36a^2}\Rightarrow SD=6a.$$

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC=AB\sqrt{2}=6a\Rightarrow DB=6a$.
Suy ra tam giác SDB vuông cân tại D nên $SB=DB\sqrt{2}=6a\sqrt{2}$.
Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R=3a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hìn chóp $S.ABC$ là

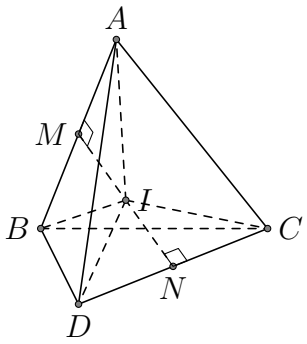
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu đã cho có bán kính bằng

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải.



Gọi A, B lần lượt là tâm các quả cầu bán kính bằng 2; C, D lần lượt là tâm các quả cầu bán kính bằng 3.
Gọi I, r lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu cần tìm.
Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu (A), (B), (C), (D) nên $IA = IB = r + 2$ và $IC = ID = r + 3$.
Vì $IA = IB$ nên I thuộc mặt phẳng (P)-trung trực của AB.
Tương tự I thuộc mặt phẳng (Q)-trung trực của CD.
Suy ra I thuộc giao tuyến của (P) và (Q).

Tứ diện $ABCD$ có $CA = CB = 5$ và $DA = DB = 5$ nên ta chứng minh được đường thẳng đi qua trung điểm M của AB và trung điểm N của CD là đường vuông góc chung của AB và CD.
Suy ra $MN = (P) \cap (Q)$. Từ đó, ta có $I \in MN$.
Trong tam giác vuông AMI, $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(r+2)^2 - 4}$.
Trong tam giác vuông CNI, $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(r+3)^2 - 9}$.
Trong tam giác cân ADC, sử dụng công thức đường trung tuyến ta tính được $AN = 4$.
Suy ra $BN = AN = 4$ và $MN = \sqrt{12}$.
Vậy ta có phương trình

$$\sqrt{(r+2)^2 - 4} + \sqrt{(r+3)^2 - 9} = \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{(r+2)^2 - 4} = \sqrt{12} - \sqrt{(r+3)^2 - 9}.$$

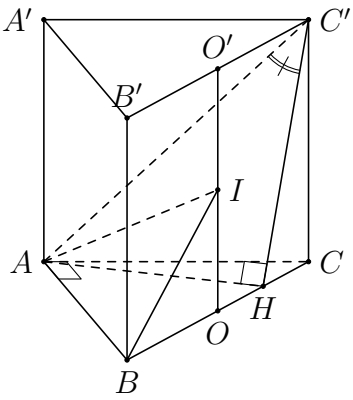
Bình phương hai vế và rút gọn ta được $\sqrt{12(r^2 + 6r)} = r + 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = \frac{6}{11} \\ r = -6 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
Thử lại, ta thấy $r = \frac{6}{11}$ là nghiệm của phương trình ban đầu. Kết luận: $r = \frac{6}{11}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 91. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

A. $3\pi a^2$. **B.** $24\pi a^2$. **C.** $6\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy của hình lăng trụ.
$\Rightarrow O$, O' là trung điểm BC, $B'C'$.
Dễ thấy OO' là trục của hai đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\Delta A'B'C'$.
Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C' \Rightarrow I$ là trung điểm của OO'.



Trong (ABC) kẻ $AH \perp BC \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} (ABC) \perp (BCC'B') \\ (ABC) \cap (BCC'B') = BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

Do đó: $(AC, (BCC'B')) = (AC', HC') = \widehat{AC'H} = 30^\circ$.

Xét $\triangle AHC'$ vuông tại H có: $\sin \widehat{AC'H} = \dfrac{AH}{AC'} \Leftrightarrow AC' = \dfrac{AH}{\sin \widehat{AC'H}} \Leftrightarrow AC' = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ACC'$ vuông tại C có: $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow OO' = CC' = a\sqrt{2} \Rightarrow OI = O'I = \dfrac{OO'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có: $BC = 2a \Rightarrow OB = OC = \dfrac{BC}{2} = a$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Xét $\triangle IBO$ vuông tại O có: $R = IB = \sqrt{OI^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $S = 4\pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh bằng 2, hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB} = 150^\circ$; $\widehat{BHC} = 120^\circ$; $\widehat{CHA} = 90^\circ$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$; $S.HBC$; $S.HCA$ bằng $\dfrac{124\pi}{3}$. Tính chiều cao SH của hình chóp.

A. $SH = \dfrac{4}{3}$. **B.** $SH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $SH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $SH = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$; $S.HBC$; $S.HCA$.
Gọi r_1, r_2, r_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHB; BHC; CHA và $h = SH$.

Ta có

$$R_i^2 = r_i^2 + \frac{h^2}{4} \ i = 1, 2, 3.$$

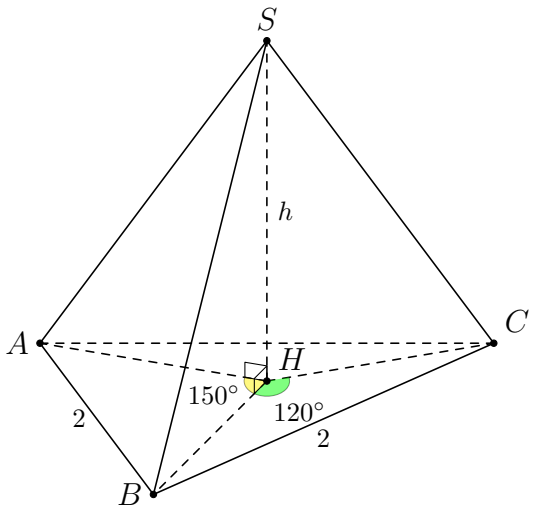
Theo giả thiết ta có $4\pi \sum\limits_{i=1}^{3} R_i^2 = \dfrac{124\pi}{3} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{3} R_i^2 = \dfrac{31}{3}$.

Vậy $\sum\limits_{i=1}^{3} r_i^2 + \dfrac{3h^2}{4} = \dfrac{31}{3}$ $(*)$.

Áp dụng định lý hàm số sin cho các tam giác AHB; BHC; CHA ta có:

$r_1 = \dfrac{AB}{2\sin \widehat{AHB}} = 2$, tương tự $r_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $r_3 = 1$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow \dfrac{19}{3} + \dfrac{3h^2}{4} = \dfrac{31}{3} \Leftrightarrow h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$, $BC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

A. $\dfrac{12\pi a^2}{7}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{7}$. **C.** $\dfrac{3\pi a^2}{7}$. **D.** $\dfrac{15\pi a^2}{7}$.

Lời giải.

Đặt $AC = 2x$. Gọi I là trung điểm AC, vì tam giác SAC cân tại S suy ra SI vuông góc với AC.

Do đó $SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp BI$.

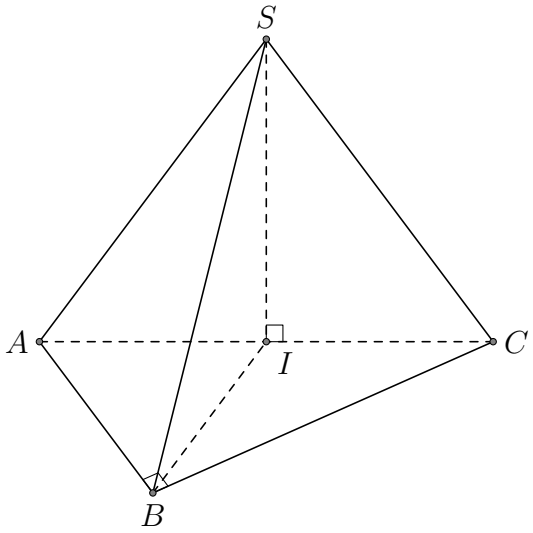
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác SAI ta được $SI^2 = a^2 - x^2$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác SBI ta được $BI = x$.

Do đó tam giác ABC vuông tại B.

Suy ra $AC = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} SI \cdot AC = \dfrac{a\sqrt{35}}{12}$.



Do $\triangle ABC$ vuông tại B và $(ABC) \perp (SAC)$ suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trên mặt phẳng (SAC). Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.

Mà ta có $S_{\triangle SAC} = \dfrac{SA \cdot SC \cdot AC}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{SA \cdot SC \cdot AC}{4S_{\triangle SAC}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ bằng $4\pi R^2 = \dfrac{12\pi a^2}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mp (P): $x+y+2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên một đường tròn cố

định. Tìm bán kính đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B**. $2\sqrt{3}$. **C**. $\sqrt{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;0)$, phương trình tham số của AB là $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1. \end{cases}$

Giao điểm của AB và (P) là $M(-1;-1;1)$. Ta tính được $MA=2\sqrt{2}$ và $MB=3\sqrt{2}$.

Xét phương tích của điểm M với mặt cầu (S) ta có $MH^2=MA\cdot MB=12$.

Suy ra $MH=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Vậy H thuộc đường tròn có bán kính $R=MH=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, CH vuông góc AB tại H, I là trung điểm của đoạn thẳng HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB}=90^\circ$. Gọi O là trung điểm của AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi OO' và (ABC) bằng

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 30°. **D**. 60°.

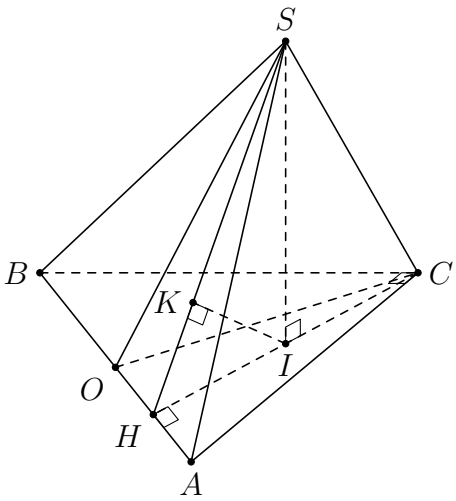
Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên SH.

Ta có $IK\perp SH$. (1)

Mặt khác, ta có

$$\begin{cases} AB\perp CH \\ AB\perp SI \end{cases}\Rightarrow AB\perp (SHI)\Rightarrow AB\perp IH. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $IK\perp (SAB)$.

$\triangle SAB$ vuông tại S nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua O và $\Delta\parallel IK$

$\Rightarrow \Delta\perp (SAB)$ tại O.

Suy ra Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Theo giả thiết O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$, suy ra $O'\in\Delta$. Do đó

$$\varphi=(OO',(ABC))=(\Delta,(ABC))=(IK,(ABC))=\widehat{KIH}.$$

Trong tam giác vuông SIH, ta có $\widehat{KIH}=\widehat{HSI}$.

$\triangle SHC$ có SI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle SHC$ cân tại S. Từ giả thiết, ta suy ra

- ☑ Tam giác CAB vuông tại C với CH là đường cao nên $CH^2=HA\cdot HB$.
- ☑ Tam giác SAB vuông tại S với SH là đường cao nên $SH^2=HA\cdot HB$.

Từ đó suy ra $SH=CH=SC$ nên $\triangle SHC$ đều.

Vậy $\varphi=\widehat{HSI}=30^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chiều cao mô hình dưới 2 mét. **B**. Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

C. Chiều cao mô hình không quá 1,5 mét. **D**. Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét.

Lời giải.

Gọi bán kính khối cầu dưới cùng là $R_1 = 50$ cm.

Gọi $R_2, R_3, \ldots, R_n$ lần lượt là bán kính của các khối cầu nằm nằm ngay trên khối cầu dưới cùng R_1.

Ta có $R_2 = \dfrac{R_1}{2}, R_3 = \dfrac{R_2}{2} = \dfrac{R_1}{4}, \ldots, R_n = \dfrac{R_{n-1}}{2} = \dfrac{R_1}{2^{n-1}}$

Gọi h_n là chiều cao của mô hình gồm có n khối cầu chồng lên nhau.

Ta có

$$\begin{aligned} h_n &= R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n \\ &= R_1 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{4}R_1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}R_1 \\ &= R_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Suy ra chiều cao mô hình là: $h = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[R_1\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\right]$.

Xét dãy số $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \ldots; \dfrac{1}{2^{n-1}}; \dfrac{1}{2^n}; \ldots$ là một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$ nên là dãy cấp số nhân lùi vô hạn.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}}\right) = 2.$

Vậy chiều cao mô hình là $h = 2 \cdot R_1 \cdot 2 = 200$ cm.

Chọn đáp án (A) □

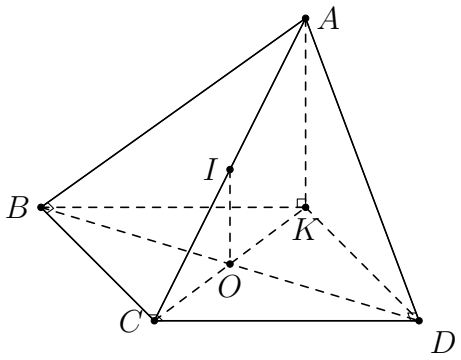
Câu 97. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = a$, $CD = a\sqrt{3}$, $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°. Tìm bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **B**. $a\sqrt{3}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. a.

Lời giải.

Gọi K là điểm thuộc mặt phẳng BCD sao cho tứ giác $BCDK$ là hình chữ nhật và O là tâm hình chữ nhật này.

I là trung điểm AC.



Ta có $\triangle ABC$ vuông tại B và $\triangle ACD$ vuông tại D lần lượt có BI và DI là đường trung tuyến, suy ra $IA = IB = IC = ID$ nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là I và bán kính là $R = \dfrac{AC}{2}$.

Từ $\begin{cases} OB = OC = OD \\ IB = IC = ID \end{cases}$ ta suy ra $IO \perp (BCD)$.

Lại có $AK \parallel IO$ (do OI là đường trung bình tam giác ACK) nên $AK \perp (BCD)$.

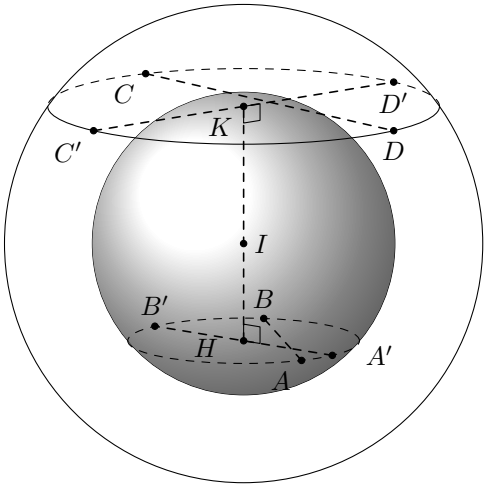
Ta có $BC \parallel KD$ nên $(BC; AD) = (KD; AD) = \widehat{ADK} = 60^\circ$.

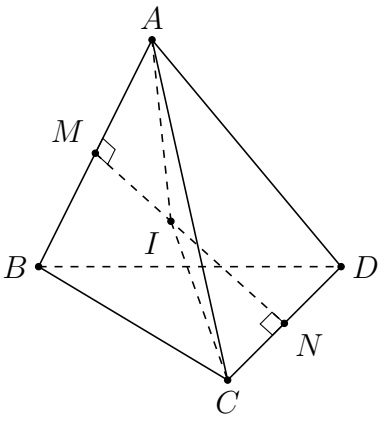
Suy ra $AK = DK\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Xét $\triangle ACK$ vuông tại K, ta có $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{AK^2 + BC^2 + CD^2} = a\sqrt{7}$.
Vậy $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm I, có bán kính lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $7\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải.





Dựng mặt phẳng (P) chứa AB và song song CD, cắt mặt cầu (I, R_1) theo giao tuyến là đường tròn tâm H.
Dựng mặt phẳng (Q) chứa CD và song song AB, cắt mặt cầu (I, R_2) theo giao tuyến là đường tròn tâm K.
Lần lượt dựng hai đường kính $A'B'$ của (H), $C'D'$ của (K) vuông góc nhau.
Khi đó, $HK = \mathrm{d}(AB, CD) = \mathrm{d}(A'B', C'D')$.
Ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) \le \frac{1}{6}A'B' \cdot C'D' \cdot HK = V_{A'B'C'D'}.$$

Do đó chỉ cần xét các tứ diện dạng $A'B'C'D'$.
Vậy điều kiện để V_{ABCD} lớn nhất là $AB \perp CD$.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Đặt $CN = x$, $AM = y$ với $x \in \left(0; \sqrt{10}\right]$, $y \in (0; 2]$.
Khi đó $IN = \sqrt{10 - x^2}$, $IM = \sqrt{4 - y^2}$, $\mathrm{d}(AB, CD) = MN = IN + IM = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$.
Do đó

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB, CD) = \frac{1}{6} \cdot 2x \cdot 2y\left(\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}\right) = \frac{2}{3}xy\left(\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}\right).$$

Ta có

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3}xy\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{10 - x^2}{2}} + \sqrt{1}\sqrt{4 - y^2}\right) \le \frac{2}{3}xy\sqrt{(2+1)\left(\frac{10 - x^2}{2} + 4 - y^2\right)}$$

$$\Rightarrow \quad V_{ABCD} \le \frac{2}{3}xy\sqrt{\frac{3}{2}\left[18-(x^2+2y^2)\right]} \le \frac{2}{3}xy\sqrt{\frac{3}{2}\left(18-2\sqrt{2}xy\right)} = \frac{2}{3}xy\sqrt{3\left(9-\sqrt{2}xy\right)}$$

$$\Rightarrow \quad V_{ABCD}^2 \le \frac{4}{9}(xy)^2\cdot 3\left(9-\sqrt{2}xy\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{xy}{\sqrt{2}}\cdot\frac{xy}{\sqrt{2}}\left(9-\sqrt{2}xy\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_{ABCD}^2 \le \frac{8}{3}\left(\frac{\frac{xy}{\sqrt{2}}+\frac{xy}{\sqrt{2}}+9-\sqrt{2}xy}{3}\right)^3 = \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{9}{3}\right)^3 = 72.$$

$$\Rightarrow \quad V_{ABCD} \le 6\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{10-x^2}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{1} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{2}} = 9-\sqrt{2}xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng $6\sqrt{2}$.

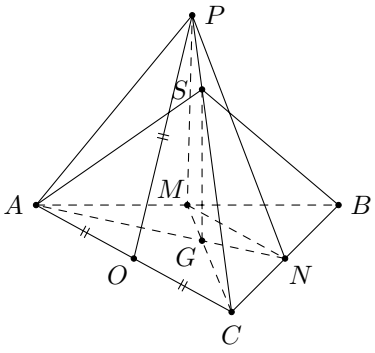
Chọn đáp án (D) □

Câu 99. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC và P là điểm thuộc tia đối của SC sao cho $SC = 3SP$. Biết rằng trong các mặt cầu đi qua A, M, N thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AMNP$ có bán kính nhỏ nhất. Tính chiều cao của hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{12}$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM = ON = OA = OC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $AMNC$. Đặt $SA = x$.



Do mặt cầu ngoại tiếp $P.AMN$ là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua $A, M, N \Rightarrow (AMN)$ là mặt phẳng kính $\Rightarrow O$ chính là tâm của mặt cầu $\Rightarrow OP = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $OP^2 = OC^2 + CP^2 - 2PC\cdot OC\cdot\cos\widehat{OCP}$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{16}{9}x^2 - 2\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{4x}{3}\cdot\dfrac{a}{2x} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là

$$SG = \sqrt{SC^2 - GC^2} = \sqrt{\frac{3}{8}a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}a}{12}.$$

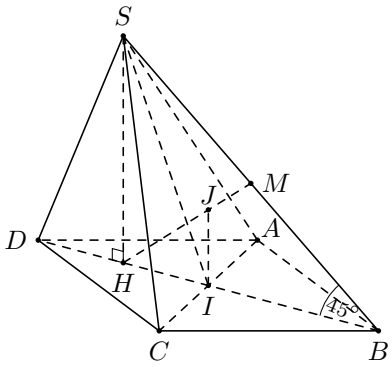
Vậy chiều cao của hình chóp bằng $\dfrac{\sqrt{6}a}{12}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID. Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{25\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{125\pi a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{125\pi a^2}{2}$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của ID và J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Ta có $SH \perp (ABCD)$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I nên $BD = 5a$, $HB = \dfrac{15a}{4}$, $HD = \dfrac{5a}{4}$.

Vì $(SB, (ABCD)) = 45^\circ \Rightarrow \widehat{SBH} = 45^\circ \Rightarrow SH = \dfrac{15a}{4}$.

$$SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{\left(\frac{15a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a}{4}\right)^2} = \frac{5a\sqrt{10}}{4}.$$

Ta có $IJ \perp (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel SH \Rightarrow J \in (SBD)$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD. Áp dụng định lý sin ta có

$$2R = \frac{SD}{\sin 45^\circ} = \frac{5a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R = \frac{5a\sqrt{5}}{4}.$$

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{125\pi a^2}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. A	5. D	6. B	7. A	8. B	9. B	10. C
11. B	12. A	13. B	14. A	15. D	16. D	17. C	18. D	19. D	20. B
21. B	22. C	23. C	24. B	25. D	26. A	27. A	28. D	29. D	30. A
31. D	32. B	33. A	34. A	35. A	36. D	37. A	38. C	39. A	40. A
41. C	42. C	43. D	44. C	45. C	46. B	47. B	48. A	49. B	50. D
51. A	52. A	53. B	54. D	55. B	56. D	57. B	58. A	59. D	60. A
61. B	62. C	63. C	64. B	65. B	66. A	67. D	68. B	69. D	70. C
71. B	72. D	73. B	74. C	75. C	76. A	77. A	78. B	79. B	80. B
81. C	82. A	83. B	84. B	85. B	86. C	87. B	88. B	89. D	90. C
91. C	92. C	93. A	94. B	95. C	96. A	97. A	98. D	99. D	100. B

5 Bài toán thực tế

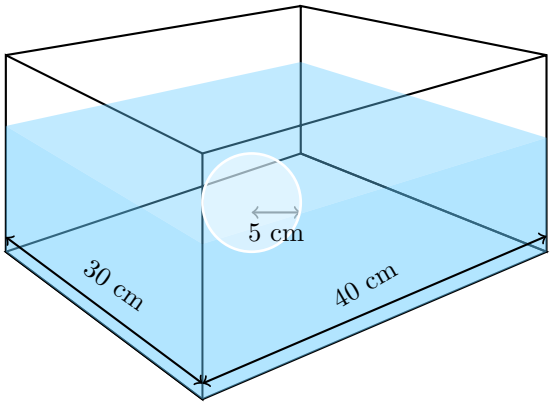
Câu 1. Cần xây một hồ cá có dạng hình hộp chữ nhật với đáy có các cạnh 40 cm và 30 cm. Để trang trí người ta đặt vào đó một quả cầu thủy tinh có bán kính 5 cm. Sau đó đổ đầy hồ 30 lít nước. Hỏi chiều cao của hồ cá là bao nhiêu cm? (Lấy chính xác đến chữ số thập phân thứ 2).

A. 25,66. **B**. 24,55. **C**. 24,56. **D**. 25,44.

Lời giải.

Thể tích hồ cá $V = 30\ 000 + \dfrac{4}{3}\pi 5^3 \approx 30\ 523{,}6\ \text{cm}^3$.

Chiều cao của hồ cá $h = \dfrac{V}{40 \cdot 30} \approx \dfrac{30\ 523{,}6}{1200} \approx 25{,}44$ cm.

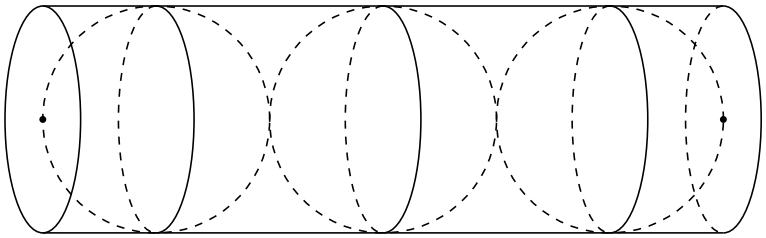


Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong một chiếc hộp hình trụ người ta bỏ vào đó ba quả bóng tennis. Biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả bóng và chiều cao của hình trụ bằng 3 lần đường kính của quả bóng. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng và S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số $k = \dfrac{S_1}{S_2}$.

A. $k = 1$. **B**. $k = 2$. **C**. $k = 3$. **D**. $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi r_1 là bán kính của quả bóng.

Gọi h, r_2 tương ứng là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề bài ta có: $h = 3 \cdot (2r_1) = 6r_1$ và $r_1 = r_2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_2 = 2\pi r_2 h = 2\pi r_1 \cdot 6r_1 = 12\pi r_1^2$.

Tổng diện tích của ba quả bóng là: $S_1 = 3 \cdot 4\pi r_1^2 = 12\pi r_1^2$.

Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{12\pi r_1^2}{12\pi r_1^2} = 1$.

Chọn đáp án A □

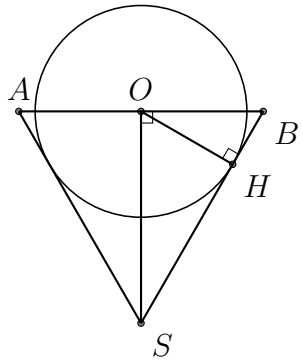
Câu 3. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là 18π. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. 24π. **B**. 18π. **C**. 6π. **D**. 36π.

Lời giải.

Thể tích nước tràn ra ngoài đúng bằng thể tích khối cầu chìm trong bình đựng nước. Gọi R là bán kính của khối cầu, ta có

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 18\pi \Leftrightarrow R^3 = 27 \Leftrightarrow R = 3.$$



Suy ra chiều cao bình đựng nước là $h = 2R = 6$.
Do khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón nên xét mặt cắt và các điểm như hình bên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow OB = 2\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích hình nón bằng $\frac{1}{3}\pi\cdot OB^2\cdot h = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot 6 = 24\pi$. Suy ra phần nước còn lại có thể tích là $24\pi - 18\pi = 6\pi$.
Chọn đáp án C □

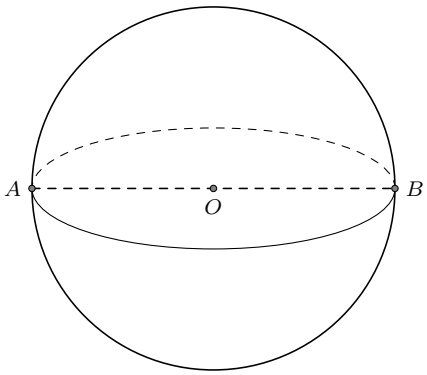
Câu 4. Tòa nhà Ericsson Globe (Thụy Điển) là tòa bán cầu lớn nhất thế giới, có hình dạng như một quả bóng màu trắng lớn, với đường kính khoảng 110 mét. Tòa nhà đã lắp đặt thang máy với tên gọi là Skyview, hệ thống thang máy hình cầu này được xây dựng ở bên ngoài tòa nhà. Giả sử nhà thiết kế đã thuê nhân công một công ty A để lắp đặt đường ray cho thang máy và sơn bên ngoài tòa nhà. Biết chi phí công lắp đặt đường ray cho thang máy là 10 đôla một mét dài (trên hình là hệ thống đường ray kép, có hai làn, nhưng khi tính tiền công thì tính chiều dài bằng chiều dài của một làn), công sơn một mét vuông bên ngoài tòa nhà cũng là 10 đôla. Coi tòa nhà là một hình bán cầu và độ dài đường ray tính bằng một nửa độ dài của đường tròn có bán kính bằng bán kính của hình cầu. Khi đó số tiền thuê nhân công trả cho công ty A xấp xỉ là bao nhiêu?

A. 3486277 đô la. **B**. 383588 đô la. **C**. 191794 đô la. **D**. 475165 đô la.

Lời giải.

Độ dài đường ray là nửa chu vi của đường tròn có đường kính 110 mét ta được $\pi R = 55\pi$.
Diện tích quét sơn là một nửa diện tích xung quanh của hình cầu đường kính 110 mét. Ta có $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi R^2 = 2\cdot 55^2\cdot\pi$.
Chi phí thực hiện toàn bộ công trình là

$$10\cdot 55\pi + 10\cdot 2\cdot 55^2\pi \approx 191794 \text{ đô la.}$$



Chọn đáp án C □

Câu 5. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. 1. **B**. 1,2. **C**. 2. **D**. 1,5.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của một quả bóng bàn.
Khi đó bán kính đáy của chiếc hộp hình trụ bằng cũng là R.
Tổng diện tích của ba quả bóng bàn là

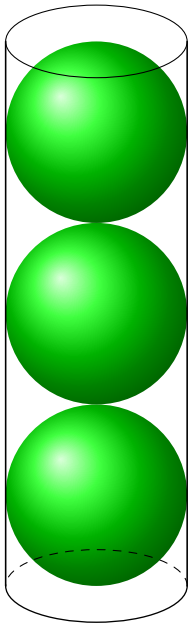
$$S_1 = 3 \cdot 4\pi R^2 = 12\pi R^2$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_2 = 2\pi R \cdot 6R = 12\pi R^2$$

Do đó

$$\frac{S_1}{S_2} = 1$$

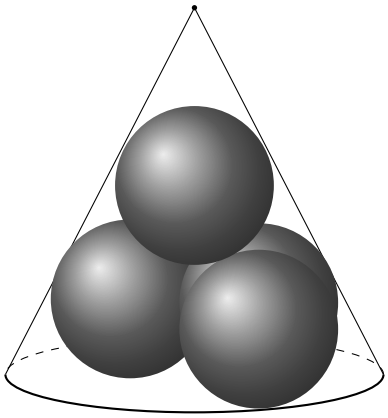


Chọn đáp án A □

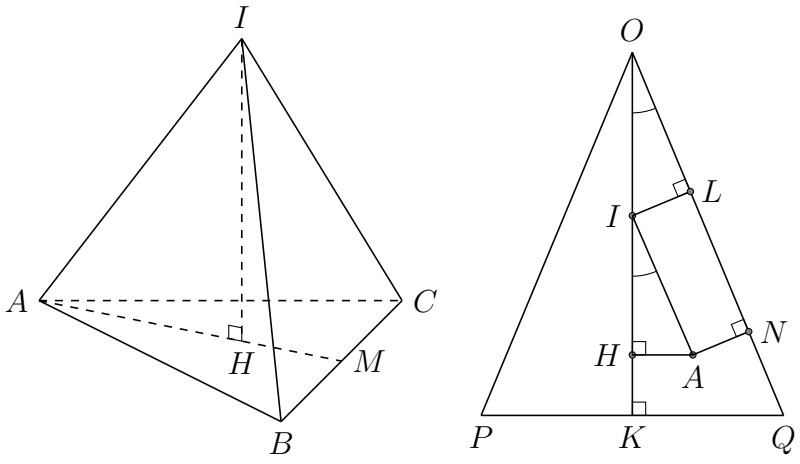
Câu 6.

Có hình nón có tính chất sau: Có bốn quả cầu bán kính r, trong đó có ba quả cầu tiếp xúc với nhau, tiếp xúc với mặt đáy đồng thời tiếp xúc với mặt xung quanh hình nón. Quả cầu thứ tư tiếp xúc với ba quả cầu kia và tiếp xúc với mặt xung quanh hình nón. Tìm chiều cao của hình nón theo r?

A. $\frac{r}{3}\left(3\sqrt{3}+3+2\sqrt{6}\right)$.
B. $\frac{r}{3}\left(\sqrt{3}+3+\sqrt{6}\right)$.
C. $\frac{r}{3}\left(3\sqrt{3}-3+2\sqrt{6}\right)$.
D. $\frac{r}{3}\left(3\sqrt{3}+3+\sqrt{6}\right)$.



Lời giải.



Giả sử $r = 1$.

- ☑ Gọi I, A, B, C lần lượt là tâm bốn quả cầu. Khi đó, $IABC$ là tứ diện đều cạnh bằng 2. Suy ra $IA = 2$, $AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $IH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ với H là chân đường cao của tứ diện đều $ABCD$ hạ từ đỉnh I.
- ☑ Gọi O là đỉnh của hình nón, PQ là đường kính của đường tròn đáy hình nón, K là trung điểm PQ. Gọi h là độ dài đường cao của hình nón. Khi đó, ta có $h = OI + IH + HK$.

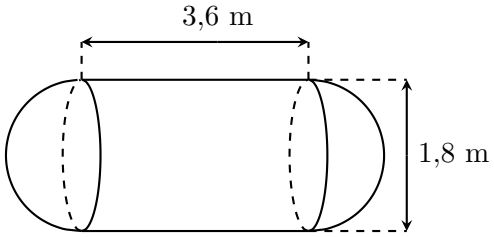
☑ Xét tam giác OLI và tam giác IHA có $\widehat{ILO} = \widehat{AHI} = 90^\circ$ và $\widehat{IOL} = \widehat{AIH}$ nên hai tam giác này đồng dạng. Suy ra $\dfrac{OI}{IA} = \dfrac{LI}{HA} \Rightarrow OI = IA \cdot \dfrac{LI}{HA} = 2 \cdot \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Vậy $h = \sqrt{3} + \dfrac{2\sqrt{6}}{3} + 1 = \dfrac{3\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{6}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7.

Một bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu có đường kính 1,8 m và một hình trụ có chiều cao bằng 3,6 m (như hình vẽ minh hoạ). Thể tích của bồn chứa gần nhất với kết quả nào sau đây?



A. 12,21 m^3. **B**. 3,05 m^3. **C**. 24,43 m^3. **D**. 9,16 m^3.

Lời giải.

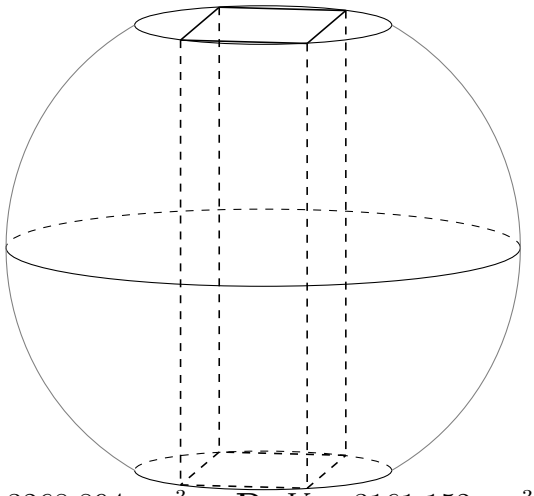
Thể tích bồn chứa bằng thể tích khối cầu có bán kính $R = 0{,}9$ m và khối trụ có $R = 0{,}9$ m, chiều cao $h = 3{,}6$ m.

Hay $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \pi \cdot R^2 \cdot h = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}9)^3 + \pi \cdot (0{,}9)^2 \cdot 3{,}6 \approx 12{,}21$ m^3.

Chọn đáp án A □

Câu 8.

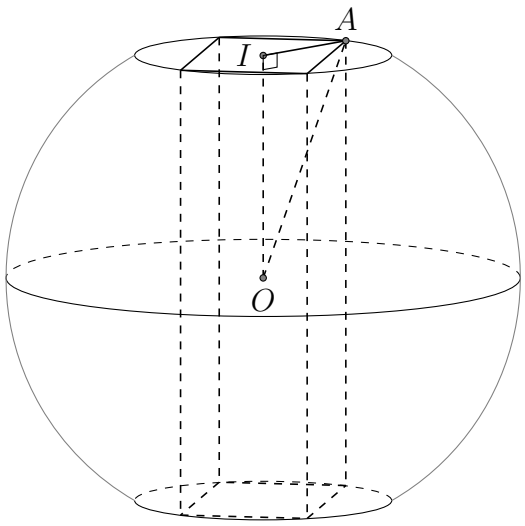
Có một khối cầu bằng gỗ bán kính $R = 10$ cm. Sau khi cưa bằng hai chỏm cầu có bán kính đáy bằng $\dfrac{R}{2}$ đối xứng nhau qua tâm khối cầu. Một người thợ mộc đục xuyên tâm khối cầu gỗ. Người thợ mộc đã đục bỏ đi phần hình hộp chữ nhật có trục của nó trùng với trục hình cầu và có hai mặt lần lượt nằm trên hai mặt phẳng chứa hai đáy của hai chỏm cầu; hai mặt này là hai hình vuông có đường chéo bằng R (tham khảo hình vẽ bên). Tính thể tích V của phần còn lại của khối cầu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).



A. $V = 3215{,}023$ cm^3. **B**. $V = 3322{,}765$ cm^3. **C**. $V = 3268{,}894$ cm^3. **D**. $V = 3161{,}152$ cm^3.

Lời giải.

Gọi O là tâm của khối cầu ban đầu, I là tâm của mặt đáy khối hộp.



Ta có chiều cao khối hộp là

$$h = 2OI = 2\sqrt{OA^2 - IA^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Thể tích của khối hộp chữ nhật là

$$V_{\text{hộp}} = h \cdot S_{\text{đáy}} = 10\sqrt{3} \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} = 500\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Thể tích của khối cầu ban đầu là

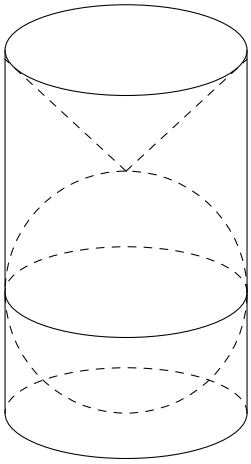
$$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Xét chỏm cầu trên được cắt ra, ta thấy đó là khối tròn xoay sinh ra khi xoay cung tròn $x^2+y^2=100$, với $0 \le x \le 5$, $5\sqrt{3} \le y \le 10$, quanh trục Oy, nên ta suy ra thể tích của chỏm cầu trên là $V_{\text{chỏm cầu}} = \pi \displaystyle\int_{5\sqrt{3}}^{10} \left(100-y^2\right) \mathrm{d}y \approx 53{,}871 \text{ cm}^3$. Vậy thể tích cần tìm là $V = V_{\text{cầu}} - V_{\text{hộp}} - 2V_{\text{chỏm cầu}} \approx 3215{,}023 \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 9.

Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).



A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

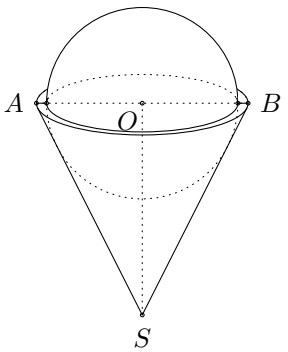
Lời giải.

Gọi bán kính hình trụ là R, suy ra chiều cao hình trụ là $h = 3R$.
Do đó chiều cao của khối nón là $h_1 = h - 2R = R$.
Thể tích khối cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Thể tích của khối nón là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi h_1 R^2 = \dfrac{1}{3}\pi R^3$.
Thể tích khối trụ là $V_3 = \pi R^2 h = 3\pi R^3$.
Thể tích nước tràn ra là $V' = V_1 + V_2 = \dfrac{5}{3}\pi R^3$.
Thể tích nước còn lại là $V'' = V_3 - V' = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Tỉ số cần tìm là $\dfrac{V''}{V'} = \dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án C □

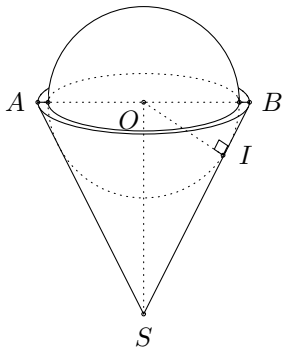
Câu 10. Một bình đựng đầy nước có dạng hình nón (không có đáy). Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là 18π dm^3. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. 24π dm^3.
B. 12π dm^3.
C. 6π dm^3.
D. 4π dm^3.



Lời giải.

Đặt $OS = 2x, (x > 0)$, chiều cao của hình nón là $h = 2x$, bán kính khối cầu là $R = x$.



Thể tích phần nước tràn ra là $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3} = 18\pi \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$ dm.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên $SB \Rightarrow R = OI$, ta có

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{4R^2} = \frac{1}{12}.$$

Suy ra ta có $OB = 2\sqrt{3}$ dm.

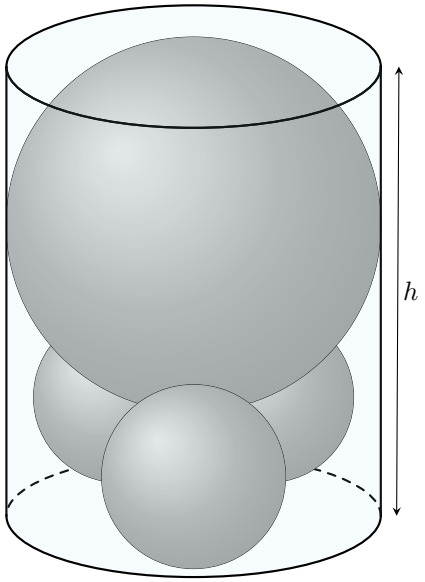
Thể tích của cốc là $V = \dfrac{1}{3}\pi OB^2 \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 6 = 24\pi$ dm^3.

Do vậy, thể tích nước còn lại bằng $24\pi - 18\pi = 6\pi$ dm^3.

Chọn đáp án C □

Câu 11.

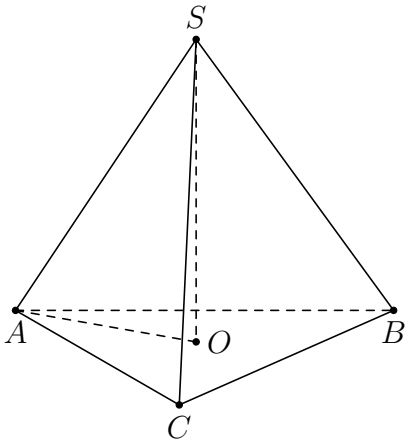
Cho một cái bình hình trụ chứa 4 quả cam dạng hình cầu, trong đó có 3 quả cam nhỏ cùng bán kính và 1 quả cam to có bán kính R. Biết 3 quả cam nhỏ đôi một tiếp xúc nhau, mỗi quả cam này đều tiếp xúc với đáy bình và tiếp xúc với một đường sinh của bình; quả cam to còn lại đồng thời tiếp xúc với 3 quả cam nhỏ, tiếp xúc với các đường sinh của bình và tiếp xúc với mặt nắp của bình (bỏ qua bề dày của ly, hình mô tả như hình vẽ). Chiều cao h của bình bằng

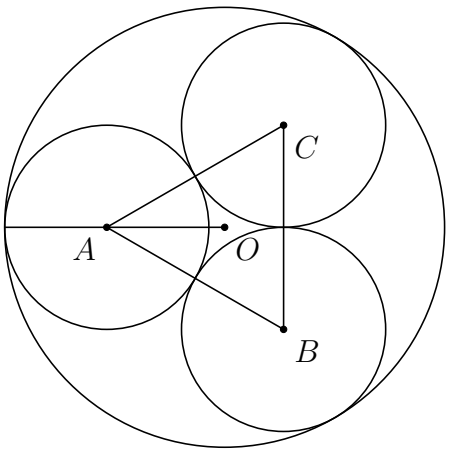


A. $h = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2$. **B**. $h = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}-1\right)^2$.

C. $h = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+1\right)^2$. **D**. $h = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}-1\right)^2$.

Lời giải.





Gọi S, A, B, C lần lượt là tâm của hình cầu lớn và 3 hình cầu nhỏ.

Ta có $\begin{cases} SA = R + r \\ AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r \\ R = AO + r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = (-3 + 2\sqrt{3})R \\ SA = (-2 + 2\sqrt{3})R \\ AO = (4 - 2\sqrt{3})R. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} SO^2 &= SA^2 - AO^2 \\ &= R^2\left[\left(-2+2\sqrt{3}\right)^2 - \left(4-2\sqrt{3}\right)^2\right] \\ &= R^2(-12+8\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Chiều cao của bình $h = R\left[\sqrt{(-12+8\sqrt{3})} + (-3+2\sqrt{3}) + 1\right] = R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là 68,5 (cm). Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích 49,83 (cm^2). Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

A. 40. **B**. 20. **C**. 35. **D**. 30.

Lời giải.

Thiết diện qua tâm là một đường tròn có chu vi là 68,5 (cm) nên bán kính của quả bóng là

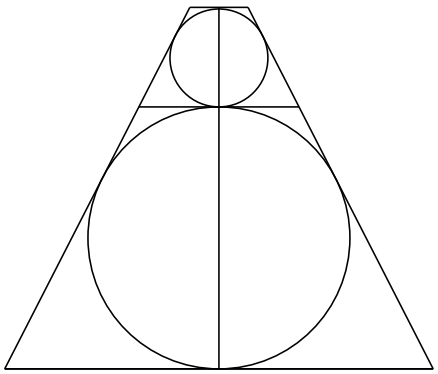
$$R = \frac{68{,}5}{2\pi} \approx 10{,}902 \text{ (cm)}.$$

Diện tích bề mặt của quả bóng là $4\pi R^2 = 1493{,}59$ (cm^2).
Số miếng da ít nhất cần là $\dfrac{1493{,}59}{49{,}83} \approx 29{,}974$.
Vậy số miếng da ít nhất cần để làm quả bóng là 30 miếng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.

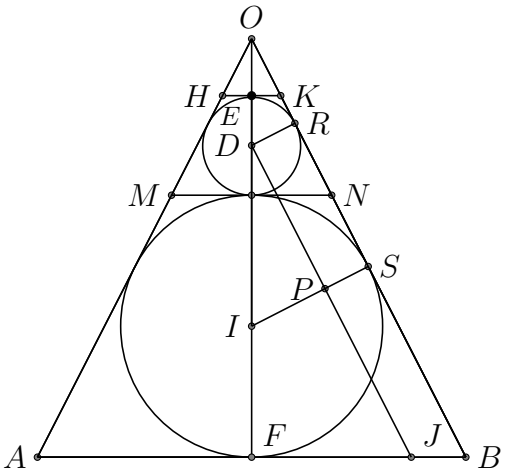
Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục của nó là một hình thang cân (xem hình vẽ). Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3$ cm, $r = 1$ cm tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với mặt xung quanh của (N) đồng thời hai khối cầu lần lượt tiếp xúc với hai mặt đáy của (N). Tính thể tích của vật lưu niệm đó.



A. $\dfrac{485\pi}{6}$ cm^3. **B**. 81π cm^3. **C**. 72π cm^3. **D**. $\dfrac{728\pi}{9}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi tâm của hai đường tròn trong (N) là I và D.
Ta có OB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại R và S. Khi đó $\begin{cases} DR \perp OB \\ IS \perp OB. \end{cases}$
Kẻ $DJ \parallel OB$ $(J \in AB)$. khi đó $DPSR$ là hình chữ nhật nên $PS = DR = 1$ cm, do đó ta có $IP = 2$ cm.



Ta có ΔDPI đồng dạng với ΔORD nên $\dfrac{DR}{IP} = \dfrac{OD}{DI} \Rightarrow OD = \dfrac{DR \cdot DI}{IP} = \dfrac{1 \cdot 4}{2} = 2$ cm. Từ đó suy ra $OF = 9$ cm.
Ta lại có ΔDPI đồng dạng với ΔOFB nên $\dfrac{OB}{DI} = \dfrac{OF}{DP} \Rightarrow OB = \dfrac{OF \cdot DI}{DP} = \dfrac{OF \cdot DI}{\sqrt{DI^2 - IP^2}} = 6\sqrt{3}$ cm. Từ đó suy ra $BF = \sqrt{OB^2 - OF^2} = 3\sqrt{3}$ cm.
Ta có ΔOEK đồng dạng với ΔOFB nên

$$\frac{EK}{FB} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow EK = \frac{OE \cdot FB}{OF} = \frac{1 \cdot 3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Vì (N) là khối nón cụt nên có thể tích là

$$V_N = \frac{\pi}{3}\left(EH^2 + FA^2 + EH \cdot FA\right) EF = \frac{728\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

Cách khác Xét phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$ thì khối cầu (I) sẽ biến thành khối cầu (D). Khi đó $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow 3(OE + 1) = OE + 5$ hay $x = 1$.
Trong tam giác vuông ODR tại R có $OD = 2 = 2OR$ suy ra $\widehat{DOR} = 30^\circ$. Do đó $\widehat{HOK} = 60^\circ$.
Khi đó $HK = \dfrac{2OE}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Vì $\mathrm{V}_{\left(O,\frac{1}{3}\right)}(MN) = HK$ và $\mathrm{V}_{\left(O,\frac{1}{3}\right)}(AB) = MN$ nên $AB = 3MN = 9HK = 6\sqrt{3}$.
Vì (N) là khối nón cụt nên có thể tích là

$$V_N = \frac{\pi}{3}\left(EH^2 + FA^2 + EH \cdot FA\right) EF = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(3\sqrt{3}\right)\right] 8 = \frac{728\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. C	5. A	6. A	7. A	8. A	9. C	10. C
11. A	12. B	13. D							

CHƯƠNG 3

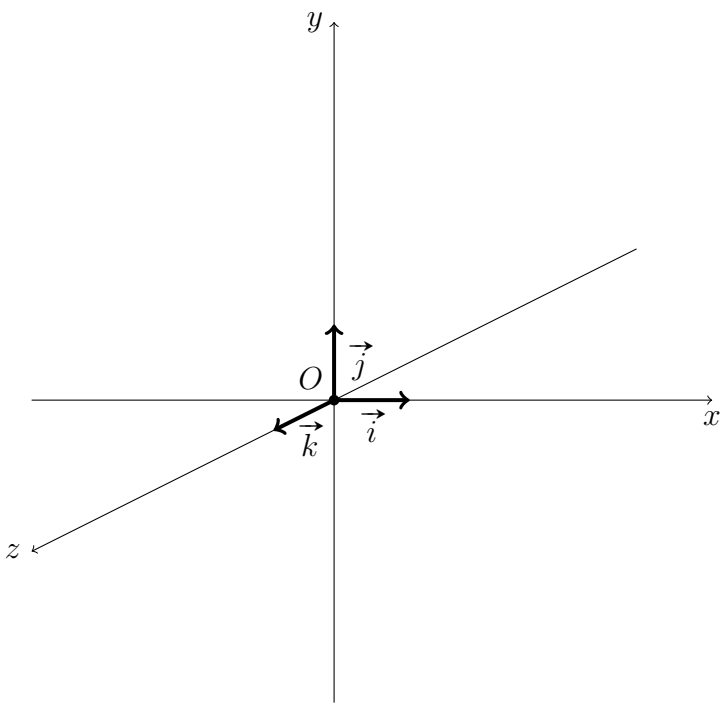
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1 HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Tọa độ của điểm và véc-tơ

Hệ tọa độ



- Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- Trục Ox gọi là trục hoành; Trục Oy gọi là trục tung; Trục Oz gọi là trục cao.
- Các mặt phẳng chứa hai trục tọa độ gọi là các mặt phẳng tọa độ. Ta kí hiệu chúng lần lượt là (Oxy), (Oyz), (Ozx).
- véc-tơ đơn vị của trục Ox, Oy, Oz lần lượt là: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Các véc tơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau và có độ dài bằng 1:

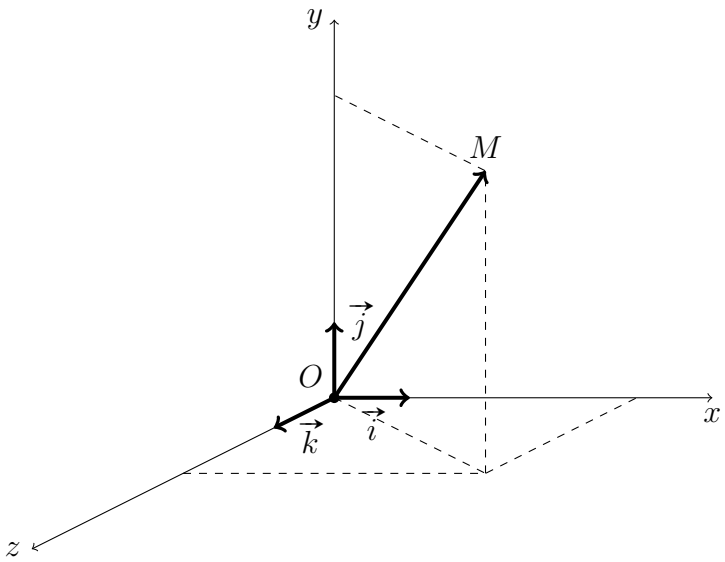
$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

Tọa độ của một điểm

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M tùy ý. Vì ba véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ số duy nhất $(x;y;z)$ sao cho:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}}$$



Ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M. Ký hiệu:

$$\boxed{M\,(x;y;z) \text{ hoặc } M = (x;y;z)}$$

Đặc biệt:

- ☑ Gốc $O\,(0;0;0)$
- ☑ M thuộc $Ox \Leftrightarrow M\,(x_M;0;0)$
- ☑ M thuộc $Oy \Leftrightarrow M\,(0;y_M;0)$
- ☑ M thuộc $Oz \Leftrightarrow M\,(0;0;z_M)$
- ☑ M thuộc $(Oxy) \Leftrightarrow M\,(x_M;y_M;0)$
- ☑ M thuộc $(Oyz) \Leftrightarrow M\,(0;y_M;z_M)$
- ☑ M thuộc $(Oxz) \Leftrightarrow M\,(x_M;0;z_M)$

Tọa độ của véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm véc-tơ $\vec{a}$. Khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ sao cho:

$$\vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ là tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$. Ký hiệu: $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

- ☑ Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ của điểm M cũng chính là tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$
- ☑ $\vec{i} = (1;0;0)$; $\vec{j} = (0;1;0)$; $\vec{k} = (0;0;1)$

2 Biểu thức tọa độ của các phép toán véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó

Định lí 1.

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k.\vec{a} = (k.a_1; k.a_2; k.a_3)$ *(k là số thực)*

Hệ quả 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ khi đó

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}}$$

- Với hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)}$$

- véc-tơ $\vec{0} = (0; 0; 0)$.
- véc-tơ $\vec{u}$ được gọi là biểu diễn (hoặc phân tích) theo ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nếu có hai số x, y, z sao cho $\vec{u} = x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}$.
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \exists k \neq 0 : \vec{a} = k.\vec{b} \end{cases}$ hay $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ (với $\vec{b} \neq \vec{0}$)
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
- Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

3 Tích vô hướng

Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Định lí 2. *Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là :*

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}$$

hay

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}$$

Ứng dụng

a) Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ là:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

b) Khoảng cách giữa hai điểm A và B:

$$\boxed{AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

c) Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn

$$\boxed{\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}}$$

d) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0.$

4 Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ bán kính R là:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$$

Phương trình:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

5 Một số yếu tố trong tam giác

Xét tam giác ABC, ta có:

- ☑ H là chân đường cao hạ từ A của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC} \end{cases}$.
- ☑ AD là đường phân giác trong của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$.
- ☑ AE là đường phân giác ngoài của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.
- ☑ H là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$.
- ☑ I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IB}\right| \\ \left|\overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IC}\right| \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$.

DẠNG 1. Sự cùng phương của hai véc-tơ. Ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải.

① Hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ (với $\vec{a}\neq\vec{0}$) cùng phương với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{b}=k\vec{a}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=ka_1\\b_2=ka_2\\b_3=ka_3\end{cases}$$

Nếu $a_1\cdot a_2\cdot a_3\neq 0$ thì hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$$

② Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực k sao cho

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a}=(5;-7;2)$, $\vec{b}=(0;3;4)$, $\vec{c}=(-1;2;3)$. Tìm tọa độ các véc-tơ $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$.

Lời giải.

☑ Ta có $\begin{cases}2\vec{a}=(10;-14;4)\\-\vec{b}=(0;-3;-4)\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}=(10;-17;0)$. Vậy $\vec{u}=(10;-17;0)$.

☑ $\begin{cases}3\vec{a}=(15;-21;6)\\4\vec{b}=(0;12;16)\\2\vec{c}=(-2;4;6)\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}=(13;-7;28)$. Vậy $\vec{v}=(13;-7;28)$.

□

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=-\frac{3}{2}\vec{i}+\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w}=6\vec{i}+m\vec{j}-n\vec{k}$.

① Chứng minh $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

② Tìm m và n để véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(3;-2;1)$, $\vec{v}=\left(-\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$, $\vec{w}=(6;m;-n)$.

① Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\vec{v}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}=3k\\1=-2k\\-\frac{1}{2}=k\end{cases}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$$

Như vậy $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{u}$ nên hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

② Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\vec{w} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3k \\ m = -2k \\ -n = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = -4 \\ n = -2 \end{cases}$$

Như vậy $m = -4$ và $n = -2$ thì hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương. Khi đó $\vec{w} = (6; -4; 2)$.

□

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$, véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ và $\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{6}$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$.

Lời giải.

Vì véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{b} = k\vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (2k; k; -k)$.

Ta có $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(2k)^2 + (k)^2 + (-k)^2} = |k|\sqrt{6}$.

Nên $\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow |k|\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = \pm 2$.

☑ Với $k = 2$ thì $\vec{b} = (4; 2; -2)$.

☑ Với $k = -2$ thì $\vec{b} = (-4; -2; 2)$.

□

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A = (1; -1; 0)$, $B = (3; -4; 1)$, $C = (-2; 0; 1)$.

① Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

② Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

③ Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng AB với mặt phẳng tọa độ Oyz.

Lời giải.

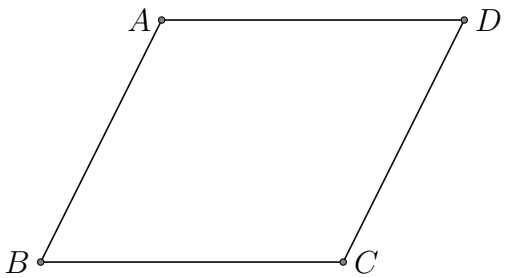
① Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 1; 1)$. Vì $\dfrac{2}{-3} \neq \dfrac{-3}{1}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng, nên ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

②

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x_D = 2 \\ 0 - y_D = -3 \\ 1 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 3 \\ z_D = 0 \end{cases}$$



Vậy $D(-4; 3; 0)$

③ Vì E thuộc mặt phẳng Oyz nên $E = (0; y; z)$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = (-1; y + 1; z)$.

Mặt khác A, B, E thẳng hàng nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2k \\ y + 1 = -3k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $E=\left(0;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

□

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ biết $A(0;1;3)$, $B(-1;2;1)$, $B'(-2;1;0)$, $C'(5;3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A' và C.

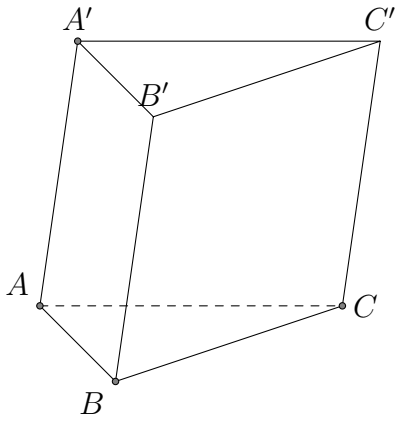
Lời giải.

☑ Ta có: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}-0=-2-(-1) \\ y_{A'}-1=1-2 \\ z_{A'}-3=0-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}=-1 \\ y_{A'}=0 \\ z_{A'}=2 \end{cases}$.

Vậy: $A'=(-1;0;2)$.

☑ Ta có: $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x_C=-2-(-1) \\ 3-y_C=1-2 \\ 2-z_C=0-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=6 \\ y_C=4 \\ z_C=3 \end{cases}$.

Vậy: $C=(6;4;3)$.



□

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho $S=MA+MB$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta thấy $x_A=2>0$, $x_B=4>0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oyz).

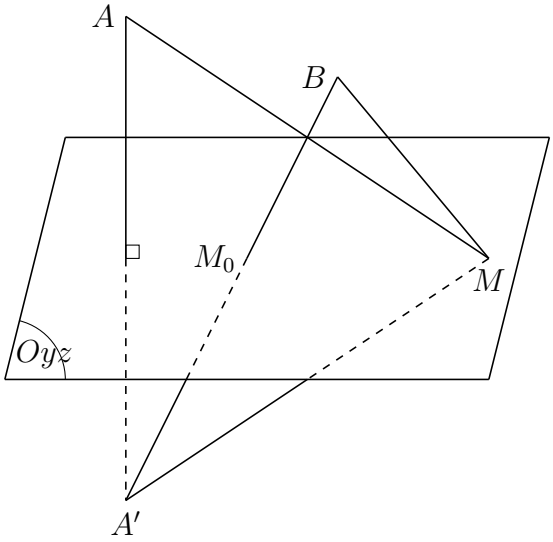
Gọi $A'(-2;1;3)$ là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oyz), ta có:

$$S=MA+MB=MA'+MB\geq A'B=\sqrt{(4+2)^2+(2-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{41}$$

Như vậy $\min S=\sqrt{41}$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với mặt phẳng (Oyz). Khi đó ba điểm A', B, M thẳng hàng. Vì $M\in(Oyz)$ nên $M=(0;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{A'B}=(6;1;-2)$ và $\overrightarrow{BM}=(-4;y-2;z-1)$.

Ba điểm A', B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=6k \\ y-2=k \\ z-1=-2k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \\ z = \dfrac{7}{3} \end{cases}$. Vậy: $M = \left(0; \dfrac{4}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a} = (5;1;2)$, $\vec{b} = (3;0;4)$, $\vec{c} = (-6;1;-1)$. Tìm tọa độ các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{c}$, $\vec{v} = \vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

Lời giải.

☑ Ta có $\begin{cases} 3\vec{a} = (15;3;6) \\ -2\vec{c} = (12;-2;2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (27;1;8)$. Vậy $\vec{u} = (27;1;8)$.

☑ $\begin{cases} \vec{a} = (5;1;2) \\ -3\vec{b} = (-9;0;-12) \\ 4\vec{c} = (-24;4;-4) \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} = (-28;5;-14)$. Vậy $\vec{v} = (-28;5;-14)$.

□

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-3;4)$.

① Tìm y, z để vec-tơ $\vec{b} = (2;y;z)$ cùng phương với $\vec{a}$.

② Tìm $\vec{c}$ biết $\vec{c}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $|\vec{c}| = 3\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

Lời giải.

① Véc-tơ $\vec{b} = (2;y;z)$ cùng phương với véc-tơ $\vec{a}$ khi và chỉ khi

$$\vec{b} = k\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ y = -3k \\ z = 4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ y=-6 \\ z=8 \end{cases}.$$

Vậy $y=-6$, $z=8$, hay $\vec{b}=(2;-6;8)$.

② Vì $\vec{c}$ ngược hướng với $\vec{b}$ nên $\vec{c}=k\vec{b}$ với $k<0$. Như vậy $\vec{c}=(2k;-6k;8k)$, nên $|\vec{c}|=\sqrt{(2k)^2+(-6k)^2+(8k)^2}=2\sqrt{26}\cdot|k|$.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(3;-9;12)\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+(-9)^2+12^2}=3\sqrt{26}$.

Bởi vậy:

$|\vec{c}|=3\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\Leftrightarrow 2\sqrt{26}\cdot|k|=3\sqrt{26}\Leftrightarrow k=\pm\dfrac{3}{2}$.

Vì $k<0$ nên $k=-\dfrac{3}{2}$. Như vậy: $\vec{c}=(-3;9;-12)$.

□

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;-2)$, $B(0;-1;3)$, $C(m;n;8)$ (với m, n là tham số). Tìm m, n để ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;5)$, $\overrightarrow{AC}=(m-1;n-3;10)$. Điều kiện để ba điểm A,B,C thẳng hàng là hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, điều này tương đương với

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases} m-1=-k \\ n-3=-4k \\ 10=5k \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=-1 \\ n=-5 \\ k=2 \end{cases}$$

Vậy: $m=-1$, $n=-5$. □

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-2;1)$.

① Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

② Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.

③ Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz).

Lời giải.

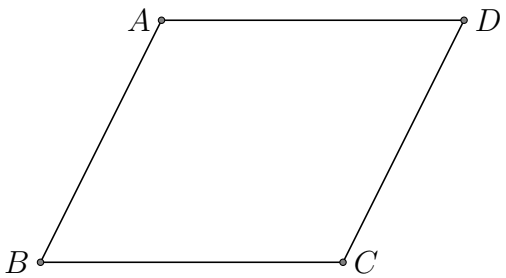
① Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1;-1)$. Vì $\dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{-3}{-1}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

②

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases} 4-x_D=-2 \\ -2-y_D=3 \\ 1-z_D=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_D=6 \\ y_D=-5 \\ z_D=0 \end{cases}$$



Vậy $D(6;-5;0)$.

③ Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên $E=(x;0;z)$.
Ta có $\overrightarrow{AE}=(x-3;1;z-2)$.
Mặt khác A,B,E thẳng hàng nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=-2k\\1=3k\\z-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\k=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

Vậy $E=\left(\dfrac{7}{3};0;\dfrac{7}{3}\right)$.

□

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$; $\overrightarrow{BC}=(-1;-3;3)$; $\overrightarrow{AM}=(x-1;y;z+2)$; $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$.

Từ đó: $\begin{cases}2\overrightarrow{AB}=(2;2;2)\\3\overrightarrow{BC}=(-3;-9;9)\\-\overrightarrow{OM}=(-x;-y;-z)\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OM}=(-1-x;-7-y;11-z)$.

Nên: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-1-x\\y=-7-y\\z+2=11-z\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\dfrac{7}{2}\\z=\dfrac{9}{2}\end{cases}.$$

Vậy: $M\left(0;-\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

□

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;1\right)$, $C(2;0;1)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có

$$AB=\sqrt{\left(\frac{1}{4}+2\right)^2+(0-3)^2+(1-1)^2}=\frac{15}{4},$$

$$AC=\sqrt{(2+2)^2+(0-3)^2+(1-1)^2}=5,$$

Do đó: $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC, ta có:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4\overrightarrow{DB}=-3\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4\left(\frac{1}{4}-x_D\right)=-3\left(2-x_D\right)\\4\left(0-y_D\right)=-3\left(0-y_D\right)\\4\left(1-z_D\right)=-3\left(1-z_D\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=0\\z_D=1\end{cases}$$

Vậy $D(1;0;1)$. □

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;2)$, $B(-1;3;-9)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho $P=|MA-MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

Ta thấy $x_A=2>0$ và $x_B=-1<0$ nên A,B nằm khác phía so với mặt phẳng tọa độ (Oyz).

Gọi $B'=(1;3;-9)$ là điểm đối xứng với điểm B qua mặt phẳng (Oyz).

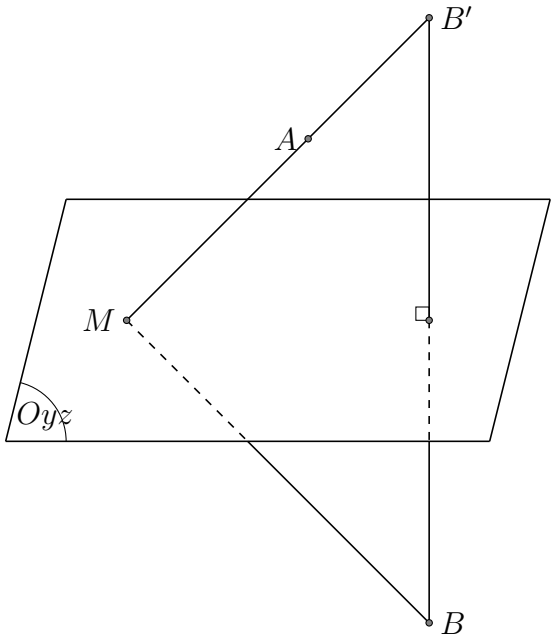
Ta có $|MA-MB|=|MA-MB'|\leq AB'=\sqrt{134}$.

Bởi vậy $P=|MA-MB|$ lớn nhất là bằng $\sqrt{134}$ khi và chỉ khi M là giao điểm của AB' với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Khi đó $M=(0;y;z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB'}=(-3;2;-11)$, $\overrightarrow{AM}=(-2;y-1;z-2)$.Nên:

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB'}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=-3k\\y-1=2k\\z-2=-11k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{2}{3}\\y=\frac{7}{3}\\z=-\frac{16}{3}\end{cases}$$

Vậy $M=\left(0;\frac{7}{3};-\frac{16}{3}\right)$.



□

DẠNG 2. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước.

Phương pháp giải.

☑ Cho điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó,

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A).$$

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

☑ Cho $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. Khi đó,

$$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=v_1\\u_2=v_2\\u_3=v_3\end{cases}$$

$\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ khi và chỉ khi tồn tại $t\in\mathbb{R}$ sao cho $\vec{u}=t\cdot\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=t\cdot v_1\\u_2=t\cdot v_2\\u_3=t\cdot v_3.\end{cases}$

☑ Cho điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó, trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}.\end{cases}$$

☑ Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và $C(x_C;y_C;z_C)$. Khi đó, trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là:

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$$

☑ Cho tứ diện $ABCD$ có $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$ và $D(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó, trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ có tọa độ là:

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\\z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\end{cases}$$

Ví dụ 7. Cho 3 điểm $A(0;1;-2)$; $B(3;0;0)$ và điểm C thuộc trục Oz. Biết ABC là tam giác cân tại C. Tìm toạ độ điểm C.

Lời giải.

Vì $C \in Oz$ nên tọa độ $C\,(0;0;c)$.
$\overrightarrow{AC} = (0;-1;c+2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3;0;c)$.
Vì $\triangle ABC$ cân tại C nên $AC = BC$. Suy ra

$$\sqrt{1+(c+2)^2} = \sqrt{9+c^2} \Leftrightarrow c = -1.$$

Vậy toạ độ C là $C\,(0;0;-1)$. □

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\,(-1;2;3)\,, B\,(2;4;2)$ và tọa độ trọng tâm $G\,(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên ta có

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C &= 3x_G \\ y_A+y_B+y_C &= 3y_G \\ z_A+z_B+z_C &= 3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2+x_C &= 0 \\ 2+4+y_C &= 6 \\ 3+2+z_C &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 0 \\ z_C = -2 \end{cases}$$

Vậy $C\,(-1;0;-2)$. □

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\,(1;0;1)$, $B\,(2;1;2)$, $D\,(1;-1;1)$, $C'\,(4;5;5)$. Tìm toạ độ của C và A' .

Lời giải.

Gọi $C(x;y;z)$ và $A'(x';y';z')$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow C\,(2;0;2).$

Mặt khác $ACC'A'$ cũng là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} \Rightarrow \begin{cases} 4-x'=1 \\ 5-y'=0 \\ 5-z'=1 \end{cases} \Rightarrow A'\,(3;5;4).$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A\,(0;1;-2)\,; B\,(3;0;0)$ và điểm C thuộc trục Oz. Biết ABC là tam giác cân tại C. Tìm toạ độ điểm C.

Lời giải.

Gọi $C\,(0;0;z)$ là điểm thuộc trục Oz.
Tam giác ABC cân tại C nên $CA = CB$.
Suy ra $CA^2 = CB^2 \Rightarrow 1+(z+2)^2 = 9+z^2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow C(0;0;1)$. □

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M\,(2;3;-1)$, $N\,(-1;1;1)$, $P\,(1;m-1;2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (3;2;-2)$ và $\overrightarrow{NP} = (2;m-2;1)$.
Vì tam giác MNP vuông tại N nên ta có $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Vậy $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 10. Cho hai điểm $A\,(2,-1,1)\,; B\,(3,-2,-1)$. Tìm điểm N trên trục $x'Ox$ cách đều A và B.

Lời giải.

N nằm trên trục $x'Ox$ nên $N\,(x;0;0)$.
Khi đó, ta có $\overrightarrow{AN} = (x-2;1;-1)$; $\overrightarrow{BN} = (x-3;2;1)$.
Vì N cách đều A và B nên $AN = BN \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+1+1} = \sqrt{(x-3)^2+4+1} \Leftrightarrow x = 4$.
Suy ra $N(4;0;0)$. □

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy), cách đều ba điểm $A\,(2,-3,1)\,, B\,(0;4;3)\,, C\,(-3;2;2)$.

Lời giải.

Vì M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $M\,(x;y;0)$.
$\overrightarrow{AM} = (x-2;y+3;-1)$; $\overrightarrow{BM} = (x;y-4;-3)$; $\overrightarrow{CM} = (x+3;y-2;-2)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} AM = BM \\ AM = CM \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} (x-2)^2+(y+3)^2+1 = x^2+(y-4)^2+9 \\ (x-2)^2+(y+3)^2+1 = (x+3)^2+(y-2)^2+4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} -4x+14y = 11 \\ -10x+10y = 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = \dfrac{17}{25} \\ y = \dfrac{49}{50} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{17}{25};\frac{49}{50};0\right)$. □

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Lời giải.

Giả sử $M\,(x;y;z)$.
Do M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$ nên $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\begin{cases} -3-x=\dfrac{2}{3}(-3) \\ 6-y=\dfrac{2}{3}.3 \\ 4-z=\dfrac{2}{3}.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$

Do đó, $AM=\sqrt{29}$. □

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(-4;9;-9)$, $B(2;12;-2)$ và $C(-m-2;1-m;m+5)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-6;-3;-7), \overrightarrow{BC}=(-m-4;-m-11;m+7)$.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow m=-4$. □

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD=BC$.

Lời giải.

D trên trục Ox nên $D\,(x;0;0)$.

Ta có $AD=BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+4^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=6 \end{array}\right.$.

Suy ra, tọa độ D thỏa yêu cầu bài toán là $D(0;0;0)$ hoặc $D(6;0;0)$. □

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;2;-1)$, $B\,(2;-1;3)$, $C\,(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm D là $D\,(x;y;z)$.

$\overrightarrow{AB}=(1;-3;4)$, $\overrightarrow{DC}=(-3-x;5-y;1-z)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-3-x \\ -3=5-y \\ 4=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=8 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow D\,(-4;8-3)\,.$$

□

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\,(-1;2;3)\,, B\,(2;4;2)$ và tọa độ trọng tâm $G\,(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C &=3x_G \\ y_A+y_B+y_C &=3y_G \\ z_A+z_B+z_C &=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2+x_C &=0 \\ 2+4+y_C &=6 \\ 3+2+z_C &=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-1 \\ y_C=0 \\ z_C=-2 \end{cases}$$

Vậy $C\,(-1;0;-2)$. □

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(1;1;1\right), B\left(2;1;-1\right), C\left(0;4;6\right)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Tìm tọa độ M để $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M\left(x;0;0\right)\in Ox$, $(x\in\mathbb{R})$.
Khi đó, $\overrightarrow{MA}=\left(1-x;1;1\right), \overrightarrow{MB}=\left(2-x;1;-1\right), \overrightarrow{MC}=\left(-x;4;6\right)$.
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(3-3x;6;6\right)$.
$P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{\left(3-3x\right)^2+6^2+6^2}=\sqrt{9x^2-18x+81}=\sqrt{9\left(x-1\right)^2+72}\geq\sqrt{72}$.
Suy ra $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x=1$.
Vậy tọa độ $M\left(1;0;0\right)$. □

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$ cho $M\left(2;4;-3\right)$, $\overrightarrow{MN}=(-1;-3;4)$; $\overrightarrow{MP}=(-3;-3;3)$; $\overrightarrow{MQ}=(1;-3;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $MNPQ$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MN}=(-1;-3;4)\Rightarrow\begin{cases}x_N=-1+x_M\\y_N=-3+x_M\\z_N=4-z_M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_N=-1+2=1\\y_N=-3+4=1\\z_N=4-3=1\end{cases}\Rightarrow N(1;1;1).$$

$$\overrightarrow{MP}=(-3;-3;3)\Rightarrow\begin{cases}x_P=-3+x_M\\y_P=-3+x_M\\z_P=3-z_M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_N=-3+2=-1\\y_N=-3+4=1\\z_N=3-3=0\end{cases}\Rightarrow P(-1;1;0)$$

$$\overrightarrow{MQ}=(1;-3;2)\Rightarrow\begin{cases}x_Q=1+x_M\\y_Q=-3+x_M\\z_Q=2-z_M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_Q=1+2=3\\y_Q=-3+4=1\\z_Q=2-3=-1\end{cases}\Rightarrow Q(3;1;-1)$$

Gọi $I;J$ lần lượt là trung điểm của MN vàPQ. Suy ra, $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-1\right);J\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$.
Gọi G là trọng tâm của tứ diện $MNPQ$ suy ra G là trung điểm IJ. Do đó, $G\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{3}{4}\right)$. □

Bài 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz mà MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(0;0;z)$.Khi đó $MA^2+MB^2=2z^2-4z+11=2(z-1)^2+9\geq 9$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $z=1$. Do đó, $M(0;0;1)$. □

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ điểm P.

Lời giải.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP nên ta suy ra được $\begin{cases} x_P = 2x_N - x_M = 5 \\ y_P = 2y_N - y_M = 9 \\ z_P = 2z_N - z_M = -10 \end{cases}$

$P(5;9;-10)$. □

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$, $N(2;3;1)$ và $P(3;-1;2)$.Tìm tọa độ điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Đặt $Q(x;y;z)$.

Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (1;1;-2) \\ \overrightarrow{QP} = (3-x;-1-y;2-z) \end{cases}$.

Để $MNPQ$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=1 \\ -1-y=1 \\ 2-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow Q(2;-2;4).$$

. □

Bài 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Lời giải.

Gọi $A'(x_1;y_1;z_1)$, $C'(x_2;y_2;z_2)$.

Tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$ là $I\left(\frac{1}{2};3;\frac{5}{2}\right)$.

Do I là trung điểm của $A'C'$ nên $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ y_1+y_2=6 \\ z_1+z_2=5 \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (7;0;-1)$ và $\overrightarrow{A'C'} = (x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Do $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\begin{cases} x_2-x_1=7 \\ y_2-y_1=0 \\ z_2-z_1=-1 \end{cases}$.

Xét các hệ phương trình:

$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_2-x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{cases}$.

$\begin{cases} y_1+y_2=6 \\ y_2-y_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=3 \\ y_2=3 \end{cases}$.

$\begin{cases} z_1+z_2=5 \\ z_2-z_1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=3 \\ z_2=2 \end{cases}$.

Vậy $A'(-3;3;3)$. □

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(3;0;0\right)$, $D\left(0;3;0\right)$ và $D'\left(0;3;-3\right)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C$.

Lời giải.

Gọi $A'\left(a_1;a_2;a_3\right)$, $B'\left(b_1;b_2;b_3\right)$, $C\left(c_1;c_2;c_3\right)$.

Do tính chất hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=0\\a_2=0\\a_3=-3\end{cases}\Rightarrow A'\left(0;0;-3\right).$$

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{DD'}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1-3=0\\b_2=0\\b_3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=3\\b_2=0\\b_3=-3\end{cases}\Rightarrow B'\left(3;0;-3\right).$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=3\\c_2-3=0\\c_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=3\\c_2=3\\c_3=0\end{cases}\Leftrightarrow C\left(3;3;0\right).$$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác $A'B'C$ là: $G\left(2;1;-2\right)$. □

DẠNG 3. Một số bài toán về tam giác

Phương pháp giải. Xét tam giác ABC, ta có các điểm đặc biệt sau:

- ☑ Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.
- ☑ A' là chân đường cao kẻ từ A của tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BA'}\text{ và }\overrightarrow{BC}\text{ cùng phương.}\end{cases}$
- ☑ H là trực tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{ đồng phẳng.}\end{cases}$
- ☑ D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác $ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}=-\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$.
- ☑ E là chân đường phân giác ngoài của góc A của tam giác $ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{EB}=\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.
- ☑ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}IA=IB=IC\\\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{ đồng phẳng.}\end{cases}$
- ☑ J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC\Leftrightarrow J$ là chân đường phân giác trong của góc B của tam giác ABD, với D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$ và $C(3;2;4)$.

① Tìm tọa độ trọng tâm G, tọa độ trực tâm H, tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

② Chứng minh ba điểm G, H, I thẳng hàng.

Lời giải.

① ☑ Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có $G\left(\frac{2}{3};1;3\right)$.

☑ Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{AH}=(x-1;y;z-2)$, $\overrightarrow{BC}=(5;1;1)$, $\overrightarrow{BH}=(x+2;y-1;z-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;2)$, $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right]=(0;8;-8)$.

H là trực tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\text{ đồng phẳng}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(x-1)+y+z-2=0\\ 2(x+2)+2(y-1)+2(z-3)=0\\ 0(x-1)+8y-8(z-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+y+z=7\\ x+y+z=2\\ y-z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{4}\\ y=-\frac{5}{8}\\ z=\frac{11}{8}\end{cases}$$

Vậy $H\left(\frac{5}{4};-\frac{5}{8};\frac{11}{8}\right)$.

☑ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{AI}=(a-1;b;c-2)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;2)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;8;-8)$.

I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\Leftrightarrow\begin{cases}IA=IB=IC\\ \overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{ đồng phẳng}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=IC^2\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-a)^2+b^2+(2-c)^2=(2+a)^2+(1-b)^2+(3-c)^2\\ (1-a)^2+b^2+(2-c)^2=(3-a)^2+(2-b)^2+(4-c)^2\\ 0(a-1)+8b-8(c-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6a-2b-2c=-9\\ a+b+c=6\\ b-c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{8}\\ b=\frac{29}{16}\\ c=\frac{61}{16}\end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{3}{8};\frac{29}{16};\frac{61}{16}\right)$.

② Ta có $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{7}{12};-\frac{13}{8};-\frac{13}{8}\right)$ và $\overrightarrow{GI}=\left(-\frac{7}{24};\frac{13}{16};\frac{13}{16}\right)\Rightarrow\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$.

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GI}$ cùng phương.

Vậy ba điểm G, H, I thẳng hàng.

□

Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;0;2)$, $B(0;4;3)$ và $C(-2;1;2)$.

Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt{2}$ và $AC=\sqrt{1+1+0}$.

Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác, ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=3$.

Suy ra $\overrightarrow{DB}=-3\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=\dfrac{x_B+3x_C}{4}=-\dfrac{3}{2}\\ y_D=\dfrac{y_B+3y_C}{4}=\dfrac{7}{4}\\ z_D=\dfrac{z_B+3z_C}{4}=\dfrac{9}{4}.\end{cases}$

$\Rightarrow D\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$.

Vậy $AD=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

□

Ví dụ 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;1)$, $B(0;-1;2)$ và $C(1;0;3)$.

① Tìm tọa độ chân đường cao H hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

② Tìm tọa độ giao điểm D của đường thẳng AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

① Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{AH}=(x-2;y-3;z-1)$, $\overrightarrow{BH}=(x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BC}=(1;1;1)$.

H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\text{ và }\overrightarrow{BC}\text{ cùng phương}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2+y-3+z-1=0\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=6\\ x-y=1\\ x-z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\\ z=\dfrac{11}{3}\end{cases}$

Vậy $H\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$.

② Gọi $D(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra $\overrightarrow{HA}=\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};-\frac{8}{3}\right)$, $\overrightarrow{HD}=\left(x-\frac{5}{3};y-\frac{2}{3};z-\frac{11}{3}\right)$, $\overrightarrow{HB}=\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$, $\overrightarrow{HC}=$

$\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{AD}=(x-2;y-3;z-1)$.

Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}\\ \overrightarrow{AD} \text{ và } \overrightarrow{HA} \text{ cùng phương}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{3}\right)+\frac{7}{3}\left(y-\frac{2}{3}\right)-\frac{8}{3}\left(z-\frac{11}{3}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-1}{-8}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+21y-24z=39\\ 7x-y=11\\ 8x+z=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{113}{57}\\ y=\frac{164}{57}\\ z=\frac{65}{57}\end{cases}$$

Vậy $D\left(\frac{113}{57};\frac{164}{57};\frac{65}{57}\right)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;-1;3)$, $B(1;2;-1)$ và $C(-4;7;5)$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc A của tam giác ABC cắt BC lần lượt tại D và E. Tìm độ dài các đoạn thẳng AD và AE.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{1+9+16}=\sqrt{26}$ và $AC=\sqrt{36+64+4}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABC, ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$.

Do đó, ta có

☑ $\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}\Rightarrow \begin{cases}x_D=\frac{x_C+2x_B}{3}=-\frac{2}{3}\\ y_D=\frac{y_C+2y_B}{3}=\frac{11}{3}\\ z_D=\frac{z_C+2z_B}{3}=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right).$

☑ $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{EB}\Rightarrow \begin{cases}x_E=\frac{x_C-2x_B}{-1}=6\\ y_E=\frac{y_C-2y_B}{-1}=-3\\ z_E=\frac{z_C-2z_B}{-1}=-7\end{cases}\Rightarrow E(6;-3;-7).$

Vậy $AD=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{196}{9}+4}=\frac{2\sqrt{74}}{3}$ và $AE=\sqrt{16+4+100}=2\sqrt{30}$. □

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;0;1)$, $B(0;-1;1)$ và $C(0;0;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính R của đường tròn đó.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AI}=(x+2;y;z-1)$, $\overrightarrow{AB}=(2;-1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(2;0;-2)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;2)$.

I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 \\ (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ 2(x+2) + 4y + 2(z-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ x - z = -1 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{6} \\ y = -\dfrac{1}{6} \\ z = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Vậy $I\left(-\dfrac{5}{6}; -\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}\right)$ và bán kính $R = AI = \sqrt{\dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 26. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-4;2)$, $B(0;2;-2)$, $C(4;8;0)$, $D(6;2;4)$.

① Chứng minh $ABCD$ là một hình thoi.

② Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$.

Lời giải.

① Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;6;-4)$, $\overrightarrow{AD} = (4;6;2)$.
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương và $AB = AD = \sqrt{56}$.
Lại có $\overrightarrow{AC} = (2;12;-2) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Suy ra $ABCD$ là một hình thoi.

② Ta có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (36;-12;36) \Rightarrow S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \sqrt{2736}$.
Gọi O là tâm của hình thoi, ta có: $S_{OAB} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}r \times AB$.
Suy ra $r = \dfrac{S_{ABCD}}{2AB} = \dfrac{\sqrt{2736}}{2\sqrt{56}} = \dfrac{3\sqrt{266}}{14}$.

□

Bài 27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2} - 2x; 3 - x; \dfrac{5}{2} - 2x\right)$ và tam giác ABC với $A(1;1;3)$, $B(0;5;2)$, $C(-1;3;4)$.

① Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

② Chứng minh rằng với mọi $x \neq 0$, đường thẳng MI luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

① Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;4;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;2;1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;-2;2)$.
$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 2 - 4 + 2 = 0$ hay $AC \perp BC$.

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại C. Do đó, tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trung điểm của AB.

Vậy $I\left(\frac{1}{2};3;\frac{5}{2}\right)$.

② Ta có $\overrightarrow{MI}=(-2x;-x;-2x)\neq\vec{0}$ (Vì $x\neq 0$).

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}=2x-4x+2x=0\\ \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AC}=4x-2x-2x=0.\end{cases}$

$\Rightarrow MI\perp AB$ và $MI\perp AC$.

Vậy với mọi $x\neq 0$, đường thẳng MI luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC).

□

Bài 28. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;0;-10)$, $\overrightarrow{BC}=(8;0;4)$, $\overrightarrow{AC}=(3;0;-6)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}=24+0-24=0$ hay $BC\perp AC$.

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại C.

Ta có $AB=\sqrt{25+0+100}=5\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{64+0+16}=4\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{9+0+36}=3\sqrt{5}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=30$.

Nửa chu vi tam giác ABC là $p=\dfrac{AB+BC+AC}{2}=\dfrac{5\sqrt{5}+4\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2}=6\sqrt{5}$.

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R=\frac{AB.BC.AC}{4S_{ABC}}=\frac{5\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}}{4\times 30}=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $r=\dfrac{S_{ABC}}{p}=\dfrac{30}{6\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. □

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Cho $A(2;5)$, $B(1;1)$, $C(3;3)$ một điểm E nằm trong mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của điểm E là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;-3)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

Lời giải.

Gọi $E(x,y)$. Ta có $\overrightarrow{AE}=(x-2;y-5)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-2)$.

Do đó $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=-3-2\\y-5=-12+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}\Rightarrow E(-3;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Véctơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

A. $(1;2;3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(2-1;3-1;2+1)=(1;2;3)$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(1;1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $N\left(1;-1;-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $P(1;6;1)$. **D.** $Q(0;3;0)$.

Lời giải.

Xét điểm $M\left(1;1;\dfrac{3}{2}\right)$, ta có $1-1+2\cdot\dfrac{3}{2}-3=0$ đúng nên $M\in(\alpha)$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy) ?

A. $M(2;2;0)$. **B.** $Q(3;-1;3)$. **C.** $N(3;-1;2)$. **D.** $P(0;0;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$, suy ra $M(2;2;0)\in(Oxy)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{j}-2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

A. $(0;1;-2)$. **B.** $(1;-2;0)$. **C.** $(1;0;-2)$. **D.** $(0;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{j}-2\vec{k}\Leftrightarrow A(0;1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(1;1;-1)$, $B\,(2;1;2)$. Độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(1-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầy $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ có tâm I và bán kính R là.

A. $I(-1;0;2), R=2$. **B.** $I(-1;0;2), R=4$. **C.** $I(1;0;-2), R=2$. **D.** $I(1;0;-2), R=4$.

Lời giải.

Dễ thấy mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ có:
Tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2-1}=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\,(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'\,(1;0;-3)$. **B.** $M'\,(0;2;-3)$. **C.** $M'\,(1;2;0)$. **D.** $M'\,(1;2;3)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'\,(1;2;0)$.
Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;-1;-3)\,, B\,(-2;2;1)$. Véctơ có $\overrightarrow{AB}$ tọa độ là

A. $(-3;3;4)$. **B.** $(-1;1;2)$. **C.** $(3;-3;4)$. **D.** $(-3;1;4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2-1;2+1;1+3)=(-3;3;4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;2)$ và $B(3;-5;0)$. Tọa độ trung diểm của đoạn thẳng AB là

A. $(2;-4;2)$. **B.** $(4;-6;2)$. **C.** $(1;-2;1)$. **D.** $(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, khi đó tọa độ của M được tính bởi

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+y_A}{2}=1 \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-2 \\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}=1. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian $Oxyx$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-2;1;-1), R=3$. **B.** $I(-2;1;-1), R=9$. **C.** $I(2;-1;1), R=3$. **D.** $I(2;-1;1), R=9$.

Lời giải.

Ta có tọa độ tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình của một mặt cầu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi
$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0 \Leftrightarrow m^2-2m-10<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$.
Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Thể tích tứ diện $OABC$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Tứ diện $OABC$ vuông tại O nên ta có $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là

A. $(2;3;1)$. **B.** $(2;3;-1)$. **C.** $(-2;3;1)$. **D.** $(2;-3;1)$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, ta có

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}=\dfrac{1-2+3+6}{4}=2\\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}=\dfrac{0+1+2+9}{4}=3\\ z=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}=\dfrac{2+3+4-5}{4}=1. \end{cases}$$

Vậy $I(2;3;1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A. $I(1;-2;3)$ và $R=5$. **B.** $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$.
C. $I(-1;2;-3)$ và $R=5$. **D.** $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$ có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+4+9-9}=\sqrt{5}$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

A. $(-3;2;-1)$. **B.** $(2;-1;-3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(-1;2;-3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7,n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=1,n=0$. **C.** $m=7,n=-\frac{4}{3}$. **D.** $m=4,n=-3$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k>0$ sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases}2=k.1\\ m-1=3k\\ 3=-2nk\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=2\\ m-1=6\\ 3=-4n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=2\\ m=7\\ n=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;0;0), B(0;0;4)$. Chu vi tam giác OAB bằng

A. 14. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải.

$\triangle OAB$ có

$$OA=\sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=3$$
$$OB=\sqrt{(0-0)^2+(0-0)^2+(4-0)^2}=4$$
$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2+(4-0)^2}=5.$$

Do đó chu vi của $\triangle OAB$ bằng $OA+OB+AB=3+4+5=12$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$. **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$. **D.** $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu là $R=a^2+b^2+c^2-d>0$.

Dựa vào bốn đáp án ta có đáp án C là $a=1, b=-2, c=2, d=10 \Rightarrow R=-1<0$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong không gian cho $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(4;5;6)$ Tọa độ $\vec{a}+\vec{b}$ là

A. $(3;3;3)$. **B.** $(2;5;9)$. **C.** $(5;7;9)$. **D.** $(4;10;18)$.

Lời giải.

Phương pháp: $\begin{cases}\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\\ \vec{v}=(x_2;y_2;z_2)\end{cases} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2).$

Cách giải: Tọa độ $\vec{a}+\vec{b}$ là $(5;7;9)$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;1), B(0;-1;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=8$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z+1)^2=8$. **D.** $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là $(x-a)2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
Cách giải: Tâm mặt cầu là trung điểm của AB, có tọa độ là $I(-1;0;1)$.
Bán kính mặt cầu: $R=IA=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.
Phương trình mặt cầu đường kính AB: $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=2$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Toạ độ của vec-tơ $\vec{a}$ là

A. $(2;-1;-3)$. **B.** $(-3;2;-1)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $2;-3;-1$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=-1\cdot\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow$ Toạ độ của vec-tơ $\vec{a}=(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-1=0$. Tâm của mặt cầu (S) là

A. $I\,(2;-1;3)$. **B.** $I\,(-2;1;3)$. **C.** $I\,(2;-1;-3)$. **D.** $I\,(2;1;-3)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I\,(2;-1;-3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{13}$. **B.** $-\dfrac{3}{13}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3.5+4.0+0.12}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}.\sqrt{5^2+0^2+12^2}}=\dfrac{-3}{13}$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I\,(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I\,(1;2;-3)$ trên trục $Oy\Rightarrow H\,(0;2;0)\Rightarrow IH=\sqrt{10}$.
Gọi R là bán kính mặt cầu có tâm $I\,(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục $Oy\Rightarrow R=IH=\sqrt{10}$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Lời giải.

Ta có $a=4$, $b=-5$, $c=3$, $d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;3)$, $B(-1;2;3)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $(0;3;6)$. **B.** $(-2;1;0)$. **C.** $(0;\dfrac{3}{2};3)$. **D.** $(2;-1;0)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Khi đó

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của vec-tơ $\vec{a}$.

A. $(2;-3;-1)$. **B.** $(-3;2;-1)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

Lời giải.

Vì $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ nên $\vec{a} = (-1;2;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vec-tơ $\vec{u} = (3;0;1)$ và $\vec{v} = (2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;1;-1)$ và $B\,(2;3;2)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-1;2+1) = (1;2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$. **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. **D.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{5}$ có phương trình là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho véc-tơ $\vec{a} = (1;-2;0)$ và $\vec{b} = 2\vec{a}$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$.

A. $\vec{b} = (2;4;2)$. **B.** $\vec{b} = (2;-4;0)$. **C.** $\vec{b} = (3;0;2)$. **D.** $\vec{b} = (2;4;0)$.

Lời giải.

$\vec{b} = 2\vec{a} = (2; -4; 0)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB} = (0;1;0)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (1;2;2)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (1;0;-2)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (-1;0;2)$.

Lời giải.

Ta có công thức $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Do đó $\overrightarrow{AB} = (0-1; 1-1; 2-0) = (-1; 0; -2)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-1;3)$ và $B(0;3;1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $(-1;1;2)$. **B.** $(2;4;-2)$. **C.** $(-2;-4;2)$. **D.** $(-2;2;4)$.

Lời giải.

I là trung điểm của đoạn AB có tọa độ là: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$.

Do đó trung điểm AB có tọa độ là $\begin{cases} x = \dfrac{-2+0}{2} \\ y = \dfrac{-1+3}{2} \\ z = \dfrac{3+1}{2} \end{cases} \Rightarrow (-1;1;2)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA = 6$. **B.** $OA = \sqrt{5}$. **C.** $OA = 2$. **D.** $OA = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (2;1;1) \Rightarrow OA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các véctơ $\vec{a} = (2;-2;-4)$ và $\vec{b} = (1;-1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3;-3;-3)$. **B.** $\vec{a} \perp \vec{b}$.

C. $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$. **D.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải.

Vì $\dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} \neq \dfrac{-4}{1}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các véctơ $\vec{a}=(1;1;-2)$ và $\vec{b}=(2;1;-1)$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{6}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{5}{36}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{5}{6}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{36}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1.2+1.1+(-2).(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(1;-2;0);\ R=3$. **B.** $I(-1;2;0);\ R=3$. **C.** $I(1;-2;0);\ R=9$. **D.** $I(-1;2;0);\ R=9$.

Lời giải.

Ta có $a=1,b=-2,c=0,R=3$ nên $I(1;-2;0);\ R=3$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-1=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $M(2;-1;1)$. **B.** $N(0;1;-2)$. **C.** $P(1;-2;0)$. **D.** $Q(1;-3;-4)$.

Lời giải.

Ta thấy $Q\in(P)$ vì $2.1-(-3)-4-1=0$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

A. $(-3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(3;1;-1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(3;-1;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;9)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(0;3;3)$. **B.** $(4;-2;12)$. **C.** $(2;-1;6)$. **D.** $(0;\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2})$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB. Ta có $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=2 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-1 \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=6 \end{cases}$. Tọa độ điểm I là $(2;-1;6)$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u}=(1;2;0)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overline{u}=2\vec{i}+\vec{j}$. **B.** $\overline{u}=\vec{i}+2\vec{j}$. **C.** $\overline{u}=\vec{j}+2\vec{k}$. **D.** $\overline{u}=\vec{i}+2\vec{k}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$.
Suy ra $\vec{u} = (1; 2; 0) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; -2; 3)$ đi qua điểm $A(5; -2; 1)$ có phương trình

A. $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{13}$. **B.** $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 13$.
C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$. **D.** $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{13}$.

Lời giải.

Mặt cầu có bán kính $R = IA = \sqrt{13}$.
Mặt cầu tâm $I(2; -2; 3)$ bán kính $R = \sqrt{13}$ là $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-2; 5; 1)$. Khoảng cách từ M đến trục Ox bằng

A. $\sqrt{29}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

$\mathrm{d}(M, Ox) = \sqrt{y_M^2 + z_M^2} = \sqrt{26}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$ là

A. $(-6; 2; 6)$. **B.** $(0; 2; 6)$. **C.** $(6; 2; -6)$. **D.** $(6; 2; 6)$.

Lời giải.

$\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i} = (1; 2; 3) + (-2; 0; 1) + 2 \cdot (-1; 0; 1) - 3 \cdot (1; 0; 0) = (-6; 2; 6)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3)$, $B(-4; 4; 6)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB là

A. $G(1; -2; -3)$. **B.** $G(-1; 2; 3)$. **C.** $G(-3; 6; 9)$. **D.** $G\left(-\frac{3}{2}; 3; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải.

Giả sử $G(x_G; y_G; z_G) \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_O + x_A + x_B}{3} = \dfrac{0+1+(-4)}{3} = -1 \\ y_G = \dfrac{y_O + y_A + y_B}{3} = \dfrac{0+2+4}{3} = 2 \\ z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B}{3} = \dfrac{0+3+6}{3} = 3 \end{cases}$.
Vậy $G(-1; 2; 3)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Khi đó tọa độ $\vec{u}$ với hệ $Oxyz$ là

A. $(1; 0; 2)$. **B.** $(0; 2; 1)$. **C.** $(2; 0; 1)$. **D.** $(2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Suy ra $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k} = (2; 0; 1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-4;5;-3)$ và $R=1$. **B.** $I(4;-5;3)$ và $R=7$.

C. $I(-4;5;-3)$ và $R=7$. **D.** $I(4;-5;3)$ và $R=1$.

Lời giải.

$(S):(x-4)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=1\Rightarrow I(4;-5;3)$ và $R=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{u}=(1;0;1)$, $\vec{v}=(0;1;-2)$. Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $\vec{u}\,\vec{v}=-2$. **B.** $\vec{u}\,\vec{v}=2$. **C.** $\vec{u}\,\vec{v}=(0;0;-2)$. **D.** $\vec{u}\,\vec{v}=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\,\vec{v}=1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot(-2)=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$. Toạ độ điểm A là

A. $A(3;4;-5)$. **B.** $A(3;4;5)$. **C.** $A(-3;-4;5)$. **D.** $A(-3;4;5)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}3\vec{i}=(3;0;0)\\4\vec{j}=(0;4;0)\\5\vec{k}=(0;0;5)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(3;4;-5)\Rightarrow A(3;4;-5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-7=0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-1;-2;2)$, $R=3$. **B.** $I(1;2;-2)$, $R=\sqrt{2}$.

C. $I(-1;-2;2)$, $R=4$. **D.** $I(1;2;-2)$, $R=4$.

Lời giải.

Ta có $a=1$, $b=2$, $c=-2$ và $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=4$ nên $I(1;2;-2)$ và $R=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-1)$, $\vec{b}=(1;3;m)$. Tìm m để $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90^\circ$.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Ta có $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90^\circ\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow 5-m=0\Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\,(1;3;-1)$, $B\,(2;1;2)$. Độ dài của đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?

A. $AB=26$. **B.** $AB=14$. **C.** $AB=\sqrt{26}$. **D.** $AB=\sqrt{14}$.

Lời giải.

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(1-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{14}$.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0.$$

Tìm tọa độ tâm I và độ dài bán kính R của mặt cầu.

A. $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$.

C. $I(1;-2;3)$ và $R=5$. **D.** $I(-1;2;-3)$ và $R=5$.

Lời giải.

Tâm $I(1;-2;3)$; $R=\sqrt{1+4+9-9}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $I(1;0;-1)$, $A(2;2;-3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A.

A. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{1+4+4}=3$, nên phương trình mặt cầu là

$$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9.$$

Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Tính diện tích mặt cầu (S).

A. 42π. **B.** 36π. **C.** 9π. **D.** 12π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$. Diện tích mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=36\pi$.

Chọn đáp án B □

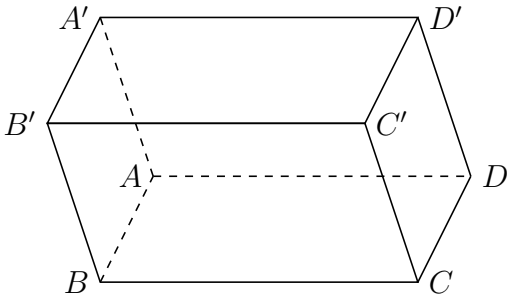
Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(-5;4;-7)\Rightarrow D(-3;8;-7)$.

Lại có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}=(-7;8;-7)\Rightarrow B'(13;0;17)$.



Chọn đáp án D □

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;2;3)$, $N(0;2;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác OMN là

A. $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};2;1\right)$. **C.** $(1;0;-4)$. **D.** $(-1;4;2)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm của tam giác OMN là $\left(\dfrac{-1+0+0}{3};\dfrac{2+2+0}{3};\dfrac{3+(-1)+0}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(-1;3;2)$. Biết rằng $ABCD$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là

A. $D\left(-1;1;\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $D(1;3;4)$. **C.** $D(1;1;4)$. **D.** $D(-1;-3;-2)$.

Lời giải.

Gọi $D(x;y;z)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=2\\y-3=-2\\z-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=4.\end{cases}$

Vậy $D(1;1;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-2;0)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I bán kính $R=4$.

A. $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=4$. **B.** $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=16$.

C. $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=16$. **D.** $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=4$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-2;0)$ và bán kính $R=4$ là

$$(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=16.$$

Chọn đáp án C □

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;3;-2)$ và $N(2;-1;0)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MN}=(2;-4;2)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=(1;1;-1)$. **C.** $\overrightarrow{MN}=(-2;4;-2)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;-4;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=18$. **B.** $R=9$. **C.** $R=3$. **D.** $R=6$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R thì có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Theo đề bài ta có $R^2=9\Rightarrow R=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;2;1)$ và $B(2;0;5)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $(2;2;-4)$. **B.** $(-2;-2;4)$. **C.** $(-1;-1;2)$. **D.** $(1;1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-4; 0-2; 5-1) = (-2; -2; 4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a} = (1; 0; -2)$. Trong các véc-tơ sau đây, véc-tơ nào không cùng phương với véc-tơ $\vec{a}$?

A. $\vec{c} = (2; 0; -4)$. **B.** $\vec{b} = (1; 0; 2)$. **C.** $\vec{d} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$. **D.** $\vec{0} = (0; 0; 0)$.

Lời giải.

☑ Ta có $\vec{0}$ cùng phương với mọi véc-tơ.

☑ $\vec{c} = 2\vec{a}$ và $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ nên $\vec{c}$ và $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1; 3; 0)$, $R = 4$. **B.** $I(1; -3; 0)$, $R = 4$. **C.** $I(-1; 3; 0)$, $R = 16$. **D.** $I(1; -3; 0)$, $R = 16$.

Lời giải.

Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu là $I(-1; 3; 0)$, $R = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$ và $B(5; 1; 1)$. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 3)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (3; -2; -3)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 3)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 0; 4)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $\vec{u} = (-7; 6; -10)$. **B.** $\vec{u} = (-7; 6; 10)$. **C.** $\vec{u} = (7; 6; 10)$. **D.** $\vec{u} = (-7; -6; 10)$.

Lời giải.

Ta có $-2\vec{a} + 3\vec{b} = (-7; 6; 10)$, nên $\vec{u} = (-7; 6; 10)$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{a} = (-1; -2; 3)$. **B.** $\vec{a} = (2; 4; 6)$. **C.** $\vec{a} = (1; 2; 3)$. **D.** $\vec{a} = (-2; 1; 5)$.

Lời giải.

Từ phương trình của d ta có $(1; 2; -3)$ là một véc-tơ chỉ phương, do đó $\vec{a} = -(1; 2; -3)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án A □

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(1; -2; 3)$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Khi đó tọa độ $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(3; -2; 0)$. **B.** $(3; -5; -3)$. **C.** $(3; -5; 0)$. **D.** $(1; 2; -6)$.

Lời giải.

$\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k} = (2; 0; -3)$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b} = (3; -2; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;2;3)$; $N(3;4;7)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{MN}$ là

A. $(4;6;10)$. **B.** $(2;3;5)$. **C.** $(2;2;4)$. **D.** $(-2;-2;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2;2;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 25 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;-2;2); R = 6$. **B.** $I(-1;2;-2); R = 5$.

C. $I(-2;4;-4); R = \sqrt{29}$. **D.** $I(1;-2;2); R = \sqrt{34}$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 34$. Khi đó (S) có tâm $I(1;-2;2)$, bán kính $R = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

A. $M(2;1;0)$. **B.** $M(2;0;1)$. **C.** $M(0;2;1)$. **D.** $M(1;2;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$ nên $M(0;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = 2$.

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. **B.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2$. **D.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = 2$ có phương trình là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a}$ biểu diễn của các véctơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của véctơ $\vec{a}$ là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;1)$. **C.** $(2;1;-3)$. **D.** $(1;-3;2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2;-3;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;-3)$, $B(2;-1;0)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB} = (3;-3;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (3;-3;3)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-3)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-(-1);-1-2;0-(-3)) = (3;-3;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho $\vec{a} = (2;0;1)$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=9$. **B.** $R=3\sqrt{3}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2-(-3)}=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(3;2;1)$; $\vec{b}=(-2;0;1)$. Tính độ dài của véc-tơ $\vec{a}+\vec{b}$.

A. 9. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(1;2;2) \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Tâm của mặt cầu là điểm

A. $I(1;-2;0)$. **B.** $I(1;0;-2)$. **C.** $I(-1;2;0)$. **D.** $I(0;1;2)$.

Lời giải.

Ta có $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;0;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;3)$, $B(5;2;0)$. Khi đó

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{3}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{61}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$.

Lời giải.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2+(0-3)^2}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1)$ và $B(-4;1;9)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB}=(-6;-2;10)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(-1;2;4)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(6;2;-10)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4-2;1-3;9+1)=(-6;-2;10)$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng (Oxz) là

A. $(0;0;0)$. **B.** $(2;-1;0)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(0;-1;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng (Oxz) là điểm có tọa độ $(2;0;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$ cho $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ (ở đó $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz). Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-2;-3;1)$. **B**. $M(2;-3;1)$. **C**. $M(2;-1;3)$. **D**. $M(2;3;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(2;-3;1)\Rightarrow M(2;-3;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (Oyz).

A. $N(0;-1;2)$. **B**. $N(3;1;-2)$. **C**. $N(-3;-1;2)$. **D**. $N(0;1;1)$.

Lời giải.

Lấy đối xứng qua mặt (Oyz) thì x đổi dấu còn y,z giữ nguyên nên $N(-3;-1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+5=0$. Mặt cầu (S) có bán kính bằng

A. 3. **B**. 5. **C**. 2. **D**. 7.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{2^2+1^2+3^2-5}=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$. Tính bán kính của (S).

A. 4 . **B**. 16. **C**. 7. **D**. 5 .

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{16}=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\,(3;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là

A. $M\,(3;0;5)$. **B**. $M\,(3;-2;0)$. **C**. $M\,(0;-2;5)$. **D**. $M\,(0;2;5)$.

Lời giải.

Do M là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) ta suy ra $M\,(3;0;5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ bán kính $R=4$ là

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$. **B**. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **D**. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$.

Lời giải.

Áp dụng công thức mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Chọn đáp án D □

Câu 89. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có toạ độ là

A. $(0;-3;0)$. **B.** $(0;-3;-5)$. **C.** $(0;-3;5)$. **D.** $(1;-3;0)$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x=0$ và hình chiếu của điểm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $(0;b;c)$.

Chọn đáp án B □

Câu 90. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\vec{c}\perp\vec{b}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **D.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot1+1\cdot0=2\neq0$ nên mệnh đề $\vec{c}\perp\vec{b}$ là sai.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(1;-2;0)$ và $\vec{b}=(-2;3;1)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$. **B.** $2\vec{a}=(2;-4;0)$.
C. $\vec{a}+\vec{b}=(-1;1;-1)$. **D.** $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{14}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(-1;1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z+4=0$. Phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$.
C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên bán kính của (S) là $R=\mathrm{d}\,(I,(P))=\dfrac{|1+0+4+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính bán kính R của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$.

A. $R=\sqrt{2}$. **B.** $R=2$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=1$.

Lời giải.

Với hình cầu $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ thì bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Nên bán kính của (S) là $R=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;0;1)$ và $B(1;-1;2)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(2;-1;1)$. **B.** $(0;-1;-1)$. **C.** $(-2;1;-1)$. **D.** $(0;-1;3)$.

Lời giải.

Tọa độ của $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-3=0$ có tâm và bán kính là

A. $I(2;-1;1)$, $R=9$.
B. $I(-2;1;-1)$, $R=3$.
C. $I(2;-1;1)$, $R=3$.
D. $I(-2;1;-1)$, $R=9$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2-(-3)}=3$.
Chọn đáp án B □

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;0)$, $B(4;3;2)$. Các kết luận sau kết luận nào sai?

A. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}(2;2;2)$ vuông góc với véc-tơ $\vec{u}(1;1;-2)$.
B. Tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}(2;2;2)$.
C. Độ dài AB bằng $2\sqrt{3}$.
D. Trung điểm I của AB là $I(6;4;2)$.

Lời giải.

Trung điểm I của AB là $I(3;2;1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục tung Oy?

A. $Q(0;-10;0)$. **B.** $P(10;0;0)$. **C.** $N(0;0;-10)$. **D.** $M(-10;0;10)$.

Lời giải.

Điểm thuộc trục tung Oy suy ra $x=0$ và $z=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(2;-1;1)$. Tìm điểm C có hoành độ dương trên trục Ox sao cho $\triangle ABC$ vuông tại C.

A. $C(3;0;0)$. **B.** $C(5;0;0)$. **C.** $C(-5;0;0)$. **D.** $C(2;0;0)$.

Lời giải.

Gọi $C(x;0;0)$, $x>0$. $\overrightarrow{AC}=(x-1;-2;0)$, $\overrightarrow{BC}=(x-2;1;-1)$.
Vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)-2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \text{(loại)} \\ x=3 & \text{(thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Vậy $C(3;0;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ và đi qua điểm $A(2;-2;0)$ là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=10$.
B. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=5$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=100$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ đi qua $A(2;-2;0)$ nên có bán kính $R=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$. Do đó phương trình mặt cầu là

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=25.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}\,(1;2;3)$ và $\vec{v}\,(-5;1;1)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{u}=\vec{v}$. **B.** $\vec{u}\perp\vec{v}$. **C.** $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

Lời giải.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot(-5)+2\cdot1+3\cdot1=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\,(2;1;-1)$, $B\,(3;3;1)$, $C\,(4;5;3)$. Khẳng định nào đúng?

A. $AB\perp AC$. **B.** A,B,C thẳng hàng.

C. $AB=AC$. **D.** O,A,B,C là 4 đỉnh của một tứ diện.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(1;2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;4;4)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Vậy A,B,C thẳng hàng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;1;0)$; $\vec{b}=(2;-1;-2)$; $\vec{c}=(-3;0;2)$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=0$. **B.** $2\,|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|$. **C.** $\vec{a}=2\,\vec{b}-\vec{c}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Lời giải.

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ số $Oxyz$ cho các điểm $A\,(1;2;3)$, $B\,(2;1;5)$, $C\,(2;4;2)$. Góc giữa hai đường thẳng AB và AC bằng

A. $60°$. **B.** $150°$. **C.** $30°$. **D.** $120°$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$; $\overrightarrow{AC}=(1;2;-1)$.

$$\Rightarrow\cos(AB;AC)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{AB\cdot AC}=\frac{|1\cdot1+(-1)\cdot2+2\,(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow(AB;AC)=60°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 104. Cho hai điểm $A(1;3;5)$, $B(1;-1;1)$, khi đó trung điểm I của AB có tọa độ là

A. $I(0;-4;-4)$. **B.** $I(2;2;6)$. **C.** $I(0;-2;-4)$. **D.** $I(1;1;3)$.

Lời giải.

Ta có $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)=(1;1;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Cho 3 điểm $A(1;0;1)$, $B(2;1;-2)$, $C(-1;3;2)$. Điểm D có tọa độ bao nhiêu để $ABCD$ là hình bình hành?

A. $D(-2;2;5)$. **B.** $D(1;-1;-2)$. **C.** $D(0;4;-1)$. **D.** $D(-1;-1;1)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Do đó ta có tọa độ điểm D là $(x_A+x_C-x_B;y_A+y_C-y_B;z_A+z_C-z_B)=(-2;2;5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 106. Mặt cầu $S(I;R)$ có phương trình $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$. Tâm và bán kính của mặt cầu là

A. $I(-1;0;2), R=\sqrt{3}$. **B.** $I(1;0;-2), R=\sqrt{3}$. **C.** $I(1;0;-2), R=3$. **D.** $I(-1;0;2), R=3$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình mặt cầu, ta có $I(1;0;-2)$ và $R=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

A. $I(2;1-1)$. **B.** $I(2;0;-1)$. **C.** $I(-2;0;1)$. **D.** $I(-2;1;1)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) là $I(2;0;-1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 108. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox có tọa độ là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;-3;-1)$. **C.** $(-2;0;0)$. **D.** $(0;3;1)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Ox là $(-2;0;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 109. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(2;0;-1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

A. $\vec{u}=(4;2;-9)$. **B.** $\vec{u}=(-4;-2;9)$. **C.** $\vec{u}=(1;3;-11)$. **D.** $\vec{u}=(-4;-5;9)$.

Lời giải.

$\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}=(-4;-2;9)$.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là

A. $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=5$. **B.** $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=5$.
C. $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=25$. **D.** $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=25$.

Lời giải.

ặt cầu tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=25$.

Chọn đáp án C □

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$, $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\Leftrightarrow 3-m=1\Leftrightarrow m=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A(4;-3;5)$, $B(2;1;3)$ là

A. $x^2+y^2+z^2+6x+2y-8z-26=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+20=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+6x-2y+8z-20=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+26=0$.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{(2-4)^2+(1+4)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{6}$. Gọi I, R là tâm và bán kính của mặt cầu (S) suy ra $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$ và $I(3;-1;4)$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=6\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+20=0$$

Chọn đáp án B □

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}=\vec{i}\sqrt{3}+\vec{k}$ và $\vec{v}=\vec{j}\sqrt{3}+\vec{k}$. Khi đó tích vô hướng của $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải.

Do giả thiết nên $\vec{u}\left(\sqrt{3};0;1\right)$ và $\vec{v}\left(0;\sqrt{3};1\right)$. Khi đó $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{3}\cdot 0+0\cdot\sqrt{3}+1\cdot 1=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-9)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. Tìm tâm I và tính bán kính R của (S).

A. $I(9;1;1)$ và $R=5$. **B.** $I(9;-1;-1)$ và $R=5$.

C. $I(9;1;1)$ và $R=25$. **D.** $I(9;1;-1)$ và $R=25$.

Lời giải.

Từ phương trình mặt cầu, đọc được ngay tọa độ tâm $I(9;1;1)$ và bán kính $R=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;5;-2)$; $B(2;1;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\dfrac{3}{2};3;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $I\left(\dfrac{3}{2};3;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{3}{2};2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $I(3;6;-1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_I=\dfrac{3}{2}\\ y_I=3\\ z_I=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Suy ra $I\left(\frac{3}{2};3;-\frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(3;0;-1)$, $\vec{c}=(-2;5;1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ là

A. $\vec{u}=(-6;6;0)$. **B.** $\vec{u}=(6;-6;0)$. **C.** $\vec{u}=(6;0;-6)$. **D.** $\vec{u}=(0;6;-6)$.

Lời giải.

Dễ dàng tính được $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(6;-6;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 117. Trong không gian với $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a}=(-5;3;-1)$, $\vec{b}=(1;2;1)$ và $\vec{c}=(m;3;-1)$ Giá trị của m sao cho $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]$

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]=(-5;m+1;3-2m)\Rightarrow\begin{cases}m+1=3\\3-2m=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(2;3;-6)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+6)^2=4$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+6)^2=16$. **D.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16$.

Lời giải.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Vậy mặt cầu (S) tâm $I(2;3;-6)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+6)^2=16.$$

Chọn đáp án C □

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-5;2;3)$ và $\vec{b}=(1;-3;2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$.

A. $\vec{u}=\left(-\frac{11}{12};\frac{35}{12};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\vec{u}=\left(-\frac{11}{12};-\frac{19}{12};\frac{5}{2}\right)$.

C. $\vec{u}=\left(-\frac{29}{12};\frac{35}{12};-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\vec{u}=\left(-\frac{29}{12};-\frac{19}{12};-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}=\left(\frac{1}{3}\cdot(-5)-\frac{3}{4}\cdot1;\frac{1}{3}\cdot2-\frac{3}{4}\cdot(-3);\frac{1}{3}\cdot3-\frac{3}{4}\cdot2\right)=\left(-\frac{29}{12};\frac{35}{12};-\frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án C □

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;7;3)$ và $B(4;1;5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=6\sqrt{2}$. **B.** $AB=76$. **C.** $AB=2$. **D.** $AB=2\sqrt{19}$.

Lời giải.

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4+2)^2 + (1-7)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{19}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;2), B(2;-1;5), C(3;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(2;6;8)$. **B.** $D(0;0;8)$. **C.** $D(2;6;-4)$. **D.** $D(4;-2;4)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 3 - 2 \\ y_D - 3 = 2 + 1 \\ z_D - 2 = -1 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 6 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(2;6;-4).$$

Chọn đáp án C □

Câu 122. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

A. $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-10)^2 = 17$. **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 17$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 17$. **D.** $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = 17$.

Lời giải.

Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu là

$$I\left(\frac{1+5}{2}; \frac{-2+4}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = (3;1;5);$$
$$R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}.$$

Vậy phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 17.$$

Chọn đáp án C □

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc trục Oy?

A. $N(2;0;0)$. **B.** $Q(0;3;2)$. **C.** $P(2;0;3)$. **D.** $M(0;-3;0)$.

Lời giải.

Điểm $A(x;y;z) \in Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Suy ra, trong 4 điểm đã cho, điểm $M(0;-3;0) \in Oy$.

Chọn đáp án D □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-1;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(2;1;3)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

A. $M = (3;2;-3)$. **B.** $M = (3;-2;3)$. **C.** $M = (3;-2;-3)$. **D.** $M = (3;2;3)$.

Lời giải.

Giả sử $M=(x;y;z)$. Khi đó

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)-(0-x)+(2-x)=0\\(-1-y)-(2-y)+(1-y)=0\\(0-z)-(0-z)+(3-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=3.\end{cases}$$

Vậy $M=(3;-2;3)$.
Chọn đáp án B □

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A và có bán kính $R=5$.

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=5$. **B.** $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$.
C. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$. **D.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=25$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $A(2;-3;1)$ và bán kính $R=5$ có phương trình là

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25.$$

Chọn đáp án B □

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;3)$ và $N(3;1;4)$. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $|\overrightarrow{MN}|=6$. **B.** $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{66}$. **C.** $|\overrightarrow{MN}|=2$. **D.** $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{14}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức khoảng cách, $|\overrightarrow{MN}|=MN=\sqrt{(3-1)^2+(1-(-2))^2+(4-3)^2}=\sqrt{14}$.
Chọn đáp án D □

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

A. $I(4;-3;1)$. **B.** $I(-4;3;1)$. **C.** $I(-4;3;-1)$. **D.** $I(4;3;1)$.

Lời giải.

Dạng phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(a,b,c)$. Vậy $I(-4;3;-1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ $\vec{u}$ biết $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$.

A. $\vec{u}=(5;-3;2)$. **B.** $\vec{u}=(2;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(2;5;-3)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;2)$.

Lời giải.

$\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}\Rightarrow\vec{u}=(2;-3;5)$.
Chọn đáp án B □

Câu 129. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4$ có tâm I và bán kính R bằng

A. $I(2;-1;0), R=4$. **B.** $I(2;-1;0), R=2$. **C.** $I(-2;1;0), R=2$. **D.** $I(-2;1;0), R=4$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tâm $I(a,b,c)$, bán kính R. Tâm $I(-2;1;0)$, bán kính $R=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$,$C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;4;-5)$. **B.** $D(4;2;9)$. **C.** $D(6;2;-3)$. **D.** $(-4;-2;9)$.

Lời giải.

Gọi $D(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{CD}=(x+3;y-1;z-2)$ và $\overrightarrow{BA}=(-1;-3;7)$.

Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành ta có $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x+3=-1 \\ y-1=-3 \\ z-2=7 \end{cases} \Rightarrow D(-4;-2;9)$.

Chọn đáp án D □

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;1;-2)$, $N(4;-5;1)$. Tìm độ dài đoạn thẳng MN.

A. 49. **B.** 7. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;-6;3) \Rightarrow MN=\sqrt{4+36+9}=7$.

Chọn đáp án B □

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu có tâm $I(-1;0;0)$ và bán kính $R=9$.

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=3$. **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=81$.

C. $(x-1)^2+y^2+z^2=3$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=9$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(x-(-1))^2+(y-0)^2+(z-0)^2=9^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+z^2=81.$$

Chọn đáp án B □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-x+1=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-6x+9=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+9=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2=0$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2-2=0 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$. Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 134. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-1;2;1)$ và $R=3$. **B.** $I(-1;2;1)$ và $R=9$.

C. $I(1;-2;-1)$ và $R=3$. **D.** $I(1;-2;-1)$ và $R=9$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{9}=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 135. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$. Tọa độ véc-tơ $\vec{u}$ là

A. $\vec{u}=(2;-3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(-2;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(-2;3;-5)$. **D.** $\vec{u}=(2;3;-5)$.

Lời giải.

Chú ý rằng nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ thì $\vec{u}=(a;b;c)$.

Chọn đáp án D □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính độ dài đoạn AB với $A\,(1;-1;0)$, $B\,(2;0;-2)$.

A. $AB=2$. **B.** $AB=\sqrt{2}$. **C.** $AB=6$. **D.** $AB=\sqrt{6}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB}=(1;1;-2)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A\,(-1;-2;-3)$. **B.** $A\,(1;2;3)$. **C.** $A\,(1;-2;3)$. **D.** $A\,(2;-4;6)$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}=(1;-2;3)\Rightarrow A(1;-2;3).$$

Chọn đáp án C □

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tâm I và tính bán kính R của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+2=0$.

A. $I\,(-1;-2;1)\,, R=2$. **B.** $I\,(1;2;-1)\,, R=2\sqrt{2}$.

C. $I\,(-1;-2;1)\,, R=2\sqrt{2}$. **D.** $I\,(1;2;-1)\,, R=2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2-2}=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 139. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC với $A(1;-1;0)$, $B(2;0;-2)$, $C(0;-2;-4)$ là

A. $G\,(1;-1;-2)$. **B.** $G\,(1;-1;2)$. **C.** $G\,(-1;-1;-2)$. **D.** $G\,(-1;1;2)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm G là

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1+2+0}{3}=1 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-1+0-2}{3}=-1 \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{0-2-4}{3}=-2 \end{cases}\Rightarrow G(1;-1;-2).$$

Chọn đáp án A □

Câu 140. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;6;1)$ và $M'(a;b;c)$ đối xứng nhau qua mặt phẳng (Oyz). Tính $S=7a-2b+2017c-1$.

A. $S=2017$. **B.** $S=2042$. **C.** $S=0$. **D.** $S=2018$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của M lên (Oyz), suy ra $H(0;6;1)$.

Do M' đối xứng với M qua (Oyz) nên MM' nhận H làm trung điểm, suy ra $M'(2;6;1)$.

Vậy $T=7\times 2-2\times 6+2017\times 1-1=2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OM}=\vec{j}-\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(0;1;-1)$. **B.** $M(1;1;-1)$. **C.** $M(1;-1)$. **D.** $M(1;-1;0)$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{OM}=\vec{j}-\vec{k}=0\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}-1\cdot\vec{k}$, suy ra $M(0;1;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt cầu tâm $I(1;3;2)$, bán kính $R=4$ có phương trình

A. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=8$. **B.** $(x-1)+(y-3)+(z-2)=16$.

C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=16$. **D.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$.

Lời giải.

Phương trình của mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4^2=16$.

Chọn đáp án C □

Câu 143. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(-2;3;0)$, $\vec{v}=(2;-2;1)$. Độ dài của véc-tơ $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$ là

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{83}$. **C.** $\sqrt{89}$. **D.** $3\sqrt{17}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}=(-2;3;0)-2(2;-2;1)=(-6;7;-2)$.

Vậy mô-đun của véc-tơ $\vec{w}$ là $|\vec{w}|=\sqrt{89}$.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Tìm độ dài đường kính của mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z+2=0$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{0^2+1^2+2^2-2}=\sqrt{3}$ nên độ dài đường kính là $\ell=2R=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 145. Cho hai điểm $A(5;1;3)$, $H(3;-3;-1)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua H là

A. $(-1;7;5)$. **B.** $(1;7;5)$. **C.** $(1;-7;-5)$. **D.** $(1;-7;5)$.

Lời giải.

Do A' đối xứng với A qua H nên AA' nhận H làm trung điểm $\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=1\\ y_{A'}=2y_H-y_A=-7\\ z_{A'}=2z_H-z_A=-5.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(1;-3;5)$. **B.** $(1;-3;2)$. **C.** $(1;-3;0)$. **D.** $(1;-3;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là $(1;-3;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\vec{b}\perp\vec{c}$. **B.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **C.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$. **D.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot1+1\cdot0=2$. Do đó $\vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$.

Chọn đáp án A □

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\vec{a}\cdot\vec{c}=1$. **B.** $\cos(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có

① $\cos(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

② $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$.

③ Dễ thấy $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương vì $\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{1}{1}$.

④ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1;2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 149. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $K(0;2;2\sqrt{2})$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là

A. $x^2+(y-2)^2+(z-2\sqrt{2})^2=4$. **B.** $x^2+(y-2)^2+(z-2\sqrt{2})^2=8$.

C. $x^2+(y-2)^2+(z-2\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}$. **D.** $x^2+(y-2)^2+(z-2\sqrt{2})^2=2$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu tâm K và tiếp xúc với (Oxy) là $R=\mathrm{d}(K,(Oxy))=2\sqrt{2}\Rightarrow$ phương trình mặt cầu là $x^2+(y-2)^2+(z-2\sqrt{2})^2=8$.

Chọn đáp án B □

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ và ba điểm $O(0;0;0)$, $A(1;2;3)$, $B(2;-1;-1)$. Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm O,A,B vào phương trình mặt cầu (S) ta chỉ thấy duy nhất điểm O thuộc mặt cầu (S).

Chọn đáp án D □

Câu 151. Cho ba điểm $A(2;1;4)$, $B(-2;2;-6)$, $C(6;0;-1)$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng

A. -67. **B.** 65. **C.** 33. **D.** 67.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;1;-10)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-1;-5)$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=33$.

Chọn đáp án C □

Câu 152. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ có tâm I và bán kính R là

A. $I(-1;2;-3), R=4$. **B.** $I(2;-4;6), R=\sqrt{58}$.

C. $I(1;-2;3), R=4$. **D.** $I(-2;4;-6), R=\sqrt{58}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S) có thể viết lại như sau: $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Suy ra $I(1;-2;3)$ và $R=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{12}$. **B.** $I(1;-2;3)$ và $R=4$.

C. $I(-1;2;-3)$ và $R=16$. **D.** $I(-1;2;-3)$ và $R=4$.

Lời giải.

Ta có $a=1$, $b=-2$, $c=3$, $d=-2$.

Tâm mặt cầu $I(1;-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+10=0$ và mặt phẳng (P): $2x-y+2z-4=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (P) cắt và không đi qua tâm của (S). **B.** (P) tiếp xúc với (S).

C. (P) không có điểm chung với (S). **D.** (P) đi qua tâm của (S).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2-10}=2$.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2+2-6-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2=R$. Vậy (P) tiếp xúc với (S).

Chọn đáp án B □

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+6y-6=0$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{46}$. **B.** 16. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

(S) có tâm $I(1;-3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2-(-6)}=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(4;-2;7)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox là điểm

A. $H(0;-2;7)$. **B.** $S(4;-2;0)$. **C.** $R(0;0;7)$. **D.** $K(4;0;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $M(x;y;z)$ lên Ox là điểm $M_x(x;0;0)$. Vậy chọn $K(4;0;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A thỏa mãn $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}$. Khi đó tọa độ điểm A là

A. $(-2;3;7)$. **B.** $(2;-3;7)$. **C.** $(-3;2;7)$. **D.** $(2;7;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.
Vậy $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}=(2;-3;7)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u}=-4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$. Khi đó véc-tơ $\vec{u}$ có tọa độ là

A. $(-4;\,5;\,6)$. **B.** $(4;\,-5;\,-6)$. **C.** $(5;\,-4;\,6)$. **D.** $(-4;\,6;\,5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.
$\vec{u}=-4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}=(-4;5;6)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2-2x+4y-6z-11=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

A. $I\left(1;-2;3\right), R=\sqrt{3}$. **B.** $I\left(1;-2;3\right), R=5$.
C. $I\left(-1;2;-3\right), R=\sqrt{3}$. **D.** $I\left(-1;2;-3\right), R=5$.

Lời giải.

Ta có: $a=1, b=-2, c=3, d=-11$. Vậy tâm $I\left(1;-2;3\right), R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=5$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu (S).

A. $I(0;0;-3)$. **B.** $I(-3;-3;0)$. **C.** $I(3;3;0)$. **D.** $I(0;0;3)$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+6z-2=0$ có tâm $I(0;0;-3)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 161. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(3;3;3)$. **B.** $G(1;1;1)$. **C.** $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G(1;1;1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;3), B(2;-1;-3)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $(3;-3;-6)$. **B.** $(-3;3;6)$. **C.** $(1;1;0)$. **D.** $(3;1;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2+1; -1-2; -3-3) = (3; -3; -6)$.
Chọn đáp án A □

Câu 163. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây là hình chiếu của điểm $M(2;1;-3)$ lên mặt phẳng Oxz?

A. $M_1(2;1;0)$. **B.** $M_2(0;1;0)$. **C.** $M_3(0;1;-3)$. **D.** $M_1(2;0;-3)$.

Lời giải.

Dễ thấy $M_1(2;0;-3)$.
Chọn đáp án D □

Câu 164. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-11=0$. Tính bán kính R của mặt cầu.

A. $R=\sqrt{3}$. **B.** $R=25$. **C.** $R=3$. **D.** $R=5$.

Lời giải.

Viết lại phương trình mặt cầu dưới dạng $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$. Vậy, $R=5$.
Chọn đáp án D □

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-1=0$. Tâm và bán kính của mặt cầu (S) là

A. $I(2;-2;2)$, $R=\sqrt{11}$. **B.** $I(-2;2;-2), R=\sqrt{13}$.
C. $I(1;-1;1)$, $R=2$. **D.** $I(1;-1;1)$, $R=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=-1$ và $a^2+b^2+c^2-d=4>0$. Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính là $R=\sqrt{4}=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2+y^2-z^2+4x-2y+6z+5=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+15=0$.
C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2xy+6z-5=0$.

Lời giải.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z-1=0$ là phương trình mặt cầu vì có dạng là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ và thỏa $a^2+b^2+c^2-d>0$ (dễ nhận biết vì $d=-1<0$).
Chọn đáp án C □

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ có tọa độ bằng bao nhiêu?

A. $(-2;-5;1)$. **B.** $\left(1;\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(2;5;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}=(2;5;-1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;4)$, $B(-1;1;2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=5$. **B.** $AB=\sqrt{5}$. **C.** $AB=3$. **D.** $AB=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{(-1+1)^2+(1-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a} = (1;3;4)$. Tìm véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$.

A. $\vec{b}$=(2;-6;-8). **B.** $\vec{b}$=(-2;-6;-8). **C.** $\vec{b}$=(-2;-6;8). **D.** $\vec{b}$=(-2;6;8).

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ khi $\vec{b} = k\vec{a}$. Vậy $\vec{b} = (-2;-6;-8)$.

Chọn đáp án B □

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vec-tơ $\vec{a} = (0;1;3)$; $\vec{b} = (-2;3;1)$. Tìm tọa độ của vec-tơ $\vec{x}$ biết $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

A. $\vec{x} = (-2;4;4)$. **B.** $\vec{x} = (4;-3;7)$. **C.** $\vec{x} = (-4;9;11)$. **D.** $\vec{x} = (-1;9;11)$.

Lời giải.

$$3\vec{a} = (0;3;9); 2\vec{b} = (-4;6;2) \Rightarrow \vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = (-4;9;11).$$

Chọn đáp án C □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;2)$, $C(6;0;1)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(4;3;-2)$. **B.** $D(8;-3;4)$. **C.** $D(-4;-3;2)$. **D.** $D(-2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi $D(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{DC} = (6-x;-y;1-z)$, $\overrightarrow{AB} = (2;-3;3)$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=2 \\ -y=-3 \\ 1-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow D(4;3;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tâm I và bán kính r của mặt cầu (S).

A. $I(1;0;-3)$, $r=4$. **B.** $I(-1;0;3)$, $r=2$. **C.** $I(-1;0;3)$, $r=4$. **D.** $I(1;0;-3)$, $r=2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(-1;0;3)$ và bán kính $r=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;3)$ và $B(3;1;2)$. Tọa độ $\overrightarrow{AB}$ là bộ số nào sau đây?

A. $(1;0;-1)$. **B.** $(1;-2;-1)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(-1;-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 174. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;-2)$ và $N(4;3;0)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN = \sqrt{14}$. **B.** $MN = (3;3;2)$.

C. $NM = \sqrt{22}$. **D.** $NM = (-3;-3;-2)$.

Lời giải.

Ta có $MN = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{22}$.
Chọn đáp án C □

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1;-3;4)$ và $\vec{v} = (1;3;0)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $(1;-3;4)$. **B.** -8. **C.** -5. **D.** $(1;-9;0)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + 4 \cdot 0 = -8$.
Chọn đáp án B □

Câu 176. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-4)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oxy).

A. $(1;2;0)$. **B.** $(1;2;-4)$. **C.** $(0;2;-4)$. **D.** $(1;0;-4)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là $(1;2;0)$.
(Hoành độ, tung độ giữ nguyên, cao độ bằng không).
Chọn đáp án A □

Câu 177. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) là

A. $I(-1;2;1)$ và $R = 3$. **B.** $I(1;-2;-1)$ và $R = 3$.
C. $I(-1;2;1)$ và $R = 9$. **D.** $I(1;-2;-1)$ và $R = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R = 3$.
Chọn đáp án A □

Câu 178. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

A. $(-2;1;2)$. **B.** $(1;2;-2)$. **C.** $(2;1-2)$. **D.** $(2;1;2)$.

Lời giải.

Tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = (2;1-2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 179. Mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(-1;2;-3)$, $R = 16$. **B.** $I(-1;2;-3)$, $R = 4$.
C. $I(-1;2;-3)$, $R = \sqrt{12}$. **D.** $I(1;-2;3)$, $R = 4$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$.
Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R = 4$.
Chọn đáp án B □

Câu 180. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OA} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(-2;3;0)$. **B.** $A(-2;0;3)$. **C.** $A(0;2;-3)$. **D.** $A(0;-2;3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = -2\vec{j} + 3\vec{k} = (0;-2;3) \Rightarrow A(0;-2;3)$.
Chọn đáp án D □

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

A. Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$. **B.** Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$.

C. Tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R=4$. **D.** Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=16$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.

Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 182. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=\sqrt{24}$. **B.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\sqrt{24}$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=24$. **D.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=24$.

Lời giải.

Tâm $I(1;-3;2)$.

Bán kính $R=IA=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=24$.

Chọn đáp án D □

Câu 183. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(0;-3;0)$. **B.** $(0;-3;-5)$. **C.** $(0;3;5)$. **D.** $(1;-3;0)$.

Lời giải.

Cho điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Khi đó

- ☑ Hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng Oxy là $H(x_M;y_M;0)$.
- ☑ Hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng Oxz là $H(x_M;0;z_M)$.
- ☑ Hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng Oyz là $H(0;y_M;z_M)$.

Do đó hình chiếu của $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $M(0;-3;-5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba véc-tơ $\vec{a}=(3;4;-4)$, $\vec{b}=(3;0;4),\vec{c}=(-6;1;-1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

A. $\vec{m}=(3;22;-3)$. **B.** $\vec{m}=(3;22;3)$. **C.** $\vec{m}=(-3;22;-3)$. **D.** $\vec{m}=(3;-22;3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{m}=(3.3-2.3-6;3.4-2.0+1;3.(-4)-2.4-1)=(3;22;-3)$;

Chọn đáp án A □

.

Câu 185. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;5)$, $B(m;2;7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB=7$.

A. $m=9$ hoặc $m=-3$. **B.** $m=-3$ hoặc $m=-9$.

C. $m=9$ hoặc $m=3$. **D.** $m=3$ hoặc $m=-3$.

Lời giải.

$$AB=7\Leftrightarrow\sqrt{(m-3)^2+3^2+2^2}=7\Leftrightarrow(m-3)^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3=6\\m-3=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\m=-3.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(-1;2;3)$, $R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1;-2;3)$, $R=\sqrt{5}$.

C. $I(1;-2;3)$, $R=5$. **D.** $I(-1;2;-3)$, $R=5$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-9}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 187. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;1)$, $C(0;3;-1)$. Xét bốn khẳng định sau

(I). $BC=2AB$.

(II). Điểm B thuộc đoạn AC.

(III). Ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác.

(IV). Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Trong bốn khẳng định trên các khẳng định **sai** là

A. (I) và (II). **B.** (II) và (III). **C.** (II) và (IV). **D.** (III) và (IV).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;1;-1)=-\overrightarrow{AB}$ nên điểm A là trung điểm của BC và A, B, C thẳng hàng. Từ đó ta thấy kết luận (II) và (III) là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 188. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(3;-1;1)$. Điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M\,(-3;-1;1)$. **B.** $N\,(0;-1;1)$. **C.** $P\,(0;-1;0)$. **D.** $Q\,(0;0;1)$.

Lời giải.

Giữ nguyên y,z và đổi dấu x nên ta suy ra điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oyz) là điểm $M\,(-3;-1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 189. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-2;3;-1)$. Khi đó $\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(-1;5;2)$. **B.** $(3;-1;4)$. **C.** $(1;5;2)$. **D.** $(1;-5;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(-1;5;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 190. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tâm I của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x-2y+1=0$ có tọa độ là

A. $I(4;1;0)$. **B.** $I(4;-1;0)$. **C.** $I(-4;1;0)$. **D.** $I(-4;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2-8x-2y+1=0\Leftrightarrow(x-4)^2+(y-1)^2+z^2=16$. Do đó mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $I(4;1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 191. Trong không gian cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp tâm của các mặt cầu đi qua 2 điểm A, B.

A. Mặt phẳng trung trực đoạn AB. **B.** Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.

C. Đường tròn đường kính AB. **D.** Chỉ có một tâm duy nhất là trung điểm AB.

Lời giải.

Tập hợp tâm của mặt cầu đi qua hai điểm A, B là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Chọn đáp án (A) □

Câu 192. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;0)$, $\vec{b} = (2;-1;1)$, $\vec{c} = (1;-1;0)$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $|\vec{a}| = \sqrt{5}$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$. **C.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **D.** $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{c}, \vec{b}$ không vuông góc nhau.

Chọn đáp án (D) □

Câu 193. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 4 = 0$ có bán kính R là

A. $R = \sqrt{53}$. **B.** $R = 4\sqrt{2}$. **C.** $R = \sqrt{10}$. **D.** $R = 3\sqrt{7}$.

Lời giải.

$(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Vậy bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(1;2;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** 18. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3+1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 195. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 4$. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đã cho.

A. $I(3;1;-4), R = 2$. **B.** $I(-3;-1;4), R = 2$. **C.** $I(3;1;-4), R = 4$. **D.** $I(-3;-1;4), R = 4$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(3;1;-4)$ và bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 196. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;2;-1)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O là

A. $A'(3;-2;1)$. **B.** $A'(3;2;-1)$. **C.** $A'(3;-2;-1)$. **D.** $A'(3;2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x_{A'} = 2x_O - x_A = 3 \\ y_{A'} = 2y_O - y_A = -2 \\ z_{A'} = 2z_O - z_A = 1 \end{cases}$. Vậy $A'(3;-2;1)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 197. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) là

A. $I(-1;2;1)$, $R=9$. **B.** $I(1;-2;-1)$, $R=9$.

C. $I(1;-2;-1)$, $R=3$. **D.** $I(-1;2;1)$, $R=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(4;-2;3)$. **B.** $A(-2;3;4)$. **C.** $A(-2;4;3)$. **D.** $A(4;2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Suy ra tọa độ điểm A là $A(4;-2;3)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 199. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ có bán kính R là

A. $R=\sqrt{5}$. **B.** $R=25$. **C.** $R=2$. **D.** $R=5$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2-(-4)}=5$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 200. Trong không gian $Oxyz$, toạ độ của véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ là

A. $(2;-3;4)$. **B.** $(-3;2;4)$. **C.** $(2;3;4)$. **D.** $(2;4;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)\Rightarrow 2\vec{i}=(2;0;0)$, $3\vec{j}=(0;3;0)$, $4\vec{k}=(0;0;4)$.

Vậy $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}=(2;-3;4)$.

Chọn đáp án A ☐

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. A	5. A	6. A	7. C	8. C	9. A	10. C
11. C	12. D	13. C	14. A	15. C	16. C	17. A	18. D	19. C	20. C
21. B	22. C	23. C	24. B	25. A	26. A	27. C	28. C	29. B	30. A
31. B	32. B	33. D	34. A	35. D	36. D	37. C	38. A	39. D	40. B
41. C	42. B	43. C	44. D	45. A	46. B	47. C	48. D	49. A	50. A
51. D	52. B	53. D	54. B	55. D	56. B	57. D	58. A	59. C	60. C
61. A	62. C	63. B	64. B	65. A	66. B	67. B	68. A	69. A	70. C
71. D	72. C	73. A	74. B	75. B	76. C	77. D	78. C	79. B	80. A
81. A	82. C	83. B	84. C	85. A	86. A	87. A	88. D	89. B	90. A
91. C	92. A	93. A	94. A	95. B	96. D	97. A	98. A	99. D	100. B
101. B	102. D	103. A	104. D	105. A	106. B	107. B	108. C	109. B	110. C
111. B	112. B	113. B	114. A	115. A	116. B	117. D	118. C	119. C	120. D
121. C	122. C	123. D	124. B	125. B	126. D	127. C	128. B	129. C	130. D
131. B	132. B	133. D	134. A	135. D	136. D	137. C	138. D	139. A	140. D
141. A	142. C	143. C	144. A	145. C	146. C	147. A	148. B	149. B	150. D
151. C	152. C	153. B	154. B	155. D	156. D	157. B	158. A	159. B	160. A
161. B	162. A	163. D	164. D	165. C	166. C	167. D	168. B	169. B	170. C
171. A	172. B	173. C	174. C	175. B	176. A	177. A	178. C	179. B	180. D
181. A	182. D	183. B	184. A	185. A	186. B	187. B	188. A	189. A	190. A
191. A	192. D	193. C	194. D	195. A	196. A	197. C	198. A	199. D	200. A

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

Lời giải.

Do điểm $A\in Oz$ nên suy ra $A(0;0;c)$, mà ta lại có $A\in(P)$ nên suy ra $c=3$. Do đó $A(0;0;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=5+t\\y=2t\\z=6-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=5+t\\y=2t\\z=6-t\\2x+6y+z-3=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\x=4\\y=-2\\z=7\end{cases}$

Do đó $B(4;-2;7)$.

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB, suy ra $I(2;-1;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ suy ra $AB=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=6$ nên bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-2;1)$ và $\vec{v}=(2;1;-1)$. Vectơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?

A. $\overrightarrow{w_1}=(1;-3;5)$. **B.** $\overrightarrow{w_4}=(1;4;7)$. **C.** $\overrightarrow{w_3}=(1;-4;5)$. **D.** $\overrightarrow{w_2}=(1;3;5)$.

Lời giải.

Vectơ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ $[\vec{u},\vec{v}]=(1;3;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2+i|=1$, $|z_2-7|=|\overline{z}_2-7+2i|$. Biết $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là một số thực. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z_1-z_2|$.

A. $T_{\max}=\sqrt{2}$. **B.** $T_{\max}=2\sqrt{2}$. **C.** $T_{\max}=3\sqrt{2}$. **D.** $T_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z_1=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},i^2=-1)$ và $z_2=a'+b'i$ $(a',b'\in\mathbb{R},i^2=-1)$.

Ta có

- ☑ $|z_1-2+i|=1\Leftrightarrow|a-2+(b+1)i|=1\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+1)^2=1\Rightarrow(b+1)^2\le1\Leftrightarrow-2\le b\le0$.
- ☑ $|z_2-7|=|\overline{z}_2-7+2i|\Leftrightarrow|a'-7+b'i|=|a'-7+(2-b')i|\Leftrightarrow b'^2=(2-b')^2\Leftrightarrow b'=1$.
- ☑ $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}=\dfrac{[(a-a')+(b-b')i](1-i)}{2}=\dfrac{(a-a'+b-b')+(b-b'+a'-a)i}{2}$.
  $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực nên $b-b'+a'-a=0\Leftrightarrow b-b'=a-a'$.
- ☑ $T=|z_1-z_2|=\sqrt{(b-b')^2+(a-a')^2}=\sqrt{2(b-1)^2}=\sqrt{2}(1-b)\le3\sqrt{2}$ (do $-2\le b\le0$).

Dấu "=" xảy ra khi $b=-2 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a'=5 \end{cases}$.

Vậy $T_{\max}=3\sqrt{2}$ khi $z_1=2-2i$, $z_2=5+i$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, gọi S là tập hợp các số có 8 chữ số đôi một khác nhau lập từ tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, xác suất để số được chọn có tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối bằng

A. $\dfrac{3}{35}$. **B.** $\dfrac{4}{35}$. **C.** $\dfrac{12}{245}$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Lời giải.

Mỗi số thuộc tập S có tổng các chữ số bằng $\dfrac{7\cdot 8}{2}=28$.

Ta chia tập A thành hai tập con B và C sao cho mỗi tập có 4 phần tử, tổng các phần tử ở mỗi tập bằng 14 và $B\cap C=\emptyset$. Ta có bảng sau

B	C
$\{0;1;6;7\}$	$\{2;3;4;5\}$
$\{0;2;5;7\}$	$\{1;3;4;6\}$
$\{0;3;4;7\}$	$\{1;2;5;6\}$
$\{0;3;5;6\}$	$\{1;2;4;7\}$

Số các số có 8 chữ số lập từ tập A là $7\cdot 7!$.

Gọi $\overline{a_1a_2\cdot a_8}$ là số có 8 chữ số thỏa mãn tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Trường hợp 1. $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy các chữ số từ tập C, khi đó, có $4\cdot 4!\cdot 4!$ số thỏa mãn.

Trường hợp 2. $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy các chữ số từ tập B, khi đó, có $4\cdot 3\cdot 3!\cdot 4!$ số thỏa mãn.

Vậy có $4\cdot 4!\cdot 4!+4\cdot 3\cdot 3!\cdot 4!=4\cdot 4!(4!+3\cdot 3!)$ số thỏa mãn tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{4\cdot 4!(3\cdot 3!+4!)}{7\cdot 7!}=\dfrac{4}{35}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2018x+2019}-24\sqrt{14}}{x^2-(m+1)x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2021.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} -x^2+2018x+2019\geq 0 \\ x^2-(m+1)x+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 2019 \\ x\neq 1; x\neq m \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì $-1\leq x\leq 2019$.

Ta có

$$y=\frac{\sqrt{-x^2+2018x+2019}-24\sqrt{14}}{x^2-(m+1)x+m}=\frac{(-x^2+2018x+2019)-(24\sqrt{14})^2}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})}$$
$$=\frac{-x^2+2018x-6045}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})}$$
$$=\frac{-(x-3)(x-2015)}{(x-1)(x-m)(\sqrt{-x^2+2018x+2019}+24\sqrt{14})}$$

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi chỉ khi $\begin{cases}-1\le m\le 2019\\ m\ne 1;m\ne 3;m\ne 2015\end{cases}$.

Mặt khác, m là số nguyên nên ta có $2021-3=2018$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=99$ và điểm $M(1;7;-8)$. Qua điểm M kẻ các tia Ma, Mb, Mc đôi một vuông góc nhau và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $K(x_k;y_k;z_k)$. Tính giá trị $P=x_k+2y_k-z_k$.

A. $P=11$. **B.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=12$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;4;1)$, bán kính $R=\sqrt{99}$.

Ta có $M(1;7;-8)\in(S)$.

Xét hình hộp chữ nhật $AHPQ.MBDC$.

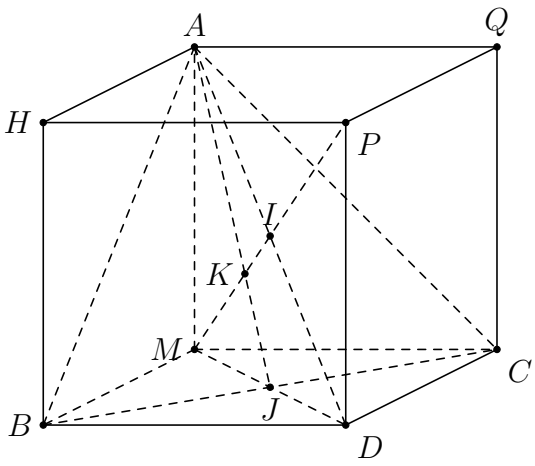
Gọi $J=MD\cap BC$, $K=MP\cap AJ\Rightarrow K\in(ABC)$.

Rõ ràng, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MABC$ là trung điểm của đoạn MP (cũng là tâm của (S)).

Mặt khác K là trọng tâm của tam giác MAD hay $\overrightarrow{MK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MI}$. Vì M, I cố định nên K cố định. Vậy K chính là điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn luôn đi qua.

Ta có $\overrightarrow{MK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MI}\Rightarrow K(-1;5;-2)$

$\Rightarrow P=x_k+2y_k-z_k=-1+2\cdot 5-(-2)=11$.



Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{(3m+2)x^2}{2}+(2m^2+3m+1)x+m-2$ (1). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số (1) có cực đại, cực tiểu $x_{\text{CĐ}}$, x_{CT} sao cho $3x_{\text{CĐ}}^2=4x_{\text{CT}}$. Khi đó, tổng các phần tử của tập S bằng

A. $S=\frac{-4-\sqrt{7}}{6}$. **B.** $S=\frac{4+\sqrt{7}}{6}$. **C.** $S=\frac{-4+\sqrt{7}}{6}$. **D.** $S=\frac{4-\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-(3m+2)x+(2m^2+3m+1)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2m+1\\ x=m+1\end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi chỉ khi $m\ne 0$.

☑ Trường hợp $m>0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}}=m+1$, $x_{\text{CT}}=2m+1$.

Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2 = 4x_{\text{CT}} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (nhận)} \\ m = -\dfrac{1}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

☑ Trường hợp $m < 0$. Khi đó, $x_{\text{CĐ}} = 2m + 1$, $x_{\text{CT}} = m + 1$.

Ta có $3x_{\text{CĐ}}^2 = 4x_{\text{CT}} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{6} \text{ (loại)} \\ m = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$.

Vậy $S = \{1; \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}\}$. Do đó, tổng $1 + \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6} = \dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1,\ n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

A. 35. **B.** 31. **C.** 21. **D.** 34.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} - 2n + 1 \\ u_{n-1} &= u_{n-2} - 2n + 3 \\ \vdots &\ \vdots \quad\quad \vdots \\ u_3 &= u_2 - 2n + 2n - 5 \\ u_2 &= u_1 - 2n + 2n - 3 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 - 2n \cdot (n-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) \\ u_n &= 99 - 2n^2 + 2n + \frac{n-1}{2}\left[2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2\right] = 100 - n^2 \end{aligned}$$

Giả sử $u_n = -861 \Rightarrow n^2 = 961 \Rightarrow n = 31$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

Vậy số -861 là số hạng thứ 31.

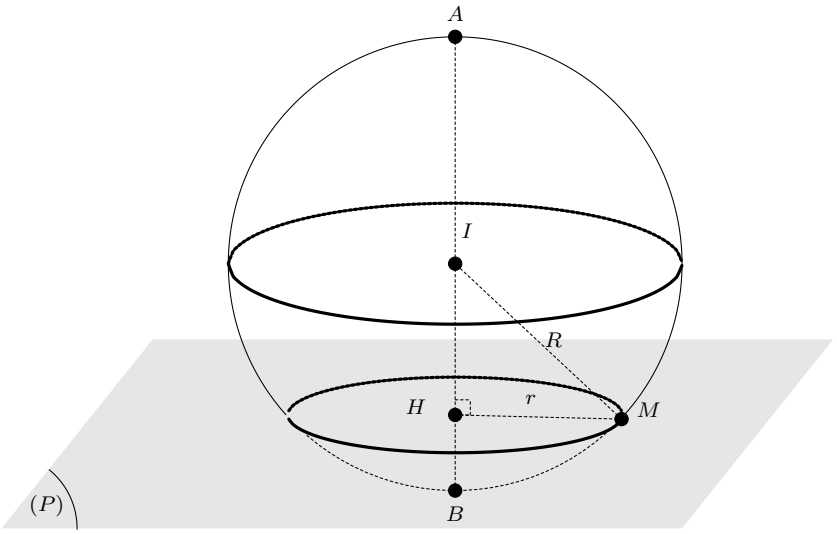
Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $T = b - c + d$.

A. $T = -18$. **B.** $T = -20$. **C.** $T = -21$. **D.** $T = -19$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;4;2)$.
Mà $\overrightarrow{AB} \perp (P)$
Nên $\dfrac{2}{4} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1. \end{cases}$
Suy ra $(P)\colon 2x + 2y + z + d = 0$.
Ta có $AB = 6$.
Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra $I\,(4;3;4)$.
Ta có (S) là mặt cầu có đường kính AB nên
$(S)\colon \begin{cases} \text{tâm } I\,(4;3;4) \\ \text{bán kính } R = \dfrac{AB}{2} = 3 \end{cases}$.



Gọi r là bán kính đường tròn tâm H. Khi đó, thể tích khối nón đỉnh cần tìm được xác định bởi công thức Ta có

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot AH &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R + IH) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(3 \cdot r^2 + r^2 \cdot \sqrt{9 - r^2}\right) \end{aligned}$$

Đặt $f(r) = 3 \cdot r^2 + r^2 \cdot \sqrt{9 - r^2}$, $r \in (0;3]$.
Ta có $f'(r) = r\left(6 + 2 \cdot \sqrt{9 - r^2} - \dfrac{r^2}{\sqrt{9 - r^2}}\right)$.
Suy ra $f'(r) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \text{ (loại)} \\ 6 + 2 \cdot \sqrt{9 - r^2} - \dfrac{r^2}{\sqrt{9 - r^2}} = 0 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{9 - r^2} = r^2 - 6$, (điều kiện $r^2 \geq 6$).
$\Leftrightarrow r^4 - 8r^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} r = 0 & \text{(loại)} \\ r^2 = 8 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = -2\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ r = 2\sqrt{2} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$
Suy ra $HI = \sqrt{R^2 - r^2} = 1$.
Ta có $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AI + HI}{AI} = \dfrac{R + HI}{R} = \dfrac{4}{3}$.
Suy ra $AH = \dfrac{4}{3}AI \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{11}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$.
Mà $H\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{11}{3}; \dfrac{13}{3}\right) \in (P)\colon 2x + 2y + z + d = 0 \Rightarrow d = -21$.
Vậy $T = b - c + d = -20$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều và $AB = BC = CD = a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

60°. Tính sin góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

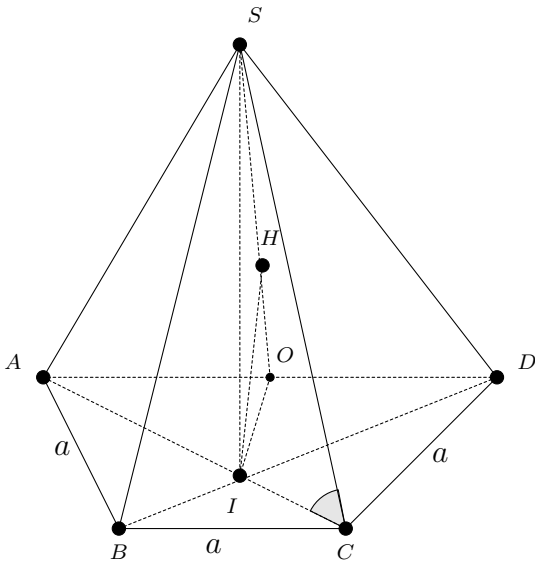
Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases}(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\\(SAC)\cap(SBD)=SI\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCI}$ nên $\widehat{SCI}=60°$.

Xét $\triangle BCD$, ta có

$$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2\cdot BD\cdot CD\cdot\cos\widehat{BCD}\\&=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\cos 120°\\&=3a^2\end{aligned}$$



Suy ra $AC=BD=a\sqrt{3}$.

Vì $BC\parallel AD\Rightarrow\triangle IBC\backsim\triangle IDA$, suy ra $\dfrac{IC}{IA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{IC}{AC-IC}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{IC}{a\sqrt{3}-IC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow IC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow IA=2IC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SIC$ vuông tại I, ta có $\begin{cases}SI=IC\cdot\tan 60°=a\\SC=\dfrac{IC}{\cos 60°}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

Gọi O là trung điểm của AD.

Xét $\triangle AID$ cân tại I với trung tuyến IO, ta có $IO^2=\dfrac{IA^2+ID^2}{2}-\dfrac{AD^2}{4}=\dfrac{a^2}{3}\Rightarrow IO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dựng IH vuông góc với SO tại H.

Suy ra $\mathrm{d}\,(I,(SAD))=IH=\dfrac{a}{2}$.

Ta có $CI\cap(SAD)=A\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\,(C,(SAD))}{\mathrm{d}\,(I,(SAD))}=\dfrac{AC}{AI}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\mathrm{d}\,(C,(SAD))=\dfrac{3a}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của C lên mặt phẳng (SAD).

Suy ra SK là hình chiếu của CK lên mặt phẳng (SAD) và $CK=\mathrm{d}\,(C,(SAD))=\dfrac{3a}{4}$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSK}$ và $\sin\widehat{CSK}=\dfrac{CK}{SC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho các số thực x,y thay đổi thoả mãn $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\dfrac{1}{e^{3x^2-3}}$. Gọi m_0 là giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|x^2+2xy-y^2+3m-2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, m_0 thuộc vào khoảng nào?

A. $m_0\in(1;2)$. **B.** $m_0\in(-1;0)$. **C.** $m_0\in(2;3)$. **D.** $m_0\in(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\dfrac{1}{e^{3x^2-3}}$.

$\Leftrightarrow e^{(x+y)^2}+(x+y)^2=e^{3-3x^2}+3-3x^2 \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=e^t+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f\left[(x+y)^2\right]=f\left(3-3x^2\right)$.

Suy ra $(x+y)^2=3-3x^2$.

Vì $(x+y)^2\geq 0\Leftrightarrow 3-3x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
&(x+y)^2=3-3x^2\\
\Leftrightarrow\ &4x^2+2xy+y^2=3\\
\Leftrightarrow\ &16x^2+8xy+y^2=12-3y^2\\
\Leftrightarrow\ &(4x+y)^2=12-3y^2
\end{aligned}$$

Vì $(4x+y)^2\geq 0\Leftrightarrow 12-3y^2\geq 0\Leftrightarrow y^2\leq 4$.

Mặt khác, ta có $(x+y)^2=3-3x^2\Leftrightarrow 4x^2+2xy+y^2=3$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&P=\left|3x^2+2y^2-(3m+1)\right|\\
\Leftrightarrow\ &3P=\left|9x^2+6y^2-3\cdot(3m+1)\right|\\
\Leftrightarrow\ &3P=\left|9x^2+6y^2-\left(4x^2+2xy+y^2\right)(3m+1)\right|\\
\Leftrightarrow\ &3P=\left|(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2\right|\\
\Leftrightarrow\ &P=\left|\frac{(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2}{3}\right|\\
\Leftrightarrow\ &P=\left|\frac{(5-2m)\,x^2-(6m+2)\,xy+(5-3m)\,y^2}{4x^2+2xy+y^2}\right|
\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $y=0$. Ta có $P=\left|\dfrac{5-2m}{4}\right|=\dfrac{|5-2m|}{4}$.

Trường hợp 2: $y\neq 0$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}$.

Suy ra $P=\left|\dfrac{(5-2m)\,t^2-(6m+2)\,t+(5-3m)}{4t^2+2t+1}\right|$.

Đặt $f(t)=\dfrac{(5-2m)\,t^2-(6m+2)\,t+(5-3m)}{4t^2+2t+1}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{18t^2-30t-12}{\left(4t^2+2t+1\right)^2}$.

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow 18t^2-30t-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & \Rightarrow f(2)=1-3m\\ t=-\dfrac{1}{3} & \Rightarrow f(-\dfrac{1}{3})=8-3m\end{array}\right.$

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{5-2m}{4}$	$\nearrow$	$8-3m$	$\searrow$	$1-3m$	$\nearrow$	$\frac{5-2m}{4}$

Suy ra $\max P \in \{|1-3m|\,;|8-3m|\} = \{|3m-1|\,;|8-3m|\} \geq \dfrac{|3m-1+8-3m|}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất đạt giá trị nhỏ nhất khi $3m-1 = 8-3m \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $m = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho số phức $z = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $z+7+i-|z|(2+i) = 0$ và $|z| < 3$. Tính giá trị $P = a+b$

A. $P = \dfrac{5}{2}$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $P = 5$.

Lời giải.

Ta có $z+7+i-|z|(2+i) = 0 \Leftrightarrow a+bi+7+i-\sqrt{a^2+b^2}(2+i) = 0$.

$\Leftrightarrow \left(a+7-2\sqrt{a^2+b^2}\right) + \left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+7-2\sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b-5 \\ \sqrt{a^2+b^2} = b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b-5 \\ 4b^2-22b+24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b-5 \\ b = 4 \text{ hay } b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Với $b = 4 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow |z| = 5$ (vô lý).

Với $b = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow |z| = \dfrac{5}{2} < 3$.

Suy ra $P = a+b = -2+\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 29$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 5$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 25$. **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 5$.

Lời giải.

Ta có $R^2 = IA^2 = (1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2 = 5$

nên phương trình của mặt cầu là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = 6$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+2)^2+(-3-5)^2}}{2}=6$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$?

A. $k=3$. **B.** $k=\dfrac{1}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Do đó $k=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=0$. **B.** $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ nên đáp án D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các vectơ $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\left(3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}\\&=\left(3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}\\&=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+(x+3)\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+(x+3)\overrightarrow{DC}\\&=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+(x+2)\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

Ba vectơ $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;1;6)$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=2+t\\ y=1-2t\\ z=2t\end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của A trên Δ là

A. $M(3;-1;2)$. **B**. $H(11;-17;18)$. **C**. $N(1;3;-2)$. **D**. $K(2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi B là hình chiếu của A xuống Δ. Do $B \in \Delta \Rightarrow B(2+t;1-2t;2t)$. $\overrightarrow{AB} = (3+t;-2t;2t-6)$.
Do $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_\Delta \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (3+t) + (-2) \cdot (-2t) + 2 \cdot (2t-6) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Vậy $B(3;-1;2)$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon\ x-2y-2z+3=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A. $S\colon\ x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B**. $S\colon\ x^2+y^2+z^2-2x+y+z-3=0$.
C. $S\colon\ x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+1=0$. **D**. $S\colon\ x^2+y^2+z^2-2x+y+z+1=0$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu.
Do (S) tiếp xúc với (P) nên $R = \mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{|2-2(-1)-2(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3$.
Vậy phương trình $S\colon\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$. Bán kính R của mặt cầu S bằng

A. $R=3$. **B**. $R=2$. **C**. $R=6$. **D**. $R=9$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$, nên bán kính mặt cầu S bằng 3.
Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$ và $B(0;3;-1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$. **B**. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$.
C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$. **D**. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^{=}6$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;-2)$.
Bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2^2+4^2+2^2}}{2} = \sqrt{6}$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và $C(2;0;1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

A. $1;-2;3$. **B**. $(-2;2;-1)$. **C**. $(2;-2;1)$. **D**. $(-1;2;-3)$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow A(1;-2;3)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -2 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(2;-2;1).$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình của mặt cầu?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $a=-2m$; $b=-m$; $c=m$ và $d=9m^2-28$.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow 4m^2+m^2+m^2-9m^2+28>0 \Leftrightarrow 28-3m^2>0 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{21}}{3}<m<\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P): $2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng d: $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

Lời giải.

Do điểm $A \in Oz$ nên suy ra $A(0;0;c)$, mà ta lại có $A \in (P)$ nên suy ra $c=3$. Do đó $A(0;0;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=5+t \\ y=2t \\ z=6-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x=5+t \\ y=2t \\ z=6-t \\ 2x+6y+z-3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=4 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases}$

Do đó $B(4;-2;7)$.

Gọi I là tâm mặt cầu đường kính AB nên I là trung điểm AB, suy ra $I(2;-1;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ suy ra $AB=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=6$ nên bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A\,(1;2;-1)$ và điểm $B\,(2;1;2)$

A. $M\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{2};0;0\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{2}{3};0;0\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Ox \Rightarrow M(m;0;0)$.

Theo bài ta có:

$$\begin{aligned} MA = MB &\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2^2 + 1^2 = (m-2)^2 + 1^2 + 2^2 \\ &\Leftrightarrow (m-1)^2 = (m-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 = m-2 \\ m-1 = 2-m \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;0\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2;3;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(6;5;0)$. Toạ độ đỉnh D là

A. $D(1;8;-2)$. **B.** $D(11;2;2)$. **C.** $D(1;8;2)$. **D.** $D(11;2;-2)$.

Lời giải.

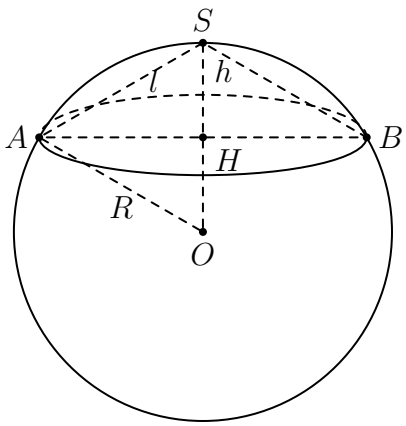
Ta có $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_D = 3 + 2 \\ 5 - y_D = 0 - 3 \\ -z_D = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 8 \\ z_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(1;8;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hình nón đỉnh S có đường sinh bằng 2, đường cao bằng 1. Tìm đường kính của mặt cầu chứa điểm S và chứa đường tròn đáy hình nón đã cho.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu.

Đường tròn đá của hình nón có tâm H bán kính r.

Do H là hình chiếu của S và O trên mặt đáy của hình nón nên S, H, O thẳng hàng.

Hình nón có độ dài đường sinh $l = 2$, đường cao $h = 1$. Suy ra $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{3}$.

Góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = 2\widehat{ASH} = 120^\circ$ nên suy ra $H \in SO$ (như hình vẽ).

Trong tam giác OAH vuông tại H ta có:

$OA^2 = OH^2 + HA^2 \Leftrightarrow R^2 = (R-h)^2 + r^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{h^2 + r^2}{2h} = 2.$

Vậy đường kính mặt cầu chứa điểm S và đường tròn đáy hình nón bằng 4.

Cách 2:

Gọi lần O, R lượt là tâm và bán kính của mặt cầu.

Đường tròn đáy của hình nón có tâm H bán kính r.

Do H là hình chiếu của S và O trên mặt đáy của hình nón nên S, H, O thẳng hàng.

Hình nón có độ dài đường sinh $l = 2$, đường cao $h = 1$. Suy ra $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{3}$.

Góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = 2\widehat{ASH} = 120^\circ$ nên suy ra $H \in SO$ (như hình vẽ).

Trong tam giác SAH vuông tại H ta có $\cos\widehat{ASH} = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 60^\circ$.

Xét tam giác SOA có $OS = OA = R$ và $\widehat{OSA} = 60^\circ$.

Suy ra tam giác SOA đều. Do đó $R = OA = SA = 2$.

Vậy đường kính mặt cầu chứa điểm S và đường tròn đáy hình nón bằng 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1)$và $B(0;-1;1)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;1;0)$. **B.** $(2;2;0)$. **C.** $(-2;-4;2)$. **D.** $(-1;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M = \left(\dfrac{2+0}{2}; \dfrac{3-1}{2}; \dfrac{-1+1}{2}\right) = (1;1;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0), B(2;1;1), C(0;3;-1)$. Xét 4 khẳng định sau

(I) $BC = 2AB$.

(II) B thuộc đoạn AC.

(III) ABC là một tam giác.

(IV) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Trong 4 khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1), \overrightarrow{AC} = (-1;1;-1)$, $\overrightarrow{BA} = (-1;1;-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-2;2;-2)$.

Do đó $AB = \sqrt{3}, BC = 2\sqrt{3}$ nên (I) đúng. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$ nên B nằm ngoài đoạn AC và A, B, C thẳng hàng. Suy ra (II) sai, (III) sai, (IV) đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB, biết $A(6;2;-5), B(-4;0;7)$.

A. $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 62$. **B.** $(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 62$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$. **D.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 62$.

Lời giải.

Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-10;-2;12) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{62}$.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.

(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{62}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(0;-2;1)$, $C(1;0;1)$. Gọi D là điểm sao cho C là trọng tâm tam giác ABD. Tính tổng các tọa độ của điểm D.

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** 7.

Lời giải.

Gọi $D(x;y;z)$. Vì C là trọng tâm tam giác ABD nên

$$\begin{cases} 1=\dfrac{1+0+x}{3} \\ 0=\dfrac{2-2+y}{3} \\ 1=\dfrac{3+1+z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=2+0-1=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

A. $(0;-2;0)$. **B.** $(2;2;2)$. **C.** $(2;0;2)$. **D.** $(2;-2;2)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C-1=2-1 \\ y_C+1=1-0 \\ z_C-1=2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=2 \\ y_C=0 \\ z_C=2 \end{cases}.$$

Tọa độ điểm $C(2;0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z-17=0$ và cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $2x-2y+z+7=0$. **B.** $x-y+2z-7=0$.

C. $2x-2y+z+17=0$. **D.** $2x-2y+z-17=0$.

Lời giải.

Đường tròn giao tuyến của (Q) và mặt cầu (S) có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r=3$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến (Q) thì $d=\sqrt{R^2-r^2}=4$ (I có tọa độ $(0;-2;1)$, R là bán kính của mặt cầu (S)).

Mặt khác, (Q) song song với (P) nên phương trình có dạng $2x-2y+z+m=0$ $(m\neq -17)$. Từ $\mathrm{d}(I,(Q))=4$ ta suy ra $\dfrac{|m+5|}{3}=4$; do đó $m=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ tạo với nhau 1 góc 120° và $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$. Tìm $T=|\vec{a}-\vec{b}|$.

A. $T=5$. **B.** $T=6$. **C.** $T=7$. **D.** $T=4$.

Lời giải.

Ta có $T^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 49 \Rightarrow T = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là

A. $M(-4;0;0)$. **B.** $M(5;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(-5;0;0)$.

Lời giải.

$M \in Ox \Rightarrow M(x_M;0;0)$.

M cách đều hai điểm A, B suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 &\Leftrightarrow (4-x_M)^2 + 2^2 + (-1)^2 = (2-x_M)^2 + 1^2 + 0^2 \\ &\Leftrightarrow 4x_M = 16 \\ &\Leftrightarrow x_M = 4 \Rightarrow M(4;0;0). \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0), B(0;0;3), C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y=z-3=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M(3;3;-3)$. **B.** $M(-3;-3;3)$. **C.** $M(3;-3;3)$. **D.** $M(-3;3;3)$.

Lời giải.

Gọi $M(x,y,z)$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2} \geqslant 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -3, y = 3, z = 3$.

$\Rightarrow M(-3;3;3)$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. **D.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải.

Đặt: $\vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c}, m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z=0$.

A. $I(-1;2;-1)$, $R=\sqrt{6}$. **B.** $I(-1;2;-1)$, $R=6$.

C. $I(1;-2;1)$, $R=\sqrt{6}$. **D.** $I(1;-2;1)$, $R=6$.

Lời giải.

Tọa độ tâm $I(-1;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D.

A. $D(1;3;0)$. **B.** $D(-3;1;0)$. **C.** $D(3;-1;0)$. **D.** $D(3;1;0)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1), \overrightarrow{DC}=(2-x_D;1-y_D;1-z_D)$.

Suy ra $\begin{cases}-1=2-x_D\\0=1-y_D\\1=1-z_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=1\\z_D=0.\end{cases}$ Vậy $D(3;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+3=0$ và điểm $I(1;1;0)$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{5}{6}$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{25}{6}$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{5}{\sqrt{6}}$. **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=\dfrac{25}{6}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu, khi đó $R=\mathrm{d}\,(I;(P))=\dfrac{|1+1-2\cdot0+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

Từ đó suy ra phương trình của mặt cầu là $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{25}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-3)$, $B(3;-1;1)$. Gọi M là trung điểm của AB, đoạn OM có độ dài bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm AB nên $M(2;0;-1)\Rightarrow OM=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{78}}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Diện tích tam giác OAB được xác định bởi công thức $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;2;-1), \overrightarrow{OB}=(0;-2;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-3;-2)$.

Vậy $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 9.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+1^2+3}=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Côsin của góc $\widehat{BAC}$ bằng

A. $\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$. **C.** $-\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $-\dfrac{9}{\sqrt{35}}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\widehat{BAC}=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, với $\overrightarrow{AB}=(1;5;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(5;4;-1)$.

Do đó $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{1\cdot5+5\cdot4+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}=\dfrac{27}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{42}}=\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(3;1;-2)$, $C(1;5;4)$. Biết rằng tâm hình chữ nhật $A'B'C'D'$ thuộc trục hoành, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\dfrac{\sqrt{91}}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{74}}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

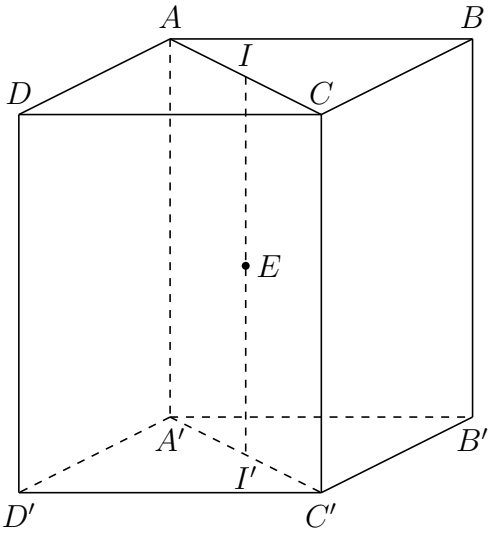
Gọi I là trung điểm của $AC\Rightarrow$ Tọa độ điểm $I(2;3;1)$

Gọi I' là tâm hình chữ nhật $A'B'C'D'\Rightarrow I'(a;0;0)$.

Ta có: $II'\perp(ABCD)\Rightarrow II'\perp AC\Rightarrow \overrightarrow{II'}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow (a-2)(-2)+(-3).4+(-1).6=0\Leftrightarrow a=-7\Rightarrow I'(-7;0;0)$.

Gọi E là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'\Rightarrow E$ là trung điểm của $AC\Rightarrow E\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $R=AI=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(3;-2;1)$, $N(1;0;-3)$. Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M và N lên mặt phẳng Oxy. Khi đó độ dài đoạn $M'N'$ là

A. $M'N'=8$. **B.** $M'N'=4$. **C.** $M'N'=2\sqrt{6}$. **D.** $M'N'=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $M'(3;-2;0)$ và $N'(1;0;0)$ suy ra $\overrightarrow{M'N'}=(-2;2;0)\Rightarrow M'N'=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=(2;3;-7)$. Tìm toạ độ của $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

A. $\vec{x}=(2;-1;19)$. **B.** $\vec{x}=(-2;3;19)$. **C.** $\vec{x}=(-2;-3;19)$. **D.** $\vec{x}=(-2;-1;19)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=(2;3;-7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\vec{a}=&4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}\\ -3\vec{b}=&-6\vec{i}-9\vec{j}+21\vec{k}\end{cases}\Rightarrow\vec{x}=-2\vec{i}-3\vec{j}+19\vec{k}$.

Vậy $\vec{x}=(-2;-3;19)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$. Tìm tọa độ $\vec{d}=\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(0;-27;3)$. **B.** $(1;2;-7)$. **C.** $(0;27;3)$. **D.** $(0;27;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=(2;-5;3)$, $4\vec{b}=(0;8;-4)$, $2\vec{c}=(2;14;4)$.

Suy ra $\vec{d}=(2-4\cdot0-2\cdot1;-5-4\cdot2-2\cdot7;3-4\cdot(-1)-2\cdot2)=(0;-27;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}\,(-1;1;0)$, $\vec{b}\,(1;1;0)$, $\vec{c}\,(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $|\vec{a}|=\sqrt{2}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **D.** $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có:

- ☑ $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.
- ☑ $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.
- ☑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
- ☑ $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot1+0\cdot1=2$.

Vậy $\vec{c}\perp\vec{b}$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC có $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$ và $C(3;-2;1)$. Tính số đo của góc B.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 120°.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;0;4)$ và $\overrightarrow{BC}=(7;0;1)$.

Suy ra $\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Từ đó suy ra $B=45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng 36π. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi \Rightarrow R=3$.

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;4)$ và $M'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy, khi đó $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải.

Gọi H là chiếu vuông góc của M trên Oy, ta có $H(0;1;0)$. Do M' đối xứng với M qua Oy nên H là trung điểm MM'. Suy ra $M'(-2;1;-4)$, từ đó ta có $a+b+c=-5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P=a+b-c$ có giá trị bằng

A. -4. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $ABCM$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-x_M=1 \\ 3-y_M=-3 \\ 3-z_M=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-3 \\ y_M=6 \\ z_M=-1. \end{cases}$

Suy ra $M(-3;6;-1)$, khi đó $P=a+b-c=-3+6-(-1)=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oz là điểm

A. $Q(-1;0;3)$. **B.** $M(0;0;3)$. **C.** $P(0;2;3)$. **D.** $N(-1;0;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(-1;2;3)$ lên trục Oz là điểm $M(0;0;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn véc-tơ $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(5;7;0)$, $\vec{c}=(3;-2;4)$, $\vec{d}=(4;12;-3)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba véc-tơ không đồng phẳng.

C. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{d}+\vec{c}|$. **D.** $2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{d}-2\vec{c}$.

Lời giải.

Ta nhận thấy $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{d}=(7;10;1)$. Từ đó suy ra $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{d}+\vec{c}|$.

Dễ thấy $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\neq\vec{0}$, nên $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba véc-tơ không đồng phẳng.

Dễ thấy $2\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{d}-2\vec{c}$, nên trong 4 mệnh đề trên thì chỉ có mệnh đề $2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{d}-2\vec{c}$ là sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;-3;4)$ và đi qua điểm $A(4;-2;2)$ là phương trình nào sau đây?

A. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3$. **B.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9$.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=3$. **D.** $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=9$.

Lời giải.

Ta có $IA=\sqrt{4+1+4}=3$. Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;4)$ lên trục Ox là điểm nào dưới đây?

A. $M(2;0;0)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M(0;0;4)$. **D.** $M(0;2;3)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;4)$ là điểm $M(2;0;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oz là điểm

A. $P(1;0;3)$. **B.** $Q(0;2;3)$. **C.** $N(1;2;0)$. **D.** $M(0;0;3)$.

Lời giải.

Hình chiếu của A sẽ có hoành độ và tung độ bằng 0, cao độ giữ nguyên, nên hình chiếu của A lên Oz là $(0;0;3)$

Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho các véc-tơ $\vec{u}=(1;-2;3)$, $\vec{v}=(-1;2;-3)$. Tính độ dài của véc-tơ $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$.

A. $|\vec{w}|=\sqrt{26}$. **B.** $|\vec{w}|=\sqrt{126}$. **C.** $|\vec{w}|=\sqrt{85}$. **D.** $|\vec{w}|=\sqrt{185}$.

Lời giải.

$\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}=(3;-6;9)$.

Vậy $|\vec{w}|=\sqrt{3^2+(-6)^2+9^2}=\sqrt{126}$.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=5$. Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu là

A. $I(1;-3;0)$, $R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1;-3;0)$, $R=5$.

C. $I(-1;3;0)$, $R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;3;0)$, $R=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Tọa độ tâm $I(1;-3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;$ và $D(2;4;6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Lời giải.

Gọi (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ta có:

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \\ D \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra (S) có tâm $I(1;2;3), R = \sqrt{14}$.
Phương trình mặt cầu (S') có tâm $I' \equiv I(1;2;3), R' = 2R = 2\sqrt{14}$ là

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56.$$

Chọn đáp án A □

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy. Tính độ dài đoạn OA'.

A. $OA' = -1$. **B.** $OA' = \sqrt{10}$. **C.** $OA' = \sqrt{11}$. **D.** $OA' = 1$.

Lời giải.

Điểm A' là hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên trục $Oy \Rightarrow A'(0;-1;0) \Rightarrow OA' = 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A\,(3;1;-4)\,, B\,(2;1-2)\,, C\,(1;1;-3)$. Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\,(2;0;0)$. **B.** $M\,(-2;0;0)$. **C.** $M\,(6;0;0)$. **D.** $M\,(0;2;0)$.

Lời giải.

Giả sử $M(m;0;0)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (3-m;1;-4), \overrightarrow{MB} = (2-m;1;-2), \overrightarrow{MC} = (1-m;1;-3)$.

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| &= \sqrt{(6-3m)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{9m^2 - 36m + 126} \\ &= \sqrt{9(m-2)^2 + 90} \\ &\geq 3\sqrt{10}, \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt{10}$ khi $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Hay $M(2;0;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 64. Tìm độ dài đường kính của mặt cầu S có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 2 = 0$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu: $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 2} = \sqrt{3} \Rightarrow$ Đường kính của mặt cầu là $2R = 2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a} = (2;-3;1)$ và $\vec{b} = (-1;0;4)$. Tìm tọa độ véctơ $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $\vec{u} = (-7;-6;10)$. **B.** $\vec{u} = (-7;6;10)$. **C.** $\vec{u} = (7;6;10)$. **D.** $\vec{u} = (-7;6;-10)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} -2\vec{a} = (-4;6;-2) \\ 3\vec{b} = (-3;0;12) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b} = (-7;6;10).$$

Chọn đáp án B □

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$ cắt mặt phẳng Oxy theo giao tuyến là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn này.

A. $I\left(1;-2;0\right), r=\sqrt{5}$. **B.** $I\left(1;2;0\right), r=2\sqrt{5}$.

C. $I\left(1;2;0\right), r=\sqrt{7}$. **D.** $I\left(-1;-2;0\right), r=2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $A(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+2}=4$.

Tâm I của đường tròn là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) nên $I(1;2;0)$, và bán kính $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(A,(Oxy))}=\sqrt{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải.

Mặt cầu tiếp xúc với trục Oy nên bán kính mặt cầu $R=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(2;1,-3)$ tiếp xúc với trục Oy có phương trình

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13.$$

Chọn đáp án B □

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m\leq 6$. **B.** $m<6$. **C.** $m>6$. **D.** $m\geq 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi: $(2)^2+(-1)^2+(1)^2-m>0\Leftrightarrow m<6$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(1;-2;4\right)$. Hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy là điểm nào sau đây?

A. $P\left(0;0;4\right)$. **B.** $Q\left(1;0;0\right)$. **C.** $N\left(0;-2;0\right)$. **D.** $M\left(0;-2;4\right)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy là điểm $N\left(0;-2;0\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(a;0;0\right), B\left(0;b;0\right), C\left(0;0;c\right)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính độ dài đoạn thẳng OG.

A. $OG=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. **B.** $OG=\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

C. $OG=\dfrac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $OG=\dfrac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên có tọa độ là $G\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{b}{3};\dfrac{c}{3}\right)$ hay $\overrightarrow{OG}=\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{b}{3};\dfrac{c}{3}\right)$.

Vậy $OG=\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$; $B(2;3;-1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

A. $C\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $C\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-1\right)$. **C.** $C\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $C\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(1;1;0)$; $\overrightarrow{AC}=(a-1;b-2;c+1)$.

$$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=\frac{1}{3}\\ b-2=\frac{1}{3}\\ c+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=\frac{7}{3}\\ c=-1.\end{cases}$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\overrightarrow{OM}$ có độ dài $\left|\overrightarrow{OM}\right|=1$, gọi α,β,γ lần lượt là góc tạo bởi ba véc tơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trên ba trục Ox,Oy,Oz và véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Khi đó, tọa độ của điểm M là

A. $M(\sin\beta\cos\alpha;\sin\alpha\cos\beta;\cos\gamma)$. **B.** $M(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

C. $M(\sin\alpha;\sin\beta;\sin\gamma)$. **D.** $M(\sin\alpha\cos\alpha;\sin\beta\cos\beta;\sin\gamma\cos\gamma)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$; $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|}=x\\ \cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\vec{j}\right|}=y\\ \cos\gamma=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\vec{k}\right|}=z\end{cases}\Rightarrow M(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma).$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):\ x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(1;1;1)$. **B.** $N(0;1;0)$. **C.** $P(1;0;1)$. **D.** $Q(1;1;0)$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$. Vì $IP=\sqrt{3}>R$ nên điểm P nằm ngoài mặt cầu (S).

Chọn đáp án C ☐

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a}=(1;-2;3)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$ biết rằng $\vec{b}$ ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ và $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$.

A. $\vec{b}=(2;-2;3)$. **B.** $\vec{b}=(2;-4;6)$. **C.** $\vec{b}=(-2;4;-6)$. **D.** $\vec{b}=(-2;-2;3)$.

Lời giải.

Vì $\vec{b}$ ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ và $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$ nên $\vec{b}=-2\vec{a}$. Suy ra $\vec{b}=(-2;4;-6)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 75. Cho tam giác ABC với $A(2;4;-3)$, $B(-1;3;-2)$, $C(4;-2;3)$. Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là

A. $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-2}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{-5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$ suy ra $G\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) là

A. $I(1; -2; 3)$ và $R = 15$. **B.** $I(1; -2; 3)$ và $R = 13$.

C. $I(1; -2; 3)$ và $R = \sqrt{13}$. **D.** $I(1; -2; 3)$ và $R = \sqrt{15}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 15$, do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (-1; 2; 2)$ và $\vec{b} = (1; -2; 2)$. Gọi α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì $\cos\alpha$ bằng

A. $-\frac{1}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $-\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, tọa độ điểm G' đối xứng với điểm $G(5; -3; 7)$ qua trục Oy là

A. $G'(-5; 0; -7)$. **B.** $G'(-5; -3; -7)$. **C.** $G'(5; 3; 7)$. **D.** $G'(-5; 3; -7)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $G(5; -3; 7)$ lên trục Oy là $H(0; -3; 0)$.

Vì G' đối xứng với G qua trục Oy nên H là trung điểm của đoạn GG' nên tọa độ của điểm G' là

$\begin{cases} x_{G'} = 2x_H - x_G = -5 \\ y_{G'} = 2y_H - y_G = -3 \\ z_{G'} = 2z_H - z_G = -7. \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm $G'(-5; -3; -7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\,(2; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy).

A. $M'\,(2; -1; 0)$. **B.** $M'\,(0; 0; 1)$. **C.** $M'\,(-2; 1; 0)$. **D.** $M'\,(2; 1; -1)$.

Lời giải.

Hình chiếu của $M\,(2; -1; 1)$ lên (Oxy) là điểm M' có tọa độ $M'(2, -1, 0)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$.

A. $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **B.** $x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.

Lời giải.

- $\mathrm{d}\,(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 0-1+2\cdot(-1)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2$.
- $(S)\colon x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2;5)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên trục Ox.

A. $H(1;0;0)$. **B.** $H(0;2;0)$. **C.** $H(0;0;5)$. **D.** $H(-1;0;0)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu H của M trên trục Ox là $H(-1;0;0)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$.

A. $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{13}{3};1\right)$. **B.** $M\,(0;5;-4)$. **C.** $M\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3};3\right)$. **D.** $M\,(4;-3;8)$.

Lời giải.

Đặt $M(x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{MA}=(1-x;3-y;-1-z)$, $\overrightarrow{MB}=(3-x;-1-y;5-z)$.

$$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=3(3-x)\\3-y=3(-1-y)\\-1-z=3(5-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-3\\z=8.\end{cases}$$

Vậy $M(4;-3;8)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;2;3)$ đến trục Oy bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;3)$ lên trục $Oy\Rightarrow H(0;2;0)$.

Ta có $\mathrm{d}(A,Oy)=AH=\sqrt{(0-1)^2+(2-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(m;1;0)$. Tìm giá trị thực của tham số m để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{4}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Để ba vectơ đồng phẳng thì $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow -4\cdot m+1\cdot 1+2\cdot 0=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3), D(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D là

A. $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z-6=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z-14=0$.

Lời giải.

Gọi $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu cần tìm.
Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2a+d=-1 \\ -4b+d=-4 \\ -6c+d=-9 \\ -2a-4b-6c+d=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1 \\ c=\dfrac{3}{2} \\ d=0. \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(2;-2;-3)$, phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

C. $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=36$. **D.** $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu là trung điểm I của AB có tọa độ $I(1;0;-1)$.
Bán kính của mặt cầu $R=IA=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$.
Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$.
Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho tam giác ABC. Gọi S là tập tất cả các điểm M trong không gian thoả mãn hệ thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=a$ (với a là số thực dương không đổi). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. S là mặt cầu bán kính $R=\dfrac{a}{3}$. **B.** S là đường tròn bán kính $R=\dfrac{a}{3}$.

C. S là một đường thẳng. **D.** S là một đoạn thẳng có độ dài $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, từ giả thiết ta có $\left|3\overrightarrow{MG}\right|=a$ hay $MG=\dfrac{a}{3}$. Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G bán kính $\dfrac{a}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;0)$, $B(1;0:-4)$. Mặt cầu nhận AB làm đường kính có phương trình là

A. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z-15=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z-15=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+3=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z+3=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-4) \Rightarrow AB=2\sqrt{6}$.
Vì mặt cầu nhận AB làm đường kính nên có tâm $I(2;1;-2)$ là trung điểm của AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$. Phương trình của mặt cầu là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+3=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+8=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+7=0$.

C. $x^2+y^2-2x+4y-1=0$. **D.** $x^2+z^2-2x+6z-2=0$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+7=0 \Rightarrow a=1, b=-2, c=-\dfrac{3}{2}, d=7 \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=\dfrac{1}{4}>0$. Vậy $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+7=0$ là phương trình mặt cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(-1;3;-4)$, $D(2;6;0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD. Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN.

A. $G(4;8;0)$. **B.** $G(2;4;0)$. **C.** $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3};0\right)$. **D.** $G(1;2;0)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng $CD \Rightarrow N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2};-2\right)$).

Gọi G là trung điểm đoạn thẳng $MN \Rightarrow G(1;2;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\,(0;-2;-1)$, $B\,(1;-1;2)$. Tìm điểm M trên đoạn AB sao cho $MA=2MB$

A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(2;0;5)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};1\right)$. **D.** $(-1;-3;-4)$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$ $(*)$. Giả sử tọa độ điểm $M\,(x_0;y_0;z_0)$ suy ra $\overrightarrow{AM}\,(x_0;y_0+2;z_0+1)$ và $\overrightarrow{MB}\,(1-x_0;-1-y_0;2-z_0)$. Từ $(*)$ ta có

$$\begin{cases} x_0=2\,(1-x_0) \\ y_0+2=2\,(-1-y_0) \\ z_0+1=2\,(2-z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0=2 \\ 3y_0=-4 \\ 3z_0=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{2}{3} \\ y_0=-\dfrac{4}{3} \\ z_0=1 \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm $M\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, tìm điều kiện của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx+4y+2mz+m^2+5m=0$ là phương trình mặt cầu

A. $m<4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$. **C.** $m>1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2mx+4y+2mz+m^2+5m=0 \Leftrightarrow (x-m)^2+(y+2)^2+(z+m)^2=m^2-5m+4$$

Để thỏa mãn bài toán khi $m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow \hoac{m<1\\m>4.}$

Chọn đáp án D □

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$.

C. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$. **D.** $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=12$.

Lời giải.

Trung điểm I của AB có tọa độ $I(0;3;2)$ và độ dài đường kính $AB=2R=2\sqrt{3}$.
Từ đó, phương trình mặt cầu đường kính AB là $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$; $B(0;-1;2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=2\sqrt{3}$. **B.** $AB=\sqrt{14}$. **C.** $AB=\sqrt{13}$. **D.** $AB=\sqrt{6}$.

Lời giải.

$AB=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$.
Chọn đáp án B □

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;1)$, $N(3;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để $MN\perp NP$.

A. $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MN}=(1;-2;0)$ và $\overrightarrow{NP}=(-2;m-2;1)$. Để $MN\perp NP$ thì $1\cdot(-2)+(-2)\cdot(m-2)=0\Leftrightarrow m=1$.
Chọn đáp án C □

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;2;-3)$ và $R=4$. **B.** $I(-1;-2;3)$ và $R=4$.

C. $I(1;2;-3)$ và $R=16$. **D.** $I(-1;-2;3)$ và $R=16$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+2}=4$.
Chọn đáp án A □

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$; $B(0;0;1)$ và có tâm nằm trên trục Ox.

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=4$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=2$.

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=2$. **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=4$.

Lời giải.

Vì tâm I của mặt cầu (S) nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm I có dạng $I(a;0;0)$.
Vì mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$; $B(0;0;1)$ nên $IA = IB$. Do đó

$$\sqrt{(1-a)^2+1+1} = \sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Suy ra $I(1;0;0)$ và $R = IA = \sqrt{2}$.
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$ nên có phương trình $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tìm tọa độ điểm I.

A. $I(2;-1;0)$. **B.** $I(0;0;1)$. **C.** $I(0;0;-2)$. **D.** $I(-2;1;0)$.

Lời giải.

Vì $I \in (Oxy) \Rightarrow I(a;b;0)$. Ta có $\overrightarrow{AI} = (a-1;b-2;4)$; $\overrightarrow{BI} = (a-1;b+3;-1)$; $\overrightarrow{CI} = (a-2;b-2;-3)$.
Do I là tâm cầu nên

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} (a-1)^2+(b-2)^2+4^2 = (a-1)^2+(b+3)^2+1 \\ (a-1)^2+(b-2)^2+4^2 = (a-2)^2+(b-2)^2+9 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} -4b+20 = 6b+10 \\ -2a+17 = -4a+13 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases} \\
\Rightarrow\ &I(-2;1;0).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;6)$, $B(5;-4;2)$, đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M và $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$. Tính k.

A. $k = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $k = \dfrac{1}{2}$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = -2$.

Lời giải.

$M \in Ox \Rightarrow M(a;0;0)$. $\overrightarrow{MA} = (-1-a;2;6-c)$; $\overrightarrow{MB} = (5-a;-4;2-c)$; $\overrightarrow{AB} = (6;-6;-4)$.

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-a = k(5-a) \\ 2 = -4k \\ 6-c = k(2-c) \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 100. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-2)$ và đi qua điểm $A(2;;1;2)$.

A. $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 5$. **B.** $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 25$.
C. $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 25$. **D.** $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+1 = 0$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{9+0+16} = 5$.
Vậy phương trình mặt cầu là $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 25$.

Chọn đáp án C □

Câu 101. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-m=0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m.

A. $m=25$. **B.** $m=11$. **C.** $m=16$. **D.** $m=-16$.

Lời giải.

$R=5 \Leftrightarrow \sqrt{1+4+4+m}=5 \Leftrightarrow m=16$.

Chọn đáp án C □

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$. Tâm và bán kính của (S) lần lượt là

A. $I(-1;3;-4), R=5$. **B.** $I(1;-3;4), R=5$.

C. $I(2;-6;8), R=\sqrt{103}$. **D.** $I(1;-3;4), R=25$.

Lời giải.

$x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=5^2$.

Vậy tâm mặt cầu $I(1;-3;4)$ và bán kính $R=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(1;1;2)$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\sqrt{2}$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\sqrt{2}$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Lời giải.

$R=\sqrt{2}$. Vậy (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+2z-5=0$ và các điểm $A(1;2;3)$, $B(-1,1,-2)$, $C(3,3,2)$. Gọi $M(x_0,y_0,z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA=MB=MC$. Giá trị của $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(x_0-1,y_0-2,z_0-3)$

$\overrightarrow{MB}=(x_0+1,y_0-1,z_0+2)$

$\overrightarrow{MC}=(x_0-3,y_0-3,z_0-2)$

Vì $MA=MB=MC$ nên:

$$\begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0-3)^2=(x_0+1)^2+(y_0-1)^2+(z_0+2)^2 \\ (x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0-3)^2=(x_0-3)^2+(y_0-3)^2+(z_0-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0+2y_0+10z_0=8(1) \\ 4x_0+2y_0-2z_0=8(2) \end{cases}.$$

Vì $M \in (P)$ nên $x_0+y_0+2z_0-5=0(3)$. Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 4x_0+2y_0+10z_0=8 \\ 4x_0+2y_0-2z_0=8 \\ x_0+y_0+2z_0-5=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 6 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = -1 + 6 + 0 = 5.$$

Vậy $x_0 + y_0 + z_0 = 5$

Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, với $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$ và $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.

A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3;2;0) \\ \overrightarrow{AD} = (3;0;1) \\ \overrightarrow{AA'} = (4;2;3) \end{cases}$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên theo quy tắc hình hộp, ta có

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} + 3 = 10 \\ y_{C'} = 4 \\ z_{C'} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = 7 \\ y_{C'} = 4 \\ z_{C'} = 4 \end{cases} \Rightarrow C'(7;4;4).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với $(P)\colon x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$. **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với $(P)\colon x - 2y - 2z - 8 = 0$ sẽ có bán kính là

$$R = \mathrm{d}(I,(P)) = \frac{|1 - 2\cdot 2 - 2\cdot(-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn đáp án (B) □

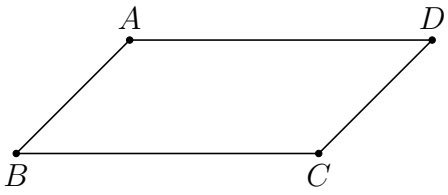
Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;3;-1)$, $B(2;1;-2)$ và $C(-2;1;-2)$. Tìm tọa độ của đỉnh D.

A. $D(-3;3;1)$. **B.** $D(-3;3;-1)$. **C.** $D(-1;-1;-3)$. **D.** $D(5;3;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x_D - 1; y_D - 3; z_D + 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-4;0;0)$.

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 3 \\ z_D = -1. \end{cases}$



Vậy $D(-3;3;-1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 108. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-4;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z-1=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A. $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x+4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x+4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $A(-4;2;1)$ và bán kính $R=\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{|2\cdot(-4)+2-2\cdot1-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3$. Mặt cầu cần tìm có phương trình là

$$(x+4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9.$$

Chọn đáp án B □

Câu 109. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$. Tính độ dài đoạn thẳng OM.

A. $OM=\sqrt{5}$. **B.** $OM=9$. **C.** $OM=\sqrt{3}$. **D.** $OM=3$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(2;-1;2)\Rightarrow|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;-1;3)$ tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=2$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (Oxy) là $\mathrm{d}=3=R$.

Mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán có phương trình là

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với trục Oy.

A. $x^2+(y+2)^2+(z+3)^2=2$. **B.** $x^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3$.

C. $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Lời giải.

Ta có $R=\mathrm{d}(I;Oy)=\sqrt{0^2+3^2}=3$.

Phương trình mặt cầu (S) là $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Chọn đáp án D □

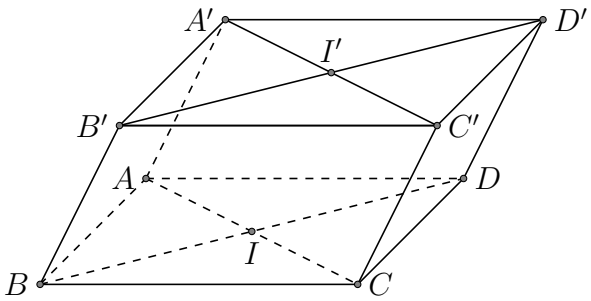
Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1), C(4;2;0), B'(-2;1;1), D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

A. $A'(-3;3;3)$. **B.** $A'(-3;-3;-3)$. **C.** $A'(-3;3;1)$. **D.** $A'(-3;-3;3)$.

Lời giải.

Gọi I, I' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó:

- ☑ I là trung điểm AC nên $I\left(\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.
- ☑ I' là trung điểm $B'D'$ nên $I'\left(\frac{1}{2};3;\frac{5}{2}\right)$.



Hơn nữa
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{II'} \Leftrightarrow (x_{A'}+3; y_{A'}-2; z_{A'}-1) = (0;1;2)$ hay $A'(-3;3;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxz).

A. $H(0;0;3)$. **B.** $H(1;0;0)$. **C.** $H(1;0;3)$. **D.** $H(0;-2;0)$.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, lại có H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $(Oxz)\colon y = 0$ nên $\overrightarrow{OH} = \vec{i} + 3\vec{k}$. Vậy $H(1;0;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 114. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m>6$. **B.** $m\le 6$. **C.** $m<6$. **D.** $m\ge 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 1^2+1^2+2^2-m>0 \Leftrightarrow m<6$.

Chọn đáp án C □

Câu 115. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$. Gọi H là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Tọa độ điểm H là

A. $H(-1;-2;1)$. **B.** $H(1;-2;-1)$. **C.** $H(1;-2;1)$. **D.** $H(1;2;1)$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox, ta có $K(1;0;0)$.
Do H là điểm đối xứng của M qua trục Ox nên K là trung điểm MH.
Suy ra $H(1;-2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-4;1)$, $C(3;1;1)$. Mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz), biết $I(a;b;c)$. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=-1$. **D.** $T=2$.

Lời giải.

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$. Vì $I \in (Oxz)$ và $A, B, C \in (S)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 13-4a-6b+d=0 \\ 17+8b-2c+d=0 \\ 11-6a-2b-2c+d=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-4a-6b+d=0 \\ 4a+14b-2c=-4 \\ -2a+4b-2c=2 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-17. \end{cases}$$

Vậy $T=a+b+c=-1+0+0=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$,$B(-1;1;1)$, $C(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BA}=(3;2;-2), \overrightarrow{BC}=(2;m-2;1)$.

Để tam giác ABC vuông tại B thì

$$BA \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow 3\cdot 2+2\cdot(m-2)+(-2)\cdot 1=0 \Leftrightarrow m=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $M(2;3;-1)$, $N(-2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho tam giác MNE vuông tại M.

A. $(-2;0;0)$. **B.** $(0;6;0)$. **C.** $(6;0;0)$. **D.** $(4;0;0)$.

Lời giải.

Gọi $E(x;0;0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4;-4;4)$, $\overrightarrow{ME}=(x-2;-3;1)$.

$\triangle MNE$ vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{ME}=0 \Leftrightarrow x-2-3-1=0 \Leftrightarrow x=6$.

Vậy tọa độ điểm E là $(6;0;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-2;0)$, $\vec{b}=(-1;1;2)$, $\vec{c}=(4;0;6)$ và $\vec{u}=\left(-2;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$. **B.** $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$.

C. $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$. **D.** $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$.

Lời giải.

Giả sử ta có $\vec{u}=m\vec{a}+n\vec{b}+k\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n+4k=-2 \\ -2m+n=\frac{1}{2} \\ 2n+6k=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=\frac{3}{2} \\ k=-\frac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy ta suy ra $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$.

Chọn đáp án A □

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;4;2)$, $B(-5;6;2)$, $C(-4;6;-1)$. Tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ là

A. $(10;17;-7)$. **B.** $(-10;-17;7)$. **C.** $(10;-17;7)$. **D.** $(-10;14;-7)$.

Lời giải.

Giả sử D có tọa độ $(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AD}=(x+3;y-4;z-2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;2;-3)$.
Suy ra $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=(-7;10;-9)$.
Khi đó

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=-7\\y-4=10\\z-2=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-10\\y=14\\z=-7.\end{cases}$$

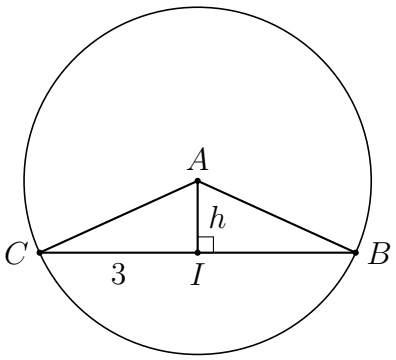
Chọn đáp án D □

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và cắt trục Ox tại hai điểm B,C sao cho $BC=6$.

A. $(S):(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=19$. **B.** $(S):(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=28$.
C. $(S):(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=26$. **D.** $(S):(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=34$.

Lời giải.

Chọn $M(1;0;0)$ thuộc Ox, $\overrightarrow{MA}=(0;4;3)$;
vec-tơ chỉ phương của Ox là $\vec{i}=(1;0;0)$.
Gọi h là khoảng cách từ A đến Ox, ta có
$h=\mathrm{d}[A,Ox]=\dfrac{|[\vec{i},\overrightarrow{MA}]|}{|\vec{i}|}=\dfrac{|(0;-3;4)|}{|(1;0;0)|}=5$.
Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{CI^2+h^2}=\sqrt{34}$.
Phương trình mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=34$.



Chọn đáp án D □

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;1;5)$. Phương trình mặt cầu (S) đi qua A,B và tâm thuộc trục Oz có phương trình là

A. $x^2+y^2+(z-4)^2=9$. **B.** $x^2+y^2+(z-4)^2=14$.
C. $x^2+y^2+(z-4)^2=16$. **D.** $x^2+y^2+(z-4)^2=6$.

Lời giải.

Tâm I thuộc trục Oz nên $I(0;0;c)$, khi đó
$IA=IB\Leftrightarrow(1-0)^2+(2-0)^2+(3-c)^2=(-2-0)^2+(1-0)^2+(5-c)^2\Leftrightarrow c=4$.
Bán kính $R=IA=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(3-4)^2}=\sqrt{6}$.
Phương trình mặt cầu là (S): $x^2+y^2+(z-4)^2=6$.
Chọn đáp án D □

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-3;0;5)$. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=14$.
C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=26$. **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=24$.

Lời giải.

Tâm I là trung điểm AB nên $I(-1;1;4)$, bán kính $R = IA = \sqrt{(1+1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{6}$.
Phương trình mặt cầu là $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2 = 6$.
Chọn đáp án A □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng $(P): 3x-2y+z+6=0$ là

A. $(1;1;1)$. **B.** $(-1;1;-1)$. **C.** $(3;-2;1)$. **D.** $(5;-3;1)$.

Lời giải.

Gọi $H(x;y;-6-3x+2y)$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng P. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-2;y+1;-6-3x+2y)$. Do $\overrightarrow{AH} \perp (P)$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{n}_P$ cùng phương. Suy ra ta có hệ phương trình $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{-6-3x+2y}{1}$. (1)
Giải hệ (1) ta thu được một nghiệm là $(-1;1;-1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $B(1;2;-3)$ và $C(7;4;-2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

A. $\left(\dfrac{8}{3};3;-\dfrac{8}{3}\right)$. **B.** $\left(3;3;-\dfrac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;\dfrac{8}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$. **D.** $\left(1;2;\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Giả sử điểm cần tìm có tọa độ $E(x,y,z)$ khi đó ta có $\overrightarrow{CE} = (x-7;y-4;z+2)$ và $\overrightarrow{EB} = (1-x;2-y;-3-z)$
Theo giả thiết $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-4y \\ z+2 = -6-2z \end{cases}$.
Giải hệ phương trình ta thu được nghiệm $(x;y;z) = \left(3;\dfrac{8}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$. Vậy điểm E có tọa độ là $\Rightarrow E\left(3;\dfrac{8}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$.
Chọn đáp án C □

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;-2)$, biết diện tích mặt cầu bằng 100π. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-86=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+4=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+9=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-11=0$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của mặt cầu, áp dụng công thức diện tích mặt cầu ta có: $4\pi R^2 = 100\pi$. $\Rightarrow R = \sqrt{25} = 5$. Suy ra phương trình của mặt cầu cần tìm có dạng $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2 = 25$. Hay $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-11=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ là:

A. $(12;9;1)$. **B.** $(1;1;6)$. **C.** $(0;0;-2)$. **D.** $(1;0;1)$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của d có dạng $d:\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}$. Gọi $M(12+4t;9+3t;1+t)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) khi đó ta có phương trình $3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$. Giải phương trình này ta thu được nghiệm $t=-3$.

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $M(0;0;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình là $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z=0$. Biết OA (O là gốc tọa độ) là đường kính của mặt cầu (S). Tọa độ của điểm A là

A. $A(-2;6;4)$. **B.** $A(2;-6;-4)$. **C.** $A(-1;3;2)$. **D.** $A(-1;-3;2)$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu được viết lại thành $(S): (x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=14$. Suy ra tâm của đường tròn là $I(1;-3;-2)$. Do điểm I là trung điểm của đường kính OA nên điểm A phải có tọa độ $A\,(2;-6;-4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-1)$, $B(0;3;4)$, $C(2;1;-1)$. Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $\sqrt{\dfrac{33}{50}}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{50}{33}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;-1;-5)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-2;-5)$, $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(-5;-5;0)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+0^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{50}$.

Độ dài đường cao $AH=\dfrac{2\cdot S_{ABC}}{BC}=\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{33}}=\sqrt{\dfrac{50}{33}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(2;-1;3)$ và đi qua điểm $A(3;-4;4)$.

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=11$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\sqrt{11}$.

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=11$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\sqrt{11}$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IA=\sqrt{(3-2)^2+(-4+1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{11}$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=11$.

Chọn đáp án C □

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(3;4;3)$.

A. $4x+4y-2z-22=0$. **B.** $2x+2y+z-17=0$.

C. $2x+4y-z-25=0$. **D.** $x+y+z-10=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;2)$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(3;4;3)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-3)+2(y-4)+z-3=0$ hay $2x+2y+z-17=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=16$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn (C). Một hình nón có đỉnh $I(0;0;3)$ và đáy là hình tròn (C) có đường sinh bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

(S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=4$ do đó giao tuyến của nó với (Oxy) là đường tròn có bán kính là R. Đường cao hình nón là $d=\mathrm{d}(I,(Oxy))=3$. Vậy độ dài đường sinh là $l=\sqrt{d^2+R^2}=5$.
Chọn đáp án A □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, hai véc-tơ $\vec{u}=(1;2;-3)$ và $\vec{v}=(m-1;2m;3)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow m-1+4m-9=0\Leftrightarrow m=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ có bán kính bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $a=1$, $b=-2$ và $c=3$, nên bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2-5}=3$.
Chọn đáp án B □

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx+6y+4mz+6m^2-4m+12=0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

A. $1\le m\le 3$. **B.** $-3<m<-1$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $1<m<3$.

Lời giải.

Ta có $a=m$, $b=-3$, $c=-2m$ và $d=6m^2-4m+12$.
Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$a^2+b^2+c^2-d=m^2+9+4m^2-(6m^2-4m+12)>0\Leftrightarrow m^2-4m+3<0\Leftrightarrow 1<m<3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 136. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;3;1)$, $B(4;2;-1)$, $C(5;-2;0)$. Biết $D(a;b;c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành, khi đó $2a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (6;-1;-2)$; $\overrightarrow{DC} = (5-a;-2-b;-c)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-a=6 \\ -2-b=-1 \\ -c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy $2a+b+c = 2(-1)-1+2 = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;3)$ và $D(1;-2;3)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tọa độ của trung điểm G của MN.

A. $G\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1\right)$. **B.** $G\left(\frac{1}{4};-\frac{2}{4};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $G\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};2\right)$. **D.** $G\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $M\left(\frac{1}{2};-1;0\right), N\left(\frac{1}{2};-1;3\right)$.

G là trung điểm của MN nên tọa độ điểm G là $\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2;-1;3)$, $\vec{b} = (1;-3;2)$ và $\vec{c} = (3;2;-4)$. Gọi $\vec{x}$ là véc-tơ thỏa mãn $\begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{a} = 4 \\ \vec{x}\cdot\vec{b} = -5 \\ \vec{x}\cdot\vec{c} = 8 \end{cases}$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{x}$.

A. $\vec{x} = (2;3;1)$. **B.** $\vec{x} = (2;3;-2)$. **C.** $\vec{x} = (1;3;2)$. **D.** $\vec{x} = (3;2;-2)$.

Lời giải.

Giả sử $\vec{x} = (x;y;z)$. Khi đó

$$\begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{a} = 4 \\ \vec{x}\cdot\vec{b} = -5 \\ \vec{x}\cdot\vec{c} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ x-3y+2z=-5 \\ 3x+2y-4z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = (2;3;1).$$

Chọn đáp án A □

Câu 139. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$, biết thể tích khối cầu tương ứng là $V = 972\pi$.

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = 81$. **B.** $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2 = 9$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2 = 81$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \Leftrightarrow R = 9$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = 81$.

Chọn đáp án A □

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giả sử tồn tại mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Với những giá trị thực nào của a thì (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π.

A. $\{1;10\}$. **B.** $\{-10;2\}$. **C.** $\{1;-11\}$. **D.** $\{-1;11\}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$ có tâm $I(2;-1;a)$ và $R=\sqrt{a^2-10a+5}$.
Chu vi đường tròn lớn $C=2\pi R=2\pi\sqrt{a^2-10a+5}$.
Vì $C=8\pi \Leftrightarrow a^2-10a+5=16 \Leftrightarrow \hoac{a=11\\a=-1}$.
Chọn đáp án D □

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm bán kính R của mặt cầu tâm $I(6;3;-4)$ tiếp xúc với trục Ox.

A. $R=5$. **B.** $R=3$. **C.** $R=6$. **D.** $R=4$.

Lời giải.

Cách 1. Trục Ox có véc-tơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{OI}=(6;3;-4)$.
Khoảng cách từ I đến trục Ox là $d(I;Ox)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{OI},\vec{i}]\right|}{|\vec{i}|}=5$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của I lên trục $Ox \Rightarrow H(6;0;0)$.
Khi đó $R=IH=\sqrt{(6-6)^2+(0-3)^2+(0+4)^2}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(m;2;4)$ và $\vec{b}=(1;n;2)$ cùng phương. Tìm cặp số thực $(m;n)$.

A. $(m;n)=(4;8)$. **B.** $(m;n)=(1;2)$. **C.** $(m;n)=(2;1)$. **D.** $(m;n)=(-2;-1)$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{m}{1}=\dfrac{2}{n}=\dfrac{4}{2} \Leftrightarrow \heva{m=2\\n=1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $\vec{a}\perp\vec{b}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$. **D.** $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Lời giải.

☑ $|\vec{a}|=\sqrt{2}$; $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.
☑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.
☑ $\vec{b}\cdot\vec{c}=2\neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ không vuông góc với $\vec{b}$.

Chọn đáp án D □

Câu 144. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;3)$,$B(-1;2;-1)$ và $C(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

A. $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};3\right)$. **B.** $(3;3;6)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. **D.** $(1;1;2)$.

Lời giải.

Gọi $G(x;y;z)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khi đó

$$\heva{x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1-1+3}{3}=1\\y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{2+2-1}{3}=1\\z=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{3-1+4}{3}=2} \Rightarrow G(1;1;2).$$

Chọn đáp án D □

Câu 145. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm O và đi qua điểm A.

A. $x^2+y^2+z^2=14$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{14}$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2=\sqrt{14}$.

Lời giải.

Bán kính $R=OA=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$. Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2+y^2+z^2=\sqrt{14}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz). Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Lời giải.

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên $R=\mathrm{d}(I,(Oxz))=|y_I|=2$.

Vậy $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $M(2;-3;5)$, $N(4;7;-9)$, $E(3;2;1)$, $F(1;-8;12)$. Bộ ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. M, N, E. **B.** M, E, F. **C.** N, E, F. **D.** M, N, F.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MN}=(2;10;-14),\\
&\overrightarrow{ME}=(1;5;-4),\\
&\overrightarrow{MF}=(-1;-5;7),\\
&\overrightarrow{NE}=(-1;-5;10),\\
&\overrightarrow{NF}=(-3;-15;21).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra hai véctơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MF}$ cùng phương vì $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NF}$, do đó ba điểm M, N, F thẳng hàng.

Chọn đáp án D □

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho các véctơ $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-1;1;-2)$, $\vec{c}=(2;1;-3)$, $\vec{u}=(11;-6;5)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$.

Lời giải.

Giả sử $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 11 = 3x - y + 2z \\ -6 = -2x + y + z \\ 5 = x - 2y - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Chọn đáp án C □

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;3)$, $B(2;-3;1)$ và $C(3;1;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(2;0;2)$. **B.** $G(3;0;3)$. **C.** $G(3;2;1)$. **D.** $G(6;0;6)$.

Lời giải.

Ta có

$$G = \left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{2-3+1}{3}; \frac{3+1+2}{3}\right) = (2;0;2).$$

Vậy $G(2;0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;1;0)$ và đi qua điểm $A(1;1;\sqrt{5})$.

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}$. **B.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{5})^2 = 5$. **D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1;1;0)$ và đi qua điểm $A(1;1;\sqrt{5})$ có bán kính

$$R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (\sqrt{5}-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Vậy mặt cầu có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5.$$

Chọn đáp án D □

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (1;m-1;m)$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. Giá trị m bằng bao nhiêu?

A. $m = \frac{1}{5}$. **B.** $m = \frac{5}{2}$. **C.** $m = -\frac{2}{5}$. **D.** $m = \frac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (m-1) + 3 \cdot m = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 5m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ các đỉnh là $A(0;2;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(0;-2;0)$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;0)$ và $\overrightarrow{CD}=(0;-2;-2)$.

Mà

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD}=\frac{2\cdot 0+(-2)\cdot(-2)+0\cdot(-2)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=60°$, hay góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $60°$.

Chọn đáp án C □

Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-2=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

A. Tâm $I(-1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. **B.** Tâm $I(1;3;-2)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

C. Tâm $I(1;3;-2)$ và bán kính $R=4$. **D.** Tâm $I(-1;-3;2)$ và bán kính $R=16$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-2=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=16. \end{aligned}$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;-2)$ và bán kính $R=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 154. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;-1); B(-4;2;-9)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $(x+3)^2+y^2+(z+4)^2=5$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=25$.

C. $(x+6)^2+y^2+(z+8)^2=5$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=5$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(-1;2;-5)$.

Độ dài AB là $AB=\sqrt{(-4-2)^2+(2-2)^2+(-9+1)^2}=10$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB có tâm là $I(-1;2;-5)$ và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=5$ có phương trình là

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=25.$$

Chọn đáp án B □

Câu 155. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ biết rằng mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;0;4)$.

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=53$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{53}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\sqrt{53}$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=53$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IA=\sqrt{(1-1)^2+(0-2)^2+(4+3)^2}=\sqrt{53}$.

Phương trình của mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=53$.

Chọn đáp án D □

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(3;-1;4)$ và đi qua điểm $M(1;-1;2)$ là

A. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=8$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2\sqrt{2}$. **D.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=8$.

Lời giải.

Ta có bán kính mặt cầu (S) đi qua M và tâm I là $IM=\sqrt{8}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$. **B.** $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=12$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$. **D.** $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$.

Lời giải.

Mặt cầu đường kính AB là mặt cầu đi qua tâm $I(0;3;2)$ là trung điểm AB và có bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Vậy phương trinh mặt cầu là $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(1;3;4)$ và $D(0;-2;2)$. Biết tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $MA^2+MB^2+MC^2=4MD^2$ là một mặt cầu. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $\sqrt{46}$. **B.** $\sqrt{33}$. **C.** $\sqrt{125}$. **D.** $\sqrt{206}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$, khi đó

$MA^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$, $MB^2=(x-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2$,

$MC^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$, $MD^2=(x-0)^2+(y+2)^2+(z-2)^2$.

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2=4MD^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+8x+26y-8z-5=0$.

Bán kính của mặt cầu $R=\sqrt{(-4)^2+(-13)^2+4^2-(-5)}=\sqrt{206}$.

Chọn đáp án D □

Câu 159. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;1)$. Tính độ dài AB.

A. 2. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$

Chọn đáp án B □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

A. Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$. **B.** Tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R=4$.

C. Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=16$. **D.** Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$.

Lời giải.

Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+4+9+2}=4$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 161. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2mx-2my+4mz-12m-10=0$. Bán kính nhỏ nhất của (S) là

A. $R=6$. **B.** $R=2$. **C.** $R=5$. **D.** $R=4$.

Lời giải.

$P(m)=m^2+m^2+4m^2+12m+10=6m^2+12m+10=6(m+1)^2+4\geq 4\,\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng 2 khi $m=-1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 162. Cho $\vec{a}=(-1;2;3)$, $\vec{b}=(2;1;0)$ với $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ thì tọa độ của $\vec{c}$ là

A. $(-4;3;3)$. **B.** $(-4;3;6)$. **C.** $(-4;1;3)$. **D.** $(-1;3;5)$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a}=(-2;4;6)$ do đó $2\vec{a}-\vec{b}=(-4;3;6)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 163. Cho $\vec{a}=(-2;1;3)$, $\vec{b}=(1;2;m)$. Véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{b}$ khi

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow -2+2+3m=0\Leftrightarrow m=0$.

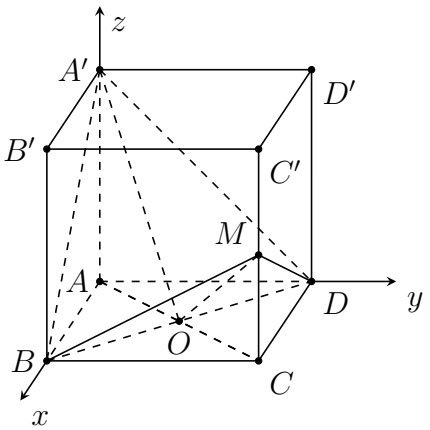
Chọn đáp án D ☐

Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ. Cho $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a>0,b>0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Xác định tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để mặt phẳng $(A'BD)$ vuông góc với mặt phẳng (BDM).

A. $\dfrac{a}{b}=1$. **B.** $\dfrac{a}{b}=2$. **C.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{b}=-1$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Dễ thấy $A(0;0;0)$, $M\left(a;a;\dfrac{b}{2}\right)$, $O\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.



Ta có $(A'BD)\cap(MBD)=BD$ và

$$\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp A'A\end{cases}\Rightarrow BD\perp(AA'C'C)\Rightarrow\begin{cases}BD\perp A'O\\ BD\perp OM.\end{cases}$$

$\Rightarrow((A'BD),(MBD))=(A'O,MO)=90^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{OA'}=\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2};b\right)$, $\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right)$

$\overrightarrow{OA'}\perp\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OM}=0\Leftrightarrow-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{2}=0\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=1$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 165. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-3;1)$ và đi qua điểm $A(5;-2;1)$ có phương trình là

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$. **D.** $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

Lời giải.

Bán kính $R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$. Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Chọn đáp án B □

Câu 166. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(x;y;z)$. Xét các khẳng định

① Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) là điểm có tọa độ $(x;y;0)$.
② Khoảng cách từ điểm M lên trục Oz bằng $\sqrt{x^2+y^2}$.
③ Hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy là điểm có tọa độ $(0;y;0)$.
④ Điểm đối xứng với điểm M qua trục Ox là điểm có tọa độ $(x;-y;-z)$.
⑤ Điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O là điểm có tọa độ $(-x;-y;-z)$.
⑥ Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ bằng $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 6.

Lời giải.

Tất cả các khẳng định trên đều đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 167. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm số giá trị nguyên $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $(C)\colon x^2+y^2+z^2-2mx+2my-2mz+27=0$ là phương trình mặt cầu.

A. 4033. **B**. 4030. **C**. 4031. **D**. 4032.

Lời giải.

Điều kiện $3m^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow m < -3$ hay $m > 3$. Mặt khác

$$m \in [-2018; 2018] \Rightarrow m \in \{-2018; -2017; \ldots; -5; -4; 4; 5; \ldots; 2017; 2018\}.$$

Có tất cả 4030 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 168. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **B**. $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.
C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D**. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Lời giải.

I là hình chiếu của M lên trục Ox suy ra $I(1;0;0)$. Do đó, ta có $\overrightarrow{IM} = (0;-2;3)$ suy ra $|\overrightarrow{IM}| = \sqrt{13}$. Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IM có phương trình là

$$(x-1)^2+y^2+z^2=13.$$

Chọn đáp án D □

Câu 169. Tam giác ABC có $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$. Độ dài trung tuyến m_b bằng

A. $\sqrt{3}$. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta được

$$m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} = \frac{2\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2+2^2\right)-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = 3 \Rightarrow m_b = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Tìm m để phương trình đó là phương trình của một mặt cầu.

A. $-5<m<1$. **B.** $m<-5$ hoặc $m>1$.

C. $m<-5$. **D.** $m>1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-d>0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+(2m)^2+m^2-5m^2-9>0$

$\Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-5 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-1;3)$ và $B(2;-5;1)$, điểm M thỏa mãn $MA=2MB$. Khi đó M sẽ thuộc mặt cầu nào sau đây?

A. $\left(x+\frac{10}{3}\right)^2+\left(y-\frac{19}{3}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=16$. **B.** $x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=9$.

C. $\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\left(y+\frac{19}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=16$. **D.** $x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có

$$\begin{aligned} & MA=2MB \Leftrightarrow MA^2=4MB^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4\left[(x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2\right] \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2+z^2-\frac{20}{3}x+\frac{38}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{106}{3}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\left(y+\frac{19}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=16. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x+2y+2z+2=0$.

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

C. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R=\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2+2\cdot 1+2\cdot 3+2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$.

Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

Chọn đáp án D □

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;4)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+1=0$ theo một đường tròn có chu vi $2\sqrt{3}\pi$.

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=\left(1+2\sqrt{3}\right)^2$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=2$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=4$.

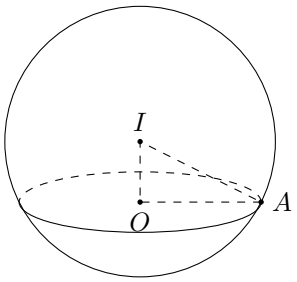
Lời giải.

Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (P) là $IO=d\left(I,(P)\right)=1$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến ta có $2\pi r=2\sqrt{3}\pi\Rightarrow r=OA=\sqrt{3}$.

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{3+1}=2$.

Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$.



Chọn đáp án C □

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;0)$, $\vec{b}=(-1;2;1)$, $\vec{b}=(-2;1;5)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề cho dưới đây.

A. $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{6}$. **B.** $\vec{a}\perp\vec{c}$. **C.** $\vec{b}\cdot\vec{c}=9$. **D.** $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\neq 0\Rightarrow\vec{a}$ không vuông góc với $\vec{b}$.

Chọn đáp án D □

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$ cho vec-tơ $\vec{u}(1;1;2)$ và $\vec{v}(2;0;m)$. Tìm giá trị của tham số m biết $\cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{4}{\sqrt{30}}$.

A. $m=1$. **B.** $m=-11$. **C.** $m=1; m=-11$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{1\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot m}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+m^2}}=\frac{4}{\sqrt{30}}\Leftrightarrow\sqrt{5}\cdot(2m+2)=4\sqrt{4+m^2}\Leftrightarrow m=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(2;3;6)$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là

A. 49π. **B.** $\dfrac{1372\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{341\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{343\pi}{6}$.

Lời giải.

Chú ý bốn đỉnh O,A,B,C là bốn đỉnh của hình hộp chữ nhật có các kích thước $2;3;6$. Vậy $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\dfrac{7}{2}$.

Từ đó suy ra $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot R^3=\dfrac{343\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(5;7;-13)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng Oyz. Tọa độ của H là

A. $(5;0;-13)$. **B.** $(0;7;-13)$. **C.** $(5;7;0)$. **D.** $(0;-7;13)$.

Lời giải.

Do H là hình chiếu vuông góc của M trên (Oyz) nên $H(0;7;-13)$.

Chọn đáp án B □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;2;1)$ trên Ox có tọa độ là

A. $(0;0;1)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(-3;0;0)$. **D.** $(0;2;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;2;1)$ trên Ox có tọa độ là $(3;0;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 179. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM.

A. $AM=3\sqrt{3}$. **B.** $AM=2\sqrt{7}$. **C.** $AM=\sqrt{29}$. **D.** $AM=\sqrt{30}$.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$, do M thuộc đoạn BC và $MC=2MB \Rightarrow \overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}$ $(*)$.

Ta có $\overrightarrow{CM}=(a+3;b-6;c-4)$ và $\overrightarrow{MB}=(-a;3-b;1-c)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a+3=-2a \\ b-6=6-2b \\ c-4=2-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-3;4;2) \Rightarrow AM=\sqrt{29}$.

Chọn đáp án C □

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(2;5;1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$. **B.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. **C.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$. **D.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=9$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2+1\cdot 5-3\cdot 1=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu (S).

A. $I(1;-2;3)$. **B.** $I(1;2;-3)$. **C.** $I(-1;2;-3)$. **D.** $I(-1;2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 182. Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh $S\left(\frac{17}{18};-\frac{11}{9};\frac{17}{18}\right)$ có đường tròn đáy đi qua điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l=\frac{\sqrt{86}}{6}$. **B.** $l=\frac{\sqrt{184}}{6}$. **C.** $l=\frac{\sqrt{94}}{6}$. **D.** $l=\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Theo bài ra, độ dài đường sinh là:

$$l=SA=\sqrt{\left(\frac{17}{18}-1\right)^2+\left(-\frac{11}{9}\right)^2+\left(\frac{17}{18}\right)^2}=\frac{\sqrt{86}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 183. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\,(1;0;2)$, $B\,(-2;1;3)$, $C\,(3;2;4)$, $D\,(6;9;-5)$. Hãy tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$?

A. $(2;3;-1)$. **B.** $(2;-3;1)$. **C.** $(2;3;1)$. **D.** $(-2;3;1)$.

Lời giải.

Gọi $G(x;y;z)$ là tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ ta có

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} \\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} \\ z=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-2+3+6}{4} \\ y=\dfrac{0+1+2+9}{4} \\ z=\dfrac{2+3+4-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1. \end{cases}$$

Vậy $G(2;3;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 184. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(-1;3;-9)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Oy sao cho tam giác ABM vuông tại M.

A. $M\left(0;1+2\sqrt{5};0\right)$ hoặc $M\left(0;1-2\sqrt{5};0\right)$. **B.** $M\left(0;2+2\sqrt{5};0\right)$ hoặc $M\left(0;2-2\sqrt{5};0\right)$.

C. $M\left(0;1+\sqrt{5};0\right)$ hoặc $M\left(0;1-\sqrt{5};0\right)$. **D.** $M\left(0;2+\sqrt{5};0\right)$ hoặc $M\left(0;2-\sqrt{5};0\right)$.

Lời giải.

Vì $M\in Oy$ nên $M(0;m;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(-1;m-1;-2)$ và $\overrightarrow{BM}=(1;m-3;9)$.

Vì tam giác ABM vuông tại M nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}$, tức là

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow -1+(m-1)(m-3)-18=0\Leftrightarrow m^2-4m-16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2-2\sqrt{5} \\ m=2+2\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy $M\left(0;2+2\sqrt{5};0\right)$ hoặc $M\left(0;2-2\sqrt{5};0\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 185. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m (biết $m\in\mathbb{N}$) để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Đồng nhất hệ số của phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ (*) với phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ta được $a=0$, $b=2-m$, $c=m+3$ và $d=3m^2+7$.

Phương trình (*) là phương trình của một mặt cầu khi

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-d>0 &\Leftrightarrow (2-m)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0 \\ &\Leftrightarrow -m^2+2m+6>0 \\ &\Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Do $1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}$ và $m\in\mathbb{N}$ nên $m\in\{0;1;2;3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 186. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$. Khi đó

$$\begin{cases} OI^2 = AI^2 \\ OI^2 = BI^2 \\ OI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = (x-1)^2+y^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = x^2+(y-2)^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(z+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -1. \end{cases}$$

Suy ra bán kính $R = OI = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 187. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;-3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tính độ dài đoạn OH.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{6}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình $(ABC): \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y-2z-6=0$; $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y-3z = 0 \\ -x-3z = 0 \\ 6x+3y-2z-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36}{49} \\ y = -\dfrac{18}{49} \\ z = -\dfrac{12}{49}. \end{cases}$$

Suy ra $OH = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 188. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1)$, $C(3;-4;1)$, $B'(2;-1;3)$, $D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x,y,z)$ thì $x+y+z$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** -3. **D.** 2.

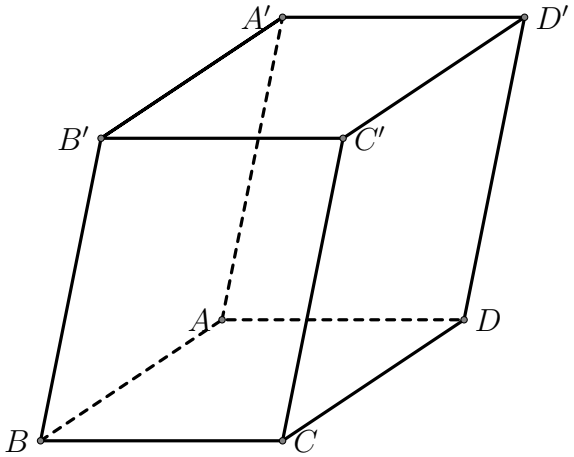
Lời giải.

Theo quy tắc hình hộp ta có:

$\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)+(0-x)+(1-x) = 3-x \\ (-1-y)+(3-y)+(2-y) = -4-y \\ (3-z)+(5-z)+(-1-z) = 1-z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$. Suy ra $x+y+z = 0+4+3 = 7$.



Chọn đáp án B □

Câu 189. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1;2;3)$; $\vec{b} = (2;2;-1)$; $\vec{c} = (4;0;-4)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$. **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$. **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$. **D.** $\vec{d}(7;0;4)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2\cdot 4;2-2+2\cdot 0;3+1+2\cdot(-4))=(7;0;-4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 190. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\,(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm

A. $M_3\,(3;0;0)$. **B.** $M_4\,(0;2;0)$. **C.** $M_1\,(0;0;-1)$. **D.** $M_2\,(3;2;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M\,(3;2;-1)$ lên trục Oz là điểm $M_1\,(0;0;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 191. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 2π. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$. **B.** $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.

C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$. **D.** $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến. Ta sẽ tính R từ công thức $R^2=r^2+(\,\mathrm{d}\,(I;(P)))^2$. Ta có

- ☑ $2\pi r=2\pi$ suy ra $r=1$.
- ☑ $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=3$.

Thay vào công thức ở trên, ta được $R^2=1^2+3^2=10$, suy ra $R=\sqrt{10}$. Vậy $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Chọn đáp án D □

Câu 192. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$, $N(2;-3;1)$, $P(3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

A. $Q(2;-6;4)$. **B.** $Q(4;-4;0)$. **C.** $Q(2;6;4)$. **D.** $Q(-4;-4;0)$.

Lời giải.

Giả sử $Q(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{PQ}=(x-3;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{NM}=(-1;5;2)$.

$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow \begin{cases}x-3=-1\\ y-1=5\\ z-2=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=6\\ z=4\end{cases}$. Vậy $Q(2;6;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{d}=\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $(1;-1;3)$. **B.** $(4;1;11)$. **C.** $(-3;5;7)$. **D.** $(0;2;6)$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{d}=\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}=(2-4\cdot 0+2\cdot 1;-5-4\cdot 2+2\cdot 7;3-4\cdot(-1)+2\cdot 2)=(4;1;11)$.

Chọn đáp án B □

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;1)$, $C(0;2;-2)$ là

A. $(x+7)^2+(y+5)^2+z^2=62$. **B.** $(x-7)^2+(y-5)^2+z^2=62$.
C. $(x-7)^2+(y-5)^2+z^2=74$. **D.** $(x+7)^2+(y+5)^2+z^2=74$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;0)$ là tâm của mặt cầu.
Mặt cầu đi qua ba điểm nên ta có

$$\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IB^2=IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2+1=(a-1)^2+b^2+1 \\ (a-1)^2+b^2+1=a^2+(b-2)^2+4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a+4+2b+1+1=-2a+1+1 \\ -2a+1+1=-4b+4+4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=4 \\ 2a-4b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=5. \end{cases}$$

Do đó mặt cầu có tâm $I(7;5;0)$ và bán kính $R=IB=\sqrt{62}$ nên có phương trình $(x-7)^2+(y-5)^2+z^2=62$.
Chọn đáp án B □

Câu 195. Cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$ và $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?
A. $x=4$ và $x=7$. **B.** $x=4$ và $y=7$. **C.** $x=-4$ và $y=-7$. **D.** $x=-4$ và $y=7$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2)$, $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$.
Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$.
Chọn đáp án D □

Câu 196. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?
A. $x^2+y^2+z^2-10xy-8y+2z-1=0$. **B.** $3x^2+3y^2+3z^2-2x-6y+4z-1=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+2017=0$. **D.** $x^2+(y-z)^2-2x-4(y-z)-9=0$.

Lời giải.

+ Phương trình $3x^2+3y^2+3z^2-2x-6y+4z-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{2}{3}x-2y+\dfrac{4}{3}z-\dfrac{1}{3}=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+(y-1)^2+\left(z+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}$ là phương trình mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{1}{3};1;-\dfrac{2}{3}\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.
+ Xét phương trình $x^2+y^2+z^2-10xy-8y+2z-1=0$ có tích xy nên không phải phương trình mặt cầu.
+ Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+2017=0$ có $a=1$, $b=2$, $c=-2$, $d=2017$ và $a^2+b^2+c^2-d=1+4+4-2017<0$ nên không là phương trình mặt cầu.
+ Phương trình $x^2+(y-z)^2-2x-4(y-z)-9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2yz-2x-4y+4z-9=0$ có tích yz nên không là phương trình mặt cầu.
Chọn đáp án B □

Câu 197. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$.
Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM=\sqrt{13}$.
Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
Chọn đáp án B □

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-11=0$, khi đó hãy xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;2;-3)$, $R=5$. **B.** $I(-1;-2;3)$, $R=25$.
C. $I(1;2;-3)$, $R=25$. **D.** $I(-1;-2;3)$, $R=5$.

Lời giải.

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-11=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$.
Suy ra $I(1;2;-3)$ và $R=5$.
Chọn đáp án A □

Câu 199. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(-7;4;0)$. Khi đó, trọng tâm G của tam giác OAB là điểm nào?

A. $G\left(-3;3;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $G(-8;2;3)$. **C.** $G(-6;6;3)$. **D.** $G(-2;2;1)$.

Lời giải.

Sử dụng công thức tính tọa độ trọng tâm tam giác, ta được kết quả $G(-2;2;1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 200. Cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** 3.

Lời giải.

Giả sử (S): $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} A(2;0;0)\in(S) \\ B(0;2;0)\in(S) \\ C(0;0;2)\in(S) \\ D(2;2;2)\in(S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+2a+d=0 \\ 4+2b+d=0 \\ 4+2c+d=0 \\ 12+2a+2b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=-2 \\ d=0. \end{cases}$$

(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.
Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. B	5. C	6. A	7. D	8. B	9. B	10. A
11. A	12. C	13. B	14. D	15. B	16. D	17. C	18. A	19. A	20. A
21. D	22. C	23. A	24. D	25. B	26. C	27. A	28. A	29. B	30. C
31. A	32. C	33. A	34. C	35. C	36. D	37. C	38. A	39. D	40. B
41. A	42. B	43. A	44. B	45. D	46. D	47. C	48. A	49. D	50. A
51. D	52. B	53. D	54. B	55. D	56. D	57. A	58. D	59. B	60. A
61. A	62. D	63. A	64. D	65. B	66. C	67. B	68. B	69. C	70. B
71. B	72. B	73. C	74. C	75. A	76. D	77. D	78. B	79. A	80. C
81. D	82. D	83. B	84. B	85. A	86. A	87. A	88. C	89. B	90. D
91. C	92. D	93. A	94. B	95. C	96. A	97. B	98. D	99. A	100. C
101. C	102. B	103. D	104. D	105. D	106. B	107. B	108. B	109. D	110. A
111. D	112. A	113. C	114. C	115. C	116. C	117. B	118. C	119. A	120. D
121. D	122. D	123. A	124. B	125. C	126. D	127. C	128. B	129. D	130. C
131. B	132. A	133. C	134. B	135. D	136. C	137. D	138. A	139. A	140. D
141. A	142. C	143. D	144. D	145. D	146. D	147. D	148. C	149. A	150. D
151. D	152. C	153. C	154. B	155. D	156. D	157. D	158. D	159. B	160. D
161. B	162. B	163. D	164. A	165. B	166. D	167. B	168. D	169. A	170. B
171. C	172. D	173. C	174. D	175. A	176. D	177. B	178. B	179. C	180. C
181. C	182. A	183. C	184. B	185. C	186. C	187. B	188. B	189. C	190. C
191. D	192. C	193. B	194. B	195. D	196. B	197. B	198. A	199. D	200. B

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$. **B.** $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

C. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$. **D.** $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có:

$$\pi r^2=2\pi \Leftrightarrow r^2=2.$$

Mặt khác $\mathrm{d}(I,(P))=1$ nên $R^2=r^2+[\mathrm{d}(I,(P))]^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

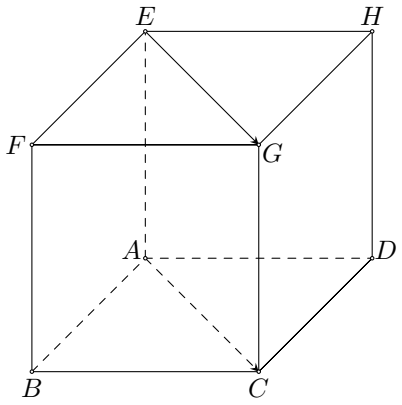
Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a, khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $a^2\sqrt{3}$. **C.** a^2. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^\circ=a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.



Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng ?

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.

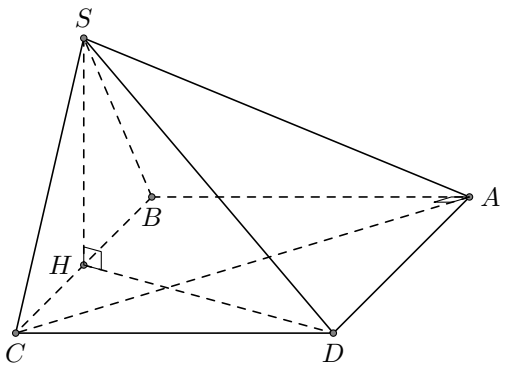
Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x},\overrightarrow{AC}=\vec{y},\overrightarrow{AS}=\vec{z}$.

Theo giả thiết ta có $|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|$, $\vec{x}\perp\vec{y}$ và $(\vec{z},\vec{x})=60^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AS}=(\vec{y}-\vec{z})\cdot\vec{x}=-a^2\cdot\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC})=\dfrac{\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}}{SC\cdot AB}=-\dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC})=120^\circ\Rightarrow(SC,AB)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.



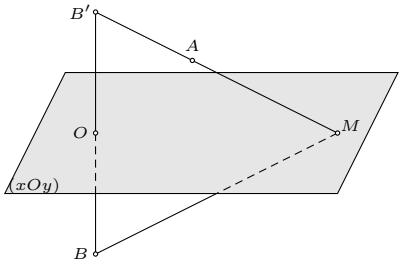
Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-1;4;-3)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

A. $M(-5;1;0)$. **B.** $M(5;1;0)$. **C.** $M(5;-1;0)$. **D.** $M(-5;-1;0)$.

Lời giải.

Phương trình $(xOy): z=0$. Vì $z_A \cdot z_B = 1\cdot(-3)<0$ nên A , B nằm khác phía so với (xOy) . Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (xOy) . Khi đó: $|MA-MB| = |MA-MB'| \le AB'$ Suy ra $|MA-MB|$ lớn nhất khi M, A, B' thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB' và (xOy). Mà $B'(-1;4;3)$. Suy ra tọa độ M là $(5;1;0)$.



Chọn đáp án B □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8-a-5+a-1+a=0 \\ 5-b-3+b-2+b=0 \\ -11-c+4+c+6+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(-2;0;1).$$

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right| = MI.$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có (S) có tâm $J(2;4;-1)$, $R=3$ và $M\in(S) \Rightarrow MI_{\min} = IJ-R = \sqrt{16+16+4}-3=3$.

Suy ra $MI=MJ \Rightarrow M$ là trung điểm của $IJ \Rightarrow M(0;2;0) \Rightarrow a+b=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2+MB^2-MC^2$ nhỏ nhất. Tính $a^2+b^2-c^2$.

A. 18. **B.** 0. **C.** 9. **D.** −9.

Lời giải.

Trước hết ta xác định điểm I thoả mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x_I=0-0 \\ 0-y_l=-3-0 \\ 0-z_I=0-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=-3 \\ y_I=3 \\ z_I=3 \end{cases} \Rightarrow I(-3;3;3).$

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2-MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2-IC^2 \end{aligned}$$

$$= MI^2 + IA^2 + IB^2 - IC^2.$$

Vì $IA^2 + IB^2 - IC^2$ không đổi nên $MA^2 + MB^2 - MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
Từ đó suy ra M là hình chiếu của I lên $(Oxy) \Rightarrow M(-3;3;0)$.
Vậy $a^2 + b^2 - c^2 = (-3)^2 + 3^2 - 0 = 18$.

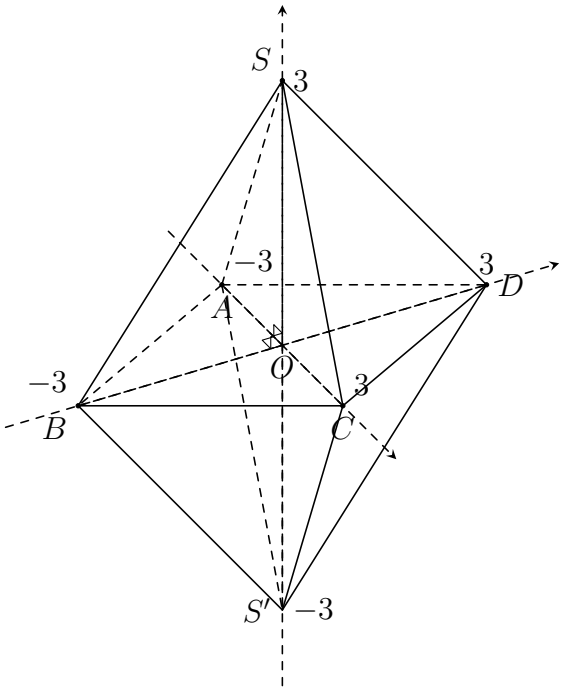
Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, biết rằng tập hợp tất cả các điểm $M(x;y;z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là một hình đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện đó.

A. 72. **B**. 36. **C**. 27. **D**. 54.

Lời giải.

Tập hợp tất cả các điểm $M(x,y,z)$ sao cho $|x| + |y| + |z| = 3$ là hình bát diện đều $SABCDS'$ (như hình vẽ).
Thể tích V của khối đa diện đó: $V = 2V_{S.ABCD} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD}$.
$ABCD$ là hình vuông cạnh $BC = OB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
$\Rightarrow S_{ABCD} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \Rightarrow V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 = 36.$



Chọn đáp án (B) □

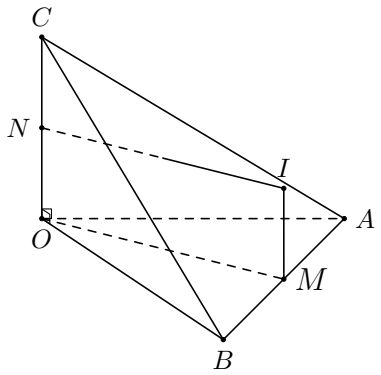
Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. **B**. $\sqrt{14}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{4}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp:
Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Cách giải:



Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và OC.

Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$.

Qua M dựng đường thẳng song song với OC, qua N dựng đường thẳng song song với OM. Hai đường thẳng này cắt nhau tại I. ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB \Rightarrow IO = IA = IB$. và $I \in IN \Rightarrow IO = IC \Rightarrow IO = IA = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $O.ABC$.

Ta có: $OA = 1, OB = 2, OC = 3$

$\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

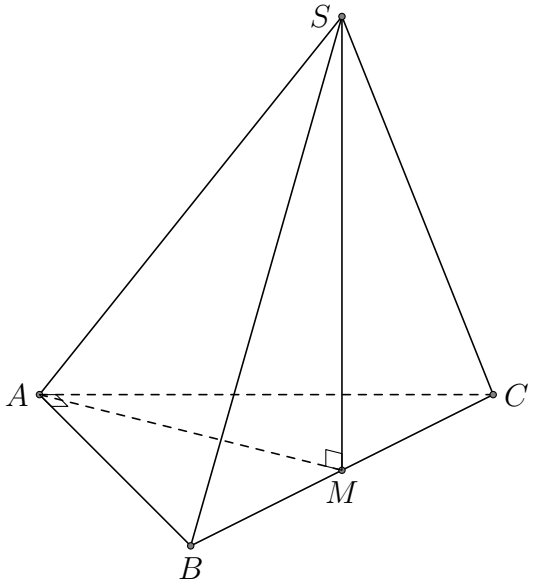
$R = OI = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $30°$.

Lời giải.



Do giả thiết ta có $BC^2 = 2a^2$ suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC). Do $SA = SB = SC$ suy ra $MA = MB = MC$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên M là trung điểm của BC và $AM = \dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $SM \perp (ABC)$ suy ra $SM \perp AM$. Khi đó trong tam giác SAM ta có

$$\begin{aligned} SM^2 = SA^2 - AM^2 &\Leftrightarrow SM^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow SM^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} \\ &\Leftrightarrow SM^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow SM = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $M(0;0;0)$; $C\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$; $B\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$; $A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$ và $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$ và $\overrightarrow{SC} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gọi α là góc giữa AB và SC ta có

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|}\\ &= \frac{\left|\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vì $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ nên $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ suy ra $\alpha = 60^\circ$.

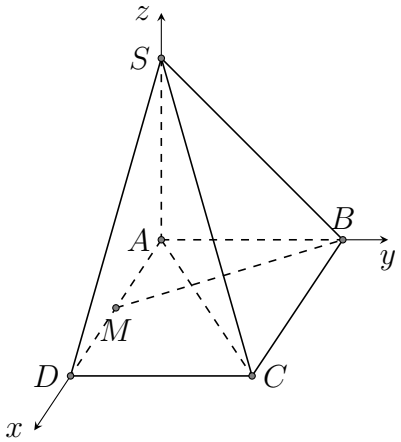
Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA = AB = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BM.

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. **B.** $\dfrac{6a}{\sqrt{14}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.

Đặt hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A, B \in Oy, D \in Ox, S \in Oz$.



Ta có: $A(0;0;0), S(0;0;a), B(0;a;0), D(a;0;0), C(a;a;0), M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$.

Do đó $d = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BM}\right]\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BM}\right]\right|}$. $(*)$

Mà $\overrightarrow{SC} = (a;a;-a), \overrightarrow{BM} = \left(\frac{a}{2};-a;0\right), \overrightarrow{BC} = (a;0;0)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BM}\right] = \left(-a^2;-\frac{a^2}{2};-\frac{3a^2}{2}\right)$, thay vào $(*)$ ta được

$$d = \frac{|-a^3|}{\sqrt{a^4+\frac{a^4}{4}+\frac{9a^4}{4}}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;1), B(0;2;-1), C(2;-3;1)$. Điểm M thỏa mãn $T = MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $P = x_M^2 + 2y_M^2 + 3z_M^2$.

A. $P = 134$. **B.** $P = 162$. **C.** $P = 101$. **D.** $P = 114$.

Lời giải.

Giả sử $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó ta có $\begin{cases}1-x-(0-x)+(2-x)=0\\ -2-y-(2-y)+(-3-y)=0\\ 1-z-(-1-z)+(1-z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=-7\\ z=3\end{cases} \Rightarrow I(3;-7;3)$.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}\right)^2 \\ &= IA^2 - IB^2 + IC^2 - 2\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IM}\right) + IM^2 \\ &= IA^2 - IB^2 + IC^2 - 2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + IM^2 = IA^2 - IB^2 + IC^2 + IM^2. \end{aligned}$$

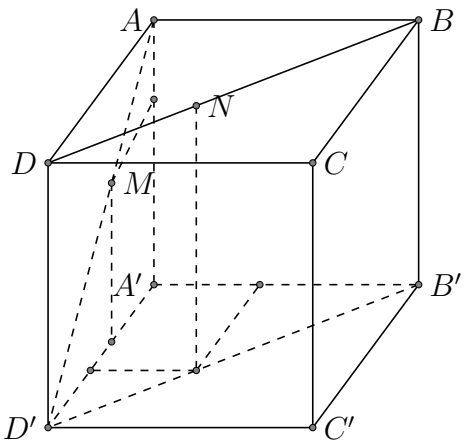
Do $IA^2 - IB^2 + IC^2$ là số không đổi nên T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I$.
Suy ra $M(3;-7;3)$.
Vậy $P = 3^2 + 2\cdot(-7)^2 + 3\cdot 3^2 = 134$.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Lấy điểm M thuộc đoạn AD', điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

A. $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $x = \dfrac{a}{3}$. **D.** $x = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A'$, $A'D' \equiv Ox$, $A'B' \equiv Oy$, $A'A \equiv Oz$.
$A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C'(a;a;0)$, $C(a;a;a)$.
$M\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}};0;\dfrac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\dfrac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}};\dfrac{x}{\sqrt{2}};a\right)$.



$$\Rightarrow MN^2 = (\sqrt{2}x - a)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3\left(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}ax + \frac{2a^2}{9}\right) + \frac{a^2}{3}.$$

$\Rightarrow MN^2 = 3\left(x - \dfrac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 + \dfrac{a^2}{3}$. Vậy MN ngắn nhất $\Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có dạng:
$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (S) với $a^2 + b^2 + c^2 > d$.
$O(0;0;0) \in (S) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$.
$A(-1;0;0) \in (S) \Rightarrow (-1)^2 - 2a(-1) = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$
$B(0;0;2) \in (S) \Rightarrow 2^2 - 2c\cdot 2 = 0 \Rightarrow c = 1$
$C(0;-3;0) \in (S) \Rightarrow (-3)^2 - 2b\cdot(-3) = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{3}{2}$

Suy ra mặt cầu có tâm $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};1\right)$.

$\overrightarrow{OI}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};1\right)$

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$:

$R=OI=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;-2)$, $B(4;0;0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O, A, B có tâm là

A. $I(2;0;-1)$. **B.** $I(0;0;-1)$. **C.** $I(2;0;0)$. **D.** $I\left(\frac{4}{3};0;-\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$.

Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R$

$O(0;0;0)\in(S)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=R$ (1)

$A(0;0;-2)\in(S)\Rightarrow a^2+b^2+(-2-c)^2=R$ (2)

$B(4;0;0)\in(S)\Rightarrow(4-a)^2+b^2+c^2=R$ (3)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow c^2=(-2-c)^2\Leftrightarrow c^2=c^2+4c+4\Rightarrow c=-1$.

Từ (1) và (3) $\Rightarrow a^2=(4-a)^2\Leftrightarrow a^2=a^2-8a+16\Rightarrow a=2$.

Thay $a=2; c=-1$ vào (1) ta được: $R=5+b^2\geq 5$.

Suy ra để mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất thì $b=0\Rightarrow I(2;0;-1)$.

Vậy $I(2;0;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;0;0)\,, C\,(0;0;3)\,, B\,(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là

A. $R=2$. **B.** $R=\sqrt{3}$. **C.** $R=3$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M\,(x;y;z)$.

Ta có: $MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2$;

$MB^2=x^2+(y-2)^2+z^2$;

$MC^2=x^2+y^2+(z-3)^2$.

$$\begin{aligned}MA^2=MB^2+MC^2&\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2+x^2+y^2+(z-3)^2\\&\Leftrightarrow -2x+1=(y-2)^2+x^2+(z-3)^2\\&\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(2;1;-1)$, $C(0;4;6)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Tìm tọa độ điểm M để $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-2;0;0)$. **B.** $M(2;0;0)$. **C.** $M(-1;0;0)$. **D.** $M(1;0;0)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó, $G(1;2;2)$.
$P = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right| = 3MG$. P nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
Điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu của G lên Ox. Vậy $M(1;0;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I nằm trên (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$.

A. $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$.
B. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ và $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.
C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ và $x^2+y^2+(z+3)^2=9$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của OA. Lúc đó (Q) đi qua điểm $B\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ (trung điểm OA) và nhận véc-tơ $\overrightarrow{OA}=(1;0;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến, nên có phương trình $x-z-1=0$.
Theo giả thiết, tâm I nằm trên (P) và cách đều O, A nên I nằm trên giao tuyến d của (P) và (Q) nên có tọa độ $I(t+1;2;t)$.
Chu vi tam giác OIA là

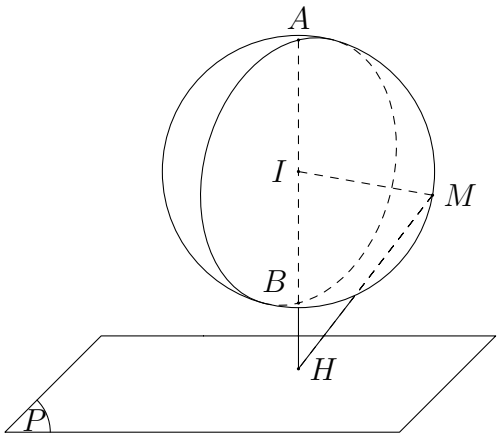
$$2p_{OIA} = OA+OI+IA = \sqrt{2}+\sqrt{t^2+4+(t+1)^2}+\sqrt{t^2+4+(t+1)^2} = \sqrt{2}+6$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+4+(t+1)^2}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2. \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta có $I(2;2;1)$ và phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
Với $t=-2$, ta có $I(-1;2;-2)$ và phương trình mặt cầu là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+24=0$. Gọi I là tâm mặt cầu và H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-1;0;4)$. **B.** $M(0;1;2)$. **C.** $M(3;4;2)$. **D.** $M(4;1;2)$.

Lời giải.



Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$.

$$\mathrm{d}(I,(P))=\frac{|2\cdot 1+2\cdot 2-3+24|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=9>R.$$

Suy ra mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Giả sử Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) và gọi H,A,B lần lượt là giao điểm của Δ với mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), ở đó I ở giữa A và H. Khi đó $MH\le MI+IH$.

Mà $MI+IH=HI+IA=HA\Rightarrow MH\le AH$. Từ đó suy ra điểm M cần tìm chính là điểm A. Đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=3-t.\end{cases}$

Thay $x=1+2t;y=2+2t;z=3-t$ vào phương trình mặt cầu, suy ra $t^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1.\end{array}\right.$

Từ đó suy ra $M(3;4;2)$.

Cách 2: Dễ thấy các điểm có tọa độ $(0;1;2)$ và $(4;1;2)$ không thuộc mặt cầu (S). Trong hai điểm còn lại ta thấy điểm $M(3;4;2)$ có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn hơn nên điểm $M(3;4;2)$ là điểm cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(3;2;4)$, $C(0;5;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(1;-3;0)$. **B.** $M(1;3;0)$. **C.** $M(3;1;0)$. **D.** $M(2;6;0)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$. Tọa độ I là $I(1;3;3)$. Khi đó $T=\left|4\overrightarrow{MI}\right|=4MI$. Để P nhỏ nhất thì MI nhỏ nhất, tức là M là hình chiếu của I lên (Oxy). Vậy tọa độ M là $M(1;3;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;2;1),B(-2;3;6)$. Điểm $M\,(x_M;y_M;z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$ khi biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ sao cho $\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{0}$. Khi đó

$$(x-3;y-2;z-1)+3(x+2;y-3;z-6)=(0;0;0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4}\\y=\dfrac{11}{4}\\z=\dfrac{19}{4}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{3}{4};\frac{11}{4};\frac{19}{4}\right).$$

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB})\right|=4MI\ge 4d_{(I,(Oxy))}$.

Suy ra, $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I lên mp(Oxy).

Khi đó $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{4};0\right)$. Ta có $T=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{4}+0=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;-4;6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$. **B.** 29. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}^2=3, \overrightarrow{AC}^2=61$.

Lại có $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ nên

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{AM}^2 =&AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ =&9+61+2(1\cdot 3-2\cdot(-4)+2\cdot 6)\\ =&116\end{aligned}$$

Do đó $AM=\sqrt{29}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho tam giác ABC biết $A(2;-1;3)$ và trọng tâm $G(2;1;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ có toạ độ là

A. $(0;6;9)$. **B.** $(0;9;-9)$. **C.** $(0;-9;9)$. **D.** $(0;6;-9)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AG}=(0;2;-3)$, theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}=(0;6;-9)$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(-2;3;1)$, $B\,(2;1;0)$, $C\,(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{ABC}$.

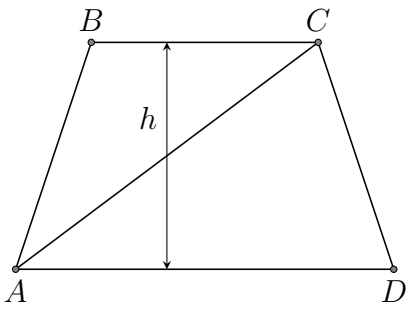
A. $D\,(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D\,(8;7;-1)\\ D\,(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D\,(-8;-7;1)\\ D\,(12;1;-3)\end{array}\right.$. **D.** $D\,(-12;-1;3)$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD}=3S_{ABC}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot h\cdot(AD+BC)=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot BC$

$\Leftrightarrow AD+BC=3BC\Leftrightarrow AD=2BC\Rightarrow \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-x_A=2(x_C-x_B)\\ y_D-y_A=2(y_C-y_B)\\ z_D-z_A=2(z_C-z_B)\end{cases}\Leftrightarrow D(-12;-1;3).$$



Chọn đáp án D □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(0;0;-1)$, $B\,(-1;1;0)$, $C\,(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{2};-1\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

Từ đó suy ra $I\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

$$\begin{aligned}3MA^2+2MB^2-MC^2&=3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2-(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2\\&=4MI^2+2\overrightarrow{MI}(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC})+3IA^2+2IB^2+IC^2\\&=4MI^2+3IA^2+2IB^2+IC^2.\end{aligned}$$

Vậy để $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $M\equiv I\Leftrightarrow M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

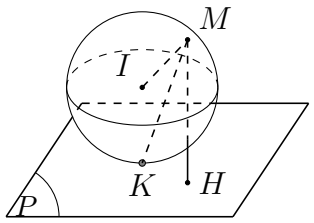
Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z-13=0$. Xét các mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ đi qua điểm A, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+2b^2+3c^2$ khi (S) có bán kính nhỏ nhất.

A. $T=35$. **B.** $T=20$. **C.** $T=25$. **D.** $T=30$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(P):x+y+2z-13=0$.



Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}\\x+y+2z-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\\z=3\end{cases}\Rightarrow H(3;4;3).$$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S).

Do (S) có tâm I, đi qua điểm A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm K nên ta có $2R=IA+d\,(I;(P))\geq AK\geq AH$.

Suy ra bán kính R nhỏ nhất bằng $\dfrac{AH}{2}\Rightarrow I$ là trung điểm của $AH\Rightarrow I(2;3;1)$.

Khi đó $T=a^2+2b^2+3c^2=25$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2),B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải.

Với $M(x;y;z)$ ta có

$$\begin{aligned}&\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}\\\Leftrightarrow\ &9\cdot MA^2=4\cdot MB^2\\\Leftrightarrow\ &9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]\\\Leftrightarrow\ &x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0\\\Leftrightarrow\ &(x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=3\cdot 36.\end{aligned}$$

Ta thấy M thuộc mặt cầu $I(-6;6;-6)$ có bán kính $R=6\sqrt{3}$ và đi qua gốc tọa độ O.

Ta thấy OM lớn nhất khi $OM=2R=12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm G. Biết $B(6;-6;0)$, $C(0;0;12)$ và đỉnh A thay đổi trên mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=9$. Khi đó G thuộc mặt cầu (S_2) có phương trình là

A. $(S_2)\colon (x+2)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=1$.
B. $(S_2)\colon (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=1$.
C. $(S_2)\colon (x-4)^2+(y+4)^2+(z-8)^2=1$.
D. $(S_2)\colon (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x_A=3x_G-x_B-x_C=3x_G-6\\ y_A=3y_G-y_B-y_C=3y_G+6\\ z_A=3z_G-z_B-z_C=3z_G-12. \end{cases}$$
Mà $A\in(S_1)$, suy ra $(3x_G-6)^2+(3y_G+6)^2+(3z_G-12)^2=9\Leftrightarrow (x_G-2)^2+(y_G+2)^2+(z_G-4)^2=1$.
Vậy điểm G thuộc mặt cầu $(S_2)\colon (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$ và $D(2;1;-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều tất cả bốn điểm đó?

A. 7 mặt phẳng.
B. Có vô số mặt phẳng.
C. 3 mặt phẳng.
D. 6 mặt phẳng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;-2)$.
$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;-2;-1)\Rightarrow [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD}=4\neq 0$.
Nên 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi (P) là mặt phẳng cách đều bốn đỉnh A, B, C, D; có hai trường hợp sau.

☑ Có một điểm nằm khác phía so với 3 điểm còn lại so với $(P)\Rightarrow$ có 4 mặt phẳng thỏa mãn.
☑ Mỗi phía mặt phẳng (P) có hai điểm: $\Rightarrow$ có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+t\\ y=2-2t\\ z=-3-t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=4+3t\\ x=3+2t\\ z=1-t \end{cases}$.
Trên đường thẳng d_1 lấy hai điểm A,B thoả mãn $AB=3$. Trên đường thẳng d_2 lấy hai điểm C,D thoả mãn $CD=4$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V=7$.
B. $V=2\sqrt{21}$.
C. $V=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$.
D. $V=\dfrac{5\sqrt{21}}{6}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;2;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{n_1}=(1;-2;-1)$, đường thẳng d_2 đi qua $N(4;3;1)$ và có VTCP $\overrightarrow{n_2}=(3;2;-1)$.
Ta có: $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ nên suy ra: $AB\perp CD$.
Lại có: $\mathrm{d}\,[AB,CD]=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]\right|}{|[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]|}=4\sqrt{21}$.
Dẫn tới $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\cdot AB\cdot CD\cdot \mathrm{d}\,[AB,CD]\cdot\sin(AB,CD)=2\sqrt{21}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua điểm $M(2;-2;5)$ và tiếp xúc với cả ba mặt phẳng $(P)\colon x-1=0$, $(Q)\colon y+1=0$ và $(R)\colon z-1=0$?

A. 7. **B**. 1. **C**. 8. **D**. 3.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ và r lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu.

Ta có $d(I,(P))=d(I,(Q))=d(I,(R))$ suy ra $r=|a-1|=|b+1|=|c-1|$.

Do điểm $M(2;-2;5)$ thuộc miền $x>1$; $y<-1$; $z>1$ nên $I(a;b;c)$ cũng thuộc miền $a>1$; $b<-1$; $c>1$. Do các mặt phẳng (P), (Q), (R) là các mặt phẳng song song lần lượt với các mặt phẳng (Oyz), (Oxz), (Oxy) nên $I(1+r;-1-r;1+r)$.

Mặt khác $IM=r\Leftrightarrow(r-1)^2+(r-1)^2+(r-4)^2=r^2\Leftrightarrow r=3$. Khi đó $I(4;-4;4)$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$ và $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có số đo bằng 45°. Một học sinh giải như sau:

Bước 1: Tính $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+1}}$.

Bước 2: Góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ có số đo bằng 45° nên $\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 1-2m=\sqrt{3(m^2+1)}$. $(*)$

Bước 3: Phương trình $(*)\Leftrightarrow(1-2m)^2=3(m^2+1)\Leftrightarrow m^2-4m-2=0\Leftrightarrow\hoac{m=2-\sqrt{6}\\m=2+\sqrt{6}.}$

Bài giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Sai ở bước 2. **B**. Sai ở bước 3. **C**. Đúng. **D**. Sai ở bước 1.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos 45^\circ\Leftrightarrow\frac{1-2m}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 1-2m=\sqrt{3(m^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow\heva{1-2m\geq 0\\(1-2m)^2=3(m^2+1)}\Leftrightarrow\heva{2m\leq 1\\m^2-4m-2=0}\Leftrightarrow\heva{m\leq\frac{1}{2}\\\hoac{m=2-\sqrt{6}\\m=2+\sqrt{6}}}\Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x+2y-2z-4=0$ và $(\beta):2x-2y-z+1=0$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=8$ khi

A. $m=12$. **B**. $m=-12$. **C**. $m=-10$. **D**. $m=5$.

Lời giải.

Giả sử $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và (β), ta chọn $\vec{n}_1(1;2;-2)$ và $\vec{n}_2(2;-2;-1)$. Khi đó $[\vec{n}_1;\vec{n}_2]=(-6;-3;-6)$, gọi $\vec{v}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ ta chọn $\vec{v}(2;1;2)$ và điểm $M_0\left(1;\dfrac{3}{2};0\right)$ thuộc Δ.

Suy ra phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t + \dfrac{3}{2} \\ z = 2t. \end{cases}$

Mặt khác ta có

$$(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+z^2 = 13-m.$$

Để (S) là mặt cầu suy ra $13-m>0 \Leftrightarrow m<13$.

Khi đó gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu ta có $I(-2;3;0)$ và $R=\sqrt{13-m}$.

Hạ $IH \perp \Delta$ suy ra $HA=HB=4$ ta có $IH = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0};\vec{v}\right]\right|}{|\vec{v}|}$. Mà $\overrightarrow{IM_0}\left(3;-\dfrac{3}{2};0\right)$ nên $\left[\overrightarrow{IM_0};\vec{v}\right] = (-3;-6;6)$ suy ra $IH = \dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 3$.

Xét tam giác vuông HIA ta có $IA^2 = IH^2+HA^2 \Leftrightarrow 13-m = 3^2+4^2 \Leftrightarrow m=-12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là mặt cầu (S). Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-2;-2;-8); R=3$. **B.** $I(-1;-1;-4); R=\sqrt{6}$.

C. $I(-1;-1;-4); R=3$. **D.** $I(-1;-1;-4); R=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I=(-1;-1;-4)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} AM^2+BM^2 &= \overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{BI}^2+2\overrightarrow{IM}^2+2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right) \\ &= AI^2+BI^2+2IM^2 \\ &= \frac{AB^2}{2}+2IM^2 = 12+2IM^2. \end{aligned}$$

Nên $AM^2+BM^2=30 \Leftrightarrow 12+2IM^2=30 \Leftrightarrow IM=3$. Vậy, tập hợp điểm M là mặt cầu (S) tâm $I(-1;-1;-4)$, bán kính $R=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-4)$, $B(-3;5;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho biểu thức MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-1;3;-2)$. **B.** $M(-2;4;0)$. **C.** $M(-3;7;-2)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2};-1\right)$.

Lời giải.

Ta tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0-x_I+2(-3-x_I)=0 \\ 2-y_I+2(5-y_I)=0 \\ -4-z_I+2(2-z_I)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=-2 \\ y_I=4 \\ z_I=0. \end{cases}$

Như vậy $I(-2;4;0)$.
Từ đó

$$\begin{aligned} MA^2+2MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= 3MI^2+IA^2+2IB^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}\right) \\ &= 3MI^2+IA^2+2IB^2 \geq IA^2+2IB^2=30. \end{aligned}$$

Do đó MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất là bằng 30 khi và chỉ khi $MI=0 \Leftrightarrow M\equiv I$. Hay $M=(-2;4;0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,\mathrm{d}x = k\left(x^3+2\right)^{\frac{3}{2}}+C$. Tính giá trị k.

A. $-\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\left(x^3+2\right)'\sqrt{x^3+2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\left(x^3+2\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Khi đó $k=\dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $A(1;0;0)$, $B(-1;1;-2)$, $C(-2;0;3)$, $D(0;-1;-1)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Biết rằng thể tích của khối chóp bằng 4 và đỉnh $S(x_0;y_0;z_0)$ với $x_0>0$. Tìm x_0.

A. $x_0=2$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=4$.

Lời giải.

- $H\left(-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(-2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;0;-3)$.
- Ta có $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-3;0;3)$ nên $S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=3\sqrt{2}$. Suy ra $SH=\dfrac{3V}{S_{ABCD}}=3\sqrt{2}$.
- $SH\perp(ABCD)$ nên $\overrightarrow{SH}=(t;0;-t)$. Do đó $SH=3\sqrt{2}\Leftrightarrow 2t^2=8\Leftrightarrow t=\pm 2$. Suy ra $S\left(1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$ hoặc $S\left(-3;-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Do $x_0>0$ nên $x_0=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là

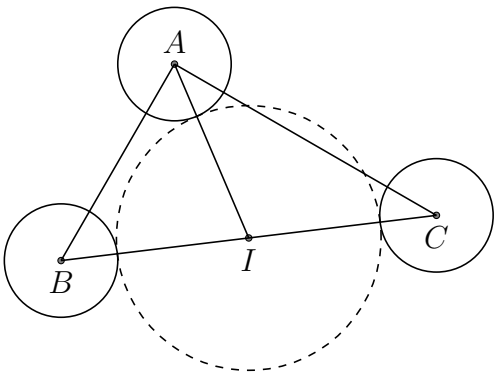
A. $R=2\sqrt{2}-1$. **B.** $R=\sqrt{10}$. **C.** $R=2\sqrt{2}$. **D.** $R=\sqrt{10}-1$.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{8}$, $AC=\sqrt{32}$, $BC=\sqrt{40}$ nên tam giác ABC vuông tại A.
Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của (S). Ta có

$$BC\le IB+IC=1+R+1+R\Rightarrow R\ge\sqrt{10}-1.$$

Dấu "=" xảy ra khi I là trung điểm của BC. Khi I là trung điểm của BC, xét mặt cầu (S) có tâm I và bán kính $R=\sqrt{10}-1$.



Khi đó ta có $IA=IB=IC=\sqrt{10}=(\sqrt{10}-1)+1=R+1$ nên (S) tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3). Vậy mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là $\sqrt{10}-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;0)$, $B(0;1;1)$, $C(2;1;0)$. Cho các mệnh đề sau:

① Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.
② Chu vi tam giác là $\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.
③ Tam giác ABC nhọn.
④ Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Số mệnh đề **sai** là?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)\Rightarrow AB=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)\Rightarrow AC=\sqrt{2}$,
$\overrightarrow{BC}=(2;0;-1)\Rightarrow BC=\sqrt{5}$.

☑ Suy ra: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ do đó $AB\perp AC$, tam giác ABC vuông tại A nên có diện tích là $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, suy ra a) $S=\sqrt{6}$ sai.
☑ Tam giác ABC có một góc vuông nên suy ra c) sai.
☑ Chu vi của tam giác là $AB+AC+BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$, suy ra b) sai.
☑ Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$, suy ra d) đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;-1;2)$. Tìm tọa độ M trên mặt phẳng Oxy sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

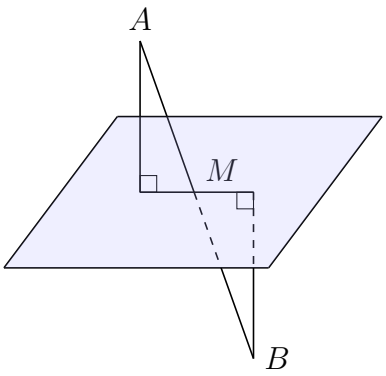
A. $M(1;1;0)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

Ta có $z_A = -2 < 0$, $z_B = 2 > 0$ nên A, B nằm về hai phía của Oxy.
Nên để $MA + MB$ nhỏ nhất thì $M = AB \cap (Oxy)$.
Lại có $\mathrm{d}(A, (Oxy)) = |z_A| = 2$ và $\mathrm{d}(B, (Oxy)) = |z_B| = 2$, suy ra

$$\frac{\mathrm{d}(A, (Oxy))}{\mathrm{d}(B, (Oxy))} = \frac{AM}{BM} = 1.$$

Hay M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.



Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+2)y - 2(m+3)z + 16m + 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A. $m < 0$ hay $m > 2$. **B.** $m \le -2$ hay $m \ge 0$.
C. $m < -2$ hay $m > 0$. **D.** $m \le 0$ hay $m \ge 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & m^2 + (m+2)^2 + (m+3)^2 - 16m - 13 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3m^3 - 6m > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1;2;0)$, $B(-2;1;1)$ và có tâm nằm trên trục Oz.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - y - 5 = 0$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu trên trục Oz có tọa độ $I(0;0;c)$.
Hai điểm A, B nằm trên mặt cầu nên

$$\begin{aligned} & IA^2 = IB^2 \\ \Leftrightarrow\ & 1^2 + 2^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + (1-c)^2 \\ \Leftrightarrow\ & c = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó, phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
hay $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;3;4), B(4;6;2), C(3;0;6)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Biết điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho độ dài đoạn thẳng GM nhỏ nhất. Tính độ dài đoạn thẳng GM.

A. $GM = 4$. **B**. $GM = \sqrt{5}$. **C**. $GM = 3$. **D**. $GM = 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(3; 3; 4)$.
Điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là hình chiếu của G trên mặt phẳng (Oxy). Khi đó

$$GM = d(G, (Oxy)) = 4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$. Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d?

A. $M(1; -1; -3)$. **B**. $N(3; -2; -1)$. **C**. $P(1; -1; -5)$. **D**. $Q(5; -3; 3)$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-1+2}{2} \neq \dfrac{-3+1}{4}$ nên điểm $M(1; -1; -3)$ không thuộc đường thẳng d.
Chọn đáp án A □

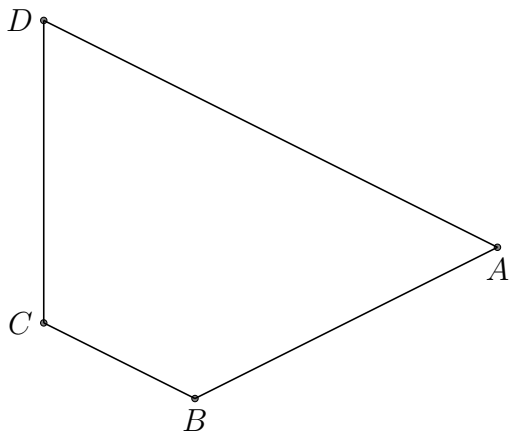
Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$.

A. $D(8; 7; -1)$. **B**. $\left[\begin{array}{l} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{array}\right.$. **C**. $\left[\begin{array}{l} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{array}\right.$. **D**. $D(-12; -1; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(A; BC) \cdot (BC + AD) \\ &= 3S_{\triangle ABC} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(A; BC) \cdot BC \\ &\Rightarrow AD = 2BC. \end{aligned}$$



Mặt khác $BC \parallel AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.
Gọi $D(x; y; z)$.
Ta có $\overrightarrow{AD} = (x+2; y-3; z-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$.

Suy ra $\begin{cases} x+2 = -10 \\ y-3 = -4 \\ z-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -1 \\ z = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$, điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ điểm D là

A. $(0; 8; 0)$. **B**. $(0; -7; 0)$ hoặc $(0; 8; 0)$.
C. $(0; 7; 0)$ hoặc $(0; -8; 0)$. **D**. $(0; -7; 0)$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;4)$, suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-4;-2)$.
Gọi điểm $D(0;y;0)\in Oy$, có $\overrightarrow{AD}=(-2;y-1;1)$.

$$V_{ABCD}=5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=5\Leftrightarrow\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=30$$
$$\Leftrightarrow |-4(y-1)-2|=30\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2-4y=30\\&2-4y=-30\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&y=-7\\&y=8.\end{aligned}\right.$$

Vậy có hai điểm D là $(0;-7;0)$ và $(0;8;0)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Tính độ dài đường phân giác trong AD của góc A.

A. $\dfrac{3\sqrt{74}}{2}$. **B.** $2\sqrt{74}$. **C.** $3\sqrt{74}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Lời giải.

Có $AB=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5$, $AC=\sqrt{6^2+8^2+0^2}=10$.
Có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DC=2DB$.

Mà D nằm giữa A và B nên ta suy ra $\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-x_D=-2(x_B-x_D)\\y_C-y_D=-2(y_B-y_D)\\z_C-z_D=-2(z_B-z_D)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=\dfrac{17}{3}\\y_D=\dfrac{11}{3}\\z_D=-1.\end{cases}$

Vậy ta có $D\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{11}{3};-1\right)$ nên suy ra $AD=\sqrt{\left(\dfrac{14}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+2^2}=\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;-1)$, $N(1;-2;3)$, $P(0;1;2)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

A. $\dfrac{7\sqrt{11}}{10}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{7}}{10}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{7}}{5}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{11}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $MN=\sqrt{21}$, $MP=\sqrt{14}$, $NP=\sqrt{11}$.
Lại có $\overrightarrow{MN}=(-1;-2;4)$, $\overrightarrow{MP}=(-2;1;3)\Rightarrow S_{\triangle MNP}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]\right|=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.
Mà $S_{\triangle MNP}=\dfrac{MN\cdot NP\cdot PM}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}{4\cdot\dfrac{5\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{7\sqrt{11}}{10}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;-2)$, $B(5;3;-1)$, $C(2,3,-4)$. Tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$ là

A. $H(7;6;-3)$. **B.** $H(3;1;-2)$. **C.** $H(4;2;-2)$. **D.** $H(1;-2;2)$.

Lời giải.

Nhận xét: Để ý $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;2;-2)$, do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A. Suy ra $H=(3;1;-2)$.

Cách giải khác

Gọi tọa độ trực tâm là $H(a;b;c)$, ta có
$\overrightarrow{BC}=(-3;0;-3)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;2;-2)$;
$\overrightarrow{AH}=(a-3;b-1;c+2)$, $\overrightarrow{BH}=(a-5;b-3;c+1)$; $[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}]=(6;-3;-6)$.
Vì H là trực tâm nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ [\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3(a-3)+0(b-1)-3(c+2)=0\\ -1(a-5)+2(b-3)-2(c+1)=0\\ 6(a-3)-3(b-1)-6(c+2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+0b-3c+3=0\\ -a+2b-2c-3=0\\ 6a-3b-6c-27=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$$

Vậy $H(3;1;-2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+4=0$. Tìm tọa độ của điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (P).

A. $N(-1;-1;4)$. **B.** $N(0;0;2)$. **C.** $N(-2;-2;2)$. **D.** $N(1;1;4)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P), suy ra $\vec{u}_\Delta=\vec{n}_P=(1,1,-2)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ là

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\ 2y+z=2.\end{cases}$$

Gọi I là giao điểm của Δ với mặt phẳng (P), suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y=0\\ 2y+z=2\\ x+y-2z+4=0\end{cases}\Rightarrow I(0;0;2).$$

Tọa độ điểm N được xác định như sau:

$$\begin{cases}x_N=2x_I-x_M\\ y_N=2x_I-y_M\\ z_N=2x_I-z_M\end{cases}\Rightarrow N(-1;-1;4).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0), B(5;3;-1), C(2;3;-4)$. Tọa độ tâm K của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là

A. $K\left(3;\frac{3}{5};-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $K\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$. **C.** $K\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)$. **D.** $K\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $AB = 3\sqrt{2}; BC = 3\sqrt{2}; CA = 3\sqrt{2}$.
Với K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có

$$BC \cdot \overrightarrow{KA} + CA \cdot \overrightarrow{KB} + AB \cdot \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Tọa độ tâm K của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_K = \dfrac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_K = \dfrac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 5 + 3\sqrt{2} \cdot 2}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3} \\ y_K = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 2 + 3\sqrt{2} \cdot 3 + 3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3} \\ z_K = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 0 + 3\sqrt{2} \cdot (-1) + 3\sqrt{2} \cdot (-4)}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy $K = \left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{8}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$.
Chọn đáp án C □

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai véc-tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 1)$ bằng
A. $150°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải.

Ta có: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 120°$.
Chọn đáp án D □

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(-1; 1; 0)$ và $D(2; 1; -2)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng
A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; -1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; -2; -1)$.
Diện tích mặt đáy ABC

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Phương trình mặt phẳng (ABC): $x - 2y - z + 3 = 0$.
Chiều cao tứ diện

$$h = \mathrm{d}(D, (ABC)) = \frac{|2 - 2 \cdot 1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}.$$

Cách 2. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1),\ \overrightarrow{AC} = (-1; 0; -1),\ \overrightarrow{AD} = (2; 0; -3)$$
$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; -2; -1),\ \overrightarrow{AD} \cdot \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 5.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+8y-2mz+6m=0$. Biết đường kính của (S) bằng 12, tìm m.

A. $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=8 \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} m=2 \\ m=-8 \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=4 \end{bmatrix}$. **D.** $\begin{bmatrix} m=2 \\ m=-4 \end{bmatrix}$.

Lời giải.

Ta có $a=2,\ b=-4,\ c=m,\ d=6m$. Do (S) có đường kính bằng 12 nên có bán kính bằng 6, suy ra

$$a^2+b^2+c^2-d=6^2 \Leftrightarrow 4+16+m^2-6m=36 \Leftrightarrow m^2-6m-16=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=-2 \\ m=8. \end{bmatrix}$$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;2)$; $B(-5;3;7)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T=2a+b-c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=3$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn

$$\begin{aligned} & 2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IA} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -5-x=2(-3-x) \\ 3-y=2(2-y) \\ 7-z=2(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & I(-1;1;-3). \end{aligned}$$

Ta có $|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|=|2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}|=MI$.

Vậy $|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

Phương trình đường thẳng d đi qua $I(-1;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận vec-tơ $\vec{n}_P=(1;1;1)$ làm vec-tơ chỉ phương nên có phương trình $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \\ z=-3+t. \end{cases}$

Tọa độ M thỏa hệ $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \\ z=-3+t \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=0 \\ y=2 \\ z=-2. \end{cases}$

Vậy $T=2a+b-c=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(9;-3;5)$, $B(a;b;c)$. Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz. Biết M,N,P nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=21$. **B.** $T=-15$. **C.** $T=13$. **D.** $T=14$.

Lời giải.

Do M,N,P nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM=MN=NP=PB$ nên N,M,P lần lượt là trung điểm của AB, AN, NB.

Suy ra $N\left(\dfrac{a+9}{2};\dfrac{b-3}{2};\dfrac{c+5}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{a+27}{4};\dfrac{b-9}{4};\dfrac{c+15}{4}\right)$, $P\left(\dfrac{3a+9}{4};\dfrac{3b-3}{4};\dfrac{3c+5}{4}\right)$.

Do M,N,P lần lượt nằm trên các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz nên $\begin{cases}\dfrac{c+15}{4}=0\\ \dfrac{b-3}{2}=0\\ \dfrac{3a+9}{4}=0.\end{cases}$

Suy ra $a=-3$, $b=3$, $c=-15$. Do đó $T=a+b+c=-15$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$ biết tam giác ABC có trực tâm $H(0;3;2)$. Tìm tọa độ của điểm C.

A. $C(3;2;3)$. **B.** $C(4;2;4)$. **C.** $C(1;2;1)$. **D.** $C(2;2;2)$.

Lời giải.

Gọi $C(a;b;c)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$, $\overrightarrow{CH}=(-a;3-b;2-c)$, $\overrightarrow{BC}=(a-2;b-3;c)$, $\overrightarrow{AH}=(-1;2;1)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2(3-b)-(2-c)=0\\ -(a-2)+2(b-3)+c=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-c=4 \quad (1)\\ a-2b-c=-4 \quad (2).\end{cases}$$

Vì $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right]=(4;0;4)$ nên $\vec{n}=(1;0;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (ABH).

Phương trình mặt phẳng (ABH) là $x+z-2=0$.

Mặt khác $C\in(ABH)\Rightarrow a+c-2=0\Leftrightarrow a+c=2 \quad (3)$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=3\\ c=0.\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm C là $C(1;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z-16=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=25$.
C. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2+0+2-16|}{\sqrt{4+1+4}}=4$.
Bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=25$.
Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho tham số $m\in\mathbb{R}$, mặt phẳng $(P)\colon (m^2-1)x-2mz-2m+2=0$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định bán kính r.

A. $r=1$. **B.** $r=2$. **C.** $r=4$. **D.** $r=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu cần tìm, ta có

$$\begin{aligned} d_{(I;(P))}=r &\Leftrightarrow \frac{|(m^2-1)a-2mc-2m+2|}{\sqrt{(m^2-1)^2+(-2m)^2}}=r\\ &\Leftrightarrow \frac{|am^2-2m(c+1)-a+2|}{\sqrt{(m^2+1)^2}}=r\\ &\Leftrightarrow |am^2-2m(c+1)-a+2|=rm^2+r. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số, để phương trình trên không phụ thuộc vào m ta có $\begin{cases} a=r\\ -2(c+1)=0\\ -a+2=r \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ c=-1\\ r=1. \end{cases}$

Vậy $r=1$.
Chọn đáp án A □

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-(4m-2)x+2my+(4m+2)z-7=0$. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối cầu là

A. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$. **B.** 972π. **C.** 36π. **D.** 300π.

Lời giải.

Khối cầu đã cho có bán kính là

$$R=\sqrt{(2m-1)^2+m^2+(2m+1)^2+7}=\sqrt{9m^2+9}\geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=0$. Do đó giá trị nhỏ nhất của bán kính khối cầu đã cho là 3. Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối cầu là $\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^3=36\pi$.
Chọn đáp án C □

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=-z$ và điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm A thuộc đường thẳng Δ, bán kính là $AM=\sqrt{5}$ biết tâm A có cao độ là số dương.

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+z^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.
C. $(x+3)^2+(y+3)^2+z^2=5$. **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải.

Gọi $A(3+2t;3+2t;-t)$ là tâm của mặt cầu (điều kiện $t<0$).

Ta có $AM=\sqrt{5}\Leftrightarrow AM^2=5\Leftrightarrow (2t)^2+(1+2t)^2+(t+1)^2=5\Leftrightarrow 9t^2+6t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có $t=-1\Rightarrow A(1;1;1)$ nên mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

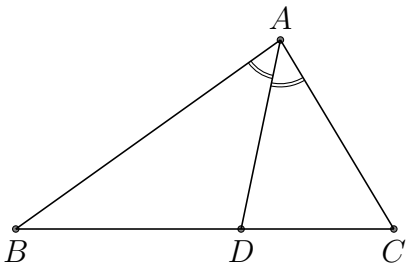
Chọn đáp án B □

Câu 61. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;2)$, $B(-5;6;4)$, $C(0;1;-2)$. Độ dài đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{74}}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2\sqrt{74}}$. **C.** $\dfrac{2}{3\sqrt{74}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$, ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.



Lại có $AB=2\sqrt{26}$ và $AC=\sqrt{26}$ nên $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}$.

Gọi $D(x;y;z)$.

$$\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} -5-x=-2(-x) \\ 6-y=-2(1-y) \\ 4-z=-2(-2-z) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{8}{3} \\ z=0. \end{cases}$$

Vậy $D\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3};0\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}=\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{14}{3};-2\right)$. Do đó $AD=\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;-3)$, $C(4;2;5)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $P=x_0+y_0+z_0$ bằng

A. $P=0$. **B.** $P=6$. **C.** $P=3$. **D.** $P=-3$.

Lời giải.

Vì $M\in(Oxy)$ nên $M(x_0;y_0;0)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $G(2;1;3)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| &= \left|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right| \\ &= \left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG=3\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2+3^2}\geq 9. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_0=2$ và $y_0=1$ hay $M(2;1;0)$.

Vậy $P=x_0+y_0+z_0=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Tính $S=a+b+c$.

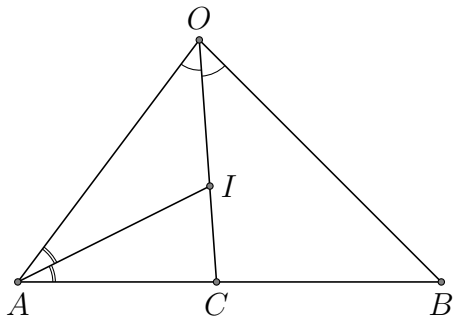
A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=2$.

Lời giải.

Gọi C là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.

Ta có $OA=3$, $OB=4$.

$$\overrightarrow{CA}=-\frac{OA}{OB}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_C=-\frac{3}{4}\left(-\frac{8}{3}-x_C\right)\\2-y_C=-\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}-y_C\right)\\1-z_C=-\frac{3}{4}\left(\frac{8}{3}-z_C\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=0\\y_C=\frac{12}{7}\\z_C=\frac{12}{7}.\end{cases}$$



Vậy $C\left(0;\frac{12}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Khi đó

$$AC=\sqrt{(0-2)^2+\left(\frac{12}{7}-2\right)^2+\left(\frac{12}{7}-1\right)^2}=\frac{15}{7}.$$

Ta lại có

$$\overrightarrow{IC}=-\frac{AC}{AO}\overrightarrow{IO}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=\frac{5}{7}a\\\frac{12}{7}-b=\frac{5}{7}b\\\frac{12}{7}-c=\frac{5}{7}c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\\c=1.\end{cases}$$

Do đó $S=a+b+c=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\\z=3t\end{cases}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z-4=0$; $(Q)\colon 2x+y+1=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d, tiếp xúc (P) và cắt mặt phẳng (Q) theo một đường tròn có bán kính bằng $r=2$, biết I có hoành độ dương.

A. $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. **B.** $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

C. $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **D.** $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải.

Vì $I\in d$ nên tọa độ có dạng $I(2+t;3+t;3t)$.

(S) tiếp xúc (P) nên ta có bán kính của mặt cầu là $R=\mathrm{d}(I;(P))=|t-2|$.

Lại có $\mathrm{d}(I;(Q))=\frac{|3t+8|}{\sqrt{5}}$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Q) theo đường tròn có bán kính $r=2$ khi và

chỉ khi

$$\begin{aligned} & R^2 = r^2 + [\mathrm{d}(I;(Q))]^2 \\ \Leftrightarrow\ & (t-2)^2 = 4 + \left(\frac{3t+8}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -16 \end{array}\right. \end{aligned}$$

☑ $t=-1$ suy ra $I(1;2;-3); R=3$. Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

☑ $t=-16$ suy ra $I(-14;-13;-48)$, loại do I phải có hoành độ dương.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 4π. **D.** 2π.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB}=90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB=2R=4$.

Ta có $S_{\triangle AMB}=\dfrac{1}{2}MA\cdot MB \leqslant \dfrac{MA^2+MB^2}{4}=\dfrac{AB^2}{4}=4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA=MB=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ và $S_{\triangle AMB}=4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A. $M(3;-4;0)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2};0\right)$.

Lời giải.

Điểm $I(3;-4;5)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Suy ra

$$\begin{aligned} MA^2-2MB^2 &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= MI^2-2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2-2MI^2-4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}-2IB^2 \\ &= -MI^2+IA^2-2IB^2. \end{aligned}$$

Do đó MA^2-2MB^2 lớn nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxy. Vậy $M(3;-4;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;2;-1)$, $B\,(2;1;1)$, $C\,(0;1;2)$. Gọi $H\,(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC. Giá trị của $S=x+y+z$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (1;-1;2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2;0;1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-1;3)$.
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1;-5;-2)$
$\Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = (-1;-5;-2)$.
$\Rightarrow (ABC)\colon\ -1(x-1) - 5(y-2) - 2(z+1) = 0$
$\Leftrightarrow -x - 5y - 2z + 9 = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 2z - 9 = 0$.
Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases}$
Mà $\overrightarrow{AH} = (x-1;y-2;z+1)$, $\overrightarrow{BH} = (x-2;y-1;z-1)$.
$\Rightarrow \begin{cases} -2x + z = -3 \\ -x - y + 3z = 0 \\ x + 5y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2;1;1) \Rightarrow x + y + z = 4.$
Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

A. $P = 6$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 9$.

Lời giải.

Goi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với ba trụ tọa độ và đi qua $A(1;-1;4)$ nên

$$\begin{cases} a > 0, b < 0, c > 0 \\ |a| = |b| = |c|. \end{cases}$$

Do đó $I(a;-a;a)$. Vì $IA = R$ nên $(a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 3$. Ta có $a = 3, b = -3, c = 3$ nên $P = a - b + c = 9$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;2;3)$, $C(0;-2;3)$. Gọi (S_1), (S_2), (S_3) là các mặt cầu có tâm A, B, C và bán kính lần lượt bằng $3, 2, 1$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A. 7. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $AC = 1 < R_1 - R_3 \Rightarrow (S_3)$ nằm trong (S_1). Vậy không có mặt phẳng nào tiếp xúc với cả ba mặt cầu.
Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. **B.** $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.
C. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$. **D.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.
Ta có: $OM = 3$, $ON = 4$, $MN = 5$.

Áp dụng công thức: $\begin{cases} x_I = \dfrac{ON \cdot x_M + OM \cdot x_N + MN \cdot x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \dfrac{ON \cdot y_M + OM \cdot y_N + MN \cdot y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \dfrac{ON \cdot z_M + OM \cdot z_N + MN \cdot z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\,(0;1;1).$

Và $\mathrm{d}\,(I,(Oxz)) = 1$.

Vậy, phương trình mặt cầu cần lập : $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2;4;8)$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là

A. $(3;6;12)$. **B.** $\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A(x_A;0;0), B(0;y_B;0), C(0;0;z_C)$. Do $G(2;4;8)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_A = 6, y_B = 12$ và $z_C = 24$. Suy ra $A(6;0;0), B(0;12;0), C(0;0;24)$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$, trong đó $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu. Do (S) đi qua bốn điểm A, B, C, O nên ta có hệ

$$\begin{cases} d = 0 \\ 36 - 12a + d = 0 \\ 144 - 24b + d = 0 \\ 576 - 48c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 3 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow I(3;6;12).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1;-3;4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6;8;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC.

Suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, có tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a = 0 \\ b = m - 2 \\ c = -(m+3) \\ d = 3m^2 + 7. \end{cases}$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2-d>0 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0 \\ \Leftrightarrow\ & -m^2+2m+6>0 \\ \Leftrightarrow\ & 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Mà $m\in\mathbb{N}\Rightarrow m\in\{0,1,2,3\}$.
Vậy có bốn giá trị số tự nhiên của m thỏa điều kiện đề bài.
Chọn đáp án C □

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba hình tròn tương ứng đó.

A. 10π. **B.** 36π. **C.** 38π. **D.** 33π.

Lời giải.

Vì tổng diện tích của ba hình tròn luôn không đổi, nên ta có thể chọn ba mặt phẳng đặc biệt đi qua A và đôi một vuông góc với nhau đó là mặt phẳng $x=1$, $y=2$, $z=3$.
Giao điểm của (S) với mặt phẳng $x=1$ là $(y+1)^2+(z-2)^2=16$.
Giao điểm của (S) với mặt phẳng $y=2$ là $(x-1)^2+(z-2)^2=16-9=7$.
Giao điểm của (S) với mặt phẳng $z=3$ là $(x-1)^2+(y+1)^2=16-1=15$.
Vậy tổng diện tích của ba hình tròn là $\pi(16+7+15)=38\pi$.
Chọn đáp án C □

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz).

A. $A_1(1;0;0)$. **B.** $A_1(0;2;3)$. **C.** $A_1(1;0;3)$. **D.** $A_1(1;2;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$. Từ đó suy ra điểm $A_1(0;2;3)$ là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz).
Chọn đáp án B □

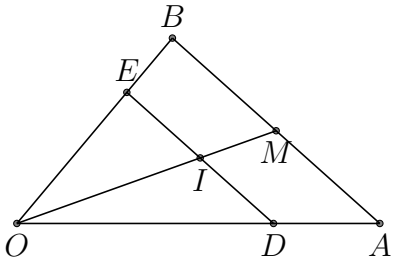
Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(0;1;-1)$. Hai điểm D, E thay đổi trên các đoạn OA, OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm I của đoạn DE có tọa độ là

A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ 0\right)$. **B.** $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\ \frac{\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 0\right)$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $OA=OB=\sqrt{2}$ và

$$\begin{aligned} & S_{ODE}=\frac{1}{2}S_{OAB} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cdot OD\cdot OE\cdot\sin\widehat{DOE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\widehat{AOB} \\ \Leftrightarrow & OD\cdot OE=\frac{1}{2}OA\cdot OB=1. \end{aligned}$$



Mặt khác
$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE.\cos\widehat{AOB} \geq 2OD.OE - 2OD.OE.\cos\widehat{AOB} = 2\left(1 - \cos\widehat{AOB}\right)$.
Suy ra DE nhỏ nhất khi $OD = OE = 1$.
Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.
Khi đó, $\overrightarrow{OI} = \frac{OI}{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OD}{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$. Suy ra $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$
Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.
A. $a+b+c = \frac{14}{5}$. **B.** $a+b+c = 0$. **C.** $a+b+c = \frac{12}{5}$. **D.** $a+b+c = 12$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng
A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.
Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC} = \frac{S_{OBC}}{\cos((OBC),(ABC))} = \frac{OA}{\mathrm{d}(O,(ABC))} \cdot S_{OBC} = \frac{|abc|}{2\mathrm{d}(O,(ABC))}.$$

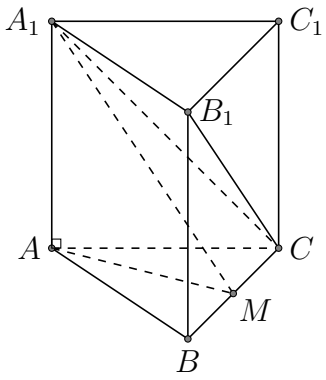
Thể tích tứ diện $OABC$ là: $V = \frac{|abc|}{6}$
Theo bài ra, ta có:

$$\frac{|abc|}{2\mathrm{d}(O,(ABC))} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|abc|}{6} \Rightarrow \mathrm{d}(O,(ABC)) = 2.$$

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính bằng 2.
Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1\left(\sqrt{3}; -1; 1\right)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$, (C không trùng với O). Biết $\vec{u} = (a;b;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C. Tính $T = a^2 + b^2$.
A. 4. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 5.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Vì B, C thuộc trục Oz nên $M(0;0;m)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$ là véc-tơ chỉ phương của BC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A_1A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A_1AM) \Rightarrow BC \perp A_1M.$

Mặt khác $\overrightarrow{A_1M}=(-\sqrt{3};1;m-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1M}\cdot\vec{k}=0 \Rightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

$\Rightarrow M(0;0;1)$. Gọi $C(0;0;z)$ và $AB=x>0$. Vì ABC là tam giác đều cạnh bằng x nên $AM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{A_1M}=(-\sqrt{3};1;0) \Rightarrow A_1M=2.$

Xét tam giác A_1AM vuông tại $A \Rightarrow A_1M^2=A_1A^2+AM^2 \Leftrightarrow 2^2=1^2+\dfrac{3x^2}{4} \Leftrightarrow x=2.$

Ta có $\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{3};1;z-1) \Rightarrow A_1C^2=4+(z-1)^2.$

Xét tam giác A_1AC vuông tại A

$\Rightarrow A_1C^2=A_1A^2+AC^2 \Leftrightarrow 4+(z-1)^2=1+4 \Leftrightarrow (z-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=0. \end{array}\right.$

Với $z=0 \Rightarrow C(0;0;0)\equiv O \Rightarrow C(0;0;0)$ (loại).

Với $z=2 \Rightarrow C(0;0;2)$ (thỏa mãn).

Suy ra $\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{3};1;1).$

Vì $\vec{u}=(a;b;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của A_1C nên $\dfrac{a}{-\sqrt{3}}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\sqrt{3} \\ b=2. \end{cases}$

Vậy $T=\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2=16.$

Chọn đáp án C □

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-11=0$ và mặt phẳng cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$ tiếp xúc với nhau tại điểm $H(x_o;y_o;z_o)$. Tính tổng $T=x_o+y_o+z_o$.

A. $T=2$. **B.** $T=0$. **C.** $T=6$. **D.** $T=4$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm $I(1;-2;1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(2;3;1)$ làm vtcp.

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow$ giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (P) là $H(3;1;2)$.

Suy ra $T=x_o+y_o+z_o=6.$

Chọn đáp án C □

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0)$. Giả sử B và C là các điểm thay đổi nằm trên các trục Ox và Oz. Gọi M là trung điểm của AC. Biết rằng khi B và C thay đổi nhưng nằm trên các trục Ox và Oz thì hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng AB luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\dfrac{1}{4}$. **B.** $R=\dfrac{1}{2}$. **C.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

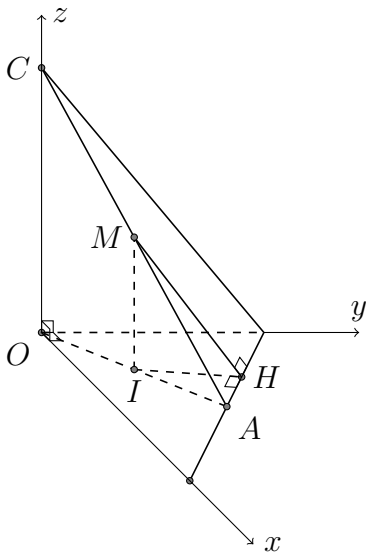
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của OA, ta có $IM \parallel OC \Rightarrow IM \perp (Oxy)$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp MH \\ AB \perp IM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (IMH) \Rightarrow AB \perp IH$.

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (C) cố định có đường kính IA và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

Vậy bán kính của đường tròn (C) là $R = \dfrac{OA}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng đó.

A. 33π. **B**. 10π. **C**. 38π. **D**. 36π.

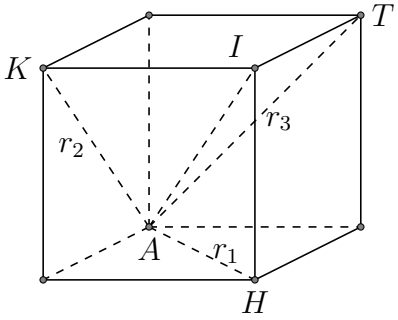
Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=4$.

Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính ba đường tròn và H, K, T là hình chiếu của tâm I của mặt cầu (S) lên ba mặt phẳng tương ứng.

Khi đó, tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng là

$$\begin{aligned} S &= \pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2) = \pi\left[(R^2-IH^2)+(R^2-IK^2)+(R^2-IT^2)\right] \\ &= \pi\left[3R^2-(IH^2+IK^2+IT^2)\right] = \pi(3R^2-IA^2) = 38\pi. \end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 84. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB=BC=CA=4$, $AD=5$, $CD=6$, $BD=7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 60°. **B**. 120°. **C**. 30°. **D**. 150°.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)}{AB\cdot CD} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot CD} \\ &= \frac{AB^2+AD^2-BD^2-(AB^2+AC^2-BC^2)}{2\cdot AB\cdot CD} \\ &= \frac{AD^2+BC^2-AC^2-BD^2}{2\cdot AB\cdot CD} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy góc cần tìm bằng 60°.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2};-1\right)$. **D.** $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

Lời giải.

Cách 1: Giả sử $M(x;y;z) \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AM}=(x;y;z+1)\\ \overrightarrow{BM}=(x+1;y-1;z)\\ \overrightarrow{CM}=(x-1;y;z-1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AM^2=x^2+y^2+(z+1)^2\\ BM^2=(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\\ CM^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ & 3MA^2+2MB^2-MC^2\\ =\ & 3[x^2+y^2+(z+1)^2]+2[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2]-[(x-1)^2+y^2+(z-1)^2]\\ =\ & 4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+5\\ =\ & \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+(2y-1)^2+(2z+2)^2-\frac{9}{4}\geqslant -\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-1$, khi đó $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

Cách 2: Ta có:

$P=3MA^2+2MB^2-MC^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$P=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+2IB^2-IC^2$

Chọn điểm $I(a;b;c)$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3(-a)+2(-1-a)-(1-a)=0\\ 3(-b)+2(1-b)-(-b)=0\\ 3(-1-c)+2(-c)-(1-c)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=\dfrac{1}{2}\\ c=-1\end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right).$$

Để P nhỏ nhất thì $M\equiv I$. Vậy $M\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-1\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$. Tìm đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy)

A. $l=2\sqrt{13}$. **B.** $l=2\sqrt{41}$. **C.** $l=2\sqrt{26}$. **D.** $l=2\sqrt{11}$.

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(2;-1;1)$, $M\,(5;3;1)$, $N\,(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y+z=27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM, điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ điểm C là

A. $(-15;21;6)$. **B.** $(21;21;6)$. **C.** $(-15;7;20)$. **D.** $(21;19;8)$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra C là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ và mặt phẳng (P).

Đặt $\vec{e}_1=\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}$ và $\vec{e}_2=\dfrac{\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AN}\right|}$. Mà $\overrightarrow{AM}=(3;4;0)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{AN}=(2;2;1)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AN}\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

Khi đó tọa độ $\vec{e}_1\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5};0\right)$ và $\vec{e}_2\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ suy ra $\vec{e}_1+\vec{e}_2=\left(\frac{19}{15};\frac{22}{15};\frac{1}{3}\right)$. Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương

của đường thân giác góc $\widehat{BAD}$, dễ thấy $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, ta chọn $\vec{u}\,(19;22;5)$.

Khi đó phương trình tham số của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ là $\begin{cases} x=2+19t \\ y=-1+22t \\ z=1+5t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

Do giả thiết tọa độ điểm C tương ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình $-1+22t+1+5t=27 \Leftrightarrow t=1$. Ta suy ra tọa độ điểm $C\,(21;21;6)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;2)$, $B(1;-1;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua cả bốn điểm A,B,C,D?

A. 3. **B**. 1. **C**. 0. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(0;1;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(1;-1;-3)$. Dễ thấy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ nên $ABCD$ là hình vuông. Vậy có vô số mặt cầu đi qua 4 điểm A,B,C,D.

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25$, $(S_2):x^2+y^2+z^2-2y-2z-14=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (S_1) và (S_2) không cắt nhau .

B. (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=1$.

C. (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{\dfrac{76}{10}}$.

D. (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=\dfrac{5\sqrt{77}}{11}$.

Lời giải.

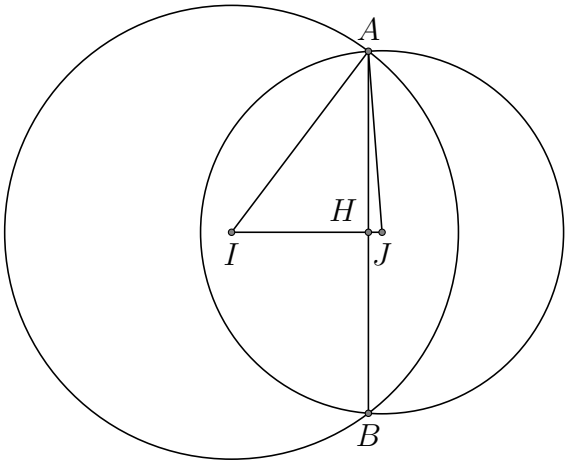
Từ giả thiết: (S_1) có tâm $I=(1;-2;2)$ và bán kính $R_1=5$.

(S_2) có tâm $J=(0;1;1)$ và bán kính $R_2=4$.

Khi đó $R_1-R_2=1<IJ=\sqrt{11}<R_1+R_2=9$ nên hai mặt cầu cắt nhau theo một giao tuyến là đường tròn có tâm H và bán kính $r=\dfrac{AB}{2}$ và H nằm giữa IJ.

Khi đó $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{25-r^2}$ và $JH=\sqrt{JA^2-AH^2}=\sqrt{16-r^2}$.

Do đó



$$\begin{aligned} & IH+JH=IJ \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{25-r^2}+\sqrt{16-r^2}=\sqrt{11} \\ \Rightarrow\ & \sqrt{25-r^2}=\sqrt{11}-\sqrt{16-r^2} \\ \Rightarrow\ & 25-r^2=11+16-r^2-2\sqrt{11\,(16-r^2)} \\ \Rightarrow\ & \sqrt{11\,(16-r^2)}=1 \\ \Rightarrow\ & r=\frac{5\sqrt{77}}{11}. \end{aligned}$$

Vậy (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \dfrac{5\sqrt{77}}{11}$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $a - b$ bằng

A. -25. **B.** -13. **C.** 0. **D.** 26.

Lời giải.

$$M(a;0;b) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-a-1;2;-b+3) \\ \overrightarrow{MB} = (-a+6;-5;-b+8) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (a-13;12;b-13).$$

$$\Rightarrow P = \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(a-13)^2 + 12^2 + (b-13)^2}.$$

$P_{min} \Leftrightarrow a = b = 13 \Rightarrow a - b = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{2};-1\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\begin{cases} 3(-x) + 2(-1-x) - (1-x) = 0 \\ 3(-y) + 2(1-y) - (-y) = 0 \\ 3(-1-z) + 2(-z) - (1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -1. \end{cases}$

Như vậy $I\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 &= 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 4\overrightarrow{MI}^2 + 3\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 - \overrightarrow{IC}^2 + 3\overrightarrow{MI}\cdot\left(3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}\right) \\ &= 4MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 - IC^2 \\ &\geq 3IA^2 + 2IB^2 - IC^2. \end{aligned}$$

Do đó $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv I\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{2};-1\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$, theo bài ra ta có

$$3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$$

$$\begin{aligned}
&= 3\left[x^2+y^2+(z+1)^2\right]+2\left[(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\right]-\left[(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\right]\\
&= 4x^2+4y^2+4z^2+6x-4y+8z+6\\
&= \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+(2y-1)^2+(2z+2)^2-\frac{9}{4}\\
&\geq -\frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=-\dfrac{3}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=-1 \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Vậy $\max\left(3MA^2+2MB^2-MC^2\right)=-\dfrac{9}{4}$ khi $M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1)$, $B(-3;-2;1)$. Gọi $(\mathscr{S})$ là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính bằng $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình của $(\mathscr{S})$ là

A. $x^2+y^2+z^2+6y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4y-7=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4y+7=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+6y+2=0$.

Lời giải.

Do mặt cầu $(\mathscr{S})$ đi qua A, B nên tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng trung trực của AB.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của AB, ta có (Q) nhận $\overrightarrow{AB}(-4;-2;2)$ là véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $M(-1;-1;0)$ của AB.

Phương trình của (Q) là $-4(x+1)-2(y+1)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+y-z+3=0$.

Theo giả thiết $I\in(Oxy) \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến Δ của (Q) và (Oxy).

Đặt $\vec{n}=(2;1;-1)$, $\vec{k}=(0;0;1)$, ta có Δ nhận $\vec{u}=\left[\vec{n};\vec{k}\right]=(1;-2;0)$ là véc-tơ chỉ phương và đi qua $N(0;-3;0)$.

Phương trình của Δ là

$$\begin{cases} x=t \\ y=-3-2t \\ z=0 \end{cases}, (t\in\mathbb{R}) \Rightarrow I(t;-3-2t;0), (y_I=-3-2t<0).$$

Ta có bán kính

$$\begin{aligned}
R=IA=\sqrt{11} &\Leftrightarrow (t-1)^2+(2t+3)^2+1=11\\
&\Leftrightarrow 5t^2+10t=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=-2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t=0 \Rightarrow I(0;-3;0) \Rightarrow (\mathscr{S}): x^2+y^2+z^2+6y-2=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC=a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi I là trung điểm BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và OI.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta chọn gốc tọa độ tại O. Các điểm A, B, C nằm trên các tia Ox, Oy, Oz.
Khi đó ta có $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$.
I là trung điểm của BC nên $I\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.
Khi đó $\overrightarrow{OI}=\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AB}=(-a;a;0)$.
Do đó $\cos(AB;OI)=\dfrac{\left|\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OI}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow(AB;OI)=60^\circ$.
Chọn đáp án D □

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;0)$, $B(3;2;-1)$, $C(-1;-4;4)$. Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $MA^2+MB^2+MC^2=52$.

A. Mặt cầu tâm $I(-1;0;-1)$, bán kính $r=2$.
B. Mặt cầu tâm $I(-1;0;-1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
C. Mặt cầu tâm $I(1;0;1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
D. Mặt cầu tâm $I(1;0;1)$, bán kính $r=2$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$. Khi đó

$$\begin{aligned}&MA^2+MB^2+MC^2=3x^2+3y^2+3z^2-6x-6z+52=52\\\Leftrightarrow\ &(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2.\end{aligned}$$

Vậy M thuộc mặt cầu tâm $I(1;0;1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 96. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A\,(2;0;0)$, $B\,(0;2;0)$, $C\,(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian không trùng với các điểm A,B,C thỏa mãn $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ$?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Giả sử $M(x;y;z)$. Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=(x-2;y;z)\\\overrightarrow{BM}&=(x;y-2;z)\\\overrightarrow{CM}&=(x;y;z-2)\,.\end{aligned}$$

Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ\ &\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\&\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)\,x+y\,(y-2)+z^2=0\\x^2+(y-2)\,y+z\,(z-2)=0\\(x-2)\,x+y^2+(z-2)\,z=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y=0 &(1)\\x^2+y^2+z^2-2y-2z=0 &(2)\\x^2+y^2+z^2-2x-2z=0. &(3)\end{cases}\end{aligned}$$

Trừ phương trình (1) cho phương trình (2) theo vế, ta được $x = z$.
Trừ phương trình (1) cho phương trình (3) theo vế, ta được $y = z$.
Thay $x = y = z$ vào (1), ta được $3z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$
Khi đó $\left[\begin{array}{l} x = y = z = 0 \\ x = y = z = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$
Vậy có 2 điểm thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 97. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(0;1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính
A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 + MC^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 98. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(3;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oxz) cách đều 3 điểm A, B, C. Giá trị $3(a+b+c)$ bằng
A. 6. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Lời giải.

Do $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oxz) nên $b = 0 \Rightarrow M(a;0;c)$.
Ta có

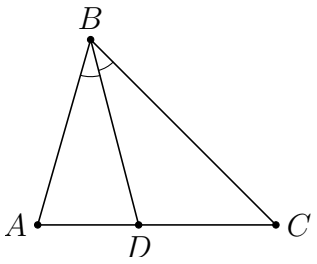
$$\begin{aligned} MA = MB = MC &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + 1 + (c-1)^2 = (a+1)^2 + 1 + c^2 \\ (a-1)^2 + 1 + (c-1)^2 = (a-3)^2 + 1 + (c+1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 4a - 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{6} \\ c = -\dfrac{7}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó $3(a+b+c) = -1$.
Chọn đáp án D □

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng
A. 5. **B.** 4. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.



Theo tính chất phân giác ta có
$\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{1}{2}$, suy ra $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. $(*)$
Ta có $\overrightarrow{DA}=(1-a;2-b;-1-c)$ và $\overrightarrow{DC}=(-4-a;7-b;5-c)$.

$$\text{Do đó } (*)\Rightarrow\begin{cases}1-a=-\dfrac{1}{2}(-4-a)\\2-b=-\dfrac{1}{2}(7-b)\\-1-c=-\dfrac{1}{2}(5-c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3}\\b=\dfrac{11}{3}\\c=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)\Rightarrow a+b+2c=5.$$

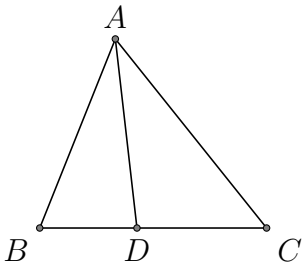
Chọn đáp án (A) □

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;2;2)$, $B\left(\dfrac{9}{4};-1;2\right)$, $C(4;-1;2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác trong vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $D(3;-1;-2)$. **B**. $D(3;-1;2)$. **C**. $D(-3;1;2)$. **D**. $D(-3;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}AB=\sqrt{\dfrac{81}{16}+9+0}=\dfrac{15}{4}\\AC=\sqrt{16+9+0}=5.\end{cases}$



Theo tính chất chân đường phân giác ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.
Vậy nên ta có

$$DB=\frac{3}{4}DC\Rightarrow\overrightarrow{DB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-x_D=-\dfrac{3}{4}(x_C-x_D)\\y_B-y_D=-\dfrac{3}{4}(y_C-y_D)\\z_B-z_D=-\dfrac{3}{4}(z_C-z_D)\end{cases}\Leftrightarrow D(3;-1;2).$$

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. B	5. C	6. A	7. B	8. D	9. B	10. D
11. A	12. A	13. C	14. A	15. D	16. D	17. D	18. C	19. B	20. C
21. C	22. D	23. D	24. D	25. C	26. B	27. B	28. A	29. B	30. B
31. B	32. B	33. C	34. B	35. B	36. C	37. D	38. A	39. C	40. A
41. A	42. A	43. A	44. D	45. B	46. D	47. A	48. B	49. A	50. C
51. D	52. A	53. A	54. C	55. B	56. C	57. A	58. A	59. C	60. B
61. D	62. C	63. D	64. A	65. A	66. A	67. A	68. D	69. C	70. B
71. A	72. A	73. C	74. C	75. B	76. A	77. A	78. A	79. B	80. C
81. C	82. D	83. C	84. A	85. D	86. C	87. B	88. D	89. D	90. C
91. C	92. D	93. A	94. D	95. C	96. C	97. B	98. D	99. A	100. B

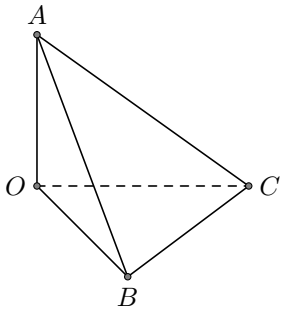
4 Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Cho các tia Ox, Oy, Oz cố định đôi một vuông góc nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A, B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1$ trong đó A, B, C không trùng với O. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{1}{m\left(1+\sqrt{n}\right)^3}$ trong đó $m, n \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $P=m+n$ bằng

A. 192. **B**. 150. **C**. 164. **D**. 111.

Lời giải.

Đặt $OA=a$, $OB=c$, $OC=c$ với $a, b, c>0$.



Khi đó $V_{O.ABC}=\dfrac{abc}{6}$

và $OA+OB+OC+AB+BC+CA=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$1=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq a+b+c+\frac{a+b}{\sqrt{2}}+\frac{b+c}{\sqrt{2}}+\frac{c+a}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow 1\geq(1+\sqrt{2})(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c\leq\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $V_{O.ABC}=\dfrac{abc}{6}\geq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3\leq\dfrac{1}{162\left(1+\sqrt{2}\right)^3}$.

Vậy $\max V_{O.ABC}=\dfrac{1}{162\left(1+\sqrt{2}\right)^3}\Rightarrow m=162, n=2\Rightarrow P=m+n=164$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Gọi M là chân đường phân giác vẽ từ đỉnh O. Ta có $OA=3$, $OB=4$, $AB=5$ nên tam giác OAB vuông tại O.

Do $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{3}{4}$ nên $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{3}{7}$. Từ đó $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}\Rightarrow M\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{12}{7};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{12}{7};0\right)$ nên $\vec{u}_{OM}=(1;1;0)$.

Do đó $OM:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}\Rightarrow I(t;t;0)$. Gọi H là hình chiếu của I lên OA. Khi đó $IH=\dfrac{S}{p}=1$.

Trong tam giác OIH vuông tại H, ta có $OI=\dfrac{IH}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}\Rightarrow 2t^2=2\Leftrightarrow t=\pm 1$.

Do $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng nên $t=1$. Vậy $I(1;1;0)$ và $a-b+c=0$.

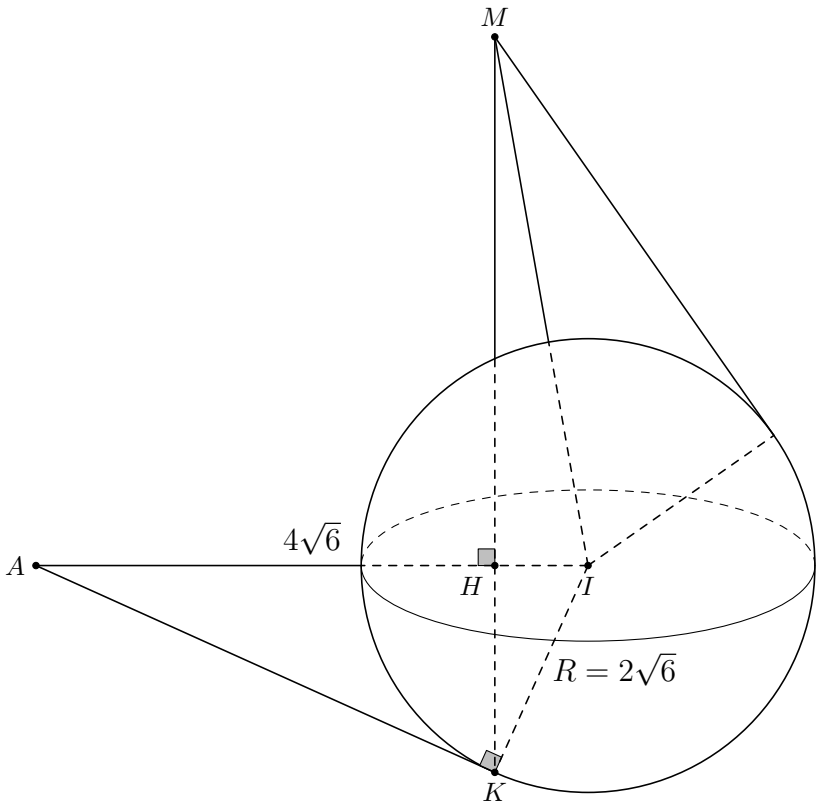
Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm

$A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết rằng khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=6\sqrt{2}$. **B**. $r=3\sqrt{10}$. **C**. $r=3\sqrt{5}$. **D**. $r=3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω).
Mặt cầu (S) có tâm $(2;4;6)$ và bán kính $R=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. Ta có

$$IA=\sqrt{4^2+4^2+8^2}=4\sqrt{6}.$$

Do hai đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính nên $IM=IA=4\sqrt{6}$.
Tam giác IAK vuông tại K nên

$$IK^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IK^2}{IA}=\frac{24}{4\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

Do H là tâm đường tròn (ω) nên điểm H cố định.
Tam giác IHM vuông tại H nên

$$MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^2}=3\sqrt{10}.$$

Do H cố định thuộc mặt phẳng (P), M di động trên mặt phẳng (P) và $MH=3\sqrt{10}$ không đổi. Suy ra điểm M thuộc đường tròn có tâm là H và có bán kính $r=HM=3\sqrt{10}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, tập hợp các điểm thỏa mãn $|z|+|y|+|z| \leq 2$ và $|x-2|+|y|+|z| \leq 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A. 3. **B**. 2. **C**. $\frac{8}{3}$. **D**. $\frac{4}{3}$.

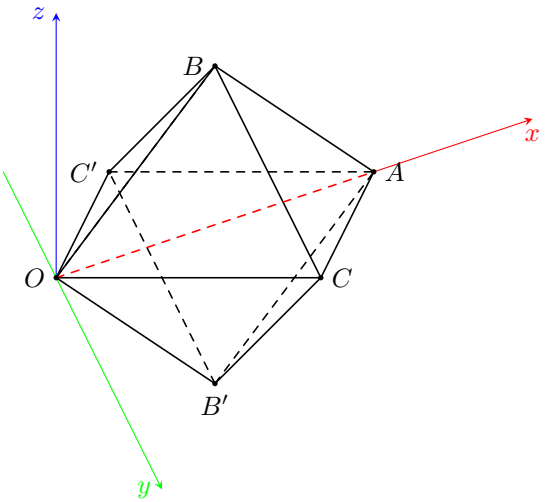
Lời giải.

Có $0 \leq |x|+|y|+|z| \leq 2$ và $0 \leq |x-2|+|y|+|z| \leq 2$ nên tìm các điểm đầu mút.

$|x|+|y|+|z|=0 \Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow O(0;0;0)$.

$|x-2|+|y|+|z|=0 \Rightarrow x=2; y=z=0 \Rightarrow A(2;0;0)$.

Xét hệ phương trình



$$\begin{cases} |x|+|y|+|z|=2 \\ |x-2|+|y|+|z|=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |x|=|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \quad x=2-x$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1$$

$$\Rightarrow \quad |y|+|z|=1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y=0; z=\pm 1 \\ y=\pm 1; z=0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B(1;0;1), B'(1;0;-1), C(1;1;0), C'(1;-1;0)$.

Dựng hình suy ra tập hợp các điểm thỏa mãn là bát diện $B.OCAC'.B'$.

Ta có $OB=\sqrt{1^1+1^1}=\sqrt{2}$, do đó hình bát diện đều $B.OCAC'.B'$ có cạnh bằng $\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của bát diện đều là $V=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3), B(0;-2;3)$ và mặt cầu (S): $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S), giá trị lớn nhất của MA^2+2MB^2 bằng

A. 80. **B**. 50. **C**. 82. **D**. 52.

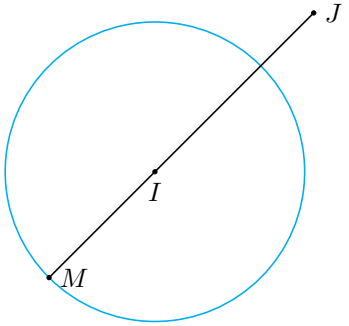
Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;3)$, bán kính $R=1$.

Gọi $J(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn

$\overrightarrow{JA}+2\cdot\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ Ta có: $\overrightarrow{JA}=(3-a,1-b,-3-c); \overrightarrow{JB}=(-a;2-b;3-c)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{JA}+2.\overrightarrow{JB}=(3-3a;-3-3b;3-3c)=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \Rightarrow J(1;-1;1). \\ c=1 \end{cases}$$



Khi đó ta có:

$T = MA^2 + 2MB^2 = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right)^2$

$T = MJ^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JA} + JA^2 + 2MJ^2 + 4\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{JB} + 2JB^2$

$T = 3MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ}\underbrace{(\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB})}_{\vec{0}} + \underbrace{JA^2 + 2JB^2}_{\text{const}}$

Do đó $T_{max} \Leftrightarrow MJ_{max}$

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (2; -1; -2) \Rightarrow IJ = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 > R = 1 \Rightarrow J$ nằm ở phía ngoài mặt cầu (S). Khi đó

$MJ_{max} = IJ + R = 3 + 1 = 4.$

Vậy $T_{max} = 3.4^2 + (2^2 + 2^2 + 4^2) + 2.(1^2 + 1^2 + 2^2) = 3.16 + 24 + 2.6 = 84.$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; -3)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; -1; 1)$, M là điểm di động trên mặt phẳng (Oyz). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 2\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$.

A. $\frac{\sqrt{42}}{6}$. **B.** $\sqrt{42}$. **C.** $3\sqrt{82}$. **D.** $\frac{\sqrt{82}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E lần lượt là trung điểm của BC. Suy ra $E\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

Gọi $F(x; y)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x + 2(2 - x) = 0 \\ 2 - y + 2(0 - y) = 0 \\ -3 - z + 2(1 - z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{5}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{4}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 3\overrightarrow{MF}$.

Suy ra $P = 3|2\overrightarrow{ME}| + 2.|3\overrightarrow{MF}| = 6(ME + MF)$.

Ta có: (Oyz): $x = 0 \Rightarrow E, F$ nằm cùng một phía của (Oyz). Gọi E' đối xứng với E qua mặt phẳng (Oyz). Khi đó $ME = ME'$ và $E'\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \overrightarrow{E'F} = \left(\frac{25}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow E'F = \frac{\sqrt{82}}{2}$.

Suy ra $P = 6(ME + MF) = 6(ME' + MF) \geq 6E'F$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P bằng $6E'F = 3\sqrt{82}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác OAB.

A. $S_{\max} = 4$. **B.** $S_{\max} = 2\sqrt{7}$. **C.** $S_{\max} = \sqrt{7}$. **D.** $S_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

(S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và có bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Gọi t là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d ($t \le OM = 1$). Diện tích tam giác OAB là

$$S = \frac{1}{2}t \cdot AB = t\sqrt{R^2 - t^2} = t\sqrt{8 - t^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{7}t\right) \cdot \sqrt{8 - t^2} \le \frac{7t^2 + 8 - t^2}{2\sqrt{7}} = \frac{6t^2 + 8}{2\sqrt{7}} \le \frac{14}{2\sqrt{7}} = \sqrt{7}.$$

Dấu bằng xảy ra khi d vuông góc với OM.

Chọn đáp án (C) □

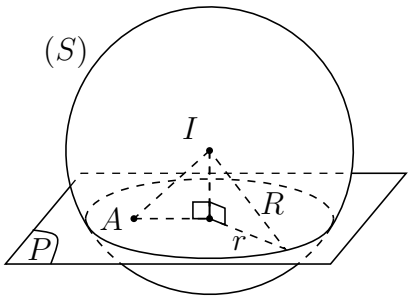
Câu 8. Cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S) : x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Bán kính nhỏ nhất đó là

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $2^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 = 5 < 9$ nên $A(2;1;2)$ nằm trong mặt cầu. Gọi r là bán kính đường tròn thiết diện, ta có $r = \sqrt{R^2 - d^2(I;(P))}$. Do đó r nhỏ nhất khi $d(I,(P))$ lớn nhất.



Ta có $d(I,(P)) \le IA$. Dấu bằng xảy ra khi $IA \perp (P)$. Vậy r nhỏ nhất khi $d(I,(P)) = IA = \sqrt{5}$. Khi đó thiết diện có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{R^2 - IA^2} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian cho tam giác đều ABC cố định, có cạnh bằng 2, M là điểm thoả mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 12$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tập hợp các điểm M là một mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{7}$.

B. Tập hợp các điểm M là một mặt cầu có bán kính $R = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

C. Tập hợp các điểm M là một mặt cầu có bán kính $R = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

D. Tập hợp các điểm M là một mặt cầu có bán kính $R = \frac{2\sqrt{7}}{9}$.

Lời giải.

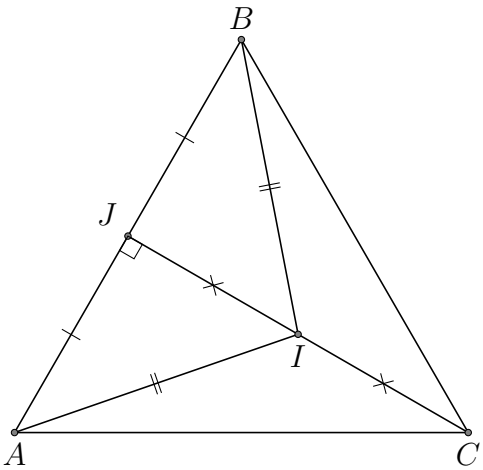
Gọi J là trung điểm của cạnh AB.

Gọi I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta thấy

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ &2 \cdot \overrightarrow{IJ} + 2 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ &I \text{ là trung điểm } CJ \end{aligned}$$

Ta tính được $\begin{cases} IC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ IA = IB = \dfrac{\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$ $(*)$



Ta thấy

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = MI^2 + IA^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} \tag{3.1}$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2 + IB^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \tag{3.2}$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = MI^2 + IC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} \tag{3.3}$$

Từ $(1), (2), (3)$ và $(*)$ ta được

$$MA^2 + MB^2 + 2 \cdot MC^2 = 4 \cdot MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2 \cdot IC^2 \Rightarrow MI = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

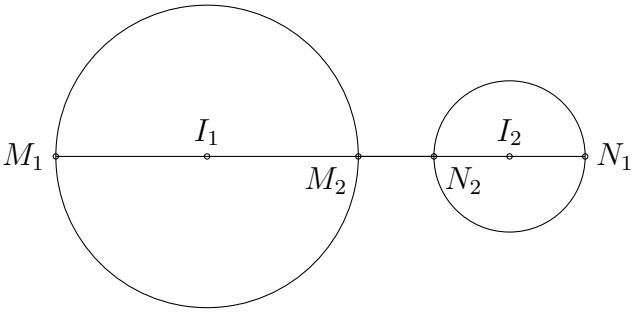
Vậy tập hợp các điểm M là một mặt cầu tâm I và có bán kính $R = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 1 \\ (d+3)^2 + (e-2)^2 + f^2 = 9. \end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m. Khi đó, $M - m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Từ phương trình $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 1$, ta có bộ 3 số (a, b, c) là tọa độ của 1 điểm M bất kì trên mặt cầu tâm $I_1(1; 2; 3)$, bán kính $R_1 = 1$.

Từ phương trình $(d+3)^2 + (e-2)^2 + f^2 = 9$, ta có bộ 3 số $(d; e; f)$ là tọa độ của 1 điểm N bất kì trên mặt cầu có tâm $I_2(-3; 2; 0)$, bán kính $R_2 = 3$.

Vì $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2$ nên hai mặt cầu này rời nhau. Do đó

$$m = \min F = \min MN = M_2N_2 = I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1.$$

$$M = \max F = \max MN = M_1N_1 = R_1 + I_1I_2 + R_2 = 9.$$

Suy ra, $M - m = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; -2; 3)$ và mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Tập hợp các điểm M di động trên mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$ là một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{11}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{62}}{4}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $J(-1;0;2)$ và bán kính $R=2$.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\\ I(0;-1;2)\end{cases}$.

Dễ thấy $IJ=2$ nên I thuộc mặt cầu (S).

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM})=IM^2-IA^2$.

Mặt khác $IA^2=3$ nên $IM^2=5$.

Do vậy ta có điểm M thuộc mặt cầu $(S'):x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S'), suy ra (C) là đường tròn cố định mà M di chuyển trên đó.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa $(C)\Rightarrow(P):2x-2y+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $(P)\Rightarrow H$ là tâm của đường tròn (C).

$IH=d(I,(P))=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\Rightarrow r=HM=\sqrt{IM^2-IH^2}=\dfrac{\sqrt{62}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2)$; $B(-1;0;4)$; $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Khi biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn MA bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải.

Giả sử $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S), khi đó ta có $a^2+b^2+(c-1)^2=1$.

Vì $a^2+b^2\geq 0$ nên $(c-1)^2\leq 1\Leftrightarrow 0\leq c\leq 2$.

Ta có $MA^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2$, $MB^2=(a+1)^2+b^2+(c-4)^2$, $MC^2=a^2+(b+1)^2+(c-3)^2$ nên

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=3a^2+3b^2+3c^2-18c+33\\&=3\left(1-(c-1)^2\right)+3c^2-18c+33\\&=33-12c\geq 33-12\cdot 2=9.\end{aligned}$$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=b=0,c=2$ hay $M(0;0;2)$. Khi đó $MA=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM=\sqrt{26}$. **C.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{DA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{DC}=(0;0;3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D.

Giả sử $M(x+1;y+2;z+3)$.

Ta có $MA=\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}\geq|x-6|\geq 6-x$, $MB=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\geq|y-2|\geq 2-y$,

$MC=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\geq|z-3|\geq 3-z$,

$\sqrt{3}MD=\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq\sqrt{(x+y+z)^2}\geq x+y+z$.

Do đó $P \geq (6-x)+(2-y)+(3-z)+(x+y+z) = 11$.
Các đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=y=z=0 \\ 6-x\geq 0; 2-y\geq 0; 3-z\geq 0; x+y+z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Khi đó $M(1;2;3) \Rightarrow OM = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;1;-1)$ và $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$. Điểm M thuộc (P) thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất có hoành độ bằng

A. 4. **B**. 1. **C**. -1. **D**. -4.

Lời giải.

Tìm điểm $I(x,y,z)$ sao cho $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2-x)-(0-x)=0 \\ 2(1-y)-(3-y)=0 \\ 2(-1-z)-(1-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \\ z=-3. \end{cases}$
Vì $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=0 \Rightarrow 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$, nên ta có $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right|$.
Để $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là chân đường cao hạ từ I xuống mặt phẳng (P).
Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;1;-1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng qua $I(4;-1;-3)$ và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x=4+t \\ y=-1+t \\ z=-3-t. \end{cases}$
Chân đường cao hạ từ I xuống mặt phẳng (P) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x=4+t \\ y=-1+t \\ z=-3-t. \end{cases}$$

Thế ba phương trình sau vào phương trình đầu tiên ta có

$$(4+t)+(-1+t)-(-3-t)+3=0 \Leftrightarrow 3t+9=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

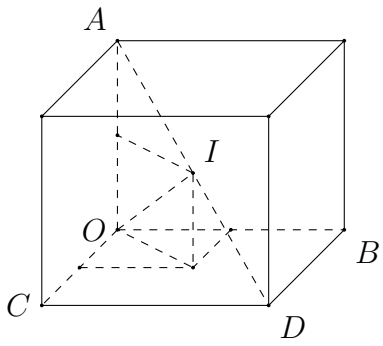
Do đó $x=1, y=-4, z=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;6)$, $B(0;4;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ với O là gốc tọa độ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 8. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Dựng hình hộp chữ nhật có ba chiều là OA, OB, OC như hình vẽ bên. Rõ ràng tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ cũng chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật. Suy ra I là trung điểm của đường chéo AD của hình hộp.



Vì $A(0;0;6)$, $D(-2;4;0)$ nên tọa độ của I là $(-1;2;3)$. Từ đó $a+b+c=4$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là một điểm trên trục Oz, gọi H là trực tâm tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính đó.

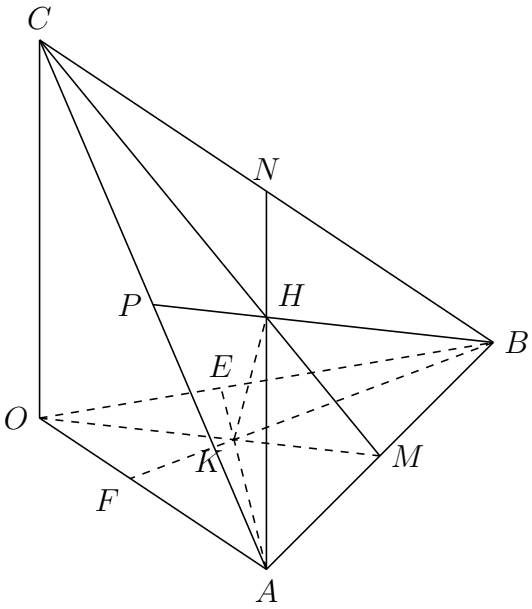
A. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có A, B thuộc mặt phẳng $z=0$, C thuộc Oz do đó $CO \perp (OAB)$.

Hơn nữa, $OA = OB = 5$ nên tam giác OAB cân tại O.

Kẻ các đường cao OM, AN, BP của tam giác ABC; các đường cao AM, BF, AE của tam giác OAB. Gọi K là trực tâm của tam giác OAB.



Ta thấy $AE \perp OB$ và $AE \perp OC$ suy ra $AE \perp CB$.

Kết hợp với $AN \perp CB$ ta có $CB \perp (ANE)$, suy ra $CB \perp KH$.

Chứng minh tương tự, ta có $AC \perp KH$.

Vậy $KH \perp (ABC)$. Nên $\widehat{KHM} = 90^\circ$.

Mà K và M cố định nên H di chuyển trên đường tròn đường kính KM.

Ta đi tính KM.

Ta có $KM = MB \tan \widehat{KBM}$. Chú ý rằng $\widehat{KBM} = \widehat{OAM}$.

Ta có $AB = 2\sqrt{5}$ và $\sin \widehat{OAM} = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ suy ra $\tan \widehat{OAM} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $KM = 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{5}$.

Do đó bán kính của đường tròn là $\dfrac{KM}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 17. Cho hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$ và $(S_2)\colon (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u}=(a;1;b)$ là một véc-tơ chỉ phương của d thì tổng $S=2a+3b$ bằng bao nhiêu?

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3;2;2)$, bán kính $R_1=2$, mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1;0;1)$ và bán kính $R_2=1$.
Do $I_1I_2=3=R_1+R_2$ nên (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm $A\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.
Vì d tiếp xúc với hai mặt cầu, đồng thời cắt đoạn nối tâm I_1I_2 nên d tiếp xúc với hai mặt cầu tại A, khi đó $d\perp I_1I_2$.
Mặt khác $d=d(O,d)\le OA$. Đẳng thức xảy ra khi $d\perp OA$. Khi đó, d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_1}=\left[\overrightarrow{I_1I_2},\overrightarrow{OA}\right]=(6;-3;6)\Rightarrow\vec{u}=(-2;1;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.
Vậy $a=-2,b=2$ và $S=2$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX+BY$ với X,Y là các điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY=1$.

A. 3. **B.** 5. **C.** $2+\sqrt{17}$. **D.** $1+2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đặt $X(a;b;0)$, $Y(c;d;0)$ thì $(a-c)^2+(b-d)^2=1$.
Theo bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2}+\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\ge 5.$$

Suy ra $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2}\ge 4$. Lại áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$AX+BY=\sqrt{a^2+b^2+4}+\sqrt{(3-c)^2+(4-d)^2+1}+\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\ge 5$$

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A\,(1;3;5)$, $B\,(2;4;3)$. Điểm M di động trên đường thẳng AB và N là điểm thuộc tia OM sao cho tích $OM\cdot ON=6$. Biết rằng điểm N thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\frac{\sqrt{29}}{3}$. **B.** $R=\frac{3\sqrt{29}}{29}$. **C.** $R=\frac{6\sqrt{29}}{29}$. **D.** $R=\frac{2\sqrt{29}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;1;-2)\,,\overrightarrow{OB}=(2;4;3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow AB\perp OB$. Vậy B là hình chiếu của O lên AB. Gọi K là điểm thuộc tia OB sao cho $OB\cdot OK=OM\cdot ON=6\Rightarrow K$ cố định và $MNKB$ nội tiếp. Vậy $\widehat{ONK}=\widehat{KBM}=90^\circ$ mà $N\in(O,AB)\Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính OK cố định $R=\frac{OK}{2}=\frac{3}{OB}=\frac{3\sqrt{29}}{29}$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

A. $\frac{31}{3}$. **B.** $\frac{46}{5}$. **C.** 10. **D.** $\frac{63}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;2;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=(2;-5;6)$.
Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x-5y+6z-10=0$.
Do $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} I \in (ABC) \\ IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c - 10 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 + (c-4)^2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c = 10 \\ 4a + 4b + 2c = 27 \\ 2a + 8b + 6c = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{10} \\ b = 4 \\ c = \dfrac{49}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = \dfrac{46}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;1)$, $B(0;1;-2)$ và điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị lớn nhất của $|MA - MB|$.

A. 14. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $z_A \cdot z_B = -2 < 0$ nên A và B nằm về hai phía so với (Oxy). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Oxy) suy ra $A'(1;-1;-1)$.

Mà $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$. Dấu "=" xảy ra khi M, A', B thẳng hàng và M nằm bên ngoài đoạn $A'B$. Vậy giá trị lớn nhất của $|MA - MB|$ bằng $A'B = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;4)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho thể tích V của khối tứ diện $OABC$ là nhỏ nhất. Tính khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $h = \dfrac{12}{7}$. **B.** $h = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **C.** $h = \dfrac{4\sqrt{21}}{7}$. **D.** $h = \dfrac{4}{7}$.

Lời giải.

Gọi tọa độ các điểm $A(a;0;0) \in Ox$, $B(0;b;0) \in Oy$, $C(0;0;c) \in Oz$ với $a, b, c > 0$.

Do đó $(P)\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Vì $M(1;2;4) \in (P)$ nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{4}{c} = 1$

và $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc$.

Ta có $1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{2}{b}\cdot\dfrac{4}{c}}=\dfrac{6}{\sqrt[3]{abc}}$. Suy ra $abc\geqslant 216$ hay $V\geqslant 36$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{4}{c}=\dfrac{1}{3}$ hay $a=3$, $b=6$, $c=12$.

Khi đó $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{48}\Rightarrow h=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A. $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4}{3+2\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{3}{6+2\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{5}{6+2\sqrt{3}}$.

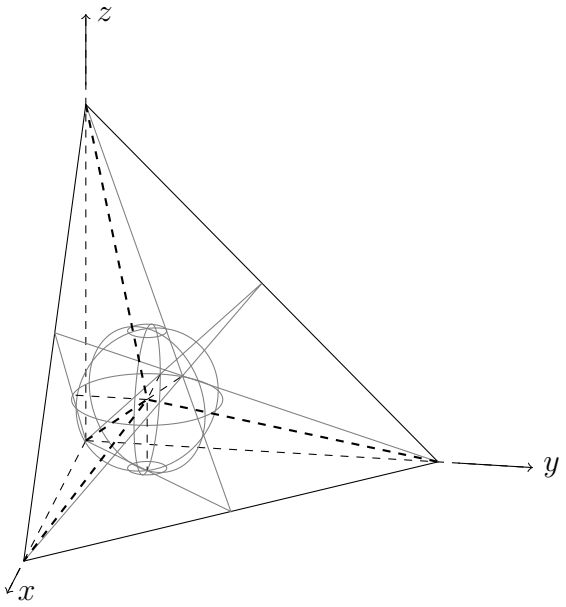
Lời giải.

Áp dụng công thức

$$V=\frac{1}{3}\left(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}\right)r,$$

ta suy ra

$$r=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}}=\frac{2}{3+\sqrt{3}}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

A. $6\sqrt{3}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (Oxy).

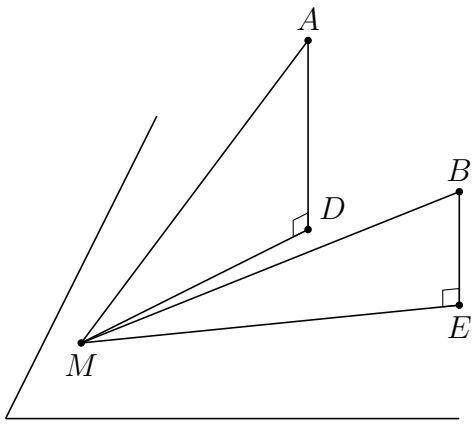
Khi đó $(MA,(Oxy))=\widehat{AMD}$ và $(MB,(Oxy))=\widehat{BME}$.

Do đó MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau khi và chỉ khi $\triangle AMD\backsim\triangle BME$.

Khi đó $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AD}{BE}$.

Ta có $AD=\mathrm{d}(A,(Oxy))=10$ và $BE=\mathrm{d}(B,(Oxy))=5$.

Do đó $\dfrac{AM}{BM}=2$. (1)



Gọi tọa độ của M là $(x, y, 0)$. Ta có

$$AM^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 100 \text{ và } MB^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + 25.$$

Từ (1) suy ra

$$AM^2 = 4BM^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4(x-4)^2 + 4(y-6)^2.$$

Đặt $x-1=a$ và $y-3=b$. Ta có

$$a^2 + b^2 = 4(a-3)^2 + 4(b-3)^2 \Leftrightarrow 3(a^2+b^2) - 24(a+b) + 72 = 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ ta có

$$\frac{3}{2}(a+b)^2 - 24(a+b) + 72 \le 0 \Leftrightarrow 4 \le a+b \le 12.$$

Do đó $a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2} \ge \dfrac{4^2}{2} = 8$. Vậy $AM^2 = a^2+b^2+100 \ge 108 \Leftrightarrow AM \ge 6\sqrt{3}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=2 \Leftrightarrow x=3; y=5$. Khi đó điểm M có tọa độ $(3;5;0)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$. Một đường thẳng đi qua điểm M và cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.
Ta có: $\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow OM = 1 < R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu (S).
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH \leqslant OM$.
Đặt $OH = x \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.
Đặt $\widehat{AOH} = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{AH}{OA} = \dfrac{\sqrt{OA^2 - OH^2}}{OA} = \dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{x}{2\sqrt{2}}$.
Suy ra $\sin\widehat{AOB} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{x\sqrt{8-x^2}}{4}$.
Ta có: $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} = x\sqrt{8-x^2}$ với $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ trên đoạn $[0;1]$.
$f'(x) = \sqrt{8-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \dfrac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}$.
Vậy diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0)$, $B(0;m-1;0)$, $C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC=AD$, $CA=BD$ và $AB=CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{14}$.

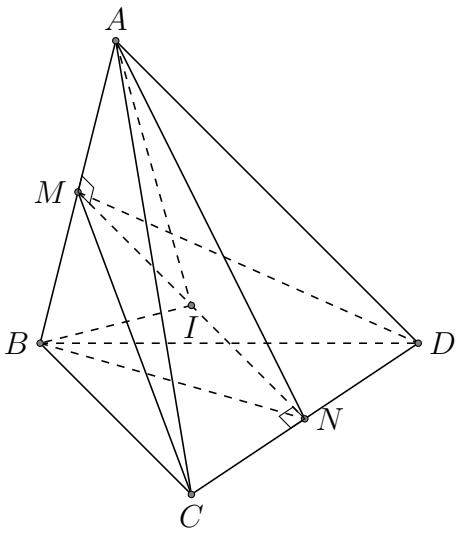
Lời giải.

Đặt $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Theo giả thiết ta có tam giác $\triangle ABC=\triangle CDA$ theo trường hợp (c-c-c), suy ra $CM=DM$ hay tam giác CMD cân tại M, dẫn đến $MN\perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MN\perp AB$. Gọi I là trung điểm của MN thì $IA=IB$ và $IC=ID$.

Mặt khác ta lại có $AB=CD$ nên $\triangle BMI=\triangle CNI\Rightarrow IB=IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



Ta có $IA^2=IM^2+AM^2=\dfrac{MN^2}{4}+\dfrac{AB^2}{4}=\dfrac{MN^2+c^2}{4}$.

Mặt khác CM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên $CM^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$.

$\Rightarrow MN^2=CM^2-CN^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}-\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

Vậy $IA^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}$.

Với $a^2+b^2+c^2=2m^2+2(m-1)^2+2(m+4)^2=6(m+1)^2+28$.

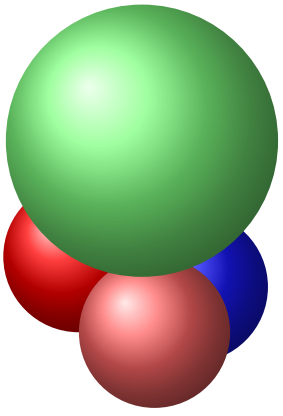
Vậy $IA^2=\dfrac{6(m+1)^2+28}{8}\geqslant\dfrac{7}{2}$. Suy ra $\min IA=\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28.

Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu $(\mathcal{S})$ bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên $(\mathcal{S})$, MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Giá trị lớn nhất của MH là

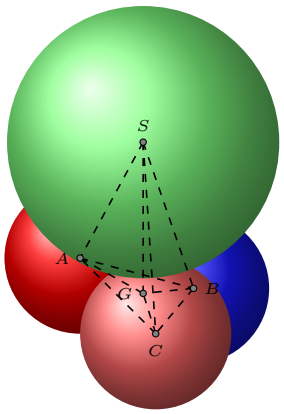
A. $3+\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. **B.** $3+\dfrac{\sqrt{123}}{4}$. **C.** $3+\dfrac{\sqrt{69}}{3}$. **D.** $\dfrac{52}{9}$.



Lời giải.

Gọi A, B, C là tâm của các mặt cầu bán kính bằng 1 và S là tâm của mặt cầu bán kính bằng 2. Ta có

$$AB = BC = CA = 2, \quad SA = SB = SC = 1 + 2 = 3.$$



Do đó, hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, thì $SG \perp (ABC)$. Ta có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}.$$

Khoảng cách lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{69}}{3} + 2 + 1 = \dfrac{\sqrt{69}}{3} + 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Do giả thiết phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và $N(x_1;y_1;z_1)$ thỏa mãn bài toán.

Mà $OM \cdot ON = 12 \Leftrightarrow OM = \dfrac{12}{ON} \Leftrightarrow OM = \dfrac{12}{ON^2} \cdot ON$.

Vì N thuộc tia OM nên hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ cùng chiều suy ra $\overrightarrow{OM} = \dfrac{12}{ON^2}\overrightarrow{ON}$ $(*)$.

Mà $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0;z_0)$; $\overrightarrow{ON}(x_1;y_1;z_1)$ và $ON^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$.

Từ $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_0 = \dfrac{12x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ y_0 = \dfrac{12y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ z_0 = \dfrac{12z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \end{cases}$. Vì M thuộc phương trình mặt phẳng (ABC) nên

$$\begin{aligned} 6x_0 + 3y_0 + 2z_0 - 12 = 0 &\Leftrightarrow 6\frac{12x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + 3\frac{12y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + 2\frac{12z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x_1 + 3y_1 + 2z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - 3)^2 + \left(y_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (z_1 - 1)^2 = \frac{49}{4} \end{aligned}$$

Do đó tập hợp điểm N thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{49}{4}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ta có $R = \dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$ và điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Gọi S là mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng d. Diện

tích của mặt cầu (S) bằng

A. 20π. **B.** 25π. **C.** $\dfrac{20\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{25\pi}{3}$.

Lời giải.

Giả sử I là tâm mặt cầu (S) ta có $I \in (d)$ nên $I(1+2t;t;-2t)$ và $IA=IB$ nên ta có

$$\sqrt{(1-2t)^2+(1-t)^2+(2t)^2}=\sqrt{(-3-2t)^2+(3-t)^2+(2+2t)^2} \Leftrightarrow t=-1.$$

Suy ra $I(3;1;-2)$, bán kính mặt cầu (S) là $R=IA=\sqrt{5}$ nên diện tích mặt cầu bằng 20π.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\sqrt{26}$. **B.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$. **C.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{DA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{DC}=(0;0;3)$ nên tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau. Giả sử $M\,(x+1;y+2;z+3)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
MA&=\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}\geq |x-6|\geq 6-x;\\
MB&=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\geq |y-2|\geq 2-y;\\
MC&=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\geq |z-3|\geq 3-z;\\
\sqrt{3}MD&=\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq \sqrt{(x+y+z)^2}\geq x+y+z.
\end{aligned}$$

Do đó $P\geq (6-x)+(2-y)+(3-z)+(x+y+z)=11$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11 khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=z=0\\ 6-x\geq 0\\ 2-y\geq 0\\ 3-z\geq 0\\ x+y+z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$

Khi đó $M(1;2;3)$, nên $OM=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(\sin\alpha\sin\beta;0;0)$, $B(0;\sin\alpha\cos\beta;0)$, $C(0;0;\cos\alpha)$, trong đó α, β là hai số thực thay đổi. Biết rằng tập hợp tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $O.ABC$ là một mặt cầu (S) có bán kính R không đổi. Tìm R.

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

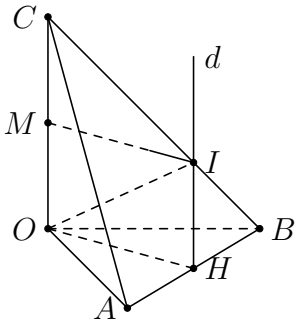
Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, OC.

Suy ra $H\left(\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2};\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{2};0\right)$ và $M\left(0;0;\dfrac{\cos\alpha}{2}\right)$.

Vì $\triangle OAB$ vuông tại O nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$.

Trong (OCH), qua H dựng đường thẳng d song song với OC, dựng đường thẳng trung trực của OC cắt d tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $O.ABC$



Vì $OMHI$ là hình chữ nhật nên

$$OI = \sqrt{OM^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

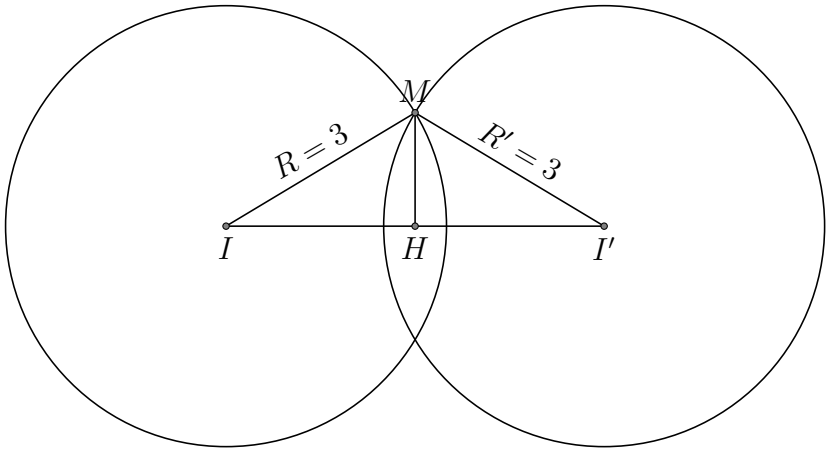
Suy ra I thuộc mặt cầu tâm O cố định, bán kính $R = \dfrac{1}{2}$ không đổi.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r = \sqrt{3}$. **B.** $r = 6$. **C.** $r = 3$. **D.** $r = \sqrt{6}$.

Lời giải.



Mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ có tâm $I(3;3;2)$ và bán kính $R = 3$.
Gọi $M(x;y;z)$ ta được $MA^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1$; $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 7$.
Ta có $MA^2 + 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = 8 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.
Suy ra M thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'(1;1;0)$, bán kính $R' = 3$ nên $M \in (S) \cap (S')$ là một đường tròn (C) có tâm H là trung điểm của đoạn II' (vì $R = R' = 3$).
Vậy bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{6}$.

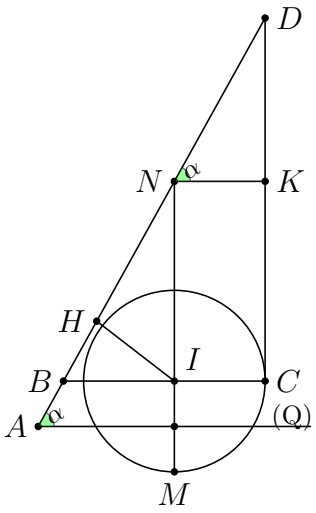
Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x - y + 3 = 0$, $(Q)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. 14. **B.** $3 + 3\sqrt{5}$. **C.** 28. **D.** $9 + 5\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi các điểm A, B, C, D, H, K như hình vẽ bên.
Mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=5$,
$\mathrm{d}(I;(P))=3\sqrt{3}$, $\mathrm{d}(I;(Q))=\dfrac{14}{3}$.
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng, suy ra $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{2}$.
Do đó $DK>NK=MI\Rightarrow CD\geq MN$.
Ta có $\sin\alpha=\dfrac{IH}{IB}\Rightarrow IB=\dfrac{9}{\sqrt{2}}\Rightarrow BC=\dfrac{9+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
$\tan\alpha=\dfrac{CD}{BC}\Rightarrow CD=BC\cdot\tan\alpha=9+5\sqrt{2}$.
Vậy $MN_{\max}=9+5\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2)$, $B(0;-1;-3)$. Xét các điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta tìm điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. (1)
Ta có $\overrightarrow{OI}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{IA}=(1-x;1-y;2-z)$, $\overrightarrow{IB}=(-x;-1-y;-3-z)$.

$$\text{Ta có (1)}\Leftrightarrow\begin{cases}2-4x=0\\-4y-1=0\\-5-4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{1}{4}\\z=-\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}&=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\&=4\overrightarrow{MI}.\\\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|&=4MI.\end{aligned}$$

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (Oxz).
Theo đó $M\left(\dfrac{1}{2};0;-\dfrac{5}{4}\right)$.
Khi đó $\min P=4\cdot\mathrm{d}\left(I;(Oxz)\right)=4IM=4\cdot\left|-\dfrac{1}{4}\right|=1$.

Chọn đáp án (A) □

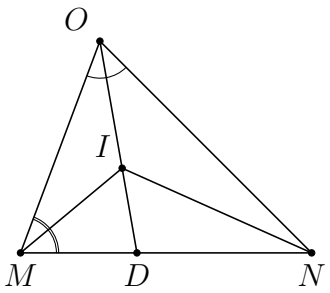
Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M\left(2;2;1\right)$, $N\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle OMN$.

A. $I\left(1;1;1\right)$. **B.** $I\left(0;1;1\right)$. **C.** $I\left(0;-1;-1\right)$. **D.** $I\left(1;0;1\right)$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{OM}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{ON}=\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.



Gọi OD là phân giác trong góc O có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{OM}\cdot\overrightarrow{OM}+\frac{1}{ON}\cdot\overrightarrow{ON}=(0;1;1)$.

Suy ra OD có phương trình tham số: $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t.\end{cases}$

Đặt $\vec{v}=\frac{1}{MO}\cdot\overrightarrow{MO}+\frac{1}{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(-2;-2;-1)+\frac{1}{5}\left(-\frac{14}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{8}{5};-\frac{4}{5};0\right)$.

Gọi MI là phân giác trong góc M có vectơ chỉ phương là $-\frac{5}{2}\vec{v}=(2;1;0)$.

Suy ra MI có phương trình tham số: $\begin{cases}x=2+2t'\\y=2+t'\\z=1.\end{cases}$

Gọi I là giao điểm của OD và MI ta suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x_I=2+2t'=0\\y_I=2+t'=t\\z_I=1=t\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}t=1\\t'=-1.\end{cases}$

Vậy $I(0;1;1)$.

Cách 2: Khi làm bài trắc nghiệm, học sinh có thể sử dụng luôn tính chất.

Với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle OMN$ ta chứng minh:

$$MN\cdot\overrightarrow{IO}+OM\cdot\overrightarrow{IN}+ON\cdot\overrightarrow{IM}=\vec{0}.$$

Thật vậy, theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{OM}{ON}=\frac{DM}{DN}\Rightarrow\frac{OM}{OM+ON}=\frac{DM}{DM+DN}\Rightarrow\frac{OM}{OM+ON}=\frac{DM}{MN}\Rightarrow\frac{MO}{MD}=\frac{OM+ON}{MN}\quad(1).$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned}\frac{OM}{ON}=\frac{DM}{DN}&\Rightarrow\overrightarrow{DM}=-\frac{OM}{ON}\overrightarrow{DN}\\&\Rightarrow\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{ID}=-\frac{OM}{ON}\left(\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{ID}\right)\\&\Rightarrow\left(1+\frac{OM}{ON}\right)\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IM}+\frac{OM}{ON}\overrightarrow{IN}\\&\Rightarrow\overrightarrow{ID}=\frac{ON}{OM+ON}\overrightarrow{IM}+\frac{OM}{OM+ON}\overrightarrow{IN}\quad(2).\end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{IO}{ID}=\frac{MO}{MD}\Rightarrow\overrightarrow{IO}=-\frac{MO}{MD}\overrightarrow{ID}\quad(3).$

Thay (1), (2) vàp (3) ta được

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{IO} = -\frac{MO}{MD}\overrightarrow{ID} \\
\Rightarrow\ & \overrightarrow{IO} = -\frac{OM+ON}{MN}\left(\frac{ON}{OM+ON}\overrightarrow{IM} + \frac{OM}{OM+ON}\overrightarrow{IN}\right) \\
\Rightarrow\ & \overrightarrow{IO} = -\frac{ON}{MN}\overrightarrow{IM} - \frac{OM}{MN}\overrightarrow{IN} \\
\Rightarrow\ & MN\cdot\overrightarrow{IO} + OM\cdot\overrightarrow{IN} + ON\cdot\overrightarrow{IM} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất cho tam giác $\triangle OMN$ với I là tâm đường tròn nội tiếp có $MN = 5$, $OM = 3$, $ON = 4$ ta được:

$$\begin{aligned}
& MN\cdot\overrightarrow{IO} + OM\cdot\overrightarrow{IN} + ON\cdot\overrightarrow{IM} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 5\overrightarrow{IO} + 3\overrightarrow{IN} + 4\overrightarrow{IM} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_I = \dfrac{1}{12}(5x_O + 3x_N + 4x_M) \\ y_I = \dfrac{1}{12}(5y_O + 3y_N + 4y_M) \\ z_I = \dfrac{1}{12}(5z_O + 3z_N + 4z_M) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_I = \dfrac{1}{12}(-8+8) \\ y_I = \dfrac{1}{12}(4+8) \\ z_I = \dfrac{1}{12}(8+4) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & I(0;1;1).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2)$, $B(0,1,0)$, $C(3,1,1)$ và mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ bằng

A. 0. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.

Đặt $T = MA^2+MB^2+MC^2$. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G(1,1,1)$.
Khi đó $\overrightarrow{GA}=(-1;0;1) \Rightarrow GA^2=2$; $\overrightarrow{GB}=(-1;0;-1) \Rightarrow GB^2=2$; $\overrightarrow{GC}=(2;0;0) \Rightarrow GC^2=4$. Ta có

$$\begin{aligned}
T &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2 \\
&= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2 = 3MG^2+8
\end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG = \mathrm{d}(G,(Q)) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Khi đó $T = 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(2;-1;-3)$ và $C(-6;-1;3)$. Trong các tam giác ABC thỏa mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, điểm $A(a;b;0),(b>0)$ sao cho góc A lớn nhất, giá trị của $\dfrac{a+b}{\cos A}$ bằng

A. 10. **B**. -20. **C**. 15. **D**. -5.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

$GB \perp GC \Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{4BC^2}{2AB \cdot AC} \geq \dfrac{4BC^2}{AB^2 + AC^2} = \dfrac{4BC^2}{5BC^2} = \dfrac{4}{5}$.

Do đó góc A lớn nhất khi $\cos A = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow AB = AC = 5\sqrt{10}$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} (a-2)^2 + (b+1)^2 + 9 = (a+6)^2 + (b+1)^2 + 9 \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 + 9 = 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 14 \end{cases}$ (vì $b > 0$).

Vậy $\dfrac{a+b}{\cos A} = 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong không gian với toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ và $(S_2)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$. **B**. 5. **C**. $\sqrt{34}$. **D**. 3.

Lời giải.

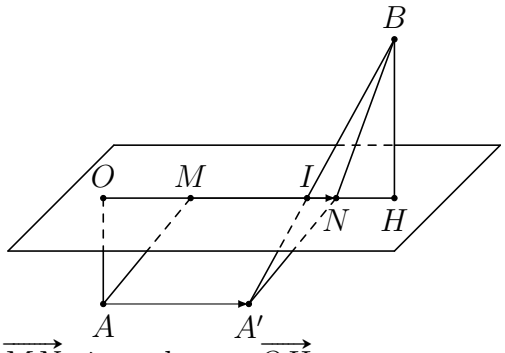
Từ $\begin{cases} (S_1)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25 & (1) \\ (S_2)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) (vế theo vế), ta được $6z = 0$ hay

$$(P)\colon z = 0 \text{ tức là } (P) \equiv (Oxy).$$

Dễ thấy A, B nằm khác phía đối với (P), hình chiếu của A trên (P) là O, hình chiếu của B trên (P) là $H(3;4;0)$.

Lấy A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$.



Khi đó $AM + BN = A'N + BN \geqslant A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{OH}$.

Lấy $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\left|\overrightarrow{OH}\right|} = \left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}; 0\right)$.

Khi đó vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ nên $A'\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}; -2\right)$. Do đó $AM + BN = A'N + BN \geqslant A'B = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$ và $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

A. $T = 3$. **B**. $T = -3$. **C**. $T = 1$. **D**. $T = -1$.

Lời giải.

Với I là điểm bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MA} \\ = \ & \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right) + 2\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}\right) + 3\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right) \\ = \ & \overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\left(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}\right) + 6IM^2. \end{aligned}$$

Chọn $I(x;y;z)$ sao cho $4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(1-x)+3(-2-x)+5(0-x)=0 \\ 4(-1-y)+3(0-y)+5(1-y)=0 \\ 4(2-z)+3(3-z)+5(-2-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x=2 \\ -12y=-1 \\ -12z=-7. \end{cases}$$

Suy ra $I\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{12};\dfrac{7}{12}\right)$.

Khi đó, $\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}$ là hằng số và $\overrightarrow{IM}\left(4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right)=0$ nên $S_{\min} \Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(Oxy) \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{12};0\right)$.

Vậy $T=12\cdot\dfrac{(-1)}{6}+12\cdot\dfrac{1}{12}+0=-1$.

Chọn đáp án (D) □

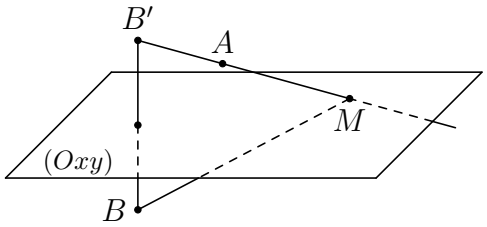
Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-1;4;-3)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

A. $M(-5;1;0)$. **B.** $M(5;1;0)$. **C.** $M(5;-1;0)$. **D.** $M(-5;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $z_A=1$, $z_B=-3$ do đó A và B nằm ở hai phía đối với mặt phẳng (Oxy).

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy), ta có $|MA-MB|=|MA-MB'|$.



Mà ta có

$$\begin{aligned} & MA\le MB'+AB' \Rightarrow MA-MB'\le AB' \\ & MB'\le MA+AB' \Rightarrow MB'-MA\le AB' \\ \Rightarrow\ & |MA-MB'|\le AB'. \end{aligned}$$

Do đó $|MA-MB|$ lớn nhất là AB' khi B', A, M thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB' và mặt phẳng (Oxy).

Ta có $B(-1;4;-3) \Rightarrow B'(-1;4;3)$. Suy ra $\overrightarrow{AM}=(x_M-3;y_M-2;-1)$, $\overrightarrow{AB'}=(-4;2;2)$.

Ta có B', A, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB'}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x_M-3}{-4}=\frac{y_M-2}{2}=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=5 \\ y_M=1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ $M(5;1;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM=\sqrt{26}$. **C.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{DA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{DC}=(0;0;3)$.
Gọi $M(x+1;y+2;z+3)$, ta có

$$\begin{aligned}
MA&=\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}\geq|x-6|\geq 6-x\\
MB&=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\geq|y-2|\geq 2-y\\
MC&=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\geq|z-3|\geq 3-z\\
\sqrt{3}MD&=\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq\sqrt{(x+y+z)^2}\geq x+y+z.
\end{aligned}$$

Do đó $P\geq(6-x)+(2-y)+(3-z)+(x+y+z)=11$.
Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là 11 khi vài chỉ khi $x=y=z=0$.
Khi đó $M(1;2;3)$, suy ra $OM=\sqrt{14}$.
Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(2;5;0)$. Gọi $K(a;b;c)$ là điểm thuộc (S) sao cho $KA+2KB$ nhỏ nhất. Giá trị $a-b+c$ bằng

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Do $K\in(S)\Rightarrow(a-3)^2+(b-2)^2+c^2=4$.
Ta có

$$\begin{aligned}
KA&=\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2+c^2}\\
&=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2a-4b+12-7}\\
&=\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2+c^2+3\left[(a-3)^2+(b-2)^2+z^2\right]-7}\\
&=2\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2+z^2}\\
&=2KM,\text{ với }M(2;2;0).
\end{aligned}$$

Dễ thấy B nằm ngoài mặt cầu (S) và M nằm trong mặt cầu (S).
$\Rightarrow KA+2KB=2(KM+KB)\geq 2MB$.
Dấu "= " xảy ra khi K là giao điểm của đoạn thẳng MB với mặt cầu (S).
Phương trình của $MB:\begin{cases}x=2\\y=5+3t\\z=0\end{cases}\Rightarrow K(2;5+3t;0)$.
$K\in(S)\Rightarrow 1+(9(1+t)^2=4\Leftrightarrow t=-1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow K(2;2-\sqrt{3};0)$ và $K(2;2+\sqrt{3};0)$.
Do K nằm giữa B,M nên $K(2;2+\sqrt{3};0)\Rightarrow a-b+c=-\sqrt{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;0;4)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-2;0)$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}=8\neq 0$ nên bốn điểm A ,B, C, D lập thành tứ diện.
Gọi I là trọng trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ và $I\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{7}{2};0\right)$.
Ta có

$$\begin{aligned}T &= MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2\\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2\\ &= 4\cdot\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IBD}\right)\\ &= 4\cdot\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2\\ &= 4.\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2\\ &\geq \overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2.\end{aligned}$$

Suy ra $T_{\min}=\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2$ khi $M\equiv I$ tức là $M\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{7}{2};0\right)$.
Khi đó $x+y+z=\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{2}+0=\dfrac{21}{4}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, $c>0$ sao cho $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$ bằng

A. $\dfrac{1}{108}$. **B.** $\dfrac{1}{486}$. **C.** $\dfrac{1}{54}$. **D.** $\dfrac{1}{162}$.

Lời giải.

Ta có $OA=a$; $OB=b$; $OC=c$; $AB=\sqrt{a^2+b^2}$; $BC=\sqrt{b^2+c^2}$; $CA=\sqrt{c^2+a^2}$.
$V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{6}a\cdot b\cdot c$.
Ta có

$$\begin{aligned}&OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}\\ \Leftrightarrow\ &a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} &\geq 3\sqrt[6]{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\\ &\geq 3\sqrt[6]{2ab\cdot 2bc\cdot 2ac}\\ &= 3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{abc}\\ \Leftrightarrow\ &1+\sqrt{2}\geq 3\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow\sqrt[3]{abc}\leq\frac{1}{3}\\ \Leftrightarrow\ &abc\leq\frac{1}{27}\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\leq\frac{1}{162}\Leftrightarrow V_{OABC}\leq\frac{1}{162}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0;b>0;c>0\\ a=b=c\\ a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của V_{OABC} bằng $\dfrac{1}{162}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** 29. **C.** 24. **D.** 26.

Lời giải.

Vì $M(a;b;c)\in(S)\colon (x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$ nên $(a-4)^2+(b-2)^2+(c-4)^2=1$. Suy ra

$$a^2+b^2+c^2+35=8a+4b+8c\le\sqrt{8^2+4^2+8^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow 5\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\le 7.$$

Vậy $a^2+b^2+c^2\ge 25$, dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{a}{8}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{8}\\ a^2+b^2+c^2=25\\ (a-4)^2+(b-2)^2+(c-4)^2=1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{10}{3}\\ b=\dfrac{5}{3}\\ c=\dfrac{10}{3}.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Giả sử điểm $N(x;y;z)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2(2-x)+3(-3-x)=0\\ 2(-2-y)+3(3-y)=0\\ 2(4-z)+3(-1-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\\ z=1.\end{cases}$

Suy ra $N(-1;1;1)$, $IN=2\sqrt{3}$, $NA=3\sqrt{3}$, $NB=2\sqrt{3}$.

Ta lại có

$$\begin{aligned}2MA^2+3MB^2&=2\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)^2\\ &=5MN^2+2\overrightarrow{MN}\cdot\left(2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}\right)+2NA^2+3NB^2\\ &=5MN^2+2NA^2+3NB^2.\end{aligned}$$

Do vậy $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất.

Ta lại có $IN=2\sqrt{3}>R$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $MN=IN-R=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2=5\cdot 3+2\cdot 27+3\cdot 12=105$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với $a;b;c$ tối giản) thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $P=2a-b+c$.

A. $\dfrac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\dfrac{51}{7}$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

Gọi $M(a;b;c) \in (S) \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16$.

Ta có

$$\begin{aligned} |2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)| &\leq \sqrt{(2^2+3^2+6^2)\left[(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right]} \\ &\Leftrightarrow |2a+3b+6c-20| \leq 28 \\ &\Rightarrow 2a+3b+6c-20 \leq 28 \\ &\Rightarrow 2a+3b+6c \leq 48. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{3} \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ 3a-2b=-1 \\ 3a-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{15}{7} \\ b=\dfrac{26}{7} \\ c=\dfrac{38}{7}. \end{cases}$

Vậy $T=2a-b+c=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ với $(t>0)$. Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

A. 5. **B**. 13. **C**. 11. **D**. 9.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA}=(2t;2t;0) \\ \overrightarrow{OB}=(0;0;t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2t;2t;t). \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3 \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OP}\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OP}\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)=3 \\ \Leftrightarrow\ &3OP^2-2\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3 \\ \Leftrightarrow\ &3OP^2=2\overrightarrow{OP}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+3, \qquad (*). \end{aligned}$$

Giả sử điểm $P=(x_0;y_0;z_0)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 3\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)=4x_0t+4y_0t+2z_0t+3 \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-\dfrac{4t}{3}x_0-\dfrac{4t}{3}y_0-\dfrac{2t}{3}z_0-1=0$.

Vậy P thuộc mặt cầu có tâm $I\left(\dfrac{2t}{3};\dfrac{2t}{3};\dfrac{t}{3}\right)$, bán kính $R=\sqrt{t^2+1}$.

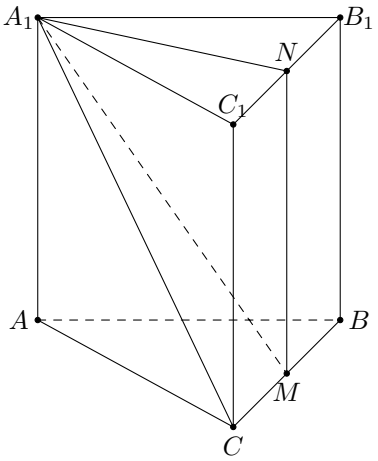
Suy ra OP lớn nhất bằng $OI+R=t+\sqrt{t^2+1}=3 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3} \Rightarrow Q=2\cdot 4+3=11$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1\left(\sqrt{3};-1;1\right)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1=1$ (C không trùng với O). Biết $\vec{u}(a;b;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=4$. **B**. $T=5$. **C**. $T=16$. **D**. $T=9$.

Lời giải.



Mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ qua $A_1\left(\sqrt{3};-1;1\right)$ và song song với Oz.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $BC, B_1C_1 \Rightarrow A_1M \perp BC \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A_1 lên $Oz \Rightarrow M(0;0;1)$ và $MN = 1$.
Ta có $A_1N = \sqrt{A_1M^2 - MN^2} = \sqrt{3}$, do tam giác $A_1B_1C_1$ đều $\Rightarrow$ ta có

$$A_1N = \frac{\sqrt{3}}{2}B_1C_1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow B_1C_1 = 2.$$

Suy ra $MC = 1 \Leftrightarrow |n-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 0. \end{array}\right.$

- ☑ Với $n = 0 \Rightarrow C(0;0;0) \equiv O$ không thỏa mãn.
- ☑ Với $n = 2 \Rightarrow C(0;0;2)$ thỏa mãn.

Do đó $\overrightarrow{A_1C} = \left(-\sqrt{3};1;1\right) \Rightarrow \vec{u}_{A_1C} = \left(-\sqrt{3}t;t;t\right)$, với $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3} \\ b = 2. \end{cases}$
Vậy ta có $T = a^2 + b^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho các tia Ox, Oy, Oz cố định đôi một vuông góc với nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A, B, C thay đổi thỏa mãn $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1$ trong đó A, B, C không trùng với O. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{1}{m\left(1+\sqrt{n}\right)^3}, (m, n \in \mathbb{Z})$. Giá trị của biểu thức $P = m + n$ bằng

A. 164. **B**. 111. **C**. 192. **D**. 150.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho các tia Ox, Oy, Oz là chiều dương các trục tọa độ, gọi $A(x;0;0)$, $B(0;y;0)$, $C(0;0;z)$, $(x, y, z > 0)$.
Ta có $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}xyz$. Theo giả thiết

$$\begin{aligned} & OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x + y + z + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 1 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\begin{aligned} x + y + z + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} &\geq 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{2\sqrt{2}xyz} \\ \Leftrightarrow 1 &\geq 3\sqrt[3]{xyz}\left(1+\sqrt{2}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{6}xyz &\leq \frac{1}{162\left(1+\sqrt{2}\right)^3} \\ \Leftrightarrow V_{OABC} &\leq \frac{1}{162\left(1+\sqrt{2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3+3\sqrt{2}}$.
Vậy $\begin{cases} m = 162 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow P = m + n = 164.$

Chọn đáp án (A) □

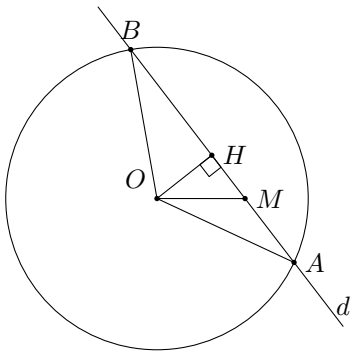
Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=4$. **B.** $S=\sqrt{7}$. **C.** $S=2\sqrt{2}$. **D.** $S=2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Vì $OM=1<R$ nên M nằm bên trong mặt cầu (S). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d.



Ta dùng mô hình như hình bên để giải bài toán.

Đặt $x=OH$, ta có $0<x\le OM$, đồng thời

$$HA=\sqrt{R^2-OH^2}=\sqrt{8-x^2}.$$

Vậy diện tích tam giác OAB là $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OH\cdot AB=OH\cdot HA=x\sqrt{8-x^2}$.

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $(0;1]$. Ta có $f'(x)=-\dfrac{2(x^2-4)}{\sqrt{8-x^2}}>0\ \forall x\in(0;1]$.

Suy ra $\max\limits_{(0;1]}f(x)=f(1)=\sqrt{7}$.

Vậy diện tích lớn nhất S của tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$ khi H trùng với điểm M, hay M là hình chiếu vuông góc của O lên d.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-8y+9=0$ và hai điểm $A(5;10;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA+3MB$ bằng

A. $\dfrac{11\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{22\sqrt{2}}{3}$. **C.** $22\sqrt{2}$. **D.** $11\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)\in(S)$. Ta có

$$\begin{aligned}MA+3MB&=\sqrt{(x-5)^2+(y-10)^2+z^2}+3\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\\&=3\left[\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{14}{3}\right)^2+z^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\right]\\&\ge\sqrt{\left(4+\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{14}{3}\right)^2+1^2}=\frac{11\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;6)$, $B(2;4;0)$ và $C(0;4;6)$. Biết M là điểm để biểu thức $MA+MB+MC+MO$ đạt giá trị nhỏ nhất, phương trình đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm $H(3;0;-1)$ và M là

A. $(\Delta)\colon\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. **B.** $(\Delta)\colon\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $(\Delta)\colon\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $(\Delta)\colon\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Lời giải.

Gọi I là trọng tâm tứ diện $OABC$, ta được $I(1;2;3)$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IO}=\vec{0} \\ IA=IB=IC=IO=\sqrt{14}. \end{cases}$

Ta thấy

$$\begin{aligned} MA &= \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{IA}\right| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{IA} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\overrightarrow{IA} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} MB &\geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\sqrt{14} \\ MC &\geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IC}+\sqrt{14} \\ MO &\geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IO}+\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Do vậy, ta được

$$\begin{aligned} MA+MB+MC+MO &\geq \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IO}\right) \\ &= 4\sqrt{14}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức $(*)$ xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv I$. Khi đó ta có $\overrightarrow{MH}=(2;-2;-4)$.

Vậy $(\Delta)\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

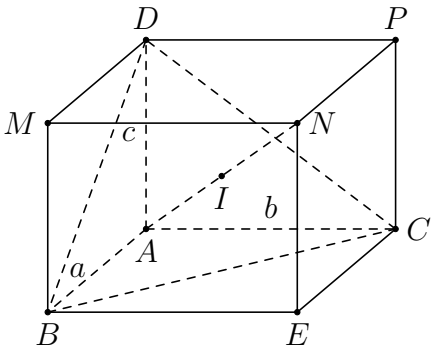
A. 72. **B**. 216. **C**. 108. **D**. 36.

Lời giải.

Đặt $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2+b^2+c^2=4R^2$.

Xét $V=V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}abc\Leftrightarrow V^2=\dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.



Mà $a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3\geqslant a^2b^2c^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3\geqslant 36\cdot V^2\Leftrightarrow V\leqslant R^3\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$

Với $R=IA=3\sqrt{3}$.

Vậy $V_{\max}=36$.

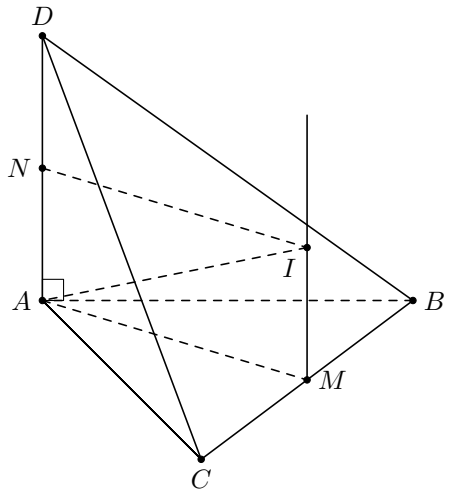
Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 8.

Lời giải.

Đặt $AD=a$, $AB=b$, $AC=c$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD. Qua M kẻ đường thẳng d song song với AD, qua N dựng đường thẳng vuông góc với AD cắt d tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



Ta có

☑ $R=IA=\sqrt{3}$.

☑ $AM=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$; $IM=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow R^2=IA^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}=3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\leq 8$.

Suy ra $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}abc\leq\dfrac{1}{6}\cdot 8=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;2;0)$, $C(4;1;-2)$. Trên mặt phẳng $Oxyz$, điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C?

A. $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{-3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **D.** $M\left(\frac{-3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

$A(2;2;2)$, $B(-2;2;0)$, $C(4;1;-1)$, $M(x,0,z)\in(Oxz)$ và cách đều 3 điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{cases}MA=MB\\MB=MC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+4+(z-2)^2=(x+2)^2+4+z^2\\(x-4)^2+1+(z+1)^2=(x+2)^2+4+z^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8x-4z=-4\\-12x+2z=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\\z=\dfrac{-1}{2}.\end{cases}$$

Vậy $M=\left(\frac{3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ tâm I và hai điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;0;-3)$. Xét các tiếp tuyến của (S) tại A và B cắt nhau tại $M=(x_M;y_M;z_M)$. Tìm y_M khi đoạn IM đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $y_M=-\frac{14}{13}$. **B.** $y_M=\frac{14}{13}$. **C.** $y_M=-\frac{22}{13}$. **D.** $y_M=\frac{10}{13}$.

Lời giải.

☑ (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và $R=3$.

☑ Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A có phương trình

$$(P_A)\colon (-1-1)(x+1)+(0+2)y+(0+1)z=0 \Leftrightarrow -2x+2y+z-2=0.$$

☑ Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại B có phương trình

$$(P_B)\colon (0-1)x+(0+2)y+(-3+1)(z+3)=0 \Leftrightarrow -x+2y-2z-6=0.$$

☑ M nằm trên đường d là giao của (P_A) và (P_B), IM ngắn nhất khi M là hình chiếu của I trên d.

☑ Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right]=(-6;-5;-2)$. Ta có M nằm trên (P_A), (P_B) và $\overrightarrow{IM}\perp\vec{u}$ nên có tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -2x+2y+z-2=0 \\ -x+2y-2z-6=0 \\ -6(x-1)-5(y+2)-2(z+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-14}{13} \\ y=\dfrac{10}{13} \\ z=\dfrac{-22}{13}. \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

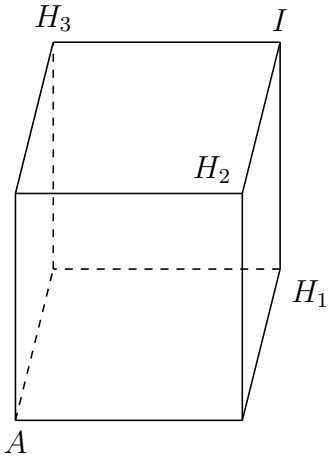
Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và điểm $A(3;1;5)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là ba đường tròn có chu vi lần lượt là p_1,p_2,p_3. Tính $T=p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

A. $T=132\pi^2$. **B.** $T=66\pi^2$. **C.** $T=264\pi^2$. **D.** $T=36\pi^2$.

Lời giải.

☑ (S) có tâm $I(1;2;3)$; $R=5$.
Gọi H_1; H_2; H_3 là hình chiếu của I đến 3 mặt phẳng đó.

☑ Ta có
I , H_1, H_2, H_3 và A tạo thành một hình hộp chữ nhật với đường chéo IA và các cạnh IH_1, IH_2, IH_3 như hình vẽ.
Từ đó $IH_1^2+IH_2^2+IH_3^2=IA^2=9$.
Gọi r_1 , r_2, r_3 là bán kính 3 đường tròn là giao tuyến của 3 mặt phẳng đó với mặt cầu. Ta có
$r_1^2=R^2-IH_1^2$; $r_2^2=R^2-IH_2^2$;
$r_3^2=R^2-IH_3^2$. Suy ra
$r_1^2+r_2^2+r_3^2=3R^2-(IH_1^2+IH_2^2+IH_3^2)$
$=66$.
Từ đó $p_1^2+p_2^2+p_3^2=4\pi^2\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)$
$=264\pi^2$.



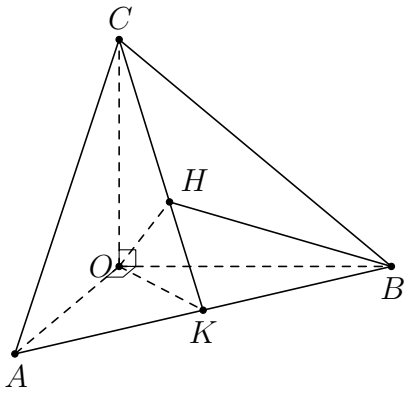
Chọn đáp án C □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Tính khoảng cách lớn nhất từ O đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Dễ thấy tứ diện $OABC$ là hình chóp tam diện vuông tại O.



Ta có $CH \perp AB,\ CO \perp AB \Rightarrow AB \perp (CHO) \Rightarrow AB \perp OH$.

Mà $BH \perp AC,\ BO \perp AC \Rightarrow AC \perp (BHO) \Rightarrow AC \perp OH$.

Từ đó ta suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O,(ABC)) = OH$.

Xét tam giác AOB vuông tại O, có đường cao OK

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Xét tam giác COK vuông tại O, có đường cao OH

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \Rightarrow OH^2 \leq \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3}.$$

Mà $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq 1 \Rightarrow OH \leq \dfrac{1}{3}$.

Vậy khoảng cách từ O mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng $\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $I(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $\triangle IAB$ vuông tại I.

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$.
B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{80}{9}$.
C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$.
D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm I cắt đường thẳng d tại A, B nên $A,\ B \in d$.

Khi đó $A(2+2t;1+2t;-1-t)$, $B(2+2u;1+2u;-1-u)$ với $t \neq u$.

Suy ra $\overrightarrow{IA} = (2t;2+2t;-2-t)$, $\overrightarrow{IB} = (2u;2+2u;-2-u)$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 0 \,(\text{do } \triangle IAB \text{ vuông}) \\ IA = IB \,(\text{do } I \text{ là tâm hình cầu}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4tu + (2+2t)(2+2u) + (2+t)(2+u) = 0 \\ 4t^2 + (2+2t)^2 + (2+t)^2 = 4u^2 + (2+2u)^2 + (2+u^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9tu + 6u + 6t + 8 = 0 \\ 9t^2 + 12t = 9u^2 + 12u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9tu + 6u + 6t + 8 = 0 \\ (t-u)(9t+9u+12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9tu + 6u + 6t + 8 = 0 \\ t = -u - \dfrac{4}{3} \,(\text{vì } t \neq u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9u\left(-u-\dfrac{4}{3}\right) + 6\left(-u-\dfrac{4}{3}\right) + 6u + 8 = 0 \\ t = -u - \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9u^2 - 12u = 0 \\ t = -u - \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0;\ t = \dfrac{-4}{3} \\ u = -\dfrac{4}{3};\ t = 0. \end{array}\right.$$

Nhận xét A, B có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $u = 0;\ t = -\dfrac{4}{3}$. Khi đó $B(2;1;-1)$, $\overrightarrow{IB} = (0;2;-2)$.

Bán kính hình cầu là $R = IB = 2\sqrt{2}$. Vậy phương trình mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$$

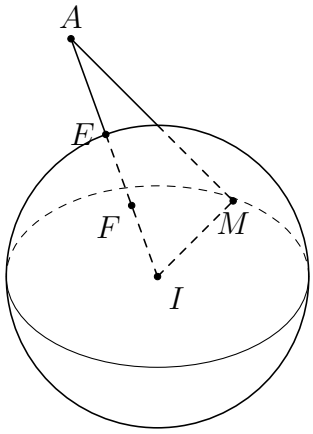
Chọn đáp án A □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=25$ và hai điểm $A(7;9;0), B(0;8;0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=MA+2MB$ với M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S).

A. 10. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(1;1;0), R=5$ là tâm và bán kính của mặt cầu (S).



Ta có $IA=10=2R, IB=\sqrt{50}>5$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu.

Gọi $E(4;5;0)$ là giao điểm của AI và mặt cầu (S) và $F\left(\dfrac{5}{2};3;0\right)$ là trung điểm của IE.

Khi đó $IM=2IF$.

Xét hai tam giác MIF và AIM, ta có $\begin{cases}\widehat{AIM}\text{(góc chung)}\\ \dfrac{IF}{IM}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{IM}{IA}\end{cases}$

$\Rightarrow \triangle AIM \backsim \triangle MIF$(c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{FM}=\dfrac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF.$

Suy ra $MA+2MB=2MF+2MB\geq 2FB=5\sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của FB và mặt cầu (S).

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$ là $5\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có cùng bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là

A. $R=\sqrt{10}+1$. **B.** $R=\sqrt{10}-1$. **C.** $R=2\sqrt{2}-1$. **D.** $R=\sqrt{10}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) là mặt cầu tiếp xúc ngoài với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2) và (S_3). Gọi I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S).

Vì $IA=IB=IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $AB=2\sqrt{2}$, $AC=4\sqrt{2}$ và $BC=2\sqrt{10}$. Suy ra $BC^2=AB^2+AC^2$ hay tam giác ABC vuông tại A. Do đó I là trung điểm của BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$IA=IB=IC=\frac{BC}{2}=\sqrt{10}.$$

Vậy $R=IA-1=IB-1=IC-1=\sqrt{10}-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $A(-1;-1;1)$. Ba mặt phẳng thay đổi qua A và đôi một vuông góc với nhau cắt (S) theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của các hình tròn đó.

A. 18π. **B.** 17π. **C.** 26π. **D.** 11π.

Lời giải.

Vì tổng diện tích của ba đường tròn không đổi nên ta có thể chọn ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau có phương trình là $x=-1$, $y=-1$ và $z=1$.
Mặt phẳng $x=-1$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn $(y+1)^2+(z-2)^2=9$ có bán kính $R_1=3$.
Mặt phẳng $y=-1$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn $(x+1)^2+(z-2)^2=9$ có bán kính $R_2=3$.
Mặt phẳng $z=1$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn $(x+1)^2+(y+1)^2=8$ có bán kính $R_3=2\sqrt{2}$.
Tổng diện tích của ba hình tròn là $\pi(R_1^2+R_2^2+R_3^2)=26\pi$.

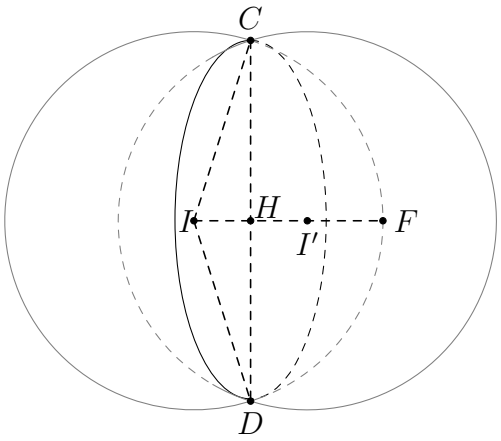
Chọn đáp án C □

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$, $(S_2)\colon (x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Tính phần thể tích V giới hạn bởi hai mặt cầu trên.

A. $V=\dfrac{1127}{6}\pi$. **B.** $V=\dfrac{1135}{6}\pi$. **C.** $V=\dfrac{1127}{24}\pi$. **D.** $V=\dfrac{1127}{12}\pi$.

Lời giải.

Mặt cầu S_1 có tâm $I(1;0;1)$ bán kính $R=5$.
Mặt cầu S_2 có tâm $I'(2;2;3)$ bán kính $R'=5$.
$\overrightarrow{II'}=(1;2;2)$, $II'=3$.
Giải sử ta có các điểm như hình vẽ.
Khi đó $h=HF=R-IH=R-\dfrac{1}{2}II'=\dfrac{7}{2}$.
Do hai mặt cầu có cùng bán kính nên phần giới hạn bởi hai mặt cầu là hai chỏm cầu có cùng thể tích.
Vậy thể tích giới hạn bởi hai mặt cầu là
$V=2\pi\cdot h^2\cdot\left(R-\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{1127}{12}\pi$.



Chọn đáp án D □

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-3)$, $B(4;5;-3)$. $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt phẳng Oxy sao cho MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Lấy điểm I đoạn thẳng AB sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+2x_B}{3}=\dfrac{-2+2\cdot 4}{3}=2\\ y_I=\dfrac{y_A+2y_B}{3}=\dfrac{2+2\cdot 5}{3}=4\\ z_I=\dfrac{z_A+2z_B}{3}=\dfrac{-3+2\cdot(-3)}{3}=-3, \end{cases}$$

từ đó suy ra $I(2;4;-3)$.

Ta lại có

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2 =& \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ =& \overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2 \\ =& 2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2=2MI^2+IA^2+IB^2. \end{aligned}$$

Từ đó, kết hợp với A, B và I cố định, suy ra MA^2+MB^2 nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, khi đó M là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxy, suy ra $M(2;4;0)$.

Vậy $a+b+c=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Cho mặt cầu (S) có tâm O, bán kính $R=2a$ và điểm M thỏa mãn $OM=a\sqrt{3}$. Ba mặt phẳng thay đổi qua điểm M và đôi một vuông góc với nhau cắt mặt cầu theo giao tuyến lần lượt là các đường tròn với bán kính r_1, r_2, r_3. Giá trị lớn nhất của biểu thức $r_1+r_2+r_3$ là

A. $3a$. **B.** $3a\sqrt{2}$. **C.** $3a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải.

Từ điểm M và ba mặt phẳng qua điểm M đôi một vuông góc với nhau ta dựng hệ trục tọa độ $Mxyz$. Giả sử $O(x_0,y_0,z_0)$ và r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt cầu với mặt Myz, Mzx và Mxy. Khi đó ta có: $\begin{cases} r_1^2=4a^2-x_0^2 \\ r_2^2=4a^2-y_0^2 \\ r_3^2=4a^2-z_0^2 \end{cases}$ và $OM^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=3a^2$.

Theo bất đẳng thức Buinhiacopski: $(r_1+r_2+r_3)^2\leqslant 3(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$.

Dấu bằng xảy ra khi $r_1=r_2=r_3$.

Vậy $r_1+r_2+r_3\leqslant\sqrt{3(12a^2-3a^2)}=3a\sqrt{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chi khi $r_1=r_2=r_3=a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$ và điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. Xét đường thẳng Δ thay đổi qua M, cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng

A. 4. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $OM=1$. Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow OH\perp AB$.

Đặt $OH=x\leqslant OM=1$. Khi đó $AB=2AH=2\sqrt{8-x^2}$

$S_{OAB}=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}=\sqrt{7-(x^2-1)(x^2-7)}\leqslant\sqrt{7}$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. D	5. C	6. C	7. C	8. A	9. C	10. C
11. D	12. A	13. C	14. B	15. C	16. C	17. A	18. B	19. B	20. B
21. A	22. C	23. C	24. A	25. A	26. D	27. B	28. C	29. A	30. A
31. C	32. D	33. D	34. D	35. A	36. B	37. B	38. C	39. B	40. D
41. B	42. C	43. B	44. B	45. D	46. A	47. C	48. C	49. C	50. C
51. A	52. B	53. A	54. D	55. D	56. C	57. C	58. D	59. C	60. A
61. A	62. B	63. B	64. C	65. D	66. B	67. C	68. B		

BÀI 2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Tích có hướng của hai véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ khi đó tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một véc-tơ kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và có tọa độ

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_1b_3-a_3b_1;a_1b_2-a_2b_1)$$

- ☑ $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
- ☑ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$; $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\perp\vec{b}$.
- ☑ $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=-\left[\vec{b};\vec{a}\right]$
- ☑ Ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.
- ☑ A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.
- ☑ Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- ☑ Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- ☑ Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- ☑ Thể tích hình tứ diện: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

2 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa 1. Cho mặt phẳng (α). Nếu $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

⚠ *Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ với $k\neq 0$, cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.*

Khái niệm. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$ và không cùng phương với nhau được gọi là cặp vectơ chỉ phương của (α) nếu giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).

Khái niệm. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{n}=\vec{a}\wedge\vec{b}$ hoặc $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

❸ Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 2. Phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

⚠ ① *Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.*

② *Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.*

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Sự đồng phẳng của ba vec-tơ, bốn điểm đồng phẳng

Phương pháp giải.

☑ Trong không gian $Oxyz$, cho ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vec-tơ $\vec{0}$.

- Ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0$.
- Ngược lại, ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **không** đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\neq 0$.

☑ Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

- Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
- Ngược lại, bốn điểm A, B, C, D **không** đồng phẳng khi và chỉ khi các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng hay $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$.

Ví dụ 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các vec-tơ sau:

① $\vec{a}=(1;-1;1)$, $\vec{b}=(0;1;2)$ và $\vec{c}=(4;2;3)$.

② $\vec{u}=(4;3;4)$, $\vec{v}=(2;-1;2)$ và $\vec{w}=(1;2;1)$.

Lời giải.

① Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-3;-2;1)$.
Vì $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=-3\cdot 4-2\cdot 2+1\cdot 3=-13\neq 0$ nên ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

② Ta có: $[\vec{u},\vec{v}]=(10;0;-10)$.
Vì $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\vec{w}=10\cdot 1+0\cdot 2-10\cdot 1=0$ nên ba vec-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

□

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các điểm sau đây:

① $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;2;-1)$ và $D(7;-2;3)$.

② $M(6;-2;3)$, $N(0;1;6)$, $P(2;0;-1)$ và $Q(4;1;0)$.

Lời giải.

① Ta có: $\overrightarrow{AB}=(6;-4;4)$; $\overrightarrow{AC}=(5;-2;-1)$ và $\overrightarrow{AD}=(11;-6;3)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;26;8)$.
Vì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=12\cdot 5+26\cdot(-2)+8\cdot(-1)=0$ nên các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

② Ta có: $\overrightarrow{MN}=(-6;3;3)$; $\overrightarrow{MP}=(-4;2;-4)$ và $\overrightarrow{MQ}=(-2;3;-3)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(-18;-36;0)$.
Vì $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]\cdot\overrightarrow{MQ}=-18\cdot(-2)+(-36)\cdot 3+0\cdot(-3)=-72\neq 0$ nên các vec-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ không đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

□

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, cho các điểm $A(1;-4;5)$, $B(2;1;0)$ và hai vec-tơ $\overrightarrow{OC}=\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}$, $\overrightarrow{DO}=3\vec{i}+2\vec{k}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là một tứ diện.

Lời giải.

Ta có: $A(1;-4;5)$, $B(2;1;0)$, $C(-2;-1;1)$ và $D(-3;0;-2)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(1;5;-5)\\ \overrightarrow{AC}&=(-3;3;-4)\\ \overrightarrow{AD}&=(-4;4;-7).\end{aligned}$$

Lại có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-5;19;18)$.
Vì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=-5\cdot(-4)+19\cdot 4+18\cdot(-7)=-30\neq 0$ nên A, B, C, D không đồng phẳng hay $ABCD$ là một tứ diện. □

Ví dụ 4. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vec-tơ $\vec{a}=(1;m;2)$, $\vec{b}=(m+1;2;1)$ và $\vec{c}=(0;m-2;2)$. Tìm các giá trị của m để ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có: $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(m-4;2m+1;-m^2-m+2)$.
Ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi:

$$\begin{aligned}&(m-2)(2m+1)+2(-m^2-m+2)=0\\ \Leftrightarrow&-5m+2=0\\ \Leftrightarrow&m=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Vậy $m=\dfrac{2}{5}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 5. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ với $\vec{a}=(2;-3;5)$, $\vec{b}=(6;-2;1)$, $\vec{c}=(3;0;1)$.

Lời giải.

Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(7;28;14)$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=35\neq 0$. Do đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. □

Ví dụ 6. Tìm m để các véctơ $\vec{a}=(m;2;3)$, $\vec{b}=(-2;m+3;5)$, $\vec{c}=(-11;m+1;0)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(1-3m;-6-5m;m^2+3m+4)$.
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0\Leftrightarrow -5m^2+22m-17=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=\dfrac{17}{5}$.

□

Ví dụ 7. Xét sự đồng phẳng của các điểm $A=(0;2;5)$; $B=(-1;-3;3)$; $C=(2;-5;1)$; $D=(8;0;2)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-5;-2)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-7;-4)$; $\overrightarrow{AD}=(8;-2;-3)$. $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=13\neq 0$. Vậy A, B, C, D không đồng phẳng □

Ví dụ 8. Tìm m để các điểm $A=(-2;2;1)$; $B=(-3;0;2)$; $C=(2;-4;1)$; $D=(7;m+3;2)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;1)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-6;0)$; $\overrightarrow{AD}=(9;m+1;1)$. $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(6;4;14)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=4m+72$. Vậy A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $m=-18$. □

Ví dụ 9. Cho các điểm $A=(2;5;-1)$; $B=(5;0;1)$; $C=(1;-4;0)$; $D=(2;3;-2)$ Chứng minh rằng AB và CD chéo nhau.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;-5;2)$; $\overrightarrow{AC}=(1-;-9;1)$; $\overrightarrow{AD}=(0;-2;-1)$. $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(13;-5;-32)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=42\neq 0$. Vậy A, B, C, D không đồng phẳng. Do đó AB và CD chéo nhau. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng bốn điểm $A=(1;0;1)$; $B=(0;0;2)$; $C=(0;1;1)$; $D=(-2;1;0)$ là bốn đỉnh của một tứ diện.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;1;0)$; $\overrightarrow{AD}=(-3;1;-1)$.$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-1;-1)$, vì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=3\neq 0$ nên A, B, C, D không đồng phẳng. Do đó A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện. □

Bài 2. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ với $\vec{a}=(0;-3;-2)$, $\vec{b}=(5;-3;1)$, $\vec{c}=(5;3;5)$.

Lời giải.

Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-9;-10;15)$,$\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$. Do đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng. □

Bài 3. Tìm m để các điểm $A=(-5;3;1)$; $B=(m+2;0;1)$; $C=(1;0;2)$; $D=(-3;m+3;-4)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(m+7;-3;0)$; $\overrightarrow{AC}=(6;-3;1)$; $\overrightarrow{AD}=(2;m;-5)$. $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-m-7;-3m-3)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-m^2+8m+9$. Vậy A,B,C,D đồng phẳng khi và chỉ khi $-m^2+8m+9=0\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=9$. □

Bài 4. Cho các vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(1;-1;0)$, tìm vectơ đơn vị $\vec{d}$ biết $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ đồng phẳng và góc giữa $\vec{c}$, $\vec{d}$ bằng 45^0.

Lời giải.

Ta có: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-1; -2; 1)$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = -x - 2y + z$.

Theo bài ra ta có $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$ và $\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x-y}{\sqrt{2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ đây ta có hệ

$$\begin{cases} -x-2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ z=3y+1 \\ 11y^2+8y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ z=3y+1 \\ y=\dfrac{-4\pm\sqrt{5}}{11} \end{cases}$$

Vậy có hai vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\vec{d} = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{11}; \frac{-4+\sqrt{5}}{11}; \frac{-1+3\sqrt{5}}{11}\right)$$

$$\vec{d} = \left(\frac{7-\sqrt{5}}{11}; \frac{-4-\sqrt{5}}{11}; \frac{-1-3\sqrt{5}}{11}\right)$$

□

Bài 5. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các vec-tơ sau:

① $\vec{a} = (-3; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 1; 1)$ và $\vec{c} = (-2; 2; 1)$.

② $\vec{d} = (4; 2; 5)$, $\vec{e} = (3; 1; 3)$ và $\vec{f} = (2; 0; 1)$.

③ $\vec{u} = (-1; -1; 2)$, $\vec{v} = (1; -2; 3)$ và $\vec{w} = (3; 0; -1)$.

④ $\vec{m} = (-1; 2; 1)$, $\vec{n} = (-2; 1; 0)$ và $\vec{p} = (4; 1; 2)$.

Lời giải.

① Ta có: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (3; 1; -4)$.
Vì $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = -8 \neq 0$ nên ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

② Ta có: $\left[\vec{d}, \vec{e}\right] = (1; 3; -2)$.
Vì $\left[\vec{d}, \vec{e}\right] \cdot \vec{f} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0$ nên ba vec-tơ $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ đồng phẳng.

③ Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}] = (1; 5; 3)$.
Vì $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0$ nên ba vec-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

④ Ta có: $[\vec{m}, \vec{n}] = (-1; -2; 3)$.
Vì $[\vec{m}, \vec{n}] \cdot \vec{p} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 0$ nên ba vec-tơ $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ đồng phẳng.

□

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các điểm sau đây:

① $A(1; -1; 1)$, $B(2; -3; 2)$, $C(4; -2; 2)$ và $D(1; 2; 3)$.

② $M(2;-1;1)$, $N(2;-3;2)$, $P(4;-2;2)$ và $Q(1;2;-1)$.

③ $G(1;1;3)$, $H(-1;3;3)$, $I(2;-8;-1)$ và $J(-3;7;4)$.

④ $E(3;0;-1)$, $F(-2;1;-2)$, $R(0;5;-4)$ và $S(1;-3;2)$.

Lời giải.

① Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;1)$; $\overrightarrow{AC}=(3;-1;1)$ và $\overrightarrow{AD}=(0;3;2)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;2;5)$.
Vì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=-1\cdot0+2\cdot3+5\cdot2=16\neq0$ nên các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

② Ta có: $\overrightarrow{MN}=(0;-2;1)$; $\overrightarrow{MP}=(2;-1;1)$ và $\overrightarrow{MQ}=(-1;3;-2)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(-1;2;4)$.
Vì $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]\cdot\overrightarrow{MQ}=-1\cdot(-1)+2\cdot3+4\cdot(-2)=-1\neq0$ nên các vec-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ không đồng phẳng hay bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng.

③ Ta có: $\overrightarrow{GH}=(-2;2;0)$; $\overrightarrow{GI}=(1;-9;-4)$ và $\overrightarrow{GJ}=(-4;6;1)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}\right]=(-8;-8;16)$.
Vì $\left[\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}\right]\cdot\overrightarrow{GJ}=-8\cdot(-4)-8\cdot6+16\cdot1=0$ nên các vec-tơ $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GJ}$ đồng phẳng hay bốn điểm G, H, I, J đồng phẳng.

④ Ta có: $\overrightarrow{EF}=(-5;1;-1)$; $\overrightarrow{ER}=(-3;5;-3)$ và $\overrightarrow{ES}=(-2;-3;3)$.
Khi đó: $\left[\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ER}\right]=(2;-12;-22)$.
Vì $\left[\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ER}\right]\cdot\overrightarrow{ES}=2\cdot(-2)-12\cdot(-3)-22\cdot3=-34\neq0$ nên các vec-tơ $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ER}$, $\overrightarrow{ES}$ không đồng phẳng hay bốn điểm E, F, R, S không đồng phẳng.

□

Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, cho các điểm $A(1;-4;5)$, $B(3;2;1)$ và hai vec-tơ $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{DO}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD. Chứng minh rằng bốn điểm O, M, N, P lập thành một tứ diện.

Lời giải.

Ta có: $A(1;-4;5)$, $B(3;2;1)$, $C(5;0;3)$ và $D(-7;-2;3)$.
Khi đó: $M(2;-1;3)$, $N(4;1;2)$, $P(-1;-1;3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=(2;-1;3)\\ \overrightarrow{ON}&=(4;1;2)\\ \overrightarrow{OP}&=(-1;-1;3).\end{aligned}$$

Lại có $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=(-5;8;6)$.
Vì $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]\cdot\overrightarrow{OP}=-5\cdot(-1)+8\cdot(-1)+6\cdot3=15\neq0$ nên O, M, N, P không đồng phẳng hay bốn điểm O, M, N, P lập thành một tứ diện. □

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(m;1;1)$, $B(2;m;-1)$, $C(3;-3;m)$ và $D(m;-1;4)$. Tìm giá trị của m để bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2-m; m-1; -2)\\ \overrightarrow{AC} &= (3-m; -4; m-1)\\ \overrightarrow{AD} &= (0; -2; 3).\end{aligned}$$

Khi đó: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ $(m^2-2m-7; m^2-m-4; m^2-5)$.
A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng khi các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, tức là:

$$\begin{aligned}&\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD} = 0\\ \Leftrightarrow &4(m^2-m-4) + 3(m^2-5) = 0\\ \Leftrightarrow &7m^2 - 4m - 31 = 0\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2-\sqrt{221}}{7}\\ m = \dfrac{2+\sqrt{221}}{7}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m = \dfrac{2-\sqrt{221}}{7}$, $m = \dfrac{2+\sqrt{221}}{7}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 9. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;1)$, $B(3;4;5)$, $C(-1;-7;2)$, $D(-2;2;0)$ và $E(2;-9;3)$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, E tạo thành một hình chóp.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2;4;4)\\ \overrightarrow{AC} &= (-2;-7;1)\\ \overrightarrow{AD} &= (-3;2;-1)\\ \overrightarrow{AE} &= (1;-9;2).\end{aligned}$$

Khi đó: $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = (5;-5;-25)$.
Vì $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \cdot \overrightarrow{AE} = 5\cdot 1 - 5\cdot(-9) - 6\cdot(-1) =$ nên bốn điểm A, C, D, E cùng thuộc một mặt phẳng.
Lại có: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (32;-10;-6)$.
Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD} = 32\cdot(-3) - 10\cdot 2 - 25\cdot 2 = -166 \neq 0$ nên bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng hay B không thuộc mặt phẳng $(ACDE)$.
Vậy các điểm A, B, C, D, E tạo thành một hình chóp. □

Bài 10. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tìm các giá trị của m để:
① $\vec{a} = (2m;-4;-2)$, $\vec{b} = (m; m-1; -1)$, $\vec{c} = (3m; m; m-4)$ đồng phẳng.

② $\vec{u}=(1;m+1;1-m)$, $\vec{v}=(m-2;3;m+3)$, $\vec{w}=(-3;m+2;3m+2)$ đồng phẳng.

Lời giải.

① Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2m+2;0;2m^2+2m)$.

Ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi:

$$\begin{aligned}&3m(2m+2)+(m-4)(2m^2+2m)=0\\ \Leftrightarrow&2m^3-2m=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\\ m=-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m=\dfrac{2}{5}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Ta có: $[\vec{u},\vec{v}]=(m^2+7m;-m^2+2m-5;-m^2+m+5)$.

Ba vec-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng khi:

$$\begin{aligned}&-3(m^2+7m)+(m+2)(-m^2+2m-5)+(3m+2)(-m^2+m+5)=0\\ \Leftrightarrow&-4m^3-5m=0\\ \Leftrightarrow&-m(4m^2+5)=0\\ \Leftrightarrow&m=0.\end{aligned}$$

Vậy $m=0$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

DẠNG 2. Diện tích của tam giác

Phương pháp giải. Phương pháp: Sử dụng công thức

$$\begin{aligned}S_{ABC}&=\frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC}\\ &=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|\\ &=\cdots\end{aligned}$$

Ví dụ 10. Trong không gian $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k},\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k},\overrightarrow{BC}=(2;-7;1)$ và $A'(4;1;-7)$.

① Tính diện tích tam giác ABC.

② Tính diện tích tam giác $A'BC$.

Lời giải.

Từ đề bài ta có $A(2;1;-3), B(4;3;-2), C(6;-4;-1)$.

① Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1), \overrightarrow{AC}=(4;-5;2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(9;0;-18)$.

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{9^2+0^2+(-18)^2}=\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

② Ta có $\overrightarrow{A'B}=(0;2;5), \overrightarrow{A'C}=(2;-5;6) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]=(37;10;-4)$.

Vậy diện tích tam giác $A'BC$ là: $S_{A'BC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{37^2+10^2+(-4)^2}=\dfrac{3\sqrt{165}}{2}$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (cho mỗi dạng)

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;-1), B(3;2;3), C(-1;1;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;4), \overrightarrow{AC}=(-3;1;2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-14;7)$. Vậy $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$

□

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;-1;3), B(3;-4;0)$. Tìm trên Oz điểm C (C khác O) để diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $C(0;0;c)$ là điểm cần tìm.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(1;-3;-3), \overrightarrow{AC}=(-2;1;c-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12-3c;9-c;-5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\sqrt{10c^2-90c+250}$. Vậy ta có phương trình $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10c^2-90c+250}=\dfrac{5\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \ \text{(loại)} \\ c=9 \ \text{(nhận)} \end{array}\right. \Rightarrow C(0;0;9)$.

□

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;1), B(-1;1;0), C(a;1-a;0)$. Tìm tất cả các giá trị của a để tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;1;-1), \overrightarrow{AC}=(a-1;1-a;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-a;-1-a;a-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\sqrt{3a^2+2}$. Vậy $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3a^2+2}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi $a=0 \Rightarrow C(0;1;0)$.

□

DẠNG 3. Thể tích khối chóp

Phương pháp giải. Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|=\cdots$

Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(3;-2;1), B(-1;0;2), C(3;4;-5), D(0;0;1)$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}=(-4;2;1), \overrightarrow{AC}=(0;6;-6), \overrightarrow{AD}=(-3;2;0)\\&\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;-24;-24)\\&\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=-3\cdot(-18)-2\cdot 24=6.\\&\text{Vậy } V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=1\end{aligned}$$

□

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các đỉnh của khối chóp có tọa độ là $A(2;1;-3), B(4;3;-2), C(6;-4;-1), S(2;1;-5)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Ta có $V_{S.ABCD}=2\cdot V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AS}\right|$. Mà:
$\overrightarrow{AB}=(2;2;1), \overrightarrow{AC}=(4;-5;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(9;0;-18), \overrightarrow{AS}=(0;0;-2)$.
$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AS}=36$.
Vậy $V_{S.ABCD}=2\cdot V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AS}\right|=12$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (cho mỗi dạng)

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các đỉnh của khối chóp có tọa độ $S(0;0;2), A(-2;4;6), B(1;-2;-2), C(3;-4;0)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

HD: Nếu ta lấy đỉnh A thì phải tìm được các véc-tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}$ nhưng D chưa có tọa độ, nên ta sử dụng đỉnh B. Khi đó $V_{S.ABCD}=2\cdot V_{S.BAC}=\frac{1}{3}\cdot\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\cdot\overrightarrow{BS}\right|$. □

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(-1;1;1), B(1;0;1), C(0;-1;1)$. Tìm trên Oz điểm S sao cho thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng 2.

Lời giải.

Gọi $S(0;0;c)$ là điểm cần tìm.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;0), \overrightarrow{AC}=(1;-2;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;-3), \overrightarrow{AS}=(1;-1;c-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AS}=-3\cdot(c-1)$. Vậy thể tích khối chóp cần tìm là $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AS}\right|\Rightarrow 2=\frac{1}{2}|c-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=5\\c=-3\end{array}\right.$. Vậy tọa độ điểm $C_1(0;0;5), C_2(0;0;-3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;1), B(-3;0;-2), C(0;1;1)$. Tìm tất cả các giá trị của a để điểm $D(a;a-2;0)$ là đỉnh thứ tư của khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{11}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;0;-3), \overrightarrow{AC}=(-2;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-5), \overrightarrow{AD}=(a-2;a-2;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=9\cdot(a-2)+5$. Vậy thể tích khối tứ diện là $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{6}\cdot|9\cdot(a-2)+5| \Leftrightarrow 11=|9a-13| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{24}{9} \\ a=\dfrac{2}{9} \end{array}\right.$. Vậy tọa độ $D_1\left(\dfrac{24}{9};\dfrac{2}{3};0\right), D_2\left(\dfrac{2}{9};-\dfrac{16}{9};0\right)$. □

DẠNG 4. Thể tích khối hộp

Phương pháp giải. Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=\ldots$

Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $B(1;3;1), C(0;1;-1), D(-2;0;1), A'(2;1;1)$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải.

Gọi thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là V.

Vậy $V=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Mà $\overrightarrow{AB}=(1-x_A;3-y_A;1-z_A); \overrightarrow{DC}=(2;1;-2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-x_A=2 \\ 3-y_A=1 \\ 1-z_A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-1 \\ y_A=2 \\ z_A=3 \end{cases} \Rightarrow A(-1;2;3).$

Vậy $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2), \overrightarrow{AD}=(-1;-2;-2), \overrightarrow{AA'}=(3;-1;-2)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-6;6;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}=-18-6+6=-18.$

$\Rightarrow V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=18$ □

Bài 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, có $A(2;-3;1), B(1;-1;-3), D(-1;-$ và $\overrightarrow{OC'}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. Tính thể tích khối hộp trên.

Lời giải.

HD: Ta đi tìm đỉnh C là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Khi đó thể tích của khối hộp được tính theo công thức:

$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right]\cdot\overrightarrow{CC'}\right|$$

. □

DẠNG 5. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có vectơ pháp tuyến cho trước

Phương pháp giải. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.
Khi đó $(\alpha): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Ví dụ 14. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-1;1;2)$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt phẳng (P) là $-1(x-3)+1(y-1)+2(z-1)=0$
$\Leftrightarrow -x+y+2z=0 \Leftrightarrow x-y-2z=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;7;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;0;1)$.

Lời giải.

Ta có $(P): 3(x+2)+0(y-7)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x+z+6=0$. □

Bài 19. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4;-1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;3)$.

Lời giải.

Ta có $(P): 0(x-4)+1(y+1)+3(z+2)=0 \Leftrightarrow y+3z+7=0$. □

DẠNG 6. Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

Phương pháp giải. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 15. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2;1;1)$ và $B(2;-1;-1)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=2 \\ y_I=0 \\ z_I=0 \end{cases}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$.
Vậy phẳng phẳng trung trực đi qua điểm $I(2;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$ nên có phương trình là $0(x-2)-2(y-0)-2(z-0)=0 \Leftrightarrow y+z=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;-1;-4)$ và $B(2;0;5)$.

Lời giải.

Ta có trung điểm của đoạn AB là $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;1;9)$.

Vậy phương trình cần tìm là $1\left(x-\frac{3}{2}\right)+1\left(y+\frac{1}{2}\right)+9\left(z-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y+18z-11=0$. □

Bài 21. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2;3;-4)$ và $B(4;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có trung điểm của đoạn AB là $I(3;1;-2)$ và $\overrightarrow{AB}=(2;-4;4)$.

Vậy phương trình cần tìm là $2(x-3)-4(y-1)+4(z+2)=0\Leftrightarrow x-2y+2z+3=0$. □

DẠNG 7. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có cặp vectơ chỉ phương cho trước

Phương pháp giải. Mặt phẳng có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Ví dụ 16. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;1;2)$, $\vec{b}=(3;2;-1)$.

Lời giải.

Ta có vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-5;8;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-5;8;1)$ nên có phương trình là $-5(x-1)+8(y-2)+1(z+3)=0\Leftrightarrow 5x-8y-z+8=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{b}=(0;3;4)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2;-12;9)$.

Vậy phương trình của (α) là $2(x-1)-12(y+2)+9(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-12y+9z-53=0$. □

Bài 23. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;3;4)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;7;2)$, $\vec{b}=(3;2;4)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(24;-2;-17)$.

Vậy phương trình của (α) là $24(x+1)-2(y-3)-17(z-4)=0\Leftrightarrow 24x-2y-17z+98=0$. □

Bài 24. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-4;0;5)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(6;-1;3)$, $\vec{b}=(3;2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-7;3;15)$.

Vậy phương trình của (α) là $-7(x+4)+3(y-0)+15(z-5)=0\Leftrightarrow 7x-3y-15z+103=0$. □

DẠNG 8. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và song song mặt phẳng cho trước

Phương pháp giải. Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\beta):Ax+By+Cz+D=0$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với (β).

Khi đó vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$.

Ví dụ 17. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;1)$ và song song với mặt phẳng $(\beta):2x-y+3=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(2;-1;0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $2(x-1)-1(y+2)+0(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-y-4=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;1;0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta):x-2y+z-10=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(1;-2;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $1(x+1)-2(y-1)+1(z-0)=0\Leftrightarrow x-2y+z+3=0$. □

Bài 26. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(3;6;-5)$ và song song với mặt phẳng $(\beta):-x+z-1=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(-1;0;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-1(x-3)+0(y-6)+1(z+5)=0\Leftrightarrow x-z-8=0$. □

Bài 27. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-3;5)$ và song song với mặt phẳng $(\beta):x+2y-z+5=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(1;2;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $1(x-2)+2(y+3)-1(z-5)=0\Leftrightarrow x+2y-z+9=0$. □

Bài 28. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (β) : $10x-10y+20z-40=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(1;-1;2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $1(x-1)-1(y-1)+2(z-1)=0\Leftrightarrow x-y+2z-2=0$. □

Bài 29. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;1;5)$ và song song với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $0(x-2)+0(y-1)+1(z-5)=0\Leftrightarrow z-5=0$. □

DẠNG 9. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng

Phương pháp giải. Cho ba điểm A,B,C phân biệt không thẳng hàng.
Khi đó mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Ví dụ 18. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(1;-2;4)$, $B(3;2;-1)$ và $C(-2;1;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;4;-5)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;3;-7)$.
Do đó $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-13;29;18)$. Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là
$-13(x-1)+29(y+2)+18(z-4)=0\Leftrightarrow 13x-29y-18z+1=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(0;0;0)$, $B(-2;-1;3)$ và $C(4;-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-2;1)$.
Do đó $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(5;14;8)$. Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là
$5(x-0)+14(y-0)+8(z-0)=0\Leftrightarrow 5x+14y+8z=0$. □

Bài 31. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và $C(-2;2;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;1;2)$.
Do đó $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-6;6)$. Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là
$1(x-0)-2(y-1)+2(z-0)=0\Leftrightarrow x-2y+2z+2=0$. □

DẠNG 10. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Phương pháp giải. Cho điểm M và đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A, B.
Khi đó mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 19. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;4)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;2;-1)$, $B(-2;1;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{AB} = (-5;-1;-2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-5(x-1) - 1(y+2) - 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow 5x + y + 2z - 11 = 0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 32. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;-1;3)$, $B(4;2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{AB} = (6;3;-4)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $6(x-0) + 3(y-0) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y - 4z = 0$. □

Bài 33. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0;1;0)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $B(2;3;1)$ và $C(-2;2;2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{BC} = (-4;-1;1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-4(x-0) - 1(y-1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - z - 1 = 0$. □

DẠNG 11. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước

Phương pháp giải. Cho điểm M và hai mặt phẳng cắt nhau (β) và (γ).
Khi đó mặt phẳng (α) đi qua điểm M, vuông góc với mặt phẳng (β) và (γ) có $\vec{n} = \left[\vec{n}_{(\beta)}, \vec{n}_{(\gamma)}\right]$.

Ví dụ 20. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): x + y - 2z + 1 = 0$, $(\gamma): 2x - y + z = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\beta)} = (1;1;-2)$, $\vec{n}_{(\gamma)} = (2;-1;1)$.
Do đó $\vec{n}_{(\alpha)} = \left[\vec{n}_{(\beta)}, \vec{n}_{(\gamma)}\right] = (-1;-5;-3)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-1(x-1) - 5(y-2) - 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 3z - 8 = 0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(3;4;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 2x-y+2z+1=0$, $(\gamma): x-y-z+1=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\beta)}=(2;-1;2)$, $\vec{n}_{(\gamma)}=(1;-1;-1)$.
Do đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{n}_{(\beta)},\vec{n}_{(\gamma)}\right]=(3;4;-1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $3(x-3)+4(y-4)-1(z-1)=0\Leftrightarrow 3x+4y-z-24=0$. □

Bài 35. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;0)$, vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 3x-2y-4z+1=0$, và (Oxy).

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(\beta)}=(3;-2;-4)$, $\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$.
Do đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{n}_{(\beta)},\vec{n}_{(Oxy)}\right]=(-2;-3;0)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-2(x-2)-3(y+1)+0(z-0)=0\Leftrightarrow 2x+3y-1=0$. □

DẠNG 12. Lập phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và vuông góc với một mặt phẳng cắt nhau cho trước

Phương pháp giải. Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (β).
Khi đó mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) có $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(\beta)}\right]$.

Ví dụ 21. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+3z-1=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;5)$ và $\vec{n}_{(\beta)}=(2;-1;3)$.
Do đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(\beta)}\right]=(-1;13;5)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-1(x-3)+13(y-1)+5(z+1)=0\Leftrightarrow x-13y-5z+5=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 36. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(-2;-1;3)$, $B(4;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x+3y-2z+5=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;-1;-2)$ và $\vec{n}_{(\beta)}=(2;3;-2)$.
Do đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(\beta)}\right]=(8;8;20)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $8(x+2)+8(y+1)+20(z-3)=0\Leftrightarrow 2x+2y+5z-9=0$. □

Bài 37. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(2;-1;3)$, $B(-4;7;-9)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 3x+4y-8z-5=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;8;-12)$ và $\vec{n}_{(\beta)}=(3;4;-8)$.
Do đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(\beta)}\right]=(-16;-84;-48)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là

$$-16(x-2)-84(y+1)-48(z-3)=0\Leftrightarrow 4x+21y+12z-23=0.$$

□

DẠNG 13. Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm cho trước

Phương pháp giải. Cho mặt cầu (S) có tâm I.
Khi đó mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H có $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$.

Ví dụ 22. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ tại điểm $M(-1;3;0)$.

Lời giải.

Ta có tâm của mặt cầu (S) là $I(3;1;-2)$.
Khi đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\overrightarrow{IM}=(-4;2;2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-4(x+1)+2(x-3)+2(z-0)=0\Leftrightarrow 2x-y-z+5=0$. □

Bài 38. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ tại điểm $M(4;3;0)$.

Lời giải.

Ta có tâm của mặt cầu (S) là $I(3;1;-2)$.
Khi đó $\vec{n}_{(\alpha)}=\overrightarrow{IM}=(1;2;-2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $1(x-4)+2(y-3)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x+2y-2z-10=0$. □

DẠNG 14. Viết phương trình của mặt phẳng liên quan đến mặt cầu và khoảng cách

Phương pháp giải. **Kiến thức cần nhớ**

1. Khoảng cách từ điểm đến mặt.
2. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu.

1. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu.

Ví dụ 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2+3}=3$.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$x+2y-2z+D=0, D\neq 1.$$

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d(I,(P))=R=3\Leftrightarrow \frac{|-1+4-2+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3\Leftrightarrow |1+D|=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-10\\ D=8.\end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x+2y-2z-10=0$ và $x+2y-2z+8=0$. □

Ví dụ 24. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(1;4;1)$.

Suy ra vec-tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}_P=[\vec{n},\vec{v}]=(2;-1;2)$.

Phương trình của (P) có dạng: $2x-y+2z+m=0$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-21\\ m=3\end{array}\right.$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $2x-y+2z+3=0$ hoặc (P): $2x-y+2z-21=0$. □

Ví dụ 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ và mặt phẳng $(P): x+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(3;1;-1)$ vuông góc với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R=3$; mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua M có dạng:

$$A(x-3)+B(y-1)+C(z+1)=0, A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d(I,(Q))=R\Leftrightarrow |-4A+B+C|=3\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (*)

Mặt khác $(Q)\perp(P)\Leftrightarrow \vec{n}_Q.\vec{n}_P=0\Leftrightarrow A+C=0\Leftrightarrow C=-A$ (**)

Từ (*), (**)$\Rightarrow |B-5A|=3\sqrt{2A^2+B^2}\Leftrightarrow 8B^2-7A^2+10AB=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=2B\\ 7A=-4B\end{array}\right.$

+ Với $A=2B$, chọn $B=1, A=2, C=-2$ suy ra phương trình mặt phẳng $(Q): 2x+y-2z-9=0$.

+ Với $7A=-4B$, chọn $B=-7, A=4, C=-4$ suy ra phương trình mặt phẳng $(Q): 4x-7y-4z-9=0$. □

Câu hỏi tương tự

Với $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0, (P): 2x+y-6z+5=0, M(1;1;2)$.

ĐS: $(Q): 2x+2y+z-6=0$ hoặc $(Q): 11x-10y+2z-5=0$.

Ví dụ 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$.

Mặt phẳng (P) chứa Ox, nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$ay+bz=0.$$

Mặt khác đường tròn thiết diện có bán kính bằng 3 cho nên (P) đi qua tâm I.

Suy ra: $-2a-b=0 \Leftrightarrow b=-2a(a\neq 0) \Rightarrow (P): y-2z=0$. □

Ví dụ 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $x-y-2=0, 2x-z-6=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=1$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-1)$, bán kính $R=2$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$ax+by+cz+d=0, (a^2+b^2+c^2\neq 0).$$

Chọn $M(2;0;-2), N(3;1;0)\in d$.

Tacó: $\begin{cases} M\in(P) \\ N\in(P) \\ d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, 2c=-(a+b), d=-3a-b (1) \\ 17a=-7b, 2c=-(a+b), d=-3a-b (2) \end{array}\right.$

+ Với $(1) \Rightarrow (P): x+y-z-4=0$.

+ Với $(2) \Rightarrow (P): 7x-17y+5z-4=0$. □

Ví dụ 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x+2y-z+17=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $2p=6\pi$.

Lời giải.

Do $(\alpha)\parallel(\beta)$ nên mặt phẳng (β) có phương trình $2x+2y-z+D=0$ (với $D\neq 17$.)

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=5$.

Đường tròn giao tuyến có chu vi 6π nên có bán kính $r=3$.

Khoảng cách từ I tới (β) là $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Do đó $\dfrac{|2.1+2(-2)-3+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |-5+D|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-7 \\ D=17 (\text{loại }) \end{array}\right.$

Vậy (β) có phương trình $2x+2y-z-7=0$. □

Câu hỏi tương tự:

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-11=0, (\alpha): 2x+y-2z+19=0, p=8\pi$.

ĐS: $(\beta): 2x+y-2z+1=0$

2. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách.

Ví dụ 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì mặt phẳng $(ABC)\perp(P) \Rightarrow \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0 \Leftrightarrow b=c$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(ABC): bx+y+z-b=0$.

Do $d(O,(ABC))=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+2}}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$(do $b>0$)

Vậy phương trình mặt phẳng $(ABC): x+2y+2z=1$. □

Ví dụ 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P),(Q)$ lần lượt là $\vec{n}_P=(1;1;1)$, $\vec{n}_Q=(1;-1;1)$.

Suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(Q)=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(2;0;-2)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (R) có dạng $x-z+m=0$.

Ta có $d(O,(R))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Vậy $(R): x-z\pm 2=0$. □

Ví dụ 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Trên mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ chọn điểm $M(-1;0;0)$.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$x+2y-2z+D=0, D\neq 1.$$

Vì $d((P),(Q))=3 \Leftrightarrow d(M,(P))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|-1+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3 \Leftrightarrow |-1+D|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-8 \\ D=10 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x+2y-2z-8=0$ và $x+2y-2z+10=0$. □

Ví dụ 32. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O, vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y+z=0$ và cách điểm $M(1;2;-1)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) qua O nên có dạng: $Ax+By+Cz=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$).

- Vì $(P)\perp(Q)$ nên: $1.A+1.B+1.C=0\Leftrightarrow C=-A-B$ (1)
- $d(M,(P))=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow(A+2B-C)^2=2(A^2+B^2+C^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $8\cdot AB+5B^2=0\Leftrightarrow\hoac{B=0(3)\\8A+5B=0(4)}$

- Từ $(3):B=0\Rightarrow C=-A$ chọn $A=1\Rightarrow C=-1$. Do đó $(P):x-z=0$.
- Từ $(4):8A+5B=0$ chọn $A=5,B=-8\Rightarrow C=3$. Do đó $(P):5x-8y+3z=0$.

□

Ví dụ 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Lời giải.

Gọi $B(a;b;c)$. Vì tam giác OAB đều nên ta có hệ

$$\heva{OA=OB\\OA=AB}\Leftrightarrow\heva{a^2+b^2+c^2=32\\(a-4)^2+(b-4)^2+c^2=32}\Leftrightarrow\heva{a=4-b\\c^2=16-2b^2+8b}$$

mà $B\in(S)$ nên

$$a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0\Leftrightarrow(4-b)^2+b^2+16-2b^2+8b-4(4-b)-4b-4c=0\Leftrightarrow c=4\Rightarrow\hoac{b=0\\b=4}.$$

Do đó $B(4;0;4)$ hoặc $B(0;4;4)$.

- Với $B(0;4;4)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;16)$ nên phương trình $(OAB):x-y+z=0$.
- Với $B(0;4;4)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;-16)$ nên phương trình $(OAB):x-y-z=0$.

□

Ví dụ 34. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M,N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$Ax+B(y+1)+C(z-2)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz+B-2C=0$ với $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$

Vì $N(-1;1;3)\in(P)\Leftrightarrow -A+B+3C+B-2C=0\Leftrightarrow A=2B+C\Rightarrow(P):(2B+C)x+By+Cz+B-2C=0$;

Lại có $d(K,(P))=\dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}$.

+ Nếu $B=0$ thì $d(K,(P))=0$ (loại).

+ Nếu $B\neq 0$ thì $d(K,(P))=\dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{C}{B}+1\right)^2+2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Dấu " = " xảy ra khi $B=-C=1$. Khi đó phương trình mặt phẳng $(P):x+yz+3=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và (P) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$x+2y-2z+D=0, D\neq 1.$$

Vì $d(M,(P))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|1-4-2+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$

$\Leftrightarrow |-5+D|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-4 \\ D=14. \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x+2y-2z-4=0$ và $x+2y-2z+14=0$. □

Bài 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;1;0)$, $N(0;0;-2)$, $I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và N, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$ax+by+cz+d=0, (a^2+b^2+c^2\neq 0).$$

Ta có: $\left\{\begin{array}{l} M\in(P) \\ N\in(P) \\ d(I,(P))=\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b, 2c=a-b, d=a-b(1) \\ 5a=7b, 2c=a-b, d=a-b(2) \end{array}\right.$.

+ Với (1) $\Rightarrow$ PT mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$.

+ Với (2) $\Rightarrow$ PT mặt phẳng $(P): 7x+5y+z+2=0$. □

Bài 41.

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0, (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

$$\left\{\begin{array}{l} A\in(P) \\ B\in(P) \\ d(C,(P))=d(D,(P)) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-b+2c+d=0 \\ a+3b+d=0 \\ \dfrac{|-3a+4b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2a, c=4a, d=-7a \\ c=2a, b=a, d=-4a \end{array}\right.$

+ Với $b=2a, c=4a, d=-7a \Rightarrow (P): x+2y+4z-7=0$.

+ Với $c=2a, b=a, d=-4a \Rightarrow (P): x+y+2z-4=0$.

□

Câu hỏi tương tự Với $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1), D(0;3;1)$.

ĐS: $(P): 4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P): 2x+3z-5=0$.

Bài 42. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$ax+by+cz+d=0, (a^2+b^2+c^2\neq 0).$$

Ta có: $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \\ d(C,(P))=d(D,(P)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+2c+d=0 \\ a+3b+d=0 \\ \dfrac{|-3a+4b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2a, c=4a, d=-7a \\ c=2a, b=a, d=-4a \end{array}\right.$

+ Với $b=2a$,$c=4a$,$d=-7a \Rightarrow (P): x+2y+4z-7=0$.

+ Với $c=2a, b=a, d=-4a \Rightarrow (P): x+y+2z-4=0$. □

Câu hỏi tương tự Với $A(1;2;1)$,$B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$, $D(0;3;1)$.

ĐS: $(P): 4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P): 2x+3z-5=0$.

Bài 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3), B(0;-1;2)$, $C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Lời giải.

Vì $O\in(P)$ nên $(P): ax+by+cz=0$, với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Do $A\in(P) \Rightarrow a+2b+3c=0$. (1)

Mà $d(B,(P))=d(C,(P)) \Leftrightarrow |-b+2c|=|a+b+c|$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=0$ hoặc $c=0$.

+ Với $b=0$thì $a=-3c \Rightarrow (P): 3x-z=0$.

+ Với $c=0$ thì $a=-2b \Rightarrow (P): 2x-y=0$. □

Câu hỏi tương tự: Với $A(1;2;0), B(0;4;0), C(0;0;3)$.

ĐS: $-6x+3y+4z=0$ hoặc $6x-3y+4z=0$.

Bài 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax+by+cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Do $A(1;1;-1)\in(\alpha)$ nên: $a+b-c+d=0$ (1);

Mà $(\alpha) \perp (P)$ nên $a-2b+2c=0$ (2)

Vì $IB=2IC \Rightarrow d(B,(\alpha))=2d(C;(\alpha))$

$$\Rightarrow \frac{|a+b+2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\frac{|-a+2b-2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-3b+6c-d=0 \\ -a+5b-2c+3d=0 \end{array}\right. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ a-2b+2c=0 \\ 3a-3b+6c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\dfrac{-1}{2}a; c=-a; d=\dfrac{-3}{2}a.$

Chọn $a=2 \Rightarrow b=-1; c=-2; d=-3 \Rightarrow (\alpha)$: $2x-y-2z-3=0$

TH2: $\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ a-2b+2c=0 \\ -a+5b-2c+3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2}a; c=a; d=\dfrac{-3}{2}a.$

Chọn $a=2 \Rightarrow b=3; c=2; d=-3 \Rightarrow (\alpha)$: $2x+3y+2z-3=0$.

Vậy: (α): $2x-y-2z-3=0$ hoặc (α): $2x+3y+2z-3=0$. □

Bài 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;0;3)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0, (a^2+b^2+c^2 \neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \\ d(I,(P))=R \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b, c=-a-b, d=2a+3b (1) \\ 3a=-8b, c=-a-b, d=2a+3b (2) \end{array}\right.$

+ Với (1), suy ra phương trình của (P): $x-y-1=0$.

+ Với (2), suy ra phương trình của (P): $8x-3y-5z+7=0$. □

Bài 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

Lời giải.

Ta có $d(O,(P)) \leqslant OA$. Do đó $d(O,(P))_{\max}=OA$ xảy ra $\Leftrightarrow OA \perp (P)$ nên mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với OA. Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;-1;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 2x-y+z-6=0$. □

DẠNG 15. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc hoặc liên quan đến tam giác

Phương pháp giải. Giải bài toán viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc hoặc liên quan đến tam giác thường phải sử dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng và phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn dưới đây:

☑ Giả sử $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có các véc-tơ pháp tuyến tương ứng là $\vec{n}_\alpha=(A;B;C)$ và $\vec{n}_\beta=(A';B';B')$. Khi đó, góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) được tính theo công thức

$$\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)|=\frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}.$$

☑ Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ (với $abc\neq 0$) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ví dụ 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3z-5=0$ và $A(3;-2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và song song với (α).

Lời giải.

$(P)\parallel(\alpha)\Rightarrow\vec{n}_\alpha=(2;-1;3)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P). Suy ra phương trình của (P) là $2(x-3)-1(y+2)+3(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-y+3z-11=0$. □

Ví dụ 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và $(\alpha): x-2y+3z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (α).

Lời giải.

(α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha=(1;-2;3)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;5)$.

$\Rightarrow[\vec{n}_\alpha,\overrightarrow{AB}]=(-4;-8;-4)=-4(1;2;1)$.

Suy ra (β) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta=(1;2;1)$ và đi qua $A(3;1;-1)$.

Vậy phương trình của $(\beta): 1(x-3)+2(y-1)+1(z+1)=0\Leftrightarrow x+2y+z-4=0$. □

Ví dụ 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Ox và tạo với mặt phẳng $(P): \sqrt{5}x+y+2z=0$ một góc bằng 60°.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(\sqrt{5};1;2)$, véc-tơ đơn vị của Ox là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Giả sử $\vec{n}_\alpha=(a;b;c), a^2+b^2+c^2\neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).

(α) chứa $Ox\Rightarrow\vec{n}_\alpha\cdot\vec{i}=0\Leftrightarrow a=0$. Suy ra $\vec{n}_\alpha=(0;b;c)$.

(α) tạo với (P) một góc $60^\circ\Leftrightarrow\cos 60^\circ=|\cos(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_P)|\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{|b+2c|}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{\sqrt{5}^2+1^2+2^2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{10}\sqrt{b^2+c^2}=2|b+2c|\Leftrightarrow 3b^2-8bc-3c^2=0$.

Với $c=0\Rightarrow b=0$ (loại do $a^2+b^2+c^2\neq 0$).

Với $c\neq 0$, chia hai vế phương trình cho c^2, ta được: $3\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-8\dfrac{b}{c}-3\dfrac{b}{c}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{b}{c}=3\\ \dfrac{b}{c}=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

TH1: $\dfrac{b}{c}=3$, chọn $b=3,c=1\Rightarrow\vec{n}_\alpha=(0;3;1)$. Suy ra phương trình của $(\alpha): 3y+z=0$.

TH2: $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{1}{3}$, chọn $b=1,c=-3\Rightarrow \vec{n}_\alpha=(0;1;-3)$. Suy ra phương trình của $(\alpha):y-3z=0$. □

Ví dụ 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P):5x-2y+5z-1=0$ và $(Q):x-4y-8z+12=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và hợp với mặt phẳng (Q) một góc 45°.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(5;-2;5)$.

(Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;-4;-8)$.

Gọi $\vec{n}_\alpha=(a;b;c),a^2+b^2+c^2\neq 0$ là véc-tơ phép tuyến của (α).

$(\alpha)\perp(P)\Rightarrow \vec{n}_P\cdot\vec{n}_P=0\Leftrightarrow 5a-2b+5c=0\Leftrightarrow b=\dfrac{5a+5c}{2}$ (*).

(α) tạo với (Q) góc $45^\circ\Leftrightarrow \cos 45^\circ=|\cos(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_Q)|\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|a-4b-8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}$.

Thế (*) vào phương trình trên ta có

$$\begin{aligned}&9\sqrt{2}\sqrt{a^2+\left(\frac{5a+5c}{2}\right)^2+c^2}=2\left|a-4\frac{5a+5c}{2}-8c\right|\\ \Leftrightarrow&\sqrt{2}\sqrt{29a^2+50ac+29c^2}=4|a+2c|\\ \Leftrightarrow&7a^2+6ac-c^2=0.\end{aligned}$$

Nếu $c=0\Rightarrow a=0\Rightarrow b=0$ (loại do $a^2+b^2+c^2\neq 0$).

Nếu $c\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho c^2, ta được: $7\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+6\dfrac{a}{c}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{c}=-1\\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{7}\end{array}\right.$.

Với $\dfrac{a}{c}=-1$, chọn $a=1,c=-1\Rightarrow b=0\Rightarrow\vec{n}_\alpha=(1;0;-1)$.

(α) qua $O(0;0;0)\Rightarrow(\alpha):x-z=0$.

Với $\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{7}$, chọn $a=1,c=7\Rightarrow b=20\Rightarrow\vec{n}_\alpha=(1;20;7)$.

(α) qua $O(0;0;0)\Rightarrow(\alpha):x+20y+7z=0$. □

Ví dụ 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3;0;0),C(0;0;1)$ và cắt trục Oy tại điểm B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

$B\in Oy\Rightarrow B(0;b;0)$.

Nếu $b=0\Rightarrow B\equiv O\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{3}{2}$ (trái với giả thiết). Vậy $b\neq 0$.

Suy ra $(\alpha):\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{1}=1$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;b;0),\overrightarrow{AC}=(-3;0;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(b;3;3b)$.

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{10b^2+9}$.

Do đó $S_{\Delta ABC}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\sqrt{10b^2+9}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow b=\pm 2$.

Vậy $(\alpha):\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$ hoặc $(\alpha):\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;4)$ và song song với mặt phẳng $(P): 3x-y+2z=0$.

Lời giải.

$(\alpha) \parallel (P) \Rightarrow \vec{n}_P = (3;-1;2)$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).
(α) đi qua $M(2;-1;4)$.
Suy ra $(\alpha): 3(x-2)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-y+2z-15=0$. □

Bài 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;1;-1), B(5;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): -x+z+10=0$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n}_\beta = (-1;0;1)$ và $\overrightarrow{AB} = (4;1;2)$.
$\vec{n}_\alpha = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_\beta\right] = (1;-6;1)$.
(α) đi qua $A(1;1;-1)$ và nhận $\vec{n}_\alpha = (1;-6;1)$ là véc-tơ pháp tuyến. Suy ra phương trình của (α): $1(x-1)-6(y-1)+1(z+1)=0 \Leftrightarrow x-6y+z+6=0$. □

Bài 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến d của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-1=0$, $(\beta): 4x-3y+z-3=0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): x-2y+2z+1=0$ một góc φ mà $\cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải.

Ta có $A(0;-1;0), B(1;1;2) \in d$.
$\overrightarrow{AB} = (1;2;2)$, (Q) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1;-2;2)$.
Giả sử $\vec{n}_P = (a;b;c), a^2+b^2+c^2 \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).
Do (P) qua A, B nên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow a+2b+2c=0$ (*).
(P) tạo với (Q) một góc $\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{9} = \dfrac{|a-2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 3|a-2b+2c|$ (**).
Từ (*) và (**), ta có $2\sqrt{2}\sqrt{(-2b-2c)^2+b^2+c^2} = 3|-2b-2c-2b+2c|$
$\Leftrightarrow 8(5b^2+8bc+5c^2) = 9(16b^2) \Leftrightarrow 13b^2-8bc-5c^2=0$.
Nếu $c=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=0$ (loại).
Nếu $c \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho c^2, ta được $13\left(\dfrac{b}{c}\right)^2 - 8\dfrac{b}{c} - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{b}{c}=1 \\ \dfrac{b}{c}=-\dfrac{5}{13} \end{array}\right.$.
Với $\dfrac{b}{c}=1$, chọn $b=c=1 \Rightarrow a=-4 \Rightarrow \vec{n}_P = (-4;1;1)$.
Suy ra $(P): -4(x-0)+1(y+1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -4x+y-4z+1=0$.
Với $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{5}{13}$, chọn $b=5, c=-13 \Rightarrow a=16 \Rightarrow \vec{n}_P = (16;5;-13)$.
Suy ra $(P): 16(x-0)+5(y+1)-13(z-0)=0 \Leftrightarrow 16x+5y-13z+5=0$. □

Bài 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;-1;3), N(3;1;5)$ và mặt phẳng $(Q): x+2y-z+3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

Lời giải.

(Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;2;-1)$, $\overrightarrow{MN}=(4;2;2)=2(2;1;1)$.

Gọi $\vec{n}_P=(a;b;c), a^2+b^2+c^2\neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) và φ là góc giữa (P) và (Q).

Do (P) qua M, N nên ta có $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}_P=0\Leftrightarrow 2a+b+c=0$ (*).

(P) tạo với (Q) một góc $\varphi\Leftrightarrow\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_Q)|\Leftrightarrow\cos\varphi=\dfrac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi=|a+2b-c|$ (**).

Từ (*) và (***) suy ra $\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+(-2a-b)^2}\cos\varphi=|a+2b-(-2a-b)|$

$\Leftrightarrow\sqrt{6}\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}\cos\varphi=|3a+3b|\Leftrightarrow 6\cos^2\varphi(5a^2+4ab+2b^2)=9a^2+18ab+9b^2=0$

Đặt $m=\cos^2\varphi$, ta có:

$2m(5a^2+4ab+2b^2)=3a^2+6ab+3b^2\Leftrightarrow(10m-3)a^2+(8m-6)ab+(4m-3)b^2=0$.

Với $b=0\Rightarrow(10m-3)a^2=0\Rightarrow m=\dfrac{3}{10}$ (vì nếu $a=0\Rightarrow c=0$ trái điều kiện) $\Rightarrow\cos^2\varphi=\dfrac{3}{10}$.

Với $b\neq 0$ và $m\neq\dfrac{3}{10}$, chia cả hai vế của phương trình cho b^2, ta được:

$(10m-3)\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2(4m-3)\dfrac{a}{b}+4m-3=0$ (***). Khi đó tồn tại (P) thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi (***) có nghiệm $\dfrac{a}{b}\Leftrightarrow\Delta'=(4m-3)^2-(10m-3)(4m-3)\geq 0\Leftrightarrow(4m-3)(-6m)\geq 0$

$\Leftrightarrow m(4m-3)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq\dfrac{3}{4}$.

Suy ra $0\leq\cos^2\varphi\leq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 0\leq\cos\varphi\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (do $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$) $\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất là $\dfrac{\pi}{6}$ khi và chỉ khi $m=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=0$.

Chọn $a=0, b=1\Rightarrow c=-1\Rightarrow\vec{n}_P=(0;1;-1)$.

Vậy $(P): 0(x+1)+1(y+1)-1(z-3)=0\Leftrightarrow y-z+4=0$. □

Bài 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) biết nó đi qua điểm $G(-1;2;-3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Do A, B, C lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

Khi đó mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (*).

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\\z_A+z_B+z_C=3z_G\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+0+0=3\cdot(-1)\\0+b+0=3\cdot 2\\0+0+c=3\cdot(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=6\\c=-9\end{cases}.$$

Vậy phương trình $(P): \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{-9}=1$.

□

DẠNG 16. Các dạng khác về viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp giải.

① Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Giả sử mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

- ☑ (P) cắt tia $Ox \Rightarrow a>0$, (P) cắt tia đối của tia $Ox \Rightarrow a<0$.
- ☑ $OA=|a|; Ob=|b|; OC=|c|$.
- ☑ $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}|a|\cdot|b|=\dfrac{1}{2}|ab|$.
- ☑ $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA.OB.OC=\dfrac{1}{6}|abc|$.

② Một số bất đẳng thức cơ bản

- ☑ Bất đẳng thức Cauchy.

  Cho 2 số thực không âm x, y. Khi đó $x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.

  Cho 3 số thực không âm x, y, z. Khi đó $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$.
- ☑ Bất đẳng thức B-C-S (Bunyakovski)

  Cho các số thực x, y, z, a, b, c. Khi đó

$$(ax+by+cz)^2\leq \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

  Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

Ví dụ 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1); N(-1;0;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác gốc tọa độ O sao cho $AM=\sqrt{3}BN$.

Lời giải.

Giả sử (P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

Vì (P) đi qua M, N nên $\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1\\ -\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}=1\end{cases}\Rightarrow \dfrac{2}{b}=2\Leftrightarrow b=1.$

Mặt khác $AM=\sqrt{3}BN\Leftrightarrow AM^2=3BN^2\Leftrightarrow (a-1)^2+4+1=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=3\\ a=-1.\end{array}\right.$

Với $a=3\Rightarrow c=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow (P): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-\frac{3}{4}}=1\Rightarrow (P): x+3y-4z-3=0.$

Với $a=-1\Rightarrow \dfrac{1}{c}=0$ (vô nghiệm).

□

Ví dụ 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(0;3;0)$, $M(4;0;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa B, M và cắt các tia Ox, Oz lần lượt tại A, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 3.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0) \in Ox$, $C(0;0;c) \in Oz$. Vì (P) cắt các tia Ox, Oz nên $a, c > 0$.

Vì $B(0;3;0) \in Oy$ nên phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(P): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì $M(4;0;-3) \in (P)$ nên $\dfrac{4}{a} - \dfrac{3}{c} = 1 \Leftrightarrow 4c - 3a = ac$ (1).

Thể tích tứ diện $OABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle OAC} \cdot OB = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} ac \cdot 3 = \dfrac{ac}{2}$.

Theo giả thiết $V = 3 \Leftrightarrow ac = 6$ (2).

Từ (1) và (2) sauy ra $\begin{cases} ac = 6 \\ 4c - 3a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 3. \end{cases}$

Vậy $(P): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3} = 1 \Rightarrow (P): 3x + 2y + 2z - 6 = 0$. □

Ví dụ 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;4;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $4OA = 2OB = OC$.

Lời giải.

Giả sử (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Vì $4OA = 2OB = OC$ nên $4a = 2b = c \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ b = 2a. \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{2a} + \dfrac{z}{4a} = 1$.

Vì $M(2;4;1) \in (P)$ nên $\dfrac{2}{a} + \dfrac{4}{2a} + \dfrac{1}{4a} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{17}{4}$

$\Rightarrow (P): 4x + 2y + z - 17 = 0$.

□

Ví dụ 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì $M(1;2;3) \in (P) \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} = 1$.

Ta có: $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức B-C-S, ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{14}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1 \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{3c} \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=7 \\ c=\dfrac{14}{3}. \end{cases}$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x+2y+3z-14=0$.

□

Ví dụ 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Suy ra $OA=a, OB=b, OC=c$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $M(1;4;9)\in(P) \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left[\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]$$

$\Rightarrow a+b+c\geq(1+2+3)^2 \Rightarrow OA+OB+OC\geq 36$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1 \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c} \\ a+b+c=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=18. \end{cases}$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 6x+3y+2z-36=0$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P).

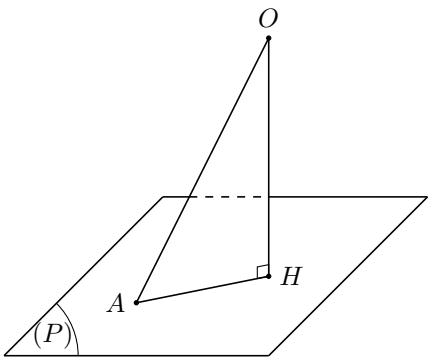
Ta có: $OH\leq OA$.

Để $d(O;(P))$ lớn nhất thì $OH=OA \Leftrightarrow H\equiv A \Leftrightarrow OA\perp(P)$.

Suy ra $\overline{OA}$ là một vec-tơ pháp tuyến của (P).

Ta có: (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và nhận $\overline{OA}=(1;1;1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Phương trình tổng quát của (P) là $x+y+x-3=0$.



□

Bài 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;-3)$, $B(-2;1;1)$, $C(2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+1=0$. Gọi D là điểm thuộc (α) và có tung độ dương sao cho có vô số mặt phẳng (P) đi qua C, D thỏa mãn khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P). Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

Gọi $D(x;y;z)$.

Theo giả thiết $d(A;(P))=3d(B;(P)) \Rightarrow AB$ không song song với (P).

Nếu $AB \not\subset (P) \Rightarrow AB \cap (P)=I \Rightarrow \dfrac{IA}{IB}=\dfrac{d(A;(P))}{d(B;(P))}=3 \Rightarrow IA=3IB$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{BI} \Rightarrow I(-4;-1;3)\\ \overrightarrow{AI}=-3\overrightarrow{BI} \Rightarrow I(-1;2;0).\end{array}\right.$

$\Rightarrow (P)$ đi qua một trong hai điểm cố định $I(-4;-1;3)$ hoặc $I(-1;2;0)$.

Nếu $AB \subset (P)$ thì (P) đi qua hai điểm cố định trên.

Vậy để có $d(A;(P))=3d(B;(P))$ thì (P) đi qua $I(-4;-1;3)$ hay $I(-1;2;0)$.

Theo giả thiết thì có vô số mặt phẳng (P) đi qua C, D thỏa mãn $d(A;(P))=3d(B;(P))$.

$\Rightarrow I, C, D$ thẳng hàng$\Rightarrow \overrightarrow{ID}=t\overrightarrow{IC}$.

Với $I(-4;-1;3) \Rightarrow \begin{cases}x+4=6t\\ y+1=t\\ z-3=-2t\end{cases} \Rightarrow D(-4+6t;-1+t;3-2t)$

Ta có: $D \in (\alpha) \Rightarrow 3(-4+6t)+4(-1+t)+5(3-2t)+1=0 \Leftrightarrow 12t=0 \Leftrightarrow t=0$

$\Rightarrow D(-4;-1;3)$ (loại vì D có tung độ âm).

Với $I(-1;2;0) \Rightarrow \begin{cases}x+1=3t\\ y-2=-2t\\ z=t\end{cases} \Rightarrow D(-1+3t;2-2t;t)$

Ta có: $D \in (\alpha) \Rightarrow 3(-1+3t)+4(2-2t)+5t+1=0 \Leftrightarrow 6t=-6 \Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow D(-4;4;-1)$ (thỏa mãn vì D có tung độ dương).

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(4;-1;0)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;3;-2)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]=(2;8;10) \Rightarrow \vec{n}=(1;4;5)$ là vec-tơ pháp tuyến của (BCD)

$\Rightarrow (BCD): x+4y+5z-7=0$. □

Bài 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính r. Tìm r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

Lời giải.

Gọi $I(a;0;0)$, $R>0$ là tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Ta có: $d(I;(P))=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{6}}$ và $d(I;(Q))=\dfrac{|2a-1|}{\sqrt{6}}$.

Theo giả thiết $\begin{cases} d^2(I;(P))+2^2=R^2 \\ d^2(I;(Q))+r^2=R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a+1)^2}{6}+4=R^2 \\ \dfrac{(2a-1)^2}{6}+r^2=R^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{(2a-1)^2-(a+1)^2}{6}+r^2-4=0 \Leftrightarrow a^2-2a+2r^2-8=0$ (1).

Ta có: (1) là phương trình bậc hai ẩn a, r là tham số.

Để có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu thì có đúng một điểm $I(a;0;0)$ hay phương trình (1) có nghiệm duy nhất $a \Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 1-(2r^2-8)=0 \Leftrightarrow r^2=\dfrac{9}{2} =\Leftrightarrow r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+18=0$, M là điểm di động trên mặt phẳng (P), N là điểm thuộc tia OM sao cho $OM.ON=24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P).

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $(P) \Rightarrow H(-2;-4;-4)$ và $OH=6$.

Gọi I là điểm thuộc tia OH sao cho $OH.OI=24 \Rightarrow OI=4$ và $I\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$.

Ta có: $OM.ON=OH.OI \Rightarrow \dfrac{OM}{OI}=\dfrac{OH}{ON}$ và $\widehat{MOH}=\widehat{ION}$ nên $\triangle MOH \sim \triangle ION$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{MHO}=\widehat{INO}$ mà $OH \perp (P) \Rightarrow OH \perp MH \Rightarrow \widehat{MOH}=90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{INO}=90^\circ \Rightarrow N$ thuộc mặt cầu (S) đường kính OI cố định với tâm $K\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ là trung điểm của OI và bán kính $R=\dfrac{OI}{2}$.

Ta có: $d(K;(P))=4 \Rightarrow$ mặt cầu (S) không giao với mặt phẳng (P).

Suy ra $\min d(N;(P))=d(K;(P))-R=2$. □

Bài 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m): (x+m)^2+(y-2m)^2+z^2-5m^2+4m-1=0$. Biết khi m thay đổi thì (S_m) luôn giao với mặt phẳng (P) có định với giao tuyến là một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn (C).

Lời giải.

Ta có: $(S_m): x^2+y^2+z^2-1+2m(z-2y+2)=0$.

Suy ra với mọi giá trị m thì mặt cầu (S_m) luôn cắt mặt phẳng $(P): x-2y+2=0$.

$\Rightarrow (S_m)\cap(P) \Leftrightarrow \begin{cases} (S): x^2+y^2+z^2=1 \\ (P): x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow (S)\cap(P)=(C)$.

Ta có: $R=1$ là bán kính và $O(0;0;0)$ là tâm của mặt cầu $(S) \Rightarrow d(O;(P))=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ bán kính đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-d^2(O;(P))}=\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. □

DẠNG 17. Ví trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp giải. Cho hai mặt phẳng (P_1) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và (P_2) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Khi đó ta có ba trường hợp

1. $(P_1)\equiv(P_2)\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
2. $(P_1)\parallel(P_2)\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
3. (P_1) cắt $(P_2)\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$.

Lưu ý: $A_1.A_2+B_1.B_2+C_1.C_2=0\Leftrightarrow(P_1)\perp(P_2)$.

Ví dụ 45. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) $x+y+z-1=0$ và (Q) $2x-1=0$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(2;0;0)$.

Ta thấy $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{0}{1}\Rightarrow(P)$ cắt (Q).

Cách 2:

Ta thấy (P) luôn cắt các mặt phẳng toạ độ, mặt khác mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (Oyz).

Vậy (P) và (Q) cắt nhau. □

Ví dụ 46. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) $2x-3y+5z-1=0$ và (Q) $x-y-z+2=0$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(2;-3;5)$, $\vec{n}_{(Q)}=(1;-1;-1)$.

Ta thấy $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-3}{-1}\neq\dfrac{5}{-1}\Rightarrow(P)$ cắt (Q).

Cách 2:

Ta thấy $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}=0\Rightarrow(P)\perp(Q)\Rightarrow(P)$ cắt (Q). □

Ví dụ 47. Cho (P) $(m+1)x+(n+3)y+2z-1=0$ và (Q) $x+2y+z+3=0$. Tìm $m,n\in\mathbb{R}$ để (P) song song với (Q).

Lời giải.

Ta có $(P)\parallel(Q)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{1}=\dfrac{n+3}{2}=\dfrac{2}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ n=1.\end{cases}$ □

Ví dụ 48. Cho (P) $(m+2n)x+(2n^2+3)y+z-8=0$ và (Q) $x-my+(n^2-5m+15)z-3=0$. Chứng tỏ (P) và (Q) cắt nhau.

Lời giải.

Xét $m=0$

Khi đó ta có $\begin{cases}(P)\ 2nx+(2n^2+3)y+z-8 &=0\\ (Q)\ x+(n^2+15)z-3 &=0\end{cases} \Rightarrow \dfrac{n^2+5}{1}\neq\dfrac{0}{2n^2+3}\Rightarrow (P)$ cắt (Q).

Xét $m\neq 0$

Ta thấy $\dfrac{m+2n}{1}=\dfrac{2n^2+3}{-m}\Leftrightarrow m^2+2nm+2n^2+3=0\Leftrightarrow (m+n)^2+n^2+3=0$ (vô lý).

Vậy (P) luôn cắt (Q). □

Ví dụ 49. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng (Q) $x+2y-3z+3=0$.

Lời giải.

Vì $(P)\parallel(Q)$ nên ta có (P) $x+2y-3z+m=0,\ m\neq 3$.

Ta có $A(1;2;3)\in(P)\Rightarrow m=-3\neq 3$.

Vậy (P) $x+2y-3z-3=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 57. Cho (P) $x+2y-2z-3=0$ và (Q) $(m+1)x-(m-5)y-4mz+1+m=0$. Tìm m để (P) song song với (Q).

Lời giải.

Đáp số: $m=1$. □

Bài 58. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(1;2;3)$ song song với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải.

Đáp số: (P) $z-3=0$. □

DẠNG 18. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Phương pháp giải. Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Ta có ba trường hợp

1. $d(I,(P))=R\Leftrightarrow(P)$ tiếp xúc (S).
2. $d(I,(P))<R\Leftrightarrow(P)$ cắt (S) theo đường tròn $(\mathscr{C})$.
3. $d(I,(P))>R\Leftrightarrow(P)$ không cắt (S).

Ví dụ 50. Cho mặt cầu (S) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và mặt phẳng (P) $x+2y+2z+1=0$. Xác định vị trí tương đối của (S) và (P).

Lời giải.

Ta thấy mặt cầu (S) có $\begin{cases}\text{tâm } I(1;2;3)\\ \text{bán kính } R=4.\end{cases}$

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|1.1+2.2+2.3+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). □

Ví dụ 51. Cho (P) $3x+4y+4=0$ và $A(1;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A cắt mặt phẳng (P) theo đường tròn giao tuyến (C) có chu vi bằng 8π.

Lời giải.

Ta có chu vi đường tròn (C) bằng $8\pi \Rightarrow$ bán kính đường tròn (C) bằng 4.

Ta có $d(A,(P))=\dfrac{|3.1+4.2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$.

Ta có bán kính mặt cầu $R=\sqrt{r^2_{(C)}+[d(A,(P))]^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Vậy (S) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2$. □

Ví dụ 52. Cho mặt phẳng (P) $x+y+2z+3=0$ và (Q) $2x-y-z+3=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời giao tuyến của (S) với các mặt phẳng (P), (Q) là các đường tròn có bán kính lần lượt là $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$, r. Xác định r sao cho có đúng một mặt cầu thoả mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải.

Gọi $I(m;0;0)\in Ox$ là tâm mặt cầu (S).

Ta có $\begin{cases} d(I,(P))=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{6}} \\ d(I,(Q))=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(m+3)^2}{6}+\dfrac{23}{2}=\dfrac{(2m+3)^2}{6}+r^2 \Leftrightarrow m^2+6m+2r^2-23=0.\ (*)$

Vì có đúng một mặt cầu thoả mãn bài toán nên $(*)$ phải có nghiệm duy nhất.

Vậy $r=4$. □

Ví dụ 53. Cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, $a,b,c>0$ thoả mãn $a+2b+3c=4$. Xác định phương trình mặt phẳng chứa đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ độc lập với a,b,c.

Lời giải.

Gọi $I(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2})$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tam diện vuông $OABC$.

Ta có $a+2b+3c=4 \Rightarrow \dfrac{a}{2}+2\cdot\dfrac{b}{2}+3\cdot\dfrac{c}{2}=2 \Rightarrow I\in(\alpha)\ x+2y+3z-2=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm (α) $x+2y+3z-2=0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 59. Cho phương trình mặt cầu (S) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ và hai điểm $A(0;-1;0)$, $B(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A,B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất.

Lời giải.

Hướng dẫn: $(P)\equiv(IAB)$ với I là tâm mặt cầu (S).

Đáp số: (P) $x-2y-3z-2=0$. □

Bài 60. Cho phương trình mặt cầu $(S)(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$. Viết phương trình tiếp diện với mặt cầu (S) tại $M(3;0;-1)$.

Lời giải.

Đáp số: (Oxz). □

Bài 61. Cho phương trình mặt phẳng (P) $x+2y-2z+6=0$ và mặt cầu (S) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=1$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

Đáp số: (Q) $x+2y-2z=0$. □

Bài 62. Viết phương trình mặt cầu (S) qua $A(3;-3;4)$ tiếp xúc đồng thời với các mặt phẳng (α) $x-2=0, (\beta)$ $y+2=0$ và (γ) $z-2=0$.

Lời giải.

Hướng dẫn: Tâm I của mặt cầu và điểm A thuộc cùng $\dfrac{1}{8}$ vùng không gian chia bởi các mặt $(\alpha), (\beta)$ và (γ).

Đáp số: $\hoac{(S)\ (x-3)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=1\\(S)\ (x-3)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3.}$ □

DẠNG 19. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Tìm hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng. Tìm điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

Phương pháp giải.

- Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ là
$$d(M,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Chọn một điểm trên mặt phẳng (cho $y=z=0$). Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng kia.

Ví dụ 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$ và điểm $M(1;2;3)$. Tính khoảng cách từ M đến (P).

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là
$$d(M,(P))=\frac{|1-2\cdot 2+2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3}{3}=1.$$
□

Ví dụ 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{x}{3}=1 \Rightarrow 3x-6y+2z-6=0$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là $d(O,(ABC))=\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}}=\frac{6}{7}$. □

Ví dụ 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): x+2y-2z+7=0$ và $(Q): x+2y-2z-4=0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

Lời giải.

Lấy điểm $M(0;0;-2) \in (Q)$.
$d((P),(Q))=d(M,(P))=\frac{|0+2\cdot 0-2\cdot(-2)+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{11}{3}$

□

Ví dụ 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm điểm thuộc trục Ox sao cho khoảng cách đến mặt phẳng $(\alpha): x-y+z+1=0$ bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(a;0;0) \in Ox$.
$d(M,(\alpha))=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|a+1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \Rightarrow |a+1|=3 \Leftrightarrow a=2$ hoặc $a=-4$. Vậy $M(2;0;0)$ hoặc $M(-4;0;0)$.

□

Ví dụ 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm điểm thuộc trục Oy cách đều điểm $A(1;1;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-5=0$.

Lời giải.

Gọi $M(0;b;0) \in Oy$.
$AM=d(M,(\alpha)) \Leftrightarrow \sqrt{2+(1-b)^2}=\frac{|b-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow b^2+b-8=0 \Leftrightarrow b=2, b=-4$.
Vậy $M(0;2;0)$ hoặc $M(0;-4;0)$.

□

Ví dụ 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Biết $b,c>0$, phương trình mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$. Tìm tọa độ các điểm B và C.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(0;1;-1)$.
Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $x+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $\begin{cases}(ABC)\perp(P)\\ d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\cdot 0+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3}.\end{cases}$ Giải hệ ta được $b=c=\frac{1}{2}$.

Vậy $B\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách từ A đến (P)

Lời giải.

Đáp số: $d(A,(P))=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. □

Bài 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z+5=0$ và điểm $B(-1;2;-3)$. Tính khoảng cách từ B đến (α)

Lời giải.

Đáp số: $d(B,(\alpha))=\dfrac{14}{3}$.

□

Bài 65. [ĐH-2013NC-Khối D] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y-2z+5=0$ và điểm $C(-1;3;-2)$. Tính khoảng cách từ C đến (P). Viết phương trình mặt phẳng đi qua C và song song với (P).

Lời giải.

Đáp số: $d(C,(P))=\dfrac{2}{3}$, $(Q): x-2y-2z+3=0$. □

Bài 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z-7=0$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+3=0$. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=4$. $d(I,(P))=1$.

□

DẠNG 20. Tìm tọa độ hình chiếu của điểm trên mặt phẳng. Điểm đối xứng qua mặt phẳng

Phương pháp giải.

- Để tìm hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (P):
  Gọi $H(x;y;z)$. Tính véc-tơ $\overrightarrow{AH}$. Sử dụng điều kiện $\overrightarrow{AH}=k\cdot\vec{n}_{(P)}$ và $H\in(P)$.
- Để tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua (P):
  Sử dụng điều kiện H là trung điểm AB.

Ví dụ 60. Cho $A(1;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+4=0$.

① Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (P).

② Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P).

Lời giải.

① Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(2;-2;1)$. Gọi $H(x;y;z)$, vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}=k\cdot\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1&=2k\\ y+1&=-2k\\ z-1&=k\\ 2x-2y+z+5&=0\end{cases}$$

$\Rightarrow 2(1+2k)-2(-1-2k)+k+1+4=0\Rightarrow k=-1\Rightarrow H(-1;1;0)$.

② Gọi $A'(x_{A'};y_{A'};z_{A'})$. Có H là trung điểm của AA' suy ra

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=-2-1=-3\\ y_{A'}=2y_H-y_A=2+1=3\\ z_{A'}=2z_H-z_A=0-1=-1\end{cases}$$. Vậy $A'(-3;3;-1)$.

□

Ví dụ 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;1)$, $B(0;1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

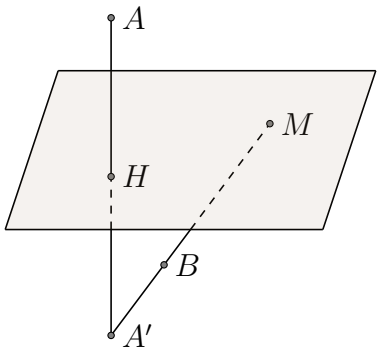
Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z=0$.

Do $z_A>0$, $z_B<0\Rightarrow A,B$ nằm về hai phía mặt phẳng (Oxy).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (Oxy). Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (Oxy), ta có

$|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B$. Dấu " $=$ " xảy ra khi A',B,M thẳng hàng.



Có $H(1;-1;0)$, $A'(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{A'B}=(-1;-2;-1)$.

Gọi $M(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{BM}=(x;y-1;z+2$. Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{BM}=t\cdot\overrightarrow{A'B}\\ M\in(Oxy)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x&=-t\\ y-1&=-2t\\ z+2&=-t\\ z&=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x&=2\\ y&=5\\ z&=0\\ t&=-2\end{cases}\Rightarrow M(2;5;0).$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 67. Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm $M(2;-3;5)$ trên mặt phẳng $(P):2x-y+2z-26=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n}=(2;-1;2)$. Gọi $H(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(x-2;y+3;z-5)$.

Có $\overrightarrow{MH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow\overrightarrow{MH}=t\cdot\vec{n}\Rightarrow H(2+2t;-3-t;5+2t)$. $H\in(P)\Rightarrow t=1\Rightarrow H(4;-4;7)$.

□

Bài 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;1)$ và mặt phẳng $(P):3x+y+2z+11=0$. Tìm tọa độ điểm M' là điểm đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P).

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n} = (3;1;2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (x-1;y+2;z-1)$. Có $\overrightarrow{MH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{MH} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow H(1+3t;-2+t;1+2t)$. $H \in (P) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-2;-3;-1) \Rightarrow M'(-5;-4;-3)$.

□

Bài 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;1;-2)$. Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxz).

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$. Mặt phẳng (Oxz) có vtpt là $\vec{j} = (0;1;0)$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên $(Oxz) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x-4;y-1;z+2)$. Có $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{j}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = t \cdot \vec{j} \Rightarrow H(4;1+t;-2)$. $H \in (Oxz) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(4;0;-2) \Rightarrow A'(4;-1;-2)$.

□

Bài 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;0;-1)$, $B(1;-2;3)$, $C(0;1;2)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-1;-2;4)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;1;3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-10;-5;-5) \Rightarrow (ABC)$ có vtpt là $\vec{n} = (2;1;1)$.
Phương trình mặt phẳng $(ABC) : 2x + y + z - 3 = 0$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của O trên $(ABC) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = (x;y;z)$. Có $\overrightarrow{OH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{OH} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow H(2t;t;t)$. $H \in (ABC) \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow H\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

□

Bài 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;-2)$ và mặt phẳng $(P) : x+y-z-4 = 0$. Tìm tọa độ điểm N là điểm đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P).

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n} = (1;1;-1)$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (x-1;y+2;z+2)$. Có $\overrightarrow{MH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{MH} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow H(1+t;-2+t;-2-t)$. $H \in (P) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(2;-1;-3) \Rightarrow N(3;0;-4)$.

□

Bài 72. [TN-2011-Ban cơ bản] Cho điểm $A(3;1;0)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 1 = 0$. Tính khoảng cách từ A đến (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P). Xác định tọa độ hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).

Lời giải.

Đáp số: $d(A,(P)) = 3$; $(Q) : 2x + 2y - z - 8 = 0$; $H(1;-1;1)$.
Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n} = (2;2;-1)$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x-3;y-1;z)$. Có $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{MH} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow H(3+2t;1+2t;-t)$. $H \in (P) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1;-1;1)$.

□

Bài 73. [CD-2014] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1-1)$, $B(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Viết

phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải.

Đáp số. $H(1;-1;1)$, $(Q): 10x-2y+3z-15=0$

- ☑ Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n}=(1;2;-2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(x-2;y-1;z+1)$. Có $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AH}=t\cdot\vec{n} \Rightarrow H(2+t;1+2t;-1-2t)$. $H\in(P) \Rightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;-1;1)$.
- ☑ $\overrightarrow{AB}=(-1;1;4)$, $\vec{n}=(1;2;-2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB},\vec{n}]=(-10;2;-3) \Rightarrow (Q)$ có vtpt là $\vec{n'}=(10;-2;3) \Rightarrow (Q): 10x-2y+3z-15=0$.

□

Bài 74. [ĐH-2013-Khối D] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-1;-2)$, $B(0;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải.

Đáp số. $H(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$, $(Q): x-2y+z+1=0$

- ☑ Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n}=(1;1;1)$. Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(x+1;y+1;z+2)$. Có $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AH}=t\cdot\vec{n} \Rightarrow H(-1+t;-1+t;-2+t)$. $H\in(P) \Rightarrow t=\frac{5}{3} \Rightarrow H(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$.
- ☑ $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$, $\vec{n}=(1;1;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB},\vec{n}]=(-1;2;-1)$
  $\Rightarrow (Q)$ có vtpt là $\vec{n'}=(1;-2;1) \Rightarrow (Q): x-2y+z+1=0$.

□

Bài 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;-5)$, $B(1;4;5)$, $C(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 7x+5y+z+57=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

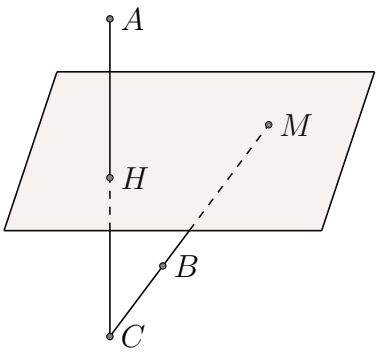
Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;2;1)$.

Ta có $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|3\overrightarrow{MG}|=3MG$. Vậy $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm G trên (P).

Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n}=(7;5;1)$. Gọi $M(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của G trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{GM}=(x-1;y-2;z-1)$. Có $\overrightarrow{GM}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{GM}=t\cdot\vec{n} \Rightarrow M(1+7t;2+5t;1+t)$. $M\in(P) \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(-6;-3;0)$. □

Bài 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;1;0)$, $B(-9;4;9)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



Gọi VT là vế trái của phương trình mặt phẳng (P). Thay lần lượt tọa độ điểm A và B vào VT ta được $VT(A) = 6 > 0$, $VT(B) = -12 < 0$, suy ra A và B nằm về hai phía đối với mặt phẳng (P).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Gọi C là điểm đối xứng của A qua (P), ta có

$|MA - MB| = |MC - MB| \leq CB$. Dấu " $=$ " xảy ra khi B, C, M thẳng hàng.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên $(P) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x-3; y-1; z)$. Có $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow H(2+2t; 1-t; t)$. $H \in (P) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1;2;-1) \Rightarrow C(-1;3;-2) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (8;-1;-11)$. Gọi $M(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = (x+9; y-4; z-9)$.

Có $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow M(-9+8t; 4-t; 9-11t)$.

$M \in (P) \Rightarrow t = \dfrac{5}{11} \Rightarrow M(7;2;-13)$.

□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ có bán kính bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 9.

Lời giải.

Gọi R là bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Khi đó, $R=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|1-2\cdot 2+2\cdot(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{9}}=2.$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt phẳng (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm $A(-3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;-2)$.

A. $4x-3y+6z-12=0$. **B.** $4x+3y-6z+12=0$.

C. $4x-3y+6z+12=0$. **D.** $4x+3y+6z+12=0$.

Lời giải.

Phương trình (α) : $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2}=1\Leftrightarrow 4x-3y+6z=-12\Leftrightarrow 4x-3y+6z+12=0.$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P): x+3y+4z-26=0$. **B.** $(P): x+y+2z-3=0$.

C. $(P): x+y+2z-6=0$. **D.** $(P): x+3y+4z-7=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(1;1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y-1+2(z-1)=0$ hay $(P): x+y+2z-3=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3=0$. Một véc tơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là

A. $(2;1;0)$. **B.** $(2;-1;3)$. **C.** $(2;-1;0)$. **D.** $(2;1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(2;-1;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Ba mặt phẳng $x+2y-z=0$, $2x-y+3a+13=0$, $3x-2y+3z+16=0$ cắt nhau tại điểm A. Tọa độ của A là

A. $A(-1;2;-3)$. **B.** $A(1;-2;3)$. **C.** $A(-1;-2;3)$. **D.** $A(1;2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+2y-z-=0\\2x-y+3z+13=0\\3x-2y+3z+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=-3\end{cases}\Rightarrow A(-1;2;-3).$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P); (Q) có các véc tơ pháp tuyến là $\vec{a}\,(a_1;b_1;c_1)$; $\vec{b}\,(a_2;b_2;c_2)$. Góc α là góc giữa hai mặt phẳng đó $\cos\alpha$ là biểu thức nào sau đây

A. $\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$.

B. $\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

C. $\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right|}$.

D. $\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$.

Lời giải.

Theo công thức góc giữa hai mặt phẳng ta có $\cos\alpha=|\cos(\vec{a},\vec{b})|=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-3=0$. Điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng (α)?

A. $M(2;0;1)$. **B.** $Q(2;1;1)$. **C.** $P(2;-1;1)$. **D.** $N(1;0;1)$.

Lời giải.

Ta thấy tọa độ điểm $N(1;0;1)$ thỏa mãn phương trình mặt phẳng (α) nên điểm N nằm trên (α).

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng (P): $x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).

B. (P) cắt (S) theo giao tuyến đường tròn khác đường tròn lớn.

C. (P) và (S) không có điểm chung.

D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$ và bán kính $R=4$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}_{(I,(P))}=4=R$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Chọn đáp án A □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa trục Ox là

A. $x+y=0$. **B.** $x+z=0$. **C.** $y-z=0$. **D.** $y+z=0$.

Lời giải.

Mp(P) có vtpt $\vec{n}=(0;1;1)$ và đi qua điểm $A(1;1;-1)$. Suy ra phương trình $(P): y+z=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P): $x+y-2z+4=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(1;1;-2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;4)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;2)$.

Lời giải.

Phương pháp: Mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ là 1 vec-tơ pháp tuyến.

Cách giải: Một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;1;-2)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-9=0, (Q)\colon x-y-6=0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

Phương pháp: $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ lần lượt là 2 véc-tơ pháp tuyến của $(P), (Q)$, khi đó $\cos((P);(Q)) = \dfrac{|\vec{n_1}, \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$.

Cách giải: $(P)\colon 2x-y-2z-9=0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(2;-1;-2)$.

$(Q)\colon x-y-6=0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(1;-1;0)$.

$$\cos((P);(Q)) = \frac{|\vec{n_1}, \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} = \frac{|2\cdot 1+(-1)(-1)+0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((P);(Q)) = 45°.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}(1;1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+4z-12=0$. **B.** $3x-y+4z+12=0$.

C. $x-y+2z-12=0$. **D.** $x-y+2z+12=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a}(1;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $M(3;-1;4)$ nên có phương trình là

$$1(x-3)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-12=0.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 13. Trong không gian$Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$, đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}(1;-1;2)$ có phương trình là

A. $x-y+2z+12=0$. **B.** $x-y+2z-12=0$.

C. $3x-y+4z-12=0$. **D.** $3x-y+4z+12=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a}(1;-1;2)$làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm $M(3;-1;4)$nên có phương trình là:

$1(x-3)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-12=0$

Chọn đáp án B ☐

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;4;6)$. Phương trình nào sau đây **không** phải là của đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases} x=-5-2t \\ y=-10-4t \\ z=-15-6t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=4+2t \\ z=6+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=6+4t \\ z=12+6t \end{cases}$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(1;2;3)$ vào các phương trình, dễ thấy M không thỏa mãn phương trình $\begin{cases} x=3+2t \\ y=6+4t \\ z=12+6t \end{cases}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+2017=0$, véc tơ nào trong các véc tơ được cho dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(4;-4;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;4)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;2;1)$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+2017=0$ nên một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-2;1)$.

Mặt khác $\vec{n}=(4;-4;2)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{(P)}}$.

Do đó véc tơ $\vec{n}=(4;-4;2)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn đáp án A □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $2y-3z+1=0$?

A. $\vec{u_1}=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{u_2}=(0;2;-3)$. **C.** $\vec{u_3}=(2;-3;1)$. **D.** $\vec{u_4}=(2;-3;0)$.

Lời giải.

(P): $2y-3z+1=0 \Rightarrow$véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(0;2;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x+y+z=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ là một véc-tơ pháp tuyến nên phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-3y+4z-5=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(2;-3;4)$. **B.** $\vec{n}=(2;3;4)$. **C.** $\vec{n}=(2;4;5)$. **D.** $\vec{n}=(2;-3;-5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $ax+by+cz+d=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;c)$.

Mặt phẳng $(P): 2x-3y+4z-5=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-3;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;1)$ và véctơ $\vec{n}=(1;3;4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}$.

A. $2x-y+z+3=0$. **B.** $2x-y+z-3=0$.

C. $x+3y+4z+3=0$. **D.** $x+3y+4z-3=0$.

Lời giải.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng:

$(x-2)+3(y+1)+4(z-1)=0 \iff x+3y+4z-3=0$

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $2x+z-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3(2;1;0)$. **B.** $\vec{n}_2(0;2;1)$. **C.** $\vec{n}_1(2;1;-1)$. **D.** $\vec{n}_4(2;0;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_4(2;0;1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(-1;1;2)$, $\vec{c}=(x;3x;x+2)$. Nếu 3 véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì x bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(3;-3;3)$.
Ta có

$$\begin{aligned}&\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ đồng phẳng}\\ \Leftrightarrow\ &\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0\\ \Leftrightarrow\ &3\cdot x-3\cdot(3x)+3\cdot(x+2)=0\\ \Leftrightarrow\ &x=2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;3;1)$, $B(0;1;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là

A. $(P)\colon 2x+2y-z=0$. **B.** $(P)\colon 2x+2y-z-9=0$.
C. $(P)\colon 2x+4y+3z-19=0$. **D.** $(P)\colon 2x+4y+3z-10=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-2-2;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Phương trình của mặt phẳng (P) là $-2(x-2)-2(y-3)+(z-1)=0$ hay $2x+2y-z-9=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

A. $2\sqrt{87}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{349}}{2}$. **C.** $\sqrt{349}$. **D.** $\sqrt{87}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.
Suy ra: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{349}$.
Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -2x+y-3z+1=0$. Tìm một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

A. $\vec{n}=(-2;-1;3)$. **B.** $\vec{n}=(-2;1;3)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;-3)$. **D.** $\vec{n}=(4;-2;6)$.

Lời giải.

Theo đề bài (P) có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n'}=(-2;1;-3)$. Trong đó véc-tơ $\vec{n}=(4;-2;6)$ cùng phương với $\vec{n'}$ ($\vec{n}=-2\vec{n'}$). Nên $\vec{n}=(4;-2;6)$ cũng là 1 véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α)?

A. $M(1;-1;1)$. **B.** $Q(3;3;0)$. **C.** $N(2;2;2)$. **D.** $P(1;2;3)$.

Lời giải.

Ta có $1+(-1)+1-6\neq 0 \Rightarrow$ Tọa độ điểm M không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (α) nên điểm M không thuộc mặt phẳng (α).

Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+3=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là véc-tơ nào sau đây?

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(1;2;-3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ là $(A;B;C)$. Do đó ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+3=0$ là $(1;2;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+5=0$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-1;2;-3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $\dfrac{|-2-4-3+5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng (P) : $x+y+z-1=0$.

A. $K(0;0;1)$. **B.** $J(0;1;0)$. **C.** $I(1;0;0)$. **D.** $O(0;0;0)$.

Lời giải.

Dễ thấy điểm $O(0;0;0)$ có tọa độ không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên $O\notin(P)$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9$ và $C(0;9;13)$.

A. $2x+y+z+1=0$. **B.** $x-y+z-4=0$.

C. $7x-2y+z-9=0$. **D.** $2x+y-z-2=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;8;9)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(14;-14;14)=14(1;-1;1)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(1;1;4)$ và nhận $\vec{n}=(1;-1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là:

$$x-1-(y-1)+z-4=0\Leftrightarrow x-y+z-4=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $2x-3y+4z+5=0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}=(-3;4;5)$. **B.** $\vec{n}=(-4;-3;2)$. **C.** $\vec{n}=(2;-3;5)$. **D.** $\vec{n}=(2;-3;4)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{n} = (2; -3; 4)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là

A. $\vec{n} = (1; 0; 0)$. **B.** $\vec{n} = (0; 0; 1)$. **C.** $\vec{n} = (1; 0; 1)$. **D.** $\vec{n} = (0; 1; 0)$.

Lời giải.

Vì $Oy \perp (Oxz)$ nên $\vec{n} = (0; 1; 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz).

Chọn đáp án D □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -3)$ đến mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z - 2 = 0$.

A. 3. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

$d(M; (P)) = \dfrac{|1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) - 2|}{\sqrt{1^1 + 2^2 + (-2)^2}} = 3$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $3x - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n} = (-1; 0; -1)$. **B.** $\vec{n} = (3; -1; 2)$. **C.** $\vec{n} = (3; -1; 0)$. **D.** $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{n} = (3; 0; -1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; 0)$ có phương trình là

A. $y + z = 0$. **B.** $y + z - 1 = 0$. **C.** $x - 1 = 0$. **D.** $2x - 1 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ có pháp véc-tơ $\vec{n} = (2; 0; 0)$ có dạng $2 \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ $A(-2; 1; -6)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{7}{\sqrt{41}}$.

Lời giải.

Ta có (Oxy): $z = 0$. Ta được $d(A, (Oxy)) = \dfrac{|-6|}{1} = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $3x - 4y + 1 = 0$?

A. $\vec{n}_1(3; -4; 1)$. **B.** $\vec{n}_2(3; -4; 0)$. **C.** $\vec{n}_3(3; 4; 0)$. **D.** $\vec{n}_4(-4; 3; 0)$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $M(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ M đến (P).

A. $d=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **B.** $d=\dfrac{5}{29}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $d=\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}=\dfrac{|3\cdot 1-4\cdot 2+2\cdot 3+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ điểm $M(1;-2;4)$ thuộc mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

A. $3x+2y+4=0$. **B.** $x+2y+3=0$. **C.** $x+2y-4=0$. **D.** $3x-2y+3=0$.

Lời giải.

Dễ thấy M thuộc mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x+3y-4z-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_2=(2;3;4)$. **B.** $\vec{n}_3=(-4;2;3)$. **C.** $\vec{n}_4=(2;3;-4)$. **D.** $\vec{n}_1=(2;-3;4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ nhận véc-tơ $\vec{n}=(a,b,c)$ làm véc-tơ pháp tuyến, nên véc-tơ cần tìm là $\vec{n}_4=(2;3;-4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\ :\ x-2y+3=0$. Véc-tơ pháp tuyến của (P) là

A. $\vec{n}=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;0)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\ :\ x-2y+3=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a=b=3$. **B.** $2a-b=2$. **C.** $2a-b=-2$. **D.** $2a-b=4$.

Lời giải.

Điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$ nên ta có

$$\begin{aligned} & 2a-b+1-3=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2a-b=2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính thể tích tứ diện $OABC$, biết A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $2x-3y+4z+24=0$ với trục Ox, Oy, Oz.

A. 192. **B.** 288. **C.** 96. **D.** 78.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $A(-12;0;0)$, $B(0;8;0)$, $C(0;0;-6)$. Suy ra

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 8\cdot 6=96.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;-1;2)$, $N(3;1;-4)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của MN.

A. $x+y+3z+5=0$. **B.** $x+y-3z-5=0$. **C.** $x+y+3z+1=0$. **D.** $x+y-3z+5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của MN nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=(1;1;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(2;0;-1)$ của MN nên nó có phương trình $x+y-3z-5=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P\colon y-2z+1=0$. Véc-tơ nào dưới dây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng P?

A. $\vec{n}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;0)$. **C.** $\vec{n}=(0;1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(0;2;4)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng P là $\vec{n}=(0;1;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-x+2y+3z-4=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-1;3;4)$. **B.** $\vec{n}=(2;3;-4)$. **C.** $\vec{n}=(-1;2;3)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;-4)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon -x+2y+3z-4=0$ là $\vec{n}=(-1;2;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;0;1)$ là

A. $-2x+z+1=0$. **B.** $-2y+z-1=0$. **C.** $-2x+z-1=0$. **D.** $-2x+y-1=0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng cần tìm là $-2(x-1)+0(y-2)+1(z-3)=0\Leftrightarrow -2x+z-1=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-6=0$. Tính bán kính của (S).

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có bán kính của (S) là $R=d(O;(\alpha))=\dfrac{|2\cdot 0+0+2\cdot 0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;0;-1)$, $B(1;1;0)$ và (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}(1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}(1;1;-1)$. **C.** $\vec{n}(1;-1;1)$. **D.** $\vec{n}(1;1;1)$.

Lời giải.

Do (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nên (α) nhận $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Suy ra $\vec{n}(1;-1;-1) = -\overrightarrow{AB}$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (α).

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-2z+1=0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}=(3;1;-2)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;1)$. **C.** $\vec{n}=(-2;1;3)$. **D.** $\vec{n}=(3;-2;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(3;1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+3z-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-2;1;3)$. **B.** $\vec{n}=(1;3;2)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $x-2y+3z+2017=0$ là

A. $\vec{n}=(-1;-2;3)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;3)$. **C.** $\vec{n}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;3)$.

Lời giải.

Từ định nghĩa véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng ta suy ra $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Góc giữa 2 mặt phẳng $(P)\colon 8x-4y-8z-11=0$ và $(Q)\colon \sqrt{2}x-\sqrt{2}y+7=0$ bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải.

- $\cos((P),(Q)) = \dfrac{|8\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}-8\cdot 0|}{\sqrt{8^2+(-4)^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- Suy ra góc giữa (P) và (Q) bằng 45°.

Chọn đáp án C □

Tôi đề nghị sửa lại đề bài sang độ. Không ai để góc hình học dưới đơn vị đo radian cả.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(1;4;3)$. Độ dài của đoạn AB là

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;6;4)$. Khi đó độ dài đoạn AB là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $y-1=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng Oxz là $y = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon z - 2x + 3 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

A. $\vec{u} = (0; 1; -2)$. **B.** $\vec{v} = (1; -2; 3)$. **C.** $\vec{n} = (2; 0; -1)$. **D.** $\vec{w} = (1; -2; 0)$.

Lời giải.

Ta viết lại phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2x - z - 3 = 0$ và thấy (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + y - 3z - 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n} = (2; -1; 3)$. **B.** $\vec{n} = (-2; 1; 3)$. **C.** $\vec{n} = (-4; -2; 6)$. **D.** $\vec{n} = (2; 1; 3)$.

Lời giải.

(α) có một VTPT là $\vec{n}' = (2; -1; 3)$ nên $\vec{n} = -2\vec{n}' = (-4; -2; 6)$ cũng là một VTPT của (α).

Chọn đáp án C □

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 3z + 2 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{w} = (1; 0; -3)$. **B.** $\vec{v} = (2; -6; 4)$. **C.** $\vec{u} = (1; -3; 0)$. **D.** $\vec{n} = (1; -3; 2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon x - 3z + 2 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 0; -3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(-1; 0; -2)$ đến mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z + 9 = 0$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(A, (P)) = \dfrac{|-1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{12}{3} = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 0$. **B.** $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$. **C.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$. **D.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{-1} = 1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm véc-tơ pháp tuyến?

A. $x - 2y + 3z + 1 = 0$. **B.** $2x + 4y + 6z + 1 = 0$.

C. $2x - 4z + 6 = 0$. **D.** $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng $2x+4y+6z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;4;6)=2(1;2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-2=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(1;1;0)$. **B.** $M(1;0;1)$. **C.** $N(0;1;1)$. **D.** $Q(1;1;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $N(0;1;1)$ vào phương trình mặt phẳng $(P) \Rightarrow 2\cdot 0-1+3\cdot 1-2=0$ (đúng). Vậy $N\in(P)$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x+3z-5=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;-1;2)$ đến mặt phẳng (P).

A. $d=\dfrac{4}{5}$. **B.** $d=1$. **C.** $d=\dfrac{7}{5}$. **D.** $d=\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|4+3\cdot 2-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2-1)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-3)$?

A. $2x-3z-5=0$. **B.** $2x-3z+5=0$. **C.** $x+2y-z-6=0$. **D.** $x+2y-z-5=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng qua $M(1;2;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-3)$ là $2(x-1)-3(z+1)=0\Leftrightarrow 2x-3z-5=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{|z|^2}{z}-\dfrac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=3\mathrm{i}$. Trên hệ tọa độ Oxy, khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm biểu diễn số phức z là

A. 3. **B.** 4. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải.

Giả sử $z=a+b\mathrm{i}$ với $a,b\in\mathbb{R}$, do giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\frac{|z|^2}{z}-\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=3\mathrm{i} &\Leftrightarrow \frac{z\cdot\overline{z}}{z}-\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=3\mathrm{i}\Leftrightarrow \overline{z}-\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=3\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow (a-b\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})-(a+b\mathrm{i}-\mathrm{i})=3\mathrm{i}\cdot(1-\mathrm{i})\\ &\Leftrightarrow -b+(1-a-b)\,\mathrm{i}=3+3\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-b=3\\ 1-a-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=-3\end{cases}.\end{aligned}$$

Suy ra $z=4-3\mathrm{i}$ nên điểm biểu diễn số phức là $M\,(4;-3)$. Khi đó $OM=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon y-2z+4=0$. véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n_2} = (1;-2;0)$. **B.** $\vec{n_1} = (0;1;-2)$. **C.** $\vec{n_3} = (1;0;-2)$. **D.** $\vec{n_4} = (1;-2;4)$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng được viết lại dạng $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot x + 4 = 0$, từ đó một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n_1} = (0;1;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1$. **B.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. **C.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$. **D.** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải.

Áp dụng công thức phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được $(ABC)\colon \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2z + 3 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n} = (1;-2;0)$. **B.** $\vec{n} = (1;0;-2)$. **C.** $\vec{n} = (3;-2;1)$. **D.** $\vec{n} = (1;-2;3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-2;3)$?

A. $x - 2y - 3z + 6 = 0$. **B.** $x - 2y + 3z - 12 = 0$.

C. $x - 2y - 3z - 6 = 0$. **D.** $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-2;3)$ có phương trình

$$1 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P : 3x - 4y + 5z - 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng P?

A. $\vec{n} = (3;-5;-2)$. **B.** $\vec{n} = (-4;5;-2)$. **C.** $\vec{n} = (3;-4;5)$. **D.** $\vec{n} = (3;-4;2)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng P là $\vec{n} = (3;-4;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;4;-2)$ và $\vec{n} = (-2;3;-4)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến là

A. $-3x + 4y - 2z + 26 = 0$. **B.** $-2x + 3y - 4z + 29 = 0$.

C. $2x - 3y + 4z + 29 = 0$. **D.** $2x - 3y + 4z + 26 = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-3;4;-2)$ và nhận $\vec{n} = (-2;3;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$-2(x+3) + 3(y-4) - 4(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z + 26 = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+3y-5z+5=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-2;-3;5)$. **B.** $\vec{n}=(-2;3;5)$. **C.** $\vec{n}=(2;-3;5)$. **D.** $\vec{n}=(2;3;5)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):-2x+3y-5z+5=0$ là véc-tơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với véc-tơ có tọa độ $(-2;3;-5)$.

Kiểm tra 4 phương án, ta thấy $\vec{n}=(2;-3;5)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;2)$, $B(2;-1;5)$ và $C(3;2;-1)$. Gọi $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ là tích có hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{n}$.

A. $\vec{n}=(15;9;7)$. **B.** $\vec{n}=(9;3;-9)$. **C.** $\vec{n}=(3;-9;9)$. **D.** $\vec{n}=(9;7;15)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-4;3)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;-1;-3)$. Suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(15;9;7)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+3y+4z-5=0$ và điểm $A(1;-3;1)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (P).

A. $d=\dfrac{8}{9}$. **B.** $d=\dfrac{8}{29}$. **C.** $d=\dfrac{8}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\dfrac{3}{\sqrt{29}}$.

Lời giải.

Khoảng cách $d=\mathrm{d}\left(A,(P)\right)=\dfrac{|2\cdot 1+3\cdot(-3)+4\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{29}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(4;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;6)$. Phương trình của (α) là

A. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{6}=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$.

C. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{6}=1$. **D.** $3x-6y+2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có phương trình theo đoạn chắn của (α) là $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{6}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oxz) là

A. $x=0$. **B.** $x+z=0$. **C.** $z=0$. **D.** $y=0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là $y=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1$. **B.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=0$. **C.** $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{3}=1$. **D.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$ (phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn).

Chọn đáp án D □

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$ và có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;2;-6)$?

A. $(P)\colon 2x+y-3z-5=0$. **B.** $(P)\colon 2x+y-3z+2=0$.

C. $(P)\colon 2x+y-3z+5=0$. **D.** $(P)\colon 4x+2y-6z+5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$ và có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;2;-6)$ thì phương trình có dạng: $4(x-1)+2(y+1)-6(z-2)=0\Leftrightarrow 4x+2y-6z+10=0\Leftrightarrow 2x+y-3z+5=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0), N(0;1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=-1$. **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 16x-12y-15z-4=0$. Tính khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (P).

A. $\mathrm{d}=\dfrac{11}{25}$. **B.** $\mathrm{d}=55$. **C.** $\mathrm{d}=\dfrac{22}{5}$. **D.** $\mathrm{d}=\dfrac{13}{25}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức khoảng cách ta được

$$\mathrm{d}=\frac{|16\cdot 2-12\cdot 0-15\cdot 1-4|}{\sqrt{16^2+(-12)^2+(-15)^2}}=\frac{13}{25}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và nhận $\vec{n}=(1;-2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

A. $x-2y-3z+6=0$. **B.** $x-2y-3z-6=0$.

C. $x-2y+3z-12=0$. **D.** $x-2y+3z+12=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và nhận $\vec{n}=(1;-2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$1(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0\Leftrightarrow x-2y+3z+12=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+3=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(1;1-2)$. **B.** $\vec{n}=(0;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;1)$. **D.** $\vec{n}=(-2;1;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P): x+y-2z+3=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;1;-2)$.
Chọn đáp án A □

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây **thuộc** mặt phẳng $x-3y+2z+1=0$?

A. $N(0;1;1)$. **B.** $Q(2;0;-1)$. **C.** $M(3;1;0)$. **D.** $P(1;1;1)$.

Lời giải.

Ta có $0-3\cdot 1+2\cdot 1+1=0$. Vậy $N(0;1;1)$ thuộc mặt phẳng $x-3y+2z+1=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$,$C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC)?

A. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1$. **B.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$. **C.** $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{3}=1$. **D.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $3x+2y-z+1=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $N(0;0;-1)$. **B.** $M(-10;15;-1)$. **C.** $E(1;0;-4)$. **D.** $F(-1;-2;-6)$.

Lời giải.

Ta có $3\cdot x_F+2\cdot y_F-z_F+1=3\cdot(-1)+2\cdot(-2)-(-6)+1=0$ nên $F(-1;-2;-6)\in(P)$.
Chọn đáp án D □

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-2z+1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(2;-2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;-2;0)$. **C.** $\vec{m}=(1;0;-1)$. **D.** $\vec{u}=(2;0;2)$.

Lời giải.

Do (P): $2x-2z+1=0$ nên (P) có một véc-tơ pháp tuyến có tọa độ là $(2;0;-2)$ hay $\vec{m}=(1;0;-1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Chọn đáp án C □

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $-3x+2z-1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}=(6;0;-2)$. **B.** $\vec{n}=(-3;2;0)$. **C.** $\vec{n}=(-6;0;4)$. **D.** $\vec{n}=(-3;0;-2)$.

Lời giải.

Từ phương trình của (P) ta có một véc-tơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là $(-3;0;2)$.
Rõ ràng véc-tơ có tọa độ $(-3;0;2)$ cùng phương với $\vec{n}=(-6;0;4)$.
Chọn đáp án C □

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (P).

A. $\mathrm{d}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\mathrm{d}=\dfrac{5}{9}$. **C.** $\mathrm{d}=\dfrac{5}{29}$. **D.** $\mathrm{d}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-2)+2\cdot 3+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-3z+1=0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)?

A. $\vec{n}=(1;2;3)$. **B.** $\vec{n}=(-2;-1;-3)$. **C.** $\vec{n}=(2;1;-3)$. **D.** $\vec{n}=(-2;1;-3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $Ax+By+Cz+D=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M\,(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n}\,(A;B;C)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

A. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. **B.** $A(x+x_0)+B(y+y_0)+C(z+z_0)=0$.

C. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=1$. **D.** $A(x+x_0)+B(y+y_0)+C(z+z_0)=1$.

Lời giải.

Áp dụng công thức về phương trình mặt phẳng khi biết véc-tơ pháp tuyến và một điểm thuộc mặt phẳng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+3=0$ và điểm $M(1;-2;13)$. Tính khoảng cách d từ M đến (P).

A. $d=\dfrac{4}{3}$. **B.** $d=\dfrac{7}{3}$. **C.** $d=\dfrac{10}{3}$. **D.** $d=4$.

Lời giải.

Khoảng cách từ M đến (P) là $d=\dfrac{|2+4-13+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x-3y-z-1=0$. Điểm nào dưới đây không thuộc mặt phẳng (α)?

A. $Q(1;2;-5)$. **B.** $P(3;1;3)$. **C.** $M(-2;1;-8)$. **D.** $N(4;2;1)$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng thì ta nhận điểm $P(3;1;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{n}=(2;-4;6)$. Trong các mặt phẳng có phương trình sau đây, mặt phẳng nào nhận véc-tơ $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến?

A. $2x+6y-4z+1=0$. **B.** $x-2y+3=0$.

C. $3x-6y+9z-1=0$. **D.** $2x-4y+6z+5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $ax+by+cz+d=0$ nhận véc-tơ $\vec{n}=(a;b;c)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên mặt phẳng cần tìm là $2x-4y+6z+5=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ và nhận $\vec{n} = (3;2;1)$ là véctơ pháp tuyến. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $3x+2y+z-14=0$. **B.** $3x+2y+z=0$.

C. $3x+2y+z+2=0$. **D.** $x+2y+3z=0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng (P) là

$$3(x-0)+2(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P)\colon 3x-4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách từ A đến (P).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **C.** $\dfrac{21}{\sqrt{29}}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

$$\mathrm{d}(A,(P)) = \frac{|3\cdot 1-4\cdot(-2)+2\cdot 3+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}} = \frac{21}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $G(1;1;1)$ và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $x-y+z=0$. **C.** $x+y-z-3=0$. **D.** $x+y+z=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{OG} = (1;1;1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là $x+y+z-3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+5z=0$ có véc-tơ pháp tuyến là

A. $(2;3;5)$. **B.** $(-2;-3;-5)$. **C.** $(2;-3;5)$. **D.** $(5;-3;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-3;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3=0$. Một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{\mathrm{P}}$ của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}_{\mathrm{P}} = (1;-2;0)$. **B.** $\vec{n}_{\mathrm{P}} = (0;1;-2)$. **C.** $\vec{n}_{\mathrm{P}} = (1;0;-2)$. **D.** $\vec{n}_{\mathrm{P}} = (1;-2;3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{\mathrm{P}} = (1;-2;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z+1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n} = (1;-2;-1)$. **B.** $\vec{n} = (1;2;-1)$. **C.** $\vec{n} = (1;-2;1)$. **D.** $\vec{n} = (1;0;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1;-2;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$ và $C(0;0;2)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

Lời giải.

Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon \frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$ hay $(ABC)\colon 2x-2y+z-2=0$.

Từ đó: $\mathrm{d}(O,(ABC))=\dfrac{|0+0+0-2|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta)\colon 3x+2y-7z=0$?

A. $\vec{v}=(-7;2;3)$. **B.** $\vec{a}=(-3;-2;7)$. **C.** $\vec{b}=(-3;-2;-7)$. **D.** $\vec{n}=(3;2;7)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\beta)\colon 3x+2y-7z=0 \Rightarrow (\beta)$ nhận $\vec{n}=(3;2;-7)$ là một véc-tơ pháp tuyến nên $\vec{a}=(-3;-2;7)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β).

Chọn đáp án B □

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M\,(1;-2;4)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $2x+3y+5z-16=0$. **B.** $x-2y+4z-16=0$.

C. $2x+3y+5z+16=0$. **D.** $x-2y+4z=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon 2(x-1)+3(y+2)+5(z-4)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+5z-16=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z-7=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(1;-2;7)$. **C.** $(3;-2;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $(1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 3x-z+1=0$?

A. $\vec{n}_1=(3;-1;1)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-1;0)$. **C.** $\vec{n}_3=(3;0;-1)$. **D.** $\vec{n}_4=(0;3;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x-z+1=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\vec{n}_3=(3;0;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2;-5)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy).

A. $\sqrt{30}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 25. **D.** 5.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm M tới (Oxy) là $|z_M| = |-5| = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y-z+2=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}=(3;2;1)$. **B.** $\vec{n}=(3;1;-2)$. **C.** $\vec{n}=(3;2;-1)$. **D.** $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(3;2;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+5z-4=0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $A(0;0;4)$. **B.** $B(-1;2;3)$. **C.** $C(1;-2;5)$. **D.** $D(-5;-2;1)$.

Lời giải.

Với $D(-5;-2;1)$, thay vào phương trình (P), ta có $-5-2\cdot(-2)+5\cdot(1)-4=0$. Suy ra $D\in(P)$.

Chọn đáp án D □

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x-y-3z+7=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(4;-1;3)$. **B.** $\vec{n}=(-4;-1;3)$. **C.** $\vec{n}=(4;-3;7)$. **D.** $\vec{n}=(4;-1;-3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-1;-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $x+2y-3z+1=0$ có phương trình là

A. $x+2y-3z+2=0$. **B.** $x+2y-3z+5=0$.

C. $x+2y-3z+4=0$. **D.** $x+2y-3z+3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng qua $M(1;2;3)$ và nhận $\vec{n}=(1;2;-3)$ là véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$1(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z+4=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y+z-4=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(1;2;3)$. **B.** $\vec{n}_3=(-1;2;3)$. **C.** $\vec{n}_4=(1;2;-3)$. **D.** $\vec{n}_2=(3;2;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y+z-4=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(3;2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 110. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+6=0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{n}(1;-2;3)$. **C.** $\vec{n}(-1;-2;-3)$. **D.** $\vec{n}(1;2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}(1;2;-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{j}(-5;0;0)$. **B.** $\vec{k}(0;0;1)$. **C.** $\vec{i}=(1;0;0)$. **D.** $\vec{m}=(1;1;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(Oxy)\colon z=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 112. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon -6x+my-2mz-m^2=0$ và $(Q)\colon 2x+y-2z+3=0$ (m là tham số). Tìm m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

A. $m=\dfrac{5}{12}$. **B.** $m=12$. **C.** $m=\dfrac{12}{5}$. **D.** $m=\dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(-6;m;-2m)$, véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=(2;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi và chỉ khi

$$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow -12+m+4m=0\Leftrightarrow m=\frac{12}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 113. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z-6=0$. Tính khoảng cách từ O đến (P).

A. 3. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{4+1+4}}=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+1=0$. Tìm một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

A. $\vec{n}=(-1;1;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;2)$. **C.** $\vec{n}=(-1;-1;2)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;2)$.

Lời giải.

(P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}'=(1;1;-2)$ nên $\vec{n}=-\vec{n}'=(-1;-1;2)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án C □

Câu 115. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $\mathrm{d}=\dfrac{5}{9}$. **B.** $\mathrm{d}=\dfrac{5}{29}$. **C.** $\mathrm{d}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $\mathrm{d}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\,(A,(P))=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-2)+2\cdot 3+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $2x-y-1=0$. **B.** $-y+2z-3=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $y+2z-5=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=2(-2;1;0)$.
Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng

$$-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_1=(3;2;1)$. **B.** $\vec{n}_2=(2;3;6)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;2;3)$. **D.** $\vec{n}_4=(6;3;2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là $\left(\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}(6;3;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 118. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $x+2y-5=0$ nhận vec-tơ nào trong các vec-tơ sau làm vec-tơ pháp tuyến?

A. $\vec{n}(1;2;-5)$. **B.** $\vec{n}(0;1;2)$. **C.** $\vec{n}(1;2;0)$. **D.** $\vec{n}(1;2;5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(1;2;0)$ làm vec-tơ pháp tuyến.
Chọn đáp án C □

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(6;3;2)$. **B.** $\vec{n}=(2;3;6)$. **C.** $\vec{n}=(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3})$. **D.** $\vec{n}=(3;2;1)$.

Lời giải.

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow 2x+3y+6z-6=0.$$

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(2;3;6)$.
Chọn đáp án B □

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$. Mặt phẳng qua A, vuông góc với trục Ox có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $y-2=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $x+1=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng qua A, vuông góc với trục Ox nhận véc-tơ $\vec{i}=(1;0;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $x+1=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $3x-z+2=0$. Véc-tơ nào là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}(-1;0;-1)$. **B.** $\vec{n}(3;-1;2)$. **C.** $\vec{n}(3;-1;0)$. **D.** $\vec{n}(3;0;-1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(3;0;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-z+5=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

A. $\vec{n}_1=(2;1;5)$. **B.** $\vec{n}_2=(2;0;1)$. **C.** $\vec{n}_3=(2;-1;5)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;0;-1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(2;0;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-3y+4z+2018=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_1=(1;3;4)$. **B.** $\vec{n}_2=(-1;3;4)$. **C.** $\vec{n}_3=(-1;3;-4)$. **D.** $\vec{n}_4=(-1;-3;4)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_3=(-1;3;-4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 124. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y-4z+1=0$. Khi đó, một véc-tơ pháp tuyến của (α)

A. $\vec{n}=(2;3;-4)$. **B.** $\vec{n}=(2;-3;4)$. **C.** $\vec{n}=(-2;3;4)$. **D.** $\vec{n}=(-2;3;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y-4z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_0=(2;-3;-4)$.

Nhận thấy $\vec{n}=(-2;3;4)=-\vec{n}_0$, hay $\vec{n}$ cùng phương với $\vec{n}_0$.

Do đó véc-tơ $\vec{n}=(-2;3;4)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Chọn đáp án C □

Câu 125. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y-3z+1=0$. Tìm một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P).

A. $\vec{n}=(-4;2;6)$. **B.** $\vec{n}=(2;1;3)$. **C.** $\vec{n}=(-6;-3;9)$. **D.** $\vec{n}=(6;-3;-9)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{a}=(2;1;-3)$.

Cho nên véc-tơ $\vec{n}=-3\vec{a}=(-6;-3;9)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án C □

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, tìm một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-1=0$.

A. $\vec{n}_1=(2;-1;3)$. **B.** $\vec{n}_2=(2;-1;-1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-1;3;-1)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;-1;-3)$.

Lời giải.

Hệ số của x, y, z tương ứng là 2, -1, 3 nên véc-tơ $\vec{n}_1=(2;-1;3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$ và $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

A. $2x+y+2z-5=0$. **B.** $x+2y+5z+5=0$.
C. $x-2y+3z-7=0$. **D.** $x+2y+5z-5=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC}=(-1;-2;-5)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC, nhận véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ làm một véc-tơ pháp tuyến của nó. Suy ra phương trình mặt phẳng là $x+2y+5z-5=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 128. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(2;3;6)$. **B.** $\vec{n}=\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\vec{n}=(3;2;1)$. **D.** $\vec{n}=(6;3;2)$.

Lời giải.

Ta viết phương trình của mặt phẳng (P) dưới dạng tổng quát

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1\Leftrightarrow 2x+3y+6z-6=0.$$

Suy ra $\vec{n}=(2;3;6)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án A □

Câu 129. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và mặt phẳng (P) : $x-2y-3z+10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) là

A. $x-2y+3z+4=0$. **B.** $-x+2y+3z+4=0$.
C. $x-2y-3z+4=0$. **D.** $x+2y-3z=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $x-2y-3z+m=0$ $(m\neq 10)$.
Vì (Q) đi qua điểm $A(2;-1;0)$ nên ta có $2+2+m=0\Leftrightarrow m=-4$.
Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $x-2y-3z-4=0$ hay $-x+2y+3z+4=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 130. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x-z+1=0$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

A. $(3;0;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(3;-1;0)$. **D.** $(-3;1;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;0;-1)$.
Chọn đáp án A □

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-5=0$ và điểm $A(1;-3;1)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$. **B.** $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{8}{29}$.

Lời giải.

$$\mathrm{d}(A;(P))=\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-3)+4\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 132. Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-2;1)$ có phương trình là

A. $3x-2y-z-4=0$. **B.** $3x-2y+z-2=0$.

C. $x+2y+3z+4=0$. **D.** $3x-2y+z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b;c)$ có phương trình là

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Nên mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-2;1)$ có phương trình là

$$3(x-1)-2(y-2)+(z-3)=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-2=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $6x-3y+2z-6=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M\,(1;-2;3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $d=\dfrac{12\sqrt{85}}{85}$. **B.** $d=\dfrac{12}{7}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{31}}{7}$. **D.** $d=\dfrac{18}{7}$.

Lời giải.

$$\mathrm{d}\,(M,(P))=\frac{|6\cdot 1-3\cdot(-2)+2\cdot 3-6|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{12}{7}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 134. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;3)$. Tìm phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$. **B.** $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{3}=1$. **C.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$. **D.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1$.

Lời giải.

Do 3 điểm A,B,C lần lượt nằm trên 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz nên mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y-3z+5=0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}=(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;3)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;3)$. **D.** $\vec{n}=(1;2;-3)$.

Lời giải.

Dựa vào khái niệm véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Chọn đáp án D □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) : $2x-3y+z-2018=0$ có véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-2;3;-1)$. **B.** $\vec{n}=(2;3;1)$. **C.** $\vec{n}=(2;-3;1)$. **D.** $\vec{n}=(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(2;-3;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}+1=0$. **B.** $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

Lời giải.

Áp dụng công thức phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$. Điểm nào trong các phương án dưới đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $M(2;1;0)$. **B.** $M(2;-1;0)$. **C.** $M(-1;-1;6)$. **D.** $M(-1;-1;2)$.

Lời giải.

Ta có: $2\cdot 2-1+0-3=0\Rightarrow M(2;1;0)\in(P)\colon 2x-y+z-3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 139. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $M(2;-1;-1)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon 16x-12y-15z-4=0$. Độ dài đoạn MH bằng.

A. 55. **B.** $\frac{11}{25}$. **C.** $\frac{22}{5}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải.

$$MH=d(M,(\alpha))=\frac{|6.2-12\cdot(-1)-15\cdot(-1)-4|}{\sqrt{16^2+12^2+15^2}}=\frac{11}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-4y+6z-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{n}=(2;4;6)$. **C.** $\vec{n}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và song song với mặt phẳng $(Q)\colon x+2y+3z+2=0$ có phương trình là

A. $x+2y+3z-9=0$. **B.** $x+2y+3z+5=0$.

C. $x+2y+3z+13=0$. **D.** $x+2y+3z-13=0$.

Lời giải.

Vì $(P)\parallel(Q)$ nên phương trình (P) có dạng $x+2y+3z+d=0$, $d\neq 2$.

Mà $A\in(P)$ nên $2+2+9+d=0\Leftrightarrow d=-13$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án D □

Câu 142. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $2x-y-1=0$. **B.** $-y+2z-3=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $y+2z-5=0$.

Lời giải.

Ta có: véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = 2(-2;1;0)$
Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng:
$-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0.$
Chọn đáp án (C) □

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+3y+4z-12=0$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0;4;0)$. **B.** $(0;6;0)$. **C.** $(0;3;0)$. **D.** $(0;-4;0)$.

Lời giải.

Cho $x=0; z=0 \Rightarrow y=4$. Chọn điểm $(0;4;0)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 144. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-3;-2)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-5;1)$ có phương trình là

A. $2x-5y+z-17=0$. **B.** $2x-5y+z+17=0$.
C. $2x-5y+z-12=0$. **D.** $2x-3y-2z-18=0$.

Lời giải.

Ta có $2(x-2)-5(y+3)+(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x-5y+z-17=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 145. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A. $x-2y-2z=0$. **B.** $x-2y-z-1=0$. **C.** $x-2y-z=0$. **D.** $x-2y+z-3=0$.

Lời giải.

Chọn $M(2;0;1)$ là trung điểm của đoạn AB.
Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-4;-2)$ làm 1 véc-tơ pháp tuyến.
Nên có phương trình $2(x-2)-4(y-0)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y-z-1=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$ và mặt phẳng (P): $2x-y+z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P). Điểm nào sau đây **không** nằm trên mặt phẳng (Q)?

A. $K(3;1;-8)$. **B.** $N(2;1;-1)$. **C.** $I(0;2;-1)$. **D.** $M(1;0;-5)$.

Lời giải.

Do $(Q) \parallel (P)$ nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $2x-y+z+C=0\,(C\neq -3)$.
Mặt phẳng (Q) đi qua $A(-1;2;1)$ nên: $2\cdot(-1)-2+1+C=0 \Leftrightarrow C=3$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (Q): $2x-y+z+3=0$.
Từ đây, suy ra điểm **không** nằm trên mặt phẳng (Q) là: $N(2;1;-1)$ vì $2\cdot 2-1-1+3=5\neq 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;-1;4)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;-1)$. Phương trình của (P) là

A. $2x-2y-z-6=0$. **B.** $2x+2y+z-6=0$.
C. $2x+2y-z+6=0$. **D.** $2x+2y-z-6=0$.

Lời giải.

Phương trình của $(P): 2x+2(y+1)-(z-4)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+6=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-3z+3=0$. Trong các véc-tơ sau véc-tơ nào là véc-tơ pháp tuyến của (P)?
A. $\vec{n}=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;-3)$. **C.** $\vec{n}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là
A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x+y=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.
A. $m=1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) khi và chỉ khi

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{-m}{-1}\neq\frac{-2}{-1}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m\neq 2.\end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm nên không có giá trị của m thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là
A. $y+z=1$. **B.** $z=0$. **C.** $x=0$. **D.** $y=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $2x+y-z+1=0$. Véc-tơ nào sau đây không là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)?
A. $\vec{n_4}=(4;2;-2)$. **B.** $\vec{n_2}=(-2;-1;1)$. **C.** $\vec{n_3}=(2;1;1)$. **D.** $\vec{n_1}=(2;1;-1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(2;1;-1)$. Ta thấy $\vec{n_3}=(2;1;1)$ không cùng phương với $\vec{n}$ nên không là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
Chọn đáp án C □

Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;1)$. Véc-tơ nào sau đây cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P)?
A. $(4;-2;2)$. **B.** $(-4;2;3)$. **C.** $(4;2;-2)$. **D.** $(-2;1;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $2\vec{n} = (4; -2; 2)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án A □

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;3;2)$, $B(-1;-2;1)$ và $C(-2;2;-1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $x-4y+2z+4=0$. **B.** $x-4y-2z+4=0$.
C. $x-4y-2z-4=0$. **D.** $x+4y-2z-4=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với BC nên nhận $\overrightarrow{CB} = (1;-4;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Mặt phẳng đi qua A, nhận $(1;-4;2)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình là $x-4y+2z+4=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 155. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Tọa độ điểm H là

A. $H(2;0;4)$. **B.** $H(0;-1;4)$. **C.** $H(2;-1;0)$. **D.** $H(0;-1;0)$.

Lời giải.

Do chiếu xuống (Oxy) nên $z=0$ và x, y giữ nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua $M\,(1;-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

A. $2x-y+3z-9=0$. **B.** $2x-y+3z+9=0$.
C. $2x-y+3z-6=0$. **D.** $2x+y+3z-9=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $M\,(1;-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng Δ nên có VTPT là $\vec{n}\,(2;-1;3)$.
Phương trình mặt phẳng là: $2\,(x-1)-(y+1)+3\,(z-2)=0$ hay $2x-y+3z-9=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 157. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là

A. $A(1;-2;0)$. **B.** $A(0;-2;3)$. **C.** $A(1;-2;3)$. **D.** $A(1;0;3)$.

Lời giải.

Điểm nằm trên mặt phẳng Oyz thì có hoành độ bằng 0.
Chọn đáp án B □

Câu 158. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-z+1=0$. Tọa độ một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(2;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(2;0;-1)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;0)$. **D.** $\vec{n}=(2;0;1)$.

Lời giải.

Câu hỏi sử dụng kiến thức cơ bản.
Chọn đáp án B □

Câu 159. Cho mặt phẳng (α) có phương trình: $2x+4y-3z+1=0$, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là

A. $\vec{n}=(2;4;3)$. **B.** $\vec{n}=(2;4;-3)$. **C.** $\vec{n}=(2;-4;-3)$. **D.** $\vec{n}=(-3;4;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Vậy $(\alpha)\colon 2x+4y-3z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;4;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 160. Lập phương trình của mặt phẳng đi qua $A(2;6;-3)$ và song song với mặt phẳng (Oyz).

A. $x=2$. **B.** $x+z=12$. **C.** $y=6$. **D.** $z=-3$.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (Oyz) có dạng $x+d=0\,(d\neq 0)$.

Mặt phẳng đi qua A nên $d=-2\Rightarrow$ mặt phẳng cần tìm là $x-2=0$ hay $x=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(1;2;1)$. **C.** $(1;1;-1)$. **D.** $(2;1;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-3=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(2;-1;-3)$. **B.** $Q(3;-1;2)$. **C.** $P(2;-1;-1)$. **D.** $N(2;-1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $2\cdot 3-(-1)-2\cdot 2-3=0$ nên điểm $Q(3;-1;2)\in(P)$.

Chọn đáp án B □

Câu 163. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $M(3;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;1)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình

A. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=-1$. **B.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. **C.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1$. **D.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-1}=1$.

Lời giải.

Ta có M,N,P lần lượt là giao điểm của (MNP) với 3 trục tọa độ

$\Rightarrow (MNP)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 164. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-z+1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3=(2;0;-1)$. **B.** $\vec{n}_4=(2;1;0)$. **C.** $\vec{n}_1=(2;-1;1)$. **D.** $\vec{n}_2=(2;-1;0)$.

Lời giải.

$(P)\colon 2x-z+1=0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(2;0;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-4y+3z-2=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}_1=(0;-4;3)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;4;3)$. **C.** $\vec{n}_3=(-1;4;-3)$. **D.** $\vec{n}_4=(-4;3;-2)$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_3 = (-1;4;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với trục Ox là

A. $x+1=0$. **B.** $z-1=0$. **C.** $x+y+z-3=0$. **D.** $y-2=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với trục Ox có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng là $x+1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt phẳng (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$.

A. $4x+3y-6z+12=0$. **B.** $4x+3y+6z+12=0$.

C. $4x-3y+6z+12=0$. **D.** $4x-3y+6z-12=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2}=1 \Rightarrow (\alpha): 4x-3y+6z+12=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 168. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $2x+y+5z-8=0$. **B.** $x+2y+5z+5=0$.

C. $2x-y+5z-5=0$. **D.** $x+2y+5z-5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{CB} = (1;2;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do đó (α) có phương trình là $x-2+2(y+1)+5(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-5=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -2x+y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $(1;7;5)$. **B.** $(-2;1;0)$. **C.** $(-2;0;0)$. **D.** $(-2;2;-5)$.

Lời giải.

Xét điểm $(-2;1;0)$ có $-2\cdot(-2)+1+0-5=0$ nên điểm có tọa độ $(-2;1;0)$ thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án B □

Câu 170. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-2;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(2;1;-1)$. **C.** $\vec{n}=(1;2;0)$. **D.** $\vec{n}=(2;1;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 171. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(3;4;-2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $(R)\colon x+y-7=0$. **B.** $(S)\colon x+y+z+5=0$.

C. $(Q)\colon x-1=0$. **D.** $(P)\colon z-2=0$.

Lời giải.

Xét mặt phẳng $(R)\colon x+y-7=0$ ta thấy $3+4-7=0$. Vậy M thuộc (R).
Xét mặt phẳng $(S)\colon x+y+z+5=0$ ta thấy $3+4-2+5=10\neq 0$. Vậy M không thuộc (S).
Xét mặt phẳng $(Q)\colon x-1=0$ ta thấy $3-1=2\neq 0$. Vậy M không thuộc (Q).
Xét mặt phẳng $(P)\colon z-2=0$ ta thấy $-2-2=-4\neq 0$ vậy M không thuộc (P).
Chọn đáp án A □

Câu 172. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$ là

A. $4x-5y-4=0$. **B.** $4x-5z-4=0$. **C.** $4x-5y+4=0$. **D.** $4x-5z+4=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;0;-5)$ có phương trình là

$$4(x+1)+0(y-2)-5(z-0)=0\Leftrightarrow 4x-5z+4=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(3;4;-2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $(R)\colon x+y-7=0$. **B.** $(S)\colon x+y+z+5=0$.
C. $(Q)\colon x-1=0$. **D.** $(P)\colon z-2=0$.

Lời giải.

Ta có: $3+4-7=0\Rightarrow M\in(R)$.
Chọn đáp án A □

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) : $3x-2y+z+2=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_4=(-1;0;-1)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;0;-1)$. **C.** $\vec{n}_1=(3;-2;1)$. **D.** $\vec{n}_3=(3;-1;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ thì có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;c)$.
Chọn đáp án C □

Câu 175. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+3z+2018=0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ là

A. $\vec{n}=(-1;-2;3)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;3)$. **C.** $\vec{n}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$.
Chọn đáp án B □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q)\colon 2x+3y-4z-5=0$ có phương trình là

A. $2x+3y+4z-14=0$. **B.** $2x-3y-4z+6=0$.
C. $2x+3y-4z-4=0$. **D.** $2x+3y-4z+4=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q)\colon 2x+3y-4z-5=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{u}=(2;3;-4)$.
Mà mặt phẳng đó qua $A(1;2;3)$ nên nó có phương trình là
$2(x-1)+3(y-2)-4(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-4z+4=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+3=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;2;-3)$.
Chọn đáp án A □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ nhận véc-tơ $\vec{n}=(1;-1;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

A. $x+y+2z-5=0$. **B.** $x-y+2z-9=0$. **C.** $x-y+2z=0$. **D.** $x-y+2z-5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình là: $1(x-1)-1(y-2)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-5=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 179. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$, $C(2;0;2)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình

A. $3x+3y+z-8=0$. **B.** $3x-3y+z-14=0$.
C. $3x-2y+z-8=0$. **D.** $2x+3y-z+8=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;1;0)$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;3;1)$.
Mặt phẳng (ABC) đi qua $C(2;0;2)$ và nhận $\vec{n}=(3;3;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình $3(x-2)+3y+(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x+3y+z-8=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 180. Cho điểm $H(-3;-4;6)$ và mặt phẳng (Oxz). Hỏi khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (Oxz) bằng bao nhiêu?

A. $\mathrm{d}(H;(Oxz))=4$. **B.** $\mathrm{d}(H;(Oxz))=3$. **C.** $\mathrm{d}(H;(Oxz))=6$. **D.** $\mathrm{d}(H;(Oxz))=8$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(Oxz)\colon y=0$.
Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (Oxz) là $\mathrm{d}(H;(Oxz))=|y_H|=4$.
Chọn đáp án A □

Câu 181. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+3z-1=0$. véc-tơ nào sau đây là Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

A. $(-4;2;-6)$. **B.** $(2;1;-3)$. **C.** $(-2;1;3)$. **D.** $(2;1;3)$.

Lời giải.

Ta có VTPT của mặt phẳng (α) có dạng $\vec{n}=k(2;-1;3), k\in\mathbb{R}$.
Với $k=-2$ ta có $\vec{n}=(-4;2;-6)$.
Chọn đáp án A □

Câu 182. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -3x+2z-1=0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(3;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(-3;0;2)$. **C.** $\vec{n}=(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{n}=(3;2;-1)$.

Lời giải.

Dễ có $\vec{n}_P=(-3;0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 183. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x+y+z=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) đi qua O, véc-tơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$ có phương trình

$$1(z-0)=0\Leftrightarrow z=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 184. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+3z+1=0$ là

A. $\vec{n}=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{m}=(1;2;-3)$. **C.** $\vec{v}=(1;-2;-3)$. **D.** $\vec{u}=(3;-2;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+3z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 185. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-z-1=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) có toạ độ là

A. $(1;1;-1)$. **B.** $(1;-1;0)$. **C.** $(1;0;-1)$. **D.** $(1;-1;-1)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình mặt phẳng (P), ta có một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;0;-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(\mathcal{S})\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=81$ tại điểm $P(-5;-4;6)$ là

A. $7x+8y+67=0$. **B.** $4x+2y-9z+82=0$.

C. $x-4z+29=0$. **D.** $2x+2y-z+24=0$.

Lời giải.

Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $I(1;2;3)$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Do (α) tiếp xúc với $(\mathcal{S})$ tại P nên mặt phẳng (α) đi qua P và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IP}=(-6;-6;3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $-6(x+5)-6(y+4)+3(z-6)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+24=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 187. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$ được viết dưới dạng $ax+by-6z+c=0$. Giá trị của $T=a+b-c$ là

A. -11. **B.** -7. **C.** -1. **D.** 11.

Lời giải.

Sử dụng phương trình đoạn chắn, ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow 2x+3y-6z+6=0.$$

Vậy $T=a+b-c=2+3-6=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 188. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 3x-4y+1=0$?

A. $\vec{n}_1=(3;-4;1)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-4;0)$. **C.** $\vec{n}_3=(3;4;0)$. **D.** $\vec{n}_4=(-4;3;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x-4y+1=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(3;-4;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 189. Tính khoảng cách từ điểm $I(2;0;-1)$ tới mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$.

A. $\mathrm{d}[I;(P)]=1$. **B.** $\mathrm{d}[I;(P)]=\dfrac{1}{3}$. **C.** $\mathrm{d}[I;(P)]=0$. **D.** $\mathrm{d}[I;(P)]=3$.

Lời giải.

$$\mathrm{d}[I;(P)]=\frac{|2\cdot 2-0-2+1|}{3}=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 190. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $N(3;-2;-5)$. **B.** $P(0;0;-5)$. **C.** $Q(3;-2;1)$. **D.** $M(1;1;4)$.

Lời giải.

Ta có $3\cdot 1-2\cdot 1+4-5=0 \Rightarrow$ điểm M thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 191. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;-1)$ và $B(-5;4;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $4x-y+z+7=0$. **B.** $4x+y-z+1=0$. **C.** $4x-y-z+7=0$. **D.** $4x+y+z-1=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB suy ra tọa độ $I(-1;3;0)$ và $\overrightarrow{AB}=(8;-2;-2)$. Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta chọn $\vec{n}(4;-1;-1)$. Khi đó phương trình mặt phẳng trung trực là

$$4\cdot(x+1)+(-1)\cdot(y-3)+(-1)\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-y-z+7=0$$

Chọn đáp án C □

Câu 192. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-10=0$. Trong các điểm sau, điểm nào nằm trên mặt phẳng (P)?

A. $(1;2;0)$. **B.** $(2;2;0)$. **C.** $(2;-2;0)$. **D.** $(2;1;2)$.

Lời giải.

• Thay tọa độ các điểm đã cho vào phương trình mặt phẳng (P) ta có điểm $(2;-2;0)$ thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án C □

Câu 193. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-z+6=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n_2}=(3;0;-1)$. **B.** $\vec{n_1}=(3;-1;2)$. **C.** $\vec{n_3}=(3;-1;0)$. **D.** $\vec{n_4}=(-1;0;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x-z+6=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(3;0;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 194. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+3=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(2;1;0)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\mathrm{d}=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\mathrm{d}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\mathrm{d}=3$. **D.** $\mathrm{d}=1$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}=\dfrac{|2-2+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 195. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-2=0$?

A. $Q(1;-2;2)$. **B.** $P(2;-1;-1)$. **C.** $M(1;1;-1)$. **D.** $N(1;-1;-1)$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm Q, P, M, N vào vế trái phương trình mặt phẳng (P) ta có

Điểm $Q\colon 2\cdot 1-(-2)+2-2=4\neq 0$.

Điểm $P\colon 2\cdot 2-(-1)+(-1)-2=2\neq 0$.

Điểm $M\colon 2\cdot 1-1+(-1)-2=-2\neq 0$.

Điểm $N\colon 2\cdot 1-(-1)+(-1)-2=0$.

Vậy điểm $N(1;-1;-1)$ nằm trên mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 196. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+3=0$. Véc-tơ nào dưới đây **không** phải là véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $(3;-3;0)$. **B.** $(1;-1;3)$. **C.** $(1;-1;0)$. **D.** $(-1;1;0)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{n}=(1;-1;3)$ không là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án B □

Câu 197. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-z+1=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(2;-1;0)$. **B.** $\vec{n}=(2;0;1)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;1)$. **D.** $\vec{n}=(2;0;-1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(2;0;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 198. Tọa độ giao điểm của mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-2=0$ với trục hoành là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(-2;0;0)$. **C.** $(0;0;2)$. **D.** $(0;-1;0)$.

Lời giải.

Gọi $M(a;0;0)$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và trục hoành, suy ra $a-2\cdot 0+0-2=0 \Leftrightarrow a=2$. Vậy $M(2;0;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 199. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+3=0$ có một vec-tơ pháp tuyến là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(1;2;-3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án B □

Câu 200. Trong không gian Oxy, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z+5=0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{u}=(4;3;2)$. **B.** $\vec{v}=(3;4;5)$. **C.** $\vec{w}=(2;3;4)$. **D.** $\vec{u}=(5;4;3)$.

Lời giải.

Dựa vào các hệ số đi với các biến $x,\ y,\ z$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. B	4. C	5. A	6. D	7. D	8. A	9. D	10. A
11. C	12. C	13. B	14. D	15. A	16. B	17. C	18. A	19. D	20. D
21. D	22. B	23. C	24. D	25. A	26. B	27. A	28. D	29. B	30. D
31. D	32. A	33. D	34. C	35. A	36. B	37. A	38. B	39. C	40. B
41. B	42. C	43. B	44. C	45. C	46. C	47. C	48. A	49. A	50. D
51. B	52. C	53. D	54. A	55. C	56. C	57. A	58. B	59. D	60. B
61. C	62. B	63. A	64. D	65. B	66. D	67. B	68. D	69. C	70. D
71. C	72. A	73. C	74. C	75. D	76. D	77. C	78. C	79. D	80. D
81. A	82. A	83. B	84. D	85. C	86. C	87. D	88. C	89. A	90. A
91. B	92. D	93. B	94. C	95. A	96. C	97. A	98. A	99. A	100. B
101. A	102. A	103. C	104. D	105. C	106. D	107. D	108. C	109. D	110. D
111. B	112. C	113. D	114. C	115. C	116. C	117. D	118. C	119. B	120. D
121. D	122. D	123. C	124. C	125. C	126. A	127. D	128. A	129. B	130. A
131. B	132. B	133. B	134. A	135. D	136. C	137. D	138. A	139. D	140. A
141. D	142. C	143. A	144. A	145. B	146. B	147. C	148. B	149. A	150. B
151. C	152. C	153. A	154. A	155. C	156. A	157. B	158. B	159. B	160. A
161. C	162. B	163. C	164. A	165. C	166. A	167. C	168. D	169. B	170. D
171. A	172. C	173. A	174. C	175. B	176. D	177. A	178. D	179. A	180. A
181. A	182. B	183. A	184. A	185. C	186. D	187. C	188. B	189. A	190. D
191. C	192. C	193. A	194. D	195. D	196. B	197. D	198. A	199. B	200. C

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+3y-z-1=0$ và $(\beta)\colon 4x+6y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}=(2;3;-1)$.
Mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2}=(4;6;-m)$.
Để $(\alpha)\parallel(\beta)$ khi: $\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{-m}\neq\dfrac{-1}{-2}$. Không tồn tại m.
Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x+y+z=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y=0$
Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-3=0$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình (P), (Q) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;2)$ nên $(P)\parallel(Q)$.
Ta có $|\vec{n}|=\sqrt{1+2^2+2^2}=3$; $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{10}{3}$; $\mathrm{d}(O,(Q))=\dfrac{3}{3}=1$,
suy ra $\mathrm{d}((P),(Q))=d(O,(P))-d(O,(Q))=\dfrac{7}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$ có phương trình là

A. $z+1=0$. **B.** $x-y=0$. **C.** $x+z=0$. **D.** $y+z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng chứa trục Ox có dạng $By+Cz=0,(B^2+C^2\neq 0)$.
Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;1;-1)$ nên $B-C=0\Leftrightarrow B=C$. Do đó chọn $B=C=1$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$ và $C(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $x-2y+z=0$. **B.** $x-y+\dfrac{z}{2}=1$. **C.** $x+\dfrac{y}{2}-z=1$. **D.** $2x-y+z=0$.

Lời giải.

Áp dụng phương trình mặt phẳng đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $x-y+\dfrac{z}{2}=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$; $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A. $(P): x+8y+5z+16=0$. **B.** $(P): x+8y+5z-16=0$.

C. $(P): 2x+y-6=0$. **D.** $(P): x+4y+3z-12=0$.

Lời giải.

Phương trình tham số $d_1: \begin{cases} x=2+2t_1 \\ y=-2+t_1, (t_1\in\mathbb{R}). \\ z=6-2t_1 \end{cases}$

d_1 đi qua điểm $M(2;-2;6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(2;1;-2)$.

Phương trình tham số $d_2: \begin{cases} x=4+t_2 \\ y=-2-2t_2, (t_2\in\mathbb{R}). \\ z=-1+3t_2 \end{cases}$

d_2 đi qua điểm $N(4;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(1;-2;3)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2, ta có: $\begin{cases} \vec{n}_{(P)}\perp\vec{u}_1 \\ \vec{n}_{(P)}\perp\vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{(P)}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=-(1;8;5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(2;-2;6)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{u}_{(P)}=(1;8;5)$, nên phương trình mặt phẳng $(P): (x-2)+8(y+2)+5(z-6)=0$ hay $(P): x+8y+5z-16=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$ và mặt phẳng (P): $2x-y-2z+m+3=0$, với m là tham số. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi 6π. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc T bằng:

A. 4. **B.** 24. **C.** -20. **D.** -16.

Lời giải.

Mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=25$ có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có chu vi bằng 6π nên bán kính đường tròn bằng $r=3$.

Do đó khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng là $\mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=4$

$$\Leftrightarrow \frac{|4-1+2+m+3|}{3}=4 \Leftrightarrow |m+8|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-20. \end{array}\right.$$

Vậy tổng giá trị của các phần tử thuộc T bằng -16.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng (P): $3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. (Q): $3x-2y+4z-4=0$. **B.** (Q): $3x-2y+4z+4=0$.

C. (Q): $3x-2y+4z+5=0$. **D.** (Q): $3x+2y+4z+8=0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q): $3(x-2)-2(y+1)+4(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+4z+4=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-2)$, $B(3;1;1)$ và $C(-2;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $N(2;1;0)$. **B.** $Q(-2;1;0)$. **C.** $M(2;-1;0)$. **D.** $M(-2;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0;3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;5)$ và $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(3;-21;-3)$.
Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $B(3;1;1)$, có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-7;-1)$ nên có phương trình là $x-7y-z+5=0$. Vì $2-7\cdot1-0+5=0$ nên $N(2;1;0)\in(ABC)$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-1;3)$, $B(0;1;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=21$. **B.** $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=17$.
C. $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=27$. **D.** $(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=21$.

Lời giải.

Vì mặt cầu (S) có đường kính AB nên mặt cầu có tâm là trung điểm $I(2;0;-1)$ của AB và bán kính $R=\frac{AB}{2}=\sqrt{21}$.
Vậy phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=21$.
Chọn đáp án A □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;$
Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $3x-2y+2z+6=0$. **B.** $2x+2y-z-1=0$.
C. $x+y+z+1=0$. **D.** $x-2y-z-3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow3x-2y+2z+6=0$.
Suy ra (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n_p}=(3;-2;2)$.
Xét A: $3x-2y+2z+6=0$ có $\vec{a}=(3;-2;2)$ là 1 VTPT và $\vec{a}\cdot\overrightarrow{n_P}=9+4+4=17\neq0$.
Xét B: $2x+2y-z-1=0$ có $\vec{b}=(2;2;-1)$ là 1 VTPT và $\vec{b}\cdot\overrightarrow{n_P}=6-4-2=0\Rightarrow\vec{b}\perp\overrightarrow{n_P}$.
Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $2x+2y-z-1=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α)là mặt phẳng song song với mặt phẳng (β) : $2x-4y+4z+3=0$ và cách điểm $A(2;-3;4)$ một khoảng $k=3$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $2x-4y+4z-5=0$ hoặc $2x-4y+4z-13=0$.
B. $x-2y+2z-25=0$.
C. $x-2y+2z-7=0$.
D. $x-2y+2z-25=0$ hoặc $x-2y+2z-7=0$.

Lời giải.

Vì $(\alpha)\parallel(\beta)\Rightarrow(\alpha):2x-4y+4z+m=0$ $(m\neq3)$.

Giả thiết có $d(A,(\alpha))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|32+m|}{6}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-14 \\ m=-50. \end{array}\right.$

Vậy $(\alpha): x-2y+2z-7=0, (\alpha): x-2y+2z-25=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;1;-1), B(1;1;2), C(1;-1;0), D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-1;0;-3); \overrightarrow{BC}=(0;-2;-2); \overrightarrow{BD}=(-1;-1;-1)$.

$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(0;-2;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BA}=6$.

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{BA}\right|=\dfrac{1}{6}\cdot 6=1$ (đvdt)

Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{BCD} \Rightarrow AH=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Cho biết $B(2;3;7)$, $D(4;1;3)$. Lập phương trình mặt phẳng (SAC).

A. $x+y-2z+9=0$. **B.** $x-y-2z-9=0$. **C.** $x-y-2z+9=0$. **D.** $x-y+2z+9=0$.

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh được (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

Chọn véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\overrightarrow{BD}=(2;-2;-4)$.

Mặt phẳng (SAC) đi qua trung điểm $I(3;2;5)$ của BD và có vtcp $\overrightarrow{BD}$ nên có phương trình:

$x-y-2z+9=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0$, $(Q): x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là:

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $x+y+z+3=0$. **C.** $-2x+z+6=0$. **D.** $-2x+z-6=0$.

Lời giải.

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q)

nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{n_Q}]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α)đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$

nên (α) có phương trình $x+y+z-3=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-2y+z+4=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến (P).

A. $d=3$. **B**. $d=4$. **C**. $d=1$. **D**. $d=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến (P) là $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot 2+1+4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$và $B(3;3;0)$. Mặt phẳng trung trực của đường thẳng AB có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B**. $x+y-z+2=0$. **C**. $x+2y-z-3=0$. **D**. $x+2y-z+3=0$.

Lời giải.

Ta có: $A(1;-1;2);B(3;3;0)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4;-2)$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $M(2;1;1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} & 2(x-2)+4(y-1)-2(z-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x-4+4y-4-2z+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & x+2y-z-3=0 \end{aligned}$$

.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Khi tăng độ dài cạnh đáy của một khối chóp tam giác đều lên 2 lần và giảm chiều cao của hình chóp đó đi 4 lần thì thể tích khối chóp thay đổi như thế nào?

A. Không thay đổi. **B**. Tăng lên 8 lần. **C**. Giảm đi 2 lần. **D**. Tăng lên 2 lần.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp tam giác đều là a và chiều cao là h thì diện tích chóp là $B=a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và thể tích ban đầu của hình là: $V_1=\dfrac{1}{3}B.h=\dfrac{1}{3}.h.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Nếu tăng độ dài cạnh đáy của một khối chóp tam giác đều lên 2 lần và giảm chiều cao của hình chóp đó đi 4 lần thì thể tích khối chóp mới sẽ là: $V_2=\dfrac{1}{3}.\dfrac{h}{4}.(2a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{3}.h.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=V_1$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-3=0$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B**. $\dfrac{7}{3}$. **C**. 3. **D**. $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét thấy $(P)\parallel(Q)$.

Trên (P) lấy $M(0;0;5)$. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$\mathrm{d}\left((P),(Q)\right)=\mathrm{d}\left(M,(Q)\right)=\frac{|0+2\cdot 0+2\cdot 5-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $A\,(0;1;-1)\,, B\,(1;1;2)\,, C\,(1;-1;0)\,, D\,(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao AH của hình chóp $A.BCD$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}\,(-1;0;-3)\,; \overrightarrow{BC}\,(0;-2;-2)\,; \overrightarrow{BD}\,(-1;-1;-1)$.
$\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (0;-2;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{BA} = 6$.
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{BA}\right| = \dfrac{1}{6} \cdot 6 = 1$ (đvtt).
$S_{BCD} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}$ (đvdt).
Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCD} \Rightarrow AH = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Ba mặt phẳng $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y + 3z + 13 = 0$, $3x - 2y + 3z + 16 = 0$ cắt nhau tại điểm A. Tọa độ của A là

A. $A\,(-1;2;-3)$. **B.** $A\,(1;-2;3)$. **C.** $A\,(-1;-2;3)$. **D.** $A\,(1;2;3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + 3z + 13 = 0 \\ 3x - 2y + 3z + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow A\,(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P);(Q)$ có các véc tơ pháp tuyến là $\vec{a} = (a_1;b_1;c_1)\,; \vec{b} = (a_2;b_2;c_2)$. Góc α là góc giữa hai mặt phẳng đó $\cos\alpha$ là biểu thức nào sau đây

A. $\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$. **B.** $\dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

C. $\dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right|}$. **D.** $\dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$.

Lời giải.

Theo công thức góc giữa hai mặt phẳng ta có
$\cos\alpha = \left|cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right| = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$

Chọn đáp án D □

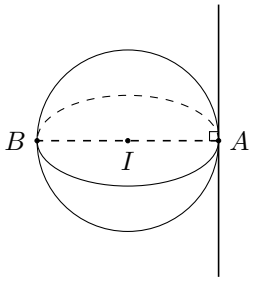
Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$. **B.** $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.

C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$. **D.** $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Lời giải.

Vì mặt cầu (S) có đường kính là AB nên tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của AB.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại A nên (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (5;1;-6)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Suy ra $(P): 5(x-6)+(y-2)-6(z+5)=0 \Rightarrow (P): 5x+y-6z-62=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là?

A. $3x-y+3z-25=0$. **B.** $2x-3y-z+8=0$.

C. $3x-y+3z-13=0$. **D.** $2x-3y-z-20=0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $A(5;-4;2)$ và vuông góc với đường thẳng AB.

Do (α) vuông góc với AB nên véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} = (-4;6;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$$-4(x-5)+6(y+4)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-z-20=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1)$ và điểm $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Lời giải.

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1;-3;2)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Mặt khác do (Q) đi qua hai điểm A, B nên nhận $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;2)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}] = (0;8;12)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Vậy $a+b+c=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=5 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-5$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}[I,(P)] = R \Leftrightarrow \frac{|1-m^2-3m|}{3} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+3m-10=0 \\ m^2+3m+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Trong các véc-tơ sau vec tơ nào **không** phải là véc-tơ pháp tuyến của (P).

A. $\vec{n}=(-1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;1)$. **C.** $\vec{n}=(-2;-4;-2)$. **D.** $\vec{n}=\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;1)$.

Tất cả các véc-tơ pháp tuyến của (P) sẽ cùng phương với $\vec{n}$ và có dạng $k\vec{n}$ với $k\in\mathbb{R}^*$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(0;1;2)$, $B(0;-1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A. $z-2=0$. **B.** $x-z+2=0$. **C.** $x=0$. **D.** $y=0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(0;0;2)$.

Suy ra (P) là mặt phẳng trung trực của AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB}=(0;-2;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

$\Rightarrow (P)\colon y=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$ có phương trình là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=2$. **B.** $2x+4y+4z=0$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=0$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$ có phương trình $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $y-z-1=0$. **B.** $y-2z=0$. **C.** $y+z=0$. **D.** $y-z=0$.

Lời giải.

(Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;1;1)$. Từ giả thiết, ta suy ra (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $[\vec{n};\vec{i}]=(0;1;-1)$. Do (P) đi qua gốc tọa độ O nên phương trình của (P) là $y-z=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm là điểm $I(1;2;4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-1=0$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=4$.

Lời giải.

Bán kính R chính bằng khoảng cách từ I đến (P). Do đó, $R=\frac{|9|}{3}=3$. Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;0), B(3;-1;1)$ và $C(1;1;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S=1$. **B.** $S=\sqrt{3}$. **C.** $S=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-3;1)\\ \overrightarrow{AC}=(0;-1;1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-2;-2)$.

Ta có $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x-2y-z+4=0$. **B.** $4x-2y+z+4=0$.

C. $4x+2y+z-4=0$. **D.** $4x+2y-z+4=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;6;-8)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+6y-8z+10=0$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là: $2x+y+z-2=0$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là: $2x-3y-2z+6=0$.

Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\dfrac{22}{101};\dfrac{70}{101};\dfrac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{22}{101};-\dfrac{31}{101};-\dfrac{26}{101}\right)=-\dfrac{1}{101}(22;31;26)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n}_{(ABC)}=(1;6;-8)$.

Vậy $\left[\overrightarrow{n}_{(ABC)};\overrightarrow{u}_{AH}\right]=(404;-202;-101)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn $\overrightarrow{n}_P=(4;-2;-1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x-2y-z+4=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-2=0$ và mặt cầu (S) tâm $I\,(2;1;-1)$ bán kính $R=2$. Bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

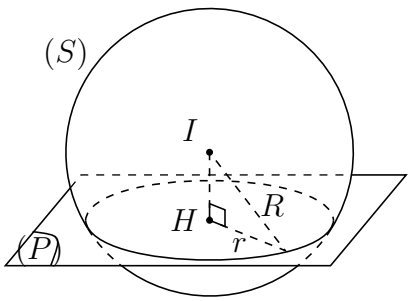
A. $r=\sqrt{3}$. **B.** $r=3$. **C.** $r=\sqrt{5}$. **D.** $r=1$.

Lời giải.

Gọi bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là r.

Ta có $h=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\cdot2+2\cdot(-1)-1-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=1$.

Suy ra $r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A\,(1;-1;2)$, $B\,(2;1;1)$ và mặt phẳng $P\colon x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Tìm phương trình mặt phẳng (Q).

A. $-x+y=0$.
B. $3x-2y-x+3=0$.
C. $x+y+z-2=0$.
D. $3x-2y-x-3=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)\,;\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$.
Do mặt phẳng Q chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{AB}\right]=(-3;2;1)$.
Do đó $Q\colon 3x-2y-z-3=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$, $C(-10;5;3)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?
A. $\overrightarrow{n_3}=(1;8;2)$. **B**. $\overrightarrow{n_1}=(1;2;0)$. **C**. $\overrightarrow{n_4}=(1;-2;2)$. **D**. $\overrightarrow{n_2}=(1;2;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2),\overrightarrow{AC}=(-12;6;0)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(12;24;24)=2\overrightarrow{n_2}$. Vậy mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{n_2}=(1;2;2)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;3;1)$, $B(1;-1;2)$, $C(2;1;3)$ và $D(0;1;-1)$. Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có phương trình là
A. $(P):8x+3y-4z+3=0$.
B. $(P):x+2y+6z-11=0$.
C. $(P):x+2z-4=0$.
D. $(P):2x+y-1=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-4;1)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;0;-4)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}]=(8;3;-4)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $A(-1;3;1)$, nhận $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}]=(8;3;-4)$ là véc-tơ pháp tuyến, có phương trình là $8(x+1)+3(y-3)-4(z-1)=0\Leftrightarrow 8x+3y-4z+3=0$
(thỏa mãn song song CD nên thỏa mãn đề bài).
Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+1=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?
A. (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-5z+1=0$.
B. Điểm $A(-1;-1;5)$ thuộc (P).
C. (P) song song với trục Oz.
D. Véc-tơ $\vec{n}=(2;-1;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;0)$. Ta có $\dfrac{2}{2}=\dfrac{-1}{-1}\neq\dfrac{0}{1}$ nên $\overrightarrow{n_P}$ không cùng phương với $\vec{n}=(2;-1;1)$. Suy ra $\vec{n}=(2;-1;1)$ không là véc-tơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Gọi M, N, P là hình chiếu vuông góc của điểm A trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Viết phương trình mặt phẳng (MNP).
A. $(MNP)\colon 6x+3y-2z-6=0$.
B. $(MNP)\colon 6x+3y+2z-6=0$.
C. $(MNP)\colon x+2y-3z-1=0$.
D. $(MNP)\colon 6x+3y-2z+6=0$.

Lời giải.

Có $M(1;0;0)$, $N(0;2;0)$, $P(0;0;-3)$ là hình chiếu của A lên các trục tọa độ nên mặt phẳng cần tìm là

$$(MNP)\colon \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y-2z-6=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;3)$, $B(1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $(ABC)\colon x+2y+4z+15=0$. **B.** $(ABC)\colon x-2y+4z+11=0$.

C. $(ABC)\colon x-2y+4z-11=0$. **D.** $(ABC)\colon x+2y+4z-15=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(0;2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;1;0)$, VTPT của (ABC) là $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;2;4)$.

Vậy $(ABC)\colon x-1+2(y-1)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+4z-15=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua các điểm $A\,(2;0;0)$, $B\,(0;3;0)$, $C\,(0;0;4)$ có phương trình là

A. $6x+4y+3z=0$. **B.** $6x+4y+3z-24=0$.

C. $6x+4y+3z-12=0$. **D.** $6x+4y+3z+12=0$.

Lời giải.

Phương trình mp(P) : $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 6x+4y+3z-12=0$

Chọn đáp án C □

.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng (α) : $x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α), (P) song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$. **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.

Từ giả thiết suy ra $[\vec{n_1},\vec{v}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Ta có $[\vec{n_1},\vec{v}]=(2;-1;2)$, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Vậy (P) có phương trình dạng $2x-y+2z+m=0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $\mathrm{d}(I;(P))=R \Rightarrow \dfrac{|2\cdot 1+3+2\cdot 2+m|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=4$.

Suy ra $|9+m|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-21 \end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$ và $D(2;1;3)$. Tìm độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ vẽ từ đỉnh D.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow 2x+y-2z-4=0$.

Khoảng cách từ đỉnh D đến mặt phẳng (ABC) là $d=\dfrac{|2\cdot 2+1-2\cdot 3-4|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho tam giác ABC. Khi đó số mặt phẳng qua A và cách đều hai điểm B và C là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Mặt phẳng qua A và song song với đường thẳng BC thì cách đều hai điểm B và C, có vô số mặt phẳng đi qua A và song song với BC.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-1;1); B(3;1;1)$.Tìm phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A. $2x+y-z-2=0$. **B.** $2x+y-2=0$. **C.** $x+2y-2=0$. **D.** $x+2y-z-2=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(4;2;0)$, trung điểm của đoạn AB là $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=1 \\ y_I=0 \\ z_I=1 \end{cases}$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có VTPT là $\vec{n}=(2;1;0)$ và đi qua điểm $I(1;0;1)$ nên có phương trình $2(x-1)+(y-0)=0$ hay $2x+y-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+16=0$. Điểm $M(0;1;-3)$, khi đó khoảng cách từ M đến (P) là

A. $\dfrac{21}{9}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm M đến (P) là $d_{(M,(P))}=\dfrac{|2+3+16|}{\sqrt{4+4+1}}=7$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua $A(2;-1;5)$ và chứa trục Ox có véc-tơ pháp tuyến $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó tỉ số $\dfrac{b}{c}$ bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{-1}{5}$. **D.** -5.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=[\overrightarrow{OA};\vec{i}]=(0;5;1)$, do đó $\dfrac{b}{c}=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $2x-y-1=0$. **B.** $-y+2z-3=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $y+2z-5=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (-2;1;0)$.
Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng $-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vec-tơ nào sau đây không phải là vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x+3y-5z+2=0$.

A. $\vec{n}_1 = (-1;-3;5)$. **B.** $\vec{n}_2 = (-2;-6;-10)$.
C. $\vec{n}_3 = (-3;-9;15)$. **D.** $\vec{n}_4 = (2;6;-10)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vec-tơ $\vec{a} = (1;3;-5)$ làm vec-tơ pháp tuyến.
Xét $\vec{n}_2 = (-2;-6;-10)$ có $\frac{-2}{1} \neq \frac{-6}{3} \neq \frac{-10}{-5}$ nên $\vec{n}_2$ không cùng phương với $\vec{a}$.
Suy ra $\vec{n}_2$ không là vec-tơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(4;2;3)$, $C(4;5;3)$. Diện tích mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn lớn là

A. 9π. **B.** 18π. **C.** 73π. **D.** 36π.

Lời giải.

Ta có $AB = 3, AC = 3\sqrt{2}, BC = 3$. Do đó tam giác ABC vuông cân tại B và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn lớn, suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là bán kính mặt cầu.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi.R^2 = 18\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-3=0$. Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P) là

A. $H(1;2;2)$. **B.** $H(2;5;3)$. **C.** $H(6;7;8)$. **D.** $H(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(3;4;5)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 4-t \\ z = 5+2t \end{cases}$

Gọi $H = \Delta \cap (P) \Rightarrow H(3+t;4-t;5+2t)$.
$H \in (P) \Rightarrow 3+t-(4-t)+2(5+2t)-3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(2;5;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $H(1;1;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua H cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác O) sao cho H là trực tâm tam giác ABC là

A. $x+y+3z+7=0$. **B.** $x+y-3z+11=0$.

C. $x+y-3z-11=0$. **D.** $x+y+3z-7=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C suy ra H là trực tâm của tam giác ABC và $OH \perp (ABC)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): x+y-3z-11=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$, mặt phẳng $(Q): x-3y+5z-2=0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

A. $\frac{\sqrt{35}}{7}$. **B.** $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $-\frac{5}{7}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có ve-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(1;2;-2)$

Mặt phẳng (Q) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(1;-3;5)$.

Ta có $\cos[(P),(Q)]=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\left|\dfrac{-15}{3\sqrt{35}}\right|=\dfrac{\sqrt{35}}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;-2;3)$ đến $(P): x+3y-4z+9=0$ là

A. $\frac{\sqrt{26}}{13}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\frac{17}{\sqrt{26}}$. **D.** $\frac{4\sqrt{26}}{13}$.

Lời giải.

$d(A,(P))=\dfrac{|1-3\cdot2-4\cdot3+9|}{\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}}=\dfrac{4\sqrt{26}}{13}$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;-5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB.

A. $y-2z+2=0$. **B.** $y-3z+4=0$. **C.** $y-2z-6=0$. **D.** $y-3z-8=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;2;-2)$.

Mặt phẳng trung trực của AB đi qua I và nhận $\overrightarrow{AB}=(0;2;-6)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên phương trình có dạng: $0(x-1)+2(y-2)-6(z+2)=0 \Leftrightarrow y-3z-8=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;1)$, $B(0;2;3)$, $C(2;1;0)$. Độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ C là

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\frac{\sqrt{26}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{26}}{3}$. **D.** 26.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;-1)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-4;1;-3)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Mà $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}d(C;AB)\cdot AB \Rightarrow d(C;AB)=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương thì giá của véc-tơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ vuông góc với mọi mặt phẳng song song với giá của các véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$.

B. $|[\vec{u}, \vec{v}]| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

C. $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{v} = 0$.

D. $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $|[\vec{u}, \vec{v}]| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$ hoặc $m = -21$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 21$.

D. $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -2)$ và bán kính $R = 2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi (P) tiếp xúc (S), từ đó suy ra $\mathrm{d}(I, (P)) = R$.

Ta có $\mathrm{d}(I, (P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - m|}{\sqrt{4^2 + 3^3 + 0^2}} = 2 \Leftrightarrow |11 - m| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 21. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$ là

A. $4x + 5y - 3z + 22 = 0$.

B. $4x - 5y - 3z - 12 = 0$.

C. $2x + y - 3z - 14 = 0$.

D. $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n_1} = (1; 1; 3), \vec{n_2} = (2; -1; 1)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(Q), (R)$.

Do mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng $(Q), (R)$ nên $[\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (4; 5; -3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Từ đó suy ra mặt phẳng (P) có phương trình $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 4)$ và $B(2; 3; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2; 2; 1)$.

B. $M(1; 1; -1)$.

C. $P(-2; 1; 0)$.

D. $N(5; -2; 1)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có $I(1; 1; 1)$.

$\overrightarrow{AB} = (2; 4; -6)$.

Khi đó, mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\vec{u} = (1; 2; -3)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình

$$(x-1) + 2(y-1) - 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z = 0.$$

Khi đó, điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $P(-2;1;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;3)$. Tìm phương trình mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=0$. **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=-1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (MNP) đi qua ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;3)$ có phương trình

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(4;9;8)$, $N(1;-3;4)$, $P(2;5;-1)$. Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm M, N, P có phương trình tổng quát $Ax+By+Cz+D=0$. Biết $A=92$, tìm giá trị của D.

A. 101. **B.** -101. **C.** -63. **D.** 36.

Lời giải.

Do $A=92$ nên mặt phẳng (P) có phương trình $92x+By+Cz+D=0$. Do (P) đi qua các điểm A,B,C nên ta có hệ

$$\begin{cases} 92\cdot 4+B\cdot 9+C\cdot 8+D=0\\ 92\cdot 1+B\cdot(-3)+C\cdot 4+D=0\\ 92\cdot 2+B\cdot 5+C\cdot(-1)+D=0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $D=-101$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+\sqrt{2}y-z+3=0$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=5$ theo giao tuyến là đường tròn có diện tích là

A. $\dfrac{11\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{15\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{7\pi}{4}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Khoảng cách từ O đến (P): $d(O;P)=\dfrac{3}{2}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r=\sqrt{R^2-[d(O,P)]^2}=\sqrt{5-\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{11}{4}}$.

Diện tích đường tròn giao tuyến $S=\pi\cdot r^2=\dfrac{11\pi}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) song song với (Oxy) và đi qua điểm $A(1;-2;1)$ có phương trình là phương trình nào sau đây?

A. $z-1=0$. **B.** $2x+y=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y+2=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(Oxy)\colon z=0$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $z+m=0$. Vì (P) đi qua $A(1;-2;1)$ nên $1+m=0\Leftrightarrow m=-1$. Phương trình $(P)\colon z-1=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+10=0$. Khoảng cách từ điểm $A(-2;3;0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{20}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 3.

Lời giải.

$d(A,(P))=\dfrac{|-4+6+10|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=4.$

Chọn đáp án B □

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-10=0$ khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. Điểm $B(2;2;2)$ thuộc mặt phẳng (P).

B. Điểm $A(-2;1;0)$ thuộc mặt phẳng (P).

C. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(2;2;1)$.

D. Giao điểm của mặt phẳng (P) với trục Oz là $C(0;0;10)$.

Lời giải.

Ta có $2\cdot(-2)+2+0-10\neq 0$ suy ra $A(-2;1;0)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án B □

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(7;-2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $3x-2y+z-14=0$. **B.** $3x-2y+z-12=0$.

C. $3x-2y+z-8=0$. **D.** $3x-2y+z-22=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(6;-4;2)$ và đi qua điểm $I(4;0;2)$ cho nên có phương trình $3(x-4)-2y+z-2=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-14=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{42}{3}$. **B.** $\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{21}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;1;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4;1;0)$.

$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(6;10;-4)]$ và $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}=-14$.

suy ra, $V=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;2)$ có phương trình là

A. $x-2y-z+2=0$. **B.** $x-2y-z-2=0$.

C. $x-2y+z-2=0$. **D.** $-x+2y-z+2=0$.

Lời giải.

Ta có, $\overrightarrow{AB}=(2;1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;0;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$.

Vậy mặt phẳng qua ba điểm A, B, và C là $x-2y-z+2=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ theo thiết diện là đường tròn bán kính r bằng

A. $r=5$. **B.** $r=3$. **C.** $r=16$. **D.** $r=4$.

Lời giải.

Mặt cầu S có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mp (Oxy) bằng 3.

Suy ra, $r=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$. Biết $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng phân biệt đi qua hai điểm $B(2;1;0)$, $C(2;0;2)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

A. $\vec{n}_1=(1;0;0), \vec{n}_2=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{n}_1=(1;1;0), \vec{n}_2=(2;-2;-1)$.

C. $\vec{n}_1=(1;0;0), \vec{n}_2=(-2;-2;1)$. **D.** $\vec{n}_1=(-1;0;0), \vec{n}_2=(2;-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=1$.

Giả sử mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A,B,C),(A^2+B^+C^2\neq 0)$ đi qua hai điểm $B(2;1;0)$, $C(2;0;2)$ và tiếp xúc với (S) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Do (P) đi qua hai điểm B,C nên $\begin{cases}2A+B+D=0\\2A+2C+D=0\end{cases}\Rightarrow B=2C$

Từ đó ta có phương án đúng là $\vec{n}_1=(-1;0;0), \vec{n}_2=(2;-2;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Vì $M\in Oy$ nên $M(0;y;0)$.

Ta có $\mathrm{d}(M;(P))=\dfrac{|y+1|}{\sqrt{3}}$ và $\mathrm{d}(M;(Q))=\dfrac{|-y-5|}{\sqrt{3}}$.

Theo giả thiết $\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(M;(Q))\Leftrightarrow |y+1|=|-y-5|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y+1=-y-5\\y+1=y=5\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-3\\0y=4\,(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$

$\Rightarrow M(0;-3;0)$.

Vậy có 1 điểm M thỏa mãn bài.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;1;3)$, $N(3;3;1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN có phương trình là

A. $x+y-z-6=0$. **B.** $-x+y+z-2=0$.

C. $x-y+z-2=0$. **D.** $x+y-z-2=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của MN, suy ra $I(2;2;2)$.

Mặt phẳng trung trực (α) của MN đi qua I và nhận $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

$\Rightarrow (\alpha)\colon 2(x-2)+2(y-2)-2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y-z-2=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(-3;0;0)$, $N(0;4;0)$, $P(0;0;-2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $4x+3y+6z-12=0$. **B.** $4x-3y+6z+12=0$.

C. $4x+3y+6z+12=0$. **D.** $4x-3y+6z-12=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (MNP): $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow 4x-3y+6z+12=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M_1, M_2, M_3 là

A. $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{3}=1$. **B.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. **C.** $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **D.** $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=-1$.

Lời giải.

Ta có $M_1(1;0;0)$, $M_2(0;2;0)$, $M_3(0;0;-3)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua M_1, M_2, M_3 là $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;3;1)$ và $B(3;-1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A. $2x-2y-z=0$. **B.** $2x-2y-z+1=0$.

C. $2x+2y-z=0$. **D.** $2x+2y+z=0$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của AB là $I(1;1;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-4;-2) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là $4(x-1)-4(y-1)-2(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x-2y-z=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $-x+y+3z+1=0$. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

A. $2x-2y-6z+7=0$. **B.** $-2x+2y+3z+5=0$.

C. $x-y+3z-3=0$. **D.** $-x-y+3z+1=0$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-1;1;3)$ cùng phương với véc-tơ $\vec{n}=(2;-2;-6)$. Vì $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{7}{1}$ nên phương trình mặt phẳng song song với (P) là $2x-2y-6z+7=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua các hình chiếu của điểm $M(-1;3;4)$ lên các trục toạ độ là

A. $\dfrac{x}{1}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=1$. **B.** $-\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=0$. **C.** $-\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$. **D.** $-\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=1$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M(-1;3;4)$ lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(-1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0,0,4)$. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua A, B, C là $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;1)$. Tính khoảng cách h từ gốc toạ độ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $h=\dfrac{1}{3}$. **B.** $h=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $h=\dfrac{2}{3}$. **D.** $h=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (MNP) viết theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{1}=1\Leftrightarrow 2x-y+2z-2=0$.

Khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0;0)$ đến (MNP) là $h=\dfrac{|-2|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Điểm nào sau đây không nằm trên mặt phẳng (Q)?

A. $K(3;1;-8)$. **B.** $N(2;1;-1)$. **C.** $I(-1;2;1)$. **D.** $M(1;0;-5)$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có dạng

$$(Q):2x-y+z+3=0$$

Thay tọa độ các đáp án vào phương trình mặt phẳng (Q) ta có 3 điểm K,I,M thoả mãn, còn điểm N không thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+y-1=0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-2;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(2;1;-1)$. **C.** $\vec{n}=(1;2;0)$. **D.** $\vec{n}=(2;1;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ, $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng (Q): $y=0$, (P): $2x-y+3z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P), (Q).

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $3x+y-2z-2=0$.

C. $3x-2z=0$. **D.** $3x-2z-1=0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{p}=(2;-1;3)$, $\vec{q}(0;1;0)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó mặt phẳng (R) nhận véc-tơ $\vec{w}=-[\vec{p},\vec{q}]=(3;0;-2)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Do đó (R) có phương trình $3x-2z-1=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và song song với mặt phẳng (α): $4x+3y-12z+10=0$.

A. $\begin{cases}4x+3y-12z+26=0\\4x+3y-12z-78=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}4x+3y-12z-26=0\\4x+3y-12z-78=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}4x+3y-12z-26=0\\4x+3y-12z+78=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}4x+3y-12z+26=0\\4x+3y-12z+78=0\end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) song song với (α) có dạng $4x+3y-12z+c=0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $r=4$ nên (P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi

$$4=d\left(I,(P)\right)=\frac{|c-26|}{13}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&c=78\\&c=-26.\end{aligned}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn bài toán là $4x+3y-12z+78=0$, $4x+2y-12z-26=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (A, B, C không trung O) sao cho $\dfrac{OA}{1}=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{4}$.

A. $2x-y-z-1=0$. **B.** $x+2y+4z+1=0$.

C. $4x+2y+z+1=0$. **D.** $4x+2y+z-8=0$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $a,b,c>0$. Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}-\dfrac{2}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=4\\c=8.\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x+2y+z-8=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;-2)$ và $B(3;-1;0)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$ tại điểm I. Tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}:\dfrac{4}{\sqrt{3}}=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+1=0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r. Tính r.

A. $r=3$. **B.** $r=2\sqrt{2}$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=2$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9\Rightarrow\begin{cases}I(1;2;2)\\R=3\end{cases}$.

$d=\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{|2\cdot1-2-2\cdot2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1$.

Vậy $r=\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+2=0$ và điểm $I(1;2;2)$. Phương trình mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=36$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu $(\mathcal{S})$ là $R=d(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 1+2\cdot 2-2+2|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2$.

Phương trình mặt cầu $(\mathcal{S})$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $3x-y-z+1=0$. **B.** $3x+y+z-6=0$.

C. $3x-y-z=0$. **D.** $6x-2y-2z-1=0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Khi đó (α) đi qua điểm $M(1;1;2)$, là trung điểm của AB, và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Phương trình của mặt phẳng (α) là

$$-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow -6x+2y+2z=0\Leftrightarrow 3x-y-z=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 89. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $H(1;2;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz tại A,B,C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

A. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-3}=1$. **B.** $x+2y+3z+14=0$.

C. $x+2y-3z-14=0$. **D.** $x+y+z=0$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $abc\neq 0$.

Khi đó $(\alpha)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $\overrightarrow{HA}=(a-1;-2;3)$, $\overrightarrow{HB}=(-1;b-2;3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$ và $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

H là trực tâm của $\triangle ABC\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+3c=0\\ a+3c=0\end{cases}\Rightarrow a=2b=-3c$.

Mặt khác $H\in(\alpha)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}-\dfrac{3}{c}=1$.

Suy ra $\dfrac{1}{-3c}+\dfrac{4}{-3c}-\dfrac{3}{c}=1\Leftrightarrow 14=-3c\Leftrightarrow c=-\dfrac{14}{3}\Rightarrow a=14,b=7$.

Vậy $(\alpha)\colon \dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{-\frac{14}{3}}=1$ hay $(\alpha)\colon x+2y-3z-14=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathcal{S})\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-1=0$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-m=0$. Tìm tất cả m để (P) cắt $(\mathcal{S})$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất.

A. $m=-4$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=7$.

Lời giải.

Mặt cầu $(\mathcal{S})$ có tâm $I(1;1;-2)$. Để (P) cắt $(\mathcal{S})$ theo đường tròn có bán kính lớn nhất thì đó là đường tròn lớn. Suy ra $I \in (P) \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0)$, $N(0;-2;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=-1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=0$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-2}=1$. **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\,(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(P): 3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P)?

A. $(Q): 3x-y+2z+6=0$. **B.** $(Q): 3x-y-2z-6=0$.

C. $(Q): 3x-y+2z-6=0$. **D.** $(Q): 3x+y-2z-14=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(Q) \parallel (P) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $3x-y+2z+d=0$ với $d \neq 4$.

Điểm M thuộc mặt phẳng (Q) nên $3\cdot 3+1-4+4=0 \Rightarrow d=-6$, suy ra phương trình mặt phẳng (Q) là $3x-y+2z-6=0$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I\,(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên có bán kính:

$$R=\mathrm{d}\,(I,(P))=\frac{|1-2\cdot 2-2\cdot(-1)-8|}{3}=3.$$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 94. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với nhau một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải.

Dựa vào kiến thức cơ bản của hình học không gian ta suy ra khẳng định đúng là: Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án B ☐

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Oz và đi qua điểm $P\,(3;-4;7)$.

A. $4x-3y=0$. **B.** $3x+4y=0$. **C.** $4x+3y=0$. **D.** $-3x+4y=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{k}\,(0;0;1)\,,\overrightarrow{OP}\,(3;-4;7)$.
Suy ra mặt phẳng có (P) một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\vec{k}\wedge\overrightarrow{OP}=(-4;-3;0)=-1\,(4;3;0)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $O\,(0;0;0)$, có véc-tơ pháp tuyến $(4;3;0)$.
Vậy mặt phẳng có (P) có phương trình tổng quát là $4x+3y=0$
Chọn đáp án C □

Câu 96. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

A. $x=y+z$. **B.** $y-z=0$. **C.** $y+z=0$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oyz) là $x=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A. $x-2y-2z=0$. **B.** $x-2y-z-1=0$. **C.** $x-2y-z=0$. **D.** $x-2y-z+5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của AB nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-4;-2)=2(1;-2;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(2;0;1)$. Do đó, mặt phẳng này có phương trình $x-2y-z-1=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-6=0$ cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C. Lúc đó thể tích V của khối tứ diện $OABC$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 18.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ lần lượt là giao của mặt phẳng (P) với ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz.
Khi đó $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;6)$ và tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc tại O.
Do đó $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{6}3\cdot 2\cdot 6=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon y-z+2=0$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n}=(0;1;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;0)$. **C.** $\vec{n}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{n}=(0;1;-1)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(0;1;-1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho $A(-1;2;1)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+4y-6z-5=0$; $(Q)\colon x+2y-3z=0$. Khi đó

A. mặt phẳng (Q) qua A và $(Q) \parallel (P)$.
B. mặt phẳng (Q) không qua A và không song song với mặt phẳng (P).
C. mặt phẳng (Q) không qua A và $(Q) \parallel (P)$.
D. mặt phẳng (Q) qua A và mặt phẳng (Q) cắt mặt phẳng (P).

Lời giải.

Thay tọa độ điểm A vào phương trình mặt phẳng (Q) thỏa mãn, do đó $A \in (Q)$.
Vì $\vec{n}_P = (2;4;-6) = 2(1;2;-3) = \vec{n}_Q$ nên $(P) \parallel (Q)$.

Chọn đáp án A □

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng tọa độ Oxy là

A. $(1;0;3)$. **B**. $(1;-2;0)$. **C**. $(0;-2;3)$. **D**. $(1;0;0)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng $(Oxy)\colon z=0$ là $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3+t \end{cases}$.
Gọi H là tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng tọa độ Oxy, suy ra H là giao điểm của đường thẳng d và (Oxy). Ta có $3+t=0 \Rightarrow t=-3 \Rightarrow H(1;-2;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+4=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. (P) tiếp xúc (S). **B**. (P) không cắt (S).
C. (P) đi qua tâm của (S). **D**. (P) cắt (S).

Lời giải.

(S) có tâm $I(0;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.
Ta có $\mathrm{d}[I,(P)] = \dfrac{|2+3+4|}{\sqrt{1+1+1}} = 3\sqrt{3} > \sqrt{15} = R$ nên (P) không cắt (S).
Chọn đáp án B □

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;2;4)$ và chứa trục Oy có phương trình

A. $(P): 4x-z=0$. **B**. $(P): 4x+z=0$. **C**. $(P): x-4z=0$. **D**. $(P): x+4z=0$.

Lời giải.

(P) có cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{v}_{Oy} = (0;1;0)$ và $\overrightarrow{OM} = (-1;2;4)$. Khi đó véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = (-4;0;-1)$, ta chọn $\vec{n}_{(P)} = (4;0;1)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;2;4)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (4;0;1)$ nên có phương trình $4(x+1)+(z-4)=0$ hay $4x+z=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 104. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Có bao nhiêu điểm trên trục Oy thỏa mãn điểm M cách đều 2 mặt phẳng (P)

và (Q).

A. 0. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

• Điểm $M \in Oy \Rightarrow M(0;m;0)$.

• $d(M,(P)) = d(M,(Q)) \Leftrightarrow \dfrac{|m+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|m+5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m = -3$. Vậy có 1 điểm M thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+b+c$ là

A. -3. **B**. 2. **C**. -2. **D**. 3.

Lời giải.

Nhận xét: Điểm M luôn tồn tại. Ta có $M \in (P)$ nên $a+b+c+2=0 \Leftrightarrow a+b+c=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)=0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc tọa độ O) của mặt cầu (S) và các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $6x-3y-2z-12=0$. **B**. $6x+3y+2z-12=0$.

C. $6x-3y-2z+12=0$. **D**. $6x-3y+2z-12=0$.

Lời giải.

☑ Mặt cầu (S) giao với trục Ox tại A có tọa độ $(x;0;0)$. Thay tọa độ điểm A vào phương trình của (S) ta có $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$. Do điểm A khác gốc tọa độ O nên $x=2$. Vậy $A(2;0;0)$.

☑ Tương tự ta cũng tìm được tọa độ các giao điểm B, C là $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$.

☑ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;4;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;0;6)$. Suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (24;12;8)$.
Khi đó phương trình (ABC) là $24(x-2)+12y+8z=0 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ và $(Q)\colon x+my+z-1=0$. Tìm tham số m để hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau.

A. $m=-4$. **B**. $m=-\dfrac{1}{2}$. **C**. $m=\dfrac{1}{2}$. **D**. $m=4$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) và (Q) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2;-1;2)$ và $\vec{n}_2 = (1;m;1)$.
Do đó $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2-m+2=0 \Leftrightarrow m=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 108. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;-3)$. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $\vec{n} = (-6;-3;2)$. **B**. $\vec{n} = (6;-2;3)$. **C**. $\vec{n} = (6;-3;2)$. **D**. $\vec{n} = (-6;-2;3)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;2;0)\\ \overrightarrow{AC}=(1;0;-3)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=(6;-3;2)$. Vậy véc-tơ $\vec{n}=(6;-3;2)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Chọn đáp án C □

Câu 109. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$; $B(-1;0;4)$; $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC?

A. $x-2y-5z=0$. **B.** $x-2y-5z-5=0$.

C. $x-2y-5z+5=0$. **D.** $2x-y+5z-5=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $A(2;1;-1)$ và vuông góc với BC có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(1;-2;-5)$ nên nó có phương trình là $1\cdot(x-2)+(-2)\cdot(y-1)+(-5)\cdot(z+1)=0\Leftrightarrow x-2y-5z-5=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;1)$, $B(3;3;-1)$. Lập phương trình mặt phẳng (α) là trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $(\alpha)\colon 2x-y+z+1=0$. **B.** $(\alpha)\colon 2x+y-z-2=0$.

C. $(\alpha)\colon 2x+y-z-4=0$. **D.** $(\alpha)\colon 2x+y+z+4=0$.

Lời giải.

Trung điểm của AB là $M(1;2;0)$, (α) nhận $\overrightarrow{AB}=(4;2;-2)$ là một VTPT nên $\vec{n}=(2;1;-1)$ cũng là một VTPT của (α). Do đó phương trình (α) là $2x+y-z-4=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;1;0)$, $N(0;0;2)$, $A(3;2;1)$. Lập phương trình mặt phẳng (MNP), biết điểm P là hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox.

A. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$. **B.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **C.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=0$. **D.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Hình chiếu của $A(3;2;1)$ lên trục Ox là $P(3;0;0)$ nên ta có $(MNP)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$.

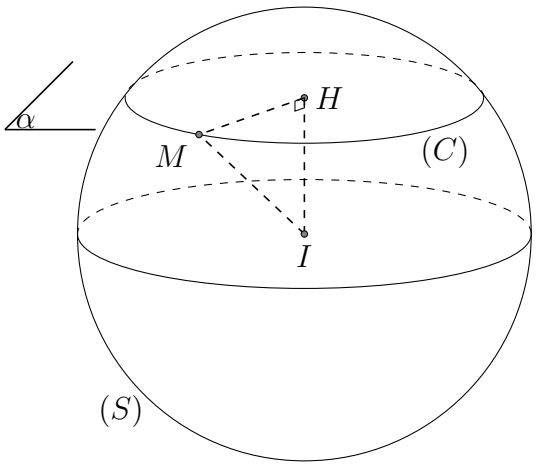
Chọn đáp án D □

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-20=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-2z+7=0$ cắt nhau theo một đường tròn có chu vi bằng

A. 6π. **B.** 12π. **C.** 3π. **D.** 10π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=5$.
Ta có $\mathrm{d}(I,(\alpha))=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2-2\cdot 0+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=4$.
Vì $\mathrm{d}(I,(\alpha))<R$ nên (α) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên $(\alpha)\Rightarrow H$ là tâm của (C).
Lấy $M\in(C)\Rightarrow M\in(S)$. Tam giác IHM vuông tại M
$\Rightarrow MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.
Suy ra chu vi của đường tròn (C) bằng $2\pi\cdot HM=6\pi$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 113. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;2)$, $(\alpha)\colon 2x-3y+2z-4=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (α) là

A. $2x-3y+2z-4=0$. **B.** $2x-3y+2z+1=0$.
C. $2x-3y+z-1=0$. **D.** $2x-3y+2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\vec{n}_{(\alpha)}=(2;-3;2)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm.
Phương trình tổng quát có dạng: $2(x-2)-3(y-3)+2(z-2)=0\Leftrightarrow 2x-3y+2z+1=0$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 114. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-15=0$. Mặt phẳng (P) song song với (α) và tiếp xúc với (S) là

A. $(P)\colon 2x+y+2z-15=0$. **B.** $(P)\colon 2x+y+2z+15=0$.
C. $(P)\colon 2x+y+2z-3=0$. **D.** $(P)\colon 2x+y+2z+3=0$.

Lời giải.

(S) có tâm $I\,(1;-2;3)$, bán kính $R=3$.
(P) song song với $(\alpha)\Rightarrow (P)\colon 2x+y+2z+m=0$, với $m\neq -15$.
Do mặt phẳng (P) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow \mathrm{d}[I,(P)]=R\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-15 \\ m=3 \end{array}\right.$, so với điều kiện ta nhận $m=3$.
Vậy $(P)\colon 2x+y+2z+3=0$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A\,(2;3;3)$ và song song với giá của hai véc-tơ $\vec{a}=(1;0;2)$ và $\vec{b}=(-1;3;1)$ có phương trình là

A. $(P)\colon x+2y+3z+14=0$. **B.** $(P)\colon x+2y-12=0$.
C. $(P)\colon 2x+y-z-4=0$. **D.** $(P)\colon 2x+y-z-2=0$.

Lời giải.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-6;-3;3)$.
Suy ra mặt phẳng (P) đi qua $A\,(2;3;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-1)$.
$\Rightarrow (P)\colon 2\,(x-2)+1\,(y-3)-1\,(z-3)=0$ hay $(P)\colon 2x+y-z-4=0$.
Chọn đáp án C ☐

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

A. $(P)\colon 4x-3y-7=0$. **B.** $(P)\colon 4x-3y+7=0$.

C. $(P)\colon 4x-3y+2z-16=0$. **D.** $(P)\colon 4x-3y+2z+16=0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB suy ra $M(1;-1;1)$. $\overrightarrow{AB}=(8;-6;0)$.

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng (AB) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-3;0)$ và qua $M(1;-1;1)$ có phương trình là $(P)\colon 4x-3y-7=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$ và điểm $A(1;1;0)$ thuộc (S). Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A có phương trình là

A. $x+y=1=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x-1=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$, bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+1+0+4}=3$. Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;0;0)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua A có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA}=(3;0;0)$ có phương trình là $3(x-1)+0(y-1)+0(z-0)=0\Leftrightarrow x-1=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-my+z-1=0\,(m\in\mathbb{R})$, mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;-3;1)$. Tìm số thực m để hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc.

A. $m=-3$. **B.** $m=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $m=\dfrac{1}{3}$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;-3;1)$, $\vec{i}=(1;0;0)$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1;-3;1)$ và chứa trục $Ox\Rightarrow(Q)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=[\overrightarrow{OA},\vec{i}\,]=(0;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-m;1)$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow 0\cdot1+1\cdot(-m)+1\cdot3=0\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 119. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-11=0$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$. Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính chu vi đường tròn (C).

A. 6π. **B.** 8π. **C.** 10π. **D.** 4π.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu $(S):\ (x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$.

Gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu. Ta có $I\,(-2;1;-3)$ và $R=5$. Gọi J, r là tâm và bán kính đường tròn (C).

Do $IJ\perp(P)$ nên $IJ=d\,(I;(P))=\dfrac{|-2-2-6+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$.

Mà $r=\sqrt{R^2-IJ^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. Khi đó chu vi đường tròn (C) là $2\pi r=8\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 120. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\,(2;-4;1)$ và chắn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

A. $4x+2y-z-1=0$. **B**. $4x-2y+z+1=0$.

C. $16x+4y-4z-1=0$. **D**. $4x+2y+z-1=0$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $a,b,c\neq 0$ và $b=2a$, $c=2b$. Giả sử $A\,(a;0;0)$, $B\,(0;b;0)$ và $C\,(0;0;c)$ khi đó phương trình mặt phẳng $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Do M thuộc (P) nên

$$\frac{2}{a}-\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{2}{a}-\frac{4}{2a}+\frac{1}{4a}=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$$

Suy ra $b=\dfrac{1}{2}$ và $c=1$ do đó phương trình mặt phẳng $(P):4x+2y+z-1=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A\,(1;1;0)$, $B\,(1;1;2)$, $D\,(1;0;2)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi S là diện tích hình bình hành $ABCD$ khi đó $S=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$. Mà $\overrightarrow{AB}\,(0;0;2)$ và $\overrightarrow{AD}\,(0;-1;2)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(2;0;0)$ nên $\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|=2$. Vậy $S=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-1=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A. $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$. **B**. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$.

C. $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$. **D**. $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải.

Bán kính R của mặt cầu được tính bởi

$$R=d(A,(P))=\frac{|2+2\cdot 2-2\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1.$$

Từ đó, phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$ và $B(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P).

A. $(Q):2x-y+3=0$. **B**. $(Q):3x-y+z-4=0$.

C. $(Q):-x+y+z=0$. **D**. $(Q):3x-y+z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(1;2;-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2)$.

Mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{n_1},\overrightarrow{AB}]=(3;-1;1)$.

Từ đó, phương trình mặt phẳng (Q) là $3x-y+z-4=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;-1)$, $B(1;-1;3)$, $C(0;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

A. $8x+4y+5z-19=0$. **B.** $10x+3y+z-19=0$.

C. $2x-y+z-3=0$. **D.** $10x-3y-z-21=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;4)$ và $\overrightarrow{AC}=(-3;1;4)$.

Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-8;-4;-5)$.

Từ đó phương trình mặt phẳng (ABC) là $8x+4y+5z-19=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x-my-z+7=0$, $(Q): 6x+5y-2z-4=0$. Xác định m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

A. $m=4$. **B.** $m=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $m=-30$. **D.** $m=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Hai mặt phẳng đã cho song song với nhau khi và chỉ khi $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-m}{5}=\dfrac{-1}{-2}\neq\dfrac{7}{-4}$

$\Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 126. Cho $A\,(1;2;3)$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2=0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $x+y+z+3=0$ và $x+y+z-3=0$. **B.** $x+y+z+3=0$ và $x+y+z+15=0$.

C. $x+y+z+3=0$ và $x+y+z-15=0$. **D.** $x+y+z+3=0$ và $x+y-z-15=0$.

Lời giải.

Do $(Q)\parallel(P)\Rightarrow(Q)\colon x+y+z+d=0,\quad d\neq-2$.

Mà $d\,(A,(Q))=3\sqrt{3}\Leftrightarrow|6+d|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=3\\ d=-15.\end{array}\right.$

Vậy $(Q_1)\colon x+y+z+3=0$ và $(Q_2)\colon x+y+z-15=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 127. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;-1)$, $B(4;-1;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $2x+2y+3z+1=0$. **B.** $4x-4y-6z+\dfrac{15}{2}=0$.

C. $4x+4y+6z-7=0$. **D.** $x+y-z=0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB. Tọa độ trung điểm của AB là $I\left(3;-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(2;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon 2(x-3)+2(y+2)+3\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 4x+4y+6z-7=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 128. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y-z-1=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α)?

A. $M(-2;1;-8)$. **B.** $N(4;2;1)$. **C.** $P(3;1;3)$. **D.** $Q(1;2;-5)$.

Lời giải.

Vì $2\cdot 3-3\cdot 1-3-1=-1\neq 0$ nên điểm $P(3;1;3)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án C □

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $P(0;0;-5)$. **B.** $N(-5;0;0)$. **C.** $Q(2;-1;5)$. **D.** $M(1;1;6)$.

Lời giải.

Vì $1-2\cdot 1+6-5=0$ nên điểm $M(1;1;6)$ thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(1;-2;3)$, $C(4;1;0)$, phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $x+3y+4z+7=0$. **B.** $x+3y+4z-7=0$.

C. $3x+y+4z-5=0$. **D.** $4x+y+3z-4=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(1;-3;2)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0;-1)\Rightarrow[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(3;9;12)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$(x-0)+3(y-1)+4(z-1)=0\Leftrightarrow x+3y+4z-7=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$ và mặt phẳng $(P)\colon 4x+3z-34=0$. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc (S)?

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;-1)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng $(P)\parallel(\alpha)$ có dạng $4x+3z+m=0$, $(m\neq 34)$.

(P) tiếp xúc $(S)\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(P))=R\Leftrightarrow |m+9|=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=16 \text{ (nhận)}\\ m=-34 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+4y+3z-5=0$ và $(Q)\colon mx-ny-6z+2-0$. Giá trị của m,n sao cho $(P)\parallel(Q)$ là

A. $m=4;n=-8$. **B.** $m=n=4$. **C.** $m=-4;n=8$. **D.** $m=n=-4$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{(P)}=(2;4;3)$, (Q) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{(Q)}=(m;-n;-6)$.

Để hai mặt phẳng trên song song thì $\vec{u}_{(Q)}=k\vec{u}_{(P)}\,(k\neq 0)\Leftrightarrow \begin{cases} m=2k\\ -n=4k\\ -6=3k\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} k=-2\\ m=-4\\ n=8.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(3;6;-2)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;3)$. **C.** $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;-1;-3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng trên đi qua các điểm $A(-2;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;3)$. Do đó véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-1;0), \overrightarrow{AC} = (2;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3;-6;2)$. Vậy chọn một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng đó là $\vec{n} = (3;6;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ là

A. $m = 5$. **B.** $m = \sqrt{3}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $Oxy : z = 0$.

Mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3;0;2)$ bán kính $R = \sqrt{m^2+1}$.

Để (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu (S) thì $d(I, Oxy) = R \Rightarrow \dfrac{|2|}{\sqrt{1^2}} = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow m^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 3$ $\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$. Vì m nhận giá trị dương nên $m = \sqrt{3}$.

Vậy $m = \sqrt{3}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ và $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $-2x - y + 9z - 36 = 0$. **B.** $2x - y - z = 0$.

C. $6x + 9y + z + 8 = 0$. **D.** $6x + 9y + z - 8 = 0$.

Lời giải.

Gọi $d_1\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$.

Khi đó VTCP của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u_1} = (-2;1;3), \vec{u_2} = (1;-1;3)$.

Mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng d_1 và d_2 có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (6;9;1)$.

Chọn $M(1;-2;4) \in d_1 \Rightarrow M \in (\alpha)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là : $6x + 9y + z + 8 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và cho điểm $M(1;-2;5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

A. $5x + 2y - z + 14 = 0$. **B.** $x - 4y - 3z + 6 = 0$.

C. $x - 4y - 3z - 6 = 0$. **D.** $5x + 2y - z + 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1;1;-1)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1;-2;3)$.

Suy ra $\left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (1;-4;-3)$.

Do (α) vuông góc với (P) và (Q) nên $\begin{cases} \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(Q)} \end{cases}$.

Chọn $\vec{n}_{(\alpha)} = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (1;-4;-3)$. Hơn nữa, (α) đi qua $M(1;-2;5)$ nên có phương trình là

$$(x-1)-4(y+2)-3(z-5)=0 \Leftrightarrow x-4y-3z+6=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;6;0)$, $B(0;0;-2)$ và $C(-3;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C là

A. $-2x+y-3z+6=0$. **B.** $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{-3}=1$.

C. $2x-y+3z+6=0$. **D.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-6}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $(P)\colon \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow -2x+y-3z=6 \Leftrightarrow 2x-y+3z+6=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-7)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $x-2y+4z+2=0$. **B.** $x-2y-3z-1=0$.

C. $x-2y+3z+17=0$. **D.** $x-2y+4z+18=0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-4;8)$. Suy ra một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;4)$

Hơn nữa, trung điểm của AB là $I(2;4;-3)$ thuộc mặt phẳng (P) nên

$$(P)\colon (x-2)-2(y-4)+4(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y+4z+18=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+my+(m-1)z+1=0$ và $(Q)\colon x+y+2z=0$. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1;1;2\}$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $A(0;0;0)\in(Q)$.

$(P)\parallel(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1}=\dfrac{m}{1}=\dfrac{m-1}{2} \\ A(0;0;0)\notin(P) \end{cases}$. Hệ này vô nghiệm. Do đó (P) không song song với (Q), với mọi giá trị của m.

Chọn đáp án D □

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $H(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm H và cắt các trục tọa độ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

A. $(P)\colon x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **B.** $(P)\colon x+2y+3z-14=0$.

C. $(P)\colon x+y+z-6=0$. **D.** $(P)\colon \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{9}=1$.

Lời giải.

Giả sử (P) cắt các trục tọa độ tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c), abc \neq 0$.
Khi đó $(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Ta có $\overrightarrow{HA}=(a-1;-2;-3)$, $\overrightarrow{HB}=(-1;b-2;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$ và $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.
H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b-3c=0\\ a-3c=0\end{cases} \Rightarrow a=2b=3c.$
Mặt khác $H\in(P) \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.
Suy ra $\dfrac{1}{3c}+\dfrac{4}{3c}+\dfrac{3}{c}=1 \Leftrightarrow 14=3c \Leftrightarrow c=\dfrac{14}{3} \Rightarrow a=14, b=7$.
Vậy $(P)\colon \dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{\frac{14}{3}}=1$ hay $(P)\colon x+2y+3z-14=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x+y-3z-8=0$. **B.** $x+y-3z+3=0$. **C.** $x+y+3z-9=0$. **D.** $x-y-3z+3=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;3)$.
Do mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ là véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $-1(x-2)-1(y-1)+3(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y-3z+3=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(-2;4;4)$, $C(4;0;5)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho độ dài đoạn thẳng GM ngắn nhất. Tính độ dài đoạn thẳng GM.

A. $GM=4$. **B.** $GM=\sqrt{5}$. **C.** $GM=1$. **D.** $GM=\sqrt{2}$.

Lời giải.

G là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow G\left(\dfrac{1-2+4}{3};\dfrac{2+4+0}{3};\dfrac{3+4+5}{3}\right)=(1;2;4)$.
Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.
GM ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy). Khi đó, ta có

$$GM=\mathrm{d}\left(G,(Oxy)\right)=\frac{|4|}{\sqrt{1}}=4.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(4;3;2)$, $C(5;2;1)$. Diện tích của tam giác ABC là

A. $2\sqrt{42}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{4}$. **C.** $\sqrt{42}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;1;0)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;4;-5)$.
Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+4^2+(-5)^2}=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 144. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;-1), B(1;-2;3), C(0;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

A. $2x+y+z-3=0$. **B.** $10x+3y+z-19=0$.

C. $2x-y+z-3=0$. **D.** $10x-3y-z-21=0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-2;4)\\ \overrightarrow{AC}=(-2;1;3).\end{cases}$

Theo giả thiết mặt phẳng cần tìm qua $A(2;0;-1)$ và nhận $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-10;-5;-5)=-5(2;1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng qua A, B, C là

$$2(x-2)+(y-0)+(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-3=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 145. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α), biết (α) song song với $(P): 2x+y-2z+11=0$ và cắt mặt cầu (S) theo tiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $2x+y-2x-11=0$. **B.** $2x-y-2z-7=0$.

C. $2x+y-2z-5=0$. **D.** $2x+y-2z-7=0$.

Lời giải.

Vì $(\alpha) \parallel (P)$ nên phương trình mặt phẳng (α) có dạng $2x+y-2z+c=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Đường tròn có chu vi 8π nên bán kính $r=4$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng P bằng 3.

Từ đó ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 1+2-2\cdot 3+c|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3 \Leftrightarrow |-2+c|=9 \Leftrightarrow \hoac{c=11\\ c=-7}$.

Vì $(\alpha) \parallel (P)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là $2x+y-2z-7=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-2z-1=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Lấy $M(-3;0;0) \in (P)$. Vì $(P) \parallel (Q)$ nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q).

Ta có $\mathrm{d}(M,(Q))=\dfrac{|x_M+2y_M-2z_M-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;-1;2)$ và $N(2;1;4)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN.

A. $3x+y-1=0$. **B.** $y+z-3=0$. **C.** $x-3y-1=0$. **D.** $2x+y-2z=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN.

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} \\ z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 0 \\ z_I = 3 \end{cases}.$$

Khi đó $I(2;0;3)$. $\overrightarrow{MN} = (0;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN là $2y + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow y + z - 3 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y - 2z + 4 = 0$ và $(\beta)\colon -x + 2y + 2z - 7 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

A. 3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta thấy (α) và (β) song song với nhau nên với $A(0;2;0) \in (\alpha)$.

Khi đó $\mathrm{d}[(\alpha);(\beta)] = \mathrm{d}(A;(\beta)) = \dfrac{|4-7|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-3;-2;3)$ và vuông góc với trục Ox.

A. $(P)\colon x + 3 = 0$. **B.** $(P)\colon x + y + 5 = 0$. **C.** $(P)\colon y + z - 1 = 0$. **D.** $(P)\colon x - 3 = 0$.

Lời giải.

Vì mặt phẳng (P) vuông góc với Ox nên có một véc-tơ pháp tuyến là véc-tơ $\vec{i} = (1;0;0)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $1(x-(-3)) + 0(y-(-2)) + 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $E(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng Oxy?

A. $z - 3 = 0$. **B.** $x + y - 3 = 0$. **C.** $x + y + z - 6 = 0$. **D.** $z + 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z = 0$ nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$. Phương trình của mặt phẳng cần tìm có dạng $0(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt có phương trình là $x - 4z + 8 = 0$, $2x - 8z = 0$, $y = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $(P) \equiv (Q)$. **B.** (P) cắt (Q). **C.** $(Q) \parallel (R)$. **D.** (R) cắt (P).

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{p} = (1;0;-4)$ và mặt phẳng (R) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{r} = (0;1;0)$. Do $\vec{p} \neq k \cdot \vec{r}, \forall k \in \mathbb{R}$ nên véc-tơ $\vec{p}$ không cùng phương với véc-tơ $\vec{r}$. Vậy mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính p và q lần lượt là khoảng cách từ điểm $M(5;-2;0)$ đến mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 4z + 5 = 0$.

A. $p=2$ và $q=3$. **B.** $p=2$ và $q=4$. **C.** $p=-2$ và $q=4$. **D.** $p=5$ và $q=4$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$ nên $p=\mathrm{d}(M,(Oxz))=\dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=2$.

Do mặt phẳng (P) có phương trình $3x-4z+5=0$ nên $q=\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|3\cdot 5-4\cdot 0+5|}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng OM.

A. $(P)\colon x+y+1=0$. **B.** $(P)\colon x-y-1=0$. **C.** $(P)\colon y-1=0$. **D.** $(P)\colon y+1=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;-1;0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(0;-1;0)$ nên có phương là $0(y-0)+(-1)(y+1)+0(z-0)=0\Leftrightarrow y+1=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;1;0)$, $N(2;0;0)$, $P(0;0;-3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (MNP)?

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-3}=1$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-3}=0$. **C.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-3}=1$. **D.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-3}=0$.

Lời giải.

Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (MNP) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-3}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;-5;0)$ biết (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+16=0$.

A. $(S)\colon x^2+(y+5)^2+z^2=2$. **B.** $(S)\colon x^2+(y+5)^2+z^2=4$.

C. $(S)\colon x^2+(y-5)^2+z^2=2$. **D.** $(S)\colon x^2+(y-5)^2+z^2=4$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu là $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|0+2\cdot(-5)-2\cdot 0+16|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|6|}{\sqrt{9}}=2$. Phương trình mặt cầu cần tìm là $(S)\colon x^2+(y+5)^2+z^2=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 156. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+3=0$ và $(Q)\colon x-4y+(m-1)z+1=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

A. $m=-3$. **B.** $m=-6$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q).

Ta có $\vec{n}_P=(1;2;-1)$ và $\vec{n}_Q=(1;-4;m-1)$.

Ta có $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow 1-8-(m-1)=0\Leftrightarrow m=-6$.

Chọn đáp án B □

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y+4z-1=0$; $(\beta)\colon 2x+3y-2z+5=0$. Chọn khẳng định **đúng**.

A. $(\alpha) \perp (\beta)$. **B.** $(\alpha), (\beta)$ chéo nhau. **C.** $(\alpha) \parallel (\beta)$. **D.** $(\alpha) \equiv (\beta)$.

Lời giải.

Hai mặt phẳng (α) và (β) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_\alpha = (1;2;4)$ và $\vec{n}_\beta = (2;3;-2)$.
Ta có $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.
Chọn đáp án A □

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính bán kính mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 2 = 0$.

A. $R = 3$. **B.** $R = 5$. **C.** $R = \sqrt{2}$. **D.** $R = 1$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính

$$R = \mathrm{d}(I,(P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;0)$ và chứa đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;a;b)$. Tính $a+b$.

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=-3$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải.

Lấy $B(-1;0;0) \in d$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-2;0), \vec{u_d} = (2;3;1)$.
Mặt phẳng đi qua A và chứa d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d\right] = (-2;2;-2)$.
Một trong các véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n} = (1;-1;1) \Rightarrow a = -1, b = 1$.
Vậy $a + b = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + 2y - 5z - 3 = 0$ và hai điểm $A(3;1;1), B(4;2;3)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với (P). Phương trình nào là phương trình của mặt phẳng (Q).

A. $9x - 7y - z + 19 = 0$. **B.** $-9x + 7y + z - 19 = 0$.
C. $-9x - 7y + z - 19 = 0$. **D.** $9x - 7y - z - 19 = 0$.

Lời giải.

Vì (Q) là mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (P) nên mặt phẳng (Q) nhận $\overrightarrow{AB} = (1;1;2)$ và $\vec{n}_{(P)} = (1;2;-5)$ làm hai véc-tơ chỉ phương.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right] = (-9;7;1)$.
Phương trình mặt phẳng (Q): $-9(x-3) + 7(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 9x - 7y - z - 19 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 161. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;2;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;\sqrt{2})$ và $D(0;-2;0)$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AD}=(0;4;0)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2&0\\-2&\sqrt{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&2\\\sqrt{2}&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&-2\\0&-2\end{vmatrix}\right)=\left(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2};-4\right)$.

Suy ra mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{ABC}=(1;1;\sqrt{2})$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2&\sqrt{2}\\4&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\sqrt{2}&0\\0&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&-2\\0&4\end{vmatrix}\right)=\left(-4\sqrt{2};0;0\right)$.

Suy ra mặt phẳng (ACD) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{ACD}=(1;0;0)$.

Ta có $\cos((ABC),(ACD))=\dfrac{|\vec{n}_{ABC}\cdot\vec{n}_{ACD}|}{|\vec{n}_{ABC}|\cdot|\vec{n}_{ABC}|}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $D(1;1;1)$. Đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD}=(2;3;-3)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;0;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0;-3)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}0&-4\\0&-3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4&-3\\-3&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&0\\4&0\end{vmatrix}\right)=(0;-25;0)$.

Đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D bằng

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{|2\cdot0+3\cdot(-25)+(-3)\cdot0|}{\sqrt{0^2+(-25)^2+0^2}}=3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z+1=0$ và $(Q)\colon (2m-1)x+m(1-2m)y+(2m-4)z+14=0$ với m là tham số thực. Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-3;2)$.

(Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(2m-1;m(1-2m);2m-4)$.

(P) và (Q) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{n}_P\perp\vec{n}_Q$.

Điều này tương đương với $\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow 6m^2+3m-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng $1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(3;4;0)$ thuộc (S). Phương trình mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A là

A. $x+y+z-7=0$. **B.** $2x-2y+z+2=0$.

C. $2x+2y+z-14=0$. **D.** $2x-2y-z+2=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$. Khi đó $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$.

Mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A nhận $\overrightarrow{IA}$ là véc-tơ pháp tuyến. Do đó phương trình mặt phẳng tiếp diện đó là $2(x-3)+2(y-4)+y=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-14=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(1;2;0)$, $C(2;1;-2)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $4x-2y+z+8=0$. **B.** $4x+2y+z+8=0$.

C. $4x-2y+z-8=0$. **D.** $4x+2y+z-8=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;1;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-4;2;-1)$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (ABC) là $-4(x-2)+2y-z=0\Leftrightarrow 4x-2y+z-8=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 166. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-2=0$ và điểm $I(1;2;-3)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính là

A. 1. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi r là bán kính của mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P), ta có

$$r=\mathrm{d}(I,(P))=\frac{|1+2\cdot 2-2\cdot(-3)-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=-1$. **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Do (MNP) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại $M(2;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;2)$ nên mặt phẳng (MNP) có phương trình theo đoạn chắn là

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 168. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(-1;3;3)$, $C(2;-4;2)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $4y+2z-3=0$. **B.** $2y+z-3=0$. **C.** $3x+2y+1=0$. **D.** $9x+4y-z=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)$. Khi đó, véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(9;4;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P):3x-2y+z+7=0$ và $(Q):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $x+2y+z-5=0$. **B.** $2x+4y+2z+10=0$.

C. $x+2y-z+5=0$. **D.** $2x-4y-2z-10=0$.

Lời giải.

Ta có các véc-tơ pháp tuyến của (P) và (Q) là $\vec{n}_P=(3;-2;1)$, $\vec{n}_Q=(5;-4;3)$. Theo giả thiết mặt phẳng (α) vuông góc với (P) và (Q) do đó $\vec{n}_\alpha\perp(\vec{n}_P,\vec{n}_Q)$. $\Rightarrow\vec{n}_\alpha=[\vec{n}_P;\vec{n}_Q]=(1;2;1)$. Suy ra, phương trình mặt phẳng (α) có dạng $1(x-2)+2(y+1)+1(z-5)=0$. Hay $x+2y+z-5=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(-2;1;1)$. Phương trình mặt trung trực của đoạn AB là

A. $x-y+2=0$. **B.** $x-y+1=0$. **C.** $-x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là $I\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB đi qua I và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình $-1\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+1\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0$, hay $-x+y-2=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-y+3z-7=0$ và điểm $A(-1;2;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

A. $2x-y+3z-11=0$. **B.** $2x-y+3z+11=0$.

C. $2x-y+3z+15=0$. **D.** $2x-y+3z-9=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Q) và song song với (P) nên (Q) có dạng $2x-y+3z+D=0$, với $D\neq-7$.

Vì $A\in(Q)$ nên $2\cdot(-1)-2+3\cdot5+D=0\Leftrightarrow D=-11$.

Vậy (Q): $2x-y+3z-11=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;7;-9)$ và mặt phẳng (P): $x+2y-3z-1=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

A. $(2;1;1)$. **B.** $(4;0;1)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(-1;1;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua M vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 7+2t \\ z = -9-3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) thì $H = d \cap (P)$.

Xét phương trình: $2+t+2(7+2t)-3(-9-3t)-1=0 \Leftrightarrow 14t+42=0 \Leftrightarrow t=-3$.

Với $t=-3 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$. Vậy $H(-1;1;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(1;1;0), B(1;0;0)$ và $C(0;1;1)$.

A. $2x-y+z-1=0$. **B.** $x+2z-1=0$. **C.** $x+z-1=0$. **D.** $2x-y+z-1=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-1;0), \overrightarrow{AC}=(-1;0;1)$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;0;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-1(x-1)+0(y-1)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow x+z-1=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-5=0$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+6=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Tính bán kính của đường tròn (C).

A. 4. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 5.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;1)$, bán kính $R=4$.

$\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|3-2\cdot(-1)-2\cdot 1+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{9}{3}=3$.

Bán kính đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(I,(P))}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{5}$. Mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 có phương trình là

A. $x+2y-z-1=0$. **B.** $x-y-2z+7=0$. **C.** $x+2y-z+1=0$. **D.** $x-y-2z-7-0$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(1;1;3)$ và $\vec{u}_2=(1;2;5)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm và chọn $M(0;-1;3)\in d_1$. (P) qua M và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;-2;1)$. Vậy $(P):-x-2(y+1)+(z-3)=0$ hay $(P):x+2y-z+1=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 176. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm $I(8;0;0)$, $J(0;-2;0)$, $K(0;0;4)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=0$. **B.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

C. $x-4y+2z=0$. **D.** $x-4y+2z-8=0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow x-4y+2z-8=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 177. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (Q) là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-13+2t \\ y=-16+t \\ z=-2t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $2x+y-2z=0$. **B.** $2x+y=0$. **C.** $2x-y+2z=0$. **D.** $2x-y-2z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Q) qua $O\,(0;0;0)$ và có VTPT $\vec{n}_P=\vec{u_d}=(2;1;-2)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q)\colon 2x+y-2z=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (γ) là mặt phẳng đi qua điểm $M\,(3;-1;-5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0, (\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình của (γ) là

A. $2x+y-2z-15=0$. **B.** $2x+y-2z+15=0$.

C. $x+y+z+3=0$. **D.** $x+2y+z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (γ) qua $M\,(3;-1;-5)$ và có VTPT $\vec{n}_P=[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta]=(2;1;-2)$.

Phương trình mặt phẳng $(\gamma):2(x-3)+1.(y+1)-2(z+5)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z-15=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 179. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;1;3)\,, B\,(-1;3;2)\,, C\,(-1;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều cả ba điểm A, B, C.

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng hay không thẳng hàng thì cũng có vô số mặt phẳng cách đều ba điểm A, B, C.

Chọn đáp án D □

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+z+4=0$ và $(Q)\colon x-2y+2z+4=0$. Tìm số đo góc φ.

A. $\varphi=60^\circ$. **B.** $\varphi=30^\circ$. **C.** $\varphi=45^\circ$. **D.** $\varphi=75^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)}=(1;0;1) \\ \vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2) \end{cases} \Rightarrow \cos\left((P);(Q)\right)=\dfrac{|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}|\cdot|\vec{n}_{(Q)}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi=45^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 16x-12y-15z-4=0$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (α).

A. $d=\dfrac{11}{25}$. **B.** $d=\dfrac{22}{5}$. **C.** $d=\dfrac{11}{5}$. **D.** $d=55$.

Lời giải.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) là $d(A;(\alpha)) = \dfrac{|16\cdot 2 - 12\cdot(-1) - 15\cdot(-1) - 4|}{\sqrt{16^2+(-12)^2+(-15)^2}} = \dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 182. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt ba trục tọa độ tương ứng tại ba điểm $M(8;0;0)$, $N(0;-2;0)$ và $P(0;0;4)$. Viết phương trình của mặt phẳng (α).

A. $(\alpha)\colon x-4y+2z-8=0$. **B.** $(\alpha)\colon \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

C. $(\alpha)\colon x-4y+2z=0$. **D.** $(\alpha)\colon \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 183. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y+5z-15=0$ và điểm $E(1;2;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua E và song song với mặt phẳng (Q).

A. $(P)\colon 2x-y+5z+15=0$. **B.** $(P)\colon x+2y-3z+15=0$.

C. $(P)\colon 2x-y+5z-15=0$. **D.** $(P)\colon x+2y-3z-15=0$.

Lời giải.

véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (2;-1;5) = \vec{n}_{(P)}$.

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2(x-1)-(y-2)+5(z+3)=0$ hay $(P)\colon 2x-y+5z+15=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 184. Trong không gan với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;1;-2), B(1;-2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB.

A. $2x-y+4=0$. **B.** $4x-2y+3z+20=0$.

C. $4x-2y+3z+16=0$. **D.** $4x-2y+3z-20=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-2;3)$. Phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$4(x+3)-2(y-1)+3(z+2)=0) \Leftrightarrow 4x-2y+3z+20=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 185. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và $(Q): -x-y+2z+9=0$. Mặt phẳng nào sau đây cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

A. $-x+y+2z+2=0$. **B.** $x-y+2z-2=0$.

C. $-x-y+2z+2=0$. **D.** $x+y-2z+2=0$.

Lời giải.

Gọi (R) là mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $(R) \parallel (P) \parallel (Q)$. Do đó (R) có dạng $x+y-2z+m=0$.

Gọi $A(1;0;3) \in (P)$ và $B(1;0;-4) \in (Q)$. Khi đó trung điểm M của đoạn AB nằm trên (R), tức $M\left(1;0;-\dfrac{1}{2}\right) \in (R)$. Suy ra $1+0-2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+m=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $(R): x+y-2z-2=0$ hay $(R): -x-y+2z+2=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 186. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;-1;3)$, $B(1;5;2)$ và $C(2;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B và C.

A. $-9x+2y-15z-29=0$. **B.** $9x-2y-15z+61=0$.

C. $9x-2y+15z-29=0$. **D.** $9x+2y+15z-20=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;6;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;3;-2)$.

Khi đó, mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-9;2;-15)$.

Hơn nữa, $A(-2;-1;3)\in(ABC)$ nên $(ABC):-9(x+2)+2(y+1)-15(z-3)=0$.

Hay $(ABC):9x-2y+15z-29=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 187. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $(m-1)x+y-2z+m=0$ và (Q): $2x-z+3=0$. Tìm m để (P) vuông góc với (Q).

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=5$. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

(P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi các véc-tơ pháp tuyến của chúng vuông góc với nhau, tức là

$$(m-1;1;-2)\cdot(2;0;-1)=0\Leftrightarrow m=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 188. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (β): $x-y+2z+1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n_1}(1;7;3)$. **B.** $\vec{n_2}(1;-7;3)$. **C.** $\vec{n_3}(-1;-7;3)$. **D.** $\vec{n_4}(1;-1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (β) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$. Mặt phẳng (α) qua A,B và vuông góc với (β) nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(-1;-7;-3)=-(1;7;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(2;3;5)$, $B(3;2;4)$ và $C(4;1;2)$ có phương trình là

A. $x+y+5=0$. **B.** $x+y-5=0$. **C.** $y-z+2=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1),\ \overrightarrow{AC}=(2;-2;-3)$$
$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;0)$$

Mặt phẳng (ABC) qua điểm $A(2;3;5)$ và có véctơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;0)$ nên có phương trình

$$1(x-2)+1(y-3)+0\cdot(z-5)=0\Leftrightarrow x+y-5=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 190. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(-4;2;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;2)$ là phương trình nào dưới đây?

A. $x-2y+2z+6=0$. **B.** $x-2y+2z+8=0$.

C. $x-2y+2z-6=0$. **D.** $x+2y+2z-6=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng qua $M(-4;2;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;2)$ có phương trình là

$$\begin{aligned} & 1(x+4)-2(y-2)+2(z-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x-2y+2z+6=0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 191. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng lần lượt cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$.

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=0$. **B.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1$. **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$. **D.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Mặt phẳng qua ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ có phương trình là

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 192. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách d từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mặt phẳng $(P)\colon 2x-6y+3z+1=0$.

A. $d=\dfrac{6}{7}$. **B.** $d=\dfrac{4}{7}$. **C.** $d=\dfrac{4}{49}$. **D.** $d=\dfrac{6}{49}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} d=\mathrm{d}(M,(P)) &= \frac{|2\cdot(-1)-6\cdot 2+3\cdot 3+1|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} \\ &= \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-1=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+5=0$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. (P) đi qua tâm của mặt cầu (S). **B.** (P) cắt mặt cầu (S).

C. (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). **D.** (P) không cắt mặt cầu (S).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{1+4+9-5}=3$.

Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,(P)) &= \frac{|2\cdot 1+2\cdot 2-(-3)-1|}{\sqrt{4+4+1}} \\ &= \frac{8}{3}<R. \end{aligned}$$

Do đó (P) cắt mặt cầu (S).

Chọn đáp án B □

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+2z-5=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 4x+5y-z+1=0$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{v}_1=(3;-2;2)$. **B.** $\vec{v}_2=(-8;-11;23)$. **C.** $\vec{v}_3=(4;5;-1)$. **D.** $\vec{v}_4=(8;-11;-23)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+2z-5=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(3;-2;2)$.

Mặt phẳng $(Q)\colon 4x+5y-z+1=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(4;5;-1)$.

Vì $d=(P)\cap(Q)$ nên véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

$$\vec{u}_d=[\vec{n}_Q,\vec{n}_P]=(8;-11;-23).$$

Chọn đáp án D □

Câu 195. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y+5z-15=0$ và điểm $E(1;2;-3)$. Mặt phẳng (P) qua E và song song với (Q) có phương trình là

A. $(P)\colon x+2y-3z+15=0$. **B.** $(P)\colon x+2y-3z-15=0$.

C. $(P)\colon 2x-y+5z+15=0$. **D.** $(P)\colon 2x-y+5z-15=0$.

Lời giải.

Ta có $(P)\parallel(Q)$ suy ra véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;5)$.

Mặt phẳng (P) qua E có phương trình là

$$(P)\colon 2(x-1)-(y-2)+5(z+3)=0\Leftrightarrow(P)\colon 2x-y+5z+15=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 196. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;2);B(3;1;-1);C(2;0;2)$.Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A,B,C.

A. $(\alpha)\colon 3x+z-8=0$. **B.** $(\alpha)\colon 3x+z+8=0$.

C. $(\alpha)\colon 5x-z-8=0$. **D.** $(\alpha)\colon 2x-y+2z-8=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(1;2;-3)$; $\overrightarrow{AC}=(0;1;0)$; $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(3;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(2;-1;2)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(3;0;1)$ nên có phương trình là

$$3(x-2)+0(y+1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow 3x+z-8=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 197. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3$ và mặt phẳng $(\alpha):(m-4)x+3y-3mz+2m-8=0$. Với giá trị nào của m thì (α) tiếp xúc với (S)?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.
Mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(I,(\alpha))=R &\Leftrightarrow \frac{|(m-4)\times(-3)+3\times 1-3m\times(-1)+2m-8|}{\sqrt{(m-4)^2+3^2+(-3m)^2}}=\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow \frac{|2m+7|}{\sqrt{10m^2-8m+25}}=\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow 26m^2-52m+26=0\Leftrightarrow m=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 198. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+2z-15=0$ và điểm $M(1;2;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và song song với (P).

A. $(Q)\colon 2x-3y+2z-10=0$. **B.** $(Q)\colon x+2y-3z-10=0$.
C. $(Q)\colon 2x-3y+2z+10=0$. **D.** $(Q)\colon x+2y-3z+10=0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng $(Q)\parallel(P)$ nên (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-3;2)$.
Phương trình mặt phẳng

$$(Q)\colon 2(x-1)-3(y-2)+2(z+3)=0\Leftrightarrow 2x-3y+2z+10=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 199. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;2;4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P)\colon -x+3y+3z-2=0$. **B.** $(P)\colon x-3y-3z-2=0$.
C. $(P)\colon 2x-y+z+2=0$. **D.** $(P)\colon 2x-y+z-2=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(-1;3;3)$ nên có phương trình là $-1(x-2)+3(y+1)+3(z-1)=0\Leftrightarrow -x+3y+3z+2=0\Leftrightarrow x-3y-3z-2=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 200. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+3z+4=0$ và điểm $A(2;-1;2)$. Mặt phẳng qua A song song với trục Oy và vuông góc với (α) có phương trình là phương trình nào dưới đây?

A. $-3x-2z+10=0$. **B.** $3y-2z-2=0$. **C.** $3x-2z-2=0$. **D.** $3x-2y-8=0$.

Lời giải.

Gọi (β) là mặt phẳng cần tìm.
Ta có mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}_\alpha=(2;-1;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến và trục Oy nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Đặt $\vec{n}=[\vec{n}_\alpha,\vec{j}]=(-3;0;2)$.
Mặt phẳng (β) đi qua $A(2;-1;2)$ và nhận $\vec{n}=(-3;0;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$(-3)(x-2)+2(z-2)=0\Leftrightarrow -3z+2z+2=0.$$

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. D	5. B	6. B	7. D	8. B	9. A	10. A
11. B	12. D	13. D	14. C	15. A	16. C	17. C	18. A	19. B	20. D
21. A	22. D	23. B	24. D	25. A	26. B	27. A	28. D	29. A	30. D
31. C	32. B	33. A	34. A	35. D	36. D	37. A	38. D	39. A	40. D
41. C	42. C	43. D	44. D	45. B	46. C	47. A	48. C	49. B	50. B
51. B	52. C	53. A	54. D	55. D	56. C	57. B	58. C	59. D	60. C
61. A	62. B	63. A	64. A	65. B	66. B	67. A	68. D	69. A	70. D
71. D	72. B	73. D	74. B	75. A	76. A	77. A	78. C	79. C	80. B
81. D	82. D	83. C	84. D	85. A	86. B	87. A	88. C	89. C	90. C
91. D	92. C	93. B	94. B	95. C	96. D	97. B	98. A	99. D	100. A
101. B	102. B	103. B	104. C	105. C	106. B	107. D	108. C	109. B	110. C
111. D	112. A	113. B	114. D	115. C	116. A	117. D	118. D	119. B	120. D
121. D	122. B	123. B	124. A	125. B	126. C	127. C	128. C	129. D	130. B
131. B	132. C	133. A	134. B	135. C	136. B	137. C	138. D	139. D	140. B
141. B	142. A	143. D	144. A	145. D	146. C	147. B	148. D	149. A	150. A
151. D	152. B	153. D	154. A	155. B	156. B	157. A	158. D	159. B	160. D
161. C	162. D	163. D	164. C	165. C	166. D	167. C	168. D	169. A	170. A
171. A	172. D	173. C	174. C	175. C	176. D	177. A	178. A	179. D	180. C
181. C	182. D	183. A	184. B	185. C	186. C	187. A	188. A	189. B	190. A
191. C	192. B	193. B	194. D	195. C	196. A	197. A	198. C	199. B	200. C

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 135. **B.** 105. **C.** 108. **D.** 145.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x_I-2)+3(x_I+3)=0 \\ 2(y_I+2)+3(y_I-3)=0 \\ 2(z_I-4)+3(z_I+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1+5=0 \\ 5y_1-5=0 \\ 5z_1-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=1 \\ z_1=1. \end{cases}$$

Vậy $I(-1;1;1)$ cố định.

Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2+3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 \\ &= 5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB})+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 5MI^2+2IA^2+3IB^2. \end{aligned}$$

Vậy $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất thì $5MI^2+2IA^2+3IB^2$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P), suy ra $\overrightarrow{IM}=k\overrightarrow{n_{(P)}} \Rightarrow \begin{cases} x_M=2k-1 \\ y_M=-k+1 \\ z_M=2k+1 \end{cases}$.

Mà $M\in(P) \Rightarrow 2(2k-1)-(-k+1)+2(2k+1)-8=0 \Leftrightarrow 9k-9=0 \Leftrightarrow k=1 \Rightarrow M(1;0;3)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2=135$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng (P): $2x-y+z-10=0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M,N sao cho A là trung điểm của đoạn MN. Biết $\vec{u}=(a;b;1)$ là một véctơ chỉ phương của Δ, giá trị của $a+b$ bằng

A. 11. **B.** -11. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $N(2t-2;t+1;1-t)\in d$ và A là trung điểm của đoạn MN.

Do đó, tọa độ điểm $M(4-2t;5-t;3+t)$.

Do $M\in(P)$ nên $2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Suy ra tọa độ điểm $N(-6;-1;3)$ và $M(8;7;1)$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(-14;-8;2)$.

Vì $\vec{u}=(a;b;1)$ là một véctơ chỉ phương của Δ nên $\vec{u},\overrightarrow{MN}$ là 2 véctơ cùng phương.

Do đó ta có $\dfrac{a}{-14}=\dfrac{b}{-8}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow a+b=-11$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0)$, $B(-2;2;-1)$, $C(5;-1;3)$. Tích $a\cdot b\cdot c$ bằng

A. 5. **B**. 0. **C**. -6. **D**. 6.

Lời giải.

Do $M \in (P)$ và $MA^2 = MB^2 = MC^2$, nên ta được hệ

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a+2)^2+(b-2)^2+(c+1)^2 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a-5)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ 3a+4b+c=14 \\ 4a-7b+3c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3. \end{cases}$$

Từ đó ta được $abc = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;0;-2)$, $C(1;0;1)$, $D(2;1;-1)$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên đoạn BC và BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10$ và $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{6}{25}$. Phương trình mặt phẳng (AMN) có dạng $ax+by+cz+32=0$. Tính $S=a-b+c$.

A. $S=98$. **B**. $S=26$. **C**. $S=27$. **D**. $S=97$.

Lời giải.

Đặt: $\dfrac{BC}{BM}=x$; $\dfrac{BD}{BN}=y \Rightarrow 2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10 \Leftrightarrow 2x+3y=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10-3y}{2}$.

Ta có: $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{6}{25} \Leftrightarrow \dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{1}{xy}=\dfrac{6}{25} \Leftrightarrow \dfrac{10-3y}{2}\cdot y=\dfrac{25}{6} \Leftrightarrow y=\dfrac{5}{3} \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Suy ra:

$+\ \dfrac{BC}{BM}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 5\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{2x_C+3x_B}{5} \\ y_M=\dfrac{2y_C+3y_B}{5} \\ z_M=\dfrac{2z_C+3z_B}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{2}{5};0;-\dfrac{4}{5}\right)$.

$+\ \dfrac{BD}{BN}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow 5\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases} x_N=\dfrac{3x_D+2x_B}{5} \\ y_N=\dfrac{3y_D+3y_B}{5} \\ z_N=\dfrac{3z_D+3z_B}{5} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{3}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$.

Thay A, M, N vào phương trình $ax+by+cz+32=0$ ta có $a=42$; $b=5$; $c=61 \Rightarrow S=98$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-4=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T=|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B**. $S=-1$. **C**. $S=2$. **D**. $S=1$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA} &= (1-x;-1-y;3-z) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA}=(3-3x;-3-3y;9-3z). \\ \overrightarrow{IB} &= (2-x;1-y;-z) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB}=(4-2x;2-2y;-2z). \end{aligned}$$

$\overrightarrow{IC}=(-3-x;-1-y;-3-z)$.

Khi đó $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(-2x-4;-2y-6;-2z+6)=0$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-4=0\\-2y-6=0\\-2z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\\z=3\end{cases}$. Vậy $I(-2;-3;3)$.

Ta có $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

Suy ra $T_{\min}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng MI đi qua $I(-2;-3;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

$MI:\begin{cases}x=-2+t\\y=-3+t\\z=3-t\end{cases}$. Lấy $M(-2+t;-3+t;3-t)\in MI$.

Mặt khác $M\in(P)\Rightarrow(-2+t)+(-3+t)-(3-t)-4=0\Rightarrow t=4$.

Suy ra $M(2;1;-1)$. Vậy $a+b+c=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon(x+2)^2+(y-1)^2+(z+\sqrt{2})^2=9$ và hai điểm $A(-2;0;-2\sqrt{2})$, $B(-4;-4;0)$. Biết tập tất cả các điểm M thuộc (S) để $MA^2+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)\in(S)$, ta có $\overrightarrow{AM}=(x+2;y;z+2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{BM}=(x+4;y+4;z)$. Ta có

$$\begin{aligned}MA^2+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MB}=16&\Leftrightarrow MA^2+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BM}=16\\&\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2+(z+2\sqrt{2})^2+x(x+4)+y(y+4)+z^2=16\\&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+4y+2\sqrt{2}z-2=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}M\in(S)&\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2+(z+\sqrt{2})^2=9\\&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0.\end{aligned}\tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+4x+4y+2\sqrt{2}z-2=0\\x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0\end{cases}\Rightarrow y=0.$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là đường tròn giao tuyến (C) của (S) và mặt phẳng $(P)\colon y=0$.

Mặt cầu (S) có bán kính $R=3$, tâm $I(-2;1;-\sqrt{2})$ nên $d[I,(P)]=1$.

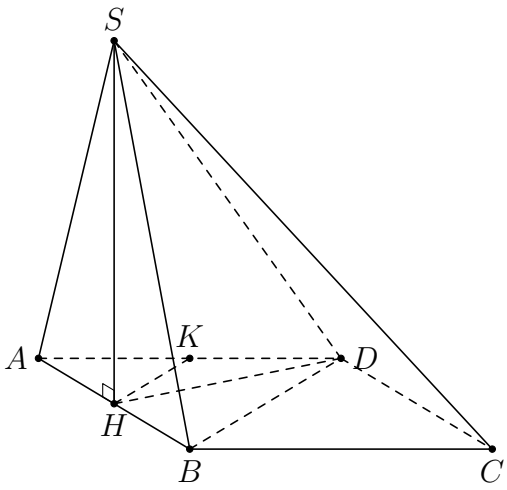
Suy ra đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-(d[I,(P)])^2}=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm đoạn AD (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{45}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{25}$.



Lời giải.

Do giả thiết suy ra $HK \parallel BD$ nên $HK \parallel (SBD)$.

Do đó $\mathrm{d}\,(HK,SD)=\mathrm{d}\,(HK,(SBD))=\mathrm{d}\,(H,(SBD))$.

Xét tam giác vuông HAD ta có

$HD^2=AD^2+AH^2 \Leftrightarrow HD^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow HD^2=\dfrac{5a^2}{4} \Leftrightarrow HD=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vì $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp HD$. Khi đó trong tam giác SHD ta có

$$\begin{aligned} SH^2=SD^2-HD^2 &\Leftrightarrow SH^2=\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow SH^2=\frac{17a^2}{4}-\frac{5a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow SH^2=3a^2 \Leftrightarrow SH=a\sqrt{3} \end{aligned}$$

Chọn hệ $Oxyz$ sao cho $H\,(0;0;0)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$ và $D\left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{BS}=\left(-\dfrac{a}{2};0;a\sqrt{3}\right)$ và $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$ nên $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}\right]=\left(-a^2\sqrt{3};-a^2\sqrt{3};-\dfrac{a^2}{2}\right)$.

Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) ta chọn $\vec{n}=\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\dfrac{1}{2}\right)$, khi đó phương trình mặt phẳng (SBD) là

$$\sqrt{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\sqrt{3}y+\frac{1}{2}z=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z-\sqrt{3}a=0.$$

Nên $\mathrm{d}\,(H,(SBD))=\dfrac{\left|-a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A\,(1;0;1)$, $B\,(3;-2;0)$, $C\,(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất, biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(2;-2;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;2)$. **C.** $\vec{n}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{n}=(1;0;-2)$.

Lời giải.

Kiểm tra A: Mặt phẳng (P) có phương trình $2x-2y-z-1=0$. Thay tọa độ B, C vào (P) ta thấy B, C nằm về 2 phía (P) nên loại A.
Kiểm tra B: Mặt phẳng (P) có phương trình $x+2z-3=0$. Thay tọa độ B, C vào (P) ta thấy $B \in (P)$ nên loại B.
Kiểm tra C: Mặt phẳng (P) có phương trình $-x+2y-z+2=0$. Thay tọa độ B, C vào (P) ta thấy B, C nằm về 2 phía (P) nên loại C.
Kiểm tra D: Mặt phẳng (P) có phương trình $x-2z+1=0$. Thay tọa độ B, C vào (P) ta thấy B, C nằm về cùng phía (P) nên chọn D.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y+3z=0$, $(R)\colon 2x-y+z=0$ là:

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B**. $4x-5y-3z-12=0$.
C. $2x+y-3z-14=0$. **D**. $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải.

Phương pháp: Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q), $(R) \Rightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}]$
Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ là:
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
Cách giải: Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q), (R) $\Rightarrow \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}]$
Ta có: $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;3), \overrightarrow{n_R}=(2;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}]=(4;5;-3)$
Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $B(2;1;-3)$ và có VTPT $\vec{n}=(4;5;-3)$ là:
$4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0 \Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$
Chọn đáp án C □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B**. $x+y+z-4=0$.
C. $3x+3y+3z-8=0$. **D**. $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải.

Ta có tọa độ tâm mặt cầu $(S)\colon I(1,1,1)$.
Gọi $M(x,y,z)$, khi đó $\overrightarrow{AM}=(x-2,y-2,z-2)$ và $\overrightarrow{IM}=(x-1,y-1,z-1)$. Theo đề bài

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{IM}=0 &\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+(y-2)(y-1)+(z-2)(z-1)=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0. \qquad (1')\end{aligned}$$

Mặt khác phương trình mặt cầu

$$(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0 \qquad (3.4)$$

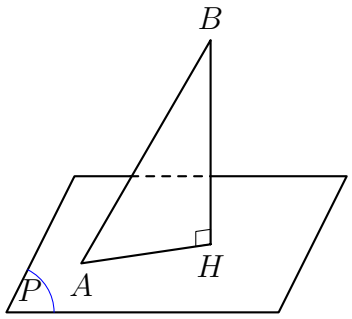
Lấy $(1')$ trừ (1) ta được $x+y+z-4=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x-2y+2z+5=0$. **B**. $x-y+2z+3=0$.

C. $2x-2y+4z+3=0$. **D**. $2x-y+2z=0$.

Lời giải.



☑ Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P), suy ra $\mathrm{d}(B,(P))=AH$.

☑ Ta có $BH\le AB$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H\equiv A\Rightarrow BH_{\max}=AB$ khi $AB\perp(P)$.

☑ Ta có $\begin{cases}AB\perp(P)\\A\in(P)\end{cases}\Rightarrow (P)\colon 2x-2y+4z+6=0\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$ có tọa độ là

A. $M(0;-3;0)$. **B**. $M(0;3;0)$. **C**. $M(0;-2;0)$. **D**. $M(0;1;0)$.

Lời giải.

Ta có $M\in Oy$ suy ra $M(0;m;0)$.

Theo đề $\mathrm{d}(M,(P))=\mathrm{d}(M,(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|m+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|-m-5|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m=-3$. Vậy $M(0;-3;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của $\triangle ABC$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $\dfrac{81\pi}{2}$. **B**. $\dfrac{243\pi}{2}$. **C**. 81π. **D**. 243π.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng (α) đi qua các điểm A, B, C là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$H\in(\alpha)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}-\dfrac{2}{c}=1\quad(1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1-a;2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{BH}=(1;2-b;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

Theo đề bài ta có H là trực tâm $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-2b-2c=0\\-a-2c=0\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=-2c\\b=-c.\end{cases}\end{aligned}$$

Thay vào (1) ta có $\dfrac{1}{-2c}+\dfrac{2}{-c}-\dfrac{2}{c}=1\Rightarrow -\dfrac{9}{2c}=1\Leftrightarrow c=-\dfrac{9}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2c=9 \\ b=-c=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(9;0;0) \\ B\left(0;\dfrac{9}{2}0\right) \\ C\left(0;0;-\dfrac{9}{2}\right). \end{cases}$$

Gọi $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp tứ giác $OABC$, ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} OI=LA \\ OI=IB \\ OI=IC \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=(x_0-9)^2+y_0^2+z_0^2 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+\left(y_0-\dfrac{9}{2}\right)^2+z_0^2 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+\left(z_0+\dfrac{9}{2}\right)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} x_0^2=(x_0-9)^2 \\ y_0^2=\left(y_0-\dfrac{9}{2}\right)^2 \\ z_0^2=\left(z_0+\dfrac{9}{2}\right)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} x_0=-x_0+9 \\ y_0=-y_0+\dfrac{9}{2} \\ z_0=-z_0-\dfrac{9}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} x_0=\dfrac{9}{2} \\ y_0=\dfrac{9}{4} \\ z_0=-\dfrac{9}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{4}\right)$, $R=OI=\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $S_{(I)}=4\pi R^2=4\pi\cdot\left(\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{243\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a-10b+c$.

A. $\dfrac{62}{9}$. **B.** $\dfrac{27}{9}$. **C.** $\dfrac{46}{9}$. **D.** $\dfrac{43}{9}$.

Lời giải.

☑ Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(3-x;1-y;1-z)\\ \overrightarrow{IB}=(7-x;3-y;9-z)\\ \overrightarrow{IC}=(2-x;2-y;2-z).\end{cases}$

☑ $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}23-6x=0\\13-6y=0\\25-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}\\y=\dfrac{13}{6}\\z=\dfrac{25}{6}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right).$

Ta có $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|=|6\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC})|=|6\overrightarrow{MI}|=6MI.$

Khi đó $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng P.

☑ Đường thẳng MI đi qua I và vuông góc (P).

Ta có MI đi qua $I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$ và nhận $\vec{n_p}=(1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Suy ra phương trình (MI): $\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}+t\\y=\dfrac{13}{6}+t\\z=\dfrac{25}{6}+t.\end{cases}$

Ta có $M\in(MI)\Leftrightarrow M\left(\dfrac{23}{6}+t;\dfrac{13}{6}+t;\dfrac{25}{6}+t\right).$

Mặt khác

$$\begin{aligned}M\in(P)&\Leftrightarrow\frac{23}{6}+t+\frac{13}{6}+t+\frac{25}{6}+t-3=0\\&\Leftrightarrow t=\frac{-43}{18}\\&\Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9};\frac{-2}{9};\frac{16}{9}\right).\end{aligned}$$

Do đó $\begin{cases}a=\dfrac{13}{9}\\b=\dfrac{-2}{9}\\c=\dfrac{16}{9}\end{cases}\Rightarrow 2a-10b+c=\dfrac{62}{9}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2)\in(P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

$C(a;b;-2)\in(P)\Rightarrow a-b+2=0\Rightarrow b=a+2\Rightarrow C(a;a+2;-2).$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(a-1;a;-5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(10+2a;-2a+2;2a-2).$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\frac{\sqrt{(2a+10)^2+2(2a-2)^2}}{2}=\sqrt{3(a+1)^2+24}\geq 2\sqrt{6},\ \forall a.$$

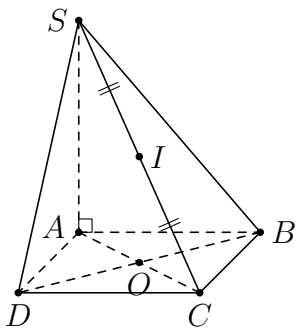
Do đó $\min S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{6}$ khi $a = -1$. Khi đó ta có $C(-1;1;-2) \Rightarrow a+b=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $2a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $a^2\sqrt{2}$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của cạnh SC. Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$. Vậy A nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Ta lại có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA, \text{ (Do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$. Vậy D nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Tương tự B cũng nhìn đoạn SC dưới một góc vuông.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm là I và bán kính $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6a^2+2a^2}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu cần tìm là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$. **B.** $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.

Lời giải.

Ta có $d(I,(P))=3$; bán kính đường tròn giao tuyến $r=5$ suy ra bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$. Do đó phương trình mặt cầu là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

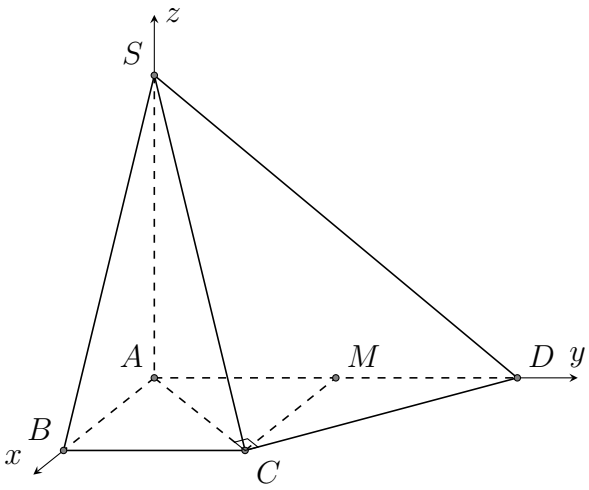
Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{5}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có



$$A(0;0;0), \qquad B(a;0;0), \qquad D(0;2a;0),$$

$$S\left(0;0;a\sqrt{5}\right), \qquad M(0;a;0), \qquad C(a;a;0)$$

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{SB}=\left(a;0;-a\sqrt{5}\right)$
$\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-a^2\sqrt{5};0;-a^2\right)$.
Ta có $\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{5}\right)$
$\Rightarrow \vec{n}_{(SCD)}=\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(-a^2\sqrt{5};-a^2\sqrt{5};-2a^2\right)$.

Ta có $\cos\left[(SBC),(SCD)\right]=\dfrac{\left|\vec{n}_{(SBC)}\cdot\vec{n}_{(SCD)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(SCD)}\right|}=\dfrac{|5a^4+2a^4|}{a^2\sqrt{6}\cdot a^2\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

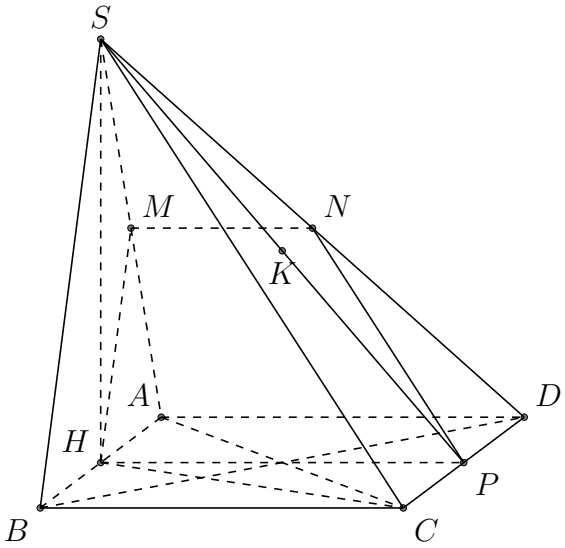
Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và P là giao điểm của (HMN) với CD. Khoảng cách từ trung điểm K của đoạn thẳng SP đến mặt phẳng (HMN) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{30}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có



$$H(0;0;0), \qquad A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), \qquad B\left(\frac{a}{2};0;0\right),$$

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \qquad C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \qquad D\left(-a;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right).$$

Có $MN \parallel AD$ nên suy ra P là trung điểm của CD.
Theo công thức trung điểm, ta suy ra

$$M\left(-\frac{a}{4};0;\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \qquad N\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$P\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \qquad K\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$, $\overrightarrow{HM}=\left(-\dfrac{a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (HMN) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{HM}\right]=\left(\dfrac{3a^2}{16};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (HMN) là

$$\frac{3a^2}{16}(x-0)+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}(y-0)+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}(z-0)=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x+y+z=0.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $\mathrm{d}\left[K,(HMN)\right]=\dfrac{\left|-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{3+1+1}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(2;-2;4\right)$, $B\left(-3;3;-1\right)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 135. **B.** 105. **C.** 108. **D.** 145.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2(x_I-2)+3(x_I+3)=0\\2(y_I+2)+3(y_I-3)=0\\2(z_I-4)+3(z_I+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x_1+5=0\\5y_1-5=0\\5z_1-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\y_1=1\\z_1=1\end{cases}\Rightarrow I(-1;1;1).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}2MA^2+3MB^2&=2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2\\&=2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2\\&=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB})+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2.\end{aligned}$$

Vì A, B, I cố định nên $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

$$\Rightarrow\exists k\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{IM}=k\vec{n}_{(P)}\Rightarrow\begin{cases}x_M=2k-1\\y_M=-k+1\\z_M=2k+1.\end{cases}$$

Mà $M\in(P)\Rightarrow 2(2k-1)-(-k+1)+2(2k+1)-8=0\Leftrightarrow 9k-9=0\Leftrightarrow k=1\Rightarrow M(1;0;3)$.

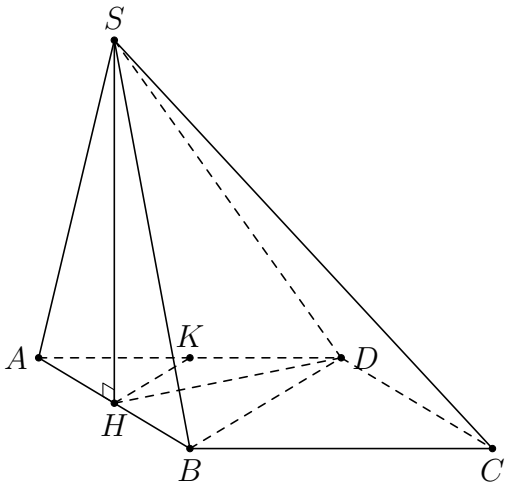
Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2=135$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm đoạn AD (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{45}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{25}$.



Lời giải.

Do giả thiết suy ra $HK\parallel BD$ nên $HK\parallel(SBD)$.

Do đó $\mathrm{d}\left(HK,SD\right)=\mathrm{d}\left(HK,(SBD)\right)=\mathrm{d}\left(H,(SBD)\right)$.

Xét tam giác vuông HAD ta có

$HD^2 = AD^2 + AH^2 \Leftrightarrow HD^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow HD^2 = \frac{5a^2}{4} \Leftrightarrow HD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HD$. Khi đó trong tam giác SHD ta có

$$\begin{aligned} SH^2 = SD^2 - HD^2 &\Leftrightarrow SH^2 = \left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow SH^2 = \frac{17a^2}{4} - \frac{5a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow SH^2 = 3a^2 \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3} \end{aligned}$$

Chọn hệ $Oxyz$ sao cho $H\,(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$ và $D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{BS} = \left(-\frac{a}{2};0;a\sqrt{3}\right)$ và $\overrightarrow{BD} = (-a;a;0)$ nên $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}\right] = \left(-a^2\sqrt{3};-a^2\sqrt{3};-\frac{a^2}{2}\right)$.

Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) ta chọn $\vec{n} = \left(\sqrt{3};\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$, khi đó phương trình mặt phẳng (SBD) là

$$\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \sqrt{3}y + \frac{1}{2}z = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + z - \sqrt{3}a = 0.$$

Nên $\mathrm{d}\,(H,(SBD)) = \dfrac{\left|-a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4;1)$, $B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)$, với $a > 2$, thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng

A. 6. **B**. 8. **C**. 4. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

Do AB không đổi nên $\triangle ABM$ có diện tích nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

Nhận thấy $\overrightarrow{AB} = (4;-8;-4)$, $\vec{n}_P = (1;1;-1)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = 0$. Mà $A \notin (P)$, suy ra $AB \parallel (P)$.

Do đó, MH nhỏ nhất khi và chỉ khi M thuộc giao tuyến của (P) và (Q), với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P). Ta có $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_P = (12;0;12)$. Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua A và nhận $\vec{n} = (1;0;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là $x + z - 4 = 0$.

Điểm M nằm trên giao tuyến của (P) và (Q) nên có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Rightarrow M(t;2-2t;4-t),\ t > 2.$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t-3;-2-2t;3-t)$ và $\overrightarrow{BM} = (t-7;6-2t;7-t)$.

Tam giác ABM vuông tại M khi

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Vì $t > 2$ nên chọn $t = 3$ và lúc đó $M(3; -4; 1)$, suy ra $a + b + c = 0$.

Chọn đáp án (D) □

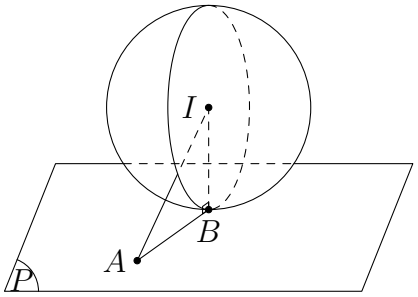
Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB = 4$.

A. $OA = \sqrt{11}$. **B.** $OA = 5$. **C.** $OA = 3$. **D.** $OA = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là

$$\mathrm{d}[I, (P)] = \frac{|5 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{3} = 6.$$



Vì AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B, do đó ta có

$$IA = \sqrt{IB^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + AB^2} = 6 = \mathrm{d}[I, (P)].$$

Vậy, suy ra A là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng IA đi qua $I(5; -3; 5)$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 2)$ nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$
Do $A = IA \cap (P)$ nên $5 + t - 2(-3 - 2t) + 2(5 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.
Vậy $A(3; 1; 1)$ nên $OA = \sqrt{11}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(5; 0; 0)$, $B(1; 2; -4)$, $C(4; 3; 0)$, $\mathrm{mp}(\alpha)\colon x + 2y + 2z - 10 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B, C và tiếp xúc $\mathrm{mp}(\alpha)$.

A. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. **B.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

C. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$. **D.** $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu cần viết.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ AI = \mathrm{d}(I,(\alpha)) \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} \sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2} \\ \sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+z^2} \\ \sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2} = \dfrac{|x+2y+2z-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x-3y=0 \\ 3\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2} = |x+2y+2z-10| \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x=3y \\ z=\dfrac{-5y+1}{2} \\ 9\left[(3y-5)^2+y^2+\left(\dfrac{-5y+1}{2}\right)^2\right] = \left[3y+2y+2\dfrac{-5y+1}{2}-10\right]^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x=3y \\ z=\dfrac{-5y+1}{2} \\ 65y^2-130y+65=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(3;1;-2)$ bán kính $R=AI=3$ là $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho $A(1;-1;0)$ và $\mathrm{mp}(P)\colon 2x-2y+z-1=0$. Điểm $M(a;b;c)\in\mathrm{mp}(P)$ sao cho $MA\perp OA$ và đoạn AM bằng 3 lần khoảng cách từ A đến $\mathrm{mp}(P)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b+c=-3$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=5$. **D.** $a+b+c=-5$.

Lời giải.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \text{mp}(P) \\ AM \perp OA \\ AM = 3d(A,(P)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c-1=0 \\ 1(a-1)-1(b+1)+0(c-0)=0 \\ \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2+(c-0)^2} = 3\cdot\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot(-1)+0-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c-1=0 \\ a-b-2=0 \\ (a-1)^2+(b+1)^2+c^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-2 \\ c=-3 \\ (a-1)^2+(a-2+1)^2+(-3)^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-3. \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=-3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;0;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua điêm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $3OA=2OB=OC\neq 0$?

A. 3. **B**. 8. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có thể coi $A(2a;0;0)$, $B(0;3b;0)$, $C(0;0;6c)$ (với $|a|=|b|=|c|\neq 0$). Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{3b}+\dfrac{z}{6c}=1$.

Do (P) đi qua $M(-1;0;3)$ nên $-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}=1$. Theo trên, $c=\pm a$, kết hợp với phương trình vừa thu được, ta suy ra $a=-1, c=1$.

Cũng theo trên, $b=\pm a$, nên có 2 giá trị của b. Suy ra có 2 bộ (a,b,c) thỏa mãn, hay có 2 mặt phẳng thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (D) □

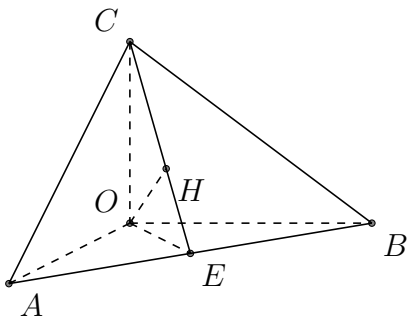
Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $H\,(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Hãy viết trình mặt phẳng (P).

A. $2x+y+z-6=0$. **B**. $x+2y+z-6=0$.

C. $x+2y+2z-6=0$. **D**. $2x+y+z+6=0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp CH \end{cases} \Rightarrow AB \perp OH$,
tương tự $BC \perp OH$.
Do đó $OH \perp (ABC) \Rightarrow \vec{n}_{ABC} = \overrightarrow{OH} = (2;1;1)$.
Suy ra $(P)\colon 2x + y + z - 6 = 0$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7), B(0;4;1), C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là

A. $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;7;-6), \overrightarrow{AC} = (1;3;-2), \overrightarrow{AD} = (1;6;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$.
Suy ra: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.
Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.
Ta có:
$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|4\overrightarrow{MG}\right| = 4MG$.
Do đó
$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.
Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(-3;0;-2)$. **B.** $H(3;0;2)$. **C.** $H(-1;4;4)$. **D.** $H(-1;4;1)$.

Lời giải.

Ta có $I \notin (P)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm $H \Leftrightarrow H$ là hình chiếu của I lên (P)
$\Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{IH} = (x_H - 1; y_H - 2; z_H - 3) \quad \text{cùng phương} \quad \vec{n} = (2;-2;-1) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_H - 2y_H - z_H - 4 = 0 \\ \dfrac{x_H - 1}{2} = \dfrac{y_H - 2}{-2} = \dfrac{z_H - 3}{-1} = t \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2t + 1 \\ y_H = -2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ 2(2t+1) - 2(-2t+2) - (-t+3) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x_H = 3 \\ y_H = 0 \\ z_H = 2. \end{cases}$
Vậy $H(3;0;2)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và các điểm $A(1;0;2)$; $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A;B$ sao cho thiết diện của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $ax+by+cz+3=0$. Tính $T=a+b+c$.

A. 3. **B**. -3. **C**. -2. **D**. 0.

Lời giải.

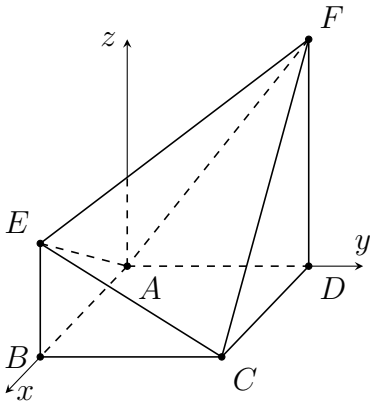
(S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$. Nhận thấy: $IA=IB=\sqrt{5}<R\Rightarrow A;B$ nằm bên trong mặt cầu.
Gọi K là trung đểm của $AB\Rightarrow K(0;1;2); IK\perp AB$.
Gọi H là hình chiếu của I trên $(P),(P)$ cắt (S) theo thiết diện là đường tròn tâm H bán kính r. S_{td} nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH=IK\Leftrightarrow H\equiv K$.
Khi đó $mp(P)$: Đi qua A và có VTPT là $\overrightarrow{IK}=(-1;-1;-1)\Rightarrow pt(P): -x-y-z+3=0\Rightarrow a+b+c=-3$.
Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Trên hai tia Bt, Ds vuông góc và nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm E,F sao cho $BE=\dfrac{a}{2}$, $DF=a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AEF) và (CEF).

A. $\varphi=30^\circ$. **B**. $\varphi=90^\circ$. **C**. $\varphi=60^\circ$. **D**. $\varphi=45^\circ$.

Lời giải.

Đặt hình vẽ vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A trùng với $O(0;0;0)$, B thuộc Ox và có tọa độ $B(a;0;0)$, D thuộc Oy và có thọa độ $D(0;a;0)$.
Khi đó ta được $E\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$, $C(a;a;0)$, $F(0;a;a)$.



(AEF) có một véc-tơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right]=\left(-\frac{a^2}{2};-a^2;a^2\right),$$

nên $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-2)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (AEF).
(CEF) có một véc-tơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF}\right]=\left(-a^2;-\frac{a^2}{2};-a^2\right)$$

nên $\overrightarrow{n_2}=(2;1;2)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (CEF).

Ta thấy $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ nên $\varphi=90^\circ$.
Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;5;-1), B(1;1;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ ngắn nhất.

A. $(-2;-3;0)$. **B**. $(2;-3;0)$. **C**. $(-2;3;0)$. **D**. $(2;3;0)$.

Lời giải.

Gọi $J(x;y;z)$ là điểm sao cho $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=0$. Suy ra $J(2;3;1)$.
Khi đó $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{MJ}|=2|\overrightarrow{MJ}|$.
Vậy $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ đạt GTNN khi và chỉ khi $|\overrightarrow{MJ}|$ đạt GTNN hay M là hình chiếu của J lên mặt phẳng

(Oxy).

Vậy $M(2;3;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

A. $3x+y+2z-14=0$. **B.** $3x+2y+z-14=0$.

C. $\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$. **D.** $\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1$.

Lời giải.

Xét tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Ta có

$$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COM) \Rightarrow AB \perp OM.$$

Chứng minh tương tự, ta được $AC \perp OM$. Từ đó $OM \perp (ABC)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $M(3;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{OM}=(3;2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến là:

$$3(x-3)+2(y-2)+z-1=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-14=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2+4x+2y+z=0$; $(S_2): x^2+y^2+z^2-2x-y-z=0$ cắt nhau theo một đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P). Cho các điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Có bao nhiêu mặt cầu tâm thuộc (P) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA?

A. 4 mặt cầu. **B.** 2 mặt cầu. **C.** 3 mặt cầu. **D.** 1 mặt cầu.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C) có được bằng cách khử x^2, y^2, z^2 trong phương trình hai mặt cầu ta được $6x+3y+2z=0$.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0$. Do đó $(P) \parallel (ABC)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA sẽ giao với mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA.

Trên mặt phẳng (ABC) có 4 đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA đó là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ba đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C.

Do đó có 4 mặt cầu có tâm nằm trên (P) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA.

Tâm của 4 mặt cầu là hình chiếu của tâm 4 đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA lên mặt phẳng (P).

Chọn đáp án A □

Câu 35. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): ax+by+cz-27=0$ đi qua hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=-12$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 3a+2b+c-27=0 \\ -3a+5b+2c-27=0 \\ 3a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=27 \\ c=-45 \end{cases}$.

Vì vậy ta có $S=a+b+c=-12$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm M thoả mãn $OM=7$. Biết rằng khoảng cách từ M tới mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là 2 và 3. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy).

A. 12. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

(Oxz): $y=0$, (Oyz): $x=0$.

Giả sử $M(a;b;c)$ ta có $\begin{cases} OM=7 \\ \mathrm{d}(M,(Oxz))=2 \\ \mathrm{d}(M,(Oyz))=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=49 \\ b^2=4 \\ a^2=9 \end{cases} \Rightarrow c^2=36.$

Mà $\mathrm{d}\,(M,(Oxy))=\sqrt{c^2}=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;4)$ và $B(0;1;5)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Khi đó, khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?

A. $d=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d=\sqrt{3}$. **C.** $d=\dfrac{1}{3}$. **D.** $d=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên (P) ta có $BH\le BA$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv A$. Từ đó suy ra khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất khi và chỉ khi $(P)\perp AB$ nên (P) nhận $\overrightarrow{AB}=(1;-1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến, suy ra $(P): x-y+z-1=0$. Từ đó ta có $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l}(P):\ x-2y+z+3=0 \\ (P):\ x-2y+z-2=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}(P):\ 3x+y+4z+1=0 \\ (P):\ 3x+y+4z-2=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}(P):\ 4x-3y-z+5=0 \\ (P):\ 4x-3y-z-27=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}(P):\ 2x-y+2z+3=0 \\ (P):\ 2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;4;1)$.

Theo giả thiết, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=[\vec{v},\overrightarrow{n_\alpha}]=(2;-1;2)$.

Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng $2x-y+2z+D=0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có

$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|2+3+4+D|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=4 \Leftrightarrow |9+D|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=3 \\ D=-21 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán có phương trình lần lượt là $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB với $A(0;-4;1)$ và $B(-2;2;3)$ là

A. $(\alpha): x-3y+z=0$. **B.** $(\alpha): x-3y+z-4=0$.

C. $(\alpha): x-3y-z=0$. **D.** $(\alpha): x-3y-z-4=0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(-1;-1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và nhận $\overrightarrow{AM}=(-1;3;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến

$\Rightarrow (\alpha): -x+3y+z=0 \Rightarrow (\alpha): x-3y-z=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

A. $6x+3y-2z-6=0$. **B.** $x+2y+3z-14=0$.

C. $x+2y+3z-11=0$. **D.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=3$.

Lời giải.

Ta có $AM \perp BC$ và $OA \perp BC$ nên $BC \perp OM$.

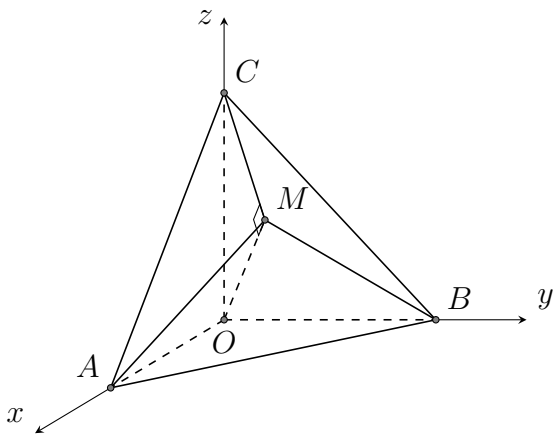
Ta có $BM \perp AC$ và $OB \perp AC$ nên $AC \perp OM$.

Vậy $OM \perp (ABC)$ nên (P) nhận $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $M(1;2;3)$ nên

(P): $x-1+2(y-2)+3(z-3)=0$

$\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$



Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z+6=0$ và điểm $A(2;-1;0)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (α).

A. $(-1;1;-1)$. **B.** $(2;-2;3)$. **C.** $(1;1;-1)$. **D.** $(1;0;3)$.

Lời giải.

Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \parallel \vec{n}_{(\alpha)} \\ H \in (\alpha) \end{cases}$.

Hay: $\begin{cases} \dfrac{a-2}{3} = \dfrac{b+1}{-2} = \dfrac{c}{1}. \\ 3a-2b+c+6=0 \end{cases}$.

Giải hệ ta được tọa độ điểm $H(-1;1;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$ là trực tâm tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

A. $\dfrac{46}{5}$. **B.** $\dfrac{31}{3}$. **C.** $\dfrac{63}{5}$. **D.** 10.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC} = (-1;2;2)$, $\overrightarrow{AC} = (1;4;3)$, $\overrightarrow{AI} = (a-1;b-2;c-3)$, $\overrightarrow{BI} = (a-3;b-4;c-4)$, (ABC): $2x-5y+6z-10=0$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \\ \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ I\in(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1(a-1)+2(b-2)+2(c-3)=0 \\ 1(a-3)+4(b-4)+3(c-4)=0 \\ 2a-5b+6c-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{27}{5} \\ b=4 \\ c=\dfrac{16}{5} \end{cases}$

Suy ra $a+b+c=\dfrac{63}{5}$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0), M(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi qua A, M và cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $b>0, c>0$. Khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất, hãy tính giá trị của tích bc.

A. $bc=8$. **B.** $bc=64$. **C.** $bc=2$. **D.** $bc=16$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Điểm $M(1;1;1)\in(P) \Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \Leftrightarrow b+c=\dfrac{1}{2}bc \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \sqrt{bc}\geq 4 \Leftrightarrow bc\geq 16$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;b;0), \overrightarrow{AC}=(-2;0;c) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(bc;2c;2b)$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4b^2+4c^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2c^2-8bc}$.

Vì $bc\geq 16 \Rightarrow 2b^2c^2-8bc\geq 256 \Rightarrow S_{\Delta ABC}\geq 8$.

Vậy diện tích tam giác ABC nhỏ nhất khi $bc=16$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ O sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (P)?

A. $3x+2y+z+14=0$. **B.** $2x+3y+z+14=0$.

C. $3x+2y+z-14=0$. **D.** $2x+3y+z-14=0$.

Lời giải.

Theo giả thuyết suy ra $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$. Mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do $M(3;2;1)\in(P)$ nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. (1)

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b+c=0 \quad (1) \\ -3a+c=0 \quad (2) \end{cases}$

Từ $(1), (2)$ và (3) ta được $a=\dfrac{14}{3}$, $b=7$, $c=14$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{3x}{14}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{14}=1$ hay $3x+2y+z-14=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(2;2;2)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r=8$. Diện tích của mặt cầu (S) là

A. 20π. **B.** 200π. **C.** 10π. **D.** 400π.

Lời giải.

Ta có $d(A,(P))=\dfrac{|4+4+2+8|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=6$, $R^2=d^2(A,(P))+r^2=100$.

Vậy diện tích của mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=400\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;-2;1)$, $B(-4;2;-2)$, $C(-1;-1;-2)$, $D(-5;-5;2)$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

A. $d=\dfrac{20}{\sqrt{19}}$. **B.** $d=\dfrac{18}{\sqrt{19}}$. **C.** $d=3\sqrt{3}$. **D.** $d=4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;1;-3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-9;-9;-3)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(-1;-2;1)$ và nhận $\vec{n}=(3;3;1)$ là véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $3x+3y+z+8=0$.

Khi đó $\mathrm{d}=\mathrm{d}(D,(ABC))=\dfrac{|-15-15+2+8|}{\sqrt{3^2+3^3+1^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{19}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong hệ tục toạ độ không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, biết $b,c>0$, phương trình mặt phẳng (P): $y-z+1=0$. Tính $M=b+c$ biết $(ABC)\perp(P)$, $\mathrm{d}(O;(ABC))=\dfrac{1}{3}$

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $(ABC): \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Rightarrow (ABC): bcx+cy+bz-bc=0$.

(ABC) và (P) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(bc;c;b)$, $\vec{n_2}=(0;1;-1)$.

Vì $(P)\perp(ABC)$ nên $c-b=0 \Leftrightarrow b=c$.

Theo giả thiết $\mathrm{d}(O;(ABC))=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{|-bc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2+b^2}}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3b^2=\sqrt{b^4+2b^2} \Leftrightarrow 3b^2=b\sqrt{b^2+2}$

$\Leftrightarrow 3b=\sqrt{b^2+2} \Leftrightarrow 9b^2=b^2+2 \Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$ (vì $b>0$). Suy ra $c=2$.

Vậy $M=b+c=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;-3;0)$ và mặt phẳng (α): $x+2y-z+3=0$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua A sao cho (P) vuông góc với (α) và (P) song song với trục Oz?

A. $y+2z+3=0$. **B.** $2x+y-1=0$. **C.** $x+2y-z+4=0$. **D.** $2x-y-7=0$.

Lời giải.

Vì $(P)\perp(\alpha)$ nên $\vec{n}_P\perp\vec{n}_\alpha$ và $(P)\parallel Oz$ nên $\vec{n}_P\perp\vec{k}$. Chọn $\vec{n}_P=[\vec{n}_\alpha,\vec{k}]=(2;-1;0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-7=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y+2z+3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 3. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5$. **B.** $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=25$.

C. $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=5$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của I lên (P), khi đó ta có $IH=d(I,(P))=\dfrac{|2+1+6+3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=4$.

Mặt khác ta có $R^2=IH^2+r^2=25$

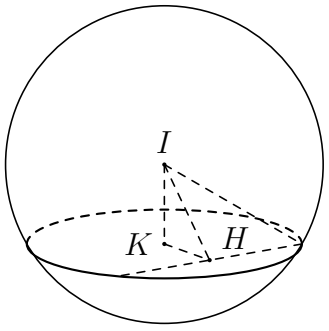
Nên phương trình mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ (với a, b, c là các số nguyên dương và a, b, c, d nguyên tố cùng nhau) đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=3$. **B.** $T=5$. **C.** $T=4$. **D.** $T=2$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}=(1;-1;2)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $AB\colon \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$.

Xét mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25\Rightarrow I(1;2;3)$ và $R=5$.

Gọi $H(t;1-t;2t)$ là điểm trên AB sao cho $AB\perp IH\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(t-1;-t-1;2t-3)$.

Vì $AB\perp IH\Rightarrow t-1+t+1+4t-6=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(1;0;2)$, $\overrightarrow{IH}=(0;-2;-1)$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến giữa (P) và (S), K là hình chiếu vuông góc của I lên $(P)\Rightarrow IK\le IH$.

Ta có $r=\sqrt{R^2-IK^2}\ge\sqrt{R^2-IH^2}$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $K\equiv H$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IH}=(0;-2;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến và đi qua điểm $H(1;0;2)$ là $2y+z-2=0\Rightarrow T=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các

trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với (P).

A. $x^2+y^2+z^2=9$. **B.** $x^2+y^2+z^2=25$. **C.** $x^2+y^2+z^2=81$. **D.** $x^2+y^2+z^2=3$.

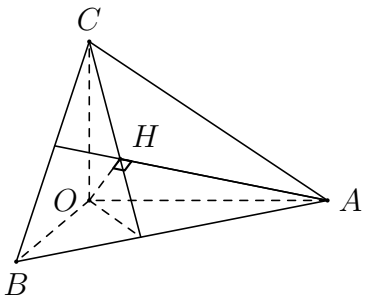
Lời giải.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AH \perp BC$, $CH \perp AB$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp (OHC) \\ BC \perp (AHO) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ABC) \perp (OHC) \\ (ABC) \perp (AHO) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC).$$

Do vậy mặt cầu tâm O tiếp xúc với (P) nhận OH làm bán kính

$\Rightarrow$ phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+z^2=9$.



Chọn đáp án A □

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Số điểm cách đều bốn mặt phẳng (ABC), (BCO), (COA), (OAB) là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải.

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho. Dễ thấy các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) lần lượt là các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx). Mặt phẳng (ABC) có phương trình tổng quát là $x+y+z=1$. Do I cách đều các mặt phẳng này nên ta có

$$|m|=|n|=|p|=\frac{|m+n+p-1|}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Ta có các trường hợp

① *Trường hợp 1.* $m=n=p$.

Khi đó (1) tương đương

$$|m|=\frac{|3m-1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

② *Trường hợp 2.* Trong ba số m, n, p có hai số bằng nhau và bằng số đối của số còn lại.

Khi đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m=n=-p$ (các trường hợp còn lại tương tự) và (1) tương đương

$$|m|=\frac{|m-1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

Vậy số điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho là $2+2\cdot 3=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng cách lớn nhất, khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Tính thể tích V của khối chóp $O.ABC$.

A. $V=\frac{1372}{9}$. **B.** $V=\frac{686}{9}$. **C.** $V=\frac{524}{3}$. **D.** $V=\frac{343}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$. Theo đề bài mặt phẳng (P) qua $M(1;2;3)$ và cách gốc tọa độ O một khoảng cách lớn nhất nên $OM \perp (P)$ hay véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$.

Suy ra

$$\begin{aligned}&(P)\colon 1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\\ \Leftrightarrow\ &x+2y+3z-14=0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{z}{\frac{14}{3}}=1.\end{aligned}$$

Do đó (P) cắt các trục tọa độ lần lượt tại $A(14;0;0)$, $B(0;7;0)$ và $C\left(0;0;\dfrac{14}{3}\right)$.

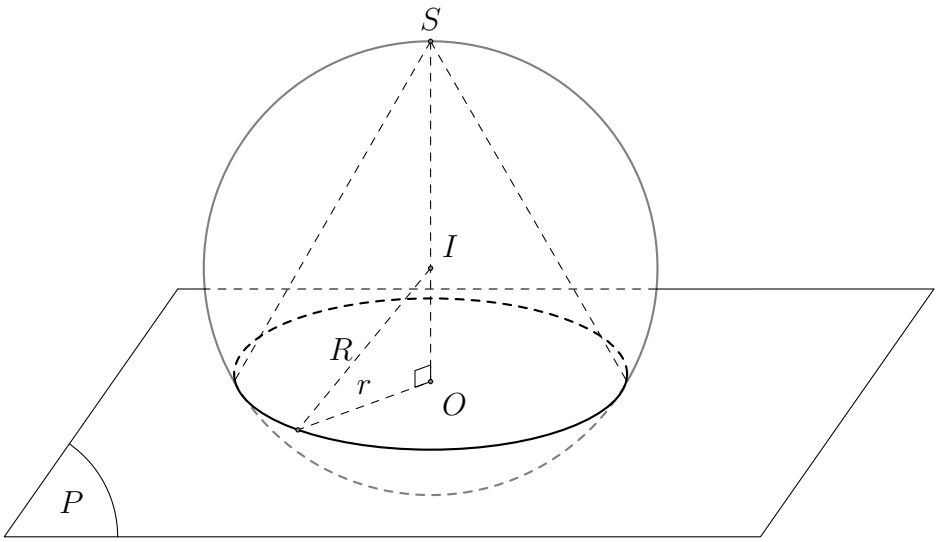
Vậy $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \dfrac{1}{6} \cdot 14 \cdot 7 \cdot \dfrac{14}{3} = \dfrac{686}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+y-2z+10=0$ và mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$ cắt nhau theo giao tuyến đường tròn (C). Gọi V_1 là thể tích khối cầu (S), V_2 là thể tích khối nón (N) có đỉnh là giao điểm của đường thẳng đi qua tâm mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P), đáy là đường tròn (C). Biết độ dài đường cao khối nón (N) lớn hơn bán kính của khối cầu (S). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{125}{32}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{125}{8}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{125}{96}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{375}{32}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;3)$ và bán kính $R=5$, khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d = \mathrm{d}(I;(P)) = \frac{|4+1-6+10|}{3} = 3.$$

Bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2-d^2} = 4$.

Thể tích khối cầu (S) là

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi}{3}.$$

Chiều cao hình nón là $h = R + d = 8$. Thể tích khối nón là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{128\pi}{3}.$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{125}{32}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng (P): $x+y-z-3=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng P, đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. 1. **B**. 0. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của OA. Ta có $OA = \sqrt{2}, OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, mặt khác

$$S_{OIA} = \frac{1}{2}OA \cdot IH \Rightarrow IH = \frac{2S_{OIA}}{OA} = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Từ đó ta tính được bán kính mặt cầu là $R = OI = \sqrt{OH^2 + IH^2} = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-2;0)$, $B(0;-4;0)$, $C(0;0;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) nào dưới đây đi qua A, gốc tọa độ O và cách đều hai điểm B và C?

A. $(P)\colon 2x - y + 3z = 0$. **B**. $(P)\colon 6x - 3y + 5z = 0$.

C. $(P)\colon 2x - y - 3z = 0$. **D**. $(P)\colon -6x + 3y + 4z = 0$.

Lời giải.

Vì (P) đi qua O nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$. Vì $A \in (P)$ và B, C cách đều (P) nên

$$\begin{cases} -a - 2b = 0 \\ |4b| = |3c| \end{cases}$$

Chọn $a = -6$, ta có $b = 3$, suy ra $c = \pm 4$. Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $-6x + 3y - 4z = 0$ hoặc $-6x + 3y + 4z = 0$.

Chọn đáp án (D) □

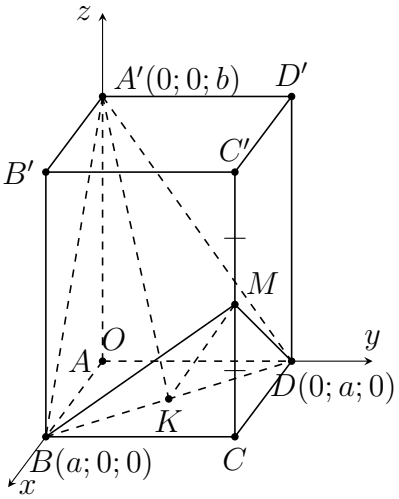
Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ O, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ $(a > 0,\ b > 0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giá trị của tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B**. 1. **C**. 2. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của BD. Do $A'B = A'D$ nên $A'K \perp BD$. Lại có $MB = MD$ nên $MK \perp BD$.
$(A'BD) \perp (MBD)$ nên $A'K \perp MK$.
Ta có $K\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$.
Khi đó $\overrightarrow{A'K} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-b\right)$, $\overrightarrow{MK} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$.

$$A'K \perp MK \Leftrightarrow \overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1. \text{ (vì } a > 0, b > 0)$$



Chọn đáp án B □

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, tìm tập hợp các điểm cách đều cặp mặt phẳng sau đây: $4x - y - 2z - 3 = 0; 4x - y - 2z - 5 = 0$.

A. $4x - y - 2z - 6 = 0$. **B.** $4x - y - 2z - 4 = 0$.
C. $4x - y - 2z - 1 = 0$. **D.** $4x - y - 2z - 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi điểm $\begin{cases} A(0;-3;0) \in 4x - y - 2z - 3 = 0\,(\alpha) \\ B(0;-5;0) \in 4x - y - 2z - 5 = 0\,(\beta) \end{cases}$.
Mặt phẳng cách đều hai mp trên có dạng: $4x - y - 2z + m = 0\,(\gamma)$.
Để mp (γ) cách đều hai mp trên thì $d(A;(\beta)) = 2d(A;(\gamma)) \Leftrightarrow |m+3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -4 \end{array}\right.$.
Mặt khác điểm hai điểm $A; B$ phải nằm về hai phía của mp (γ).

☑ Với $m = -2$ ta có
$(4\cdot 0 + 3 - 2\cdot 0 - 2)(4\cdot 0 + 5 - 2\cdot 0 - 2) > 0$ nên $A; B$ cùng phía.

☑ Với $m = -4$ ta có
$(4\cdot 0 + 3 - 2\cdot 0 - 4)(4\cdot 0 + 5 - 2\cdot 0 - 4) < 0$ nên $A; B$ khác phía.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $4x - y - 2z - 4 = 0\,(\gamma)$.
Chọn đáp án B □

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 8$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 14$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0;2;-2)$, $\overrightarrow{OB} = (2;2;-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = (-4;-4;-4)$.
Mặt phẳng (OAB) đi qua O và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = -\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = (1;1;1)$ nên có phương trình $x + y + z = 0$.
$\overrightarrow{AI} = (a;b-2;c+2)$, $\overrightarrow{BI} = (a-2;b-2;c+4)$, $\overrightarrow{OI} = (a;b;c)$.
Theo giả thiết $\begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (c+4)^2 \\ (b-2)^2 + (c+2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 & (1) \\ -b + c = -2 & (2) \end{cases}$
Mặt khác $I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0$ (3).

Giải hệ gồm (1), (2) và (3) ta được $a=2, b=0, c=-2$.

Vậy $I(2;0;-2) \Rightarrow T=a^2+b^2+c^2=8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(0;0;0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB).

A. 4. **B**. 5. **C**. 1. **D**. 8.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+y+z-1=0$.

Phương trình mặt phẳng (BCD) là: $x=0$.

Phương trình mặt phẳng (CDA) là: $y=0$.

Phương trình mặt phẳng (DAB) là: $z=0$.

Điểm $M(a;b;c)$ cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(M;(ABC))=d(M;(BCD)) \\ d(M;(CDA))=d(M;(BCD)) \\ d(M;(DAB))=d(M;(BCD)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}=|a| \\ |b|=|a| \\ |c|=|a|. \end{cases}$$

Có các khả năng sau:

☑ $\begin{cases} b=a \\ c=a \\ |3a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow b=c=a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$

☑ $\begin{cases} b=-a \\ c=-a \\ |-a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=c=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

☑ $\begin{cases} b=a \\ c=-a \\ |a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ c=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{cases}$

☑ $\begin{cases} b=-a \\ c=a \\ |a-1|=\sqrt{3}\,|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ c=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ c=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{cases}$

Như vậy, có 8 điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB).

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+3z-14=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\triangle MAB$ vuông tại M. Tính giá trị $a+b+2c$.

A. 5. **B**. 12. **C**. 10. **D**. 11.

Lời giải.

• $\overrightarrow{MA} = (x-3; y-1; z-2)$, $\overrightarrow{MB} = (x+3; y+1; z)$.

Tam giác MAB vuông tại M nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0$.

Do đó M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(0;0;1)$ bán kính $R = \sqrt{11}$.

• Ta có $\mathrm{d}(I,(P)) = \dfrac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ nên (P) tiếp xúc với (S). Do đó điểm M là tiếp điểm của (P) và mặt cầu (S).

• Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $(P) \Leftrightarrow \Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Ta có $t + t + 3(1+3t) - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ nên $M(1;1;4)$. Vậy $a + b + 2c = 10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) sao cho phép đối xứng qua mặt phẳng (Oxy) biến mặt phẳng (α) thành mặt phẳng (β).

A. $(\beta)\colon x + y - z + 3 = 0$. **B.** $(\beta)\colon x - y - z + 3 = 0$.

C. $(\beta)\colon x + y + z - 3 = 0$. **D.** $(\beta)\colon x - y - z - 3 = 0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ là $A(3;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;3)$. Ta có A và $B \in (Oxy)$ và $C \in Oz$.

Kí hiệu $\mathrm{Đ}_{(Oxy)}$ là phép đối xứng qua mặt phẳng Oxy.

Ta có $\mathrm{Đ}_{(Oxy)} : (\alpha) \to (\beta) \Rightarrow \mathrm{Đ}_{(Oxy)} : (A;B;C) \to (A;B;C')$, (ảnh của A, B trùng với chính nó vì $A, B \in (Oxy)$). Do C' đối xứng với $C(0;0;3)$ qua mặt phẳng Oxy, suy ra $C'(0;0;-3)$.

Từ đó suy ra mặt phẳng (β) có phương trình theo đoạn chắn là

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow (\beta)\colon x - y - z - 3 = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(1;3;-1)$. **D.** $M(1;3;0)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$, dễ thấy $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất, suy ra M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (Oxy). Dễ thấy $G(1;3;-1) \Rightarrow M(1;3;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;-1;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Mặt phẳng đi qua M cắt S theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x - y + 2z - 2 = 0$. **B.** $x - y + 2z = 0$. **C.** $x - y + 2z - 6 = 0$. **D.** $x - y + 2z - 4 = 0$.

Lời giải.

(S) có bán kính $R = 3$ và tâm $I(0;0;0)$, $IM = \sqrt{6} < 3$ nên I nằm trong hình cầu (S). Gọi r là bán kính của đường tròn, (P) là mặt phẳng qua M, ta có $r^2 = R^2 - \mathrm{d}^2(I,(P)) = 9 - \mathrm{d}^2(I,(P)) \geq 9 - IM^2 = 3$,

suy ra bán kính $r_{\min} = \sqrt{3}$ khi $\overrightarrow{IM}$ là véc-tơ pháp tuyến của (P). Vậy phương trình của mặt phẳng $(P)\colon (x-1)-(y+1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-6=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Biết tiếp diện của (S) tại A, B vuông góc. Tính độ dài AB.

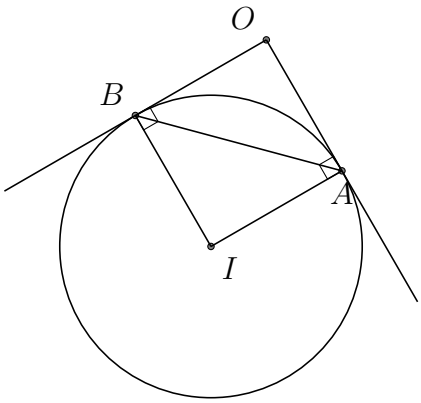
A. $AB=\dfrac{5}{2}$. **B.** $AB=5$. **C.** $AB=5\sqrt{2}$. **D.** $AB=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=5$.

Xét mặt phẳng (P) chứa d cắt giao tuyến của hai tiếp diện tại O. Ta có tứ giác $OIAB$ là hình vuông. Suy ra

$$AB = IA\cdot\sqrt{2} = R\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=0$.

C. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, khi đó phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{CA}=(a;0;-c)$ và $\overrightarrow{AM}=(3-a;2;1)$, $\overrightarrow{BM}=(3;2-b;1)$.

Vì M là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2b+c=0\\ 3a-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2b\\ c=3a.\end{cases}$$

Mặt khác vì M thuộc (ABC) nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{\frac{3a}{2}}+\dfrac{1}{3a}=1 \Leftrightarrow a=\dfrac{14}{3}$.

Thay $a=\dfrac{14}{3}$, $b=7$, $c=14$ ta được phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon 3x+2y+z-14=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C, trực tâm tam giác ABC là $H(4;5;6)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $4x+5y+6z-77=0$. **B.** $4x+5y+6z+14=0$.

C. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{6}=1$. **D.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{6}=0$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $2x+2y-z-7=0$ và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π có phương trình là

A. $2x+2y-z-19=0$. **B.** $2x+2y-z+17=0$.

C. $2x+2y-z-17=0$. **D.** $2x+2y-z+7=0$.

Lời giải.

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0 \Leftrightarrow (S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$.

(S) có tâm $I(1,-2,3)$, bán kính $R=\sqrt{25}=5$.

Gọi r là bán kính đường tròn. Ta có $2\pi r=6\pi \Rightarrow r=3$.

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Vì $(Q) \parallel (P)$ nên (Q) có dạng : $2x+2y-z+c=0$. $(c\neq -7)$

Mặt phẳng (Q) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$d(I,(Q))=\sqrt{R^2-r^2} \Rightarrow \dfrac{|2\cdot 1+2\cdot(-2)-3+c|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\Rightarrow |c-5|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-5=12 \\ c-5=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=17 \\ c=-7.(\text{ loại }) \end{array}\right.$

Suy ra (Q): $2x+2y-z+17=0$ hoặc (Q): $2x+2y-z-7=0$.

Vậy (Q): $2x+2y-z+17=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-2y+z-4=0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+2m}{3}=\dfrac{z}{2}$. Nếu giao điểm của d và (P) thuộc mặt phẳng (Oyz) thì giá trị của m bằng

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(t+m;3t-2m;2t)$ là giao điểm của d và (P). Do M thuộc (Oyz) nên ta có

$$\begin{cases} t+m=0 \\ (t+m)-2(3t-2m)+2t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-m \\ -2(-3m-2m)-2m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{1}{2} \\ m=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $x-2y-2z+1=0$. **B.** $-x+2y+2z+5=0$.

C. $x-2y-2z-23=0$. **D.** $-x+2y+2z+17=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P): $x-2y-2z-5=0$ có dạng

$$x-2y-2z+c=0 \ \ (c\neq -5).$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3)$, bán kính $R=2$.
Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S), do đó

$$\mathrm{d}(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|1-2\cdot(-2)-2\cdot(-3)+c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=2 \Leftrightarrow |11+c|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11+c=6 \\ 11+c=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-5 \text{ (loại)} \\ c=-17 \text{ (chọn)} \end{array}\right. .$$

Vậy $(P)\colon x-2y-2z-17=0 \Leftrightarrow -x+2y+2z+17=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $[\vec{m},\vec{n}]$ (tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}|=15$, tìm tọa độ véc-tơ $\vec{p}$.

A. $\vec{p}=(9;-12;0)$. **B.** $\vec{p}=(45;-60;0)$. **C.** $\vec{p}=(0;9;-12)$. **D.** $\vec{p}=(0;45;-60)$.

Lời giải.

Ta có $[\vec{m},\vec{n}]=(3;-4;0)$.
Vì $\vec{p}$ là véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $[\vec{m},\vec{n}]$ nên $\vec{p}=(3k;-4k;0)$ với $k\in\mathbb{R}$ và $k>0$.
Mặt khác, $|\vec{p}|=15 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2+16k^2+0}=15 \Leftrightarrow 5k=15 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x-6y-4z+36=0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Tính thể tích V của khối chóp $O.ABC$.

A. $V=216$. **B.** $V=108$. **C.** $V=117$. **D.** $V=234$.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon 3x-6y-4z+36=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{-12}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{9}=1$.
(P) cắt các trục tọa độ tại $A(-12;0;0)$, $B(0;6;0)$ và $C(0;0;9)$.
Do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $V=\dfrac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{6}\cdot 12\cdot 6\cdot 9=108$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;2;3)$, $C(3;4;3)$. Gọi S_1,S_2,S_3 là các mặt cầu có tâm A,B,C và bán kính lần lượt là $3,2,3$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $I\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{2}{5};3\right)$ và tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3)$?

A. 2. **B.** 7. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Phương trình của ba mặt cầu đã cho là

$$(S_1)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$
$$(S_2)\colon (x-4)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4.$$
$$(S_3)\colon (x-3)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=9.$$

Thay tọa độ điểm I vào phương trình các mặt cầu, ta có $I\in(S_1)$, $I\in(S_2)$ và I nằm ngoài S_3.
Suy ra điều kiện cần để một mặt phẳng (P) qua I và tiếp xúc với cả ba mặt cầu là (P) tiếp xúc với $(S_1),(S_2)$ tại I. Do đó (P) qua I và nhận $\overrightarrow{AB}=(3;4;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra $(P)\colon 3\left(x-\dfrac{14}{5}\right)+4\left(y-\dfrac{2}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-10=0$.

Khoảng cách từ $C(3;4;3)$ đến (P) là

$$\mathrm{d}\left(C,(P)\right)=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 4-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3.$$

Suy ra (P) tiếp xúc với (S_3).

Vậy có đúng một mặt phẳng qua I và tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y-z+6=0$ và $(Q)\colon 2x+3y-2z+1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc (Q) và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm $E(-1;2;3)$, bán kính $r=8$. Phương trình mặt cầu (S) là

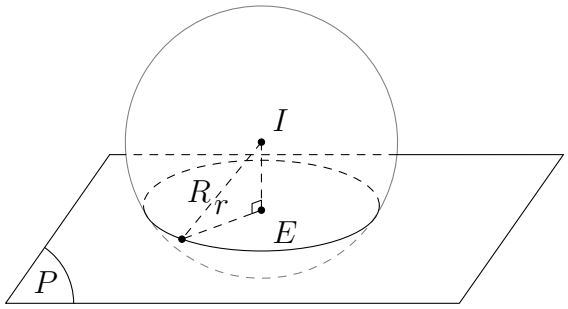
A. $x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=64$. **B.** $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=67$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=64$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (S), Δ là đường thẳng qua E và vuông góc với (P). Khi đó, ta có $I=\Delta\cap(Q)$.

Δ qua $E(-1;2;3)$ nhận $\vec{n}_P=(1;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.



Suy ra $\Delta\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=3-t. \end{cases}$

$I\in\Delta\Rightarrow I(-1+t;2-t;3-t)$.

$I\in(Q)\Rightarrow 2(-1+t)+3(2-t)-2(3-t)+1=0\Leftrightarrow t=1$.

Do đó $I(0;1;2)$. Khoảng cách từ I đến (P) là $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|0-1-2+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$.

Bán kính của (S) là $R=\sqrt{r^2+\mathrm{d}^2(I,(P))}=\sqrt{8^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{67}$.

Vậy $(S)\colon x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=67$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-7=0$. Tìm hoành độ x_M của điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x_M=-3$. **B.** $x_M=-1$. **C.** $x_M=1$. **D.** $x_M=3$.

Lời giải.

Ta tìm điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, hay

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}+2(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OI})=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OI}=\left(\frac{2+2\cdot 2}{3};\frac{0+2\cdot 3}{3};\frac{0+2\cdot 0}{3}\right)=(2;2;0)\\
\Leftrightarrow\ &I(2;2;0).
\end{aligned}$$

Lúc này ta có

$$|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}+2(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM})|=|\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{IM}|=3IM.$$

Để $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì IM phải nhỏ nhất, điều đó xảy ra khi M là hình chiếu của I lên (P).
Lúc này, do $\overrightarrow{IM}$ cùng phương với $\vec{n}=(1;1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) nên $\overrightarrow{IM}=k\vec{n}$, trong đó k là một số thực.
Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{IM}=k\vec{n}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OI}=k\vec{n}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+k\vec{n}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}=(2+k;2+k;0+k)\\ \Leftrightarrow\ &M=(2+k;2+k;k).\end{aligned}$$

Do M thuộc mặt phẳng (P), ta có

$$(2+k)+(2+k)+k-7=0\Leftrightarrow k=1\Rightarrow M(3;3;1).$$

Vậy $x_M=3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) biết (P) đi qua hai điểm $M(0;-1;0)$, $N(-1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz).

A. $(P)\colon x+z+1=0$. **B.** $(P)\colon x-z=0$. **C.** $(P)\colon z=0$. **D.** $(P)\colon x+z=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-1;2;1)$ và (Oxz) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.
Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\vec{j}\right]=(-1;0;-1)$. Do đó, (P) có phương trình là $-1(x-0)+0(y+1)-1(z-0)=0\Leftrightarrow x+z=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-1\\ z=-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+3=0$, $(Q)\colon x+2y+2z+7=0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Tâm $I\in d\Rightarrow I(t;-1;-t)$. Do (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\mathrm{d}(I,(Q))$.
Hay $|t-2-2t+3|=|t-2-2t+7|\Leftrightarrow t=3$.
Suy ra $I(3;-1;-3)$, từ đó ta có $a=3,b=-1,c=-3\Rightarrow a+b+c=-1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-3;1;-1)$, $B(1;2;m)$, $C(0;2;-1)$, $D(4;3;0)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 10.

A. $m=\pm 30$. **B.** $m=\pm 120$. **C.** $m=\pm 20$. **D.** $m=\pm 60$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}=(3;1;0), \overrightarrow{AD}=(7;2;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(1;-3;-1)$.
Lại có $\overrightarrow{AB}=(4;1;m+1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AB}=-m$.
Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{|m|}{6}$. Theo đề ta có $V_{ABCD}=10 \Leftrightarrow m=\pm 60$.
Chọn đáp án D □

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C; trực tâm tam giác ABC là $H(1;2;3)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+3z-14=0$. **B.** $x+2y+3z+14=0$.
C. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **D.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm A, B, C mà $\triangle ABC$ nhận H làm trực tâm nên $OH\perp(P)$.
Vậy (P) đi qua điểm H và nhận véc-tơ $\overrightarrow{OH}=(1;2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Suy ra mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-14=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại A, B, C. Biết trọng tâm của tam giác ABC là $G(-1;-3;2)$. Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $6x-2y+3z-1=0$. **B.** $6x+2y-3z+18=0$.
C. $6x+2y+3z-18=0$. **D.** $6x+2y-3z-1=0$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ là giao điểm với ba trục tọa độ.
Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \\ z_A+z_B+z_C=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-9 \\ c=6. \end{cases}$
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-9}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+2y-3z+18=0$.
Vậy mặt phẳng song song với (α) trong các đáp án đã cho là $6x+2y-3z-1=0$.
Chọn đáp án D □

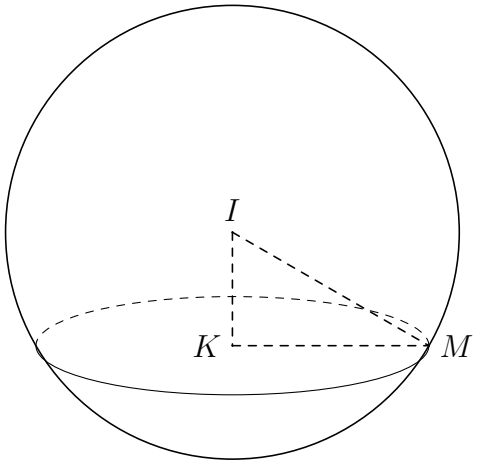
Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+2y-z+1=0$ (m là tham số) và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 2.

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$. **D.** $m=\pm 4$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(2;1;0)$, bán kính mặt cầu $R=3$. Khoảng cách từ tâm I đến (P) là $IK=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$. Vì bán kính đường tròn giao tuyến bằng 2 nên

$$2^2+\frac{(2m+3)^2}{m^2+5}=3^2\Leftrightarrow m^2-12m+16=0\Leftrightarrow m=6\pm 2\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;2;5)$, $B(0;4;-3)$, $C(2;-3;7)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $P=x_0+y_0+z_0$.

A. $P=0$. **B.** $P=6$. **C.** $P=3$. **D.** $P=-3$.

Lời giải.

Vì $M\in(Oxy)$ nên $M(x_0;y_0;0)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $G(2;1;3)$.
Khi đó

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|&=\left|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right|\\&=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG=3\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2+3^2}\geq 9.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_0=2$ và $y_0=1$ hay $M(2;1;0)$.
Vậy $P=x_0+y_0+z_0=3$.
Chọn đáp án C □

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;3;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon x-3y+2z-1=0$; $(R)\colon 2x+y-z-1=0$ là

A. $-2x+3y+z-10=0$. **B.** $x-3y+2z-1=0$.
C. $x+5y+7z-20=0$. **D.** $x+5y+7z+20=0$.

Lời giải.

Ta có vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) là $\vec{n}_Q=(1;-3;2)$ và $\vec{n}_R=(2;1;-1)$.
Vì mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (R) nên 1 vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) là $\vec{n}_P=[\vec{n}_Q,\vec{n}_R]=(1;5;7)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x+2)+5(y-3)+7(z-1)=0\Leftrightarrow x+5y+7z-20=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-7=0$, $(Q)\colon 3x+2y-12z+5=0$. Phương trình mặt phẳng (R) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng nói trên là

A. $x+3y+z=0$. **B.** $2x+3y+z=0$. **C.** $x+2y+z=0$. **D.** $3x+2y+z=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_P = (1;-1;1)$; $\vec{n}_Q = (3;2;-12)$.
Mặt phẳng (R) vuông góc với hai mặt phẳng (P); (Q) nên $\vec{n}_R = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (10;15;5) \Rightarrow \vec{n}_R = (2;3;1)$.
Khi đó mặt phẳng (R) có phương trình $2x+3y+z=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;-1)$, $B(1;-2;-3)$ và $(P)\colon 3x-2y+z-9=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa hai điểm A, B và vuông góc với (P).

A. $x-5y-2z+19=0$. **B.** $x+y-z-2=0$.
C. $x+y-z+2=0$. **D.** $3x-2y+z+13=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-5;-2)$; $\vec{n}_P = (3;-2;1)$.
Mặt phẳng (Q) chứa AB và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (-9;-9;9)$.
Khi đó phương trình
$(Q)\colon -9(x+2)-9(y-3)+9(z+1)=0 \Leftrightarrow -x-y+z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z-2=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có tâm $I(-1;3;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-2z+14=0$. Khi đó mặt cầu có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=25$. **B.** $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=5$.
C. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=5$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=25$.

Lời giải.

Ta có $R = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = 5$.
Vậy phương trình $(S)\colon (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=25$.
Chọn đáp án D □

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+4=0$, $(\beta)\colon 3y-z+5=0$ có phương trình là

A. $-x+2y+6z+15=0$. **B.** $x+2y+6z+13=0$.
C. $x+2y-6z-23=0$. **D.** $x-2y+6z+21=0$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;-3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β) nên véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (1;2;6)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng $(P)\colon x+2y+6z+13=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 88. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên tia Oz một đoạn thẳng dài gấp đôi các đoạn thẳng mà nó chắn trên các tia Ox và Oy. Giả sử $(P)\colon ax+by+cz+d=0$, với a, b, c, d là các số nguyên và $d \neq 0$. Tính $S = \dfrac{a+b+c}{d}$.

A. $S=-\dfrac{5}{4}$. **B.** $S=\dfrac{5}{4}$. **C.** $S=3$. **D.** $S=-3$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra các giao điểm của (α) với các tia Ox, Oy, Oy lần lượt là $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$ và $C(0;0;2a)$, với $a>0$. Suy ra phương trình (đoạn chắn) của (α) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{2a}=1$. Do (α) đi qua M nên $a=2$. Suy ra $(\alpha)\colon 2x+2y+z-4=0$. Từ đó, ta tính được $S = \dfrac{a+b+c}{d} = \dfrac{2+2+1}{-4} = -\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P)\colon -2x+2y+z+15=0$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=81$.

C. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81$.

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\mathrm{d}\,(I,(P))=\dfrac{|-2\cdot(-1)+2\cdot4+2+15|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{27}{3}=9$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm là $I(-1;4;2)$ và có bán kính $R=9$ nên có phương trình

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81.$$

Chọn đáp án D □

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$ và $D\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua ba trong năm điểm O, A, B, C, D?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$.

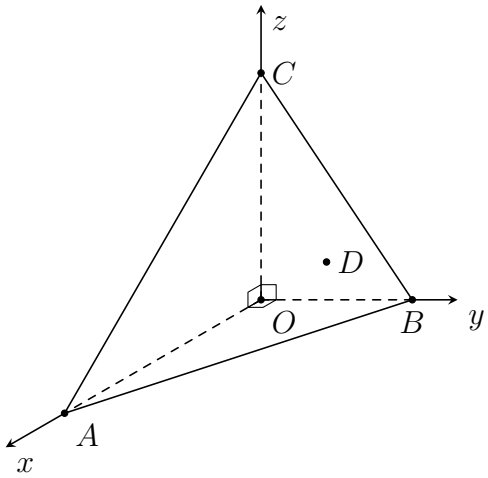
Suy ra $D\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC).

Số mặt phẳng qua ba trong bốn điểm A, B, C, D là 1.

Số mặt phẳng qua điểm O và hai trong bốn điểm A, B, C, D là $\mathrm{C}_4^2=6$.

Vậy số mặt phẳng phân biệt đi qua ba trong năm điểm O, A, B, C, D là

$$1+6=7.$$



Chọn đáp án C □

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-5)$ cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+10=0$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi $2\pi\sqrt{3}$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2x-4y+10z+18=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+10z+12=0$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=16$.

Lời giải.

Đường tròn giao tuyến có chu vi $2\pi\sqrt{3}$ nên nó có bán kính $r=\sqrt{3}$.

Gọi $h=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\times(-1)-2\times2-1\times(-5)+10|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=3$.

Suy ra bán kính R của mặt cầu (S) được tính theo công thức $R=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{12}$.

Phương trình của $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=12\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y+10z+18=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$. Viết phương trình (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;1)$ và $B(1;-2;1)$ đồng thời cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $\sqrt{2}\pi$.

A. $x+y+3z-2=0$, $x+y-5z+6=0$. **B.** $x+y+3z-2=0$, $x+y+z=0$.

C. $x+y-3z+4=0$, $x+y-z+2=0$. **D.** $x+y+1=0$, $x+y+4z-3=0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ trong đó $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;0)$; bán kính $R=1$. Đường tròn giao tuyến có bán kính $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra, $\mathrm{d}\,(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Do mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A và B nên ta có $\begin{cases}-B+C+D=0\\A-2B+C+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=B\\B=C+D.\end{cases}$

Mặt khác, $\mathrm{d}\,(I,(P))=\dfrac{|A-B+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|A-C|}{\sqrt{2A^2+C^2}}$.

Suy ra, $\dfrac{|A-C|}{\sqrt{2A^2+C^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2C^2-8AC=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=0\\C=4A.\end{array}\right.$

☑ Với $C=0\Rightarrow A=B=D$.

Chọn $A=1$, ta được phương trình mặt phẳng (P_1) là $x+y+1=0$.

☑ Với $C=4A$:

Chọn $A=1\Rightarrow B=1, C=4, D=-3$ ta được phương trình (P_2): $x+y+4z-3=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$ và $B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho qua hai điểm A, B có duy nhất một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0\\\Leftrightarrow&(x-2)^2+(y+m)^2+(z-m-1)^2=m^2-3\quad(1).\end{aligned}$$

Suy ra (1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow m^2-3>0\Leftrightarrow|m|>\sqrt{3}$.

Khi đó, mặt cầu (S) có tâm $I(2;-m;m+1)$ và bán kính $R=\sqrt{m^2-3}$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B. Theo giả thiết (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=1$.

Mặt khác, khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{m^2-4}$ với $m^2-4\geq 0$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;6;-2)\Rightarrow\vec{u}=(1;3;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}x=3+t\\y=1+3t\\z=2-t.\end{cases}$

Để có duy nhất mặt phẳng (P) thỏa mãn bài thì
TH1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm I và $I \notin AB$.
Ta có $I \in (P) \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.
+ Với $m = 2 \Rightarrow I(2; -2; 3) \in AB \Rightarrow m = 2$ (loại).
+ Với $m = -2 \Rightarrow I(2; 2; -1) \notin AB \Rightarrow m = -2$ (thỏa mãn).
TH2. Mặt phẳng (P) cách I một khoảng lớn nhất $\Leftrightarrow d$ lớn nhất $\Leftrightarrow d = \mathrm{d}(I, AB)$. (1)
Ta có $\overrightarrow{IA} = (1; 1+m; 1-m) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right] = (-4+2m; 2-m; 2-m)$
$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right]\right| = |2-m|\sqrt{6}$ và $|\vec{u}| = \sqrt{11}$.
+ Khi đó $\mathrm{d}(I, AB) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{|2-m|\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \sqrt{m^2-4} = \frac{|2-m|\sqrt{6}}{\sqrt{11}}\\ &\Leftrightarrow 11(m^2-4) = 6(2-m)^2\\ &\Leftrightarrow 5m^2 + 24m - 68 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \quad \text{(loại)}\\ m = -\dfrac{34}{5} \quad \text{(thỏa mãn)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài.
Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$. Cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Biết mặt phẳng (ABC) qua điểm $I(1; 3; 3)$ và thể tích tứ diện $O.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phương trình (ABC) là

A. $x + 3y + 3z - 21 = 0$. **B.** $3x + y + z - 9 = 0$.
C. $3x + y + z + 9 = 0$. **D.** $3x + 3y + z - 15 = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
$I(1; 3; 3) \in (ABC) \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{3}{b} + \dfrac{3}{c} = 1$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} \geq \sqrt[3]{\frac{3^2}{abc}} \Rightarrow abc \geq 9.$$

Thể tích tứ diện $O.ABC$ là $V = \dfrac{1}{6}abc \geq \dfrac{3}{2}$.
Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{b} = \dfrac{3}{c} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 3\\ b = c = 9.\end{cases}$
Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x + y + z - 9 = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2=0$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA=MB=MC$. Tính $T=a+2b+3c$.

A. $T=5$. **B.** $T=3$. **C.** $T=2$. **D.** $T=4$.

Lời giải.

Ta có $M(a;b;c)\in(P)\Leftrightarrow a+b+c-2=0\quad(1)$

- ☑ $MA^2=(a-2)^2+(b-0)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-4a-2c+5$.
- ☑ $MB^2=(a-1)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2a+1$.
- ☑ $MC^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3$.

Với $MA=MB$, ta có $a+c-2=0\quad(2)$

Với $MA=MC$, ta có $a-b-1=0\quad(3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b+c=2\\a+c=2\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1.\end{cases}$

Vậy $T=a+2b+3c=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 96. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ và mặt phẳng $(P)\colon y-z+1=0$. Biết $b,c>0$, $(ABC)\perp(P)$ và $\mathrm{d}(O;(ABC))=\dfrac{1}{3}$. Tính $T=b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=1$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}$. **D.** $T=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\Leftrightarrow x+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$.

Khoảng cách từ O đến (ABC) là $\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=9\Leftrightarrow\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=8.\quad(1)$

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(0;1;-1)$ và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=\left(1;\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$. Vì $(ABC)\perp(P)$ nên $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow b=c.\quad(2)$

Thay (2) vào (1) ta được $\dfrac{2}{b^2}=8\Leftrightarrow b^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$ (do $b>0$), suy ra $c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Gọi (S') là mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời (S') tiếp xúc với mặt phẳng $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu $(S)'$. Tính tích $T=abc$.

A. $T=1$. **B.** $T=-\dfrac{1}{8}$. **C.** $T=-1$. **D.** $T=\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S') có dạng

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-9+m(x+y+z-3)=0\\\Leftrightarrow\ &x^2+y^2+z^2+mx+my+mz-9-3m=0.\end{aligned}$$

Mặt cầu (S') có tâm $I\left(-\dfrac{m}{2};-\dfrac{m}{2};-\dfrac{m}{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{3m^2}{4}+3m+9}$.

(S') tiếp xúc với (Q) nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,(Q))=R &\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{m}{2}-5\right|}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3m^2}{4}+3m+9} \\ &\Leftrightarrow |m+10|=\sqrt{9m^2+36m+108} \\ &\Leftrightarrow m=-1\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Vậy $T=abc=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2=\dfrac{m^2}{4}$ (với $m>0$ là tham số thực) và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A. $m=1$. **B.** $m=3-\sqrt{3}$. **C.** $m=8-4\sqrt{3}$. **D.** $m=\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có

$$\begin{aligned} MA^2-MB^2=9 &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2-(x-1)^2-(y-2)^2-(z-4)^2=9 \\ &\Leftrightarrow x+y+z-4=0. \end{aligned}$$

Mặt cầu (S_m) có tâm $I(1;1;m)$ và bán kính $R=\dfrac{m}{2}$. Gọi $(\alpha)\colon x+y+z-4=0$. Khi đó,

$$\begin{aligned} M(1;1;m)\in(S_m)\Leftrightarrow \mathrm{d}\left[I,(\alpha)\right]\le R &\Leftrightarrow \frac{|m-2|}{\sqrt{3}}\le\frac{m}{2} \\ &\Rightarrow m-2\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}m\Rightarrow m\ge 8-4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8-4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 99. Cho mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz+d=0$, $(a^2+b^2+c^2>0)$ đi qua hai điểm $B(1;0;2)$, $C(5;2;6)$ và cách $A(2;5;3)$ một khoảng lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a}{b+c+d}$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** -2.

Lời giải.

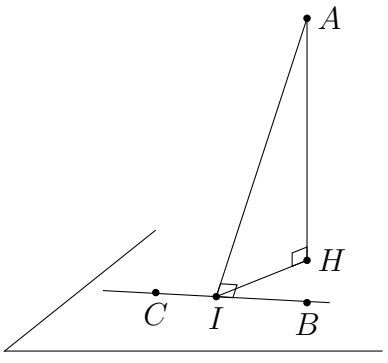
Phương trình đường thẳng $BC:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Gọi I là hình chiếu của A trên BC suy ra $I(3;1;4)$.

Kẻ $AH\perp(P)$, ta có AH đạt giá trị lớn nhất khi H trùng I hay $AI\perp(P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x-4y+z-3=0$.

Vậy $T=\dfrac{a}{b+c+d}=-\dfrac{1}{6}$.



Chọn đáp án (C) □

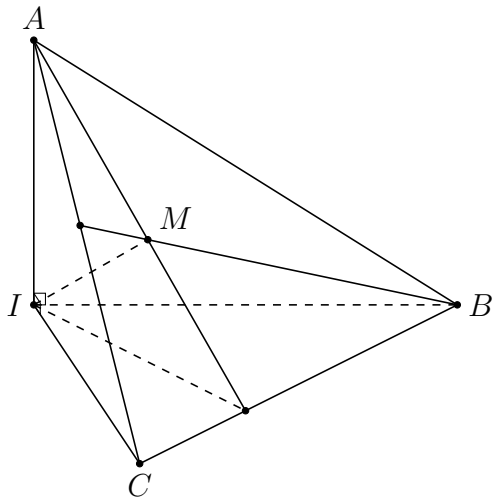
Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=t_1 \end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases} x=t_2 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$, $d_3\colon \begin{cases} x=1 \\ y=t_3 \\ z=0 \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(1;2;3)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách $d=\mathrm{d}(O,(P))$ (O là gốc tọa độ của hệ trục $Oxyz$).

A. $d=2\sqrt{2}$. **B.** $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi véc-tơ chỉ phương của các đường thẳng d_1, d_2, d_3 là $\vec{u}_{d_1}=(0;0;1)$, $\vec{u}_{d_2}=(1;0;0)$ và $\vec{u}_{d_3}=(0;1;0)$.

Ta có $\vec{u}_{d_1}\cdot\vec{u}_{d_2}=0$, $\vec{u}_{d_1}\cdot\vec{u}_{d_3}=0$, $\vec{u}_{d_2}\cdot\vec{u}_{d_3}=0$ và d_1, d_2 và d_3 cắt nhau tại điểm $I(1;-1;0)$ nên IA, IB, IC đôi một vuông góc với nhau.



Từ $\begin{cases} IA\perp IB \\ IA\perp IC \end{cases}\Rightarrow IA\perp(IBC)\Rightarrow IA\perp BC.$

Từ $\begin{cases} IB\perp IA \\ IB\perp IC \end{cases}\Rightarrow IB\perp(IAC)\Rightarrow IB\perp AC.$

Mặt khác từ $\begin{cases} AM\perp BC \\ IA\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp(IAM)\Rightarrow BC\perp IM \quad (1)$

Mà $\begin{cases} BM\perp AC \\ IB\perp AC \end{cases}\Rightarrow AC\perp(IBM)\Rightarrow AC\perp IM \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IM\perp(ABC)$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{IM}=(0;3;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

$$(ABC)\colon 3(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow y+z-5=0.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là $d=\dfrac{|-5|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;1)$, $C(1;1;0)$. Có bao nhiêu điểm M cách đều các mặt phẳng (ABC), (OBC), (OAC), (OAB)?

A. Vô số điểm M. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;1;1)$, $\overrightarrow{OB}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{OC}=(1;1;0)$, $\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;0;-1)$.

☑ Ta có $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(1;1;-1)\Rightarrow(OAB)\colon x+y-z=0.$

☑ Ta có $\left[\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right]=(-1;1;1)\Rightarrow(OBC)\colon -x+y+z=0.$

☑ Ta có $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right]=(-1;1;-1)\Rightarrow (OAC)\colon\ -x+y-z=0.$

☑ Ta có $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;1)\Rightarrow (ABC)\colon x+y+z-2=0.$

Gọi điểm $M(a;b;c)$ cách đều các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OAC), (ABC).

Từ $\mathrm{d}(M,(OAB))=\mathrm{d}(M,(OBC))\Leftrightarrow \dfrac{|a+b-c|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|-a+b+c|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \hoac{a=c\quad(1)\\ b=c\quad(2)}$

Từ $\mathrm{d}(M,(OAB))=\mathrm{d}(M,(OAC))\Leftrightarrow \dfrac{|a+b-c|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|-a+b-c|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \hoac{a=0\quad(3)\\ b=c\quad(4)}$

Từ $\mathrm{d}(M,(OAB))=\mathrm{d}(M,(ABC))\Leftrightarrow \dfrac{|a+b-c|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \hoac{c=0\quad(5)\\ a=-b\quad(6)}$

Từ (1), (3), (5) suy ra $a=c=0$, b khác 0 tùy ý. Như vậy có vô số điểm cách đều bốn mặt phẳng.

Chọn đáp án A ☐

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $x-y-z=0$. **B.** $2x+y+z-6=0$. **C.** $2x+y+z+6=0$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1$.

Lời giải.

Vì tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông tại đỉnh O và H là trực tâm tam giác ABC nên $OH\perp (ABC)$.

Do đó $\overrightarrow{OH}=(2;1;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (ABC) và vì $H\in (ABC)$ nên phương trình (ABC) là

$$2(x-2)+(y-1)+(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+y+z-6=0.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 103. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-9=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) với a,b,c là các số nguyên không âm.

A. 55. **B.** 45. **C.** 50. **D.** 60.

Lời giải.

Ta có $(P)\colon x+y+z-9=0\Leftrightarrow \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{9}=1$ nên mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(9;0;0)$, $B(0;9;0)$, $C(0;0;9)$.

Từ đó suy ra tất cả các điểm có toạ độ nguyên của mặt phẳng (P) đều nằm trong miền tam giác ABC. Tam giác ABC đều có các cạnh bằng $9\sqrt{2}$, chiếu các điểm có toạ độ nguyên của hình tam giác ABC xuống mặt phẳng (Oxy) ta được các điểm có toạ độ nguyên của hình tam giác OAB. Mà số điểm có toạ độ nguyên của tam giác OAB bằng $1+2+\ldots+10=55$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 104. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;5)$. Phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với AB và hợp với các trục tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\dfrac{3}{2}$ là

A. $2x-3y+4z-3=0$. **B.** $2x-3y+4z+3=0$.

C. $2x-3y+4z\pm 12=0$. **D.** $2x-3y+4z\pm 6=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;4)\Rightarrow (P)\colon 2x-3y+4z+m=0$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với trục Ox, Oy, Oz; suy ra $M\left(-\dfrac{m}{2};0;0\right)$, $N\left(0;\dfrac{m}{3};0\right)$, $P\left(0;0;-\dfrac{m}{4}\right)$.

Ta có thể tích tứ diện $V_{O.MNP}=\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{m^3}{24}\right|=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m=\pm 6$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt trục Oy tại điểm B. Tọa độ của điểm B là

A. $B\left(0;\dfrac{14}{3};0\right)$. **B.** $B\,(0;14;0)$. **C.** $B\,(0;-14;0)$. **D.** $B\left(0;-\dfrac{14}{3};0\right)$.

Lời giải.

Dễ thấy, $\mathrm{d}(O;(P)) \le OM$, nên mặt phẳng (P) đi qua M, cách O một khoảng lớn nhất khi (P) nhận $\overrightarrow{OM} = (1;3;-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Suy ra (P) có phương trình $x+3y-2z-14=0$. Do đó giao điểm của (P) với trục Oy là $B\left(0;\dfrac{14}{3};0\right)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;-1)$, $B(1;-2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+9=0$. Mặt phẳng (α) chứa hai điểm A, B và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $3x-2y+z+13=0$.
C. $x+y-z+2=0$. **D.** $x-5y-2z+19=0$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{a}=(3;-2;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(3;-5;-2)$.
Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).
Ta có $\vec{n}=[\vec{a};\overrightarrow{AB}]=(9;9;-9)=9(1;1;-1)$.
Phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-2=0$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B ,C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$. **B.** $x^2+y^2+z^2=1$. **C.** $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=25$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $abc\neq 0$. Khi đó mặt phẳng (α) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1-a;2;-2)$, $\overrightarrow{BH}=(1;2-b;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.
H là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{-2}{c}=1\\ -2b-2c=0\\ -a-2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\ b=\dfrac{9}{2}\\ c=-\dfrac{9}{2}.\end{cases}$
Vậy phương trình của (α) : $\dfrac{x}{9}+\dfrac{2y}{9}-\dfrac{2z}{9}=1\Leftrightarrow x+2y-2z-9=0$.
Bán kính mặt cầu là $R=d(O,(\alpha))=3$.
Phương trình mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=9$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 108. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y+3z-1=0$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x-13y+3z+5$.
B. $x-13y-5z+3=0$.
C. $x-13y-5z+5=0$.
D. $x+13y-5z+5=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;5)$.
Mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;3)$.
Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y+3z-1=0$ nên có VTPT là $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(-1;13;5)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $-(x-3)+13(y-1)+5(z+1)=0\Leftrightarrow x-13y-5z+5=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 109. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tiếp xúc với mặt cầu (S) là
A. $4y+3z=0$. **B**. $4y+3z+1=0$. **C**. $4y-3z+1=0$. **D**. $4y-3z=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=1$.
Gọi véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.
Vì (Q) chứa trục hoành Ox nên $\vec{n}\perp\vec{i}$, tức là $\vec{n}\cdot\vec{i}=0\Leftrightarrow a=0$. Do đó phương trình của mặt phẳng (Q) có dạng $by+cz=0$.
Vì (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$\mathrm{d}(I,(Q))=R\Leftrightarrow\frac{|2b-c|}{\sqrt{b^2+c^2}}=1\Leftrightarrow|2b-c|=\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow(2b-c)^2=b^2+c^2$$
$$\Leftrightarrow 3b^2-4bc=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&b=0\\&3b=4c.\end{aligned}\right.$$

☑ Với $b=0$ ta chọn $c=1$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) là $z=0$.
☑ Với $3b=4c$ ta chọn $b=4$, $c=3$ phương trình của mặt phẳng (Q) là $4y+3z=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y-2z+3=0$.
A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B**. $\dfrac{121}{54}$. **C**. 24. **D**. $\dfrac{91}{54}$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-a;2-b;3-c)$, $\overrightarrow{IB}=(-a;1-b;1-c)$, $\overrightarrow{IC}=(1-a;-b;-2-c)$. Khi đó

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}1-a-2a+3-3a=0\\2-b+2-2b-3b=0\\3-c+2-2c-6-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=4\\6b=4\\6c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=\dfrac{2}{3}\\c=-\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{6}\right)$.
Ta chứng minh được $T=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$. Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá

trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng MI đi qua I và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = \dfrac{2}{3} + t \\ z = -\dfrac{1}{6} + t. \end{cases}$

Gọi $M\left(t+\dfrac{2}{3}; t+\dfrac{2}{3}; t-\dfrac{1}{6}\right)$, vì $M \in (P)$ nên $3t + \dfrac{19}{6} = 0$, suy 4a $t = -\dfrac{19}{18}$.

Do đó $M\left(-\dfrac{7}{18}; -\dfrac{7}{18}; -\dfrac{11}{9}\right)$.

Vậy $\mathrm{d}(M,(Q)) = \dfrac{\left|-\dfrac{7}{9} + \dfrac{7}{18} + \dfrac{22}{9} + 3\right|}{3} = \dfrac{91}{54}$.

Chọn đáp án D □

Câu 111. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + y - z - 3 = 0$, $(\beta)\colon 2x - y + 5 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) song song với trục Oz và chứa giao tuyến của (α) và (β).

A. $(P)\colon 2x - y - 5 = 0$. **B.** $(P)\colon 2x + y + 5 = 0$.

C. $(P)\colon x - 2y + 5 = 0$. **D.** $(P)\colon 2x - y + 5 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (β) nên có dạng:

$$\begin{aligned} & m(2x + y - z - 3) + n(2x - y + 5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2m + 2n)x + (m - n)y - mz - 3m + 5n = 0. \end{aligned}$$

Mặt phẳng (P) song song với trục Oz nên $m = 0$. Chọn $n = 1$ ta có $(P)\colon 2x - y + 5 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P) : ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Khi đó giá trị $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(8;11)$.

Lời giải.

$A, B \in (P) \Rightarrow a = 1, b = 1$. Góc giữa (P) và (yOz) bằng $60°$ suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{2 + c^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 113. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P) : x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc mặt phẳng (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a + b = c$. **B.** $a + b + c = 5$. **C.** $a \in (b;c)$. **D.** $a + b > c$.

Lời giải.

Vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (1;-3;2)$; $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}] = (0;-8;-12).$$

Khi đó phương trình mặt phẳng (Q): $0x+2y+3z-11=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=5.$

Chọn đáp án B □

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+m=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$. Đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$ cho nên có bán kính $r=2\sqrt{3}$. Suy ra $d(I,P)=\sqrt{R^2-r^2}=2$. Ta có

$$d(I,P)=\frac{|2-2-6+m|}{3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=12 \end{array}\right.$$

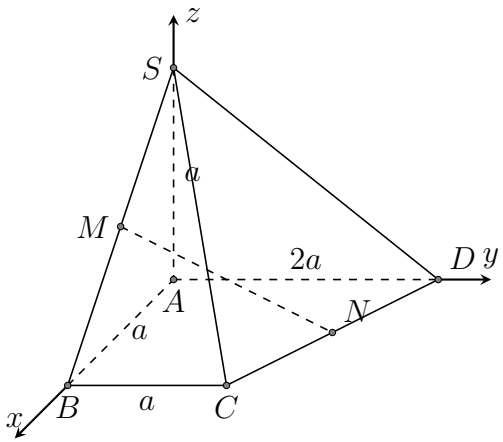
Chọn đáp án C □

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, với $O \equiv A$.



Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó: $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$.

Ta có: $-\frac{1}{a}\overrightarrow{SA}=(0;0;1)=\vec{u}$; $\frac{1}{a}\overrightarrow{SC}=(1;1;-1)=\vec{v}$.

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) ta có $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=(-1;-1;0)$.

Lại có: $\frac{2}{a}\overrightarrow{MN}=(0;3;-1)=\vec{w}$.

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{w}|}{|\vec{n}|.|\vec{w}|}=\frac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-4)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2y-21=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

A. $(P): 3x+y-4z-21=0$. **B.** $(P): x+2y-4z-21=0$.

C. $(P): 3x+y-5=0$. **D.** $(P): 3x+y-4z+21=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;-4)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{IA}=(3;1;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình mặt phẳng (P) là $3x+y-4z-21=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) thỏa mãn đề bài?

A. Chỉ có một mặt phẳng (P). **B**. Không có mặt phẳng (P) nào.
C. Có hai mặt phẳng (P). **D**. Có vô số mặt phẳng (P).

Lời giải.

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P). Khi đó (P): $ax+by+cz+d=0$.
$M(0;0;1)\in(P)\Leftrightarrow c+d=0\Leftrightarrow c=-d$.
$N(0;3;1)\in(P)\Leftrightarrow 3b+c+d=0\Leftrightarrow 3b=0\Leftrightarrow b=0$.
Do đó (P): $ax-dz+d=0$.
Khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P).
$\dfrac{|-2a-3d+d|}{\sqrt{a^2+d^2}}=2\dfrac{|a+d|}{\sqrt{a^2+d^2}}\Leftrightarrow\dfrac{|-2(a+d)|}{\sqrt{a^2+d^2}}=2\dfrac{|a+d|}{\sqrt{a^2+d^2}}$ (luôn đúng).
Vậy có vô số mặt phẳng (P).
Chọn đáp án D □

Câu 118. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$; $D(0;0;0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB)?

A. 4. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 8.

Lời giải.

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho. Dễ thấy các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) lần lượt là các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx). Mặt phẳng (ABC) có phương trình tổng quát là $x+y+z=1$. Do I cách đều các mặt phẳng này nên ta có

$$|m|=|n|=|p|=\frac{|m+n+p-1|}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Ta có các trường hợp

① *Trường hợp 1.* $m=n=p$.
Khi đó (1) tương đương

$$|m|=\frac{|3m-1|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

② *Trường hợp 2.* Trong ba số m, n, p có hai số bằng nhau và bằng số đối của số còn lại.
Khi đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m=n=-p$ (các trường hợp còn lại tương tự) và (1) tương đương

$$|m|=\frac{|m-1|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

Vậy số điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho là $2+2\cdot 3=8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa đô $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(0;1;3)$. **B.** $(2;2;0)$. **C.** $(1;1;2)$. **D.** $(-1;1;4)$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, với $a,b,c>0$. Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}=1$. Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{4}{c}}\Leftrightarrow 1\geq 27\cdot\frac{8}{abc}\Leftrightarrow abc\geq 8\cdot 27.$$

Mặt khác thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc\geq\dfrac{1}{6}\cdot 8\cdot 27=36$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{4}{c}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=12.\end{cases}$

Vậy phương trình của (P) là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{12}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-12=0$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $(2;2;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây?

A. $M_1(1;2;0)$. **B.** $M_2(1;-2;0)$. **C.** $M_3(-1;2;0)$. **D.** $M_4(-1;-2;0)$.

Lời giải.

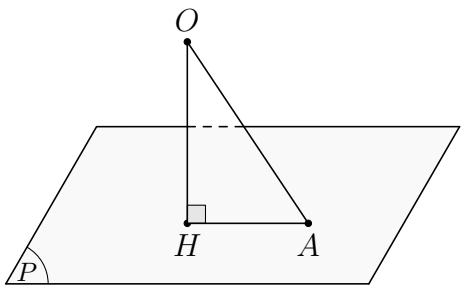
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P)

Ta có: $OH\leqslant OA$

Để $\mathrm{d}(O,(P))$ max $\Leftrightarrow OH=OA\Leftrightarrow H\equiv A$

$\Leftrightarrow OA\perp(P)$ hay $\overrightarrow{OA}$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Ta có: (P) qua $A(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{OA}=(1;1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến.



Phương trình tổng quát của (P) là:

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0\Leftrightarrow x+y+z-3=0.$$

Vậy (P) đi qua điểm $M_1(1;2;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

A. $M(2;0;-1)$. **B.** $M(0;2;-1)$. **C.** $M(1;-1;3)$. **D.** $M(2;3;-7)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\begin{cases} MA=MB=MC \\ M\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \\ M\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 \\ x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x+2)^2+y^2+(z-1)^2 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y+2z=-4 \\ 4x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-7. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 122. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz). Viết phương trình mặt phẳng (MNP).

A. $x-1=0$. **B.** $y-2=0$. **C.** $z-3=0$. **D.** $x+y+z-6=0$.

Lời giải.

☑ Ta có $N(1;2;0)$, $P(1;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(0;0;-3)$, $\overrightarrow{MP}=(0;-2;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(-6;0;0)$ là 1 véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP).

☑ Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $-6(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+y+z=0$ và các điểm $A\,(1;1;2)$, $B\,(0;-1;1)$, $C\,(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M biết M thuộc mặt phẳng (P) và $MA=MB=MC$.

A. $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

☑ Trong không gian $Oxyz$, gọi $M\,(a;b;c)\,,(a,b,c\in\mathbb{R})$.

☑ Theo đề ra ta có

$\begin{cases} M\in(P) \\ MA=MB \\ MB=MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=a^2+(b+1)^2+(c-1)^2 \\ a^2+(b+1)^2+(c-1)^2=(a-2)^2+b^2+c^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ a+2b+c=2 \\ 2a+b-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$

Chọn đáp án (A) □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x+2y+z+14=0$. **B.** $2x+y+3z+9=0$.

C. $3x+2y+z-14=0$. **D.** $2x+y+z-9=0$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$
Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,(a\cdot b\cdot c\neq 0)$
Vì (P) qua M nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1(1)$
Ta có: $\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1); \overrightarrow{MB}=(-3;b-2;-1); \overrightarrow{BC}=(0;-b;c); \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$
Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=c\\ 3a=c\end{cases}(2)$
Từ (1) và (2) suy ra $a=\frac{14}{3}; b=\frac{14}{2}; c=14$. Khi đó phương trình (P): $3x+2y+z-14=0$
Vậy mặt phẳng song song với (P) là: $3x+2y+z+14=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 125. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(1;0;-2)$, $P(0;1;-1)$. Gọi $G(x_0;y_0;z_0)$ là trực tâm của tam giác MNP. Tính x_0+z_0.

A. 0. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $-\frac{13}{7}$. **D.** -5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MG}=(x_0-1;y_0-1;z_0-1)$, $\overrightarrow{NG}=(x_0-1;y_0;z_0+2)$, $\overrightarrow{PG}=(x_0;y_0-1;z_0+1)$, $\overrightarrow{MN}=(0;-1;-3)$, $\overrightarrow{MP}=(-1;0;-2)$.
Lại có G là trực tâm $\triangle ABC$ nên

$$\begin{cases}PG\perp MN\\ NG\perp MP\\ G\in(MNP)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ \overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{MP}=0\\ \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]\cdot\overrightarrow{MG}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0+3z_0=-2\\ x_0+2z_0=-3\\ 2x_0+3y_0-z_0=4.\end{cases}\Rightarrow G\left(-\frac{5}{7};\frac{10}{7};-\frac{8}{7}\right).$$

Vậy $x_0+z_0=-\frac{13}{7}$.
Chọn đáp án C □

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;0)$ và $B(1;-1;3)$. Mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-2z-1=0$ có phương trình là

A. $-5x+y+z+9=0$. **B.** $-5x-y+z+11=0$.
C. $5x+y-z+11=0$. **D.** $5x-y+z-9=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-1;-2;3)$, véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_1}=(2;3;-2)$
$\Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần lập là $\overrightarrow{n_2}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_1}]=(-5;1;-1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là
$-5(x-2)+1(y-1)-1(z-0)=0\Leftrightarrow 5x-y+z-9=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0, 2x+2y+z+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S) ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính $R=3$.
Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên ta có:

$$\mathrm{d}(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|2-2+1+2m|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3 \Leftrightarrow |2m+1|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-5. \end{array}\right.$$

Chú ý: Ta có thể nhận xét nhanh vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu để thấy rằng do phương của (P) không đổi nên chỉ có 2 mặt phẳng thỏa mãn điều kiện tiếp xúc.
Chọn đáp án B □

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(2;4;1)\,, B\,(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $(Q): 2y+3z-10=0$. **B.** $(Q): 2x+3z-11=0$.
C. $(Q): 2y+3z-12=0$. **D.** $(Q): 2y+3z-11=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$. Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-3;2)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]=(0;8;12)$, chọn $\vec{n}_Q=(0;2;3)$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(0;2;3)$ có phương trình là:

$$2\,(y-4)+3\,(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z+3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2y-z+6=0$. **C.** $2y-3z+6=0$. **D.** $2y-3z-5=0$.

Lời giải.

(α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}]$, trong đó $\vec{n}_{(P)}=(1;-3;2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Từ đó, ta tính được $\vec{n}=4(0;2;3)$. Phương trình mặt phẳng (α) là $2(y-4)+3(z-1)=0$, hay $2y+3z-11=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;-1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): 3x+2y-z+5=0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P), phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $(\alpha): -7x+11y+z+15=0$. **B.** $(\alpha): 7x-11y-z+1=0$.
C. $(\alpha): 7x-11y+z-1=0$. **D.** $(\alpha): -7x+11y+z-3=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;4)$.
Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p=(3;2;-1)$.
Theo bài ra, mặt phẳng (α) có cặp véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}_p$, từ đó suy ra (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha=[\overrightarrow{AB},\vec{n}_p]=(-7;11;1)$.
Phương trình mặt phẳng (α): $-7x+11y+z+15=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là

A. $m=\pm\dfrac{12}{5}$. **B.** $m=\pm\dfrac{2}{5}$. **C.** $m=\pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$. **D.** $m=\pm\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng Oxy có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;m)$, suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2m;m;2)$.
Theo bài ra ta có

$$\cos 60^\circ=\frac{\left|\vec{k}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{k}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2+4}=4\Leftrightarrow m^2=\frac{12}{5}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 132. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA, α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD). Tính $\tan\alpha$.

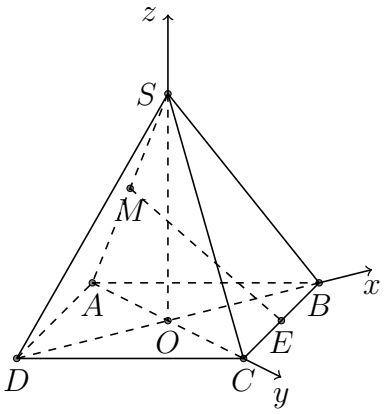
A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử các cạnh của hình chóp bằng $2\sqrt{2}$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Khi đó: $E(1;1;0)$, $M(0;-1;1)$, $\overrightarrow{ME}=(1;2;-1)$ và $\overrightarrow{OC}=(0;2;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (SBD).
Do đó,

$$\sin\alpha=\sin\left(EM,(SBD)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{OC}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{OC}\right|}{\left|\overrightarrow{EM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Vậy $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\sqrt{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A. $(P)\colon x+y-z+1=0$. **B.** $(P)\colon x+y+z-3=0$.
C. $(P)\colon x-y-z+1=0$. **D.** $(P)\colon x+2y+z-4=0$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Xét tam giác ABC có $AB^2=a^2+b^2$, $AC^2=a^2+c^2$, $BC^2=b^2+c^2$.
Khi đó

$$\cos\widehat{A}=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{a^2}{AB\cdot AC}>0$$

suy ra góc A nhọn. Chứng minh tương tự ta được góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ nhọn. Do đó, tam giác ABC có ba góc nhọn.

Phương trình mặt phẳng (P) qua A, B, C có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có (P) qua I suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. Suy ra a, b, c lớn hơn 1.

Xét tam giác ABC có $IA=IB=IC$ mà a, b, $c>1$. Do đó $a=b=c$ suy ra tam giác ABC đều hay I là trực tâm của tam giác ABC khi đó OI vuông góc (ABC).

Ta có $\overrightarrow{OI}=(1;1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Suy ra mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 134. Cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+4=0$. Phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\dfrac{AB}{6}$ có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{3}$.

B. $\left[\begin{array}{l}(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{3}\\(x-6)^2+(y+5)^2+(z-4)^2=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

C. $(x+4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\dfrac{1}{3}$.

D. $\left[\begin{array}{l}(x+4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\dfrac{1}{3}\\(x+6)^2+(y-5)^2+(z+4)^2=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-2;2;-2)$ suy ra $AB:\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+2t\\z=3-2t.\end{cases}$

Ta có bán kính $R=\dfrac{AB}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tâm I thuộc AB suy ra $I(1-2t,-2+2t,3-2t)$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu nên

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\,(I,(P))=R\\\Leftrightarrow&\frac{|(1-2t)+(-2+2t)+(3-2t)+4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\\Leftrightarrow&|6-t|=1\\\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}6-2t=1\Rightarrow 2t=5\Rightarrow I(-4;3;-2)\\6-2t=-1\Rightarrow 2t=7\Rightarrow I(-6;5;-4)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ta có phương trình đường tròn (C) tâm $I(-4;3;-2)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là

$$(x+4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\frac{1}{3}.$$

Phương trình đường tròn (C) tâm $I(-6;5;-4)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là

$$(x+6)^2+(y-5)^2+(z+4)^2=\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;-1)$ và $C(2;-1;2)$. Điểm D thuộc tia Oz sao cho độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{30}}{10}$ có tọa độ là

A. $(0;0;1)$. **B.** $(0;0;3)$. **C.** $(0;0;2)$. **D.** $(0;0;4)$.

Lời giải.

Ta có D thuộc tia Oz nên $D(0;0;d)$ với $d>0$.

Tính $\overrightarrow{AB}=(0;-2;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(1;-3;-1)$.

Mặt phẳng (ABC): $\begin{cases}\text{có véc-tơ pháp tuyến } \vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-10;-4;2)\\ \text{đi qua điểm } A(1;2;3).\end{cases}$

$\Rightarrow (ABC)\colon\ -10(x-1)-4(y-2)+2(z-3)=0\Leftrightarrow 5x+2y-y-6=0.$

Ta có $\mathrm{d}\left[D,(ABC)\right]=\dfrac{3\sqrt{30}}{10}\Leftrightarrow\dfrac{|d+6|}{\sqrt{30}}=\dfrac{3\sqrt{30}}{10}\Leftrightarrow|d+6|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=3\ (\text{nhận})\\ d=-15\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

Vậy $D(0;0;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z+3=0$, cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a;b;c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a+b+c<-2$?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (Q) có dạng $(P)\colon x+y+z+m=0$ $(m\neq 3)$ mà

$$\mathrm{d}(M,(P))=\frac{|3+2+1+m|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m=3 & (\text{loại})\\ m=-15.\end{array}\right.$$

Với $m=-15$ thì với mọi $X(a;b;c)\in(P)$ ta có $a+b+c-15=0\Leftrightarrow a+b+c=15>-2$. Do đó không có mặt phẳng nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};\dfrac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Tính $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

A. 14. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $M\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};\dfrac{3}{7}\right)\in(ABC)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$. Mà (ABC) tiếp xúc với (S) nên

$$\mathrm{d}(I,(ABC))=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 138. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ $(a,b,c \neq 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Do $M \in (\alpha)$ nên

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1.$$

Tuy nhiên, để thoả yêu cầu bài toán thì chỉ có thể xảy ra bốn trường hợp sau $a = b = c$ hay $a = b = -c$ hay $a = -b = c$ hay $a = -b = -c$ với $a \neq 0$. Với cả bốn trường hợp ta đều tìm được giá trị a thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z - 8 = 0$ và ba điểm $A(0;-1;0)$, $B(2;3;0)$, $C(0;-5;2)$. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB = MC$. Tính $S = x_0 + y_0 + z_0$.

A. -12. **B.** -5. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \\ M \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + (y_0+1)^2 + z_0^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 + z_0^2 \\ x_0^2 + (y_0+1)^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0+5)^2 + (z_0-2)^2 \\ x_0 + 2y_0 + z_0 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 + 8y_0 = 12 \\ -8y_0 + 4z_0 = 28 \\ x_0 + 2y_0 + z_0 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 5. \end{cases}$$

$\Rightarrow S = 5 - 1 + 5 = 9.$

Chọn đáp án D □

Câu 140. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $M(2;0;0)$, $N(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M, N cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(b > 0, c < 0)$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?

A. $bc = 2(b+c)$. **B.** $bc = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. **C.** $b + c = bc$. **D.** $bc = b - c$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;1;1)$, $\overrightarrow{MB} = (-2;b;0)$, $\overrightarrow{MC} = (-2;0;c)$.
Bốn điểm M, N, B, C đều thuộc (P) nên các véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ đồng phẳng.
Suy ra $\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right] \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -bc + 2c + 2b = 0 \Leftrightarrow bc = 2(b+c)$.

Cách 2. Ta có phương trình mặt phẳng $(P)\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
Mặt phẳng (P) qua $N(1;1;1)$ nên $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow bc = 2(b+c)$.

Chọn đáp án A □

Câu 141. Vectơ $\vec{n}=(1;-2;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng nào dưới đây

A. $x+2y+z+2=0$. **B**. $x-2y-z-2=0$. **C**. $x+y-2z+1=0$. **D**. $x-2y+z+1=0$.

Lời giải.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $ax+by+cz+d=0$ chính là hệ số của x,y,z.

Chọn đáp án D □

Câu 142. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;0), B(0;0;2)$ và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A,B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 0 mặt phẳng. **B**. 2 mặt phẳng. **C**. 1 mặt phẳng. **D**. Vô số mặt phẳng.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=1$ Gọi $(P): Ax+By+Cz+D=0$ là mặt phẳng chứa 2 điểm A,B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Vì $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}A+D=0\\2C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D=-2C\\A=2C\end{cases}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên :

$$d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|A+B+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{|B|}{\sqrt{5C^2+B^2}}=1\Leftrightarrow C=0.$$

Với $C=0\Rightarrow A=D=0$. Chọn $B=1\Rightarrow(P): y=0$.

Như vậy chỉ có một mặt phẳng chứa A,B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Chọn đáp án C □

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;-3)$, $B(2;0;-1)$ và (P): $3x-8y+7z-1=0$. Có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (P) sao cho $\triangle ABC$ đều?

A. Vô số. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

$\triangle ABC$ đều nên $CA=CB=AB$. Suy ra C thuộc đường tròn là giao của mặt cầu tâm A đi qua B và mặt cầu tâm B đi qua A.

Đường tròn này là đường tròn tâm $I(1;0;-2)$ và có bán kính $R=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$.

Cuối cùng vì C thuộc (P) nên C là giao của đường tròn trên và (P).

Ta chỉ cần so sánh $\mathrm{d}(I,(P))$ và R. Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|3\cdot1-8\cdot0+7\cdot(-2)-1|}{\sqrt{3^2+8^2+7^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{122}}<R$ nên sẽ có 2 điểm C thỏa bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 144. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) diện tích nhỏ nhất là

A. (P): $x+2y+3z+6=0$. **B**. (P): $x+2y+z-2=0$.

C. (P): $x-2y+z-6=0$. **D**. (P): $3x+2y+2z-4=0$.

Lời giải.

Ta có (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$
$AI=\sqrt{1^2+2^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}<R\Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).
Để (P) đi qua điểm A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) diện tích nhỏ nhất thì đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất, hay $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.
Suy ra (P) đi qua $A(0;0;2)$ và vuông góc với $AI\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(1;2;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).
Vậy $(P)\colon x+2y+z-2=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 145. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O,A,B,C,D?

A. 6. **B**. 10. **C**. 7. **D**. 5.

Lời giải.

Ta thấy 3 điểm A,B,C tạo thành mặt phẳng chắn các trục tọa độ có phương trình:
$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$
Suy ra $D\in(ABC)$. Như vậy 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng.
Mà theo lý thuyết: qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng ta xác định được 1 mặt phẳng.
Vậy nên số mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O,A,B,C,D là $\mathrm{C}_5^3-3=7$.
Chọn đáp án C □

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O,A,B,C,D ?

A. 6. **B**. 10. **C**. 7. **D**. 5.

Lời giải.

Ta thấy 3 điểm A,B,C tạo thành mặt phẳng chắn các trục tọa độ có phương trình:
$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$
Suy ra $D\in(ABC)$. Như vậy 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng.
Mà theo lý thuyết: qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng ta xác định được 1 mặt phẳng.
Vậy nên số mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O,A,B,C,D là $\mathrm{C}_5^3-3=7$.
Chọn đáp án C □

Câu 147. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

A. $2x+y+z-6=0$. **B**. $3x+y+3z-10=0$.
C. $x-y+z-2=0$. **D**. $3x-y+3z-8=0$.

Lời giải.

Nếu OA,OB,OC đôi một vuông góc thì ta dễ dàng nhận thấy H là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $OH\perp(ABC)$.
Từ đó suy ra (P) đi qua điểm H và nhận véc-tơ $\overrightarrow{OH}=(2;1;1)$ làm một véc-tơ pháp tuyến.
Suy ra mặt phẳng (P) có phương trình $2(x-2)+1(y-1)+1(z-1)=0$ hay $(P)\colon 2x+y+z-6=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+y^2+(z-1)^2=10$. Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3?

A. $(P_1)\colon x+2y-2z+8=0$. **B.** $(P_2)\colon x+2y-2z-8=0$.
C. $(P_3)\colon x+2y-2z-2=0$. **D.** $(P_4)\colon x+2y-2z-4=0$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-3;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Ta có (P) là mặt phẳng cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=3 \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{10-9}=1$. Mà $\mathrm{d}(I,(P_1))=\dfrac{|-3+2\cdot 0-2\cdot 1+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$. Suy ra (P_1) thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 149. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và chứa trục Ox. Điểm nào trong các điểm sau đây thuộc mặt phẳng (α)?

A. $M(0;4;-2)$. **B.** $N(2;2;-4)$. **C.** $P(-2;2;4)$. **D.** $Q(0;4;2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) chứa trục $Ox \Rightarrow (\alpha)\colon by+cz=0 \quad (b^2+c^2\neq 0)$. Mà $A(1;-1;2)\in(\alpha)$ nên $-b+2c=0$. Chọn $c=1\Rightarrow b=2$. Khi đó $(\alpha)\colon 2y+z=0$. Ta có $2\cdot 2-4=0\Rightarrow N(2;2;-4)\in(\alpha)$.

Chọn đáp án B □

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $C\,(0;0;3)$ và $M\,(-1;3;2)$. Mặt phẳng (P) qua C, M đồng thời chắn trên các nửa trục dương Ox, Oy các đoạn thẳng bằng nhau. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $x+y+2z-1=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y+z-3=0$. **D.** $x+y+2z-6=0$.

Lời giải.

Giả sử (P) chắn trên nửa trục dương Ox, Oy các điểm $A\,(a;0;0)$ và $B\,(0;b;0)$ với $a,b>0$.
Ta có $OA=OB\Rightarrow a=b$. Khi đó phương trình mặt phẳng P đi qua A,B,C là $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{3}=1$.
Điểm $M\in(P)\Rightarrow \dfrac{-1}{a}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{3}=1\Leftrightarrow a=6\Rightarrow (P):x+y+2z-6=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 151. Cho tam giác ABC không vuông, trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ với hai mặt phẳng có phương trình $(P)\colon x\cdot\cos A+y\cdot\cos B+z\cdot\cos C-1=0$, $(Q)\colon x\cdot\tan A-y\cdot\sin C-z\cdot\sin B-1=0$. Tìm mệnh đề đúng?

A. $(P)\parallel(Q)$. **B.** $(P)\equiv(Q)$.
C. $(P)\perp(Q)$. **D.** $M(\cos A;\cos B;\cos C)\in(P)\cap(Q)$.

Lời giải.

Xét $\vec{n}_P=(\cos A;\cos B;\cos C)$ và $\vec{n}_Q=(\tan A;-\sin C;-\sin B)$. Khi đó

$$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=\cos A\cdot\tan A+\cos B\cdot(-\sin C)+\cos C\cdot(-\sin B)=\sin A-\sin(B+C)=\sin A-\sin A=0.$$

Vậy, $(P)\perp(Q)$.

Chọn đáp án C □

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$ cho các mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+1=0$, $(Q)\colon 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A. $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $r=\sqrt{2}$. **C.** $r=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **D.** $r=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi R, $I(m;0;0)$ lần lượt là bán kính, tâm của mặt cầu; d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P), (Q).

Từ đó ta có $R^2=d_1^2+4=d_2^2+r^2$, suy ra

$$\frac{(m+1)^2}{1^2+(-1)^2+2^2}+4=\frac{(2m-1)^2}{2^2+1^2+1^2}+r^2$$

$$\Leftrightarrow m^2+2m+1+16=4m^2-4m+1+6r^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2-6m+(6r^2-16)=0$$

$$\Leftrightarrow m^2-2m+(2r^2-8)=0 \qquad (*)$$

Để tồn tại đúng một mặt cầu tương đương phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm m hay

$$\Delta'=1^2-(2r^2-8)=0\Leftrightarrow r^2=\frac{9}{2}\Rightarrow r=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy ta có $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{4}{\sqrt{21}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. **D.** $9\sqrt{21}$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, $c>0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ nên ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. $(*)$

Vì OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 nên $c=2b=4a$. Thay vào $(*)$, ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}+\frac{1}{4a}=1\Leftrightarrow\frac{9}{4a}=1\Leftrightarrow a=\frac{9}{4}.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow 4x+2y+z-9=0$.

Vậy $d\left(O,(\alpha)\right)=\dfrac{|-9|}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 154. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(0;0;-3\right)$, $B\left(2;0;-1\right)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-8y+7z-1=0$ Điểm $C\left(a;b;c\right)$ là điểm nằm trên mặt phẳng (P), có hoành độ dương để tam giác ABC đều. Tính $a-b+3c$.

A. -7. **B.** -9. **C.** -5. **D.** -3.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, ta có (Q) đi qua điểm $I\,(1;0;-2)$ là trung điểm của AB và nhận $\overrightarrow{IB}=(1;0;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên (Q) có phương trình là

$$1(x-1)+0(y-0)+1(z+2)=0\Leftrightarrow x+z+1=0.$$

Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó d đi qua điểm $M(0;-1;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;-1;-2)$ nên d có phương trình là $\begin{cases}x=2t\\ y=-1-t\\ z=-1-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Ta có $C\in d\Rightarrow C\,(2t;-1-t;-1-2t)$.

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB=AC$

$\Leftrightarrow\sqrt{(2t)^2+(-1-t)^2+(2-2t)^2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 9t^2-6t-3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow C\,(2;-2;-3).$

Vậy $a-b+3c=-5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 155. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;1;4)$ và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC)?

A. $4x-12y-3z+12=0$. **B.** $3x+12y-4z+12=0$.

C. $3x+12y-4z-12=0$. **D.** $4x-12y-3z-12=0$.

Lời giải.

Ta có $A(-3;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;4)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{4}=1\Leftrightarrow 4x-12y-3z+12=0.$$

Do đó, trong các mặt phẳng đã cho, chỉ có mặt phẳng có phương trình $4x-12y-3z-12=0$ là song song với mặt phẳng (ABC).

Chọn đáp án (D) □

Câu 156. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=10$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=5$. **D.** $a+b+c=-7$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(1;-3;2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có một véc-tơ chỉ phương là

$$\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]=(0;8;12)=4\,(0;2;3)\,.$$

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$0\cdot(x-2)+2\cdot(y-4)+3\cdot(z-1)=0.$$

Hay $(Q)\colon 2y+3z-11=0$. Từ đó suy ra $a=0$, $b=2$, $c=3$. Do đó $a+b+c=0+2+3=5$.
Chọn đáp án C □

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z+1=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng $(ABM)\perp(P)$ và $MA^2+MB^2=246$. Tính $S=a+b+c$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải.

Từ giả thiết $(ABM)\perp(P)$ suy ra M thuộc d là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P).
Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\vec{n}_P,\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]\right]=(36;0;-72)=36(1;0;-2)$.
Đường thẳng qua A vuông góc với $(P)\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$, cắt (P) tại $A'(1;2;-1)$.
Suy ra phương trình $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-1-2t. \end{cases}$
Gọi $M(1+t;2;-1-2t)$, theo bài ra ta có $MA^2+MB^2=246$ nên

$$(1+t+1)^2+(2-3)^2+(-1-2t+2)^2+(1+t+3)^2+(2-7)^2+(-1-2t+18)^2=246\Leftrightarrow t=3.$$

Khi đó $M(4;2;-7)$, vậy $a+b+c=-1$.
Chọn đáp án B □

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon\ 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **B.** $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.
C. $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=25$.

Lời giải.

Gọi K là tâm đường tròn giao tuyến, R là bán kính mặt cầu (S). Khi đó

$$IK=d(I,(P))=\frac{|2\cdot 1+2+2\cdot 3+2|}{3}=4.$$

Ta có $R^2=IK^2+3^2=25\Rightarrow R=5$.
Vậy phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.
Chọn đáp án C □

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ với tọa độ các đỉnh như sau: $A(2018;0;0)$, $B(0;2018;0)$, $C(0;0;2018)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng chứa 4 mặt của tứ diện $OABC$?

A. 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải.

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho. Dễ thấy các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) lần lượt là các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx). Mặt phẳng (ABC) có phương trình tổng quát là $x+y+z=2018$. Do I cách đều các mặt phẳng này nên ta có

$$|m|=|n|=|p|=\frac{|m+n+p-2018|}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

Ta có các trường hợp

① *Trường hợp 1.* $m=n=p$.

Khi đó (1) tương đương

$$|m|=\frac{|3m-2018|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=\frac{2018}{3\pm\sqrt{3}}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

② *Trường hợp 2.* Trong ba số m, n, p có hai số bằng nhau và bằng số đối của số còn lại.

Khi đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m=n=-p$ (các trường hợp còn lại tương tự) và (1) tương đương

$$|m|=\frac{|m-2018|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m=\frac{2018}{1\pm\sqrt{3}}.$$

Ta được hai điểm thỏa mãn bài toán.

Vấy số điểm cách đều bốn mặt phẳng đã cho là $2+2\cdot 3=8$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 160. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1)\colon 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2)\colon 3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là

A. $(P)\colon 3x-y+4z+10=0$. **B.** $(P)\colon 3x-y+4z+5=0$.

C. $(P)\colon 3x-y+4z-10=0$. **D.** $(P)\colon 3x-y+4z-5=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x-y+4z+c=0$. Vì (P) cách đều hai mặt phẳng $(Q_1)\colon 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2)\colon 3x-y+4z+8=0$ nên

$$\begin{aligned} &d\left((P),(Q_1)\right)=d\left((P),(Q_2)\right)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{|c-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{|c-8|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}}\\ \Leftrightarrow\ &c=5. \end{aligned}$$

Vậy mặt phẳng (P) có phương trình $3x-y+4z+5=0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 161. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $OA=OB=OC$ (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O) là

A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,b,c\neq 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Do $M(1;2;5)\in(ABC)$ và $OA=OB=OC$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} |a|=|b|=|c|\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{5}{c}=1. \end{cases}$$

- ☑ Nếu $a=b=c$ thì $a=b=c=8$.
- ☑ Nếu $a=b=-c$ thì $a=b=-2$, $c=2$.
- ☑ Nếu $a=-b=c$ thì $a=c=4$, $b=-4$.
- ☑ Nếu $-a=b=c$ thì $a=-6$, $b=c=6$.

Vậy có tất cả bốn mặt phẳng thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 162. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta)\colon 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{17-m}$ $(m<17)$. Bán kính của đường tròn giao tuyến là $\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$. Do đó khoảng cách từ I đến mặt phẳng (β) thỏa mãn

$$[d(I,(\beta))]^2=R^2-4^2\Leftrightarrow\frac{[2\cdot(-1)-2+2\cdot3-8]^2}{2^2+(-1)^2+2^2}=17-m-16\Leftrightarrow m=-3.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3$.
Chọn đáp án A □

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $x+2y+3z-14=0$. **B.** $3x+2y+z-10=0$.
C. $6x+3y+2z-18=0$. **D.** $6x-3y+2z-6=0$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ do OA, OB, OC khác 0.
Khi đó phương trình mặt phẳng (P) qua A, B, C có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Mà $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$, do đó theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{14}(1^2+2^2+3^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{1}{14}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=\frac{1}{14}.$$

T đạt giá trị nhỏ nhất nên ta có dấu bằng xảy ra, tức là

$$\begin{cases}x=2y=3z\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=14\\ b=\dfrac{14}{2}\\ c=\dfrac{14}{3}.\end{cases}$$

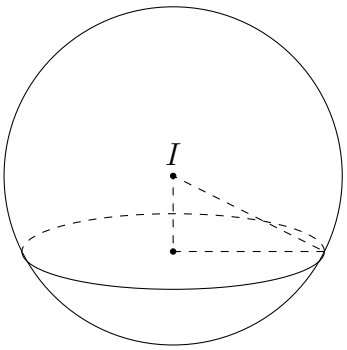
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y+3z-14=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z-11=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z+3=0$. Biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường tròn $(\mathscr{T})$. Tính chu vi của đường tròn $(\mathscr{T})$.

A. 2π. **B**. 4π. **C**. π. **D**. 6π.

Lời giải.

Ta có $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=16$
$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=4$.
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) là
$d=\mathrm{d}(I,(\alpha))=\dfrac{|1+0+2+3|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.
Gọi r là bán kính của đường tròn $(\mathscr{T})$
$\Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{16-12}=2$.
Chu vi đường tròn $(\mathscr{T})$ là $2\pi r=4\pi$.



Chọn đáp án B □

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(3;-3;3)$. **B**. $M(-3;3;3)$. **C**. $M(3;3;-3)$. **D**. $M(-3;-3;3)$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. (1)
Ta có $\overrightarrow{IA}(-3-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IB}(-a;-b;3-c)$, $\overrightarrow{IC}(-a;3-b;-c)$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-3-a=0\\ b-3=0\\ 3-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=3\\ c=3\end{cases}\Leftrightarrow I(-3;3;3).$$

Nhận thấy $I(-3;3;3)\in(P)$ nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI\geqslant 0$.
Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất bằng 0 khi $M(-3;3;3)$.
Chọn đáp án B □

Câu 166. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;\sqrt{3};0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;\sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB).

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 15°.

Lời giải.

$M(0;0;m)$ thuộc trục Oz.
Ta có $\overrightarrow{AM}=(1;-\sqrt{3};m)$, $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-\sqrt{3};\sqrt{3})$.
$\Rightarrow \vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-2\sqrt{3};-2\sqrt{3})$, $\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(0;-2m;-2\sqrt{3})$.
Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1$, mặt phẳng (MAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2$.
Hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow 0\cdot 0+(-2\sqrt{3})\cdot(-2m)+(-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})=0\Leftrightarrow m=-\sqrt{3}.$$

Mặt phẳng (OAB) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_3=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-2\sqrt{3})$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB). Khi đó

$$\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_2,\vec{n}_3)|=\frac{|\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_2|\cdot|\vec{n}_3|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB) là 45°.

Chọn đáp án C □

Câu 167. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(5;5;1)$. Đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ cắt mặt phẳng (Oxy) tại $M(a;b;0)$. Tính $3b-a$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(1+1)^2}=3$, $AC=\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2+(1+1)^2}=6$.
Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$. Ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$.
Gọi tọa độ của D là (x,y,z). Khi đó $\overrightarrow{DB}=(2-x;3-y;1-z)$ và $\overrightarrow{DC}=(5-x;5-y;1-z)$.
Vì D nằm giữa B và C nên ta có

$$\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=-2(2-x)\\5-y=-2(3-y)\\1-z=-2(1-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=\dfrac{11}{3}\\z=1.\end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{AD}=\left(2;\dfrac{8}{3};2\right)$ và $\overrightarrow{AM}=(a-1;b-1;1)$.
Điểm M thuộc vào đường thẳng AD khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AD}$. Điều này tương đương với

$$\frac{a-1}{2}=\frac{b-1}{\frac{8}{3}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=\dfrac{7}{3}.\end{cases}$$

Vậy $3b-a=7-2=5$.
Chọn đáp án B □

Câu 168. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+z-4=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục $x'Ox$ là

A. $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{1}{3};0;0\right)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$.

Lời giải.

Gọi (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) và (C) có tâm H, bán kính r.
Bán kính r của đường tròn là nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.
Vì $M\in x'Ox$ nên gọi $M(m;0;0)$. Suy ra mặt phẳng (P) chứa AM và $(P)\perp(\alpha)$.
Khi đó $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{MA},\vec{n}_{(\alpha)}\right]=(3;2+m;m-1)$.
Mà mặt phẳng (P) đi qua A nên phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$3(x-0)+(2+m)(y-2)+(m-1)(z-2)=0\quad\text{hay}\quad 3x+(2+m)y+(m-1)z-3m=0.$$

Ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{9}{\sqrt{2m^2+2m+14}}$ lớn nhất khi và chỉ khi $2m^2+2m+14$ nhỏ nhất.
Mà $2m^2+2m+14=2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}\geq\dfrac{27}{2}$.

Do đó $2m^2+2m+14$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(2;1;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ điểm $I(1;2;3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{17\sqrt{30}}{30}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. **C.** $\dfrac{19\sqrt{30}}{30}$. **D.** $\dfrac{11\sqrt{30}}{30}$.

Lời giải.

Gọi $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.

Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C nên (P) có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

$M(2,1,5)\in(P)\Rightarrow \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{5}{c}=1.\quad(1)$

$\overrightarrow{AM}=(2-a,1,5)$; $\overrightarrow{BM}=(2,1-b,5)$; $\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$; $\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$.

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}AM\perp BC\\BM\perp AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(2-a)\cdot0+1\cdot(-b)+5\cdot c=0\\2\cdot(-a)+(1-b)\cdot0+5\cdot c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-b+5c=0\\-2a+5c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=5c\\a=\dfrac{5c}{2}.\end{cases}$

Thay vào phương trình (1) ta được

$\dfrac{4}{5c}+\dfrac{1}{5c}+\dfrac{5}{c}=1\Leftrightarrow\dfrac{6}{c}=1\Leftrightarrow c=6\Rightarrow\begin{cases}b=30\\a=15.\end{cases}$

Suy ra $(P)\colon \dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+y+5z-30=0.$

$\mathrm{d}(I,P)=\dfrac{|2\cdot1+2+5\cdot3-30|}{\sqrt{2^2+1^2+5^2}}=\dfrac{11\sqrt{30}}{30}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y-z-4=0$. Tam giác ABC có $A(-1;2;1)$, các đỉnh B,C nằm trên (α) và trọng tâm G nằm trên đường thẳng d. Tọa độ trung điểm M của BC là

A. $M(2;1;2)$. **B.** $M(0;1;-2)$. **C.** $M(1;-1;-4)$. **D.** $M(2;-1;-2)$.

Lời giải.

Giả sử $G(2+t;2+2t;-2-t)\in d$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó điểm M có tọa độ $\begin{cases}x_M=\dfrac{3x_G-x_A}{2}=\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{2}\\y_M=\dfrac{3y_G-y_A}{2}=3t+2\\z_M=\dfrac{3z_G-z_A}{2}=-\dfrac{3}{2}t-\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

Do điểm $M\left(\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{2};3t+2;-\dfrac{3}{2}t-\dfrac{7}{2}\right)\in(\alpha)$ nên thay tọa độ M vào (α) ta được

$$2\left(\frac{3}{2}t+\frac{7}{2}\right)+2\left(3t+2\right)-\left(-\frac{3}{2}t-\frac{7}{2}\right)-4=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Suy ra, tọa độ M là $M(2;-1;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;6)$, $B(-1;2;4)$ và $I(-1;-3;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B sao cho khoảng cách từ điểm I đến (P) là nhỏ nhất.

A. $(P): 16x+6y-15z+64=0$. **B.** $(P): 7x+59y+78z-423=0$.

C. $(P): 16x+6y-15z-64=0$. **D.** $(P): 7x+59y+78z+423=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;2;4), \overrightarrow{IB}=(0;5;2)$.

Khoảng cách từ I đến (P) nhỏ nhất khi $I \in (P)$.

Gọi $\vec{n}$ là một VTPT của (P), suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right]=(-16;-6;15)$.

Phương trình (P): $16(x-2)+6(y+1)-15(z-6)=0 \Leftrightarrow 16x+6y-15z+64=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$ và mặt phẳng (P): $2x+2y+z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$, giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 39. **B.** 63. **C.** 62. **D.** 38.

Lời giải.

Gọi $M(a;b;c)$, do $M \in (P)$ nên $2a+2b+c-3=0$. (1)

Theo đề ta có

$$\begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2+(c-2)^2=(a-2)^2+(b+2)^2+(c-1)^2 \\ a^2+(b-1)^2+(c-2)^2=(a+2)^2+b^2+(c-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-6b-2c=4 \\ -4a-2b-2c=0. \end{cases}$$

Kết hợp với (1) và giải hệ ta được $a=2$, $b=3$, $c=-7$ nên $a^2+b^2+c^2=49$.

Chọn đáp án C □

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là

A. $2x-y+z+6=0$. **B.** $2x-y+z-6=0$. **C.** $2x+y+z-6=0$. **D.** $2x+y-z-6=0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (P). Khi đó, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) bằng OH. Do đó, mặt phẳng (P) đi qua A và cách O một khoảng lớn nhất khi $H \equiv A$, hay $OA \perp (P)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OA}=(2;-1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$2\cdot(x-2)+(-1)\cdot(y+1)+1\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-6=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ di động trên các tia Ox, Oy, Oz luôn thỏa mãn $a+b+c=2$. Biết rằng quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ nằm trong mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ điểm $M(4;0;0)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên tọa độ tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$.

Do $a+b+c=2$ nên $I\in(P)\colon x+y+z-1=0$.

Khoảng cách từ M đến (P) là $\mathrm{d}=\dfrac{|4-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 175. Trong không gian Oxy, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$, tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+5=0$, $(Q)\colon 2x-y+z-5=0$ lần lượt tại các tiếp điểm A,B. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$. Từ giả thiết suy ra A,B lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) và (Q).

Gọi d là đường thẳng đi qua I và $d\perp(P)$, khi đó d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;1;2)$ nên d có phương trình $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

$A\in d\Rightarrow A(1+t;2+t;-1+2t)$.

$A\in(P)\Leftrightarrow 1+t+2+t+2(-1+2t)+5=0\Leftrightarrow 6t+6=0\Leftrightarrow t=-1$, nên $A(0;1;-3)$.

Gọi d' là đường thẳng đi qua I và $d'\perp(Q)$, khi đó d' có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}'_d=(2;-1;1)$ nên d' có phương trình $d'\colon \begin{cases} x=1+2t' \\ y=2-t' \\ z=-1+t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$.

$B\in d'\Rightarrow B\,(1+2t';2-t';-1+t')$.

$B\in(Q)\Leftrightarrow 2\,(1+2t')-(2-t')+(-1+t')-5=0\Leftrightarrow 6t'-6=0\Leftrightarrow t'=1$, nên $B(3;1;0)$.

Vậy $AB=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $2x+2y-z-4=0$ hoặc $2x+2y-z+17=0$.

B. $2x+2y-z+2=0$ hoặc $2x+2y-z+8=0$.

C. $2x+2y-z-1=0$ hoặc $2x+2y-z+11=0$.

D. $2x+2y-z-6=0$ hoặc $2x+2y-z+3=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q).

Đặt $IH=x$ ta có $r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{12-x^2}$.

Vậy thể tích khối nón tạo được là

$V=\dfrac{1}{3}\cdot IH\cdot S_{((C))}=\dfrac{1}{3}\cdot x\cdot\pi\left(\sqrt{12-x^2}\right)^2=\dfrac{1}{3}\pi(12x-x^3)$.

Gọi $f(x)=12x-x^3$ với $x\in\left(0;2\sqrt{3}\right)$.

Thể tích nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(x)=12-3x^2$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 12-3x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$. Chỉ có $x=2\in\left(0;2\sqrt{3}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	16	↘	0

Vậy $V_{\max}=\dfrac{1}{3}\pi 16=\dfrac{16\pi}{3}$ khi $x=IH=2$.

Mặt phẳng $(Q)\parallel(P)$ nên $(Q)\colon 2x+2y-z+a=0$ $(a\neq -3)$

Và $\mathrm{d}(I,(Q))=IH\Leftrightarrow\dfrac{|2+2(-2)-3+a|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow|a-5|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=11\\a=-1.\end{array}\right.$

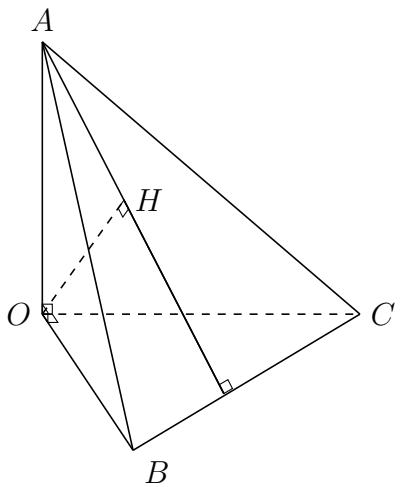
Vậy mặt phẳng (Q) có phương trình $2x+2y-z-1=0$ hoặc $2x+2y-z+11=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 177. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $H\,(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác $\triangle ABC$. Phương trình của (P) là

A. $2x+y+z-6=0$.
B. $x+2y+z-6=0$.
C. $x+2y+2z-6=0$.
D. $2x+y+z+6=0$.

Lời giải.



Ta có $AH \perp BC$, $OA \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$.
Tương tự: $OH \perp AC$ suy ra $OH \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{OH} = (2;1;1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) và đi qua $H(2;1;1)$ do đó mặt phẳng (ABC) có phương trình là $2x + y + z - 6 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;-2;3)$, $B(-4;0;-1)$ và $C(1;1;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

A. $5x + y - 2z + 3 = 0$. **B.** $2y + z - 7 = 0$.
C. $5x + y - 2z - 1 = 0$. **D.** $2y + z + 1 = 0$.

Lời giải.

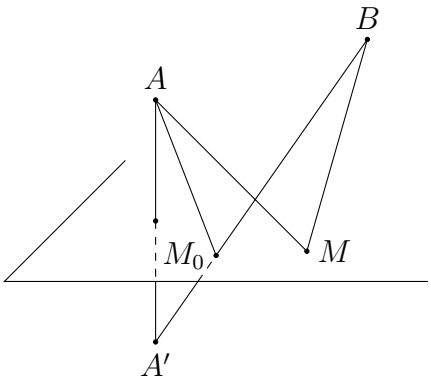
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5;2;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;3;-6)$ và G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.
Có $\overrightarrow{AG} = \left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3};-\frac{10}{3}\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0;-30;-15)$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P = \left[\overrightarrow{AG}, \vec{n}_P\right] = (-125;-25;50)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $-125(x-1) - 25(y+2) + 50(z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 2z + 3 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 179. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;7;6)$ và $B(2;4;3)$. Trên mặt phẳng (Oxy), lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho $MA + MB$ bé nhất. Tính $P = a^2 + b^3 - c^4$.

A. $P = 134$. **B.** $P = -122$. **C.** $P = -204$. **D.** $P = 52$.

Lời giải.

Dễ thấy A và B nằm cùng phía với mặt phẳng (Oxy).
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Oxy).
Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_0$ là giao điểm của $A'B$ với (Oxy).
Có $A(5;7;6)$, suy ra $A'(5;7;-6)$ và $\overrightarrow{A'B} = (3;3;-9)$ nên phương trình đường thẳng $A'B$: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-9}$.



Điểm $M_0 = A'B \cap (Oxy)$ nên là nghiệm của hệ $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-9} \end{cases} \Rightarrow M \equiv M_0(3;5;0)$.
Từ đó suy ra $P = 3^2 + 5^3 - 0^4 = 134$.
Chọn đáp án A □

Câu 180. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là:

A. $r = \sqrt{6}$. **B.** $r = 2\sqrt{2}$. **C.** $r = 4$. **D.** $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$ có tâm $I(1;-2;2)$ bán kính $R = 5$.
Khoảng cách từ $I(1;-2;2)$ đến mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$ là $d = \frac{|1 - 4 - 4 - 2|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 4$.
Chọn đáp án C □

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với điểm gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x + 2y + z + 14 = 0$. **B.** $2x + y + 3z + 9 = 0$.
C. $3x + 2y + z - 14 = 0$. **D.** $2x + y + z - 9 = 0$.

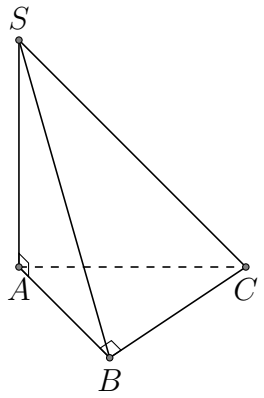
Câu 182. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 \colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2 \colon \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là
A. $2y - 2z + 1 = 0$. **B.** $2y - 2z - 1 = 0$. **C.** $2x - 2z + 1 = 0$. **D.** $2x - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

Giả sử phương trình mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2, ta chọn $\vec{v}_1\,(-1;1;1)$ và $\vec{v}_2\,(-2;1;1)$.
Ta có $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (0;-1;1)$ khi đó ta chọn $\vec{n}\,(0;-1;1)$
Trên d_1, d_2 lần lượt chọn các điểm $A\,(2;0;0)$ và $B\,(0;1;2)$, gọi I là trung điểm của AB ta có $I\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$.
Do giả thiết suy ra mặt phẳng (P) đi qua I với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$, ta có phương trình
$(-1)\cdot\left(y - \dfrac{1}{2}\right) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow -y + z + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y - 2z + 1 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 183.

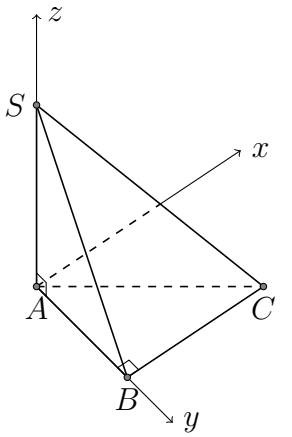
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = 3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\sin\alpha$.



A. $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{4138}}{120}$.
C. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

Lời giải.

Dựng hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O trùng A, tia Ox cùng hướng với tia BC, tia Oy trùng tia AB, tia Oz trùng với tia AS.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(2a;a;0)$, $S(0;0;3a)$ khi đó ta tính được (SAC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;-2;0)$, (SBC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{m} = (0;3;1)$.
Từ đó tính được $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\,|\vec{m}|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.



Chọn đáp án D □

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách gốc tọa độ một đoạn lớn nhất.

A. $x+y+2z-12=0$. **B.** $2x+y+3z-19=0$.

C. $3x+2y+3z-22=0$. **D.** $3x-2y+3z-14=0$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(O,(P)) \le OA$.
Do đó $\mathrm{d}(O,(P))$ lớn nhất bằng OA. Khi đó $OA \perp (P)$ hay $\vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{OA} = (3;2;3)$.
Vậy mặt phẳng (P) là

$$3(x-3)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+3z-22=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 185. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\,(2;5;-3)\,, B\,(-2;1;1)\,, C\,(2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+1=0$. Gọi $D(a;b;c)$ (với $c>0$) thuộc (α) sao cho có vô số mặt phẳng (P) chứa C, D và khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P). Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $S=18$. **B.** $S=32$. **C.** $S=20$. **D.** $S=26$.

Lời giải.

Vì $\mathrm{d}\,(A,(P)) = 3\mathrm{d}\,(B,(P))$ nên AB cắt (P) tại điểm $I \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{AI} = -3\overrightarrow{BI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-4;-1;3) \\ I(-1;2;0) \end{cases}$.
Vì có vô số mặt phẳng (P) chứa C, D và khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P) nên I, C, D thẳng hàng hay $D = IC \cap (\alpha)$.

☑ Nếu $I(-4;-1;3) \Rightarrow (IC): \begin{cases} x=2+6t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases} \Rightarrow D(-4;-1;3)$ (thỏa mãn $c>0$).

☑ Nếu $I(-1;2;0) \Rightarrow (IC): \begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow D(-4;4;-1)$ (loại).

Vậy $D(-4;-1;3) \Rightarrow S=16+1+9=26$.
Chọn đáp án D □

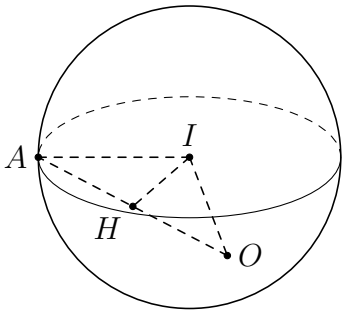
Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=3$. **B.** $R=9$. **C.** $R=5$. **D.** $R=1$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của OA, khi đó $IH \perp OA$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (1;0;-1) \Rightarrow OA = \sqrt{2} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Mặt cầu (S) có tâm I và qua O, A nên tam giác OIA cân tại I.



$$S_{\triangle OIA} = \frac{1}{2} \cdot IH \cdot OA \Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2} \cdot IH \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow IH = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Xét tam giác IOH vuông tại H có

$$R = OI = \sqrt{IH^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{17}{2} + \frac{1}{2}} = 3.$$

Chú ý: Nếu kết quả $OI < \sqrt{3} = \mathrm{d}(O,(P))$ thì không tồn tại điểm I thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 187. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D \in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D.

A. -6. **B.** 2. **C.** 7. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (0;0;2)$, do đó $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;-2;0)$.
Phương trình mặt phẳng (ABC): $2(x-2) - 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.
Vì $D \in Oy$ nên $D(0;m;0)$.
Tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 5 nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \right| \cdot \mathrm{d}\left(D,(ABC)\right) = 5 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{8} \cdot \frac{|-m-3|}{\sqrt{2}} = 30 \\ \Leftrightarrow\ & |m+3| = 15 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -18. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng tung độ các điểm D là $12 + (-18) = -6$.
Chọn đáp án A □

Câu 188. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox có phương trình là

A. $y - 2z + 2 = 0$. **B.** $x + 2z - 3 = 0$. **C.** $2y - z + 1 = 0$. **D.** $x + y - z = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;2;1)$. Trục Ox có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;0;0)$.
Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Do (α) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox nên (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}] = (0;1;-2)$.
Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $0(x-1) + 1(y-0) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 2 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, tìm phương trình mặt phẳng (α) qua các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz sao cho $H(1;2;-2)$ là trực tâm của tam giác ABC.

A. $(\alpha)\colon x-2y+2z-11=0$. **B.** $(\alpha)\colon x+2y-2z-11=0$.

C. $(\alpha)\colon x-2y-2z-9=0$. **D.** $(\alpha)\colon x+2y-2z-9=0$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$.
Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Vì $H(1;2;-2)$ thuộc mặt phẳng (α) nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}-\dfrac{2}{c}=1$. (1)
Ta có $\overrightarrow{AH}=(1-a;2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{BH}=(1;2-b;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow -2b-2c=0\Leftrightarrow b=-c. \quad (2)$$
$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -a-2c=0\Leftrightarrow a=-2c. \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được

$$\frac{1}{-2c}+\frac{2}{-c}-\frac{2}{c}=1\Leftrightarrow -\frac{1}{2c}-\frac{4}{2c}-\frac{4}{2c}=1\Leftrightarrow c=-\frac{9}{2}.$$

Khi đó $a=9$, $b=\dfrac{9}{2}$ nên phương trình của (α) là $\dfrac{x}{9}+\dfrac{2y}{9}-\dfrac{2z}{9}=1$ hay $x+2y-2z-9=0$.
Cách khác. Áp dụng nhanh tính chất tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và H là trực tâm của tam giác ABC thì $OH\perp(ABC)$.
Ta có $\overrightarrow{OH}=(1;2;-2)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
Phương trình của mặt phẳng (α) là $(x-1)+2(y-2)-2(z+2)=0$ hay $x+2y-2z-9=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 190. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+(m+1)y-2z+m=0$ và $(Q)\colon 2x-y+3=0$ với m là tham số thực. Tìm m để (P) vuông góc với (Q).

A. $m=-5$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

- (P) có vec-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(1;m+1;-2)$ và (Q) có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(2;-1;0)$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow 1\cdot 2+(m+1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 0=0\Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án B □

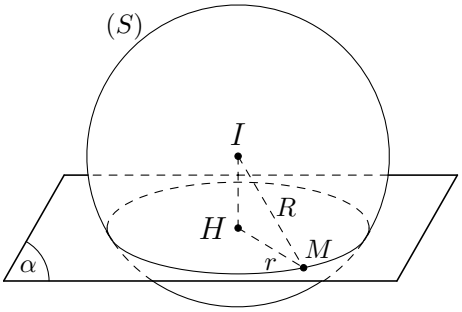
Câu 191. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-20=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-2z+4=0$ cắt nhau theo một đường tròn có chu vi bằng

A. 10π. **B.** 16π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính

$$R=\sqrt{1^2+2^2+0^2-(-20)}=5.$$



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) là

$$IH=\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)=\frac{|1+2\cdot 2-2\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3.$$

Do đó, bán kính đường tròn thiết diện là

$$r=\sqrt{R^2-IH^2}=4.$$

Vậy chu vi của đường tròn thiết diện là $C=2\pi r=8\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 192. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(3;3;-3)$. **B**. $M(-3;-3;3)$. **C**. $M(3;-3;3)$. **D**. $M(-3;3;3)$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(-3-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IB}=(-a;-b;3-c)$, $\overrightarrow{IC}=(-a;3-b;-c)$.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-3-a=0\\ b-3=0\\ 3-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=3\\ c=3\end{cases}\Leftrightarrow I(-3;3;3).$$

Nhận thấy $I(-3;3;3)\in(P)$. Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=MI\geq 0$.
Từ đó suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất bằng 0 khi $M(-3;3;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\,(1;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho $OA=2OB=3OC\neq 0$?

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 6.

Lời giải.

Xét $(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, với $|a|=2\,|b|=3\,|c|=k>0$.
Do $M\in(P)\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.

Chú ý rằng $\dfrac{k}{a} \in \{-1;1\}, \dfrac{k}{b} \in \{-2;2\}, \dfrac{k}{c} \in \{-3;3\}$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{k}{a}+2\frac{k}{b}+3\frac{k}{c}=k \\ \Leftrightarrow\ & (\pm 1)+2\cdot(\pm 2)+3\cdot(\pm 3)=k \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} k=14 \\ k=12 \\ k=6 \\ k=4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Có 4 mặt phẳng thỏa đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 194. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;-2)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của điểm N trên các trục Ox, Oy, Oz. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}-\dfrac{z}{2}=0$. **B.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}-\dfrac{z}{2}=1$. **C.** $x+y-3z=0$. **D.** $x+y-2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;-2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}-\dfrac{z}{2}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 195. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;-1)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-3y+2z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $3x-y-3z+7=0$. **B.** $3x-y-3z-13=0$.

C. $3x+y-3z-1=0$. **D.** $3x-y-3z-1=0$.

Lời giải.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(3;-3;4) \\ \vec{n}_{(P)}=(1;-3;2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right]=(6;-2;-6)=2(3;-1;-3).$$

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(3;-1;-3)$ có phương trình

$$\begin{aligned} & 3(x+2)-(y-4)-3(z+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x-y-3z+7=0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.
Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Theo giả thiết, mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA=OB=OC$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ |a|=|b|=|c|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ \left[\begin{array}{l}a=b=c\\ a=b=-c\\ a=-b=c\\ a=-b=-c\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=c=4\\ a=-b=c=2\\ a=-b=-c=-2.\end{array}\right.$$

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là

$$(P_1):\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1;\ (P_2):\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1;\ (P_3):\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 197. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x+2y-2z+2018=0$, (Q): $x+my+(m-1)z+2017=0$ (với m là tham số thực). Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm M nào dưới đây nằm trong (Q)?

A. $M(-2017;1;1)$. **B.** $M(0;0;2017)$. **C.** $M(0;-2017;0)$. **D.** $M(2017;1;1)$.

Lời giải.

(P) có 1 VTPT $\vec{n}_P=(1;2;-2)$, (Q) có 1 VTPT $\vec{n}_Q=(1;m;m-1)$.
Gọi α là góc giữa (P) và (Q).
Ta có $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{n}_Q|}=\dfrac{|1+2m-2m+2|}{3\sqrt{1+m^2+(m-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}}}$.
Do $0\le\alpha\le 90^\circ$ nên α nhỏ nhất khi $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow\sqrt{2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.
$\Rightarrow (Q)\colon 2x+y-z+4034=0\Rightarrow M(-2017;1;1)\in(Q)$.
Chọn đáp án A □

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho $OA=2OB=3OC\neq 0$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có:
$A(a;0;0)$,$B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $abc\neq 0$.
Do đó phương trình mặt phẳng (P) là : $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Do (P) đi qua M nên ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1.$$

Với điều kiện $OA = 2OB = 3OC$ ta được

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} |a| = 2|b| = 3|c| \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b = 3c \\ a = 2b = -3c \\ a = -2b = 3c \\ a = -2b = -3c \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{a}{2}; c = \dfrac{a}{3} \\ b = \dfrac{a}{2}; c = -\dfrac{a}{3} \\ b = -\dfrac{a}{2}; c = \dfrac{a}{3} \\ b = -\dfrac{a}{2}; c = -\dfrac{a}{3} \end{array}\right. \end{array}$$

+ Với $b = \dfrac{a}{2}, c = \dfrac{a}{3} \Rightarrow a = 13$.
+ Với $b = \dfrac{a}{2}, c = -\dfrac{a}{3} \Rightarrow a = -4$.
+ Với $b = -\dfrac{a}{2}, c = \dfrac{a}{3} \Rightarrow a = 6$.
+ Với $b = -\dfrac{a}{2}, c = -\dfrac{a}{3} \Rightarrow a = -12$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 199. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}; 0\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}; 0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{5}; -\dfrac{3}{5}; 0\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}; 0\right)$.

Lời giải.

Lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B + 3x_c}{5} = \dfrac{1}{5} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B + 3y_c}{5} = \dfrac{3}{5} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B + 3z_c}{5} = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; -\frac{1}{5})$. Khi đó ta có

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = 5\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{MI} = 5MI$.

Từ đó, để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, điều đó xảy ra khi M là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxy, suy ra $M(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 200. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $H(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Hãy viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x + y + z - 6 = 0$. **B.** $x + 2y + z - 6 = 0$.
C. $x + 2y + 2z - 6 = 0$. **D.** $2x + y + z + 6 = 0$.

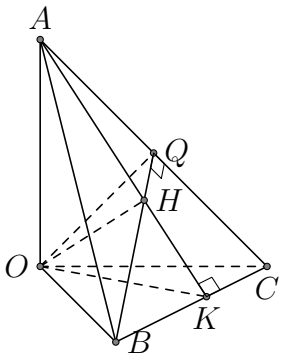
Lời giải.

Trong tam giác ABC, kẻ các đường cao AK và BQ.

Vì $BC \perp AK$ và $BC \perp AO$ nên $BC \perp (AOK)$, suy ra $BC \perp OH$.

Hoàn toàn tương tự, $AC \perp OH$.Suy ra $OH \perp (ABC)$.

Vậy (P) là mặt phẳng qua $H(2;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{OH} = (2;1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến; $(P)\colon 2x + y + z - 6 = 0$.



Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. C	6. C	7. A	8. D	9. C	10. B
11. B	12. A	13. B	14. A	15. A	16. B	17. A	18. C	19. B	20. A
21. A	22. D	23. A	24. A	25. A	26. D	27. A	28. D	29. B	30. B
31. B	32. D	33. B	34. A	35. A	36. D	37. D	38. D	39. C	40. B
41. A	42. C	43. D	44. A	45. D	46. A	47. D	48. D	49. C	50. A
51. A	52. D	53. B	54. A	55. C	56. D	57. B	58. B	59. A	60. D
61. C	62. D	63. D	64. C	65. C	66. D	67. A	68. B	69. B	70. D
71. A	72. B	73. D	74. B	75. D	76. D	77. B	78. D	79. A	80. D
81. C	82. C	83. C	84. B	85. B	86. D	87. B	88. A	89. D	90. C
91. B	92. D	93. D	94. B	95. D	96. B	97. D	98. C	99. C	100. D
101. A	102. B	103. A	104. D	105. A	106. A	107. C	108. C	109. A	110. D
111. D	112. A	113. B	114. C	115. B	116. A	117. D	118. D	119. B	120. A
121. D	122. A	123. A	124. A	125. C	126. D	127. B	128. D	129. A	130. A
131. C	132. C	133. B	134. D	135. B	136. D	137. D	138. A	139. D	140. A
141. D	142. C	143. D	144. B	145. C	146. C	147. A	148. A	149. B	150. D
151. C	152. A	153. C	154. C	155. D	156. C	157. B	158. C	159. B	160. B
161. C	162. A	163. A	164. B	165. B	166. C	167. B	168. A	169. D	170. D
171. A	172. C	173. B	174. A	175. D	176. C	177. A	178. A	179. A	180. C
181. A	182. A	183. D	184. C	185. D	186. A	187. A	188. A	189. D	190. B
191. D	192. D	193. B	194. B	195. A	196. A	197. A	198. A	199. A	200. A

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x+by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $T=b-c+d$.

A. $T=-18$. **B.** $T=-20$. **C.** $T=-21$. **D.** $T=-19$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$.

Mà $\overrightarrow{AB}\perp(P)$

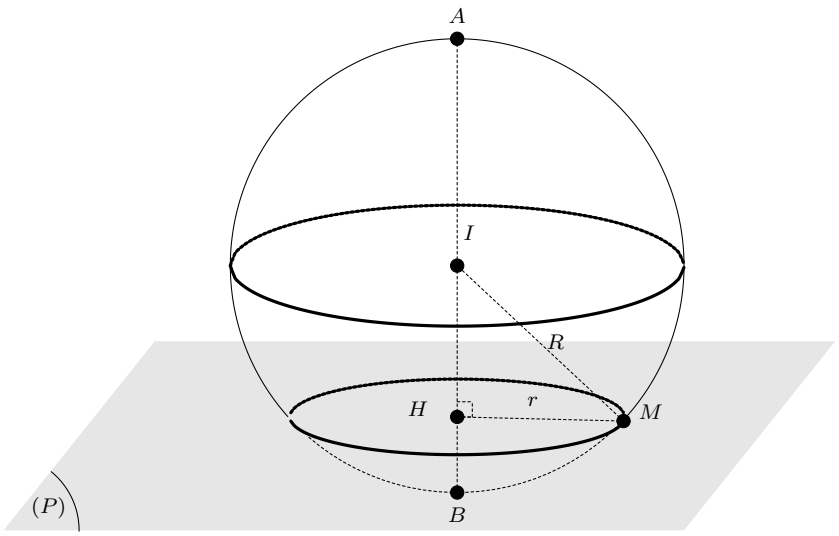
Nên $\dfrac{2}{4}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{2}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\c=1.\end{cases}$

Suy ra $(P)\colon 2x+2y+z+d=0$.

Ta có $AB=6$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra $I(4;3;4)$.

Ta có (S) là mặt cầu có đường kính AB nên $(S)\colon\begin{cases}\text{tâm } I(4;3;4)\\ \text{bán kính } R=\dfrac{AB}{2}=3\end{cases}$.



Gọi r là bán kính đường tròn tâm H. Khi đó, thể tích khối nón đỉnh cần tìm được xác định bởi công thức Ta có

$$\begin{aligned}V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot AH &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot(R+IH)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(3\cdot r^2+r^2\cdot\sqrt{9-r^2}\right)\end{aligned}$$

Đặt $f(r)=3\cdot r^2+r^2\cdot\sqrt{9-r^2}$, $r\in(0;3]$.

Ta có $f'(r)=r\left(6+2\cdot\sqrt{9-r^2}-\dfrac{r^2}{\sqrt{9-r^2}}\right)$.

Suy ra $f'(r)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=0\text{ (loại)}\\ 6+2\cdot\sqrt{9-r^2}-\dfrac{r^2}{\sqrt{9-r^2}}=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{9-r^2}=r^2-6$, (điều kiện $r^2\geq 6$).

$\Leftrightarrow r^4-8r^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}r=0 & \text{(loại)}\\ r^2=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=-2\sqrt{2}\text{ (loại)}\\ r=2\sqrt{2}\text{ (nhận)}\end{array}\right.$

Suy ra $HI=\sqrt{R^2-r^2}=1$.

Ta có $\dfrac{AH}{AI}=\dfrac{AI+HI}{AI}=\dfrac{R+HI}{R}=\dfrac{4}{3}$.

Suy ra $AH = \frac{4}{3}AI \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow H\left(\frac{13}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$.

Mà $H\left(\frac{13}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right) \in (P)\colon 2x+2y+z+d=0 \Rightarrow d=-21$.

Vậy $T = b-c+d = -20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A. 9. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 7. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=2$.

Khi V_{DABC} lớn nhất thì $\frac{V_{DABC}}{V_{IABC}} = \frac{d(D,(ABC))}{d(I,(ABC))} = \frac{R+d(I,(ABC))}{d(I,(ABC))}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1;-4)$, $\overrightarrow{AI}=(1;-1;-2)$. Suy ra

$$V_{IABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AI}\right| = \frac{4}{3},$$

$$d(I,(ABC)) = \frac{6V_{IABC}}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{2}{3}.$$

Khi đó, $V_{DABC} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{16}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(0;-2;-1)$, $B\,(-2;-4;3)$, $C\,(1;3;-1)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};0\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5};0\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{5};-\frac{3}{5};0\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};\frac{4}{5};0\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-a;-2-b;-1-c)\,;\overrightarrow{IB}=(-2-a;-4-b;3-c)\,;\overrightarrow{IC}=(1-a;3-b;-1-c)$.

Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=(-5a+1;-5b+3;-5c+1)$.

Khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}-5a+1=0\\-5b+3=0\\-5c+1=0\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Lại có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{IC}\right| = \left|5\overrightarrow{MI}\right| = 5MI$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Khi đó M là hình chiếu của I trên (Oxy). Vậy $M\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5};0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0)$ và $M(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A và M, cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C. Giả sử $B(0;b;0), C(0;0;c), b>0, c>0$. Diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{6}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\Leftrightarrow 2b+2c=bc$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=(-2;b;0);\overrightarrow{AC}=(-2;0;c)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(bc;2c;2b)$.

Diện tích tam giác ABC:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4b^2+4c^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+4[(b+c)^2-2bc]}=\frac{1}{2}\sqrt{2(bc)^2-8bc}.\end{aligned}$$

Mà $\dfrac{bc}{2}=b+c\geq 2\sqrt{bc}\Leftrightarrow bc\geq 16$.

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(bc-2)^2-8}\geq\dfrac{1}{2}\sqrt{484}=4\sqrt{6}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất $S=4\sqrt{6}$ khi $b=c=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. 7. **B**. -9. **C**. -7. **D**. 9.

Lời giải.

Ta có Vì (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$.

(P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases}1+b_1+c_1+d_1=0\\ -2b_1+2c_1+d_1=0\end{cases}\Rightarrow 1+3b_1-c_1=0.$ (1)

Vì (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_1\left(-d_1;0;0\right),B_1\left(0;\dfrac{-d_1}{b_1};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_1|=\dfrac{|d_1|}{|b_1|}\Rightarrow|b_1|=1$.

Trường hợp 1: Với $b_1=1$

Thay vào (1) ta được $c_1=4$.

Vì (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$ và (Q) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases}1+b_2+c_2+d_2=0\\ -2b_2+2c_2+d_2=0\end{cases}\Rightarrow 1+3b_2-c_2=0.$ (2)

Vì (Q) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_2\left(-d_2;0;0\right),B_2\left(0;-\dfrac{d_2}{b_2};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_2|=\dfrac{|d_2|}{|b_2|}\Rightarrow|b_2|=1$.

Vì $b_1\neq b_2$ nên ta có $b_2=-1$, thay vào (2) ta được $c_2=-2$.

Suy ra $b_1b_2+c_1c_2=-9$.

Trường hợp 2: Với $b_1=-1$

Thay vào (1) ta được $c_1=-2$.

Vì (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$ và (Q) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases} 1+b_2+c_2+d_2=0 \\ -2b_2+2c_2+d_2=0 \end{cases} \Rightarrow 1+3b_2-c_2=0.$ (2)

Vì (Q) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_2(-d_2;0;0)$, $B_2\left(0;-\dfrac{d_2}{b_2};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_2|=\dfrac{|d_2|}{|b_2|} \Rightarrow |b_2|=1$.

Vì $b_1 \neq b_2$ nên ta có $b_2=1$, thay vào (2) ta được $c_2=2$.

Suy ra $b_1b_2+c_1c_2=-9$.

Kết luận: $b_1b_2+c_1c_2=-9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t>0 : \overrightarrow{MN}=t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN=5\sqrt{2} \Leftrightarrow t\cdot|\vec{a}|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow t=5$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$.

Gọi $A'(x';y';z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+4=4 \\ y'-7=-5 \\ z'-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1 \\ y'=2 \\ z'=3 \end{cases} \Rightarrow A'(1;2;3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ suy ra $AM=A'N$ nên $|AM-BN|=|A'N-BN| \leqslant A'B$. Dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM-BN|=A'B=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$, đạt được khi $N=A'B\cap(Oxy)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2018=0, (Q): x+my+(m-1)z+2017=0$. Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm M nào dưới đây nằm trong (Q)?

A. $M(-2017;1;1)$. **B.** $M(2017;-1;1)$. **C.** $M(-2017;1;-1)$. **D.** $M(1;1;-2017)$.

Lời giải.

(P) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-2)$.

(Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;m;m-1)$.

Gọi α là góc giữa (P) và (Q).

$$\cos\alpha=\frac{|1+2m-2m+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}$$

Để α nhỏ nhất thì $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $(Q): x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z+2017=0$. Khi đó (Q) đi qua $M(-2017;1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;1), B(0;1;-2)$ và điểm M thay đổi trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Tìm giá trị lớn nhất của $|MA-MB|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{12}$.

Lời giải.

Thay tọa độ của A, B vào PT mặt phẳng $(Oxy): z=0$, ta có $1\cdot(-2)=-2<0 \Rightarrow A, B$ nằm về hai phía của (Oxy).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (Oxy). Khi đó ta có:

$|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B$. Suy ra $|MA-MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ và (Oxy).

Ta có $A'(1;-1;-1) \Rightarrow A'B=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian, với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x+2y-z+4=0$. **B.** $4x+2y+z-4=0$.

C. $4x-2y-z+4=0$. **D.** $4x-2y+z+4=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(2,-3,-2)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$; $\overrightarrow{BC}=(-4;2;1)$.

$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;6;-8)$.

Gọi tọa độ trực tâm $H(a;b;c)$. $\overrightarrow{AH}=(a;b-1;c-2)$; $\overrightarrow{BH}=(a-2;b+2,c)$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{ đồng phẳng}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{AH}\cdot[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4a+2(b-1)+c-2=0\\ -2(a-2)-1(b+2)-c=0\\ a+6(b-1)-8(c-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{22}{101}\\ b=\dfrac{70}{101}\\ c=\dfrac{176}{101}\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{22}{101};\frac{70}{101};\frac{176}{101}\right).$$

$\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{22}{101};-\dfrac{31}{101};-\dfrac{26}{101}\right)$.

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Ta có $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AH}\\ \vec{n}\perp\vec{n}_{(ABC)}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=[\overrightarrow{AH},\vec{n}_{(ABC)}]=(4;-2;-1)$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;2)$ có một VTPT là $\vec{n}=(4;-2;-1)$ là

$4(x-0)-2(y-1)-1(z-2)=0\Leftrightarrow 4x-2y-z+4=0$.

Vậy $(P): 4x-2y-z+4=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;1)$, $B(1;-2;1)$ và cắt mặt cầu (S) theo giao

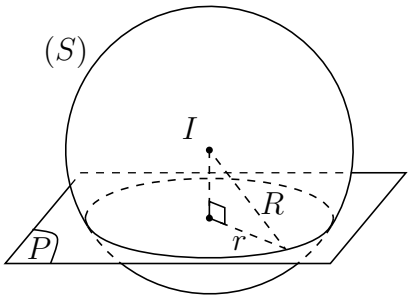
tuyến là đường tròn có chu vi bằng $\sqrt{2}\pi$.

A. $x+y-3z+4=0$, $x+y-z+2=0$. **B.** $x+y+3z-2=0$, $x+y+z=0$.

C. $x+y+1=0$, $x+y+4z-3=0$. **D.** $x+y+3z-2=0$, $x+y-5z+6=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R=1$.



Gọi r là bán kính đường tròn có chu vi bằng $\sqrt{2}\pi$

$\Rightarrow 2\pi r=\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Giả sử (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Suy ra (P) có phương trình:

$a(x-0)+b(y+1)+c(z-1)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+b-c=0$.

$B\in(P)\Rightarrow a-2b+c+b-c=0\Leftrightarrow a=b$.

Ta có $d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra

$$\frac{|a-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{(a-c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c^2-4ac=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&c=0\\&c=4a.\end{aligned}\right.$$

- Với $c=0$, chọn $a=1=b$ ta có $(P):x+y+1=0$.
- Với $c=4a$, chọn $a=1=b\Rightarrow c=4$, ta có $(P):x+y+4z-3=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$ và $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $16x-40y-44z+39=0$. **B.** $16x+40y-44z+39=0$.

C. $16x+40y+44z-39=0$. **D.** $16x-40y-44z-39=0$.

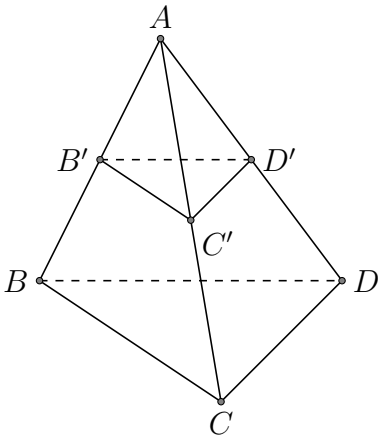
Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{A.B'C'D'}}{V_{A.BCD}}=\dfrac{AB'}{AB}\cdot\dfrac{AC'}{AC}\cdot\dfrac{AD'}{AD}$.

Đặt $x=\dfrac{AB'}{AB}$, $y=\dfrac{AC'}{AC}$, $z=\dfrac{AD'}{AD}$; $x,y,z>0$.

Tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất $\Leftrightarrow xyz$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Theo đề bài, ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$.



Mà $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\Rightarrow 4\geq\dfrac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\Leftrightarrow xyz\geq\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{3}{4}$.

Vậy tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{3}{4}$.

Khi đó $BC\parallel(B'C'D'), BD\parallel(B'C'D')\Rightarrow[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]=(4;10;-11)$ là một véc-tơ pháp tuyến của $(B'C'D')$; $\overrightarrow{AD'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\begin{cases}x_{D'}-1=\dfrac{3}{4}\cdot(-1)\\y_{D'}-1=\dfrac{3}{4}\cdot 2\\z_{D'}-1=\dfrac{3}{4}\cdot 3\end{cases}\Rightarrow D'\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{10}{4};\dfrac{13}{4}\right)$.

Suy ra $(B'C'D'): 4\left(x-\frac{1}{4}\right)+10\left(y-\frac{10}{4}\right)-11\left(z-\frac{13}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 16x+40y-44z+39=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$, điểm $B(9;-7;23)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Biết $\vec{n}=(1;m;n)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P). Tính mn.

A. $mn=-2$. **B.** $mn=-4$. **C.** $mn=2$. **D.** $mn=4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(5;-3;7)$; bán kính $R=6\sqrt{2}$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 1(x-0)+m(y-8)+n(z-2)=0$.

Vì (P) và (S) tiếp xúc nhau nên

$d(I;(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow |5-11m+5n|=6\sqrt{2}\sqrt{1+m^2+n^2}$ (1).

Ta có $d(B,(P))=\dfrac{|9-15m+21n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.

Ta có $|9-15m+21n|=|5-11m+5n+4-4m+16n| \le |5-11m+5n|+|4-4m+16n|$ (2).

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có

$(4-4m+16n)^2 \le (4^2+4^2+16^2)(1+m^2+n^2)=288(1+m^2+n^2)$

$\Rightarrow |4-4m+16n| \le 12\sqrt{2}\sqrt{1+m^2+n^2}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có $|9-15m+21n| \le 18\sqrt{2}\sqrt{1+m^2+n^2}$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |5-11m+5n|=6\sqrt{2}\sqrt{1+m^2+n^2} \\ (5-11m+5n)(4-4m+16n)\ge 0 \\ \dfrac{1}{4}=\dfrac{m}{-4}=\dfrac{n}{16} \end{cases} \Leftrightarrow m=-1, n=4 \Rightarrow mn=-4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(4;9;1)$, phương trình mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ qua điểm M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $OA+OB+OC$ nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=15$. **B.** $P=14$. **C.** $P=36$. **D.** $P=42$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Do (α) đi qua điểm $M(4;9;1)$ nên

$$1=\frac{4}{a}+\frac{9}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2^2}{a}+\frac{3^2}{b}+\frac{1^2}{c}\ge\frac{(2+3+1)^2}{a+b+c}=\frac{36}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 36.$$

Mà $OA+OB+OC=a+b+c$ nên $OA+OB+OC$ nhỏ nhất khi $a+b+c$ nhỏ nhất và bằng 36.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D?

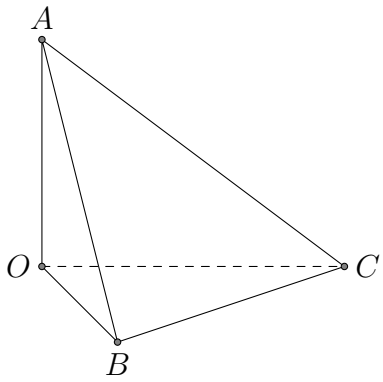
A. 10. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

O, A, B, C không đồng phẳng nên chúng là 4 đỉnh của một tứ diện.
Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1 \Rightarrow D \in (ABC)$.
Dễ thấy D không nằm trên các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA).
Đếm trực tiếp có 7 mặt phẳng phân biệt
Chọn đáp án C □

Câu 15.
Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ). Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3+\cot^2\alpha).(3+\cot^2\beta).(3+\cot^2\gamma)$ là

A. 48. **B.** Số khác. **C.** 125. **D.** $48\sqrt{3}$.



Lời giải.
Cách 1: Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz \Rightarrow$ tọa độ các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.
Dùng công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta có được kết quả
$\sin\alpha = \cos(\vec{n}_{ABC}; \vec{u}_{OA}) = \dfrac{bc}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}$.
Viết kết quả tương tự $\Rightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 1$.
Cách 2: Từ đẳng thức:
$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2} \Leftrightarrow \dfrac{OH^2}{OA^2}+\dfrac{OH^2}{OB^2}+\dfrac{OH^2}{OC^2}=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1.$
$\Rightarrow$ Dạng $M=\left(2+\dfrac{1}{X}\right).\left(2+\dfrac{1}{Y}\right).\left(2+\dfrac{1}{Z}\right)$ với $X+Y+Z=1 \Rightarrow \dfrac{1}{XYZ} \geqslant 27$.
Biến đổi $M = 8+4\left(\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Z}\right)+2\left(\dfrac{1}{XY}+\dfrac{1}{YZ}+\dfrac{1}{ZX}\right)+\dfrac{1}{XYZ}$
$M \geqslant 8+4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{XYZ}}+2\cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{(XYZ)^2}}+\dfrac{1}{XYZ} \geqslant 8+4\cdot 3\cdot 3+2\cdot 3\cdot 9+27=125.$
Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Bán kính đường tròn (C) là

A. 1. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 2.

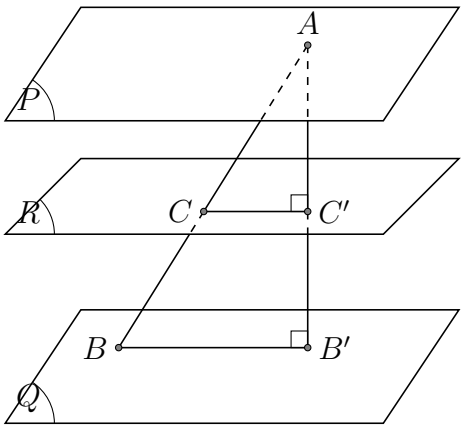
Lời giải.
Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$, bán kính $R=3$.
Do mặt phẳng (P) cắt (S) theo thiết diện là hình tròn (C) và có diện tích nhỏ nhất ta suy ra được phương trình mặt phẳng (P) sẽ nhận $\vec{IA}=(2;0;1)$ làm VTPT. Suy ra phương trình mặt phẳng $(P): 2x+z-6=0$. Khoảng cách từ I đến P là $d(I,(P))=\sqrt{5} \Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2}=2$.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0, (Q): x-2y+z+8=0, (R): x-2y+z-4=0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$

lần lượt tại A, B, C. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = AB^2 + \dfrac{144}{AC}$.

A. $72\sqrt[3]{3}$. **B.** 96. **C.** 108. **D.** $72\sqrt[3]{4}$.

Lời giải.



Ta có $M(1;0;0) \in (P)$ và ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau.

Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các mặt phẳng $(Q), (R)$.

Ta có

$$AB' = d\,(A;(Q)) = d\,(M;(Q)) = \frac{|1-2.0+0+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$$AC' = d\,(A;(R)) = d\,(M;(R)) = \frac{|1-2.0+0-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ta thấy $AB' = 3AC'$ nên đặt $CC' = a \Rightarrow BB' = 3a$.

Ta có $AB^2 = AB'^2 + BB'^2 = \dfrac{27}{2} + 9a^2$; $AC = \sqrt{AC'^2 + CC'^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2} + a^2}$.

$$\Rightarrow T = AB^2 + \frac{144}{AC} = \frac{27}{2} + 9a^2 + \frac{144}{\sqrt{\frac{3}{2}+a^2}} = 9\left(\frac{3}{2}+a^2\right) + \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+a^2}} + \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+a^2}}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{9\left(\frac{3}{2}+a^2\right).\frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+a^2}}.\frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2}+a^2}}} = 108.$$

Do đó $\min T = 108$ khi $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA = 2OB$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $OABC$.

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{81}{16}$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Khi đó mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Vì (P) đi qua M nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

Vì $OA = 2OB \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \dfrac{3}{2b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V = \dfrac{1}{6}abc = \dfrac{1}{3}b^2c$.

Ta có $1=\dfrac{3}{2b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{4b}+\dfrac{3}{4b}+\dfrac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{9}{16b^2c}}\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{9}{16b^2c}}\leq\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{16b^2c}{9}\geq 27\Rightarrow\dfrac{b^2c}{3}\geq\dfrac{81}{16}$.

$V_{\min}=\dfrac{81}{16}$ khi $\dfrac{3}{4a}=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{2}\\ b=\dfrac{9}{4}\\ c=3\end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và D khác phía với O so với (ABC); đồng thời A,B,C lần lượt là giao điểm của các trục tọa độ Ox,Oy,Oz với mặt phẳng $(P):\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m+2}+\dfrac{z}{m-5}=1$, $m\notin\{0;-2;-5\}$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ đến O.

A. $\sqrt{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

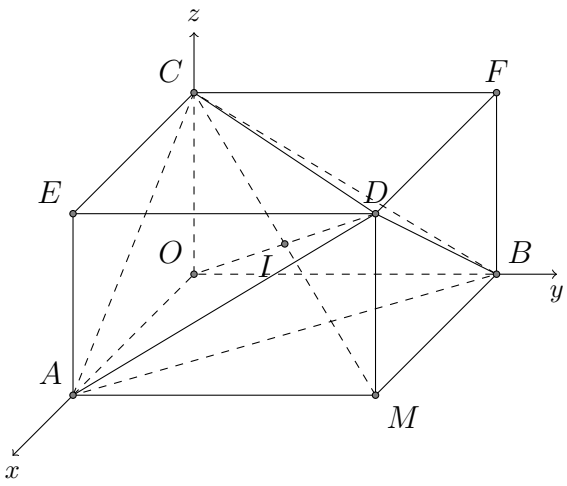
Lời giải.

Do tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và D khác phía với O nên ta dựng được hình hộp chữ nhật $CEDF.OAMB$ như hình vẽ.

Lúc đó mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật này cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên tâm I là trung điểm OD.

Dễ thấy rằng $A(m;0;0)$, $B(0;m+2;0)$ và $C(0;0;m-5)$.

Khoảng cách từ tâm I đến O là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $CEDF.OAMB$ nên



$$IO=R=\frac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}=\frac{\sqrt{3m^2-6m+29}}{2}=\frac{\sqrt{3(m-1)^2+26}}{2}\geq\frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=1$.

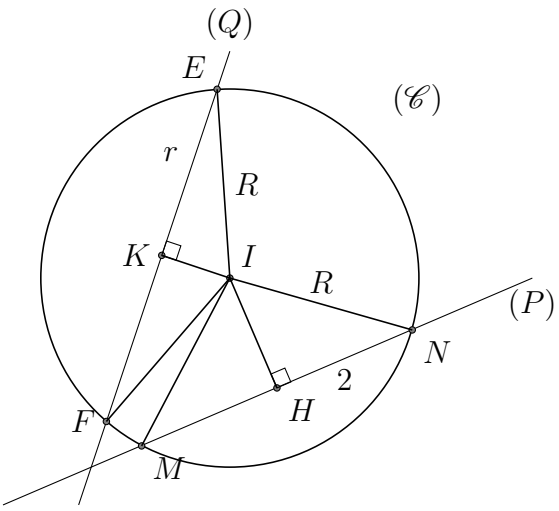
Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P):x-y+2z+1=0$, $(Q):2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A. $r=\sqrt{3}$. **B.** $r=\sqrt{2}$. **C.** $r=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **D.** $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$, I là tâm của (S).
Gọi (α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với Δ.
Khi đó (α) cắt (S) theo đường tròn lớn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C})$ cắt các đường tròn giao tuyến của (S) với $(P), (Q)$ lần lượt theo các đường kính MN và EF (hình vẽ).



Do $I \in Ox$ nên $I(x;0;0)$.
Gọi R là bán kính mặt cầu (S) và H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên $(P), (Q)$.
Ta có:
Khoảng cách từ I đến (P) là $IH = d(I,(P)) = \dfrac{|x+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{|x+1|}{\sqrt{6}}$.
Suy ra $R^2 = 2^2 + IH^2 \Leftrightarrow R^2 = 4 + \dfrac{(x+1)^2}{6}$ (1).
Khoảng cách từ I đến (Q) là $IK = d(I,(Q)) = \dfrac{|2x-1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|2x-1|}{\sqrt{6}}$.
Suy ra $R^2 = r^2 + IK^2 \Leftrightarrow R^2 = r^2 + \dfrac{(2x-1)^2}{6}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $4 + \dfrac{(x+1)^2}{6} = r^2 + \dfrac{(2x-1)^2}{6}$ (*).
Bài toán trở thành tìm r để phương trình (*) có nghiệm duy nhất.
$(*) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2r^2 - 8 = 0$.
(*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (2r^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

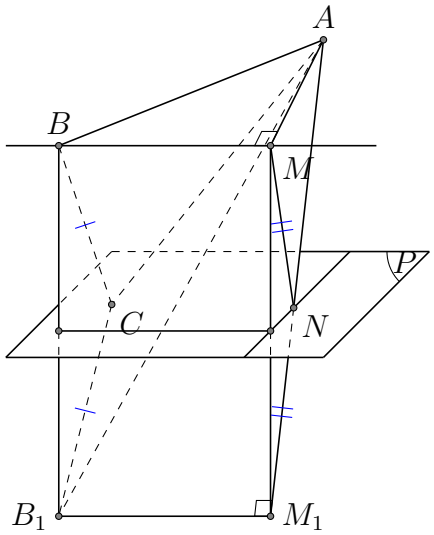
Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 7 = 0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là

A. $B(0;0;1)$. **B.** $B(0;0;-2)$. **C.** $B(0;0;-1)$. **D.** $B(0;0;2)$.

Lời giải.

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua (P).
$P_{ABC} = AB + BC + CA = AB + B_1C + CA \geq AB + AB_1$
Gọi M là hình chiếu của A lên trục Oz, M_1 là điểm đối xứng của M qua (P)
$AB + AB_1 \geq AM + AB_1 \geq AM + AM_1$ (hằng số).
Vậy P_{ABC} nhỏ nhất khi $B \equiv M$ và C là giao điểm của AM_1 với (P).
Từ đó suy ra tọa độ của điểm B là $(0;0;1)$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;1), B(0;1;2), C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N(-1;2;1)$. **B.** $N\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $N(-2;0;1)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Ta tìm được $I(0;1;2)$.
Khi đó, $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$.
S nhỏ nhất khi NI nhỏ nhất. Khi đó N là hình chiếu của I lên P.
Gọi $N(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P).
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IN} \parallel \vec{n}_{(P)} \\ N \in (P) \end{cases}$.
Hay: $\begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{b-1}{-1} = \frac{c-2}{1} \\ a - b + c + 2 = 0 \end{cases}$.
Giải hệ ta được tọa độ điểm $N(-1;2;1)$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = 2OC \neq 0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do $OA = OB = 2OC$ nên ta có $|a| = |b| = 2|c|$. Suy ra $a = \pm 2c, b = \pm 2c$.

☑ Nếu $a = 2c$ và $b = 2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{2c} + \frac{y}{2c} + \frac{z}{c} = 1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{2c} + \frac{2}{2c} + \frac{3}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2c} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{9}{2}.$$

Ta có $(P): x + y + 2z - 9 = 0$.

☑ Nếu $a=2c$ và $b=-2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{2c}+\dfrac{y}{-2c}+\dfrac{z}{c}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{2c}-\frac{2}{2c}+\frac{3}{c}=1\Leftrightarrow\frac{5}{2c}=1\Rightarrow c=\frac{5}{2}.$$

Ta có $(P)\colon x-y+2z-5=0$.

☑ Nếu $a=-2c$ và $b=2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{-2c}+\dfrac{y}{2c}+\dfrac{z}{c}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$-\frac{1}{2c}+\frac{2}{2c}+\frac{3}{c}=1\Leftrightarrow\frac{7}{2c}=1\Rightarrow c=\frac{7}{2}.$$

Ta có $(P)\colon -x+y+2z-7=0$.

☑ Nếu $a=-2c$ và $b=-2c$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{-2c}+\dfrac{y}{-2c}+\dfrac{z}{c}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$-\frac{1}{2c}-\frac{2}{2c}+\frac{3}{c}=1\Leftrightarrow\frac{3}{2c}=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}.$$

Ta có $(P)\colon -x-y+2z-3=0$.

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+10=0$, một mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1;1;1)$ vuông góc (P) và khoảng cách từ điểm $B(2;1;3)$ đến mặt phẳng (Q) bằng $\sqrt{3}$, mặt phẳng (Q) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm M, N, P sao cho thể tích của tứ diện $OMNP$ lớn hơn 1. Thể tích của tứ diện $OMNP$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{1331}{150}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc (P) có phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1\end{cases}$, dễ thấy Δ là giao của hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $x+y-2=0$ và $z-1=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc (P) nên $\Delta\subset(Q)$, suy ra $(Q)\colon a(x+y-2)+b(z-1)=0, (a^2+b^2\neq 0)$.

$$d(B,(Q))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|a+2b|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=1\\\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\cdot$$

$$V_{OMNP}=\frac{1}{6}OM\cdot ON\cdot OP=\left|\frac{(2a+b)^3}{6a^2b}\right|=\left|\frac{\left(\dfrac{2a}{b}+1\right)^3}{6\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}\right|=\frac{9}{2}\text{ khi }\frac{a}{b}=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;4;9)$ và cắt các tia dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác gốc tọa độ O, sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Độ dài ba cạnh OA, OB, OC bằng nhau.

B. Độ dài ba cạnh OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

C. Độ dài ba cạnh OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

D. Độ dài ba cạnh OA, OB, OC theo thứ tự là ba số hạng của một dãy số giảm.

Lời giải.

Vì mặt phẳng (P) cắt các tia dương của trục Ox, Oy, Oz nên ta có $(P)\colon \dfrac{x}{OA}+\dfrac{y}{OB}+\dfrac{z}{OC}=1$.

Ta có $M\in(P)\Rightarrow \dfrac{1}{OA}+\dfrac{4}{OB}+\dfrac{9}{OC}=1$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(OA+OB+OC)\left(\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}\right)\geq\left(\sqrt{OA}\cdot\frac{1}{\sqrt{OA}}+\sqrt{OB}\cdot\frac{2}{\sqrt{OB}}+\sqrt{OC}\cdot\frac{3}{\sqrt{OC}}\right)^2=36$$

$\Rightarrow OA+OB+OC\geq 36$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{OA}+\dfrac{4}{OB}+\dfrac{9}{OC}=1\\ OA=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OA=6\\ OB=12\\ OC=18\end{cases}$. Suy ra độ dài ba cạnh OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;-0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B**. $16x+40y+44z-115=0$.

C. $16x+40y+44z+39=0$. **D**. $16x+40y-44z-39=0$.

Lời giải.

Nhận thấy rằng V_{ABCD} là hằng số.

Áp dụng công thức tỷ số thể tích và bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}=\frac{AB}{AB'}\cdot\frac{AC}{AC'}\cdot\frac{AD}{AD'}\leq\left(\frac{\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Do đó $V_{AB'C'D'}\geq\dfrac{27}{64}V_{ABCD}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{AD}{AD'}=\dfrac{4}{3}$.

Vì B', C', D' lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD nên

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right).$$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ đi qua B' và song song mặt phẳng (BCD) nên có phương trình là

$$16x+40y-44z+39=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Biết rằng có n mặt phẳng với phương trình tương ứng là $(P_i): x+a_iy+b_iz+c_i=0 (i=1,2,...n)$ đi qua $M(1;2;3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz theo thứ tự tại A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Tính tổng $S=a_1+a_2+...+a_n$

A. $S=3$. **B**. $S=1$. **C**. $S=-4$. **D**. $S=-1$.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $a,b,c\neq 0$. Khi đó trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$, mặt phẳng (P_i) có dạng : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Leftrightarrow x+\frac{a}{b}y+\frac{a}{c}z-a=0$

Theo bài ra (P_i) đi qua $M(1;2;3)$ nên ta có $1+\frac{2a}{b}+\frac{3a}{c}-a=0$ (1).

Mặt khác, vì $O.ABC$ là hình chóp đều nên tam giác ABC đều nên

$AB=BC=AC\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2$, kết hợp với (1) ta có các trường hợp sau

- ☑ $a=b=c\Rightarrow a=1+2+3=6$ nên $(P_1):x+y+z-6=0$
- ☑ $a=b=-c\Rightarrow a=1+2-3=0$ không thỏa yêu cầu.
- ☑ $a=-b=c\Rightarrow a=1-2+3=2$ nên $(P_2):x-y+z-2=0$
- ☑ $a=-b=-c\Rightarrow a=1-2-3=-5$ nên $(P_3):x-y-z+5=0$
- ☑ $-a=-b=c\Rightarrow a=1+2-3=0$, không thỏa yêu cầu
- ☑ $-a=b=-c\Rightarrow a=1-2+3=2$ nên $(P):x-y+z-2=0$ trùng với (P_2)
- ☑ $-a=b=c\Rightarrow a=1-2-3=-5$ nên $(P):x-y-z+5=0$ trùng với (P_3)
- ☑ $-a=-b=-c\Rightarrow a=1+2+3=6$ nên $(P):x+y+z-6=0$ trùng với (P_1)

Vậy $S=a_1+a_2+a_3=1-1-1=-1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ hai hai điểm $M(4;-4;2)$,$N(6;0;6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM+EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E.

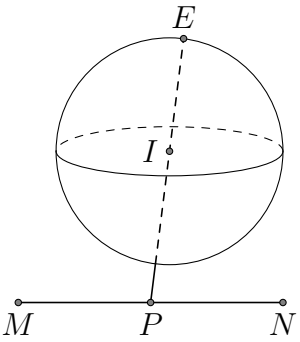
A. $x-2y+2z+8=0$. **B**. $2x+y-2z-9=0$.

C. $2x+2y+z+1=0$. **D**. $2x-2y+z+9=0$.

Lời giải.

Gọi $I(1;2;2)$ là tâm của (S), $P(5;-2;4)$ là trung điểm MN. Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-copx-ki và công thức độ dài trung tuyến ta được

$$(EM+EN)^2\leq 2(EM^2+EN^2)=2\left(2EP^2+\frac{MN^2}{2}\right)$$



nên $T=EM+EN$ đạt giá trị lớn nhất khi $EM=EN$ và EP đạt giá trị lớn nhất. Khi đó E là giao điểm của đường thẳng IP với mặt cầu (S) (I nằm giữa E và P). Đường thẳng IP có phương trình

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}.$$

Tọa độ E thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9\\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}\end{cases}.$$

Tìm được $E(3;0;3)$ hoặc $E(-1;4;1)$, thử lại để EP lớn nhất ta được $E(-1;4;1)$. Khi đó phương trình tiếp diện với (S) tại E là $2x-2y+z+9=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1;1;4)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C phân biệt sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Tính thể tích nhỏ nhất đó.

A. 72. **B.** 108. **C.** 18. **D.** 36.

Lời giải.

Gọi phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ với $a,b,c>0$.

Điểm $M\in(\alpha)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* ta có $1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{4}{abc}}\Rightarrow abc\geq 27\cdot 4=108$.

Do đó thể tích khối chóp $O.ABC$ là $V=\dfrac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{6}abc\geq\dfrac{1}{6}\cdot 107=18$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=3,c=12$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc, M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$ lần lượt là a, b, c. Tính độ dài đoạn OA, OB, OC sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $OA=2a, OB=2b, OC=2c$. **B.** $OA=4a, OB=4b, OC=4c$.

C. $OA=a, OB=b, OC=c$. **D.** $OA=3a, OB=3b, OC=3c$.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A thuộc tia Ox; B thuộc tia Oy và C thuộc tia Oz.

Ta có $\begin{cases}\mathrm{d}(M,(OBC))=a\\ \mathrm{d}(M,(OCA))=b\\ \mathrm{d}(M,(OAB))=c\end{cases}\Rightarrow M(a;b;c)$.

$(ABC):\dfrac{x}{OA}+\dfrac{y}{OB}+\dfrac{z}{OC}=1$.

Ta có: $M(a;b;c)\in(ABC)\Rightarrow 1=\dfrac{a}{OA}+\dfrac{b}{OB}+\dfrac{c}{OC}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{OA\cdot OB\cdot OC}}$

$\Rightarrow\dfrac{27abc}{OA\cdot OB\cdot OC}\leqslant 1\Rightarrow\dfrac{9abc}{\frac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC}\leqslant 2\Rightarrow\dfrac{9abc}{V_{OABC}}\leqslant 2$

$\Rightarrow V_{OABC}\geqslant\dfrac{9abc}{2}$.

Đẳng thức xãy ra khi chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{a}{OA}=\dfrac{b}{OB}=\dfrac{c}{OC}\\ 1=\dfrac{a}{OA}+\dfrac{b}{OB}+\dfrac{c}{OC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OA=3a\\ OB=3b\\ OC=3c.\end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, N và tạo với mặt phẳng (Q): $2x-y-2z-2=0$ góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng là

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{11}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

• (P) có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$. Ta có $M\in(P)$ nên $(P)\colon ax+b(y+1)+c(z-2)=0$.
Điểm $N\in(P)$ nên $-a+2b+c=0\Leftrightarrow a=2b+c.\quad(1)$

• $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;-2)$ nên $|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\dfrac{|2a-b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}}$.

• Với $c=0$ thì $|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

• Với $c\neq 0$ thì $|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\dfrac{\left|\dfrac{b}{c}\right|}{\sqrt{5\dfrac{b^2}{c^2}+4\dfrac{b}{c}+2}}$.

Đặt $t=\dfrac{b}{c}$ ta có $\cos^2(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\dfrac{t^2}{\sqrt{5t^2+4t+2}}=f(t)$.

• Ta có $f'(t)=\dfrac{4t^2+4t}{5t^2+4t+2}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{5}$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0	↗	$\frac{1}{5}$

• Từ bảng biến thiên, $\cos((P),(Q))$ đạt GTLN khi $t=-1\Leftrightarrow b=-c\Rightarrow a=-c$. Chọn $c=-1$, ta có $a=b=1$. Ta có $(P)\colon x+y-z+3=0$. Suy ra $\mathrm{d}(A,(P))=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+1)^2+z^2=9$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2+2\cdot\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r=\sqrt{7}$. **B.** $r=2\sqrt{2}$. **C.** $r=\sqrt{2}$. **D.** $r=7$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(1-x;-y;-z)$, $\overrightarrow{MB}=(2-x;1-y;3-z)$, $\overrightarrow{MC}=(-x;2-y;-3-z)$.
Khi đó

$$\begin{aligned} & MA^2+2\cdot\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=8\\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+y^2+z^2+2\left[x(x-2)+(y-1)(y-2)+(z-3)(z+3)\right]=8\\ \Leftrightarrow\ & 3\left(x^2+y^2+z^2\right)-6x-6y-21=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow M\in(S')\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0$.
Mà $M\in(S)\colon (x-3)^2+(y+1)^2+z^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x+2y+1=0$.
Suy ra $M\in(P)\colon 4x-4y-8=0$. Như vậy quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của (S) tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=3$ và (P). Ta có $\mathrm{d}[I,(P)]=\sqrt{2}\Rightarrow r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2}=\sqrt{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng (P): $2y-z=0$. Tìm điểm C thuộc (P), điểm B thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC bé nhất. Giá trị chu vi tam giác ABC bé nhất là

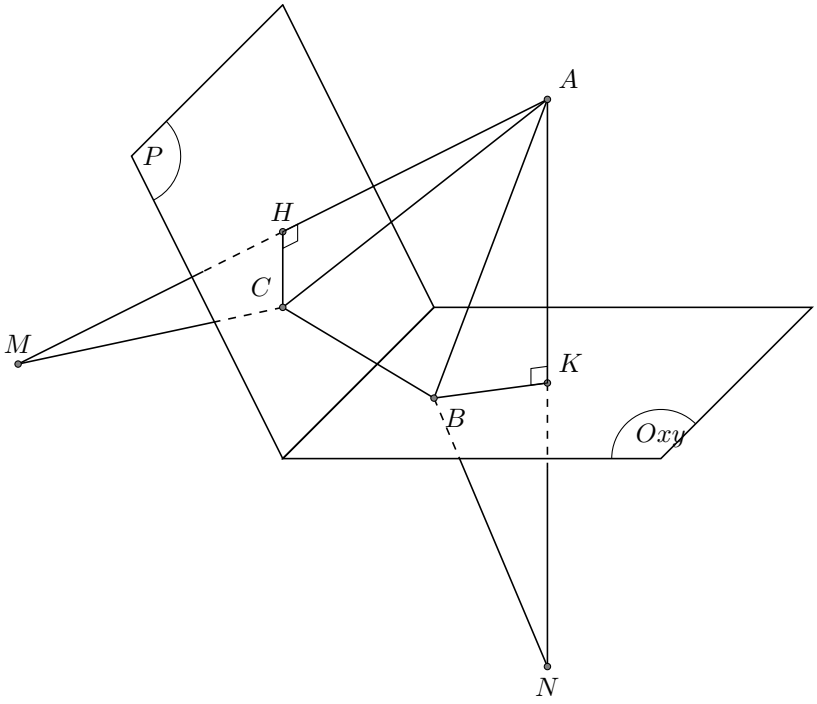
A. $4\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên các mặt phẳng (P) và (Oxy) ta được $H(1;2;4)$, $K(1;4;0)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng với A qua các mặt phẳng (P) và (Oxy). Khi đó ta có $AB=NB$, $CA=CM$ nên

$$AB+BC+CA=NB+BC+CM\geq MN=2KH=4\sqrt{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng MN với các mặt phẳng (Oxy) và (P).



Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-3;2)$ và chứa trục Oz. Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Tính $M=\dfrac{b+c}{a}$.

A. $M=-\dfrac{1}{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=\dfrac{1}{3}$. **D.** $M=-3$.

Lời giải.

(P) chứa Oz nên $\vec{k}=(0;0;1)$ nằm trên (P).

Ngoài ra, (P) chứa O và A nên véc-tơ $\overrightarrow{OA}=(1;-3;2)$ nằm trên (P).

Vậy ta có $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{k},\overrightarrow{OA}\right]=(3;1;0)$. Do đó $M=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ và $P(0;0;p)$, với m, n, p là các số dương thay đổi thỏa mãn $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=3$. Mặt phẳng (MNP) luôn đi qua điểm

A. $H\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $G(1;1;1)$. **C.** $F(3;3;3)$. **D.** $E\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$.

Theo giả thiết $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=3 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{3}}{m}+\dfrac{\frac{1}{3}}{n}+\dfrac{\frac{1}{3}}{p}=1$. Do đó $E\in(MNP)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-3;2)$, $B(-2;-1;5)$ và $C(3;2;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và trực tâm của tam giác ABC, đồng thời vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tìm phương trình mặt phẳng (P).

A. $5x+3y+4z-22=0$. **B.** $5x+3y+4z-4=0$.

C. $5x+3y-6z+16=0$. **D.** $5x+3y-6z-8=0$.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ta có (P) cắt (ABC) theo giao tuyến AH.

Hơn nữa, đường thẳng $BC\subset(ABC)$ và $BC\perp AH$ nên $BC\perp(P)$. Vậy $\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{BC}=(5;3;-6)$.

Do đó $(P)\colon 5(x-1)+3(y+3)-6(z-2)=0 \Leftrightarrow 5x+3y-6z+16=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$. Khi đó

$$\mathrm{d}(I,(ABC))=\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$49=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2\le(1^2+2^2+3^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{7}{2}\cdot 14=49.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=2b=3c$. Thay vào giả thiết ta có $a=2;b=1;c=\dfrac{2}{3}$.

Vì $OABC$ là tứ diện vuông tại O nên $V_{OABC}=\dfrac{abc}{6}=\dfrac{2}{9}$.

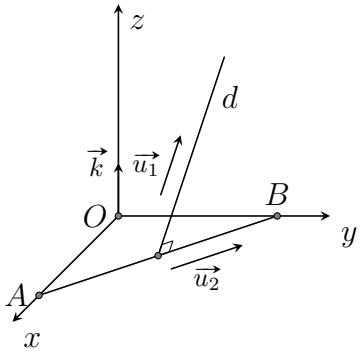
Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

A. $(P)\colon x+2y+5z-4=0$. **B.** $(P)\colon x+2y+5z-5=0$.

C. $(P)\colon x+2y-z-4=0$. **D.** $(P)\colon 2x-y-3=0$.

Lời giải.



Đường thẳng d qua điểm $M(2;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_1}=(1;2;-1)$.

Gọi $\vec{u_2}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Do $\vec{u_2}\perp\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}\perp\vec{k}=(0;0;1)$ nên $\vec{u_2}=[\vec{u_1},\vec{k}]=(2;-1;0)$.

Mặt phẳng (P) chứa d và AB nên có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{u_1},\vec{u_2}]=(-1;-2;-5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua M và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$-1(x-2)-2(y-1)-5z=0\Leftrightarrow x+2y+5z-4=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$ và $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=4$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2). Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{9}{2}-\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\dfrac{9+\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$.

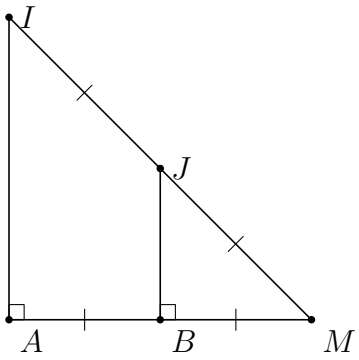
Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ và bán kính $R_1=4$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ và bán kính $R_2=2$.

Gọi A, B lần lượt là hai tiếp điểm của (S_1), (S_2) với mặt phẳng (P).

Gọi M là giao điểm của IJ với mặt phẳng (P). Ta có



$$\frac{MI}{MJ}=\frac{IA}{JB}=2.$$

Suy ra J là trung điểm của IM, do đó $M(2;1;9)$.

Gọi véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$, khi đó phương trình của mặt phẳng (P) là

$$a(x-2)+b(y-1)+c(z-9)=0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(I,(P))=4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & a^2+b^2=3c^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)^2=3. \qquad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\mathrm{d}(O,(P))=\frac{|2a+b+9c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2a+b+9c|}{2c}=\frac{1}{2}\left|\frac{2a}{c}+\frac{b}{c}+9\right|. \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\frac{2a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2\le(2^2+1^2)\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2\right]. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có

$$\left(\frac{2a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2\le 15\Leftrightarrow-\sqrt{15}\le\frac{2a}{c}+\frac{b}{c}\le\sqrt{15}. \qquad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$\frac{9-\sqrt{15}}{2}\le\mathrm{d}(O,(P))\le\frac{9+\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{9+\sqrt{15}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (S) sao cho $2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $a+b+c$.

A. $T=\dfrac{81}{7}$. **B.** $T=-\dfrac{12}{7}$. **C.** $T=\dfrac{11}{7}$. **D.** $\dfrac{79}{7}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;2)$, bán kính $R=4$.

Xét mặt phẳng (P) có phương trình $2x+3y+6z=0$.

Ta có $\mathrm{d}\,(M,(P))=\dfrac{|2a+3b+6c|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}$.

Như vậy $2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}\,(M,(P))$ lớn nhất.

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=2+6t. \end{cases}$

Khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất khi M là một trong hai giao điểm của d với mặt cầu (S).

Tọa độ giao điểm $M(x;y;z)$ của d và (S) là nghiệm x,y,z của hệ phương trình

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=2+6t \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=2+6t \\ 49t^2-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=2+6t \\ t=\pm\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

☑ Với $t=\dfrac{4}{7}$ ta được $M_1=\left(\dfrac{15}{7};\dfrac{26}{7};\dfrac{38}{7}\right)$. Khi đó, $\mathrm{d}\,(M_1,(P))=\dfrac{48}{7}$.

☑ Với $t=-\dfrac{4}{7}$ ta được $M_2=\left(-\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};-\dfrac{10}{7}\right)$. Khi đó, $\mathrm{d}\,(M_2,(P))=\dfrac{8}{7}$.

Vậy điểm M_1 thỏa mãn yêu cầu bài toán và $a+b+c=\dfrac{79}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1)\colon (x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$, $(S_2)\colon x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$, $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A. 2. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có (S_1), (S_2), (S_3) có tâm lần lượt là $I_1(-3;2;4)$, $I_2(0;2;4)$, $I_3(-2;2;0)$ và bán kính lần lượt là $R_1=1$, $R_2=2$, $R_3=3$.

Gọi $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu nói trên. Khi đó

$$\begin{cases} \mathrm{d}(I_1;(P))=R_1 \\ \mathrm{d}(I_2;(P))=R_2 \\ \mathrm{d}(I_3;(P))=R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-3a+2b+4c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2b+4c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-2a+2b+d|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2b+4c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ 2|-3a+2b+4c+d|=|2b+4c+d| \\ 3|2b+4c+d|=2|-2a+2b+d|. \end{cases}$$

Xét phương trình

$$3|2b+4c+d|=2|-2a+2b+d| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3(2b+4c+d)=2(-2a+2b+d) \\ 3(2b+4c+d)=-2(-2a+2b+d) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d=-4a-2b-12c \\ 5d=4a-10b-12c. \end{bmatrix}$$

① Với $d=-4a-2b-12c$. Thay vào $2|-3a+2b+4c+d|=|2b+4c+d|$, ta được

$$2|-7a-8c|=|-4a-8c| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7a+8c=2a+4c \\ 7a+8c=-2a-4c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a=-\dfrac{6c}{5} \\ a=-\dfrac{4c}{3}. \end{bmatrix}$$

☑ Với $a=-\dfrac{6c}{5} \Rightarrow d=-\dfrac{36c}{5}-2b$.

Thay vào $|-3a+2b+4c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{18c}{5}+2b+4c-\frac{36c}{5}-2b\right|=\sqrt{\left(-\frac{6c}{5}\right)^2+b^2+c^2}$$
$$\Leftrightarrow\left|\frac{2c}{5}\right|=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{25b^2+61c^2}\Leftrightarrow 4c^2=25b^2+61c^2\Leftrightarrow b=c=0.$$

Với $b=c=0\Rightarrow a=0$, $d=0$ (vô lí).

☑ Với $a=-\dfrac{4c}{3}\Rightarrow d=-\dfrac{20c}{3}-2b$.

Thay vào $|-3a+2b+4c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{12c}{5}+2b+4c-\frac{20c}{5}-2b\right|=\sqrt{\left(-\frac{4c}{3}\right)^2+b^2+c^2}$$
$$\Leftrightarrow\left|\frac{4c}{3}\right|=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9b^2+25c^2}\Leftrightarrow 16c^2=9b^2+25c^2\Leftrightarrow b=c=0.$$

Với $b=c=0\Rightarrow a=0$, $d=0$ (vô lí).

② Với $5d=4a-10b-12c$. Thay vào $2|-3a+2b+4c+d|=|2b+4c+d|$, ta được

$$2|-11a+8c|=|4a+8c|\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&11a-8c=2a+4c\\&11a-8c=-2a-4c\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=\frac{4c}{13}\\&a=\frac{4c}{3}.\end{aligned}\right.$$

☑ Với $a=\dfrac{4c}{13}\Rightarrow 5d=-\dfrac{140c}{13}-10b$.

Thay vào $|-3a+2b+4c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{60c}{13}\right|=\frac{5}{13}\cdot\sqrt{169b^2+185c^2}\Leftrightarrow 11c^2=169b^2\Leftrightarrow c=\pm\frac{13b}{\sqrt{11}}.$$

- Với $c=\dfrac{13b}{\sqrt{11}}$: chọn $b=\sqrt{11}\Rightarrow c=13\Rightarrow$ tồn tại một mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).
- Với $c=-\dfrac{13b}{\sqrt{11}}$: chọn $b=\sqrt{11}\Rightarrow c=-13\Rightarrow$ tồn tại một mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

☑ Với $a=\dfrac{4c}{3}\Rightarrow 5d=-\dfrac{20c}{3}-10b$.

Thay vào $|-3a+2b+4c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ta được

$$\left|\frac{20c}{3}\right|=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{9b^2+25c^2}\Leftrightarrow 9c^2+9b^2=0\Leftrightarrow b=c=0.$$

Với $b=c=0\Rightarrow a=0$, $d=0$ (vô lí).

Vậy tồn tại 2 mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(-2;0;1)$, $C(0;0;2)$ và mặt phẳng (P): $x+2y+z+4=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $S=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $Q=a+b+6c$.

A. $Q=2$. **B.** $Q=-2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=1$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ ta có $G\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};1\right)$. Lại có

$$\begin{aligned} A &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} \\ &= 3MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$ là một hằng số nên S nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của G lên (P).

Từ đó ta tìm được $M\left(-\frac{11}{9};-\frac{13}{9};\frac{1}{9}\right)$ và $Q=a+b+6c=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2)\colon x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+6BC$ là

A. $2\sqrt{265}$. **B.** $\frac{5\sqrt{265}}{2}$. **C.** $3\sqrt{265}$. **D.** $\frac{7\sqrt{265}}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính bằng 1; mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;4;0)$ bán kính bằng 2.

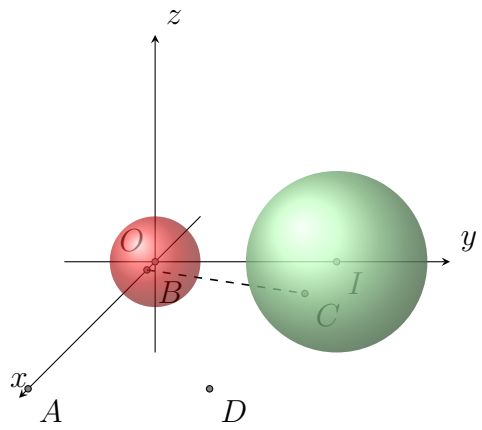
Ta có 4 điểm O, A, D, I là 4 đỉnh của hình vuông cạnh bằng 4 và $OB=\frac{1}{4}$, $IC=1$.

Ta có $\triangle OMA\backsim\triangle OBM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{MA}{BM}=\frac{OM}{OB}\Rightarrow MA=4MB$.

Ta có $\triangle IND\backsim\triangle ICN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{ND}{CN}=\frac{IN}{IC}=2\Rightarrow ND=2NC$.



$$\begin{aligned} Q &= 4MB+4NC+4MN+6BC \\ &= 4(BM+MN+NC)+6BC \\ &\geq 4BC+6BC=10BC=10\cdot\frac{\sqrt{265}}{4}=\frac{5\sqrt{265}}{2} \end{aligned}$$

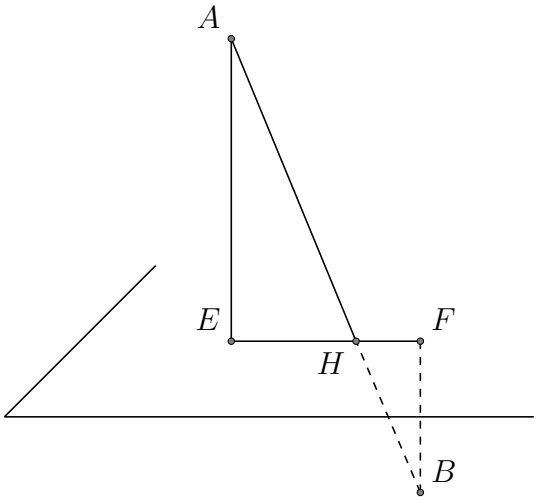
Vậy Q nhỏ nhất là bằng $\frac{5\sqrt{265}}{2}$, dấu "=" xảy ra khi M, N là giao điểm của BC với các mặt cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z-3=0$ và hai điểm $A(m;1;0)$; $B(1;-m;2)$. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của A,B lên mặt phẳng (P). Biết $EF=\sqrt{5}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m là

A. 2. **B.** 3. **C.** -6. **D.** -3.

Lời giải.



☑ Xét trường hợp $m = 1$. Khi đó cả A, B đều thuộc (P).
Trong trường hợp này $EF = AB = 2\sqrt{2}$ (loại).

☑ Khi $m \neq 1$. Ta tính toán các đại lượng

$$\mathrm{d}(A;(P)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{6}} \qquad \mathrm{d}(B;(P)) = \frac{|1-m|}{\sqrt{6}}.$$

Từ đó suy ra A, B khác phía với (P) và $\mathrm{d}(A;(P)) = 2\mathrm{d}(B;(P))$.

Gọi H là giao điểm của AB với (P).

Theo Thales ta có $EH = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$, $AH = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1-m)^2+(m+1)^2+2^2}$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác AEH ta có

$$\begin{aligned} & AE^2 + EH^2 = AH^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(2m-2)^2}{6} + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\left((1-m)^2+(m+1)^2+4\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3\cdot(4m^2-8m+4)}{18} + \frac{40}{18} = \frac{8\cdot(2m^2+6)}{18} \\ \Leftrightarrow \quad & 4m^2+24m-4=0. \end{aligned}$$

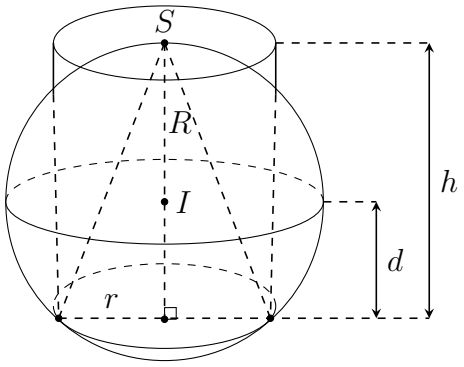
Phương trình này có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó bằng $-\dfrac{24}{4} = -6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là h $(h > R)$. Hình trụ (T) có đáy là đường tròn (C) và có cùng chiều cao với hình nón (N). Tính thể tích V khối trụ được tạo nên bởi (T) theo R, biết V có giá trị lớn nhất.

A. $V = \dfrac{32}{27}\pi R^3$. **B.** $V = \dfrac{32}{81}\pi R^3$. **C.** $V = \dfrac{16}{27}\pi R^3$. **D.** $V = \dfrac{64}{9}\pi R^3$.

Lời giải.



Gọi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là d với $(0 \le d \le R)$, đường tròn (C) có bán kính là r.

$V = h \cdot \pi \cdot r^2 = \pi(R+d)\left(R^2-d^2\right) = \pi\left(-d^3-Rd^2+R^2d+R^3\right)$.

$$V'(d) = \pi\left(-3d^2-2Rd+R^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} d=-1 \\ d=\dfrac{R}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow d = \frac{R}{3}.$$

Ta có $V(0) = \pi R^3, V(R) = 0$ và $V\left(\dfrac{R}{3}\right) = \dfrac{32}{27}\pi R^3$.

Vậy $V = \dfrac{32}{27}\pi R^3$

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ

nhất có dạng $(P)\colon x+ay+by+c=0$. Tính $S=a+b+c$.

A. 19. **B.** 6. **C.** -9. **D.** -5.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC).

Tứ diện $OABC$ có ba góc ở đỉnh O vuông nên $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}\geq\dfrac{1}{OM^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $H\equiv M$ hay $OM\perp(ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$, từ đó viết được phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y+3z-14=0$.

Vậy $a+b+c=2+3-14=-9$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y+2z-15=0$ và ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0+3y_0+z_0$ bằng

A. 11. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải.

Gọi $G(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Từ hệ thức này, suy ra

$$\begin{cases}2(1-a)-(1-a)+(1-a)=0\\2(2-b)-(-1-b)+(-1-b)=0\\2(0-c)-(3-c)+(-1-c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=-2\end{cases}\Rightarrow G(1;2;-2).$$

Ta có

$$\begin{aligned}2MA^2-MB^2+MC^2&=2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=2MG^2+2GA^2-GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=2MG^2+2GA^2-GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

Vì $2GA^2-GB^2+GC^2$ không đổi nên $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi M là hình chiếu của G lên (P).

Phương trình đường thẳng qua G và vuông góc với (P) là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+2}{2}$.

Xét hệ $\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+2}{2}\\3x-3y+2z-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\2x-3z=8\\3x-3y+2z=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\\z=0.\end{cases}$

Vậy $M(4;-1;0)$ và giá trị của biểu thức cần tìm bằng $2\cdot4+3\cdot(-1)+0=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+z-4=0$ và mặt cầu $(S)\colon(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tìm tọa độ giao điểm M của (P) với trục hoành.

A. $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{1}{3};0;0\right)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;2)$ và bán kính $R=4$.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;-1;1)$.

Giả sử (P) cắt trục hoành tại điểm $M(m;0;0)$, do $(P)\perp(\alpha)$, suy ra (P) có hai véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}=(m;-1;-2)$ và $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;-1;1)$.

Suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\overrightarrow{AM}\right]=(3;m+2;m-1)$.

Từ đó ta có, phương trình mặt phẳng (P)

$$3(x-0)+(m+2)(y-1)+(m-1)(z-2)=0\Leftrightarrow 3x+(m+2)y+(m-1)z-3m=0.$$

Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P), r là bán kính đường tròn giao tuyến giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), khi đó ta có $R^2=d^2+r^2$.

Suy ra, để r nhỏ nhất khi và chỉ khi $d=\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.

Ta có $d=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|9+(m+2)+(m-1)2-3m|}{\sqrt{3^2+(m+2)^2+(m-1)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{2m^2+2m+14}}=\dfrac{9}{\sqrt{2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}}}$.

Lại có $2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}\geq\dfrac{27}{2}$, suy ra $d\leq\dfrac{9}{\sqrt{\dfrac{27}{2}}}=\sqrt{6}$, từ đó suy ra d lớn nhất khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;6;2),B(3;0;0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P):x-y+2=0$. Bán kính của mặt cầu (S) có giá trị nhỏ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{462}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{534}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{218}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{530}}{4}$.

Lời giải.

Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(x;y;z)$ và bán kính R. Ta có

$$\begin{cases}IA^2=IB^2\\I\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-6)^2+(z-2)^2=(x-3)^2+y^2+z^2\\x-y+2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-12y-4z+32=0\\x-y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2-2x\\y=x+2.\end{cases}$$

Khi đó

$$R^2=IB^2=(x-3)^2+y^2+z^2=(x-3)^2+(x+2)^2+(2-2x)^2=6x^2-10x+17=6\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{77}{6}.$$

Suy ra $R\geq\sqrt{\dfrac{77}{6}}=\dfrac{\sqrt{462}}{6}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A. $\dfrac{1372}{9}$. **B.** $\dfrac{686}{9}$. **C.** $\dfrac{524}{3}$. **D.** $\dfrac{343}{9}$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Ta có phương trình mặt phẳng (P) là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\,(a,b,c\neq 0)$.
Gọi H là hình chiếu của O lên (P). Ta có: $\mathrm{d}(O;(P))=OH\leqslant OM$.
Do đó $\max \mathrm{d}(O;(P))=OM$ khi và chỉ khi (P) qua $M(1;2;3)$ nhận $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Do đó (P) có phương trình:
$1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow x+2y+3z=14\Leftrightarrow \dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{\frac{14}{3}}=1$.

Suy ra: $a=14$, $b=7$, $c=\dfrac{14}{3}$.
Vậy $V_{O.ABC}=\dfrac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{6}\cdot 14\cdot 7\cdot\dfrac{14}{3}=\dfrac{686}{9}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $S(0;0;1)$ và $A(1;1;1)$. Hai điểm $M(m;0;0)$, $N(0;$ thay đổi sao cho $m+n=1$ và $m>0,n>0$. Biết rằng luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (SMN). Bán kính của mặt cầu đó là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (SMN) là $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{1}=1\Leftrightarrow nx+my+mnz-mn=0$.
Gọi $I(a;b;c)$ và R là tâm và bán kính của mặt cầu cố định.
Ta có

$$\begin{aligned}R=d(I;(SMN))&=\frac{|na+mb+mnc-mn|}{\sqrt{n^2+m^2+m^2n^2}}\\&=\frac{|(1-m)a+mb+m(1-m)(c-1)|}{\sqrt{1-2mn+m^2n^2}}\\&=\frac{|(1-m)a+mb+m(1-m)(c-1)|}{1-mn}\\&=\frac{|(1-c)m^2+(b+c-a-1)m+a|}{m^2-m+1}.\end{aligned}$$

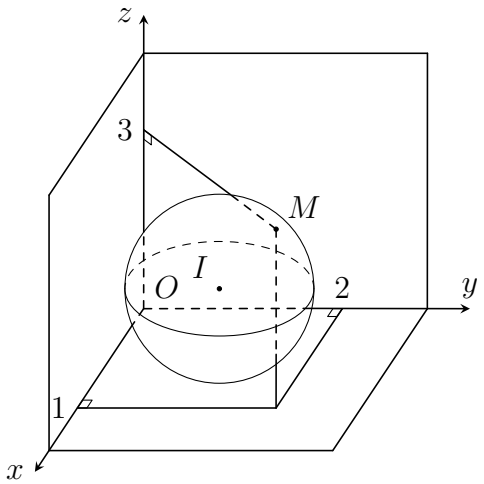
Mà R không đổi nên $\dfrac{1-c}{1}=\dfrac{b+c-a-1}{-1}=\dfrac{a}{1}=t\Rightarrow\begin{cases}a=t\\b=t\\c=1-t\end{cases}$, hay $I(t;t;1-t)$.
Mặt khác ta có $R=IA=\sqrt{3t^3-4t+2}=|t|\Rightarrow t=1$. Vậy $R=1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau, được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của căn nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của mỗi quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà nó tiếp xúc lần lượt bằng $1,2,3$. Tính tổng các bình phương của hai bán kính của hai quả bóng đó.

A. 22. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 24.

Lời giải.

Xét quả bóng tiếp xúc với hai bức tường, nền của căn nhà và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (tương tự với góc tường còn lại).



Gọi $I(a;a;a)$ là tâm của mặt cầu có bán kính $R=a$. Phương trình mặt cầu là:

$$(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2. \quad (1)$$

Xét điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt cầu sao cho $d(M,(Oxz))=2,\ d(M,(Oyz))=1,\ d(M,(Oxy))=3$.

Suy ra $M(2;1;3)$.

Vì M thuộc mặt cầu (S) nên từ (1) ta có:

$$\begin{aligned}&(2-a)^2+(1-a)^2+(3-a)^2=a^2\\ &\Leftrightarrow a^2-6a+7=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a_1=3+\sqrt{2}=R_1\\ a_2=3-\sqrt{2}=R_2\end{cases}.\end{aligned}$$

Vậy $R_1^2+R_2^2=22$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy theo thứ tự tại hai điểm M, N (M, N đều không trùng với gốc tọa độ) thỏa mãn $OM=ON$. Biết mặt phẳng (P) có hai phương trình là $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính đại lượng $T=b_1+b_2$.

A. $T=2$. **B.** $T=0$. **C.** $T=4$. **D.** $T=-4$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$.

☑ Nếu mặt phẳng (P) song song với trục Oz.
(P) đi qua $A(1;1;1)$ có VTPT $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\vec{k}]=(1;1;0)$.
Khi đó (P): $x+y-2=0$.
Dễ thấy (P) cắt Ox tại $M(2;0;0)$ cắt Oy tại $M(0;2;0)$. Ta thấy $OM=ON$ nên (P) thỏa mãn.

☑ Nếu mặt phẳng (P) cắt trục Oz. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$$

Do đó phương trình (P) có dạng $x+By+Cz+D=0\ (B,C,D\neq 0)$. (P) đi qua hai điểm A, B nên

$$\begin{cases}B+C+D=-1\\ 2B+2C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2B+2C+2D=-2\\ 2B+2C+D=0\end{cases}\Rightarrow D=-2.$$

(P) cắt trục Ox tại $M(-D;0;0)$, cắt Oy tại $N(0;\frac{-D}{B};0)$.

Vì $OM = ON$ nên $|-D| = \left|\dfrac{-D}{B}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -D = -\dfrac{D}{B} \Rightarrow B = 1 \text{ (loại vì } C \neq 0) \\ -D = \dfrac{D}{B} \Rightarrow B = -1 \Rightarrow C = 2. \end{array}\right.$

Do đó $(P): x - y + 2z - 2 = 0$. Vậy $b_1 + b_2 = 1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$ đồng thời (P) cắt các tia Oy, Oz theo thứ tự tại hai điểm B, C (B, C đều không trùng với gốc tọa độ). Khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất phương trình mặt phẳng (P) là

A. $y - z = 0$. **B.** $y + z - 2 = 0$. **C.** $2x + y + z - 4 = 0$. **D.** $x + y - 2$.

Lời giải.

Ta thấy (P) cắt trục Ox tại điểm $A(2;0;0)$. Gọi $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(b, c \neq 0)$.

Khi đó $(P): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

$$M(1;1;1) \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{2}{\sqrt{bc}} \Leftrightarrow bc \geq 16$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;b;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;0;c)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 4b^2 + 4c^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 8bc} \geq \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 8 \cdot 16}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $b = c = 4$.

Khi đó $(P): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1$ hay $2x + y + z - 4 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$. đến mặt phẳng P đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

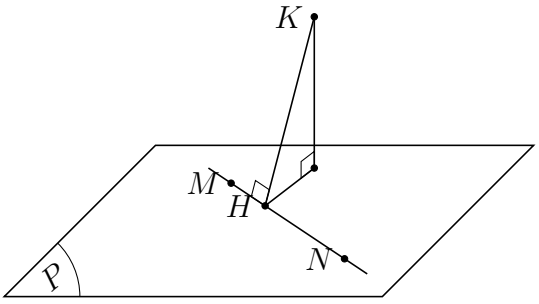
A. $\vec{n} = (1;-1;1)$. **B.** $\vec{n} = (1;1;-1)$. **C.** $\vec{n} = (2;-1;1)$. **D.** $\vec{n} = (2;1;-1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1;2;1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm MN.

Phương trình đường thẳng d đi qua $M(0;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{MN} = (-1;2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương là: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.



Gọi H là hình chiếu của K lên đường thẳng d.

Ta có: $\mathrm{d}(K,(P)) \leq KH$. Do đó $\mathrm{d}(K,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(K,(P)) = KH$.

Ta có $H \in d \Rightarrow H(-t;-1+2t;2+t)$;

$\overrightarrow{KH} = (-t;-1+2t;t)$.

Ta có: $KH \perp MN \Leftrightarrow \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow (-1)\cdot(-t) + 2(-1+2t) + 1 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Lúc đó $\overrightarrow{KH} = \left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\cdot\vec{n}$, với $\vec{n} = (1;1;-1)$.

$\overrightarrow{KH}$ là véc-tơ pháp tuyến của mp(P) nên $\vec{n}$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của mp(P).

Chọn đáp án B □

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, với a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C, mặt phẳng (P) có phương trình theo đoạn chắn là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}\cdot x+\frac{1}{b}\cdot y+\frac{1}{c}\cdot z-1=0.$$

Ta có $d(O;(P))=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{9}{x+y+z}, \forall x,y,z>0$, ta có

$$d(O;(P))\leq\frac{1}{\sqrt{\dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $\max d(O;(P))=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $S(0;0;1)$, Hai điểm $M(m;0;0), N(0;n;0)$ thay đổi sao cho $m+n=1$ và $m>0, n>0$. Mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định đi qua $P(1;1;1)$ có bán kính là

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình $(SMN):\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+z=1$. Gọi $I(a;b;c)$ và R là tâm và bán kính mặt cầu cố định trong đề bài, phương trình mặt cầu là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Ta có khoảng cách từ I đến (SMN) là $d=\dfrac{\left|\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}+c-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+1}}=R$. Vì $m+n=1\Rightarrow\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+1=\dfrac{m^2+n^2+m^2n^2}{m^2n^2}=\dfrac{1-2mn+m^2n^2}{m^2n^2}$.

$\Rightarrow d=\dfrac{|an+bm+cmn-mn|}{1-mn}=R.$

Nếu

$$an+bm+cmn-mn=R(1-mn)$$

$$\Leftrightarrow\ a(1-m)+bm+cm(1-m)-m(1-m)=R-Rm(1-m)\ .$$

$$\Leftrightarrow\ m^2(R+c-1)+m(a-b-c-R+1)-a+R=0$$

Đẳng thức đúng với mọi $m\in(0;1)$ nên $R+c-1=a-b-c-R+1=-a+R$ hay $a=b=R, c=1-R$,

thay vào phương trình mặt cầu ta có $R=1$.

Nếu $an+bm+cmn-mn=-R(1-mn) \Leftrightarrow m^2(-R+c-1)+m(a-b-c+R+1)-a-R=0$.

Đẳng thức đúng với mọi $m\in(0;1)$ nên $R+c-1=a-b-c-R+1=-a+R$ hay $a=b=-R, c=1+R$ thay vào phương trình mặt cầu ta có $R=-1$ không thỏa mãn. Vậy $R=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng (P): $ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=5$. **B**. $T=3$. **C**. $T=4$. **D**. $T=2$.

Lời giải.

Ta có A, $B\in(P)$ nên $b=2$ và $a=2-2c$. Phương trình (P) có dạng $(2-2c)x+2y+cz-2=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$. Khoảng cách từ I đến (P) là

$$d=\frac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+4+c^2}} \Rightarrow d^2=\frac{(4+c)^2}{5c^2-8c+8}=f(c).$$

$f'(c)=-\dfrac{48c-1)(c+4)}{(5c^2-8c+8)^2}$, $f'(c)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-4 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

c	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(c)$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{5}$

Để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì $d<R$ và d đạt giá trị lớn nhất.

Từ bảng biến thiên suy ra $\max d=\sqrt{5}$ khi $c=1\Rightarrow a=0$. Vậy $T=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Một khối lập phương lớn tạo bởi 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

A. 16. **B**. 17. **C**. 18. **D**. 19.

Lời giải.

Giả sử các đỉnh của khối lập phương đơn vị là $(i;j;k)$, với $i,j,k\in\{0;1;2;3\}$ và đường chéo đang xét của khối lập phương lớn nối hai đỉnh là $O(0;0;0)$ và $A(3;3;3)$. Phương trình mặt trung trực của OA là $(\alpha): x+y+z-\dfrac{9}{2}=0$. Mặt phẳng này cắt khối lập phương đơn vị khi và và chỉ khi các đầu mút $(i;j;k)$ và $(i+1;j+1;k+1)$ của đường chéo của khối lập phương đơn vị nằm về hai phía đối với (α). Do đó bài toán quy về đếm trong số 27 bộ $(i;j;k)$, với $i,j,k\in\{0;1;2\}$, có bao nhiêu bộ ba thỏa mãn:

$$\begin{cases} i+j+k-\dfrac{9}{2}<0 \\ (i+1)+(j+1)+(k+1)-\dfrac{9}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<i+j+k<\frac{9}{2}. \quad (1)$$

Các bộ ba không thỏa điều kiện (1), tức là $\left[\begin{array}{l} i+i+k<\dfrac{3}{2} \\ i+i+k>\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$ là

$$(0;0;0),(0;0;1),(0;1;0),(1;0;0),(1;2;2),(2;1;2),(2;2;1),(2;2;2).$$

Vậy có $27-8=19$ khối lập phương đơn vị bị cắt bởi (α).
Chọn đáp án D □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $3\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

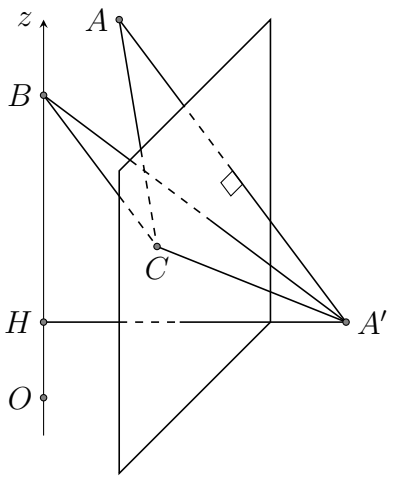
Gọi $B(0;b;0), C(0;0;c)$, với $b,c>0$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) (theo dạng đoạn chắn) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Do (P) đi qua $M(1;1;1)$ nên $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. Suy ra $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow bc=2(b+c)$. Từ đây, cũng suy ra $bc\geq 16$. Mặt khác, dễ tính được diện tích tam giác ABC là $S=\sqrt{b^2+c^2+\dfrac{b^2c^2}{4}}$. Do đó, $S\geq\sqrt{32+64}=4\sqrt{6}$, đẳng thức đạt được khi $b=c=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+7=0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là:

A. $B(0;0;1)$. **B.** $B(0;0;-2)$. **C.** $B(0;0;-1)$. **D.** $B(0;0;2)$.

Lời giải.



Kiểm tra thấy hai điểm A, B nằm cùng phía so với bờ là mặt phẳng (P), trục Oz song song với mặt phẳng (P).
Lấy điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P). Ta có các đánh giá:
+ $AB\geq AB_0$ với B_0 là hình chiếu của A lên trục Oz và AB_0 có độ dài không đổi.
+ $BC+CA=BC+CA'\geq A'B\geq A'H$, $A'H$ có độ dài không đổi.

Từ đó suy ra

$$AB + BC + CA \geq AB_0 + A'H.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi B trùng $B_0(0;0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB = 2IC$ biết tọa độ điểm I là số nguyên.

A. $(\alpha): 2x+3y+2z-3=0$. **B.** $(\alpha): 4x+3y-2z-9=0$.

C. $(\alpha): 2x-y-2z-3=0$. **D.** $(\alpha): 6x+2y-z-9=0$.

Lời giải.

Đường thẳng BC qua $B(1;1;2)$ có VTCP $\vec{a} = (-2;1;-4)$ có phương trình là $\begin{cases} 1-2t \\ 1+t \\ 2-4t \end{cases}$.

$I \in BC$ nên $I(x = 1-2t; y = 1+t; z = 2-4t)$.

Ta có

$$\begin{aligned} & IB = 2IC \\ \Leftrightarrow\ & IB^2 = 4IC^2 \\ \Leftrightarrow\ & (2t)^2 + t^2 + (4t)^2 = 4[(2t-2)^2 + (1-t)^2) + (4t-4)^2] \\ \Leftrightarrow\ & 3t^2 - 8t + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Với $t = 2$ thì $I(-3;3;-6)$.

Với $t = \dfrac{2}{3}$ thì $I(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3})$ (loại vì tọa độ điểm I là số nguyên).

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1;-2;2)$, $\overrightarrow{IA} = (4;-2;5)$.

$[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{IA}] = (-6;3;6)$ là một VTPT của (α).

Vậy mặt phẳng (α) qua A có phương trình là $2x-y-2z-3=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tong không gian $Oxyz$ cho điểm $M\,(2;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác gốc O sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ là bé nhất.

A. $4x-y-z-6=0$. **B.** $2x+y+2z-6=0$.

C. $2x-y-2z-3=0$. **D.** $x+2y+2z-6=0$.

Lời giải.

Gọi tọa độ của A, B, C lần lượt là $(a;0;0)\,, (0;b;0)\,, (0;0;c)$, do A, B, C lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz nên a, b, c là các số dương. Mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì $M \in (P)$ nên $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$, sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\dfrac{2}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ ta có $1 = \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{abc}} \Rightarrow abc \geq 3^3 \cdot 2$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bé nhất $\Leftrightarrow abc$ bé nhất $\Leftrightarrow a=6, b=3, c=3$.

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-6=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và $A(3;0;-1)$, $B(-1;-2;1)$. Mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

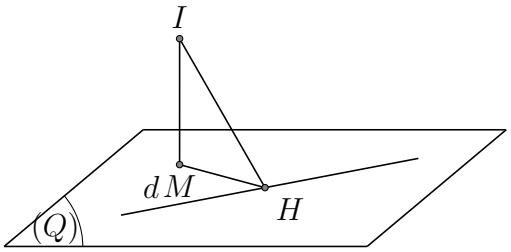
A. $3x-2y-4z-8=0$. **B.** $y+z+1=0$.

C. $x-2y-3=0$. **D.** $x+3y+5z+2=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính là $R=2$.

Ta có $(d)\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$.



Gọi $H(1+2t;-1+t;-t)$ là hình chiếu của I trên d.

Ta có $\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow (2t-2)2+(t-2)+t=0 \Leftrightarrow t=1$ suy ra $H(3;0;-1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d.

Bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng chứa d và mặt cầu (S) là $r=\sqrt{R^2-(\mathrm{d}(I,(Q)))^2}$, suy ra r nhỏ nhất khi $\mathrm{d}(I,(Q))$ lớn nhất.

Gọi M là hình chiếu của I trên (Q).

Ta có $\mathrm{d}(I,(Q))=IM\leqslant IH$ suy ra $\mathrm{d}(I,(Q))$ lớn nhất khi $\mathrm{d}(I,(Q))=IH$, lúc đó mặt phẳng (Q) qua $H(3;0;-1)$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q)\colon y+z+1=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(2;1;0)$, $C(4;-3;-2)$, $D(3;-2;1)$, $E(1;1;-1)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm trên?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-3)$, $\overrightarrow{DC}=(1;-1;-3)$,

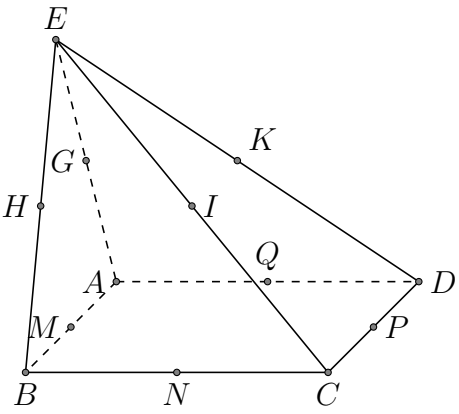
$\overrightarrow{AD}=(2;-4;-2)$.

Suy ra $ABCD$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{AE}=(0;-1;-4)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-10;-4;-2)$.

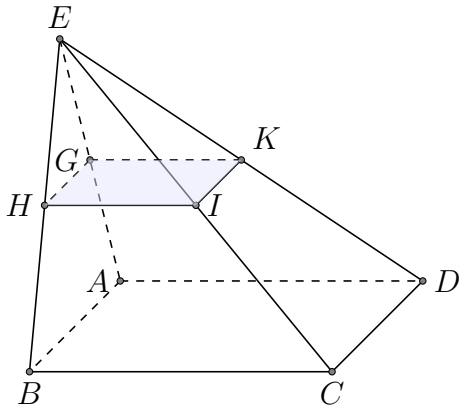
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AE}=12\neq 0$ nên $E.ABCD$ là hình chóp đỉnh E có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Gọi G, H, I, K, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh EA, EB, EC, ED, AB, BC, CD, AD.

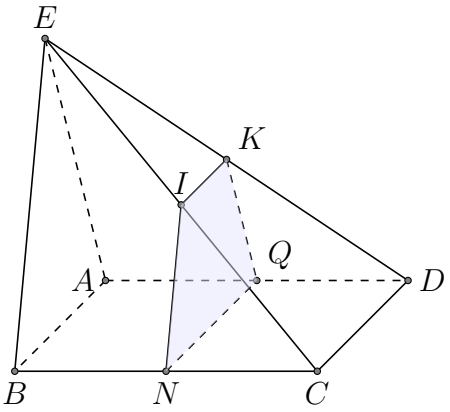


Do đó có 5 mặt phẳng cách đều 5 điểm là:

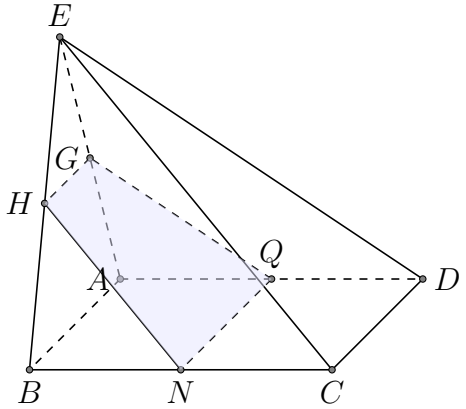
☑ Mặt phẳng qua 4 trung điểm của 4 cạnh bên: $(GHIK)$.



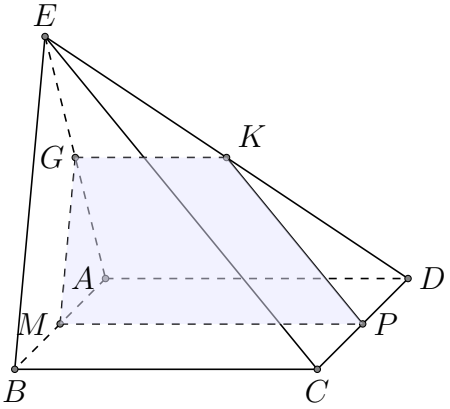
☑ Mặt phẳng qua 4 trung điểm lần lượt của EC, ED, AD, BC: $(IKQN)$.



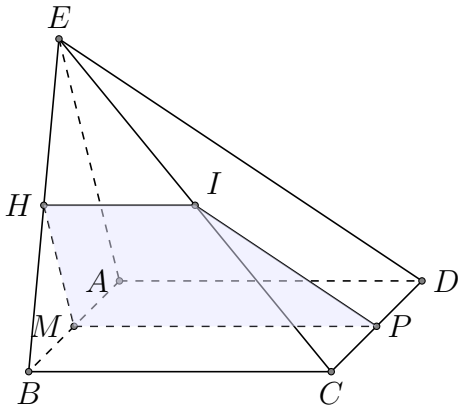
☑ Mặt phẳng qua 4 trung điểm của EB, EA, AD, BC: $(HGQN)$.



☑ Mặt phẳng qua 4 trung điểm của EA, ED, CD, AB: $(GKPM)$.



☑ Mặt phẳng qua 4 trung điểm của EB, EC, CD, AB: $(HIPM)$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-4;-1;3)$, $B(-1;-2;-1)$, $C(3;2;-3)$ và $D(0;-3;-5)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D và tổng khoảng cách từ A, B, C đến (α) lớn nhất, đồng thời ba điểm A, B, C nằm cùng phía so với (α). Trong các điểm sau, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)

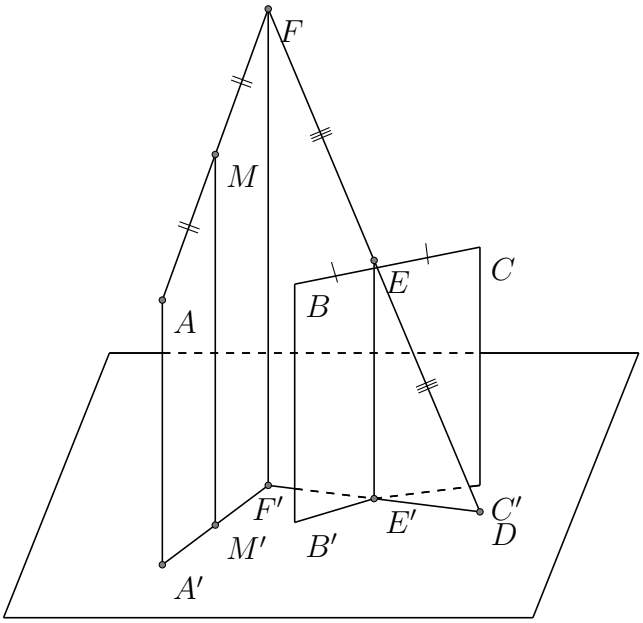
A. $E_1(7;-3;-4)$. **B.** $E_2(2;0;-7)$. **C.** $E_3(-1;-1;-6)$. **D.** $E_4(36;1;-1)$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm BC, F là điểm đối xứng với D qua E và M là trung điểm AF. Ta có $E(1;0;-2)$, $F(2;3;1)$ và $M(-1;1;2)$. Gọi A', B', C', E', F', M' tương ứng là hình chiếu của A, B, C, E, F, M lên mặt phẳng (α).

Ta có $\mathrm{d}(A,(\alpha))+\mathrm{d}(B,(\alpha))+\mathrm{d}(C,(\alpha)) = AA'+BB'+CC' = AA'+2EE' = AA'+FF' = 2MM' \le 2MD$.

Do đó $(\alpha) \perp MD$. Mà $\overrightarrow{MD} = (1;-4;-7)$ nên phương trình $(\alpha): x-4y-7z-47=0$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O, vuông góc với (ABC) sao cho (P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M và N. Khi $OAMN$ có thể tích nhỏ nhất, hãy viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $x+y-2z=0$. **B.** $x+y+2z=0$. **C.** $x-z=0$. **D.** $y-z=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-3;3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (-9;-9;-9)$.

Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$.

Phương trình của đường thẳng AB: $\begin{cases} x=3 \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ và của đường thẳng AC: $\begin{cases} x=3-t \\ y=3 \\ z=t. \end{cases}$

(P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M, N nên $M(3;3-m;m), N(3-n;3;n)$, với $m,n \in [0;3]$
Ta có $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right] = (3n-3m-mn;3m-3n-mn;3m+3n-mn)$.
Do $(OMN) \perp (ABC)$ nên $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3m+3n-3mn = 0 \Leftrightarrow mn = n+m$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right] = (2n-4m;2m-4n;2m+2n)$.
Do $\overrightarrow{OA} = (3;3;0)$ nên $V_{OAMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{1}{6}|6n-12m+6m-12n| = m+n = V$.
Ta có $m+n \geqslant 2\sqrt{mn} = 2\sqrt{m+n} \Rightarrow \sqrt{m+n} \geqslant 2 \Rightarrow V = m+n \geqslant 4$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = n = 2$.
Vậy mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right] = (-4;-4;8)$ và đi qua O nên có phương trình $x+y-2z = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm O, A và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó?

A. $\vec{n}_1 = (1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}_2 = (1;-1;-3)$. **C.** $\vec{n}_3 = (1;-1;5)$. **D.** $\vec{n}_4 = (1;-1;-5)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa AO, $\mathrm{d}(B;(P)) = \sqrt{3}$. Giả sử (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Vì $O \in (P)$ nên $(P)\colon ax+by+cz = 0$. Ta có

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow a+b = 0 \Leftrightarrow a = -b.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(B;(P)) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{|-b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow (-b+2c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)\\ &\Rightarrow b^2-4bc+4c^2 = 3(b^2+b^2+c^2)\\ &\Leftrightarrow 5b^2+4bc-c^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -c\\ b = \dfrac{1}{5}c.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Trường hợp $b = -c$, chọn $c = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1;-1;1)$.
- Trường hợp $b = \dfrac{1}{5}c$, chọn $c = -5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1;-1;-5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2y-z+3 = 0$ và điểm $A(2;0;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với (P), cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\dfrac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Gọi $B(0;b;0), C(0;0;c)$ là giao điểm của (α) với các tia Oy, Oz, trong đó $b, c > 0$.
Khi đó ta có $(\alpha)\colon \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1 = 0$. Mà $(\alpha) \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}\cdot\vec{n}_{(P)} = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{b}-\dfrac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = 2c$. Mặt

khác

$$\mathrm{d}(O;(\alpha))=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow 16\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=9$$
$$\Rightarrow 16\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{c^2}\right)=9 \Leftrightarrow c=2 \Rightarrow b=4.$$

Khi đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 2=\frac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $M(1;8;0)$, $C(0;0;3)$ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho OG nhỏ nhất, với G là trọng tâm tam giác ABC. Biết $G(a;b;c)$, hãy tính $T=a+b+c$.

A. $T=7$. **B.** $T=3$. **C.** $T=12$. **D.** $T=6$.

Lời giải.

Gọi $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$ với m, $n>0$.

Khi đó phương trình của (ABC): $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{3}=1$.

Vì $M\in(ABC)$ nên $\frac{1}{m}+\frac{8}{n}=1$. Kết hợp với điều kiện $m>0$, $n>0$ suy ra $m>1$ và $n>8$.

Cũng từ trên ta có $m=\frac{n}{n-8}$.

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ $\left(\frac{m}{3};\frac{n}{3};1\right)$.

$$OG^2=\left|\overrightarrow{OG}\right|^2=\left(\frac{m}{3}\right)^2+\left(\frac{n}{3}\right)^2+1^2=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{n}{n-8}\right)^2+n^2\right]+1.$$

Xét hàm số $f(n)=\left(\frac{n}{n-8}\right)^2+n^2$ với $n>8$.

Ta có $f'(n)=2\cdot\frac{n}{n-8}\cdot\frac{-8}{(n-8)^2}+2n=2n\left[\frac{-8}{(n-8)^3}+1\right]$.

$$f'(n)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=10.$$

Bảng biến thiên

n	8		10		$+\infty$
$f'(n)$		$-$	0	$+$	
$f(n)$	$+\infty$	↘	125	↗	$+\infty$

OG đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $n=10$; lúc đó $m=5$ và $G\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};1\right)$.

Vậy $T=a+b+c=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;6;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA=OB=OC$.

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ với $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Khi đó phương trình $(\alpha)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c| \Leftrightarrow \begin{cases}|a|=|b|\\|b|=|c|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}b=c\\b=-c\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=c\\a=b=-c\\a=-b=-c\\a=-b=c\end{array}\right.$.

☑ Với $a=b=c$ ta có $(\alpha)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1 \Leftrightarrow x+y+z-a=0$. Vì (α) đi qua $M(1;6;4)$ nên $1+6+4-a=0 \Rightarrow a=11$.

Vậy $(\alpha)\colon x+y+z-11=0$.

Tương tự ba trường hợp còn lại.

☑ Với $a=b=-c$ ta có $(\alpha)\colon x+y-z-3=0$

☑ Với $a=-b=-c$ ta có $(\alpha)\colon x-y-z+9=0$

☑ Với $a=-b=c$ ta có $(\alpha)\colon x-y+z+1=0$

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0)$, $B(2;0;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y-z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $11(a+b+c)=14$. **B**. $11(a+b+c)=15$. **C**. $11(a+b+c)=16$. **D**. $11(a+b+c)=17$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}M\in(P)\\MA=MB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+2b-c-1=0\\(a-2)^2+(b-2)^2+c^2=(a-2)^2+b^2+(c+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3c+1\\b=-c\end{cases}$.

Do đó $M(3c+1;-c;c)$, $\overrightarrow{MA}=(1-3c;2+c;-c)$ và $\overrightarrow{MB}=(1-3c;c;-2-c)$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\cos\widehat{AMB}&=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{MA\cdot MB}=\frac{(1-3c)^2+c(2+c)+c(2+c)}{(1-3c)^2+c^2+(2+c)^2}\\&=\frac{11c^2-2c+1}{11c^2-2c+5}=1-\frac{4}{11c^2-2c+5}\\&=1-\frac{4}{11\left(c-\dfrac{1}{11}\right)^2+\dfrac{54}{11}}\geq\frac{5}{27}.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{AMB}\leq\arccos\dfrac{5}{27}$. Dấu bằng xảy ra tại $c=\dfrac{1}{11}\Rightarrow M\left(\dfrac{14}{11};-\dfrac{1}{11};\dfrac{1}{11}\right)$.

Vậy $11(a+b+c)=14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$, $(A,\ B,\ C,\ D\in\mathbb{Z})$ và có ƯCLN$(|A|,|B|,|C|,|D|)=1$. Để mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(1;2;-1)$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất thì đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $A^2+B^2+C^2+D^2=46$. **B**. $A^2+B^2+C^2+D^2=24$.
C. $A^2+B^2+C^2+D^2=64$. **D**. $A^2+B^2+C^2+D^2=42$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(1;2;-1)$ suy ra $A+2B-C+D=0$ (1). Khi đó

$$d(O,(P))=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\le\frac{\sqrt{[1^2+2^2+(-1)^2](A^2+B^2+C^2)}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}A+2B-C+D=0\\ \dfrac{A}{1}=\dfrac{B}{2}=\dfrac{C}{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=-3B\\ B=2A=-2C\\ A,B,C\in\mathbb{Z}\end{cases}$. Từ đó tìm được $A=-C=1, B=2, D=-6$ hoặc $A=-C=-1, B=-2, D=6$.

Do vậy $A^2+B^2+C^2+D^2=42$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. $a+b+c=3$. **B**. $a+b+c=2$. **C**. $a+b+c=-2$. **D**. $a+b+c=-3$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}$, hay $\overrightarrow{OI}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{5}$, suy ra $I(2;1;1)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+3MC^2&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2\\&=5MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2\\&=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2.\end{aligned}$$

Do đó $MA^2+MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P). Đường thẳng đi qua I vuông góc với (P) có phương trình $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$, do đó tọa độ của M cần tìm thỏa mãn

$$\begin{cases}\dfrac{a-2}{3}=\dfrac{b-1}{-3}=\dfrac{c-1}{-2}\\ 3a-3b-2c-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{2}\\ b=-\dfrac{1}{2}\\ c=0.\end{cases}$$

Vậy $a+b+c=\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}+0=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y+mz-1=0$ với m là tham số. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $-6<m<-2$. **B**. $-2<m<2$. **C**. $2<m<6$. **D**. Không có m.

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và $M(4;6;3)$. Qua M kẻ các tia Mx, My, Mz đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $H(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.

A. 21. **B.** 14. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải.

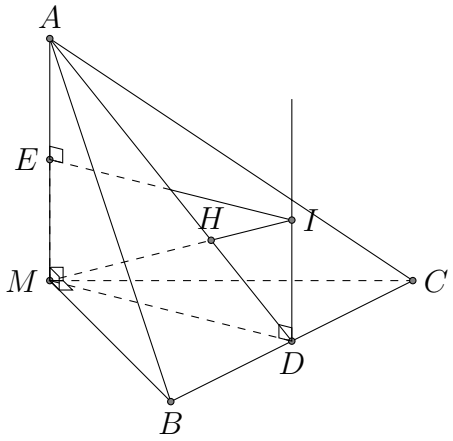
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC, AM.

Qua D dựng đường thẳng song song với AM, cắt mặt phẳng trung trực của AM tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp $MABC$.

Gọi H là giao điểm của AD và MI.



Ta có $\dfrac{MH}{HI}=\dfrac{AM}{ID}=2$ (vì $AM \parallel DI$).

Suy ra $MH=2HI \Rightarrow \overrightarrow{MH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}$. (1)

Vì M, I cố định nên H là điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn đi qua.

Ta có $H(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{MH}=(a-4;b-6;c-3)$, $\overrightarrow{MI}=(-3;-4;0)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-4=-2 \\ b-6=-\dfrac{8}{3} \\ c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{10}{3} \\ c=3 \end{cases}.$$

Vậy $a+3b+c=2+10+3=15$.

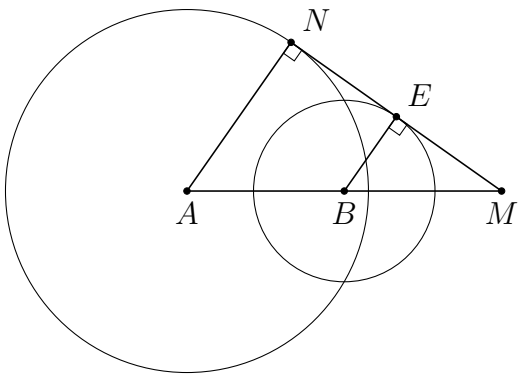
Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\dfrac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1), (S_2) đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C, D?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow AB=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<3$ nên B nằm bên trong mặt cầu (S_1). Một mặt phẳng qua A và B cắt hai mặt cầu theo hai đường tròn giao tuyến như hình bên.



Kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, tiếp tuyến này sẽ cắt đường thẳng AB tại M. Gọi N, E lần lượt là tiếp điểm với hai đường tròn như hình vẽ.

Tam giác ANM đồng dạng tam giác BEM nên $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AN}{BE}=2$. Suy ra $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow M(2;1;2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Khi đó (P) sẽ luôn đi qua M.
Gọi $\vec{n}=(m;n;p)$ với $m^2+n^2+p^2\neq 0$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Phương trình $(P)\colon m(x-2)+n(y-1)+p(z-2)=0$.
Ta có:

- ☑ $\overrightarrow{CD}=(4;2;-4)$.
- ☑ $CD\parallel(P)\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow 4m+2n-4p=0\Rightarrow n=2p-2m$.
- ☑ $\mathrm{d}(A,(P))=3\Leftrightarrow\dfrac{|-m+n-5p|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=3\Leftrightarrow|-3m-3p|=3\sqrt{m^2+(2p-2m)^2+p^2}$
$\Leftrightarrow 4m^2-10mp+4p^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\frac{m}{p}=\frac{1}{2}\\&\frac{m}{p}=2.\end{aligned}\right.$
- ☑ Trường hợp $\dfrac{m}{p}=\dfrac{1}{2}$: chọn $m=1$, $p=2\Rightarrow n=2$.
Khi đó $(P)\colon x+2y+2z-8=0$ (nhận).
- ☑ Trường hợp $\dfrac{m}{p}=2$: chọn $m=2$, $p=1\Rightarrow n=-2$.
Khi đó $(P)\colon 2x-2y+z-4=0$ (loại vì chứa C, D).

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(4;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(2;0;2)$. **B.** $(2;2;0)$. **C.** $(2;1;1)$. **D.** $(0;2;2)$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.
Mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Điểm $M(4;1;1)\in(P)$ nên $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.
Ta có $OA+OB+OC=a+b+c$.
Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-xcốp-ki, ta được

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}\right)^2 &\leq \left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\\ \Leftrightarrow 16 &\leq a+b+c.\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{4}}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=4\\c=4.\end{cases}$
Khi đó $(P)\colon \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1$.

- ☑ Thay tọa độ $(2;0;2)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{2}{8}+\dfrac{0}{4}+\dfrac{2}{4}\neq 1$.
- ☑ Thay tọa độ $(2;2;0)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{2}{8}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{0}{4}\neq 1$.
- ☑ Thay tọa độ $(2;1;1)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{2}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\neq 1$.
- ☑ Thay tọa độ $(0;2;2)$ vào phương trình (P) ta được $\dfrac{0}{8}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}=1$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm có tọa độ $(0;2;2)$.

Chọn đáp án D □

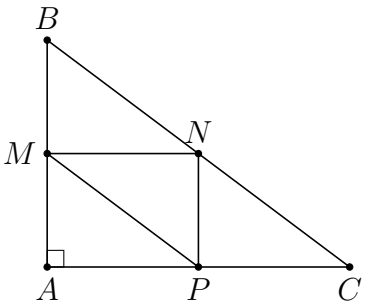
Câu 79. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(5;4;4)$, $C\left(\frac{11}{3};\frac{22}{3};-\frac{16}{3}\right)$. Gọi (S_1), (S_2), (S_3) là ba mặt cầu có tâm lần lượt là A, B, C và có cùng bán kính là $\frac{13}{5}$. Xác định số tiếp diện chung của ba mặt cầu trên.

A. 6. **B**. 7. **C**. 8. **D**. 9.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2+(4-0)^2} = 6.\\ BC &= \sqrt{\left(\frac{11}{3}-5\right)^2+\left(\frac{22}{3}-4\right)^2+\left(-\frac{16}{3}-4\right)^2} = 10.\\ CA &= \sqrt{\left(1-\frac{11}{3}\right)^2+\left(2-\frac{22}{3}\right)^2+\left(0+\frac{16}{3}\right)^2} = 8. \end{aligned}$$



Sử dụng định lý Pi-ta-go, ta có $\triangle ABC$ vuông tại A.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A,MN) &= \mathrm{d}(C,MN) = \mathrm{d}(B,MN) = \frac{1}{2}AB = 3.\\ \mathrm{d}(A,NP) &= \mathrm{d}(C,NP) = \mathrm{d}(B,NP) = \frac{1}{2}AC = 4.\\ \mathrm{d}(A,MP) &= \mathrm{d}(C,MP) = \mathrm{d}(B,MP) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,BC) = \frac{AB\cdot AC}{2BC} = \frac{6\cdot 8}{20} = 2,4. \end{aligned}$$

Một mặt phẳng chia không gian thành hai phần. Do đó, ta có các trường hợp sau:

TH1: Cả ba mặt cầu nằm về cùng một phía so với tiếp diện chung. Mặt khác, ba mặt cầu có bán kính bằng nhau nên khi đó tiếp diện là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và cách (ABC) một khoảng bằng bán kính. Do đó, ta nhận được hai tiếp diện trong trường hợp này.

TH2: Nếu (S_1) nằm khác phía (S_2), (S_3) so với tiếp diện (T).

Vì $\mathrm{d}(B,(T)) = \mathrm{d}(A,(T))$ và A, B nằm khác phía so với (T) nên (T) đi qua trung điểm M của AB. Tương tự (T) cũng đi qua trung điểm P của AC.

Tuy nhiên, $2,4 = \mathrm{d}(A,MP) \geq \mathrm{d}(A,(T)) = \frac{13}{5}$ (vô lí). Do đó trường hợp này không xảy ra.

TH3: Nếu (S_2) nằm khác phía (S_1), (S_3) so với tiếp diện (T).

Lập luận như trên, (T) chứa đường thẳng MN. Ta có $\mathrm{d}(A,MN) = \mathrm{d}(C,MN) = \mathrm{d}(B,MN) = 3 > \frac{13}{5}$ nên trong trường hợp này có hai tiếp diện.

TH4: Nếu (S_3) nằm khác phía (S_1), (S_2) so với tiếp diện (T). Tương tự TH3, ta có hai tiếp diện trong trường hợp này.

Chọn đáp án A □

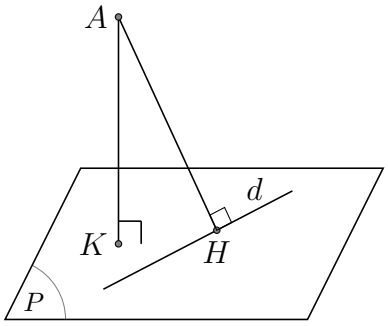
Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -2-t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất có phương trình là

A. $x+2y+4z+7=0$. **B**. $4x-7y+z-2=0$.

C. $4x-5y+3z+2=0$. **D**. $x+y+3z+5=0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).



Ta có $d(A;\ (P)) = AK \leqslant AH$ (không đổi)

$\Rightarrow d(A;\ (P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.

Vì $H \in d$ nên $H(1+2t;t;-2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (2t-1;t-1;-3-t)$.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;-1)$.

Vì H là hình chiếu của A trên d nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(2t-1)+1(t-1)+(3+t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy $H = (1;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1;-1;-3)$.

Mặt phẳng (P) qua H và vuông góc với AH nên (P) có phương trình $x+y+3z+5=0$.

Chọn đáp án D □

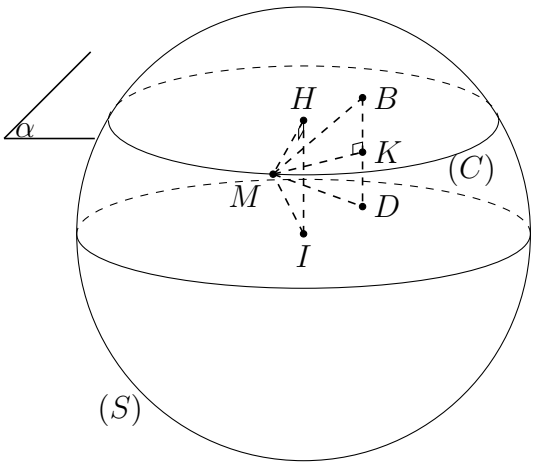
Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ để $\left|MA-2MB\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính r. Tính r.

A. $\sqrt{7}$. **B**. $\sqrt{6}$. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Trong không gian $Oxyz$, ta tìm tọa độ điểm D sao cho khi M di chuyển trên (S) ta luôn có $AM = 2DM$. Nhận thấy $IA = 4\sqrt{2} = 2R$, nên trên tia IA lấy điểm D sao cho $ID = \dfrac{1}{2}R$, suy ra $\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow D(1;1;3)$.



Khi đó, $ID.IA = R^2 = IM^2$

$\Rightarrow \triangle IAM \backsim \triangle IMD \Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{IM}{ID} = 2$.

Suy ra, $\left|MA-2MB\right| = 2\left|MD-MB\right| \geqslant 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $MB = MD$, suy ra M nằm trên mặt phẳng trung trực của BD.

Mặt phẳng (α) đi qua $K(1;1;2)$ là trung điểm của BD và nhận $\overrightarrow{BD} = (0;0;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là $(\alpha)\colon z-2=0$.

Khi đó, bán kính của đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - \mathrm{d}^2(I,(\alpha))} = \sqrt{7}$.

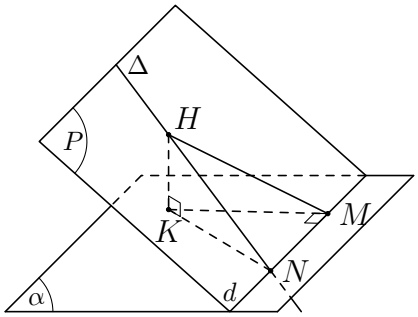
Chọn đáp án A □

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+2z-5=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với mặt phẳng (α) một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+d=0$ (với $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ và $a,b,c,d \in [-5;5]$). Khi đó tích $abcd$ bằng bao nhiêu?

A. 120. **B**. 60. **C**. -60. **D**. -120.

Lời giải.

Ta có giao điểm của Δ và (α) là điểm $N(7;13;12)$. Lấy điểm $H \in \Delta$ $(H \not\equiv N)$. Gọi d là giao tuyến của (P) và (α); M, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên d và (α). Ta có



- ☑ $d \perp HM, d \perp HK \Rightarrow d \perp KM \Rightarrow ((P),(\alpha)) = \widehat{HMK}$.
- ☑ $\tan((P),(\alpha)) = \tan\widehat{HMK} = \dfrac{HK}{KM} \geq \dfrac{HK}{KN} = \tan(\Delta,(\alpha))$.

Do đó $((P),(\alpha))$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $d \perp \Delta$ tại N. Khi đó

- ☑ Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;2;2)$.
- ☑ Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = (1;-2;2)$.

Đường thẳng $d \subset (\alpha)$ và $d \perp \Delta$ nên d nhận $[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_\alpha}] = (8;0;-4)$ làm một véc-tơ chỉ phương. Hay d nhận $\overrightarrow{u_d} = (2;0;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) chứa Δ và d nên nhận $[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_d}] = (-2;5;-4)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Mà $N \in (P)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là

$$-2(x-7)+5(y-13)-4(z-12)=0 \Leftrightarrow 2x-5y+4z+3=0.$$

Suy ra $a=2$, $b=-5$, $c=4$, $d=3$ hay $abcd=-120$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+2018=0$, $(Q)\colon x+my+(m-1)z+2017=0$ (m là tham số thực). Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm M nào dưới đây nằm trong (Q)?

A. $M(-2017;1;1)$. **B.** $M(0;0;2017)$. **C.** $M(0;-2017;0)$. **D.** $M(2017;1;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_1=(1;2;-2)$, $\vec{n}_2=(1;m;m-1)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng, ta có $\cos\alpha = \dfrac{|1|}{\sqrt{2}\sqrt{m^2-m+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}} \leq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Khi đó $\alpha \geq \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}, (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$, nên α nhỏ nhất khi $m=\dfrac{1}{2}$.

Lúc đó $(Q)\colon 2x+y-z+2\cdot 2017=0$. Suy ra điểm $M(-2017;1;1)$ thuộc mặt phẳng (Q).

Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, BC=2, AA'=3$. Mặt phẳng (P) thay đổi và luôn đi qua C', mặt phẳng (P) cắt các tia AB, AD, AA' lần lượt tại E, F, G (khác A). Tính tổng $T=AE+AF+AG$ sao cho thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất.

A. 18. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải.

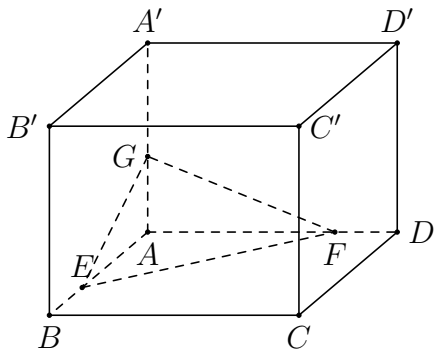
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$A \equiv O(0;0;0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3)$.

Khi đó $E(AE;0;0), F(0;AF,0), G(0;0;AG), C'(1;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{AE}+\dfrac{y}{AF}+\dfrac{z}{AG}=1$.

Vì $C'(1;2;3) \in (P) \Rightarrow \dfrac{1}{AE}+\dfrac{2}{AF}+\dfrac{3}{AG}=1$.



Thể tích khối đa diện $AEFG$ là

$$V_{AEFG}=\frac{1}{6}AE\cdot AF\cdot AG=\frac{1}{\frac{1}{AE}\cdot\frac{2}{AF}\cdot\frac{3}{AG}}\geq\frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{AE}+\frac{2}{AF}+\frac{3}{AG}\right)^3}{27}}=27.$$

Do dó thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất bằng 27 khi và chỉ khi

$$\frac{1}{AE}=\frac{2}{AF}=\frac{3}{AG}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}AE=3\\AF=6\\AG=9\end{cases}.\text{ Suy ra } T=AE+AF+AG=3+6+9=18.$$

Chọn đáp án A □

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với a,b,c là các số thực dương thay đổi sao cho $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $F=a^2+b^2+c^2$ sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là lớn nhất.

A. $F=\frac{51}{5}$. **B.** $F=\frac{51}{4}$. **C.** $F=\frac{49}{4}$. **D.** $F=\frac{49}{5}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Nên $\mathrm{d}(O;(ABC))=\dfrac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1^2}{a^2}+\frac{2^2}{4b^2}+\frac{4^2}{16c^2}\geq\frac{(1+2+4)^2}{a^2+4b^2+16c^2}=\frac{49}{49}=1$ (1) (vì $a^2+4b^2+16c^2=49$).

Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi dấu đẳng thức của (1) xảy ra hay

$$\begin{cases}\frac{a^2}{1}=\frac{4b^2}{2}=\frac{16c^2}{4}\\a^2+4b^2+16c^2=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c^2=\frac{7}{4}\\b^2=\frac{7}{2}\\a^2=7.\end{cases}$$

Vậy $F=a^2+b^2+c^2=7+\frac{7}{2}+\frac{7}{4}=\frac{49}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d\colon\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy một góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$, $\vec{n}\neq\vec{0}$ là VTPT của (P) và α là góc tạo bởi (P) và trục Oy, α lớn nhất khi $\sin\alpha$ lớn nhất.

Từ d có VTCP $\vec{u}_d=(1;-1;-2)$.

Ta có $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}_d$ nên $\vec{n}=(b+2c;b;c)$.

Nên $\sin\alpha = \left|\cos\left(\vec{n}, \vec{j}\right)\right| = \dfrac{|b|}{\sqrt{2b^2+5c^2+4bc}}$.

TH1: Nếu $b=0$ thì $\sin\alpha = 0$.

TH2: Nếu $b \neq 0$ thì $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}c}{b}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{6}{5}}}$.

Khi đó, $\sin\alpha$ lớn nhất khi $\dfrac{\sqrt{5}c}{b}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{b}=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow$ chọn $b=5$, $c=-2$.

Vậy phương trình (P) đi qua $A(1;-2;0) \in d$ và có VTPT $\vec{n}=(1;5;-2)$ có dạng

$$x+5y-2z+9=0.$$

Do đó, ta có $N \in (P)$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2) và (S_3)

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là $ax+by+cz+d=0$ (Điều kiện: $a^2+b^2+c^2>0$).

Khi đó ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} \mathrm{d}(A,(P))=2 \\ \mathrm{d}(B,(P))=1 \\ \mathrm{d}(C,(P))=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \\ \dfrac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \\ \dfrac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

Suy ra

$$|3a-b+c+d|=|-a-b+c+d| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b+c+d=-a-b+c+d \\ 3a-b+c+d=a+b-c-d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a-b+c+d=0. \end{array}\right.$$

☑ Với $a=0$,

$$\begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d|=2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ \left[\begin{array}{l} 4b-c-d=0 \\ c+d=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c+d=0 \Rightarrow c=d=0, b\neq 0 \\ c+d=4b, c=\pm 2\sqrt{2}b. \end{array}\right.$$

Ta có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

☑ Với $a-b+c+d=0$,

$$\begin{cases} |3b|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=4|a| \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=\dfrac{4}{3}|a| \\ |c|=\dfrac{\sqrt{11}}{3}|a|. \end{cases}$$

Ta có 4 mặt phẳng thỏa mãn.

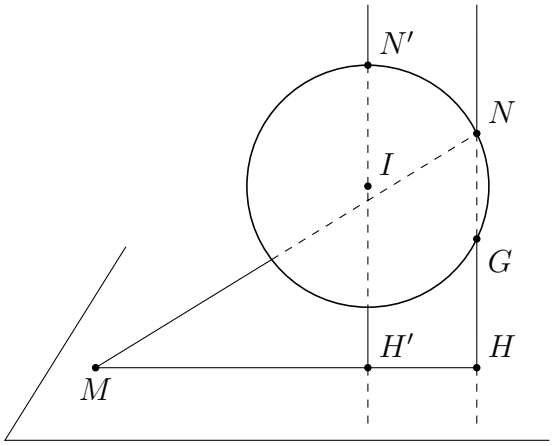
Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Lời giải.



Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $r=1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45°. Vì $\mathrm{d}(I,(P))=2>1=r$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH}=45^\circ$ và $MN=\dfrac{NH}{\sin 45^\circ}=NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N\equiv N'$ và $H\equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P), H' là hình chiếu của I mặt phẳng (P).

Lúc đó $NH_{\max}=N'H'=r+d(I;(P))=3$ và $MN_{\max}=\dfrac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ}=3\sqrt{2}$.

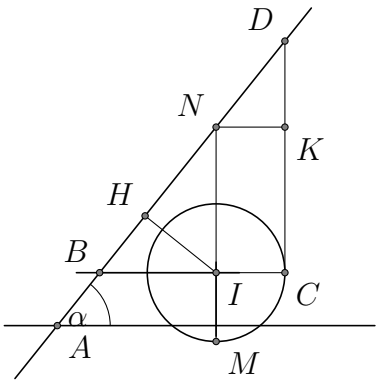
Chọn đáp án C □

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+3=0$, $(Q)\colon x+2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. 14. **B.** $3+5\sqrt{3}$. **C.** 28. **D.** $9+5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=5$, $d(I,(P))=3\sqrt{3}$, $\mathrm{d}(I,(Q))=\dfrac{14}{3}$.



Gọi α là góc giữa (P) và (Q).

Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Do đó $DK>NK=MI\Rightarrow CD\geq MN$.

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{IH}{IB}\Rightarrow IB=\dfrac{9}{\sqrt{2}}\Rightarrow BC=\dfrac{9+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Mà $\tan\alpha=\dfrac{CD}{CB}\Rightarrow CD=BC\tan\alpha=9+5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của độ dài đoạn MN bằng $9+5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là những số thực dương sao cho $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính $F=a^2+b^2+c^2$ sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là lớn nhất.

A. $F=\dfrac{51}{5}$. **B.** $F=\dfrac{51}{4}$. **C.** $F=\dfrac{49}{5}$. **D.** $F=\dfrac{49}{4}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$ và $\mathrm{d}[O,(ABC)]=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)}}=d$.

Xét $\vec{u}=(a;2b;4c)$; $\vec{v}=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq\vec{u}^2\cdot\vec{v}^2\\
\Rightarrow\ &\left(a\cdot\frac{1}{a}+2b\cdot\frac{1}{b}+4c\cdot\frac{1}{c}\right)^2\leq\left(a^2+4b^2+16c^2\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\\
\Rightarrow\ &49\leq 49\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 1\\
\Rightarrow\ &\mathrm{d}[O,(ABC)]\leq 1.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{a}{\dfrac{1}{a}}=\dfrac{2b}{\dfrac{1}{b}}=\dfrac{4c}{\dfrac{1}{c}}\\ a^2+4b^2+16c^2=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=2b^2=4c^2\\ a^2+4b^2+16c^2=49\end{cases}$

$\Rightarrow 28c^2=49\Leftrightarrow c^2=\dfrac{7}{4}\Rightarrow F=7c^2=\dfrac{49}{4}$.

$\Rightarrow\max\mathrm{d}[O,(ABC)]=1$, khi đó $F=\dfrac{49}{4}$.

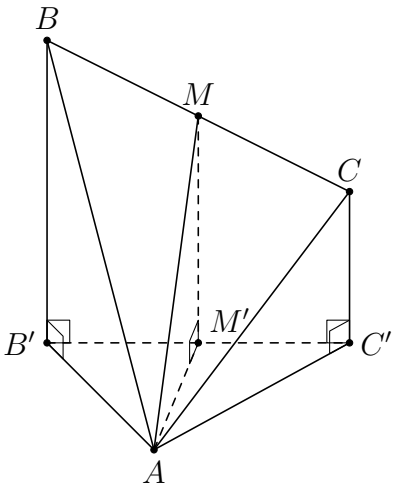
Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến mặt phẳng (P) lớn nhất, biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(2;-2;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;2)$. **C.** $\vec{n}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{n}=(1;0;-2)$.

Lời giải.

Lấy M là trung điểm của đoạn BC, suy ra $M(2;0;-1)$.
Gọi BB', CC', MM' lần lượt là khoảng cách từ B, C, M đến mặt phẳng (P), từ đó suy ra $BB'+CC'=2MM'$.
Xét tam giác vuông AMM', ta có $MM'\le AM$, từ đó suy ra để tổng khoảng cách từ B và C đến mặt phẳng (P) thì MM' phải lớn nhất, điều này có nghĩa là M' trùng với A hay $MA\perp(P)$. Từ đó suy ra véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{AM}=(1;0;-2)$.



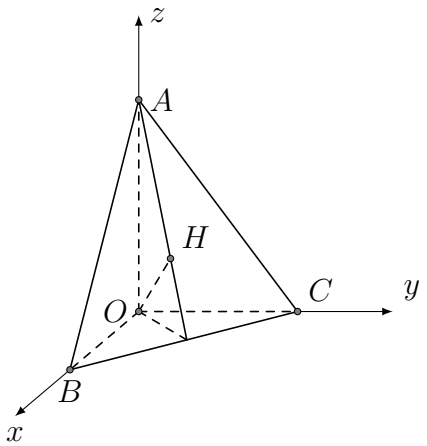
Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\dfrac{51}{5}$. **B.** $S=\dfrac{49}{4}$. **C.** $S=\dfrac{49}{5}$. **D.** $S=\dfrac{51}{4}$.

Lời giải.

Dựng $OH\perp(ABC);(H\in(ABC))$ vì $OABC$ là tứ diện vuông nên ta có
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{4b^2}+\frac{4^2}{16c^2}.$$
Áp dụng bất đẳng thức Schwarz
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{4b^2}+\frac{4^2}{16c^2}\ge\frac{(1+2+4)^2}{a^2+4b^2+16c^2}=1\Rightarrow OH\le 1.$$
Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất là 1 khi
$$\frac{1}{a^2}=\frac{2}{4b^2}=\frac{4}{16c^2}=\frac{1+2+4}{a^2+4b^2+16c^2}=\frac{1}{7}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=7\\ b^2=\dfrac{7}{2}\\ c^2=\dfrac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow S=\frac{49}{4}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha):ax+by-z+c=0$. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=8$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=3\sqrt{3}$.
Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến (C) của (S) và (α).

Đặt $h = \mathrm{d}\,(I,(\alpha))$, ta có $R^2 = r^2 + h^2$.

Thể tích khối nói có đỉnh I và đáy (C) là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{27-r^2}$.

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{27-t}, t \in [0;27]$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{27-t} - \dfrac{t}{2\sqrt{27-t}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{27-t} = \dfrac{t}{2\sqrt{27-t}} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0;27] \\ 3t = 54 \end{cases} \Leftrightarrow t = 18.$

Khi đó, ta có $f(0) = 0, f\,(27) = 0, f\,(18) = 54 \Leftrightarrow \max f(t) = f(18) = 54$.

Suy ra giá trị lớn nhất của V đạt được khi $r^2 = 18 \Leftrightarrow h^2 = 9 \Leftrightarrow h = 3$.

Khi đó ta có $\mathrm{d}\,(I,(\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|a-2b-3+c|}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = 3.$ (1)

Mặt khác $A, B \in (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} 4+c=0 \\ 2a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-4 \\ a=2. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{|5+2b|}{\sqrt{5+b^2}} = 3 \Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2.$

Vậy ta có $a = b = 2, c = -4 \Rightarrow P = a - b + c = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b$, $a \geq c$. Giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{a}{r}$ là

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_{O.ABC} = \dfrac{abc}{5}$.

Mặt khác $V_{O.ABC} = \dfrac{1}{3}r(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC})$.

Suy ra ta có $\dfrac{a}{r} = 2\dfrac{S_{\triangle ABC}}{bc} + \dfrac{ab+ac+bc}{bc}$.

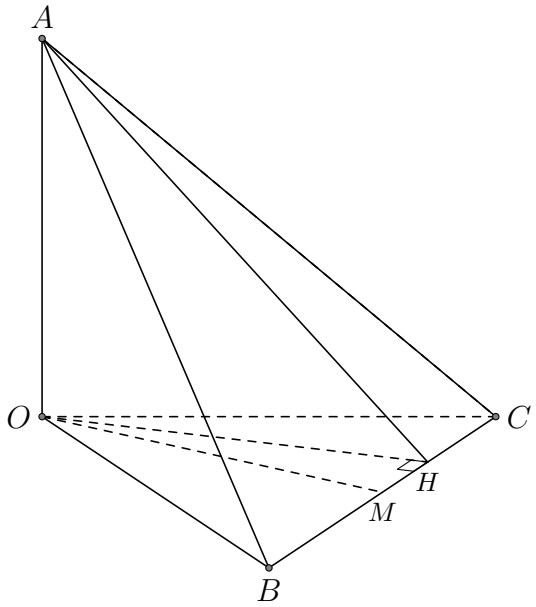
Do $a \geq b$, $a \geq c \Rightarrow \dfrac{ab+bc+bc}{bc} \geq 3$ (1).

Dấu bằng của (1) xảy ra khi $a = b = c$.

Xét $2\dfrac{S_{\triangle ABC}}{bc} = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OBC}} = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$ (với α là góc giữa (ABC) và (OBC)).

Bài toán trở thành tìm $\min \dfrac{1}{cos\alpha}$, hay tìm $\min \sqrt{1+tan^2\alpha}$.

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{a}{OH} \geq \dfrac{a}{OM}$, với H là hình chiếu vuông góc của O lên BC còn M là trung điểm của BC.



Mặt khác.

$$\frac{a}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{b^2+c^2}} = \sqrt{2} = \tan\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{3}.$$

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \min \dfrac{a}{r} = 3+\sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c$.

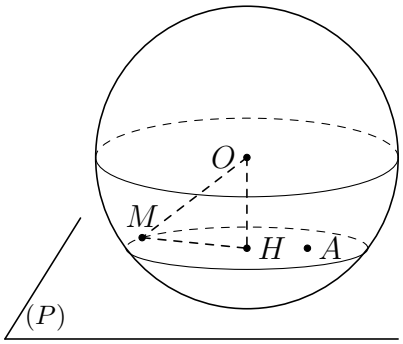
Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2 = 9$ và điểm $A(0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Phương trình của (P) là

A. $y-2z+5=0$. **B**. $x-y+2z-5=0$. **C**. $-y+2z+5=0$. **D**. $y-2z-5=0$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=0$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.



Ta có $OA=\sqrt{5}<R$, do đó điểm A nằm bên trong mặt cầu (S).

Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu theo một hình tròn có bán kính r, có chu vi là $C_{\text{đường tròn}}=2\pi r$.

Ta có chu vi đường tròn nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất.

Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P), ta có

$$MH^2=OM^2-OH^2 \Leftrightarrow r^2=R^2-OH^2$$
$$\Leftrightarrow r^2=9-\mathrm{d}\left[O,(P)\right].$$

Ta có r nhỏ nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}\left[O,(P)\right]$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) qua $A(0;-1;2)$ nhận $\overrightarrow{OA}$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra $(P)\colon y-2z+5=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. -7. **B**. -9. **C**. 9. **D**. 7.

Lời giải.

Ta có Vì (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$.

(P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases}1+b_1+c_1+d_1=0\\-2b_1+2c_1+d_1=0\end{cases}\Rightarrow 1+3b_1-c_1=0.$ (1)

Vì (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_1\left(-d_1;0;0\right), B_1\left(0;\dfrac{-d_1}{b_1};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_1|=\dfrac{|d_1|}{|b_1|}\Rightarrow |b_1|=1$.

Chọn $b_1=1$, thay vào (1) ta được $c_1=4$.

Vì (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$ và (Q) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$.

Nên ta có $\begin{cases}1+b_2+c_2+d_2=0\\-2b_2+2c_2+d_2=0\end{cases}\Rightarrow 1+3b_2-c_2=0.$ (2)

Vì (Q) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại $A_2\left(-d_2;0;0\right), B_2\left(0;-\dfrac{d_2}{b_2};0\right)$.

Vì hai điểm cách đều O nên ta có $|d_2|=\dfrac{|d_2|}{|b_2|}\Rightarrow |b_2|=1$.

Vì $b_1\neq b_2$ nên ta chọn $b_2=-1$, thay vào (2) ta được $c_2=-2$.

Vậy $b_1b_2+c_1c_2=-9$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A. 81π. **B.** $\dfrac{243\pi}{2}$. **C.** 243π. **D.** $\dfrac{81\pi}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C.

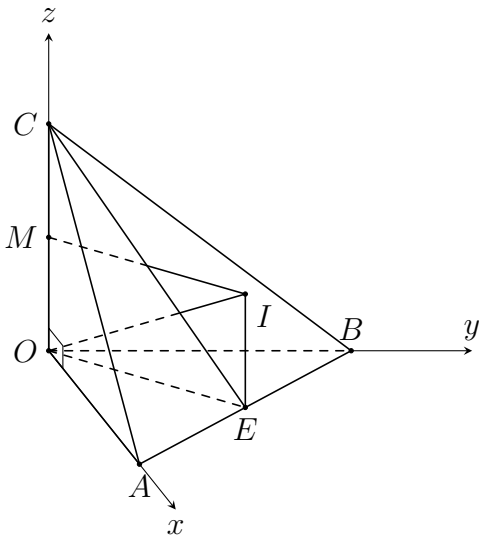
Vì tứ diện $OABC$ đôi một vuông góc tại O và H là trực tâm tam giác ABC nên $OH \perp (ABC)$.

Do đó $\overrightarrow{OH} = (1;2;-2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (α) và H thuộc (α).

Phương trình mặt phẳng

$(\alpha)\colon 1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)-2\cdot(z+2)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-2z-9=0$.



Mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-2z-9=0$ cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(9;0;0)$, $B\left(0;\dfrac{9}{2};0\right)$, $C\left(0;0;-\dfrac{9}{2}\right)$.

$\Rightarrow OA=9, OB=\dfrac{9}{2}, OC=\dfrac{9}{2}$.

Gọi E, M lần lượt là trung điểm AB, OC. Khi đó, E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

Dựng hình chữ nhật $OEIM$. Ta được $IA=IB=IC=IO$ hay IO là bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Khi đó

$$\begin{aligned} R &= IO=\sqrt{IN^2+IM^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{OC}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2} \\ &= \frac{9\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng $S_c=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{243\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với Oy, Oz.

Ta có $(ABC)\colon \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Điểm $M(1;1;1)\in(ABC)\Rightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{bc}}\Rightarrow bc\geq 16$.

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4(b^2+c^2)}\geq\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+8bc}\geq\dfrac{1}{2}\sqrt{16^2+8\cdot 16}=4\sqrt{6}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}\\ b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\ c=4.\end{cases}$

Vậy $\min S_{\triangle ABC}=4\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2y-z=0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $4\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng với A qua hai mặt phẳng (P) và (Oxy).

Khi đó, ta tìm được $M(1;0;5)$, $N(1;4;-3)$.

$\overrightarrow{MN}=(0;4;-8)\Rightarrow MN=4\sqrt{5}$.

Ta có (P), (Oxy) lần lượt là mặt phẳng trung trực của AM, AN.

Suy ra $BA=BM$, $CA=CN$.

Ta có $AB+BC+CA=MB+BC+CN\geq MN$

Dấu "=" xảy ra khi bốn điểm M, B, C, N thẳng hàng hay MN lần lượt cắt (P), (Oxy) tại B và C.

Vậy chu vi tam giác ABC nhỏ nhất là $4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Cho x, y, z, a, b, c là ba số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $\sqrt{3}+1$. **C.** $4-2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Lời giải.

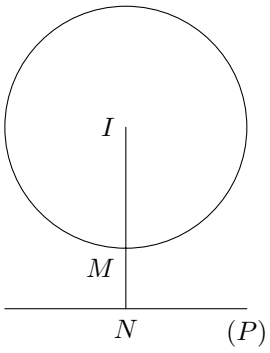
Gọi $M(x;y;z)$, $N(a;b;c)$. Khi đó M thuộc mặt cầu tâm $I(-1;-1;2)$ bán kính $R=1$ và N thuộc mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$.

Suy ra $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=MN^2$. (1)

Ta có $MN=IN-R$, nên MN nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên (P).

Mà $IN=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-1+2-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$.

Suy ra $P_{\min}=(IN-R)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.



Chọn đáp án C □

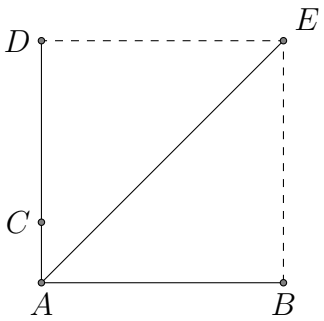
Câu 101. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;1)$, $B(4;-3;1)$ và $C(1;1;2)$. Đường phân giác trong của góc A có phương trình là

A. $\begin{cases}x=4+3t\\ y=-3-4t.\\ z=6+5t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+4t.\\ z=1+5t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=4+3t\\ y=-3+4t.\\ z=6+5t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1-4t.\\ z=1-5t\end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (3;-4;0),\ \overrightarrow{AC} = (0;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$



Đặt $\vec{u} = (0;0;5)$. Ta có $\vec{u}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ và $|\vec{u}| = 5 = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.
Gọi E là điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} = (3;-4;5)$$

thì AE chính là đường phân giác trong của góc A của $\triangle ABC$. Vậy phương trình của đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-4t \\ z = 1+5t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 4+3t \\ y = -3-4t \\ z = 6+5t. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 102. Cho điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z=0$. Xét điểm M thay đổi trên (α), giá trị lớn nhất của MA^2-2MB^2 bằng

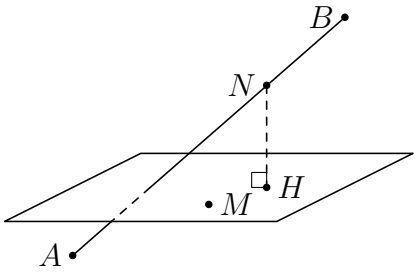
A. 398. **B**. 379. **C**. 397. **D**. 489.

Lời giải.

Xét N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} = 0$ thế thì

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

hay $N(13;-11;19)$.



Ta có

$$\begin{aligned} MA^2-2MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)^2 \\ &= -\overrightarrow{MN}^2 + \overrightarrow{NA}^2 - 2\overrightarrow{NB}^2 + 2\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}\right) \\ &= -MN^2 + NA^2 - 2NB^2 \ (\text{do } \overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}=0) \\ &\le -HN^2 + NA^2 - 2NB^2 \ (H \text{ là hình chiếu của } N \text{ lên } (\alpha)) \\ &= -\mathrm{d}^2[N,(\alpha)] + NA^2 - 2NB^2 = 397. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi M là hình chiếu của N lên (α).

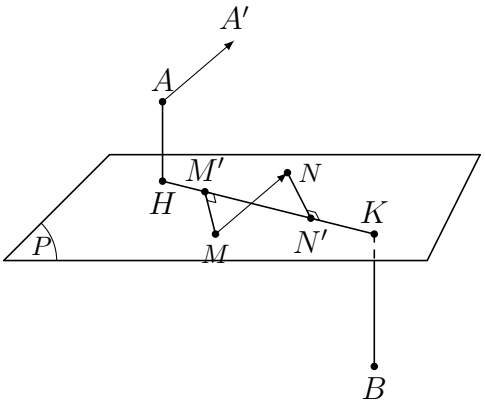
Chọn đáp án C □

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$, $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 4.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;-1;0)$ và bán kính $R_1=2$.
Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(0;-1;0)$ và bán kính $R_2=\sqrt{3}$.
Đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) là thỏa mãn hệ phương trình



$$\begin{aligned}&\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4\\x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0\\x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases}\\\Leftrightarrow\ &x=0.\end{aligned}$$

Phương trình mặt phẳng (P) là $x=0$ và tâm của đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1), (S_2) là $J\equiv I_2=(0;-1;0)$, bán kính $r=\sqrt{3}$.
Ta có A, B nằm khác phía đối với mặt phẳng (P).
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm A và B trên (P). Khi đó, $H(0;0;0)$, $K(0;3;4)$ và $AH=1$, $BK=2$, $HK=5$.
Gọi M', N' là hình chiếu của M, N trên HK. Ta có

$$\begin{cases}MH\geq M'H\Rightarrow AM\geq AM'\\NK\geq N'K\Rightarrow BN\geq BN'\end{cases}\Rightarrow AM+BN\geq AM'+BN'.$$

Gọi A' là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{MN}\Rightarrow AM'=A'N'$.
Do đó $AM+BN\geq A'N'+BN'$. Khi đó, $AM+BN$ nhỏ nhất khi và chỉ khi A', N' và B thẳng hàng.
Đường thẳng AA' đi qua A và nhận $\overrightarrow{HK}=(0;3;4)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases}x=-1\\y=3t\\z=4t.\end{cases}$

Do $A'\in AA'$ và $AA'=1$ nên $(3t)^2+(4t)^2=1\Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{5}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}A'\left(-1;\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)\\A'\left(-1;-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right).\end{array}\right.$

- ☑ Với $A'\left(-1;\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ ta có $A'B=5$.
- ☑ Với $A'\left(-1;-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$ ta có $A'B=3\sqrt{5}$ (loại).

Vậy $AM+BN$ ngắn nhất là 5.
Chọn đáp án (A) □

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-2=0$, (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q=(a;b;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào đúng?

A. $a-b=-1$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(2;-1;-2)$ và đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Vì $d \subset (Q)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow -a + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2b + 1$.
Gọi α là góc giữa (P) và (Q)

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2a - b - 2|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{|3b|}{3\sqrt{5b^2 + 4b + 2}} = \sqrt{\frac{b^2}{5b^2 + 4b + 2}}.$$

Góc α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ lớn nhất.
Xét $f(b) = \dfrac{b^2}{5b^2 + 4b + 2} \Rightarrow f'(b) = \dfrac{4b^2 + 4b}{(5b^2 + 4b + 2)^2}$.
Giải $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b^2 + 4b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

b	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(b)$	$\frac{1}{5}$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0	↗	$\frac{1}{5}$

Tử bảng biến thiên suy ra $f(b)$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $b = -1$.
Vì $f(b)$ lớn nhất suy ra $\cos\alpha$ lớn nhất nên $\cos\alpha$ lớn nhất khi $b = -1$ và $a = -1$.
Vậy $a + b = -2$.
Chọn đáp án (B) □

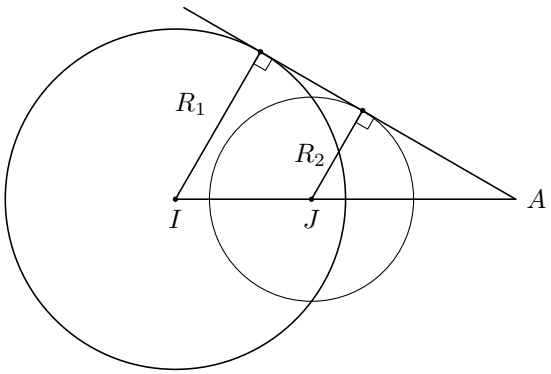
Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) lần lượt có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 2z + 5 = 0$. Xét các mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a; b; c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (P) đi qua. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = \dfrac{5}{2}$. **B.** $S = -\dfrac{5}{2}$. **C.** $S = \dfrac{9}{2}$. **D.** $S = -\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R_1 = 5$.
Mặt cầu (S_2) có tâm $J(3; -2; -1)$, bán kính $R_2 = 3$.
Ta có $\overrightarrow{IJ} = (2; -3; -2) \Rightarrow IJ = \sqrt{17}$.
Vì $R_1 - R_2 = 2 < IJ < R_1 + R_2 = 8$ nên (S_1), (S_2) cắt nhau.
Gọi A là tâm tỉ cự của hai mặt cầu, ta có

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AJ} \quad (1).$$



Ta có $\overrightarrow{AI} = (1-a; 1-b; 1-c)$, $\overrightarrow{AJ} = (3-a; -2-b; -1-c)$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = \dfrac{5}{3}(3-a) \\ 1-b = \dfrac{5}{3}(-2-b) \\ 1-c = \dfrac{5}{3}(-1-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -\dfrac{13}{2} \\ c = -4. \end{cases}$$

Vậy tổng $a+b+c = -\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 106. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ với a; b; c là những số thực dương thay đổi sao cho $a^2+4b^2+16c^2 = 49$. Tính tổng $S = a^2+b^2+c^2$ sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất.

A. $S = \dfrac{49}{5}$. **B.** $S = \dfrac{49}{4}$. **C.** $S = \dfrac{53}{5}$. **D.** $S = \dfrac{53}{4}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}(O,(ABC)) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$.

Do đó $\mathrm{d}(O,(ABC))\max \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\min$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$(1+2+4)^2 = \left(a\cdot\dfrac{1}{a}+2b\cdot\dfrac{1}{b}+4c\cdot\dfrac{1}{c}\right)^2 \le (a^2+4b^2+16c^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.

$\Rightarrow 49 \le 49\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$ hay $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \ge 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a^2 = 2b^2 = 4c^2 \\ a^2+4b^2+16c^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = \dfrac{7}{2} \\ c^2 = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = \dfrac{49}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

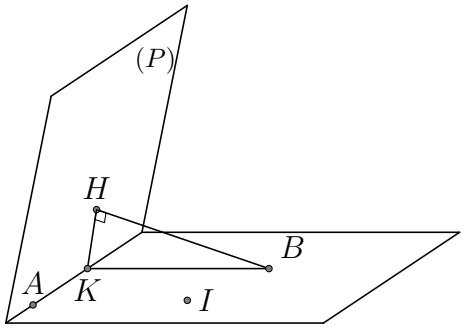
Câu 107. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2 = 72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{u} = (1;m;n)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P). Khi đó, hãy tính giá trị của $H = n-m$.

A. $H = 3$. **B.** $H = -5$. **C.** $H = 4$. **D.** $H = 5$.

Lời giải.

Ta có $(S): (x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2 = 72$ có tâm $I(5;-3;7)$ và bán kính $R = \sqrt{72}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P), K là hình chiếu vuông góc của B lên giao tuyến của (P) và (IAB).



$\Rightarrow BH \le BK \Rightarrow BH_{\max} = BK$.

Khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất $\Rightarrow (P)$ vuông góc với mặt phẳng (IAB).

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (9;-15;21)$, $\overrightarrow{AI} = (5;-3;7) \Rightarrow \vec{n}_{ABI} = (13;5;-2)$.

(P) vuông góc với mặt phẳng $(IAB) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_{ABI} = 0 \Rightarrow 13 + 5m - 2n = 0 \Rightarrow n = \dfrac{13}{2} + \dfrac{5}{2}m$.

(P) đi qua A và nhận $\vec{u} = (1;m;n)$ là một véc-tơ pháp tuyến.

$\Rightarrow (P)\colon x + my + nz - 8m - 2n = 0$.

(P) tiếp xúc với (S) nên ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(I,(P)) = \frac{|5 - 3m + 7n - 8m - 2n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \sqrt{72} \\
\Leftrightarrow\ & (5 - 11m + 5n)^2 = 72\left(1 + m^2 + n^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(5 - 11m + 5\cdot\frac{13+5m}{2}\right)^2 = 72\left(1 + m^2 + \left(\frac{13+5m}{2}\right)^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & (75 + 3m)^2 = 72\cdot\left(29m^2 + 130m + 173\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = -1 \Rightarrow n = 4 \\ m = \dfrac{-27}{3} \Rightarrow n = -16. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Thử lại ta có

☑ TH1: $m = -1;\ n = 4 \Rightarrow (P)\colon x - y + 4z = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(B;(P)) = 18\sqrt{2}$.

TH2: $m = -\dfrac{27}{3};\ n = -16 \Rightarrow (P)\colon x - \dfrac{27}{3}y - 16z + 104 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(B;(P)) = \dfrac{96\sqrt{2}}{13} < 18\sqrt{2}$.

Suy ra $m = -1;\ n = 4$ .Vậy $n - m = 5$.

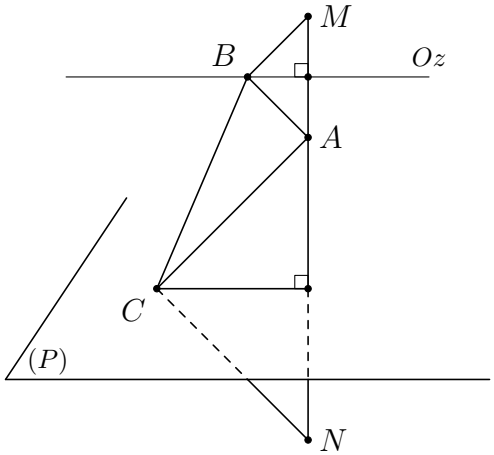
Chọn đáp án (D) □

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + 7 = 0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là

A. $B(0;0;2)$. **B**. $B(0;0;-1)$. **C**. $B(0;0;1)$. **D**. $B(0;0;-2)$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là hai điểm đối xứng với A qua Oz và mặt phẳng (P) (điểm A nằm giữa Oz và (P), vì O, A nằm cùng phía với (P) và $\mathrm{d}(Oz,(P)) > \mathrm{d}(A,(P))$). Khi đó ta có chu vi tam giác ABC là



$$P_{\min} = (AB + BC + AC)_{\min} = (BM + BC + CN)_{\min}.$$

Suy ra $(BM + BC + CN)_{\min}$ khi B, C, M, N thẳng hàng. Hay B là hình chiếu của $A(1;-6;2)$ lên $Oz \Rightarrow B(0;0;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 109. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;0;-2)$, $C(1;0;1)$, $D(2;1;-1)$. Hai điểm M, N lần lượt trên đoạn BC và BD sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10$ và $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{6}{25}$. Phương trình mặt phẳng (AMN) có dạng $ax+by+cz+32=0$. Tính $S=a-b+c$?

A. $S=98$. **B.** $S=26$. **C.** $S=27$. **D.** $S=97$.

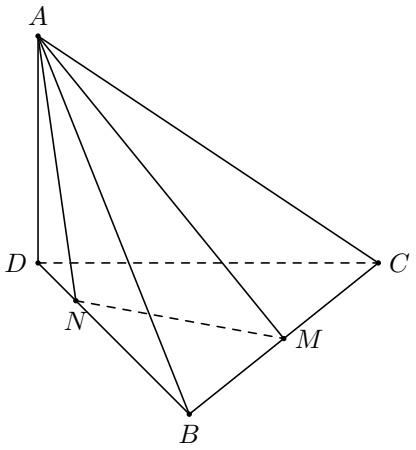
Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{V_{B.AMN}}{V_{B.ACD}}=\dfrac{BA}{BA}\cdot\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD}$.

Suy ra $\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{6}{25}\Rightarrow\dfrac{BC}{BM}\cdot\dfrac{BD}{BN}=\dfrac{25}{6}$.

Đặt $x=\dfrac{BC}{BM}$, $y=\dfrac{BD}{BN}$,với x, $y>1$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+3y=10\\ xy=\dfrac{25}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=\dfrac{5}{3}.\end{cases}$$



Như vậy $\dfrac{BC}{BM}=\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{BD}{BN}=\dfrac{5}{3}$. Hay $BM=\dfrac{2}{5}BC$, $BN=\dfrac{3}{5}BD$.

☑ Với $BM=\dfrac{2}{5}BC\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. Do đó

$$\begin{cases}x_M-0=\dfrac{2}{5}\cdot(1-0)\\ y_M-0=\dfrac{2}{5}\cdot(0-0)\\ z_M+2=\dfrac{2}{5}\cdot(1+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{2}{5}\\ y_M=0\\ z_M=-\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{2}{5};0;-\frac{4}{5}\right).$$

☑ Với $BN=\dfrac{3}{5}BD\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BD}$. Do đó

$$\begin{cases}x_N-0=\dfrac{3}{5}\cdot(2-0)\\ y_N-0=\dfrac{3}{5}\cdot(1-0)\\ z_N+2=\dfrac{3}{5}\cdot(-1+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\dfrac{6}{5}\\ y_N=\dfrac{3}{5}\\ z_N=-\dfrac{7}{5}\end{cases}\Rightarrow N\left(\frac{6}{5};\frac{3}{5};-\frac{7}{5}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{7}{5};-2;-\dfrac{4}{5}\right)$, $\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{7}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$.

Véc-tơ $\vec{u}_1\,(7;-10;-4)$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AM}$. Véc-tơ $\vec{u}_2\,(11;-7;-7)$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AN}$.

Mặt phẳng (AMN) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2=(42;5;61)$.

Phương trình mặt phẳng (AMN) là

$$42\cdot(x+1)+5\cdot(y-2)+61\cdot(z-0)=0\Leftrightarrow 42x+5y+61z+32=0.$$

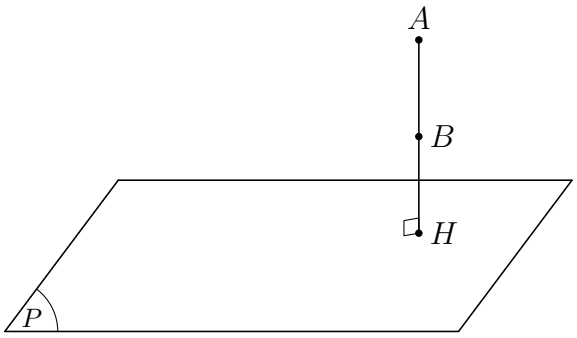
Suy ra $a=42$, $b=5$, $c=61$. Vậy nên $S=a-b+c=42-5+61=98$.

Chọn đáp án A □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.



- ☑ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (P).
- ☑ Ta có $AH=6$, $BK=3$, $AB=3<AH$, suy ra A, B nằm cùng phía với (P).
- ☑ Mà $AH=6\le AK\le BA+BK=6$, suy ra $H\equiv K$ và B, A, K thẳng hàng.
- ☑ Do đó B là trung điểm của AH, suy ra $H(5;6;-1)$ và AB vuông góc với (P).
- ☑ Mặt phẳng (P) đi qua H, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$ có phương trình

$$2(x-5)+2(y-6)-(z+1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0\Leftrightarrow -4x-4y+2z+46=0.$$

Suy ra $a=-4$, $b=-4$, $c=2\Rightarrow T=a+b+c=-6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và $(S')\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khoảng cách từ O đến (P) bằng

A. $\dfrac{14}{3}$. **B.** $\dfrac{17}{7}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=5$.

Mặt cầu (S') tâm $I'(1;2;3)$, bán kính $R'=1$.

Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I,I' lên (P).

Gọi bán kính của đường tròn giao tuyến của (P) và (S) là r.

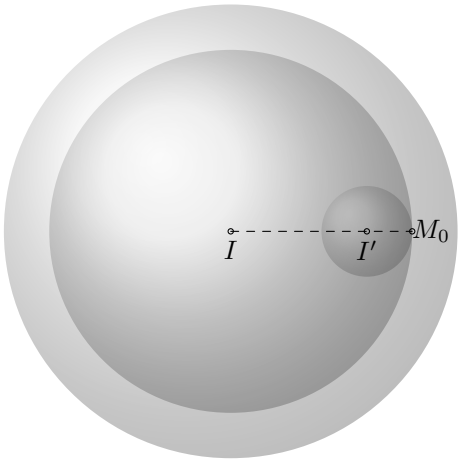
Ta có $2\pi r=6\pi\Leftrightarrow r=3$.

Ta có $\mathrm{d}\,(I,(P))=IM=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. (1)

Từ (1) $\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (C) tâm I bán kính $R''=4$.

Mặt khác $II'=R''-R'=3\Leftrightarrow (C)$ và (S') tiếp xúc ngoài.

Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (P)$ đồng thời tiếp xúc với (C) và (S').



Gọi M_0 là tiếp điểm chung của (S') và (C), ta có $\overrightarrow{II'}=3\overrightarrow{I'M_0}\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=\dfrac{1}{3}\\ y_0-2=\dfrac{2}{3}\\ z_0-3=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{4}{3}\\ y_0=\dfrac{8}{3}\\ z_0=\dfrac{11}{3}.\end{cases}$

Mặt phẳng (P) qua $M_0\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{3}\right)$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{II'}=(1;2;2)$. Phương trình của (P) là

$$x+2y+2z-14=0.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) là $\mathrm{d}\,(O,(P))=\dfrac{14}{3}$.

• **Lưu ý:** *Nếu (C) và (S') không tiếp xúc trong thì hoặc không tồn tại (P) hoặc có vô số mặt phẳng (P) thỏa mãn. Chính đề bài yêu cầu tính khoảng cách từ (O) đến (P) dẫn đến nhận định về tính duy nhất của (P).*

Chọn đáp án A □

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

A. $\dfrac{7}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{7}{9}\pi$. **C.** $\dfrac{9}{7}\pi$. **D.** $\dfrac{7}{6}\pi$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R_1=5$, mặt cầu (S_2) có tâm $J(-2;0;2)$ bán kính $R_2=1$. Giả sử điểm $I(x;y;z)\in(P)$ sao cho mặt cầu tâm I bán kính R tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2).

Khi đó ta có $\begin{cases} x-z+6=0 & (1)\\ R=|IO-R_1| & (2)\\ R=|IJ-R_2| & (3)\end{cases}$

Từ (2), (3) ta có $|IO-5|=|IJ-1|$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow IO^2-10IO+25=IJ^2-2IJ+1\\
&\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4x-4y+8}+20\\
&\Leftrightarrow 25(x^2+y^2+z^2)=x^2+y^2+z^2-16+40\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}+400\\
&\Leftrightarrow 24(x^2+y^2+z^2-16)-40\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}=0\\ \sqrt{x^2+y^2+z^2-16}=\dfrac{5}{3}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-16=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=16$ là phương trình mặt cầu tâm O bán kính $R=4$. Ta thấy $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}>R$ nên mặt cầu không cắt (P) do đó không tồn tại điểm I.

Với $\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{169}{9}$ là phương trình mặt cầu (S') tâm O bán kính $R=\dfrac{13}{3}$. Ta thấy $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}<R$ nên mặt cầu (S') cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) bán kính $r=\sqrt{R^2-(\mathrm{d}(O,(P)))^2}=\sqrt{\dfrac{169}{9}-18}=\sqrt{\dfrac{7}{9}}$.

Vậy tập hợp điểm I là đường tròn (C), diện tích hình tròn giới hạn bởi (C) là $S=\pi r^2=\dfrac{7\pi}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 113. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ các điểm $A(1;2;1)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;-1;0)$, $D(-2;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=6$ và tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng $(B'C'D)$ là

A. $y-z=0$. **B.** $y-z-2=0$. **C.** $x-z-2=0$. **D.** $x-z=0$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{A'B'C'D'}}=\dfrac{AB}{AB'}\cdot\dfrac{AC}{AC'}\cdot\dfrac{AD}{AD'}\le\left(\dfrac{\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}}{3}\right)^3=\left(\dfrac{6}{3}\right)^3=8.$

Do đó thể tích của $AB'C'D'$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AD}{AD'}=\dfrac{AC}{AC'}=2.$

Khi đó $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ hay B' là trung điểm của $AB\Rightarrow B'(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-2;-1;-1)$; $\overrightarrow{BD}=(-3;3;3)$ nên $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(0;9;-9)$.

Mặt khác $(B'C'D')\parallel(BCD)$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(0;9;-9)$ là một véc-tơ pháp tuyến của $(B'C'D')$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(B'C'D)$: $9(y-1)-9(z-1)=0\Leftrightarrow y-z=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;-1;0)$,$C(0;0;1)$ và mặt phẳng (P): $2x-2y+z+7=0$. Xét $M\in(P)$, giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ bằng

A. $\sqrt{22}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, suy ra $I(-1;1;1)$. Ta có

$$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+|\overrightarrow{MB}|=\left|\overrightarrow{MI}\right|+|\overrightarrow{MB}|=MI+MB.$$

Vì B và I cùng phía so với mặt phẳng (P): $2x-2y+z+7=0$. Gọi B' là điểm đối xứng với điểm B qua mặt phẳng (P), suy ra tọa độ $B'(-4;3;-2)$.

Vậy, ta có $MI+MB=MI+MB'\ge IB'$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ bằng $IB'=\sqrt{22}$.

Chọn đáp án A □

Câu 115. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng (P): $3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. -10. **B.** 10. **C.** 8. **D.** -8.

Lời giải.

Gọi $I(x_I;y_I;z_I)$ là 1 điểm trong không gian thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ với:

$$\begin{cases}A(1;4;5)\Rightarrow\overrightarrow{IA}=(1-x_I;4-y_I;5-z_I)\\ B(3;4;0)\Rightarrow\overrightarrow{IB}=(3-x_I;4-y_I,-z_I)\\ C(2;-1;0)\Rightarrow\overrightarrow{IC}=(2-x_I;-1-y_I;-z_I)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=(10-5x_I;5-5y_I;5-5z_I).$$

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}10-5x_I=0\\5-5y_I=0\\5-5z_I=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=2\\y_I=1\\z_I=1\end{cases}\Rightarrow I(2;1;1).$$

Ta có:

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2\\&=5MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2\\&=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2.\end{aligned}$$

Vì $IA^2+IB^2+3IC^2$ là hằng số nên $(MA^2+MB^2+MC^2)_{\min} \Leftrightarrow MI^2_{\min} \Rightarrow M$ là hình chiếu của I lên (P). Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với $(P) \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P = (3;3;-2)$.

Mà $I(2;1;1)$ nên phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+3t \\ z = 1-2t \end{cases}$, suy ra tọa độ $M(2+3t;1+3t;1-2t)$.

Vì $M \in (P) \Rightarrow 3(2+3t)+3(1+3t)-2(1-2t)-29=0 \Rightarrow t=1$.

Suy ra tọa độ $M(5;4;-1) \Rightarrow a+b+c=8$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua E và cắt chiều dương các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $x+2y+2z-12=0$. **B**. $x+y+2z-11=0$.

C. $2x+y+z-18=0$. **D**. $8x+y+z-66=0$.

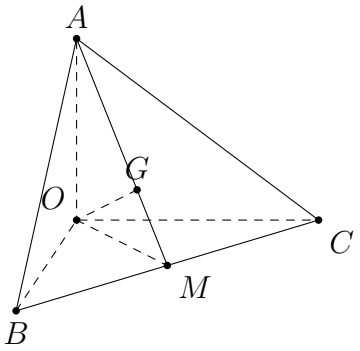
Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng (α): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua $E(8;1;1)$ nên $\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

Mà $OG^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ nên ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.



Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2+c^2)(4+1+1) \geq (2a+b+c)^2 \\ \Rightarrow\ & 6(a^2+b^2+c^2) \geq (2a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(4+1+1)} \geq (2a+b+c) \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(4+1+1)} \geq (2a+b+c)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(4+1+1)} \geq (4+1+1)^2 = 36. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a^2+b^2+c^2 \geq 6^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a^2}{4}=b^2=c^2 \Rightarrow a=2b=2c$.

Vậy $a^2+b^2+c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a=12, b=c=6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là $\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{6}=1$ hay $x+2y+2z-12=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 117. Cho điểm $A(4;-4;2)$ và mặt phẳng (P): $2x-2y+z=0$. Gọi M nằm trên (P), N là trung điểm của OM, H là hình chiếu vuông góc của O lên AM. Biết rằng khi M thay đổi thì đường thẳng HN luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính thể tích của mặt cầu đó.

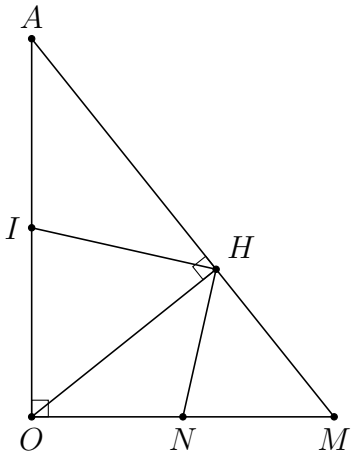
A. 36π. **B**. $32\sqrt{3}\pi$. **C**. $32\sqrt{2}\pi$. **D**. $72\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Dễ thấy O thuộc (P) và A không thuộc (P).
Ta có $\vec{n}_P = (2;-2;1)$ và $\overrightarrow{OA} = (4;-4;2)$ cùng phương nên điểm O là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $AO = 6$.
Gọi I là trung điểm của OA. Các tam giác IOH và OHN cân suy ra $\widehat{IHO} = \widehat{IOH}$ và $\widehat{OHN} = \widehat{NOH}$, do đó

$$\widehat{IHN} = \widehat{IHO} + \widehat{NHO} = \widehat{ION} = 90^\circ.$$

Vậy đường thẳng HN luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = IO = 3$. Thể tích của mặt cầu đó là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$.



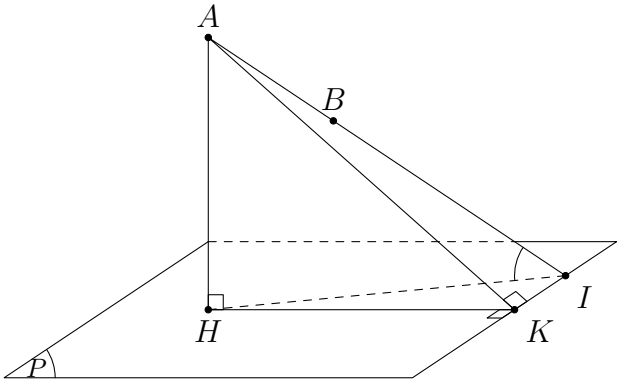
Chọn đáp án A □

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$, mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y - 2z + 2017 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1;a;b)$, khi đó $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

Gọi $I = AB \cap (P)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P).
Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên Δ
$\Rightarrow \widehat{AKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).



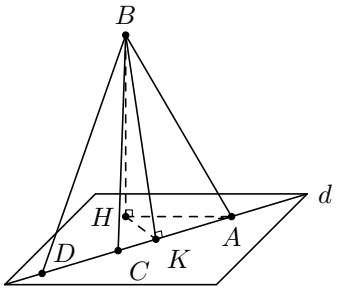
Do $\triangle HKI$ vuông tại K $(K \neq I) \Rightarrow HK \leq HI$
$\Rightarrow \tan\widehat{AKH} = \dfrac{AH}{HK} \geq \dfrac{AH}{HI} = \tan\widehat{AIH} \Rightarrow \widehat{AHK} \geq \widehat{AIH}$.
Vậy góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng là $\widehat{AIH}$.
Khi đó K trùng với I và $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}]$ là một véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (Q).
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;1)$, $\vec{n}_{(P)} = (2;-1;-2) \Rightarrow \vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}] = (-3;0;-3)$
$\Rightarrow \vec{u}_1 = (1;0;1)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (Q).
Suy ra $\vec{n}_2 = [\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}] = (-2;-2;2) = -2(1;1;-1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q)
$\Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (1;1;-1)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q), suy ra $a+b=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-1)$, $B(-1;-3;1)$. Giả sử C, D là hai điểm di động trên mặt phẳng (P): $2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho $CD = 4$ và A, C, D thẳng hàng. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác BCD. Khi đó tổng $S_1 + S_2$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{34}{3}$. **B.** $\dfrac{37}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{3}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải.

Kiểm tra ta thấy $A \in (P)$.



Gọi H là hình chiếu của điểm B lên (P) và d là đường thẳng nằm trong (P), đi qua A. Gọi K là hình chiếu của B lên d. Khi đó:

$\begin{cases} d \perp BH \\ d \perp BK \end{cases} \Rightarrow d \perp HK$. Do đó $S_{BCD} = \dfrac{1}{2} CD \cdot BK$.

Vì $CD = 4$ nên S_{BCD} đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi BK lớn nhất, nhỏ nhất.

- ☑ S_{BCD} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $BK = BH$, khi đó $S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$.
- ☑ S_{BCD} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $BK = BA$, khi đó $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.
- ☑ Tổng $S_1 + S_2 = \dfrac{34}{3}$.

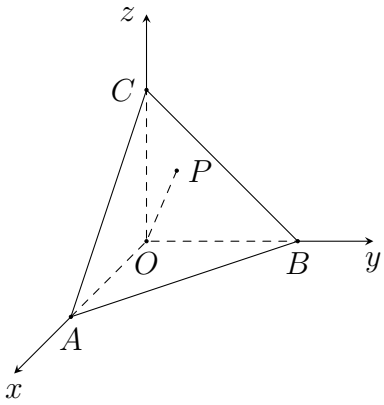
Chọn đáp án A □

Câu 120. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(1;1;2)$. Mặt phẳng (α) đi qua P cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác gốc tọa độ sao cho $T = \dfrac{R_1^2}{S_1^2} + \dfrac{R_2^2}{S_2^2} + \dfrac{R_3^2}{S_3^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác OAB, OBC, OCA và R_1, R_2, R_3 lần lượt là diện tích các tam giác PAB, PBC, PCA. Điểm M nào dưới đây thuộc (α)?

A. $M(4;0;1)$. **B.** $M(5;0;2)$. **C.** $M(2;1;4)$. **D.** $M(2;0;5)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OP} = (1;1;2) \Rightarrow OP = \sqrt{6}$. Lại có $\mathrm{d}(P,(Oxy)) = 2$, $\mathrm{d}(P,(Oxz)) = 1$ và $\mathrm{d}(P,(Oyz)) = 1$.



Đặt $d = \mathrm{d}(O,(ABC))$, ta có

$$\begin{aligned} V_{P.OAB} = V_{O.PAB} &\Leftrightarrow \mathrm{d}(P,(Oxy)) \cdot S_{\triangle OAB} = \mathrm{d}(O,(ABC)) \cdot S_{\triangle PAB} \\ &\Leftrightarrow 2S_1 = dR_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{R_1}{S_1} = \frac{2}{d}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $\dfrac{R_2}{S_2} = \dfrac{1}{d}$ và $\dfrac{R_3}{S_3} = \dfrac{1}{d}$.

Khi đó $T = \dfrac{R_1^2}{S_1^2} + \dfrac{R_2^2}{S_2^2} + \dfrac{R_3^2}{S_3^2} = \dfrac{6}{d^2} \geq \dfrac{6}{OP^2} = 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $d = OP$ hay $OP \perp (ABC)$.

Từ đó suy ra (α) nhận $\overrightarrow{OP} = (1;1;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do đó (α) có phương trình $1(x-1) + 1(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 6 = 0$.

Vậy $M(4;0;1)$ là điểm thuộc (α).

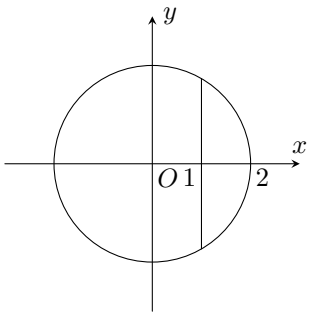
Chọn đáp án A □

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon z = 1$. Biết rằng (α) chia (S) thành hai phần, khi đó tỉ số tỉ số thể tích của phần nhỏ với phần lớn là

A. $\dfrac{5}{27}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{7}{25}$. **D.** $\dfrac{2}{11}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$, suy ra $\mathrm{d}(O,(\alpha))=1$.
Thể tích của (S) là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}$.
Gắn vào mặt cầu hệ trục Oxy có tâm O là gốc tọa độ; mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1. Khi đó mặt cầu (S) tạo thành khi quay đường tròn $x^2+y^2=4$ quanh Ox.



Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của phần lớn và phần nhỏ khi chia (S) bởi (α).
Ta có

$$V_2=\pi\int\limits_1^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{5\pi}{3}.$$

Từ đó suy ra $V_1=V-V_2=\dfrac{32\pi}{3}-\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{27\pi}{3}$. Vậy $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{5}{27}$.

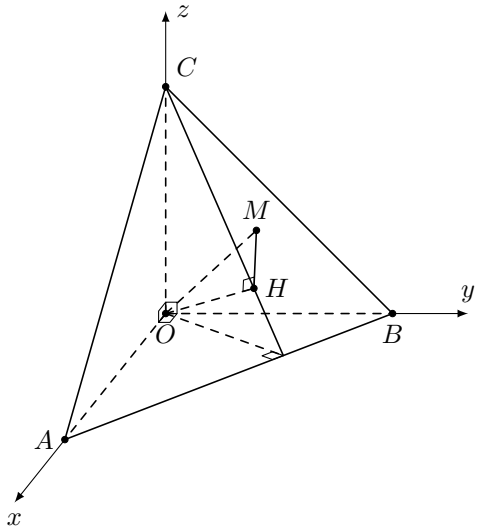
Chọn đáp án (A) □

Câu 122. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P)\colon x+2y+3z-8=0$. **B.** $(P)\colon \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$.
C. $(P)\colon x+y+z-4=0$. **D.** $(P)\colon x+2y+z-6=0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC)
$\Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$.
Ta có $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}$.
Do đó $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi OH lớn nhất.
Mặt khác $OH\le OM$
$\Rightarrow OH$ lớn nhất khi và chỉ khi $OH=OM$.
Khi đó (P) đi qua $M(1;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{OM}=(1;2;1)$ là véc-tơ pháp tuyến
$\Rightarrow (P)\colon x+2y+z-6=0$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+2018=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và α là góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Giá trị của $\cos\alpha$ là

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{6}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-1;-2)$. Gọi $\vec{n}_2=(a;b;c)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) $(\vec{n}_2\neq\vec{0})$.
Do $A,B\in(Q)$ nên $\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow -a+2b+c=0\Leftrightarrow a=2b+c$. Suy ra $\vec{n}_2=(2b+c;b;c)$.

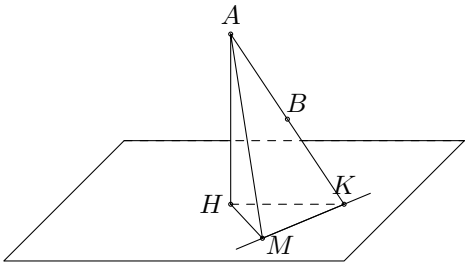
Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{|b|}{\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}} = \dfrac{|b|}{\sqrt{3b^2+2(b+c)^2}} \le \dfrac{|b|}{\sqrt{3b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Dấu "=" xảy ra khi $b+c=0$.
Vậy α là góc nhỏ nhất thì $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$ cho $(Q)\colon 24x-12y+9z-36=0$ và hai điểm $A\left(-2;-2;\dfrac{5}{2}\right)$; $B\left(2;-4;-\dfrac{5}{2}\right)$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

A. $2x-y+2z-3=0$. **B.** $x+2y=0$.
C. $x+2y+1=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (Q) và u là giao tuyến của (P) và (Q). Hạ $HM \perp u$ tại M. Vậy góc tạo bởi (P) và (Q) là $\widehat{AMH}$.



Ta có $\tan\widehat{AMH} = \dfrac{AH}{HM}$.
Để $\widehat{AMH}$ nhỏ nhất thì HM lớn nhất.
Gọi $K = AB \cap (Q)$. Khi đó u luôn đi qua K nên để HM lớn nhất thì $M \equiv K$.
Khi đó gọi $\vec{a} = [\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}]$ thì $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (-780; 390; -780)$.
Do đó có thể chọn $\vec{n}_{(Q)} = (2;-1;2)$
mà (Q) đi qua A nên có phương trình $2x-y+2z-3=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 125. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;2)$ và $B(1;2;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và tạo với mặt thẳng $(Q)\colon x+2y-2z+3=0$ một góc nhỏ nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $(1;7;-9)$. **B.** $(0;1;-7)$. **C.** $(1;1;-8)$. **D.** $(2;5;4)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Khi đó mặt phẳng (P) có phương trình

$$a(x+1)+b(y-1)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-a-b-2c=0.$$

Ta có $1a+2b-1c+a-b-2c=0 \Leftrightarrow b=3c-2a$.
$\cos\widehat{((P),(Q))} = \dfrac{|1a+2b-2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|a+6c-4a-2c|}{3\sqrt{a^2+(3c-2a)^2+c^2}} = \dfrac{|4c-3a|}{3\sqrt{5a^2-12ac+10c^2}}$.
+ Nếu $a=0 \Rightarrow \cos\widehat{((P),(Q))} = \dfrac{4|c|}{3\sqrt{10c^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt{10}}$.
+ Nếu $a\neq 0 \Rightarrow \cos\widehat{((P),(Q))} = \dfrac{\left|4\dfrac{c}{a}-3\right|}{3\sqrt{10\dfrac{c^2}{a^2}-12\dfrac{c}{a}+5}}$.
Xét hàm số $f(t) = \dfrac{|4t-3|}{3\sqrt{10t^2-12t+5}}$, với $t=\dfrac{c}{a}$.
Để $\widehat{((P),(Q))}$ nhỏ nhất thì $\cos\widehat{((P),(Q))}$ lớn nhất.

Dễ dàng chứng minh được $f(t) \le \frac{1}{3}\sqrt{\frac{13}{7}}$, đẳng thức xảy ra khi $t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = -3c$.
Chọn $a = 3$, $c = -1 \Rightarrow b = -9$.
Vậy $(P)\colon 3x - 9y - z + 14 = 0$.
Do đó điểm $(1;1;-8)$ thuộc (P).
Chọn đáp án C □

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;-2)$. Đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d và Δ là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3 - 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có điểm $A(1;-3;5)$ thuộc đường thẳng d nên A là giao điểm của d và Δ.
Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v} = (-3;0;-4)$.
Đặt $\vec{u'} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $\vec{v'} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \left(-\frac{3}{5};0;-\frac{4}{5}\right)$. Ta có $\vec{u'} \cdot \vec{v'} > 0$ nên góc tạo bởi hai véc-tơ $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ.
Suy ra $\vec{w} = \vec{u'} + \vec{v'} = \left(-\frac{4}{15};\frac{10}{15};-\frac{22}{15}\right) = -\frac{2}{15}(2;-5;11)$ là véc-tơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Phương trình đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 5t \\ z = 5 + 11t. \end{cases}$$

Chọn $t = -2$ suy ra điểm $M(-1;2;-6)$ thuộc đường phân giác. Khi đó, đường phân giác có phương trình

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-4;4), B(1;7;-2), C(1;4;-2)$. Mặt phẳng $(P)\colon ax + by + cz + 62 = 0$ đi qua A, đặt $h_1 = \mathrm{d}(B,(P)); h_2 = 2\mathrm{d}(C,(P))$. Khi $h_1 + h_2$ đạt giá trị lớn nhất, tính $T = a + b + c$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Lấy C' là điểm đối xứng của A qua C.
Tọa độ của C' là $C'(3;12;-8)$.
Vậy $\mathrm{d}(C',(P)) = 2\mathrm{d}(C,(P)) = h_2$.
Ta chia làm 2 trường hợp:

☑ Nếu B, C' nằm cùng phía so với (P) thì lấy I là trung điểm BC'. Tọa độ của I là $I\left(2; \dfrac{19}{2}; -5\right)$.
Ta có $h_1 + h_2 = \mathrm{d}(B,(P)) + \mathrm{d}(C',(P)) = 2\mathrm{d}(I,(P)) \leqslant 2AI$.

☑ Nếu B, C' nằm khác phía so với (P) thì $h_1 + h_2 \leqslant BC'$.

$\overrightarrow{BC'} = (2;5;-6) \Rightarrow |\overrightarrow{BC'}| = \sqrt{65}$.

$\overrightarrow{AI} = (-3; -\dfrac{27}{2}; 9) \Rightarrow |\overrightarrow{AI}| = 16.5$.

Ta thấy $AI > BC'$ nên độ dài AI là giá trị lớn nhất của $h_1 + h_2$.

Vậy (P) nhận $\overrightarrow{AI}$ là véc-tơ pháp tuyến.

Khi đó $(P)\colon\ -3(x+1) - \dfrac{27}{2}(y+4) + 9(z-4) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) + 9(y+4) - 6(z-4) = 0$.

Vậy $T = a + b + c = 2 + 9 - 6 = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(2;4;0), D(0;0;6)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng cắt (S) theo một đường tròn có diện tích 14π và cách đều cả năm điểm O, A, B, C, D (O là gốc tọa độ)?

A. 5. **B**. 3. **C**. 7. **D**. 1.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng thỏa yêu cầu. Từ giao tuyến của (α) và (S) suy ra (α) đi qua tâm mặt cầu (S) là $I(1;2;3)$.

(α) có phương trình $A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0$.

Vì (α) cách đều 5 điểm A, B, C, D, O nên

$|A - 2B - 3C| = |-A + 2B - 3C| = |-A - 2B + 3C| = |A + 2B - 3C| = |-A - 2B - 3C|$

☑ Với $C = 0$. Khi đó

$|A - 2B| = |A + 2B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Vậy có 2 mặt phẳng $x = 1$ hoặc $y = 2$.

☑ Với $C \neq 0$, chọn $C = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} & |A - 2B - 3| = |A - 2B = 3| = |A + 2B - 3| + |A + 2B + 3| \\ \Rightarrow & \begin{cases} |A - 2B - 3| = |A - 2B + 3| \\ |A + 2B - 3| = |A + 2B + 3| \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} A - 2B = 0 \\ A + 2B = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & A = B = 0 \end{aligned}$$

Thử lại $A = B = 0$ thỏa điều kiện. Do đó (α) có phương trình $z = 3$. Vậy có 1 mặt phẳng thỏa ycbt.

Vậy có tất cả 3 mặt phẳng thỏa điều kiện đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(0;-2;-4)$, $B(-4;-4;2)$, $C(2;-3;3)$. Biết tọa độ điểm $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị $P = a^2 + b^2 + c^2$ là

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=9$. **D.** $P=4$.

Lời giải.

Với I là điểm bất kỳ ta có

$$\begin{aligned}
&MA^2+MB^2+2MC^2\\
&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2\\
&=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2\\
&=4\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC})\\
&=4MI^2+IA^2+IB^2+2IC^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}).
\end{aligned}$$

Với điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I\left(0;\dfrac{-5}{2};1\right)$.

Do $IA^2+IB^2+2IC^2$ không đổi nên $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(Oxz)\Rightarrow M(0;0;1)$.

Vậy $P=1$.

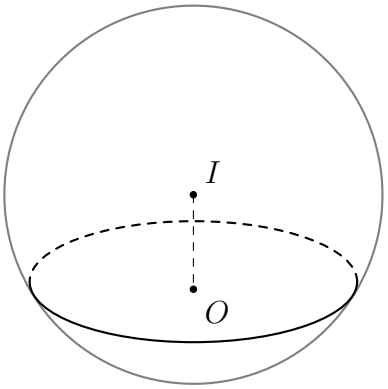
Chọn đáp án A □

Câu 130. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):\ (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=49$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O và cách tâm I của mặt cầu một đoạn lớn nhất. Khoảng cách từ $A(10;5;10)$ đến (P) bằng

A. $12\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua $O(0;0;0)$ và cách tâm $I(3;4;5)$ một đoạn lớn nhất sẽ nhận $\overrightarrow{OI}=(3;4;5)$ làm véctơ pháp tuyến. Suy ra $(P):\ 3x+4y+5z=0$. Khoảng cách từ $A(10;5;10)$ đến (P) bằng $h=\dfrac{|3.10+4.5+5.10|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=10\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 131. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $S(0;0;1)$, $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ với $m,\ n>0$ và $m+n=1$. Mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có bán kính là bao nhiêu biết mặt cầu đó đi qua điểm $A(1;1;1)$?

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (SMN) đi qua ba điểm $S(0;0;1)$, $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{1}=1\Leftrightarrow nx+my+mnz-mn=0.$$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của $A(1;1;1)$ trên mặt phẳng (Oxy), ta có $I(1;1;0)$ và $IA=1$.

Ta có $\mathrm{d}\,(I,(SMN)) = \dfrac{|n+m-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}} = \dfrac{|1-mn|}{\sqrt{(m+n)^2-2mn+m^2n^2}} = \dfrac{|1-mn|}{\sqrt{(1-mn)^2}} = 1.$

Suy ra mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu tâm $I(1;1;0)$, bán kính $R=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và ba điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+3MB^2+2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $x_0+2y_0-z_0$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{6}{9}$. **C.** $\dfrac{46}{9}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6};\frac{13}{6}\right).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} T &= MA^2+3MB^2+2MC^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 6MI^2+IA^2+3IB^2+2IC^2. \end{aligned}$$

Do $IA^2+3IB^2+2IC^2$ không đổi nên T đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.

Do $M\in(P)$ nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

Do $MI\perp(P)$ nên phương trình đường thẳng MI đi qua I và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{u}_d=(1;1;1)$ là

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{6}+t \\ y=\dfrac{5}{6}+t \\ z=\dfrac{13}{6}+t \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}+t;\frac{5}{6}+t;\frac{13}{6}+t\right).$$

Mặt khác $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{6}+t+\dfrac{5}{6}+t+\dfrac{13}{6}+t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{18} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{10}{9};\dfrac{22}{9}\right)$.

Suy ra $x_0+2y_0-z_0=\dfrac{4}{9}+\dfrac{20}{9}-\dfrac{22}{9}=\dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\,(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $6OA+3OB+2OC$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $6x+2y+3z-19=0$. **B.** $x+2y+3z-14=0$.

C. $6x+3y+2z-18=0$. **D.** $x+3y+2z-13=0$.

Lời giải.

Giả sử điểm $A\,(a;0;0)$, $B\,(0;b;0)$ và $C\,(0;0;c)$ do giả thiết suy ra $a>0$, $b>0$ và $c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do M thuộc (P) nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1 \quad (*)$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski cho hai bộ số $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}},\sqrt{\dfrac{2}{b}},\sqrt{\dfrac{3}{c}}\right)$ và $\left(\sqrt{6a};\sqrt{3b},\sqrt{2c}\right)$ ta có

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{6a}+\sqrt{\frac{2}{b}}\cdot\sqrt{3b}+\sqrt{\frac{3}{c}}\cdot\sqrt{2c}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)\cdot(6a+3b+2c).$$

Do $(*)$ ta suy ra

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}\right)^2 \le (6a+3b+2c) \Leftrightarrow 6a+3b+2c \ge 54.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{6a}}{\sqrt{\dfrac{1}{a}}} = \dfrac{\sqrt{3b}}{\sqrt{\dfrac{2}{b}}} = \dfrac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{c}}} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6a} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}c \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=3a \\ \dfrac{3}{a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=3a \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 134. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a,b,c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất là

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Khi đó $\mathrm{d}(O,(ABC)) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhhia ta có $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \ge 9 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \ge 9$.

Suy ra $\mathrm{d}(O,(ABC)) \le \dfrac{1}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 135. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P)\colon 2x+by+cz+d=0$ với $b,c,d \in \mathbb{R}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=-18$. **B.** $S=-24$. **C.** $S=-11$. **D.** $S=-14$.

Lời giải.

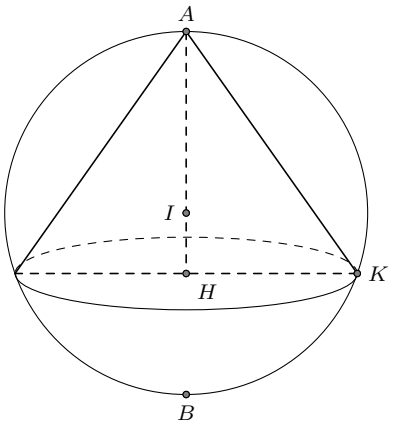
Gọi R, r, h lần lượt là bán kính của mặt cầu (S), đường tròn tâm H và chiều cao của hình nón.

$\overrightarrow{AB}=(4;4;2) \Rightarrow R=\dfrac{AB}{2}=3$ và $r^2=h(6-h)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ nên $b=2, c=1$.

Thể tích khối nón $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi h^2(6-h)$.

Để V đạt giá trị lớn nhất thì hàm số $f(h)=h^2(6-h)$ đạt giá trị lớn nhất trong khoảng $(0;6)$.



Ta có $f'(h) = -3h^2 + 12h$, $f'(h) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 0 \notin (0;6) \\ h = 4 \in (0;6). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

h	0		4		6
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}$ khi $h = 4$.

Mà $h = \mathrm{d}\,(A,(P)) \Leftrightarrow \dfrac{|d+9|}{3} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -21 \\ d = -3. \end{array}\right.$

Mặt khác $\mathrm{d}\,(A,(P)) > \mathrm{d}\,(B,(P))$ nên ta loại $d = -3$. Vậy $b + c + d = 2 + 1 - 21 = -18$.

Chọn đáp án A □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S), có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

A. $x - y - z = 0$. **B.** $x - y + z = 0$. **C.** $x - y - 2z = 0$. **D.** $x - y + 2z = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (2;2;0)$ và trung điểm của OA là $J(1;1;0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng trung trực của OA là $x + y - 2 = 0$.

Gọi tọa độ điểm B có dạng $(a;b;c)$. Vì điểm B thuộc mặt cầu (S) và tam giác OAB đều nên điểm B cũng thuộc mặt phẳng trung trực OA. Ta suy ra hệ sau $\begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c = 0 \\ OA^2 = OB^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a + b + c = 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ c = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \begin{cases} b = 2 - a \\ c = 2 \\ a = 2 \vee a = 0. \end{cases}$$

Vì điểm B có hoành độ dương nên $a = 2; b = 0, c = 2$.

$\overrightarrow{OB} = (2;0;2)$ và $\vec{n} = \left[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right] = (4;-4;-4)$. Khi đó ta chọn véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng OAB là $\vec{n} = (1;-1;-1)$.

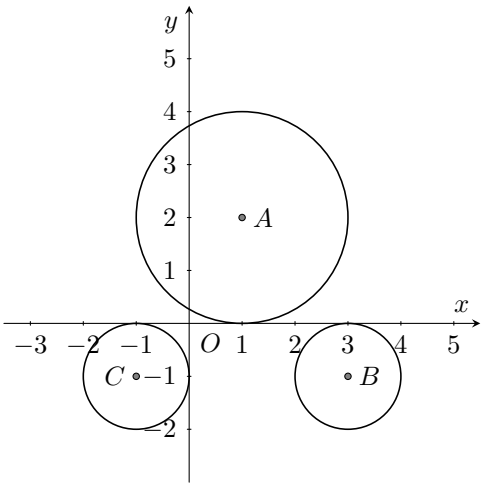
Vậy phương trình mặt phẳng (OAB) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1;-1)$ là $x - y - z = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi S_1 là mặt cầu có tâm A,bán kính bằng 2, S_2 và S_3 là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải.



Nhận xét A, B, C thuộc mặt phẳng $z = 1$.

Trên mặt phẳng $z = 1$ xét đường tròn (C_1) tâm $A(1; 2), R = 2$. Đường tròn (C_2) tâm $B(3; -1), (C_3)$ tâm $C(-1; -1)$ có cùng bán kính $R = 1$.

Có 2 mặt phẳng tiếp xúc cả 3 mặt cầu sao cho $(S_1), (S_2), (S_3)$ nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng đó.

Có 1 mặt phẳng tiếp xúc cả 3 mặt cầu sao cho $(S_2), (S_3)$ nằm về cùng một phía và (S_1) nằm phía bên kia đối với mặt phẳng.

Có 2 mặt phẳng tiếp xúc cả 3 mặt cầu sao cho $(S_1), (S_2)$ nằm về cùng một phía và (S_3) nằm phía bên kia đối với mặt phẳng.

Có 2 mặt phẳng tiếp xúc cả 3 mặt cầu sao cho $(S_1), (S_3)$ nằm về cùng một phía và (S_2) nằm phía bên kia đối với mặt phẳng.

Vậy có $2 + 1 + 2 + 2 = 7$ mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 138. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(0; 4; 0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 2z + 2018 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và α là góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Giá trị của $\cos\alpha$ là

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{6}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{9}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (2; -1; -2)$. Gọi $\vec{n_2} = (a; b; c)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) $(\vec{n_2} \neq \vec{0})$.

Do $A, B \in (Q)$ nên $\vec{n_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow a = 2b + c$. Suy ra $\vec{n_2} = (2b + c; b; c)$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \dfrac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 4bc + 2c^2}} = \dfrac{|b|}{\sqrt{3b^2 + 2(b + c)^2}} \leq \dfrac{|b|}{\sqrt{3b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $b + c = 0$.

Vậy α là góc nhỏ nhất thì $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; -2)$, $C(1; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 1$. Tính $T = a^2 + 2b^2 + 3c^2$.

A. $T=41$. **B**. $T=8$. **C**. $T=4$. **D**. $T=2$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} &= (1-x;2-y;-1-z)\\ \overrightarrow{IB} &= (2-x;1-y;-2-z)\\ \overrightarrow{IC} &= (1-x;-y;-1-z)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1-x+2-x-(1-x)=0\\ 2-y+(1-y)+y=0\\ -1-z-2-z+1+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=-2\end{cases} \Rightarrow I(2;3;-2).$$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;1)\Rightarrow IA^2=3$, $\overrightarrow{IB}=(0;-2;0)\Rightarrow IB^2=4$, $\overrightarrow{IC}=(-1;-3;1)\Rightarrow IC^2=11$.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}&MA^2+MB^2-MC^2=8\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2=1\\ \Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=1\\ \Leftrightarrow\ &MI^2+IA^2+IB^2-IC^2=8\\ \Leftrightarrow\ &MI^2+3+4-11=8\\ \Leftrightarrow\ &MI^2=12\Leftrightarrow MI=2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2+3-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=MI$.

Suy ra M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P).

Khi đó d nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$ của (P) là véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=2+t\\ y=3+t\\ z=-2+t.\end{cases}$

Vì $M\in d$ nên $M(2+t;3+t;-2+t)$. Mặt khác $M\in(P)\Rightarrow(2+t)+(3+t)+(-2+t)+3=0\Leftrightarrow t=2$.

Vậy $M(4;5;0)\Rightarrow a=4,b=5,c=0\Rightarrow T=4^2+5^2+0^2=41$.

Chọn đáp án A □

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2=0$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Gọi D là điểm trong không gian sao cho DA, DB, DC vuông góc với nhau từng đôi một (D không trùng O). Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $DABC$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MI+ME$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết $E(1;1;-2)$. Tính $T=2a-b+c$.

A. $T=-1$. **B**. $T=1$. **C**. $T=2$. **D**. $T=-3$.

Lời giải.

Do DA, DB, DC vuông góc với nhau từng đôi một nên suy ra O và D đối xứng nhau qua mặt phẳng (ABC).

Từ đó, hai khối chóp $O.ABC$ và $D.ABC$ đối xứng nhau qua (ABC). Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $O.ABC$ thì I và J cũng đối xứng nhau qua (ABC).

Ta có $(P)\colon x+y+z-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$. Suy ra $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, do đó $J(1;1;1)$.
Dễ dàng kiểm tra được J và E không cùng phía đối với mặt phẳng (ABC).
Khi đó $MI+ME=MJ+ME\geq JE$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M=JE\cap(ABC)$, ta được $M(1;1;0)$.
Vậy $T=2a-b+c=2\times 1-1+0=1$
Chọn đáp án (B) □

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z+5=0$. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên mặt phẳng (P). Diện tích lớn nhất của tam giác DEF là

A. $\sqrt{\dfrac{13}{6}}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(6;3;2)$.
Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) và (ABC). Ta có

$$S_{DEF}=S_{ABC}\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|\cdot\cos\alpha=\frac{7}{2}\cdot\cos\alpha.$$

Gọi $\vec{n}_2=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Ta có

$$cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|6a+3b+2c|}{7\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Mặt khác vì $(P)\perp(Q)$ nên $a+b+c=0\Rightarrow c=-a-b$.
Từ đó suy ra

$$cos\alpha=\frac{|4a+b|}{7\cdot\sqrt{2a^2+2b^2+2ab}}=\frac{\left|4\dfrac{a}{b}+1\right|}{7\cdot\sqrt{2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2+2\dfrac{a}{b}}}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{16\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+1+8\dfrac{a}{b}}{2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2+2\dfrac{a}{b}}}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{16t^2+8t+1}{2t^2+2t+2}$, ta có $f'(t)=\dfrac{16t^2+60t+14}{(2t^2+2t+2)^2}$.
Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	8	↗	$\frac{26}{3}$	↘	0	↗	8

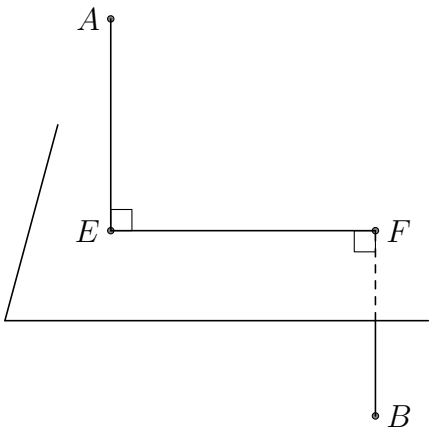
Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\cos\alpha=\dfrac{1}{7}\cdot\sqrt{\dfrac{26}{3}}=\dfrac{\sqrt{78}}{21}$.
Vậy $\max S_{DEF}=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{78}}{21}=\sqrt{\dfrac{13}{6}}$
Chọn đáp án (A) □

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x+y+z-3=0$ và hai điểm $A(m;1;0), B(1;-m;2)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (P). Biết $EF=\sqrt{5}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m là

A. -6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).



$$d_1: \begin{cases} x=m+2t \\ y=1+t \\ z=t. \end{cases}$$

E là hình chiếu của A lên (P)

$\Rightarrow E=d_1\cap(P)\Rightarrow E\left(\dfrac{2+m}{3};\dfrac{4-m}{3};\dfrac{1-m}{3}\right)$.

Gọi d_2 là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P).

$$d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-m+t \\ z=2+t. \end{cases}$$

F là hình chiếu của B lên (P)

$\Rightarrow F=d_2\cap(P)\Rightarrow F\left(\dfrac{2+m}{3};\dfrac{-5m-1}{6};\dfrac{11+m}{6}\right)$.

Ta có $EF^2=5$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4-m}{3}+\dfrac{5m+1}{6}\right)^2+\left(\dfrac{1-m}{3}-\dfrac{11+m}{6}\right)^2=5$

$\Leftrightarrow m^2+6m-1=0$.

Phương trình trên có 2 nghiệm và tổng của chúng bằng $-\dfrac{6}{1}=-6$.

Chọn đáp án A □

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+3=0$, $(Q)\colon x+2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. $9+5\sqrt{3}$. **B.** 28. **C.** 14. **D.** $3+5\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. Suy ra (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi (R) là mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với (S). Khi đó M là tiếp điểm của (S) với (R) và N là giao điểm của đường thẳng d đi qua M vuông góc với (Q) với mặt phẳng (P). Có hai cặp M, N như thế, một cặp ứng MN lớn nhất, một cặp ứng với MN nhỏ nhất.

Vì $(R)\parallel(P)\Rightarrow(R)\colon x-y+z+D=0$ $(D\neq 3)$.

(R) tiếp xúc với (S) nên có $\mathrm{d}(I,(R))=R\Leftrightarrow\dfrac{|1+2+3+D|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} D=5\sqrt{3}-6 \\ D=-5\sqrt{3}-6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Suy ra $(R_1): x-y+z+5\sqrt{3}-6=0$ và $(R_2): x-y+z-5\sqrt{3}-6=0$.

M_1 là tiếp điểm của (S) với (R_1) nên $M_1\left(1-\dfrac{5\sqrt{3}}{3};-2+\dfrac{5\sqrt{3}}{3};3-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. Gọi d_1 là đường thẳng

qua M_1 vuông góc với (Q). Khi đó $N_1 = d_1 \cap (P) \Rightarrow N_1\left(4-\dfrac{10\sqrt{3}}{3};4-\dfrac{5\sqrt{3}}{3};-3+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. Ta được $M_1N_1 = 9-5\sqrt{3}$.

M_2 là tiếp điểm của (S) với (R_2) nên $M_2\left(1+\dfrac{5\sqrt{3}}{3};-2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3};3+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. Gọi d_2 là đường thẳng qua M_2 vuông góc với (Q). Khi đó $N_2 = d_2 \cap (P) \Rightarrow N_2\left(4+\dfrac{10\sqrt{3}}{3};4+\dfrac{5\sqrt{3}}{3};-3-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. Ta được $M_2N_2 = 9+5\sqrt{3}$.

Thấy $M_2N_2 > M_1N_1$ nên giá trị lớn nhất của MN là $9+5\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 144. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T = \dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P)\colon 6x-3y+2z-6=0$. **B.** $(P)\colon 6x+3y+2z-18=0$.

C. $(P)\colon x+2y+3z-14=0$. **D.** $(P)\colon 3x+2y+z-10=0$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ là ba điểm thuộc $Oxyz$. Ta có mặt phẳng (P) đi qua các điểm A, B, C có phương trình là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Mà (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ nên

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1.$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2 \leqslant \left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{1}{14} \Leftrightarrow \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2} \geqslant \frac{1}{14}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\\ \dfrac{\frac{1}{a}}{1}=\dfrac{\frac{2}{b}}{2}=\dfrac{\frac{3}{c}}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1\\ a=2b=3c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=14\\ b=7\\ c=\dfrac{14}{3}\end{cases} \Leftrightarrow (P)\colon \frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1.$$

Vậy $\min T = \dfrac{1}{14} \Leftrightarrow (P)\colon x+2y+3z-14=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$ và $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho thể tích của khối tứ diện $AB'C'D'$ nhỏ nhất và $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$. Tìm phương trình của mặt phẳng $(B'C'D')$.

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B.** $16x-40y-44z+39=0$.

C. $16x+40y+44z+39=0$. **D**. $16x+40y-44z-39=0$.

Lời giải.

Đặt $b=\dfrac{AB}{AB'}$, $c=\dfrac{AC}{AC'}$, $d=\dfrac{AD}{AD'}$ ta có b, c, d là các số thực dương và thoả mãn $b+c+d=4$.

Gọi V và V' lần lượt là thể tích của khối tứ diện $ABCD$ và $AB'C'D'$ ta có $\dfrac{V}{V'}=bcd$ nên $V'=\dfrac{V}{bcd}$.

Từ đó suy ra thể tích khối tứ diện $AB'C'D'$ nhỏ nhất khi bcd đạt giá trị lớn nhất với $b+c+d=4$.

Mà ta có $4=b+c+d\geq 3\sqrt[3]{bcd}$ nên $bcd\leq\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=d=\dfrac{4}{3}$.

Vậy điểm B', C', D' thoả mãn yêu cầu bài toán khi $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{AD}{AD'}=\dfrac{4}{3}$.

Khi đó $(B'C'D')\parallel(BCD)$ và ta có $\overrightarrow{CD}=(1;4;4)$, $\overrightarrow{CB}=(3;1;2)$, $B'\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{4}\right)$.

Mặt phẳng $(B'C'D')$ đi qua B' và nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right]=(4;10;-11)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình $16x+40y-44z+39=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;7)$, $B\left(\dfrac{-5}{7};\dfrac{-10}{7};\dfrac{13}{7}\right)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I đi qua hai điểm A,B sao cho OI nhỏ nhất. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (S), giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2a-b+2c$ là

A. 18. **B**. 7. **C**. 156. **D**. 6.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B nên I thuộc mặt trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

Trung điểm E của AB có tọa độ là $\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};\dfrac{31}{7}\right)$ và $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{24}{7};\dfrac{36}{7}\right)$.

Vậy (P) đi qua E và nhận $\overrightarrow{BA}$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là $\dfrac{12}{7}\left(x-\dfrac{1}{7}\right)+\dfrac{24}{7}\left(y-\dfrac{2}{7}\right)+\dfrac{36}{7}\left(z-\dfrac{31}{7}\right)=0$ hay $x+2y+3z-14=0$.

Lại có OI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ I là hình chiếu vuông góc của O lên (P) hay I nằm trên đường thẳng (d) đi qua O và vuông góc với (P).

Phương trình (d) là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ hay $I(t;2t;3t)$ $(t\in\mathbb{R})$.

Mà $I\in(P)\Rightarrow t+4t+9t-14=0\Leftrightarrow t=1$ hay $I(1;2;3)$. Khi đó $R=IA=4$.

Vì $T=2a-b+2c\Leftrightarrow 2a-b+2c-T=0$ nên điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Q) có phương trình là $2x-y+2z-T=0$.

Vậy M là giao điểm của (Q) và (S).

Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(Q))\leq R\Leftrightarrow\dfrac{|6-T|}{3}\leq 4\Leftrightarrow -6\leq T\leq 18$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 18.

Chọn đáp án A □

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác O) sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

A. $6x+3y+2z-18=0$. **B**. $6x+3y+3z-21=0$.

C. $6x+3y+2z+21=0$. **D**. $6x+3y+2z+18=0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (P) đi qua M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

với $a, b, c > 0$.

Khi đó, thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V = \dfrac{abc}{6}$.

Và phương trình mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Mặt khác, do (P) đi qua M nên ta có $1 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}} \Rightarrow \dfrac{abc}{6} \geq \dfrac{1}{27}$.

Vậy $V_{\min} = \dfrac{1}{27}$ khi $\dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{b} = \dfrac{3}{c} = \dfrac{1}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$, $b = 6$ và $c = 9$.

Phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y + z + 7 = 0$. Xét $M \in (P)$, giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

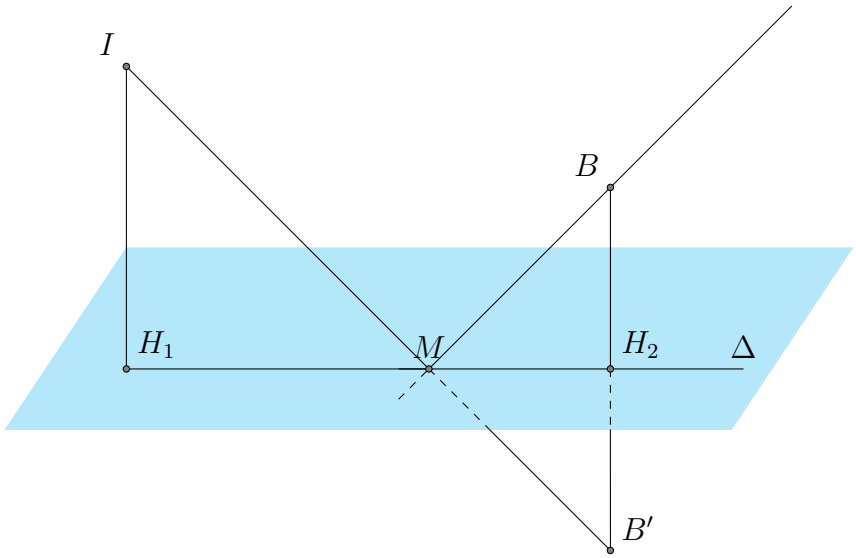
Lời giải.

* Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Rightarrow I(1;-1;1)$

* Ta có $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{IM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| = MI + MB$

* Do $(I;(P)) = 2 + 2 + 1 + 7 > 0, (B;(P)) = 0 + 2 + 0 + 7 > 0$ nên điểm I và B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P)



* Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (P) ta có

$\left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| = MI + MB = MI + MB' \geqslant IB'$ đạt min khi I, M, I' thẳng hàng

* Ta có $(BH_2)\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$, $H_2 = BH_2 \cap (P) \Rightarrow H_2(-2;1;-1) \Rightarrow B'(-4;3;-2) \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = (-5;4;-3) \Rightarrow \min\left(\left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|\right) = IB' = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta)\colon \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{1-m} + \dfrac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với

cả hai mặt phẳng (α), (β). Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6. **B**. 3. **C**. 9. **D**. 12.

Lời giải.

Ta có: Giả sử $I(a;b;c)$ ta có

$$\mathrm{d}\,(I,(\beta)) = \frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m-1)^2}+1}} = \frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}+1\right)^2}} = \frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\left|\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}+1\right|} = |k|$$

$$\Rightarrow (a;b;c-1) \text{ tỉ lệ với bộ } (-1;-1;1) \Rightarrow \begin{cases} a=-k \\ b=-k \\ c-1=k \end{cases}$$

$$+\ \mathrm{d}\,(I,(\alpha)) = \frac{|-2k+k+2k+2+10|}{3} = |k| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=6 \\ k=-3. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow R_1 = 6; R_2 = 3 \Rightarrow R_1 + R_2 = 9.$

Chọn đáp án C □

Câu 150. Cho điểm $A(4;-4;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z=0$. Gọi M nằm trên (P), N là trung điểm của OM, H là hình chiếu vuông góc của O lên AM. Biết rằng khi M thay đổi thì đường thẳng HN luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính thể tích của mặt cầu đó?

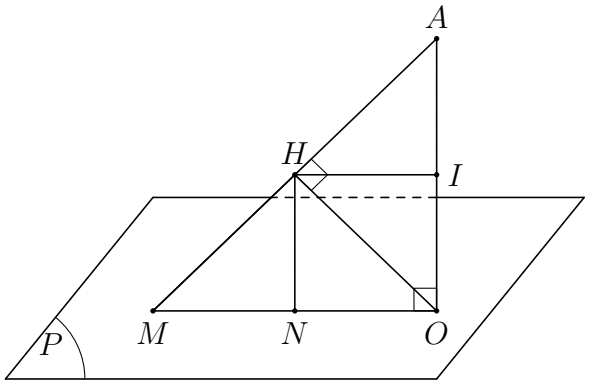
A. $V=36\pi$. **B**. $V=32\sqrt{3}\pi$. **C**. $V=32\sqrt{2}\pi$. **D**. $V=72\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Ta có $O \in (P)$. Mà $\overrightarrow{OA} = (4;-4;2)$ và VTPT của mp(P) là $\vec{n} = (2;-2;1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

Suy ra $OA \perp (P)$. Lại có $M \in (P) \Rightarrow OA \perp OM$ hay tam giác OAM vuông tại O.

Gọi I là trung điểm đoạn OA $\Rightarrow I(2;-2;1)$.



Do $OH \perp AM \Rightarrow \begin{cases} \widehat{OHI} = \widehat{IOH} \\ \widehat{OHN} = \widehat{NOH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IHN} = \widehat{ION} = \widehat{AOM} = 90^\circ.$

$\Rightarrow HN \perp IH \Rightarrow HN$ luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm I đường kính OA.

Suy ra bán kính là $R = \frac{OA}{2} = 3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi.$

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. A	4. D	5. B	6. A	7. A	8. C	9. C	10. C
11. B	12. B	13. C	14. C	15. C	16. D	17. C	18. D	19. D	20. D
21. A	22. A	23. C	24. C	25. C	26. A	27. D	28. D	29. C	30. D
31. C	32. A	33. A	34. C	35. D	36. C	37. D	38. A	39. C	40. D
41. A	42. B	43. B	44. C	45. A	46. C	47. C	48. A	49. A	50. B
51. C	52. A	53. B	54. C	55. B	56. C	57. A	58. B	59. D	60. C
61. A	62. C	63. D	64. B	65. C	66. A	67. A	68. D	69. C	70. D
71. D	72. A	73. D	74. A	75. C	76. D	77. D	78. D	79. A	80. D
81. A	82. D	83. A	84. A	85. C	86. C	87. B	88. C	89. D	90. D
91. D	92. B	93. D	94. D	95. A	96. B	97. B	98. C	99. A	100. C
101. A	102. C	103. A	104. B	105. D	106. B	107. D	108. A	109. A	110. B
111. A	112. B	113. A	114. A	115. C	116. A	117. A	118. B	119. A	120. A
121. A	122. D	123. D	124. A	125. C	126. B	127. D	128. B	129. A	130. B
131. C	132. A	133. C	134. C	135. A	136. A	137. B	138. D	139. A	140. B
141. A	142. A	143. A	144. C	145. A	146. A	147. A	148. C	149. C	150. A

BÀI 3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Phương trình tham số của đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $d:\begin{cases}x=x_0+at,\\y=y_0+bt,\\z=z_0+ct.\end{cases}$
- Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ với $abc\neq 0$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Viết phương trình đường thẳng khi biết một điểm thuộc nó và một véc-tơ chỉ phương

Phương pháp giải.

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)=2(2;-3;1)$ và đi qua điểm $M\,(2;0;-1)$ nên $\Delta:\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t.\end{cases}$

□

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1,2,3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;3;2)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;3;2)$ là $\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=3+2t.\end{cases}$

□

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của trục Oz.

Lời giải.

Trục Oz đi qua gốc tọa độ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$ nên có phương trình là

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

. □

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(2;3;4)$ và $C(0;0;1)$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm C và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$. Suy ra phương trình chính tắc là: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;-1;3)$. Viết phương trình tham số đường thẳng đi qua điểm M và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{i}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{i} = (1;0;0)$.

Phương trình tham số là $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 3. \end{cases}$ □

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;-2;3)$, $B(3;0;-3)$ và $C(-1;2;3)$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Lời giải.

Gọi $G(1;0;1)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

$\overrightarrow{BC} = (-4;2;6) = 2\vec{u}$, $\vec{u} = (-2;1;3)$.

Suy ra phương trình chính tắc là $d: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{3}$. □

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng qua $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, biết $\vec{a} = (0;2;1)$, $\vec{b} = (-1;1;-4)$; $\vec{c} = (2;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0-1-2; 2+1+1; 1-4-0) = (-3;4;-3)$.

Suy ra phương trình chính tắc là $d: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{-3}$. □

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng qua $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{ON}$, với O là gốc tọa độ và N là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Oxz).

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là $N(1;0;3)$.
Suy ra, $\overrightarrow{ON}=(1;0;3)$.

Vậy Phương trình tham số là: $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3+3t.\end{cases}$

□

DẠNG 2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Phương pháp giải.

☑ Phương trình đường thẳng đi qua điểm A hoặc B và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ hoặc véc-tơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;4)$ nên phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua hai điểm O và $M(1;2;3)$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải.

Đường thẳng đi qua $O(0;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$ nên phương trình tham số là

$$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3t.\end{cases}$$

□

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;-4)$. Viết phương trình tham số đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $G\left(\dfrac{2}{3};1;-\dfrac{4}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó đường thẳng đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{OG}=G\left(\dfrac{2}{3};1;-\dfrac{4}{3}\right)$ nên phương trình tham số là

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}t\\y=t\\z=-\dfrac{4}{3}t.\end{cases}$$

□

DẠNG 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M cho trước và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước

Phương pháp giải. Đường thẳng cần tìm đi qua điểm M và có một véc-tơ chỉ phương là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy).

Lời giải.

Mặt phẳng tọa độ (Oxy) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$ nên đường thẳng cần tìm có véc-tơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Vậy phương trình tham số là $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3+t. \end{cases}$

□

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-z+5=0$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng cần tìm vuông góc với mặt phẳng (P) nên có véc-tơ chỉ phương là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{u}=\vec{n}_{(P)}=(1;3;-1)$. Suy ra phương trình chính tắc là

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{-1}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\,(2;0;0)\,, B\,(0;3;0)$ và $C\,(0;0;-4)$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-2;3;0), \overrightarrow{BC}=(0;-3;-4)$. Suy ra, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=(-12;-8;6)$. Vậy phương trình chính tắc là

$$\frac{x}{-12}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{6}.$$

□

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\,(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 4x+3y-7z+1=0$. Viết phương trình của đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (4;3;-7)$.
Đường thẳng cần tìm đi qua A và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = \vec{n} = (4;3;-7)$.
Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng là $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-7}$. □

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;-4)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình tham số của đường thẳng OH.

Lời giải.

Phương trình mặt chắn $(ABC): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y - 3z - 12 = 0$.
Suy ra mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{ABC} = (6;4;-3)$.
Vì H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$. Suy ra đường thẳng OH có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{OH} = \vec{n}_{ABC} = (6;4;-3)$.
Vậy phương trình tham số của đường thẳng OH là $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = -3t. \end{cases}$

□

DẠNG 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và song song với một đường thẳng cho trước

Phương pháp giải. Đường thẳng cần tìm đi qua điểm M và có một véc-tơ chỉ phương là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đã cho.

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với trục Oz.

Lời giải.

Trục Oz có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$. Do đó có phương trình tham số của đường thẳng qua M và song song với trục Oz là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t. \end{cases}$ □

Ví dụ 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua $A(3;5;7)$ và song song với $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán. Ta có Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;3;4)$ và qua

$$A\,(3;5;7) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5+3t \\ z = 7+4t. \end{cases}$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

Ta có Δ đi qua điểm $A\,(4;-3;2)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;-1)$. Do đó phương trình tham số là

$$\Delta: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -3+2t \\ z = 2-t. \end{cases}$$ □

Bài 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(0;-1;3)\,, B\,(1;0;1)\,, C\,(-1;1;2)$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua A và song song BC nhận $\overrightarrow{BC} = (-2;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng cần tìm: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.

□

DẠNG 5. Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q)

Phương pháp giải. **Phương pháp.** VTPT của (P), (Q) lần lượt là $\vec{n_1}, \vec{n_2}$. Lúc này ta được VTCP của đường thẳng d là $[\vec{n_1}, \vec{n_2}]$.

Ví dụ 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-1;1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x+y-3z-1=0$ và $(Q): -2x+y-4z+1=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n_1} = (1;1;-3)$ và $\vec{n_2} = (-2;1;-4)$. Vì d song song với (P) và (Q) nên véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-1;10;3)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-1;1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;10;3)$, nên d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+10t \\ z = 1+3t. \end{cases}$$

□

Ví dụ 11. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$ và $(Q): 3x-2y+4z-2018=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;2)$ và $\overrightarrow{n_2}=(3;-2;4)$. Vì d song song với (P) và (Q) nên véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=(0;2;1)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;2;1)$, nên d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2+2t \\ z=3+t. \end{cases}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(0;1;-1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): -2x+3y-z=0$ và mp(Oxy).

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z=0$ nên có véc tơ pháp tuyến là $(0;0;1)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;1;-1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;0)$, nên d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x=3t \\ y=1+2t \\ z=-1. \end{cases}$$

□

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng d. Biết d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ và $\Delta': \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-1}{7}$. Và song song với hai mặt phẳng

$$(P): 7x-10y+5z+1=0 \qquad (Q): 3x+6y-2z-2018=0$$

Lời giải.

Ta có (P), (Q) có véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(7;-10;5)$, $\overrightarrow{n_2}=(3;6;-2)$.

Lại có, tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng Δ và Δ' là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3} \\ \dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1} \\ \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+5}{1} \\ \dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(3;-5;1).$$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(3;-5;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-10;29;72)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 3 - 10t \\ y = -5 + 29t \\ z = 1 + 72t. \end{cases}$$

□

Bài 14. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 6t \\ z = -7 + t \end{cases}$ và ba mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z - 16 = 0$, $(Q) : x + y + z + 1 = 0$, $(R) : -x + 2y - z + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của Δ và (P), đồng thời song song với hai mặt phẳng $(Q), (R)$.

Lời giải.

Ta có (Q), (R) có véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1} = (1;1;1)$, $\vec{n_2} = (-1;2;-1)$.

Lại có, tọa độ giao điểm A của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 6t \\ z = -7 + t \\ x + 2y - 3z - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \\ z = -6 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A(6;-4;-6).$$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(6;-4;-6)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-3;0;3)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -4 \\ z = -6 + 3t. \end{cases}$$

□

Bài 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(3;1;0)$, $A'(1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua B' và song song với $(ABCD)$ và $(ACC'A')$.

Lời giải.

Ta có $B' = (0;2;2)$ và véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(AA'C'C)$ lần lượt là $\overrightarrow{AA'} = (0;0;2)$, $\overrightarrow{BD} = (3;-1;0)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BD}\right] = (2;6;0)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d. Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 6t \\ z = 2. \end{cases}$$

□

Bài 16. Cho mặt cầu $(S): (x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$ và mặt phẳng $(P): -x+2y+3z+1=0$, và mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm $A(0;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và song song với mặt phẳng (P), (Q).

Lời giải.

Ta có mặt phẳng (Q) là mặt phẳng tiếp xúc với hình cầu (S) tại điếp điểm $A(0;2;-1)$, nên $\overrightarrow{IA}=(2;1;2)$ là véc tơ pháp tuyến của (Q). Do đó (Q) có phương trình $2x+y+2z=0$.

Vậy đường thẳng d đi qua tâm $I(-2;1;-3)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=(-1;-8;5)$ có phương trình tham số là $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z+3}{5}$. Trong đó $\overrightarrow{n_1}=(-1;2;3), \overrightarrow{n_2}=(2;1;2)$ lần lượt là véc tơ pháp tuyến của $(P), (Q)$. □

DẠNG 6. Đường thẳng d qua M song song với mp(P) và vuông góc với d' (d' không vuông góc với Δ)

Phương pháp giải. **Phương pháp.** Đường thẳng d' có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u'}$, mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}$. Lúc này ta được véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\left[\vec{u'},\vec{n}\right]$.

Ví dụ 12. Cho điểm $A(2;-5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-y-z+9=0$, đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và vuông góc với d.

Lời giải.

Ta có (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;-1)$, đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3)$, nên đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $[\vec{u},\vec{n}]=(-2;-5;3)$. Suy ra Δ có phương trình $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+5}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$. □

Ví dụ 13. Cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): -x+3y-4z-5=0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-4+5t \\ z=2-t \end{cases}$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và vuông góc với d.

Lời giải.

Ta có (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;3;-4)$, đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;5;-1)$, nên đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $[\vec{u},\vec{n}]=(17;-9;-11)$. Suy ra Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-11}$. □

Ví dụ 14. Cho điểm $A(-2;1;-6)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+3y-z+12=0$, $(Q): x-2y+2z-1=0$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và vuông góc với giao tuyến của (P)và (Q) .

Lời giải.

Ta có $(P),(Q)$ lần lượt có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(2;3;-1)$, $\vec{n_2}=(1;-2;2)$, nên véc tơ chỉ phương của đường thẳng giao tuyến là $\vec{u}=[\vec{n_1},\vec{n_2}]=(4;-5;-7)$. Và ta được đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $[\vec{u},\vec{n_1}]=(-26;10;-22)$. Suy ra Δ có phương trình $\dfrac{x+2}{-26}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z+6}{-22}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(1;-2;3)$, vuông góc với đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3+2t \\ z=2-t \end{cases}$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x+y+3z-5=0$

Lời giải.

Đường thẳng (Δ) có véc tơ chỉ phương là $\vec{a}=(3;2;-1)$, mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;3)$.

Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d).

Vì $\begin{cases} (d)\perp(\Delta) \\ (d)\parallel(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}\perp\vec{a} \\ \vec{u}\perp\vec{n} \end{cases}$. Do đó $\vec{u}=[\vec{a};\vec{n}]=(7;-11;1)$.

Vậy (d) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+7t \\ y=-2-11t \\ z=3+t \end{cases}$. □

Bài 18. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $A(1;1;-2)$, vuông góc với đường thẳng (d) : $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và song song với mặt phẳng $(P): x-y-z+3=0$

Lời giải.

Gọi $\vec{a},\vec{u},\vec{n}$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của (d), véc tơ chỉ phương của (Δ) và véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), ta có $\vec{a}=(2;1;3)$, $\vec{n}=(1;-1;-1)$.

Vì $\begin{cases} (\Delta)\perp(d) \\ (\Delta)\parallel(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}\perp\vec{a} \\ \vec{u}\perp\vec{n} \end{cases}$. Do đó $\vec{u}=[\vec{a};\vec{n}]=(2;5;-3)$.

Vậy phương trình của (Δ) là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{-3}$. □

Bài 19. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2;2;4)$, vuông góc với đường thẳng (d) : $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ và song song với mặt phẳng $(P): x+3y+2z+3=0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{a},\vec{u},\vec{n}$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của (d), véc tơ chỉ phương của (Δ) và véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), ta có $\vec{a}=(3;-2;2)$, $\vec{n}=(1;3;2)$.

Vì $\begin{cases}(\Delta)\perp(d)\\(\Delta)\parallel(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}$. Do đó $\vec{u}=[\vec{a};\vec{n}]=(-10;-4;11)$.

Vậy phương trình của (Δ) là $\dfrac{x-2}{-10}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-4}{11}$. □

Bài 20. Trong không gian cho các điểm $A(1;1;-1);B(2;-1;3),C(1;2;2),D(-1;-2;1)$. Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua A, vuông góc với AB và song song với mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

Ta có : $\overrightarrow{AB}=(1;-2;4);\overrightarrow{BC}=(-1;3;-1);\overrightarrow{CD}=(-2;-4;-1)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}\right]=(-7;1;10)$. Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của (d), theo bài ra ta có :$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}$. Do đó $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}\right]=(-24;-38;-13)$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $\dfrac{x-1}{-24}=\dfrac{y-1}{-38}=\dfrac{z+1}{-13}$. □

Bài 21. Trong không gian cho điểm $M(2;2;4)$, đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+3y+2z+2=0$. Hãy ;ập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).

Lời giải.

Gọi $\vec{a},\vec{u},\vec{n}$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của (d), véc tơ chỉ phương của (Δ) và véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), ta có $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{n}=(1;3;2)$.

Vì $\begin{cases}(\Delta)\perp(d)\\(\Delta)\parallel(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}$. Do đó $\vec{u}=[\vec{a};\vec{n}]=(1;-1;1)$.

Vậy đường thẳng (Δ) cần tìm có phương trình là $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{1}$. □

Bài 22. Trong không gian cho điểm $M(3;-1;4)$, đường thẳng $(d):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$. Hãy lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M, song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với đường thẳng (d).

Lời giải.

Gọi $\vec{a},\vec{u},\vec{n}$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của (d), véc tơ chỉ phương của (Δ) và véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy), ta có $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{n}=(0;0;1)$.

Vì $\begin{cases}(\Delta)\perp(d)\\(\Delta)\parallel(Oxy)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{a}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}$. Do đó $\vec{u}=[\vec{a};\vec{n}]=(-1;-2;0)$.

Vậy đường thẳng (Δ) cần tìm có phương trình là $\begin{cases}x=3-t\\y=-1-2t\\z=4\end{cases}$. □

DẠNG 7. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2

Phương pháp giải. Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định véc tơ chỉ phương $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ của các đường thẳng $(d_1), (d_2)$

Bước 2. Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u_1} \\ \vec{u} \perp \vec{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u_1}; \vec{u_2}]$$

Bước 3. Viết phương trình (d) đi qua M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$

Ví dụ 15. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là : $\vec{u_1} = (1; -4; 6)$ và $\vec{u_2} = (2; 1; -5)$.

Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u_1} \\ \vec{u} \perp \vec{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u_1}; \vec{u_2}] = (14; 17; 9).$$

Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(1; -1; 2) \\ \text{có VTCP } \vec{u} = (14; 17; 9) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 + 17t \\ z = 2 + 9t \end{cases}. \quad \square$$

Ví dụ 16. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $(d_2): \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là : $\vec{u_1} = (1; 1; 1)$ và $\vec{u_2} = (2; 1; -1)$.

Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u_1} \\ \vec{u} \perp \vec{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u_1}; \vec{u_2}] = (-2; 3; -1).$$

Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(1; -1; 2) \\ \text{có VTCP } \vec{u} = (-2; 3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}. \quad \square$$

Ví dụ 17. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}$ và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và $(Q): x + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0;1;1)$ và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Véc tơ pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là : $\overrightarrow{n_1} = (1;1;-1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1;0;0)$.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) là $\overrightarrow{u_1} = (8;1;1)$.

Gọi $\overrightarrow{u_2}$ là véc tơ chỉ phương của (d_2), ta có

$\begin{cases} \overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = [\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}] = (0;-1;-1)$.

Gọi $\overrightarrow{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :

$\begin{cases} \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (0;1;-1)$.

Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(0;1;1) \\ \text{có VTCP } \overrightarrow{u} = (0;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}.$$ □

Ví dụ 18. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1;1;3)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết :
$(d_1): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-6}{6}$ và $(d_2): \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-5}$.

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là : $\overrightarrow{u_1} = (1;-4;6)$ và $\overrightarrow{u_2} = (2;1;-5)$.

Gọi $\overrightarrow{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :

$\begin{cases} \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (14;17;9)$.

Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(1;-1;2) \\ \text{có VTCP } \overrightarrow{u} = (14;17;9) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}.$$ □

Ví dụ 19. Trong không gian cho các điểm $A(1;1;-1); B(2;-1;3), C(1;2;2), D(-1;-2;1)$. Lập phương trình của đường thẳng (d) đi qua O, vuông góc với AB và CD.

Lời giải.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (1;-2;4); \overrightarrow{CD} = (-2;-4;-1)$

Gọi $\overrightarrow{u}$ là véc tơ chỉ phương của (d), theo bài ra ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{CD} \end{cases}$. Do đó $\overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right] = (18;-7;-8)$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $\dfrac{x}{18}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z}{-8}$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=1\\y=10+2t\\z=t\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=3t\\y=3-2t\\z=-2\end{cases}$.
Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(6;-1;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là : $\vec{u_1}=(0;2;1)$ và $\vec{u_2}=(3;-2;0)$.
Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :
$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{u_1}\\\vec{u}\perp\vec{u_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=[\vec{u_1};\vec{u_2}]=(2;3;-6)$.
Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:
$(d):\begin{cases}\text{qua } M(6;-1;2)\\\text{có VTCP } \vec{u}=(2;3;-6)\end{cases}\Leftrightarrow(d):\begin{cases}x=6+2t\\y=-1+3t\\z=2-6t\end{cases}$. □

Bài 2. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$ và $(d_2):\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-\frac{7}{4}}{1}=\dfrac{z-\frac{11}{4}}{1}$.
Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(0;4;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là : $\vec{u_1}=(0;-1;1)$ và $\vec{u_2}=(4;1;-1)$.
Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :
$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{u_1}\\\vec{u}\perp\vec{u_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=[\vec{u_1};\vec{u_2}]=(-2;4;4)$.
Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:
$(d):\begin{cases}\text{qua } M(0;4;2)\\\text{có VTCP } \vec{u}=(-2;4;4)\end{cases}\Leftrightarrow(d):\begin{cases}x=-2t\\y=4+4t\\z=2+4t\end{cases}$. □

Bài 3. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=2-2t\end{cases}$ và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$ và $(Q):y-z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(2;1;4)$ và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Véc tơ pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là : $\vec{n_1}=(1;2;-1)$ và $\vec{n_2}=(0;1;-1)$.
Véc tơ chỉ phương của (d_1) là $\vec{u_1}=(2;1;-2)$.
Gọi $\vec{u_2}$ là véc tơ chỉ phương của (d_2), ta có

$\begin{cases}\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{n_2}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = [\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}] = (-1; 1; 1).$

Gọi $\overrightarrow{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :

$\begin{cases}\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (3; 0; 3).$

Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:

$$(d): \begin{cases}\text{qua } A(2;1;4) \\ \text{có VTCP } \overrightarrow{u} = (3;0;3)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 2+3t \\ y = 1 \\ z = 4+3t\end{cases}.$$

□

Bài 4. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(2;3;-1)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết :

$(d_1): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$ và $(d_2): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{5}$.

Lời giải.

Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là : $\overrightarrow{u_1} = (1;-3;2)$ và $\overrightarrow{u_2} = (3;-1;5)$.

Gọi $\overrightarrow{u}$ là một véc tơ chỉ phương của (d), ta có :

$\begin{cases}\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (-13; 1; 8).$

Khi đó, đường thẳng (d) thỏa mãn:

$$(d): \begin{cases}\text{qua } M(2;3;-1) \\ \text{có VTCP } \overrightarrow{u} = (-13;1;8)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{-13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{8}.$$

□

Bài 5. Trong không gian cho các điểm $A(1;1;-1); B(2;-1;3), C(1;2;2), D(-1;-2;1)$. Lập phương trình của đường thẳng (d) đi qua $M(1;1;5)$, vuông góc với AC và BD.

Lời giải.

Ta có : $\overrightarrow{AC} = (0;1;3); \overrightarrow{BD} = (-3;-1;-2)$

Gọi $\overrightarrow{u}$ là véc tơ chỉ phương của (d), theo bài ra ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{BD}\end{cases}$. Do đó $\overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}\right] = (1;-9;3)$.

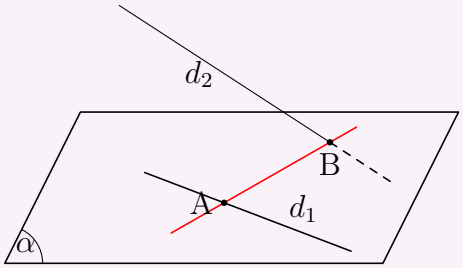
Vậy phương trình đường thẳng (d) là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-9} = \dfrac{z-5}{3}$

□

DẠNG 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

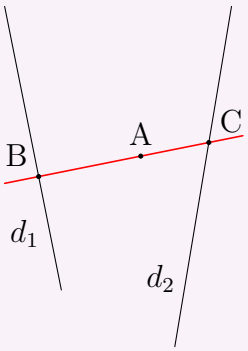
Phương pháp giải. **Cách 1**:

- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d_1.
- ☑ Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_2$.
- ☑ Đường thẳng cần tìm đi qua A và B.



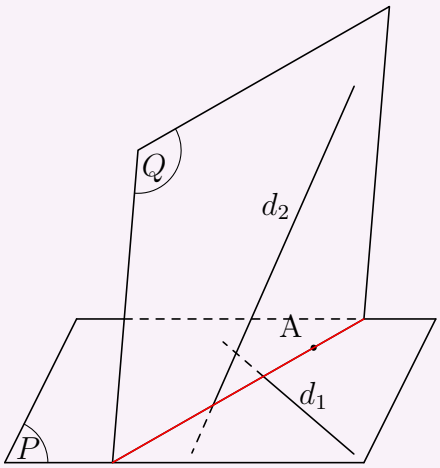
Cách 2:

- ☑ Gọi B, C lần lượt là hai điểm thuộc d_1, d_2.
- ☑ Ba điểm A, B, C thẳng hàng suy ra tọa độ B, C.
- ☑ Đường thẳng cần tìm đi qua ba điểm A, B, C.



Cách 3:

- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng d_1.
- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
- ☑ Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (P) và (Q).



Ví dụ 20. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-6)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z}{2}$ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 1+4t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;4;2)$ và đi qua $M(0;6;0)$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_1.

véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = \left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}_1\right] = (16;-8;8)$, chọn $\vec{n}_\alpha = (2;-1;1)$.

Suy ra, $(\alpha) : 2x - y + z + 6 = 0$.

Gọi $B = (\alpha) \cap d_2$. Xét phương trình $2(1-t) - (2+t) + (1+4t) + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -7$.

Suy ra $B(8;-5;-27)$.
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \overrightarrow{AB} = (7;-7;-21)$, chọn $\vec{u}_d = (1;-1;-3)$.
Vậy phương trình của đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+6}{-3}$. □

Ví dụ 21. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;0)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A đồng thời cắt cả trục tọa độ Ox và đường thẳng d.

Lời giải.

Giả sử Δ cắt Ox tại điểm B và cắt đường thẳng d tại điểm C.
Gọi $B(a;0;0) \in Ox$ và $C(3-t;1+t;-2t) \in d$.
Ba điểm A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (1).
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (a-1;1;0)$ và $\overrightarrow{AC} = (2-t;2+t;-2t)$.
Từ (1) suy ra $\begin{cases} t = 0 \\ a = 2 \end{cases}$.
Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (1;1;0)$.
Vậy phương trình của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;1)$, đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$ và đường thẳng $d_2: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;-1;0)$ và đi qua $M(1;1;2)$.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_1.
Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1\right] = (1;1;-1)$.
Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1;-1;1)$ và đi qua $N(2;0;0)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{NA}, \vec{u}_2\right] = (1;2;1)$.
Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ và đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (3;-2;1)$.
Vậy phương trình của đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. □

Bài 7. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} =$

$\dfrac{z-1}{-2}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm A lần lượt cắt hai đường thẳng d_1, d_2 tại B, C. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

Lời giải.

Gọi $B(b;b;1-2b) \in d_1$ và $C(2+c;2c;1-c) \in d_2$.
Ba điểm A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (1).
Ta có: $\overrightarrow{AB}=(b-1;b+1;-2b)$ và $\overrightarrow{AC}=(c+1;2c+1;-c)$.
Từ (1) suy ra $\begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1;1;-1) \\ C(1;-2;2) \end{cases}$.
Ta có $BC=\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$. □

Bài 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, đường thẳng $d_2: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+at \\ y=bt \\ z=9t \end{cases}$. Tìm a, b để đường thẳng Δ đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

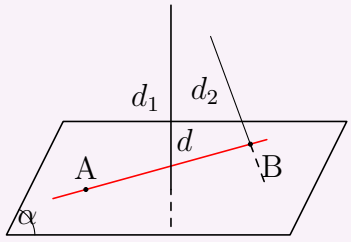
Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;1;-1)$ và đi qua $M(2;0;1)$.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_1.
Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}_1\right]=(1;-2;-1)$.
Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;-1;2)$ và đi qua $N(0;1;1)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
Véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{NA}, \vec{u}_2\right]=(3;3;0)$, chọn $\vec{n}_Q=(1;1;0)$.
Khi đó $\Delta=(P)\cap(Q)$ và đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=[\vec{n}_P, \vec{n}_Q]=(1;-1;3)$.
Dựa vào phương trình của $\Delta \Rightarrow \dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{9}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$. □

DẠNG 9. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2

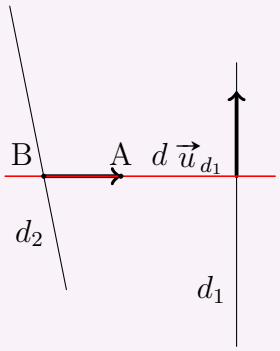
Phương pháp giải. **Cách 1**:

- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc đường thẳng d_1.
- ☑ Tìm giao điểm $B=(\alpha)\cap d_2$.
- ☑ Đường thẳng cần tìm đi qua A và B.



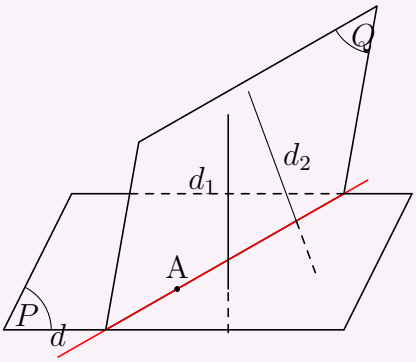
Cách 2:

- ☑ Gọi B là giao điểm của d và d_2.
- ☑ Vì AB vuông góc d_1 nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Rightarrow$ tọa độ B.
- ☑ Đường thẳng cần tìm đi qua điểm A, B.



Cách 3:

- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1.
- ☑ Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
- ☑ Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (P) và (Q).



Ví dụ 22. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;0)$, đường thẳng d_1 : $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và đường thẳng d_2 : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (3;-1;-1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1.

Véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_1 = (3;-1;-1)$.

Suy ra, $(\alpha) : 3x - y - z - 1 = 0$.

Gọi $B = (\alpha) \cap d_2$. Xét phương trình $3(2+t) - (1+2t) - (3+2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra $B(3;3;5)$.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \overrightarrow{AB} = (2;1;5)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{5}$. □

Ví dụ 23. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;0;1)$, đường thẳng d_1 : $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ và đường thẳng d_2 : $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1;2;4)$.
Giả sử d cắt đường thẳng d_2 tại điểm B. Gọi $B(-1+t;2t;1-t) \in d_2$.
Vì $d \perp d_1$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0$ (1).
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2+t;2t;-t)$ và $\vec{u}_1 = (-1;2;4)$.
Từ (1) suy ra $-1(2+t) + 2 \cdot 2t + 4(-t) = 0 \Leftrightarrow t = -2$.
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \overrightarrow{AB} = (0;-4;2)$, chọn $\vec{u}_d = (0;-2;1)$.
Vậy phương trình của đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -3 \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = -3+5t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1;1;2)$.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1.
Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = \vec{u}_1 = (-1;1;2)$.
Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (5;1;-2)$ và đi qua $M(-3;0;1)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
Véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_2\right] = (4;-8;6)$, chọn $\vec{n}_Q = (2;-4;3)$.
Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ và đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (11;7;2)$.
Vậy phương trình của đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{11} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{2}$. □

Bài 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;0)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$, và đường thẳng $d_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 tại điểm B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;-2;1)$.
Gọi $B(1+t;t;1+2t) \in d_2$.
Vì $\Delta \perp d_1$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0$ (1).
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (t-2;t-1;2t+1)$ và $\vec{u}_1 = (1;-2;1)$.
Từ (1) suy ra $1(t-2) - 2(t-1) + 1(2t+1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
Suy ra $B(0;-1;-1)$.
Ta có $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (-1-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{14}$. □

Bài 11. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{1} =$

$\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{1}$, đường thẳng $d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+at\\y=1+4t\\z=2+bt\end{cases}$. Tìm a,b để đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

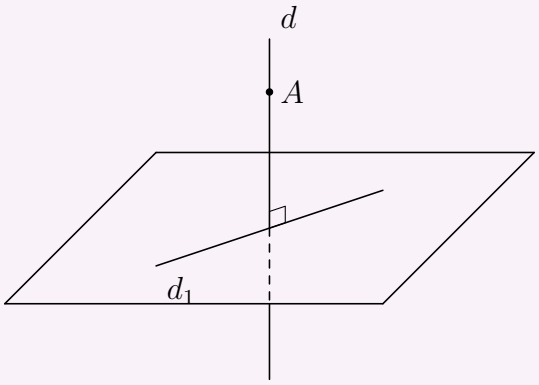
Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;-1;1)$.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1.
Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=\vec{u}_1=(1;-1;1)$.
Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;1;1)$ và đi qua $M(1;2;0)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
Véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}_2\right]=(3;-2;-1)$.
Khi đó $\Delta=(P)\cap(Q)$ và đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(3;4;1)$.
Dựa vào phương trình của $\Delta\Rightarrow\dfrac{a}{3}=\dfrac{4}{4}=\dfrac{b}{1}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$. □

DẠNG 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_1

Phương pháp giải.

- Gọi $M\in d\cap d_1$.
- Vì $d\perp d_1$ nên ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_{d_1}=0$. Từ đây tìm được tọa độ điểm M.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và M.



Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$ và đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Gọi $M(2t;1+t;-t)$ là giao điểm của d và d_1. Vì $d\perp d_1$ nên
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_{d_1}=0\Leftrightarrow(2t-1)\cdot2+(1+t-2)\cdot1+(-t+2)\cdot(-1)=0\Leftrightarrow6t-5=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{6}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{6};\dfrac{7}{6}\right)$. Từ đó ta có phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+4t\\y=2-t\\z=-2+7t\end{cases}$. □

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-1;1)$ và đường thẳng $d_1: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Gọi $M(-3+2t;1-t;-1+4t)$ là giao điểm của d và d_1. Vì $d\perp d_1$ nên
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_{d_1}=0\Leftrightarrow(-3+2t+2)\cdot 2+(1-t+1)\cdot(-1)+(-1+4t-1)\cdot 4=0\Leftrightarrow 21t-12=0\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{7}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{2}{7}\right)$. Từ đó ta có phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=-2+t\\y=-1+10t\\z=1+2t\end{cases}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Đáp số: $d:\begin{cases}x=2-17t\\y=-1+27t\\z=-3+12t\end{cases}$. □

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$ và đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases}$.
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Đáp số: $d:\begin{cases}x=2\\y=-1\\z=1+t\end{cases}$. □

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, $(P): x+2y-z+2=0$ và $(Q): -x+3y+2z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của $(P),(Q)$ lần lượt là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(-1;3;2)$. Gọi d_1 là giao tuyến của (P) và (Q). Ta có $\vec{u}_{d_1}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(7;-1;5)$, chọn $B(-3;0;-1)\in(P)\cap(Q)$.
Gọi $M(-3+7t;-t;-1+5t)\in d\cap d_1$, ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_{d_1}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{46}{75}$.

Vậy, đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1+22t\\y=2-196t\\z=3-70t\end{cases}$. □

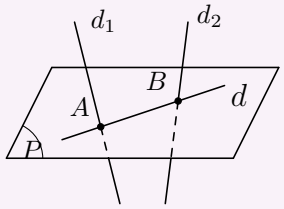
DẠNG 11. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

Phương pháp giải.

a) Trường hợp trong hai đường thẳng d_1, d_2 có đường thẳng song song với (P) thì không tồn tại đường thẳng d.

b) Trường hợp d_1 và d_2 đều không nằm trên (P) và cắt (P):

- Gọi giao điểm của d_1, d_2 với (P) lần lượt là A và B. Từ đó tìm được tọa độ A và B.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B.



c) Trường hợp có đường thẳng nằm trên (P), giả sử $d_1 \subset (P)$:

- Nếu $d_2 \subset (P)$ thì với mỗi điểm M nằm trên (P) ta sẽ lập được vô số đường thẳng d qua M, đồng thời cắt d_1 và d_2.
- Nếu $d_2 \not\subset (P)$, d_2 cắt (P) thì ta tìm giao điểm M của d_2 và (P). Như vậy, cũng có vô số đường thẳng d qua M và cắt d_1.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): y+2z=0$, $d_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}$ và $d_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(0;1;2)$, $\vec{u}_{d_1}=(-1;1;4)$, $\vec{u}_{d_2}=(-1;2;0)$. Kiểm tra $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d_1}\neq 0$, $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d_2}\neq 0$ nên $(P)\cap d_1\equiv A(1;0;0)$ và $(P)\cap d_2\equiv B(5;-2;1)$. Từ đó ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;1)$.

Vậy, đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$. □

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x-3y+3z-4=0$, $d_1: \begin{cases} x=-7+3t \\ y=4-2t \\ z=4+3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1+3t' \\ y=2+t' \\ z=1-t' \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(2;-3;3)$, $\vec{u}_{d_1}=(3;-2;3)$, $\vec{u}_{d_2}=(3;1;-1)$. Kiểm tra $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d_1}\neq 0$, $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d_2}=0$ nên

$(P)\cap d_1\equiv A\left(-\dfrac{31}{7};\dfrac{16}{7};\dfrac{46}{7}\right)$. Do $B(1;2;1)\in d_2$ mà $B\notin(P)$ nên $(P)\parallel d_2$.

Vì vậy, không tồn tại đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):2x-y+z-3=0$, $d_1:\begin{cases}x=-1+3t\\y=4-2t\\z=4+3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+t'\\y=4-t'\\z=3-3t'\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;1)$, $\vec{u}_{d_1}=(3;-2;3)$, $\vec{u}_{d_2}=(1;-1;-3)$. Kiểm tra $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d_1}\neq 0$, $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d_2}=0$ nên $(P)\cap d_1\equiv A\left(\dfrac{4}{11};\dfrac{34}{11};\dfrac{59}{11}\right)$. Do $B(2;4;3)\in d_2$ mà $B\in(P)$ nên $d_2\subset(P)$.

Vậy, đường thẳng d có phương trình dạng $d:\begin{cases}x=\dfrac{4}{11}+at\\y=\dfrac{34}{11}+bt\\z=\dfrac{59}{11}+ct\end{cases}$, với điều kiện $(a;b;c)\neq k\vec{u}_{d_2}$, $\forall k\neq 0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):3x+y+z+3=0$, $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=2+t'\\z=1-3t'\end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Đáp số: $d:\begin{cases}x=-3+11t\\y=7-16t\\z=-1-17t\end{cases}$. □

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):3x+y+z+3=0$, $d_1:\begin{cases}x=-2+2t\\y=4-3t\\z=-1-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=-2+2t'\\z=-4+t'\end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Kiểm tra được d_1 cắt d_2 và cùng nằm trên mặt phẳng (P). Do đó, có vô số đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P) đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2. □

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 3x-z+2=0$, $d_1: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4-5t \\ z=1+3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=-2+2t' \\ z=-4+t' \end{cases}$.
Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

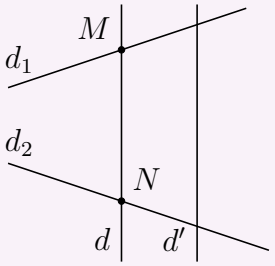
Lời giải.

Kiểm tra được $d_1 \parallel (P)$ nên không tồn tại đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

DẠNG 12. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

Phương pháp giải.

- Gọi $M \in d \cap d_1$, $N \in d \cap d_2$.
- Vì $d \parallel d'$ nên $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_{d'}$. Từ đây tìm được tọa độ M, N.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'}$.



⚠ *Nếu $d_1 \parallel d'$, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ hoặc $d_2 \parallel d'$, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ hoặc một trong hai đường thẳng d_1, d_2 trùng với d' thì không tồn tại đường thẳng d.*

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d': \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$,
$d_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+2t \\ z=-3+t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Gọi $M(-1+t_1; 1-t_1; 1+2t_1) \in d \cap d_1$, $N(2+3t_2; -1+2t_2; -3+t_2) \in d \cap d_2$.
Ta có $\overrightarrow{MN} = (3t_2-t_1+3; 2t_2+t_1-2; t_2-2t_1-4)$. Vì $d \parallel d'$ nên $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_{d'}$.
Từ đó ta tìm được $t_1=-\dfrac{51}{5}, t_2=\dfrac{8}{5}$ và tính được $M\left(-\dfrac{56}{5}; \dfrac{56}{5}; -\dfrac{97}{5}\right)$, $\overrightarrow{MN}=(18; -9; 18)$.
Vậy $d: \dfrac{x+\frac{56}{5}}{2}=\dfrac{y-\frac{56}{5}}{-1}=\dfrac{z+\frac{97}{5}}{2}$. □

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d': \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$,

$d_1: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 + 3t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = -3 + t' \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Giả sử $M(1-3t_1; -1+t_1; -3-t_1) \in d \cap d_1$, $N(2+3t_2; -1+2t_2; -3+t_2) \in d \cap d_2$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (3t_2 + 3t_1 + 1; 2t_2 - t_1; t_2 + t_1)$.

Vì $d \parallel d'$ nên $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_{d'} \Leftrightarrow \dfrac{3t_2 + 3t_1 + 1}{3} = \dfrac{2t_2 - t_1}{-1} = \dfrac{t_2 + t_1}{1}$.

Mà hệ này vô nghiệm nên không tồn tại đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán.

⚠ *Chúng ta cũng dễ dàng kiểm tra $d_1 \parallel d'$, $d_2 \cap d_1 = \varnothing$ nên có thể kết luận được rằng không tồn tại đường thẳng d.*

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d': \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$,

$d_1: \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d_2: \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Gọi $M(-3t_1; -1+t_1; 2+2t_1) \in d \cap d_1$, $N(6+2t_2; -3+2t_2; 2-t_2) \in d \cap d_2$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2t_2 + 3t_1 + 6; 2t_2 - t_1 - 2; -t_2 - 2t_1)$.

Vì $d \parallel d'$ nên $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_{d'} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_2 + 3t_1 + 6 = -3k \\ 2t_2 - t_1 - 2 = k \\ -t_2 - 2t_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ k = 2 \end{cases}$.

Từ đó ta có $M(0; -1; 2)$, $\overrightarrow{MN} = (-6; 2; 0)$.

Vậy $d: \begin{cases} x = -6t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$. □

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d': \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$,

$d_1: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1}$ và $d_2: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Đáp số: $d: \begin{cases} x = \dfrac{169}{14} - 285t \\ y = \dfrac{80}{7} + 190t \\ z = \dfrac{61}{14} + 95t \end{cases}$. □

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1}$ và $d_2 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+6}{4} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Kiểm tra được $d_1 \equiv d_2, d_1 \nparallel d'$ nên tại mỗi điểm tùy ý trên đường thẳng d_1 có duy nhất một đường thẳng d song song với d'.

Vậy, đường thẳng d có phương trình là $\begin{cases} x = x_0 + 3t \\ y = y_0 + 2t \\ z = z_0 + 3t \end{cases}$, với $\dfrac{x_0-2}{3} = \dfrac{y_0+2}{4} = \dfrac{z_0-1}{1}$. □

DẠNG 13. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng song song cho trước và nằm trong mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

Phương pháp giải. Để viết phương trình đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng song song cho trước d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó ta thực hiện theo các bước sau:

- ☑ Xác định điểm $A \in d_1, B \in d_2$ và gọi I là trung điểm của AB, khi đó d đi qua I.
- ☑ Xác đinh véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d_1 hoặc của đường thẳng d_2. Khi đó $\vec{u}$ cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d

Ví dụ 3. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1, d_2, với $d_1 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{3}; d_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (1;2;3)$. Điểm $A(3;2;4)$ thuộc d_1, điểm $B(0;2;1)$ thuộc d_2.

Vì $d \parallel d_1 \parallel d_2$ và d cách đều và nằm trong mặt phẳng chứa $d_1; d_2$ nên trung điểm $I\left(\dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{5}{2}\right)$ của AB nằm trên d.

Vậy phương trình chính tắc của $d : \dfrac{x-\frac{3}{2}}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-\frac{5}{2}}{3}$. □

Ví dụ 4. Cho đường thẳng d_1 là giao của hai mặt phẳng $(P) : 2x - z = 3, (Q) : 3x - 2y = 8$ và đường thẳng d_2 là giao của hai mặt phẳng $(P') : -2x + z = 1, (Q') : 3x - 10y + 6z = 8$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1, d_2.

Lời giải.

Viết lại phương trình d_1, d_2 về dạng chính tắc, ta có $d_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{4}; d_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+\frac{1}{5}}{3} = \dfrac{z-1}{4}$, khi đó dễ thấy $d_1 \parallel d_2$.

Làm tương tự ví dụ trên ta có $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+\frac{3}{5}}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng song song $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+5}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Lời giải.

Ta có điểm $A(1;3;-1) \in d_1$, điểm $B(3;1;-5) \in d_2$.
Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $I(2;2;-3)$.
Từ giả thiết suy ra d đi qua điểm I và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2;1;-1)$.
Vậy d có phương trình $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. □

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(5;1;-5)$ và đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Gọi d_2 là đường thẳng qua A và song song với d_1. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Lời giải.

Ta có điểm $B(-1;3;-1) \in d_1$.
Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $I(2;2;-3)$.
Từ giả thiết suy ra d đi qua điểm I và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (3;2;-1)$.
Vậy d có phương trình $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. □

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3), B(1;-2;1$ và đường thẳng $(\Delta) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+3t \\ z = -1-2t \end{cases}$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các đường thẳng qua A, B và song song với (Δ). Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

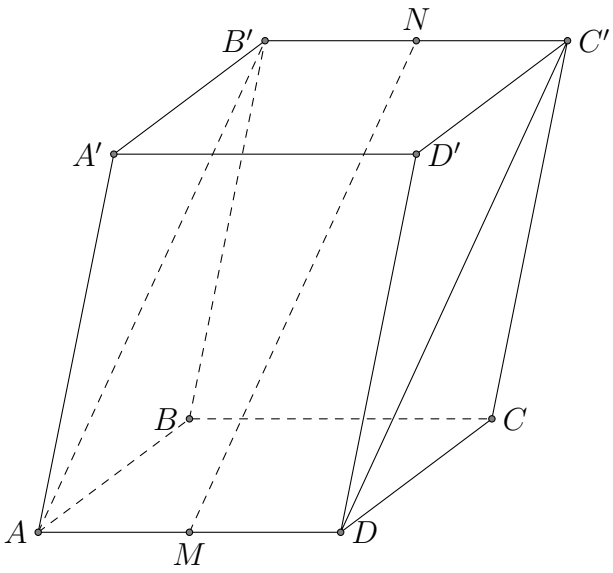
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $I(1;0;2)$.
Từ giả thiết suy ra d đi qua điểm I và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;3;-2)$.
Vậy d có phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$. □

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;2;-1), B(3;-4;1), B'(2;-1;3)$ và $D'(0;3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều các đường thẳng AB', DC' và nằm trong mặt phẳng chứa các đường thẳng đó.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và $B'C'$, khi đó đường thẳng d đi qua các điểm M, N.
Ta xác định được $D(1;0;3)$ và $C'(2;-3;7)$, từ đó suy ra $M(1;1;1)$ và $N(2;-2;5)$.
Vậy d có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$.

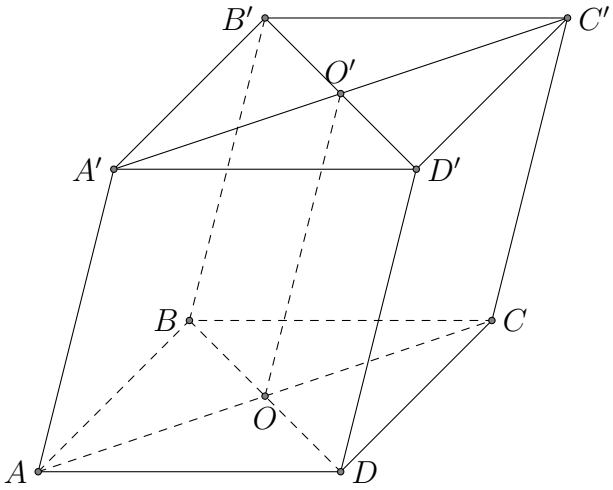


□

Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;2;-1), B(3;-4;1), B'(2;-1;3)$ và $D'(0;3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều các đường thẳng AA', BB', CC', DD'.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$. Khi đó d là đường thẳng đi qua các điểm O, O'.
Ta xác định được $D(1;0;3)$, từ đó suy ra $O(2;-2;2)$ và $O'(1;1;4)$.
Vậy d có phương trình $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{2}$.



□

DẠNG 14. Viết phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước

Phương pháp giải. Để viết phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cho trước ta có thể thực hiện theo các cách sau:
Cách 1:

- ☑ Đưa phương trình d_1, d_2 về dạng tham số và xác định các véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của các đường thẳng d_1, d_2.
- ☑ Lấy các điểm bất kỳ $A \in d_1, B \in d_2$ và tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$. Khi đó đường thẳng AB là đường vuông góc chung của d_1, d_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$. Từ đó tìm

được tọa độ của các điểm A, B.

☑ Đường vuông góc chung d của d_1, d_2 là đường thẳng đi qua các điểm A, B

Cách 2:

☑ Xác định các véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, khi đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

☑ Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d_1 và có véc-tơ pháp tuyến $[\vec{u}_1, \vec{u}]$ và phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d_2 và có véc-tơ pháp tuyến $[\vec{u}_2, \vec{u}]$.

☑ Đường vuông góc chung d của d_1, d_2 chính là giao tuyến của các mặt phẳng (P), (Q).

Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 ở đó d_1 là giao của hai mặt phẳng $(P): 3x-2y=-1, (Q): y+3z=8$; d_2 là giao của hai mặt phẳng $(P'): x-4y=-1, (Q): 3y-z=4$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1, d_2.

Lời giải.

Viết lại d_1, d_2 dưới dạng tham số $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=2-t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=3+4s \\ y=1+s \\ z=-1+3s \end{cases}$. Do d là đường vuông góc chung nên ta có ngay $[\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}] = \overrightarrow{u_d}$ nên $u_d = (1;-1;-1)$.

Đến dây ta làm theo một trong hai hướng sau

☑ Gọi $M_1(1+2t; 2+3t; 2-t); M_2(3+4t'; 1+t'; -1+3t')$ lần lượt là giao của d với d_1, d_2 vì thế $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{u_d}$ nên

$\dfrac{2-2t+4t'}{1} = \dfrac{-3t+t'-1}{-1} = \dfrac{t+3t'-3}{-1}$. Giải ra ta được $\begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ t'=\dfrac{1}{5} \end{cases}$. Ta có $M_1\left(\dfrac{9}{5}; \dfrac{16}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$.

Vậy phương trình của $d: \dfrac{x-\frac{9}{5}}{1} = \dfrac{y-\frac{16}{5}}{-1} = \dfrac{z-\frac{8}{5}}{-1}$

☑ Cách hai vẫn gọi M_1, M_2 như trên, gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc d ta có $\begin{cases} [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{d_1}}]\,\overrightarrow{MM_1} = 0 \\ [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{d_2}}]\,\overrightarrow{MM_2} = 0 \end{cases}$

với $[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{d_1}}] = (4;-1;5)$, $[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = (-2;-7;5)$, $\overrightarrow{MM_1} = (-x_0+1+2t; -y_0+2+3t; -z_0+2-t)$; $\overrightarrow{MM_2} = (-x_0+3+4t'; -y_0+1+t'; -z_0-1+3t')$, với lưu ý là $[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{d_1}}]\,\overrightarrow{u_{d_1}} = 0$, $[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{d_2}}]\,\overrightarrow{u_{d_2}} = 0$ ta được $\begin{cases} 4(-x_0+1)-(-y_0+2)+5(-z_0+2)=0 \\ -2(-x_0+3)-7(-y_0+1)+5(-z_0-1)=0 \end{cases}$.

Vậy d là giao của hai mặt phẳng $(\alpha): -4x+y-5z=-12, (\beta): 2x+7y-5z=18$.

□

Ví dụ 6. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng sau $d_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}; d_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Gọi đường vuông góc chung là d, ta có ngay $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}] = (1;-2;1)$.

Gọi hai giao điểm của d với $d_1; d_2$ lần lượt là $M_1; M_2$, ta có $M_1(t;t;t), M_2(1+t'; 1+2t'; 1+3t')$. Do

$\vec{u_d} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, ta tìm được $\begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$.

Vậy $M_1(1;1;1)$, phương trình $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

d_1 có phương trình tham số $d_1: \begin{cases} x = 2s \\ y = 1-s \\ z = -2+s \end{cases}$.

$A \in d_1 \Rightarrow A(2s; 1-s; -2+s)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-1+2t; 1+t; 3)$.

AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$, ở đó $\vec{u}_1 = (2;-1;1)$ và $\vec{u}_2 = (2;1;0)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (2s-2t+1; -s-t; s-5)$, từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6s-3t = 3 \\ 3s-5t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;0;-1) \\ B(1;2;3) \end{cases}.$$

Vậy d có phương trình $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{4}$ □

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x = 4+t \\ y = 3+3t \\ z = 3+2t \end{cases}$ và $d_2: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

$A \in d_1 \Rightarrow A(4+t; 3+3t; 3+2t)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-1+s; -s; 2+s)$.

AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$, ở đó $\vec{u}_1 = (1;3;2)$ và $\vec{u}_2 = (3;-1;1)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3s-t-5; -s-3t-3; s-2t-1)$, từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11s-2t-13 = 0 \\ 2s-14t-16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3;0;1) \\ B(2;-1;3) \end{cases}.$$

Vậy d có phương trình $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$. □

Bài 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=4+2t \\ y=4+2t \\ z=-3-t \end{cases}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

$A \in d_1 \Rightarrow A(4+2t;4+2t;-3-t)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(1+3s;-1+2s;2-2s)$.

AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_1=0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_2=0 \end{cases}$, ở đó $\vec{u}_1=(2;2;-1)$ và $\vec{u}_2=(3;2;-2)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} t=-1 \\ s=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;2;-2) \\ B(4;1;0) \end{cases}$.

Vậy d có phương trình $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. □

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+s \\ y=-3+2s \\ z=1+3s \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2t;y=2+t;-3+3t)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(2+s;-3+2s;1+3s)$.

AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_1=0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_2=0 \end{cases}$, ở đó $\vec{u}_1=(2;1;3)$ và $\vec{u}_2=(1;2;3)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} t=\dfrac{29}{9} \\ s=\dfrac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\dfrac{67}{9};\dfrac{47}{9};\dfrac{20}{3}\right) \\ B\left(\dfrac{43}{9};\dfrac{23}{9};\dfrac{84}{9}\right) \end{cases}$.

Ta thấy $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{24}{9};-\dfrac{24}{9};\dfrac{24}{9}\right)$.

Vậy d qua A và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=\dfrac{67}{9}+t \\ y=\dfrac{47}{9}+t \\ z=\dfrac{20}{3}-t \end{cases}$. □

Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $A(1;2;0)$, $B(4;6;0)$, $D(-3;5;0)$. Viết phương trình đường vuông góc chung của các đường thẳng SH và BC, ở đó H là tâm của hình vuông $ABCD$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của BC, khi đó dễ thấy $HK \perp BD$.

Mặt khác do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HK$.

Vậy HK là đường vuông góc chung của SH và BC. Ta có $H\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2};0\right), C(0;9;0), K\left(2;\frac{15}{2};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{HK}=\left(\frac{3}{2};2;0\right)$.

Vậy HK qua H và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;0)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+3t \\ y=\frac{11}{2}+4t \\ z=0 \end{cases}$. □

DẠNG 15. Viết phương trình tham số của đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng (P)

Phương pháp giải. Dạng bài này thường có hai hướng để làm

- ☑ Thứ nhất, lấy hai điểm bất kỳ trên d và xác định hình chiếu vuông góc xuống (P), tiếp tục viết phương trình đi qua hai hình chiếu ta được phương trình d'
- ☑ Thứ hai, viết phương trình mặt phẳng (Q) qua d và vuông góc với (P), khi đó d' là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$.
- ☑ Trong trường hợp d' song song hay cắt (P), ta chỉ cần lấy hình chiếu của một điểm xuống mặt phẳng (P).

Ví dụ 7. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ lên mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$.

Lời giải.

Giao điểm của (P) và d là $M(x;y;z)$. Ta tìm được $M(-1;1;-1)$, cần tìm thêm hình chiếu vuông góc của một điểm khác trên d xuống (P).

Ta có $A(1;2;1)$ thuộc d, đường thẳng qua A và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases}$, từ đây ta xác định toạ độ hình chiếu của A lên (P) là $A'\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Hình chiếu vuông góc d' của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) là đường thẳng đi qua các điểm M, A'. Ta có $\overrightarrow{MA'}=\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, do đó MA' là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$.

d' có phương trình: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$ □

Ví dụ 8. Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, hãy viết phương trình đường thẳng d là hình

chiếu vuông góc của $d'\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$ lên (P).

Lời giải.

Nhận xét, do $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u'_d}$ nên $d'\parallel(P)$, do đó ta chỉ cần tìm hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;1;1)$ lên (P) là điểm $A'(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, sau đó viết phương trình d qua A' nhận $\overrightarrow{u'_d}$ làm $vec-t$ chỉ phương $d:\dfrac{x-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{y-\frac{1}{3}}{-1}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{-1}$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy).

Lời giải.

Trên đường thẳng d lấy hai điểm $A(-1;2;-3)$ và $B(1;5;-2)$.

Gọi A',B' lần lượt là hình chiếu của A,B xuống mặt phẳng (Oxy) suy ra $A'(-1;2;0)$ và $B'(1;5;0)$.

Khi đó hình chiếu d' của d xuống (Oxy) qua hai điểm A',B'.

Đường thẳng A',B' có phương trình tham số $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2+3t\\z=0\end{cases}$ □

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3),B(2;5;7)$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxz).

Lời giải.

Gọi A',B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B trên mặt phẳng (Oxz). Dễ thấy $A'(1;0;-3),B'(2;0;7)$ và $\overrightarrow{A'B'}=(1;0;10)$.

Đường thẳng $A'B'$ chính là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng $A'B'$ có phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-3+10t.\end{cases}$ □

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình $d:\begin{cases}x=4+2t\\y=2+3t\\z=-1-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $(P):3x+y-z-4=0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P).

Lời giải.

Dễ thấy d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $A(2;-1;1)$ và $B(4;2;-1)\in d$.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên (P), khi đó ta có $B'(1;1;0)$.

Đường thẳng AB' chính là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P). Đường thẳng AB' có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$. □

Bài 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mặt phẳng $(P):3x-y+z-9=0$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (P), khi đó $d'=(P)\cap(Q)$. Ta có $\vec{u}=(2;-1;2)$ là véc-tơ chỉ phương của d; $\vec{n}=(3;-1;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).
Do đó $\vec{n'}=[\vec{u},\vec{n}]=(1;4;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (Q).
Từ đó suy ra $\vec{u'}=\left[\vec{n'},\vec{n}\right]=(5;2;-13)$ là véc-tơ chỉ phương của d'.
Ta có $M(3;2;2)$ là giao điểm của d và (P), do đó d') có phương trình: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{-13}$.
□

Bài 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm I. Biết $A(1;2;1)$, $B(2;3;0)$, $D(-2;1;2)$ và $S(0;4;3)$. Gọi M là trung điểm SB và G là trọng tâm tam giác SBD. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng MG trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Ta có $I(0;2;1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;-1;1)$ và $\overrightarrow{IS}=(0;2;2)$.
Dễ thấy $\overrightarrow{IS}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IS}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ nên $SI\perp(ABCD)$.
Từ đó suy ra BD chính là hình chiếu vuông góc của MG trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Từ đó suy ra hình chiếu vuông góc của đường thẳng MG trên mặt phẳng $(ABCD)$ có phương trình $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{-1}$. □

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ nhận biết

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây không phải là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{u_4}=(1;2;1)$. **B.** $\overrightarrow{u_3}=(-1;2;-1)$. **C.** $\overrightarrow{u_2}=(2;-4;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(-3;6;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;1)$. Do đó véc-tơ $\overrightarrow{u_4}=(1;2;1)$ không là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$. Điểm M nằm trên đường thẳng Δ thì điểm M có dạng nào sau đây?

A. $M(at;bt;ct)$. **B.** $M(x_0t;y_0t;z_0t)$.

C. $M(a+x_0t;b+y_0t;c+z_0t)$. **D.** $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ nên đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\Delta\colon \begin{cases} z=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$.

Điểm M nằm trên đường thẳng Δ nên điểm M có dạng $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số là

A. $x=0$. **B.** $y+z=0$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Trục Ox đi qua $O(0;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{i}(1;0;0)$ nên có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x=0+1.t \\ y=0+0.t \\ z=0+0.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0. \\ z=0 \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox?

A. $\vec{u}=(1;0)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;1)$. **D.** $\vec{u}=(0;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{i}=(1;0)$ là một véc-tơ chỉ phương của trục Ox. Do đó đường thẳng song song với trục Ox có một véc-tơ là $\vec{u}=(1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\,(1;3;-1)$. **B.** $M\,(-3;5;3)$. **C.** $M\,(3;5;3)$. **D.** $M\,(1;2;-3)$.

Lời giải.

Nếu một điểm nằm trên một đường thẳng thì khi thay tọa độ điểm đó vào phương trình đường thẳng thì sẽ thỏa mãn phương trình đường thẳng.

Lần lượt thay tọa độ M từ các phương án vào phương trình đường thẳng d ta được $M\,(-3;5;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : x + 2z + 3 = 0$. Một vec-tơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{b} = (2;-1;0)$. **B.** $\vec{v} = (1;2;3)$. **C.** $\vec{a} = (1;0;2)$. **D.** $\vec{u} = (2;0;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;0;2)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) nên có vec-tơ chỉ phương là $\vec{a} = \vec{n} = (1;0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$?

A. $Q(-2;1;-3)$. **B.** $P(2;-1;3)$. **C.** $M(-1;1;2)$. **D.** $N(1;-1;2)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình đường thẳng ta thấy đường thẳng đã cho đi qua điểm $N(1;-1;2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d?

A. $Q(-2;-4;7)$. **B.** $N(4;0;-1)$. **C.** $M(1;-2;3)$. **D.** $P(7;2;1)$.

Lời giải.

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d, điểm nào có tọa độ không thỏa mãn phương trình đường thẳng d là điểm cần tìm.

① Điểm $Q(-2;-4;7)$: $\dfrac{-2-1}{3} = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{7-3}{-4} = -1 \Rightarrow Q \in d$.

② Điểm $N(4;0;-1)$: $\dfrac{4-1}{3} = \dfrac{0+2}{2} = \dfrac{-1-3}{-4} = 1 \Rightarrow N \in d$.

③ Điểm $M(1;-2;3)$: $\dfrac{1-1}{3} = \dfrac{-2+2}{2} = \dfrac{3-3}{-4} = 0 \Rightarrow M \in d$.

④ Điểm $P(7;2;1)$: $\dfrac{7-1}{3} = \dfrac{2+2}{2} = \dfrac{1-3}{-4} \Rightarrow$ Vô lí$\Rightarrow P \notin d$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2;-1;2)$. **B.** $M(-1;-2;-3)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $N(-2;1;-2)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm đã cho vào phương trình của đường thẳng d, ta có

☑ Với $M(-1;-2;-3)$ thì $\dfrac{-1-1}{2} \neq \dfrac{-2-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm M.

☑ Với $N(-2;1;-2)$ thì $\dfrac{-2-1}{2} \neq \dfrac{1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm N.

☑ Với $P(1;2;3)$ thì $\dfrac{1-1}{2} = \dfrac{2-2}{-1} = \dfrac{3-3}{2} = 0$, suy ra d đi qua điểm P.

☑ Với $Q(2;-1;2)$ thì $\dfrac{2-1}{2} \neq \dfrac{-1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm Q.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Đường thẳng đi qua $A(2;-1;3)$ và nhận $\vec{a} = (1;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình

A. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = -1+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2-t \\ y = -1-t \\ z = 3-t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua $A(2;-1;3)$ và nhận $\vec{a} = (1;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3-t \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{-5}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;3)$. **C.** $(-3;4;5)$. **D.** $(3;-4;-5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $(1;-2;3)$ vào phương trình đường thẳng d ta được $\dfrac{0}{3} = \dfrac{0}{-4} = \dfrac{0}{-5}$, do đó điểm này thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(-1;2;0)$. **B.** $(-1;-3;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(1;-2;0)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{-1-1}{2} \neq \dfrac{2+2}{1} \neq \dfrac{0}{-1}$ nên điểm $A(-1;2;0)$ không thuộc đường thẳng Δ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = -1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Điểm nào sau đây ***không thuộc*** đường thẳng d?

A. $M(1;2;-1)$. **B.** $N(6;-8;9)$. **C.** $P(-6;16;-14)$. **D.** $Q(-19;42;-41)$.

Lời giải.

☑ Với $M(1;2;-1)$ ta có $\begin{cases} 1 = 1-t \\ 2 = 2+2t \\ -1 = -1-2t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$ nên $M \in d$.

☑ Với $N(6;-8;9)$ ta có $\begin{cases} 6=1-t \\ -8=2+2t \\ 9=-1-2t \end{cases} \Leftrightarrow t=-5$ nên $N \in d$.

☑ Với $P(-6;16;-14)$ ta có $\begin{cases} -6=1-t \\ 16=2+2t \\ -14=-1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=7 \\ t=7 \\ t=\dfrac{13}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm nên $P \notin d$.

☑ Với $Q(-19;42;-41)$ ta có $\begin{cases} -19=1-t \\ 42=2+2t \\ -41=-1-2t \end{cases} \Leftrightarrow t=20$ nên $Q \in d$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;1)$. Viết phương trình đường thẳng d.

A. $d\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.
B. $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.
C. $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.
D. $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;1)$. Phương trình đường thẳng d là

$$d\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{1}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{3}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $A(-2;2;0)$. **B.** $B(2;2;0)$. **C.** $C(-3;0;3)$. **D.** $D(3;0;3)$.

Lời giải.

Thay toạ độ các điểm vào phương trình đường thẳng d thì chỉ có điểm $D(3;0;3)$ thoả mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2), B(2;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.
C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.
D. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB}=(1;-2;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc d?

A. $E(2;-2;3)$. **B.** $N(1;0;1)$. **C.** $F(3;-4;5)$. **D.** $M(0;2;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của M vào phương trình ta thấy $\dfrac{-1}{1} = \dfrac{2}{-2} \neq \dfrac{0}{2}$ nên $M \notin d$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d.

A. $(P) : x - y - 2z = 0$.
B. $(P) : x - 2y - 2 = 0$.
C. $(P) : x + y + 2z = 0$.
D. $(P) : x - y + 2z = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(P) : 1(x-2) - 1(y-0) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A\,(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;-2)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$.
B. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.
C. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$.
D. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$.

Lời giải.

Do giả thiết ta suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+4}{1}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d) có tọa độ là

A. $(0;-2;-4)$.
B. $(0;2;4)$.
C. $(3;-1;1)$.
D. $(3;-1;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+4}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ là $(3;-1;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng (d)?

A. $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.
B. $\dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.
C. $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{-3}$.
D. $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M(3;-1;0)$ và nhận $\vec{u} = (-1;2;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương. Phương trình chính tắc của $(d)\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d) : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-4}{4}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-2t \\ z=-4+4t. \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

B. $\begin{cases} x=2-3m \\ y=-1+2m \\ z=4-4m. \end{cases}$; $m\in\mathbb{R}$.

C. $\begin{cases} x=-2+3\tan t \\ y=1-2\tan t \\ z=-4+4\tan t. \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

D. $\begin{cases} x=2-3\cos t \\ y=-1+2\cos t \\ z=-4-4\cos t. \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u}$ véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d, ta chọn $\vec{u}\,(-3;2;-4)$. Giả sử $M_0\in d$, chọn $M_0\,(2,-1;4)$ suy ra phương trình tham số d là $\begin{cases} x=2-3m \\ y=-1+2m \\ z=4-4m \end{cases}$; $m\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. d cắt và không vuông góc với (P).

B. d vuông góc với (P).

C. d song song với (P).

D. d nằm trong (P).

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;4)$, (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-3;2)$.
Do $\vec{u}$ không cùng phương $\vec{n}$ nên d cắt (P). Mặt khác $\vec{u}\cdot\vec{n}=19\neq 0$ nên d không vuông góc (P).
Vậy d cắt và không vuông góc với (P).
Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-3+5t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.
Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{u}=(2;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(2;3;-5)$. **D.** $\vec{u}=(2;0;5)$.

Lời giải.

Ta có $d\colon \begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-3+5t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ suy ra véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;-3;5)$.
Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB?

A. $\vec{a}=(-1;0;-2)$. **B.** $\vec{b}=(-1;0;2)$. **C.** $\vec{c}=(1;2;2)$. **D.** $\vec{d}=(-1;1;2)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-1;0;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$ **B.** $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

C. $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-3t \\ z=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$ **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ nên có phương trình tham số $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3 \end{cases}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $\vec{v}=(1;2;3)$. **B.** $\vec{a}=(1;-2;3)$. **C.** $\vec{b}=(-2;4;6)$. **D.** $\vec{u}=(1;-2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng thẳng d có $\vec{u}=(1;-2;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=3+2t \\ z=-4+4t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d.

A. $\vec{u}=(0;3;-4)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;4)$. **C.** $\vec{u}=(0;2;4)$. **D.** $\vec{u}=(1;3;-4)$.

Lời giải.

Đường thẳng d nhận véc-tơ $\vec{u}=(1;2;4)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1-t \\ z=-1-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R}).$ **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=1-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R}).$

C. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=-1+t \end{cases}, (t\in\mathbb{R}).$ **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=-1-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(2;-3;1)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$ **B.** $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -8 + 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$ **D.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (1;-5;4)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(2;-3;1)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 5t \\ z = -3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Với $t = -2$, ta được $M(3;-8;5)$ thuộc đường thẳng AB. Khi đó, đường thẳng AB có phương trình tham số $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -8 + 5t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

Chọn đáp án B □

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(2;-1;2)$ và nhận $\vec{u} = (-1;2;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

A. $\Delta: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. **B.** $\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

C. $\Delta: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$. **D.** $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $A(2;-1;2)$ và nhận $\vec{u} = (-1;2;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

$\Delta: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{-2}$, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}=(-1;-3;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-3;-2)$. **D.** $\vec{u}=(-1;3;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(1;3;-2)$ hay $\vec{u}=(-1;-3;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1)$, $B(1;2;4)$. Phương trình đường thẳng nào được cho dưới đây không phải là phương trình đường thẳng AB?

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-5}$.

B. $\begin{cases}x=2-t\\y=3-t\\z=-1+5t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1-t\\y=2-t\\z=4+5t\end{cases}$.

D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{-5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;1;-5)$.

Vì điểm $A(2;3;-1)\notin \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-5}$ nên $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-5}$ không phải là phương trình đường thẳng AB.

Các đường thẳng còn lại đều có véc-tơ chỉ phương là $(1;1;-5)$ và đi qua điểm $A(2;3;-1)$ hoặc đi qua điểm $B(1;2;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(1;2;3)\in d \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-1;1;2) \Rightarrow [\overrightarrow{AM};\vec{u}]=(-6;0;-3)$.

Ta có $\mathrm{d}(A;d)=\dfrac{|[\overrightarrow{AM};\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+1=0$.

A. $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

C. $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-1)$ nên d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2+3t \\ z=5-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M_1(1;5;4)$. **B.** $M_2(-1;-2;-5)$. **C.** $M_3(0;3;-1)$. **D.** $M_4(1;2;-5)$.

Lời giải.

Với $t=1$ ta có một điểm thuộc d là $(1;5;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB?

A. $\vec{a}=(-1;0;-2)$. **B.** $\vec{b}=(-1;0;2)$. **C.** $\vec{c}=(1;2;2)$. **D.** $\vec{d}=(-1;1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$?

A. $M\,(0;-3;-1)$. **B.** $M\,(3;0;2)$. **C.** $M\,(2;3;1)$. **D.** $M\,(6;-3;2)$.

Lời giải.

Cho $t=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1+2=3 \\ y=2-2=0 \\ z=2. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

A. $\vec{u}=(2;1;-3)$. **B.** $\vec{u}=\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $\vec{u}=\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\vec{u}=(-4;-2;6)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3) \Rightarrow \dfrac{1}{2}\vec{u}=\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-3t \\ z=2+t. \end{cases}$

Lời giải.

Do Δ nhận $\vec{a}=(4;-6;2)=2(2;-3;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên ta suy ra phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d: $\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$. **C.** $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$.

Do đó d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ và song song với trục Oy có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm có véc-tơ chỉ phương là $(0;1;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng là $\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d: $\begin{cases}x=-1+3t\\y=-t\\z=1-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ và d': $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. Vị trí tương đối của d và d' là

A. song song. **B.** trùng nhau. **C.** chéo nhau. **D.** cắt nhau.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(3;-1;-2)$ và đi qua điểm $M(-1;0;1)$.

Đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'}=(-3;1;2)$.

Hai véc-tơ $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$ cùng phương và điểm M không thuộc đường thẳng d'. Do đó hai đường thẳng d và d' song song với nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z+3}{7}$ là

A. $\vec{u}=(1;2;-3)$. **B.** $\vec{u}=(-1;-2;3)$. **C.** $\vec{u}=(5;-8;7)$. **D.** $\vec{u}=(-5;-8;7)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(5;-8;7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-2;-1;1)$. **B.** $(4;1;2)$. **C.** $(-1;1;-1)$. **D.** $(-2;1;-1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $(2;1;-1)$ cùng phương với $(-2;-1;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(2;-1;0)$ là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$.

C. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1,-2,-2)$. Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(2;-1;0)$ nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-7z+1=0$. Phương trình tham số của d là

A. $\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=3-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+4t\\y=-2+3t\\z=-3-7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4+t\\y=3+2t\\z=-7+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên nhận véc-tơ $\vec{n}_\alpha$ làm véc-tơ chỉ phương. Suy ra, phương trình đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;-1)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}(4;-6;2)$ là

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+6}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}(4;-6;2)$ nên có phương trình $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+5z+4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (P).

A. $d=\dfrac{24}{\sqrt{30}}$. **B.** $d=\dfrac{23}{\sqrt{11}}$. **C.** $d=\dfrac{20}{\sqrt{30}}$. **D.** $d=\dfrac{24}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.

Ta có $d=\dfrac{|2\cdot 2-1\cdot(-1)+5\cdot 3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}=\dfrac{24}{\sqrt{30}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=t+2 \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $(-2;1;2)$. **B.** $(-2;1;1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(2;-1;-2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có vec tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;1;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;4)$ và $B(-1;3;2)$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{m}(1;-4;2)$. **B.** $\vec{u}(1;2;2)$. **C.** $\vec{v}(-3;4;-2)$. **D.** $\vec{n}(1;2;6)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-3;4;-2)$. Vậy đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{v}(-3;4;-2)$

Chọn đáp án C □

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z}{1}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của Δ.

A. $\vec{a}=(-5;2;1)$. **B.** $\vec{b}=(1;2;-5)$. **C.** $\vec{n}=(5;2;1)$. **D.** $\vec{v}=(5;-2;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{a}=(-5;2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho Δ là đường thẳng đi qua điểm $M\,(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;2)$. Phương trình chính tắc của Δ là

A. $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+6}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{u}=(4;-6;2)\Rightarrow\vec{u'}=(2;-3;1)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$. Véc-tơ nào dưới đây **không** phải là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{a}(2;1;3)$. **B.** $\vec{b}(2;-1;-3)$. **C.** $\vec{c}(-2;1;3)$. **D.** $\vec{d}(6;-3;-9)$.

Lời giải.

Dễ thấy, $\vec{a}(2;1;3)$ không phải là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$. Véc-tơ nào là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(1;-1;2)$. **B.** $\vec{u}=(-1;1;-2)$. **C.** $\vec{u}=(5;-2;3)$. **D.** $\vec{u}=(5;2;-3)$.

Lời giải.

Một một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(5;-2;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(1;3;-2)$. **B.** $\vec{u}=(-1;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1;3)$. **D.** $\vec{u}=(-2;1;-3)$.

Lời giải.

d có một véc-tơ chỉ phương là d là $\vec{u}=(-1;3;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-2;1)$ và $B(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.

C. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;2)$.

Đường thẳng AB có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \\ z=3+2t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_4=(-2;1;3)$. **B.** $\vec{u}_3=(2;1;3)$. **C.** $\vec{u}_2=(1;3;2)$. **D.** $\vec{u}_1=(1;-3;2)$.

Lời giải.

đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-3;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+5}{4}$. Véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của d và điểm M thuộc đường thẳng d là

A. $\vec{u}=(6;-2;8), M(3;-1;4)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;-5), M(3;-1;4)$.

C. $\vec{u}=(3;-1;4), M(1;3;-4)$. **D.** $\vec{u}=(6;-2;8), M(2;3;-5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(6;-2;8)=2(3;-1;4), M(2;3;-5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases}$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $\vec{u}_2=(2;0;-1)$. **B.** $\vec{u}_4=(2;1;2)$. **C.** $\vec{u}_3=(2;0;2)$. **D.** $\vec{u}_1=(-1;1;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;0;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-2;1)$, $B(2;1;-1)$, véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là

A. $\vec{u}=(1;-1;-2)$. **B.** $\vec{u}=(3;-1;0)$. **C.** $\vec{u}=(1;3;-2)$. **D.** $\vec{u}=(1;3;0)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;3;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=t. \end{cases}$ Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

A. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $x-2=y=z+3$. **D.** $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$. Do đó phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm $A(0;1;2)$, $B(1;3;4)$ là

A. $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1+t, t\in\mathbb{R}. \\ z=2+2t \end{cases}$ **B.** $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=3+2t, t\in\mathbb{R}. \\ z=4+2t \end{cases}$

C. $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=1+3t, t\in\mathbb{R}. \\ z=2+4t \end{cases}$ **D.** $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=3+2t, t\in\mathbb{R}. \\ z=4+2t \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

d đi qua điểm $B(1;3;4)$, nên có phương trình là: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+2t \\ z = 4+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $z-1=0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\alpha) \parallel (Oxy)$. **B**. $(\alpha) \perp Oy$. **C**. $(\alpha) \parallel Ox$. **D**. $(\alpha) \perp Oz$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;0;1)$.

Oy có véc-tơ chỉ phương $\vec{j} = (0;1;0)$.

Suy ra (α) không vuông góc với Oy.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$ thì d song song với (P).

B. $\vec{u}$ không vuông góc với $\vec{n}$ thì d cắt (P).

C. d song song với (P) thì $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$.

D. d vuông góc với (P) thì $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$.

Lời giải.

☑ $\vec{u}$ vuông góc $\vec{n}$ thì d có thể nằm trong (P).

☑ d song song (P) thì $\vec{u}$ vuông góc $\vec{n}$.

☑ d vuông góc (P) thì $\vec{u}$ cùng phương $\vec{n}$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;3)$, $B(-3;0;-4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A và B?

A. $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-4}{7}$. **B**. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{3}$.

C. $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{7}$. **D**. $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-7}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (4;-1;7)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{4}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (-3;2;4)$. **B**. $\vec{u}_2 = (-2;-1;3)$. **C**. $\vec{u}_3 = (3;2;4)$. **D**. $\vec{u}_4 = (-2;-1;3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d = (-3;2;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-3z-2=0$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ là

A. $(1;-2;2)$. **B.** $(1;-2;-3)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(1;-3;-2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-3)$.

Do $d\perp(P)$ nên véc-tơ $\vec{n}=(1;-2;-3)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$, $B(2;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;1;2)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(1;-2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Vậy phương trình của AB là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(5;1;-2)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$. **C.** $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(5;1;-2)$ có phương trình là

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(7;0;-1)$?

A. $\dfrac{x-7}{6}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$.

C. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng AB nhận véc-tơ $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(3;-1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Do đó phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M\,(1;-2;1)$, $N\,(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng MN đi qua $N(0;1;3)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ có phương trình là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(-1;2;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương là

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=1+2t\\z=-1-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1-2t\\y=t+2\\z=-t-3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2-t\\y=-1+2t\\z=1-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=3-t\end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số có dạng $\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0+u_2t\\z=z_0+u_3t.\end{cases}$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(-1;2;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương là $\begin{cases}x=2-t\\y=-1+2t\\z=1-3t.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{-5}$. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $C(-3;4;5)$. **B.** $D(3;-4;-5)$. **C.** $B(-1;2;-3)$. **D.** $A(1;-2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{-5}$ đi qua điểm $A(1;-2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2+3t\\y=5-4t\\z=-6+7t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(3;-4;7)$. **B.** $\vec{u}=(3;-4;-7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;-4;-7)$. **D.** $\vec{u}=(-3;-4;7)$.

Lời giải.

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d.

Do đó VTCP của (Δ) là VTCP của (d). Vậy (Δ) có VTCP là $\vec{u}=(3;-4;7)$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-1=0$ là

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{z+3}{4}$. **B.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{4}$.

C. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{1+y}{3}=\dfrac{z-3}{4}$. **D.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{1+y}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của d đi qua $A(2;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-1=0$ là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{z+3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+1=0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.

Do đường thẳng Δ cần tìm vuông góc với mặt phẳng (P) nên véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;3)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ. Mặt khác Δ đi qua điểm $M(1;1;2)$ nên phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $4x-z+3=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

A. $\vec{u_1}(4;1;-1)$. **B.** $\vec{u_2}(4;-1;3)$. **C.** $\vec{u_3}(4;0;-1)$. **D.** $\vec{u_4}(4;1;3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(4;0;-1)$, do đường thẳng $d\perp(P)$, nên véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=-2+t\\y=1+2t\\z=5-3t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$ có véc-tơ chỉ phương là:

A. $\vec{a}=(-1;-2;3)$. **B.** $\vec{a}=(2;4;6)$. **C.** $\vec{a}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{a}=(-2;1;5)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;2;-3)$ hay $\vec{u}'=(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{a}=(-1;1;2)$. **B.** $\vec{a}=(3;2;1)$. **C.** $\vec{a}=(1;-1;-2)$. **D.** $\vec{a}=(3;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a}=(3;-2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình

A. $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$. **C.** $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+4}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+4}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 82. Phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$ là

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+2t \\ z = -1-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-t \\ z = -3+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -2-3t \\ z = 3+4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 5-3t \\ z = -7+4t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-3;4)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d). Loại đáp án $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+2t \\ z = -1-3t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-t \\ z = -3+t \end{cases}$.

Thế tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 5-3t \\ z = -7+4t. \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} 1 = -1+2t \\ 2 = 5-3t \\ -3 = -7+4t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A \in d.$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng (d) là $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 5-3t \\ z = -7+4t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{cases}$ là

A. $\vec{m}(2;-1;1)$. **B.** $\vec{v}(2;-1;0)$. **C.** $\vec{u}(2;1;1)$. **D.** $\vec{n}(-2;-1;0)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_{\Delta} = (2;1;0) = -(-2;-1;0)$.

Do đó một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{n}(-2;-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$ cho $M(-1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là điểm có tọa độ?

A. $P(-1;0;0)$. **B.** $Q(0;2;3)$. **C.** $K(0;2;0)$. **D.** $E(0;0;3)$.

Lời giải.

Trục Ox có phương trình là $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Hình chiếu của M lên trục Ox là điểm $P(-1;0;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A\,(1;2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+5=0$?

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=-3-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+5=0$ nên Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{n_P}=(2;1;-3)$. Phương trình Δ là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$ (1).

Kiểm tra được điểm $M\,(3;3;-3)$ thỏa mãn hệ (1).

Vậy phương trình $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ cũng là phương trình của Δ.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ sau đây không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}_1=(2;-2;2)$. **B.** $\vec{u}_2=(-3;3;-3)$. **C.** $\vec{u}_3=(4;-4;4)$. **D.** $\vec{u}_4=(1;1;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;1)$. Ta thấy véc-tơ $\vec{u}_4$ không cùng phương với $\vec{u}$ suy ra $\vec{u}_4$ không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 2 đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-m}=\dfrac{z-2}{-3}$, $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả giá trị thực của m để d_1 vuông góc với d_2

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;-m;-3)$ và $\vec{u}_2=(1;1;1)$.

Để $d_1\perp d_2$ thì $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0\Leftrightarrow 2-m-3=0\Leftrightarrow m=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Do $(2;-2;1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương nên phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng qua $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-(-2)}{-1}=\dfrac{z-3}{-2} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+3t \\ z=2 \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$. Tọa độ một véc-tơ chỉ phương của d là

A. $(-2;3;0)$. **B.** $(-2;3;3)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(2;3;0)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-2;3;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}=(1;-1;2)$. **B.** $\vec{u}=(2;1;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-1;1;-2)$. **D.** $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Lời giải.

$\vec{u}=(2;-1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=5 \end{cases}$. Đường thẳng d có một vec-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(-1;2;5)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;0)$. **C.** $\vec{u}=(1;2;5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;0;5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (4;5;-7)$ là

A. $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 5-t \\ z = -7+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = -5-t \\ z = 7+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+5t \\ z = 2-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 1+5t \\ z = -2-7t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (4;5;-7)$ là $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+5t \\ z = 2-7t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 4+5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u_1} = (1;0;4)$. **B.** $\vec{u_4} = (1;-1;4)$. **C.** $\vec{u_3} = (1;-1;5)$. **D.** $\vec{u_2} = (2;-1;5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-1;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1-2t \\ z = 2 \end{cases}$. Một véc-tơ chỉ phương của d là

A. $\vec{u} = (1;-2;0)$. **B.** $\vec{u} = (3;1;2)$. **C.** $\vec{u} = (1;-2;2)$. **D.** $\vec{u} = (-1;2;2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1;-2;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-2)$ và $B(2;2;2)$. Véc-tơ $\vec{a}$ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB?

A. $\vec{a} = (2;1;0)$. **B.** $\vec{a} = (2;3;4)$. **C.** $\vec{a} = (-2;1;0)$. **D.** $\vec{a} = (2;3;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;3;4)$. Suy ra véc-tơ $\vec{a} = (2;3;4)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(3;0;1)$ và $B(-1;2;3)$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (2;-1;-1)$. **B.** $\vec{u} = (2;1;0)$. **C.** $\vec{u} = (-1;2;0)$. **D.** $\vec{u} = (-1;2;1)$.

Lời giải.

Do đường thẳng d đi qua hai điểm A, B nên nếu $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của d thì $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} = (-4;2;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+3t \\ z = 5-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_4 = (1;2;5)$. **B.** $\vec{u}_3 = (1;-3;-1)$. **C.** $\vec{u}_1 = (0;3;-1)$. **D.** $\vec{u}_2 = (1;3;-1)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_1 = (0;3;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u_4} = (-1;2;0)$. **B.** $\vec{u_2} = (2;1;0)$. **C.** $\vec{u_3} = (2;1;1)$. **D.** $\vec{u_1} = (1;-2;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;2;1)$, nên véc-tơ $-1 \cdot \vec{u} = \vec{u_1} = (1;-2;-1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4 \\ z = 3-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}_1 = (1;4;3)$. **B.** $\vec{u}_2 = (1;0;2)$. **C.** $\vec{u}_3 = (1;4;-2)$. **D.** $\vec{u}_4 = (1;0;-2)$.

Lời giải.

Dễ thấy một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_4 = (1;0;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d?

A. $x-2 = y = z+3$. **B.** $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;1;0)$ và nhận $\vec{u} = (-1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương, có phương trình chính tắc $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=5 \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;2;0)$. **B.** $\vec{u}=(-1;2;5)$. **C.** $\vec{u}=(1;2;5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;0;5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d=(1;2;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u}=(2;3;1)$. **B.** $\vec{u}=(-2;-1;3)$. **C.** $\vec{u}=(2;1;-1)$. **D.** $\vec{u}=(-2;1;-3)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng có dạng $\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z-z_o}{c}$ với $(a;b;c)$ là một véc-tơ chỉ phương.

Vậy $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=4+8t \\ y=-6+11t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(4;-6;3)$. **B.** $\vec{u}_4=(8;-6;3)$. **C.** $\vec{u}_2=(8;11;2)$. **D.** $\vec{u}_3=(4;-6;2)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_2=(8;11;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng d song song với Δ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u_1}=(0;2;-1)$. **B.** $\vec{u_2}=(3;2;1)$. **C.** $\vec{u_3}=(0;-1;1)$. **D.** $\vec{u_4}=(3;2;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;-1)$ nên đường thẳng song song với Δ nhận $\vec{u}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án D □

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+1=0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc (P) nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\vec{n}_P=(2;-1;3)$.

Vậy d có phương trình: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$. **B.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-6}{3}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$. **D.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+6}{3}$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ là $\vec{n}=(2;-3;6)$.

Đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\vec{n}=(2;-3;6)$ nên có phương trình là $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 108. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y+5}{8}=\dfrac{z-8}{-2}$.

A. $\vec{u}_1=(-5;-2;8)$. **B.** $\vec{u}_2=(5;-8;2)$. **C.** $\vec{u}_3=(8;-2;-5)$. **D.** $\vec{u}_4=(-2;-5;8)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}=(-5;8;-2)=-(5;-8;2)$, nên đáp án là $\vec{u}_2=(5;-8;2)$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 109. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$, khi đó một véc-tơ chỉ phương của d là

A. $\vec{u}=(2;-3;1)$. **B.** $\vec{u}=(1;-2;0)$. **C.** $\vec{n}=(-2;3;-1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của Oz?

A. $\vec{j}=(0;1;0)$. **B.** $\vec{i}=(1;0;0)$. **C.** $\vec{m}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{k}=(0;0;1)$.

Lời giải.

Trục Oz có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3.\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-t.\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3.\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3+t.\end{cases}$

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Ta có $d\parallel Oy$ nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;1;0)$.

Do đó $d\colon \begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3.\end{cases}$

Chọn đáp án C ☐

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d?

A. $M(-1;-2;0)$. **B.** $M(-1;1;2)$. **C.** $M(2;1;-2)$. **D.** $M(3;3;2)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{-1-1}{2}=\dfrac{1-2}{1}=\dfrac{2}{-2}=-1$ nên $M(-1;1;2)$ thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án B □

Câu 113. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P).

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{2}$. **C.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;1)$ nên đường thẳng cần tìm có véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}=(1;-2;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 114. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1)$ và $B(1;0;2)$. Đường thẳng AB có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **C.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng AB có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;-1;3)$ và đi qua $A(0;1;-1)$ có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 115. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=3+2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}=(3;0;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;0;-1)$. **D.** $\vec{u}=(3;1;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=3+2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{4}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3=(2;-3;0)$. **B.** $\vec{u}_1=(2;-3;4)$. **C.** $\vec{u}_4=(1;2;4)$. **D.** $\vec{u}_2=(1;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z=1$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với (α).

A. $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$.

B. $d_3\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$.

C. $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$.

D. $d_4\colon \begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z=1$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;-1;2)$.
Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1}=(1;-1;2)=\vec{n}_{(\alpha)}$. Suy ra $d_1\perp(\alpha)$.
Chọn đáp án A □

Câu 118. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $(-1;-3;2)$. **B.** $(1;3;2)$. **C.** $(1;-3;-2)$. **D.** $(-1;3;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có $\vec{u}=(-1;-3;2)$ là véc-tơ chỉ phương.
Chọn đáp án A □

Câu 119. Véc-tơ $\vec{u}=(1;2;-5)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng nào sau đây?

A. $\begin{cases} x=6-t \\ y=-1-2t \\ z=5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=3-5t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=5+t \\ y=-1+2t \\ z=5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=-5+6t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=6-t \\ y=-1-2t \\ z=5t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{v}=(-1;-2;5)$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}=(1;2;-5)$.

Vậy $\vec{u}=(1;2;-5)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=6-t \\ y=-1-2t \\ z=5t. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=1+t \end{cases}$. Vec-tơ nào dưới đây là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(1;2;1)$. **C.** $(-1;-2;1)$. **D.** $(-1;2;1)$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.
Chọn đáp án D □

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=1+t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{n}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;1)$. **C.** $\vec{n}=(-1;-2;1)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;1)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng d ta có véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{n}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{u}_2=(2;1;0)$. **C.** $\vec{u}_3=(2;1;1)$. **D.** $\vec{u}_4=(-1;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2;2)$. Đường thẳng đi qua M song song với Oy có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+t \\ z=2 \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=2 \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Oy có véc-tơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Đường thẳng đi qua M song song với Oy có phương trình là $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+t \\ z=2 \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Chọn đáp án A □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2+3t \\ z=5-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(0;3;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;3;-1)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;-3;-1)$. **D.** $\vec{u}_4=(1;2;5)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{u}_1=(0;3;-1)$ là véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án A □

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+5y-z-2=0$ là

A. $M(0;2;3)$. **B.** $M(0;0;-2)$. **C.** $M(0;0;2)$. **D.** $M(0;-2;-3)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ứng với t là nghiệm phương trình

$$3\cdot(12+4t)+5\cdot(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3.$$

Do đó, tọa độ giao điểm cần tìm là $M(0;0;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1 \\ y=2+3t, \\ z=5-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(0;3;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;3;-1)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;-3;-1)$. **D.** $\vec{u}_4=(1;2;5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(0;3;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng d: $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng (P): $3x+5y-z-2=0$ là

A. $(0;2;3)$. **B.** $(0;0;-2)$. **C.** $(0;0;2)$. **D.** $(0;-2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $M\in d$ nên $M(12+4t;9+3t;1+t)$ với $t\in\mathbb{R}$.

Vì $M\in(P)$ nên $3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow 26t+78=0\Leftrightarrow t=-3$.

Vậy $M(0;0;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 128. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ 1+t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(1;2;1)$. **C.** $(-1;-2;1)$. **D.** $(-1;2;1)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng d ta có véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{n}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 129. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ 1+t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d?

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(1;2;1)$. **C.** $(-1;-2;1)$. **D.** $(-1;2;1)$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng d ta có véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{n}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(2;1;3)$. **B.** $(3;1;2)$. **C.** $(3;2;3)$. **D.** $(3;1;3)$.

Lời giải.

Thay tọa độ từng điểm vào phương trình đường thẳng d. Ta thấy $M(3;1;3)\in d$.

Chọn đáp án D □

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=z-3$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}_1=(3;2;1)$. **B.** $\vec{u}_2=(3;2;0)$. **C.** $\vec{u}_3=(3;2;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(1;2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=z-3$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;2)$ và vuông góc với đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $2x-y+3z+8=0$. **B.** $2x+y-3z+8=0$.

C. $2x-y+3z-8=0$. **D.** $2x+y-3z-8=0$.

Lời giải.

Vì $(d)\perp(P)$ nên $\vec{u}_d=(2;-1;3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2(x-1)-y+3(z-2)=0\Leftrightarrow 2x-y+3z-8=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, đường thẳng đi qua $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-1\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm đi qua $A(1;1;1)$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(0;0;1)$ có phương trình là

$$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t.\end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 134. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ là

A. $x+y+z+1=0$. **B.** $x-y-z=1$. **C.** $x+y+z=1$. **D.** $x+y+z=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm đi qua $O(0;0;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$ có phương trình là $x+y+z=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-7}$. **B.** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-7}$. **C.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng EF đi qua điểm $E(-1;0;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{EF}=(3;1;-7)$, nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-7}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-7}{1}$ nhận véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương?

A. $(-2;-4;1)$. **B.** $(2;4;1)$. **C.** $(1;-4;2)$. **D.** $(2;-4;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $(2;-4;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **B.** $\dfrac{x}{1}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **C.** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=0$. **D.** $-\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Lời giải.

Ta có $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 138. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=4 \\ z=3-2t \end{cases}$?

A. $\vec{u}=(1;4;3)$. **B.** $\vec{u}=(1;4;-2)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;-2)$. **D.** $\vec{u}=(1;0;2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;0;-2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(0;-3;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $3x-2y+z+5=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $3x-2y+z-10=0$. **D.** $3x-2y+z-5=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-2;1)$.

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d nhận $\vec{u}$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$3(x-0)-2(y+3)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-7=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 140. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$. Điểm M nằm trên Δ thì tọa độ của M có dạng nào sau đây?

A. $M(a+x_0t;b+y_0t;c+z_0t)$. **B.** $M(at;bt;ct)$.

C. $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$. **D.** $M(x_0t;y_0t;z_0t)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+at\end{cases}$. Do đó tọa độ điểm có dạng $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

Chọn đáp án C □

Câu 141. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-2=0$ tại điểm $I(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $d\colon \begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$. Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được

$$2(1+2t)-3(3-t)+(1+t)-2=0\Leftrightarrow 8t-8=0\Leftrightarrow t=1.$$

Suy ra tọa độ điểm I là $(3;2;2)\Rightarrow a+b+c=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$?

A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(2;1;3)$. **C.** $(-3;2;1)$. **D.** $(3;-2;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ là $\vec{u_1}=(3;-2;-1)$.

Ta có $\vec{u_2}=(-3;2;1)$ cùng phương với $\vec{u_1}$ nên cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đã cho.

Chọn đáp án C □

Câu 143. Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;4)$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=3t \\ z=4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2t \\ y=4t \\ z=3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=4t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;4)$ có phương trình là

$$\begin{cases} x=0+2t \\ y=0+3t \\ z=0+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=4t. \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3-t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-3t \\ z=t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-3t \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3-2t \\ y=1+3t \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải.

Từ phương trình chính tắc của Δ ta có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta}=(2;-3;1)$ và đi qua điểm $(3;-1;0)$ nên phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-3t \\ z=t. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 146. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-2}$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc đường thẳng d?

A. $M(3;-2;-4)$. **B.** $N(1;-1;-2)$. **C.** $P(-1;0;0)$. **D.** $Q(-3;1;-2)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm M, N, P, Q vào phương trình đường thẳng d, ta thấy $Q \notin d$.

Chọn đáp án D □

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-4;-5)$ là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{-5}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-4+2t \\ z=-5+3t \end{cases}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+5}{3}$. **D.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+4t \\ z=3+5t \end{cases}$.

Lời giải.

Do d có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-4;-5)$ nên d cũng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;4;5)$.

Vậy phương trình tham số của d: $\begin{cases}x=1-t\\y=2+4t\\z=3+5t.\end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm M, nhận véc-tơ $\vec{a}$ làm véc-tơ chỉ phương và đường thẳng d' đi qua điểm M', nhận véc-tơ $\vec{a}'$ làm véc-tơ chỉ phương. Điều kiện để đường thẳng d song song với d' là

A. $\begin{cases}\vec{a}=k\vec{a}',(k\neq 0)\\M\notin d'\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}\vec{a}=k\vec{a}',(k\neq 0)\\M\in d'\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}\vec{a}=\vec{a}'\\M\in d'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}\vec{a}\neq k\vec{a}',(k\neq 0)\\M\notin d'\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện để $d\parallel d'$ là $\begin{cases}\vec{a}=k\vec{a}',(k\neq 0)\\M\notin d'\end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2z+3=0$. Một véc-tơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{b}(2;-1;0)$. **B.** $\vec{v}(1;2;3)$. **C.** $\vec{a}(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}(2;0;-1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;2)$.

Δ vuông góc với (α) nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{a}=\vec{n}=(1;0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(1;-1;2)$. **B.** $(-3;2;1)$. **C.** $(3;2;1)$. **D.** $(3;-2;-1)$.

Lời giải.

☑ Xét điểm $(1;-1;2)$, ta có $\dfrac{1+3}{1}=2\neq\dfrac{-1-2}{-1}=3\Rightarrow$ điểm này không thuộc đường thẳng (d).

☑ Xét điểm $(-3;2;1)$, ta có $\dfrac{-3+3}{1}=\dfrac{2-2}{-1}=\dfrac{1-1}{2}=0\Rightarrow$ điểm này thuộc d.

☑ Xét điểm $(3;2;1)$, ta có $\dfrac{3+3}{1}=6\neq\dfrac{0}{-1}=0\Rightarrow$ điểm này không thuộc d.

☑ Xét điểm $(3;-2;-1)$, ta có $\dfrac{3+3}{1}=6\neq\dfrac{-2-2}{-1}=4\Rightarrow$ điểm này không thuộc d.

Chọn đáp án B □

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+3y-5z+6=0$ và $(\beta)\colon x-y+3z-6=0$. Phương trình tham số của d là

A. $\begin{cases}x=-3-t\\y=3+2t\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Nhận thấy $A(1;1;2)$ và $B(2;-1;1)$ đều thuộc (α) và (β) nên chúng cũng thuộc đường thẳng d.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.
Khi đó phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án B □

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (2;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương?

A. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

B. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

D. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng nhận $\vec{u} = (2;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương suy ra $-\vec{u} = (-2;-1;-1)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương.
Vậy đường thẳng $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$ nhận $\vec{u} = (2;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án C □

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$?

A. $P(3;-2;-1)$.

B. $N(2;1;5)$.

C. $M(1;-3;4)$.

D. $Q(4;1;3)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đưởng thẳng d, ta thấy $M \in d$.

Chọn đáp án C □

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+2}{-5}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;5;-2)$. **B.** $\vec{u}=(3;2;-5)$. **C.** $\vec{u}=(-3;2;-5)$. **D.** $\vec{u}=(2;3;-5)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3;2;-5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-2t\\ y=-2+2t\\ z=1+t\end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(-2;2;1)$. **B.** $\vec{u}=(1;-2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;-2;1)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-2t\\ y=-2+2t\\ z=1+t\end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 157. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+2t\\ y=2+3t\\ z=5-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Đường thẳng d không đi qua điểm nào sau đây?

A. $Q(-1;-1;6)$. **B.** $N(2;3;-1)$. **C.** $P(3;5;4)$. **D.** $M(1;2;5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có dạng phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{-1}$.

Đường thẳng d không đi qua điểm $N(2;3;-1)$ vì thay tọa độ điểm N vào đường thẳng d không thỏa mãn các đẳng thức.

Chọn đáp án B □

Câu 158. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d?

A. $\begin{cases}x=1\\ y=2-t\\ z=-2+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=2-2t\\ z=-2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\ y=2+t\\ z=1-t\end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và nhận véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;3)$ có dạng phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+t\\ y=2-2t\\ z=-2+3t\end{cases}$ (với $t\in\mathbb{R}$).

Chọn đáp án C □

Câu 159. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=2t \\ z=3+t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$. Một véc-tơ chỉ phương của Δ có tọa độ là

A. $(-3;-2;-1)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(3;2;1)$. **D.** $(1;0;3)$.

Lời giải.

Từ phương trình đường thẳng của Δ, ta có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ là

A. $(1;4;2)$. **B.** $(-4;1;2)$. **C.** $(1;-4;2)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Lời giải.

Từ phương trình chính tắc của đường thẳng d, ta suy ra đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ là $(1;-4;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 161. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=-2+3t \end{cases}$ không đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\,(2;1;-2)$. **B.** $P\,(4;1;-4)$. **C.** $Q\,(3;1;-5)$. **D.** $N\,(0;1;4)$.

Lời giải.

Kiểm tra thấy điểm $P(4;1;-4)$ không thỏa mãn phương trình đường thẳng Δ.

Chọn đáp án B □

Câu 162. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây vuông góc với đường thẳng d.

A. $(T)\colon x+y+2z+1=0$. **B.** $(P)\colon x-2y+z+1=0$.

C. $(Q)\colon x-2y-z+1=0$. **D.** $(R)\colon x+y+z+1=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$. Mặt phẳng vuông góc với d nhận véc-tơ $\vec{u}$ làm véc-tơ pháp tuyến. Do đó (P) là mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-4)$ là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{3}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-4}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-4)$ là $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;1)$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A?

A. $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.
B. $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
C. $\Delta_3\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.
D. $\Delta_4\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

☑ Vì $\dfrac{3-3}{1}=\dfrac{-2+2}{1}=\dfrac{1-1}{2}=0$ nên đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ đi qua A.

☑ Vì $\dfrac{3-3}{4}=\dfrac{-2+2}{-2}\neq\dfrac{1+1}{-1}$ nên đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ không đi qua A.

☑ Vì $\dfrac{3+3}{1}\neq\dfrac{-2+2}{1}$ nên đường thẳng $\Delta_3\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ không đi qua A.

☑ Vì $\dfrac{3-3}{4}\neq\dfrac{-2-2}{-2}$ nên đường thẳng $\Delta_4\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ không đi qua A.

Chọn đáp án A □

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\begin{cases}x=2+t\\y=3-t\\z=-2+t\end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(1;2;-1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(3;-2;-1)$. **D.** $Q(-3;-2;1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng, suy ra điểm $N(3;2;-1)$ thuộc đường thẳng.

Chọn đáp án B □

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Tọa độ một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

A. $(3;-2;-1)$. **B.** $(-3;2;0)$. **C.** $(-1;2;-1)$. **D.** $(1;-2;1)$.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;2;1)=-(3;-2;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $(\alpha)\parallel(Oxy)$. **B.** $(\alpha)\parallel Oz$. **C.** $Oz\subset(\alpha)$. **D.** $Oy\subset(\alpha)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y=0$ đi qua hai điểm $O(0;0;0)$ và $A(0;0;1)$, mà đây là hai điểm nằm trên trục Oz nên mặt phẳng (α) chứa trục Oz.

Chọn đáp án C □

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;0)$, $B(3;2;-8)$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

A. $\vec{u}=(1;2;-4)$. **B.** $\vec{u}=(2;4;8)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;-4)$. **D.** $\vec{u}=(1;-2;-4)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB}=(2;4;-8)$. Suy ra $\vec{u}=(1;2;-4)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Chọn đáp án A □

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;1)$. **B.** $\vec{u}=(-1;2;0)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;1)$. **D.** $\vec{u}=(2;1;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-8}=\dfrac{z+13}{9}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(2;-8;9)$. **B.** $\vec{u}_4=(2;8;9)$. **C.** $\vec{u}_2=(-5;7;-13)$. **D.** $\vec{u}_3=(5;-7;-13)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-8;9)$.

Chọn đáp án A □

Câu 171. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $I(1;-1;-1)$ và nhận $\vec{u}=(-2;3;-5)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $I(1;-1;-1)$ và nhận $\vec{u}=(-2;3;-5)$ là véc tơ chỉ phương là $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=97\end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;9)$.

Suy ra $\dfrac{1}{12}\vec{u}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=2\\y=-3+t\\z=-1+t\end{cases}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là

A. $\vec{u_1}=(0;-1;-1)$. **B.** $\vec{u_2}=(2;1;1)$. **C.** $\vec{u_3}=(2;-3;-1)$. **D.** $\vec{u_4}=(2;-1;-1)$.

Lời giải.

Ta thấy $\vec{u_1} = (0; -1; -1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d).

Chọn đáp án (A) □

Câu 174. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z}{3}$. Đường thẳng d có một vec-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u_1}(2; 1; -3)$. **B.** $\vec{u_1}(4; -5; 0)$. **C.** $\vec{u_1}(-2; 1; 3)$. **D.** $\vec{u_1}(-4; 5; 3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_1}(2; 1; -3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 175. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Oz có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Một điểm thuộc Oz khi và chỉ khi hoành độ, tung độ của điểm đó đồng thời bằng 0.

Trong các phương trình đã cho, phương trình của Oz là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 176. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(3; -1; 4)$. **B.** $(-1; 1; 2)$. **C.** $(1; 0; 3)$. **D.** $(3; -1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $d\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

☑ Điểm $(3; -1; 4)$ có $\dfrac{3-1}{-2} = \dfrac{-1}{1} = \dfrac{4-3}{-1} = -1 \Rightarrow$ điểm này thuộc d.

☑ Điểm $(-1; 1; 2)$ có $\dfrac{-1-1}{-2} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{2-3}{-1} = 1 \Rightarrow$ điểm này thuộc d.

☑ Điểm $(1; 0; 3)$ có $\dfrac{1-1}{-2} = \dfrac{0}{1} = \dfrac{3-3}{-1} = 0 \Rightarrow$ điểm này thuộc d.

☑ Điểm $(3; -1; 2)$ có $\dfrac{3-1}{-2} = -1 \neq \dfrac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow$ điểm này không thuộc d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u} = (1; 2; 5)$. **B.** $\vec{u} = (1; -3; -1)$. **C.** $\vec{u} = (0; 3; -1)$. **D.** $\vec{u} = (1; 3; -1)$.

Lời giải.

Dựa vào định nghĩa phương trình tham số của đường thẳng, ta suy ra véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (0;3;-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua C và song song với AB có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

B. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = -1+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = -1-t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

D. $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{BA} = (1;2;1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án A □

Câu 179. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \\ z = 2-t. \end{cases}$

Trong các điểm có tọa độ dưới đây, điểm nào thuộc đường thẳng Δ?

A. $(1;4;-5)$. **B.** $(-1;-4;3)$. **C.** $(2;1;1)$. **D.** $(-5;-2;-8)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm và phương trình đường thẳng Δ, ta thấy

$$\begin{cases} -1 = 1+2t \\ -4 = -1+3t \\ 3 = 2-t \end{cases} \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(-1;-4;3) \in \Delta.$$

Chọn đáp án B □

Câu 180. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(0;1;2)$. Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (1;3;1)$. **B.** $\vec{u}_2 = (1;-1;-1)$. **C.** $\vec{u}_3 = (1;-1;5)$. **D.** $\vec{u}_4 = (1;-3;1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{BA} = (1;-3;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 181. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $Q(-2;3;1)$. **B.** $M(4;7;0)$. **C.** $P(1;5;2)$. **D.** $N(-5;1;0)$.

Lời giải.

Ta thấy điểm $M(4;7;0)$ không thuộc đường thẳng d vì

$$\frac{4+2}{3}=\frac{7-3}{2}\neq\frac{0-1}{1}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 182. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;2;2)$. **B.** $M(-1;0;3)$. **C.** $M(0;2;-1)$. **D.** $M(1;-2;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{-1}{-1}=\dfrac{0+2}{2}=\dfrac{3-1}{2}=1$ nên điểm $M(-1;0;3)$ thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án B □

Câu 183. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2-t\\ y=1+2t\\ z=3+t\end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3=(2;1;3)$. **B.** $\vec{u}_4=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}_2=(2;1;1)$. **D.** $\vec{u}_1=(-1;2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_4=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 184. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(3;-1;5)$. **B.** $\vec{u}_4=(1;-1;2)$. **C.** $\vec{u}_2=(-3;1;5)$. **D.** $\vec{u}_3=(1;-1;-2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 185. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$?

A. $P(1;1;2)$. **B.** $N(2;-1;2)$. **C.** $Q(-2;1;-2)$. **D.** $M(-2;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ đi qua điểm $Q(-2;1;-2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-t\\ y=5+t\\ z=2+3t\end{cases}$?

A. $P\,(1;2;5)$. **B.** $N\,(1;5;2)$. **C.** $Q\,(-1;1;3)$. **D.** $M\,(1;1;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(1;5;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 187. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{3}$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $\vec{a}=(2;-1;3)$. **B.** $\vec{b}=(2;1;3)$. **C.** $\vec{c}=(3;1;-5)$. **D.** $\vec{d}=(-3;1;5)$.

Lời giải.

Vì đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{3}$ nên tọa độ của véc-tơ chỉ phương là $(2;-1;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 188. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=z-3$. Véc-tơ nào là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}=(3;2;3)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;3)$. **C.** $\vec{u}=(3;2;0)$. **D.** $\vec{u}=(3;2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;2;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 189. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm O và $A(-2;1;3)$ là

A. $\begin{cases}x=-2+2t\\y=1-t\\z=3+3t\end{cases}$. **B.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{-3}$.

C. $\begin{cases}x=-2t\\y=t\\z=3t\end{cases}$. **D.** $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=\overrightarrow{AO}=(2;-1;-3)$ và đi qua A nên phương trình chính tắc là

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 190. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u}_2=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{u}_4=(2;-1;-3)$. **C.** $\vec{u}_1=(0;2;-1)$. **D.** $\vec{u}_3=(-2;-1;3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(-2;1;3)$. Do $\vec{u}_4=-\vec{u}$ nên cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án B □

Câu 191. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(1;3;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(2;1;0)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;3;1)$. **D.** $\vec{u}_4=(-1;2;0)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của d có tọa độ là $(1;3;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 192. Trong không gian với hệ tọa $Oxyz$, tìm phương trình tham số của trục Oz?

A. $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Trục Oz qua điểm $O(0;0;0)$ và nhận véc-tơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Do đó trục Oz có phương trình là $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+4}{5}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}=(-2;-7;4)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;5)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;5)$. **D.** $\vec{u}=(2;7;-4)$.

Lời giải.

Dễ thấy một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(-1;2;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{5}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_4=(-2;1;-5)$. **B.** $\vec{u}_1=(2;-1;-5)$. **C.** $\vec{u}_2=(2;1;5)$. **D.** $\vec{u}_3=(1;2;3)$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án B □

Câu 195. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(-2;1;-3)$. **B.** $\vec{u}=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;1;1)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 196. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;1)$. **B.** $\vec{u}=(2;1;0)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;1)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;0)$.

Lời giải.

Đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 197. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;6)$ là

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-6}{3}$.
B. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+6}{3}$.
C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{6}$.
D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{6}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $A(1;-2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;6)$ là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{6}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2+3t\\z=1-t\end{cases}$. Đường thẳng d' song song với d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(-2;3;0)$. **B.** $\vec{u}=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;3;1)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-3;1)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u_d}=(2;3;-1)=-(-2;-3;1)$.
Do d' song song với d nên d' có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;-3;1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 199. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+2t\\z=1+t\end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{n}=(-1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ có một vec-tơ chỉ phương là $(a;b;c)$. Do đó, từ phương trình d, ta thấy $\vec{n}=(-1;2;1)$ là một vec-tơ chỉ phương của d.
Chọn đáp án B □

Câu 200. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=5-t\\z=2\end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(3;-1;0)$. **B.** $\vec{u}_2=(2;5;0)$. **C.** $\vec{u}_3=(-3;1;2)$. **D.** $\vec{u}_4=(3;-1;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=5-t\\z=2\end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;-1;0)$.
Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. D	4. A	5. B	6. C	7. D	8. D	9. C	10. B
11. B	12. A	13. C	14. B	15. D	16. B	17. D	18. D	19. A	20. C
21. A	22. B	23. A	24. B	25. B	26. D	27. D	28. B	29. B	30. B
31. A	32. A	33. A	34. B	35. A	36. A	37. B	38. B	39. C	40. C
41. C	42. B	43. A	44. C	45. A	46. B	47. D	48. A	49. A	50. B
51. C	52. A	53. C	54. A	55. C	56. B	57. B	58. D	59. D	60. A
61. C	62. D	63. B	64. B	65. B	66. C	67. A	68. B	69. B	70. B
71. D	72. C	73. C	74. D	75. A	76. A	77. D	78. C	79. A	80. D
81. D	82. D	83. D	84. A	85. C	86. D	87. A	88. A	89. A	90. A
91. D	92. B	93. C	94. D	95. A	96. B	97. A	98. C	99. D	100. D
101. B	102. A	103. C	104. C	105. D	106. B	107. A	108. B	109. A	110. D
111. C	112. B	113. A	114. D	115. A	116. B	117. A	118. A	119. A	120. D
121. D	122. A	123. A	124. A	125. B	126. A	127. B	128. D	129. D	130. D
131. A	132. C	133. B	134. D	135. B	136. D	137. A	138. C	139. B	140. C
141. A	142. C	143. B	144. D	145. B	146. D	147. D	148. A	149. C	150. B
151. B	152. C	153. D	154. C	155. B	156. A	157. B	158. C	159. C	160. C
161. B	162. B	163. D	164. A	165. B	166. A	167. C	168. A	169. C	170. A
171. B	172. A	173. A	174. A	175. B	176. D	177. C	178. A	179. B	180. D
181. B	182. B	183. B	184. B	185. C	186. B	187. A	188. D	189. B	190. B
191. A	192. C	193. C	194. B	195. B	196. C	197. C	198. D	199. B	200. A

2 Mức độ thông hiểu

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;4)$ trên mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+6=0$ là điểm nào dưới đây?

A. $(2;8;2)$. **B.** $\left(1;\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. **C.** $\left(3;\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **D.** $(1;3;5)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc mặt phẳng (P). Khi đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=4-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (M). Tọa độ điểm M' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=4-t \\ 2x-y-z+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ x=1 \\ y=\frac{7}{2} \\ z=\frac{9}{2}. \end{cases}$

Vậy $M'\left(1;\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$

Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $Q(2;-1;2)$. **B.** $M(-1;-2;-3)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $N(-2;1;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1-1}{2}=\frac{2-2}{-1}=\frac{3-3}{2}$ nên $P(1;2;3)\in d$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương?

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Xét đường thẳng $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$, có một véc-tơ chỉ phương là $(-2;-1;-1)=-(2;1;1)$ (thỏa đề bài).

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;2;3)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.
Ta có $\overrightarrow{MN}=(-2;6;4)$ và $\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(16;8;-4)$.
Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{14}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;1)$.
Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}_{(P)}$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{n}_{(P)}=(1;1;0)$, $\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$.
Gọi d là đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy).
Khi đó $\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\\\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(Oxy)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Oxy)}\right]=(1;-1;0)$.
Vậy d: $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1.\end{cases}$
Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ cắt mặt phẳng $(P):2x-3y+z-2=0$ tại điểm $I(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $\{I\} = d \cap (P)$ suy ra $I \in d$ và $I \in (P)$.

Vì $I \in d$ nên tọa độ của I có dạng $(1+2t; 3-t; 1+t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Vì $I \in (P)$ nên ta có phương trình: $2(1+2t) - 3(3-t) + 1 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $I(3;2;2)$ suy ra $a+b+c = 3+2+2 = 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;3)$ và hai mặt phẳng (P): $2x+y+2z-8=0$, (Q): $x-4y+z-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5-t \\ z = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5+t \\ z = 3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} = 3+t \\ y = 5 \\ z = 3-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5 \\ z = 3+t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2;1;2)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1;-4;1)$.

$\left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (9;0;-9)$. Do đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;0;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 5 \\ z = 3-t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Giao điểm của mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -t. \\ z = 3+3t \end{cases}$

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;2;4)$. **C.** $(0;4;2)$. **D.** $(2;0;3)$.

Lời giải.

Gọi $A(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có: $2+t-t-(3+3t)-2=0 \Leftrightarrow -3t-3=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 0 \end{cases}$ Vậy $A(1;1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y-8=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases}$.

Khoảng cách giữa đưởng thẳng d và mặt phẳng P bằng

A. $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$ đi qua $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Mặt phẳng $(P)\colon x+2y-8=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;0)$.

Ta có $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{n}=2-2+0=0 \\ A\notin(P) \end{cases}$, nên đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

$\mathrm{d}(d;(P))=\mathrm{d}(A;(P))=\dfrac{|1+4-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;3;2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận véc-tơ nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

A. $\vec{a}=(1;1;0)$. **B.** $\vec{c}=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{b}=(-2;2;2)$. **D.** $\vec{d}=(-1;1;0)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra tọa độ điểm $M(0;2;1)$.

Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}=(-1;1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Điều kiện cần và đủ để phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+m^2-9m+4=0$ là phương trình mặt cầu là

A. $2x-4y+4z-5=0$ hoặc $2x-4y+4z-13=0$.

B. $x-2y+2z-25=0$.

C. $x-2y+2z-7=0$.

D. $x-2y+2z-25=0$ hoặc $x-2y+2z-7=0$.

Lời giải.

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+m^2-9m+4=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(z-3)^2=-m^2+9m+10.$$

Do đó điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là

$$-m^2+9m+10>0\Leftrightarrow -1<m<10.$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$ và $D(1;2;1)$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. 40. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 30.

Lời giải.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-5;0;-10) \\ \overrightarrow{AC}=(3;0;-6) \end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;-60;0)\Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|=30.$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?

A. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=1$. **B.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=0$. **C.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{9}=0$. **D.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{9}=1$.

Lời giải.

☑ Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

☑ Do G là trọng tâm tứ diện $OABC$ nên suy ra $a=4$, $b=16$, $c=12$.

☑ Vậy phương trình đoạn chắn của mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{12}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;4)$ trên mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+6=0$ là điểm nào dưới đây?

A. $(2;8;2)$. **B.** $\left(1;\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $\left(3;\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $(1;3;5)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc mặt phẳng (P). Khi đó phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=4-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (M). Tọa độ điểm M' là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=4-t \\ 2x-y-z+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ y=\dfrac{7}{2} \\ z=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Vậy $M'\left(1;\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ cho điểm $A(-3;1;2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là:

A. $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(-3;-1;2)$. **D.** $(3;1;-2)$.

Lời giải.

Toạ độ điểm A' đối xứng với $A\,(-3;1;2)$ qua trục Oy là $(3;1;-2)$

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(1;-2;0)$. **B.** $(2;3;3)$. **C.** $(5;6;8)$. **D.** $(0;1;3)$.

Lời giải.

Ta $(\alpha)\colon \begin{cases} d\subset(\alpha) \\ (\beta)\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3;0)\in d\Rightarrow A\in(\alpha) \\ \vec{n}_\alpha\perp\vec{u}_d=(1;1;2) \\ \vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta=(1;1;-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3;0)\in(\alpha) \\ \vec{n}_\alpha=[\vec{u}_d;\vec{n}_\beta]=(-4;4;0). \end{cases}$

Suy ra $(\alpha)\colon x-y+1=0$.

Khi đó giao tuyến thỏa hệ

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2z+1=0. \end{cases}$$

Thay các phương án vào hệ, ta nhận phương án $(2;3;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 18 (2H3B3-2). Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ là

A. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3 \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Phương pháp: Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct. \end{cases}$

Cách giải: Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;1)$ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}, d_2\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ vuông góc với d_1 và cắt đường thẳng d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp:

- ☑ Gọi $B=\Delta\cap d_2 \Rightarrow$ Tham số hóa tọa độ điểm B.
- ☑ Đường thẳng $\Delta\perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0 \Rightarrow$ Tọa độ điểm B.
- ☑ Viết phương trình Δ.

Cách giải: $d_2\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ có PTTS là $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1-t. \end{cases}$

Gọi giao điểm của Δ và d_2 là $B\,(1-t;1+2t;-1-t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-t;2t-1;-t-4)$.

Đường thẳng $\Delta\perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0$.

$\Rightarrow -t\cdot 3+(2t-1)\cdot 2+(-t-4)(-1)=0 \Leftrightarrow 2t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-3;-3)$ là 1 véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Phương trình $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 150°. **D.** 120°.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-1)$.

(α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$.

$\sin\widehat{(\Delta,(\alpha))}=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|1\cdot1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{(\Delta,(\alpha))}=30^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1)$, $B(-3;2;0)$, $C(2;-2;3)$. Đường cao kẻ từ B của tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $P(-1;2;-2)$. **B.** $M(-1;3;4)$. **C.** $N(0;3;-2)$. **D.** $Q(-5;3;3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;2)$.

Một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ B của tam giác ABC là $\vec{u}=\dfrac{1}{12}\left[\vec{n},\overrightarrow{AC}\right]=(1;0;-1)$.

Phương trình đường cao kẻ từ B là: $\begin{cases}x=-3+t\\y=2\\z=-t\end{cases}$.

Ta thấy điểm $P(-1;2;-2)$ thuộc đường thẳng trên.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1), B(2;-1;4), C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

A. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. **C.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Lời giải.

Phương pháp:

$(d)\perp(P)\Leftrightarrow\vec{u_d}$ cùng phương với $\vec{n_P}$.

Cách giải:

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(3;-3;3)//\vec{a}=(1;-1;1)\\\overrightarrow{AC}=(2;-1;3)\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_{(ABC)}=\left[\vec{a};\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-1;1)$ là 1 VTPT của mặt phẳng (ABC).

Do đó đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) có VTPT cùng phương với vectơ $(-2;-1;1)$.

Dựa vào các đáp án ta thấy ở đáp án D đường thẳng $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ có 1 VTPT là $(-2;1;1)$ cùng phương với $(-2;-1;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và

song song với (P).

A. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

B. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

D. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(3;-5;-1)$.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;0;1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với d nên vec tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta\perp\vec{u_d}$.

Đường thẳng Δ song song với (P) nên $\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_{(P)}$.

Ta có $\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(-5;-5;10)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta--\dfrac{1}{5}\cdot\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(1;1;-2)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

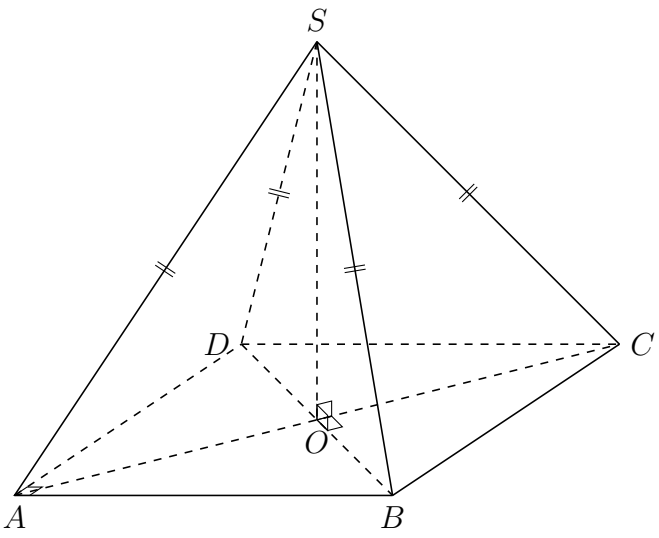
A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

B. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

C. $V=\dfrac{2a^3}{3}$.

D. $V=2a^3$.

Lời giải.



Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có SO là đường cao hình chóp $S.ABCD$. Vì cạnh bên SC tạo với đáy một góc 45° nên $\widehat{SCA}=45^\circ$, suy ra ΔSAC vuông cân tại S, do đó $SO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+3y-9=0, y+2z+5=0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

A. song song.

B. chéo nhau.

C. cắt nhau.

D. trùng nhau.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ y+2z+5=0 \end{cases}$.

Cho $y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow A(3;1;-3) \in d_2$

Cho $y=3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow B(0;3;-4) \in d_2$

Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;7;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}(2;1;4)$

Đường thẳng d_2 đi qua $A(3;1;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}(-3;2;-1) = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}(2;-6;-6)$

Ta có $[\vec{u_1},\vec{u_2}] = (-9;-10;7) \Rightarrow [\vec{u_1},\vec{u_2}]\,\overrightarrow{AM} = -2.9+6.10-6.7 = 0$.

Do đó d_1 và d_2 cắt nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+5y-z-2=0$.

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;0;-2)$. **C.** $(1;1;6)$. **D.** $(12;9;1)$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của d và (P).

Ta có $I \in d \Leftrightarrow I(4t+12;3t+9;t+1)$.

$I \in (P) \Leftrightarrow 3(4t+12)+5(3t+9)-(t+1)-2=0 \Leftrightarrow 26t=-78 \Leftrightarrow t=-3$.

Suy ra $I(0;0;-2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của $A(2;-1;1)$ lên đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=1 \\ y=4+2t \\ z=-2t \end{cases}$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $a+2b+3c=10$. **B.** $a+2b+3c=5$. **C.** $a+2b+3c=8$. **D.** $a+2b+3c=12$.

Lời giải.

Vì $H \in (d) \Rightarrow H(1;4+2t;-2t)$, $\overrightarrow{AH} = (-1;5+2t;-1-2t)$.

(d) có vtcp $\vec{u} = (0;2;-2)$.

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (-1)0+(5+2t)2+(-1-2t)(-2)=0 \Leftrightarrow 8t+12=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3}{2}.$$

Suy ra $H(1;1;3)$.

Vậy $a+2b+3c=12$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng song song $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=4-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (d,d'), đồng thời cách đều hai đường thẳng d và d'.

A. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
B. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$.
C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.
D. $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải.

Lấy $M(2;1;4)\in d$, $N(4;-1;0)\in d'$. Đường thẳng cần tìm đi qua trung điểm của MN, là điểm $I(3;0;2)$, và song song với d và d'. Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

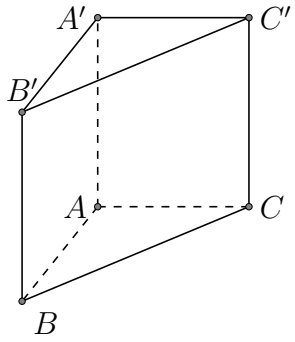
Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

Từ hình ta có thể suy ra các điểm còn lại của lăng trụ là $B'(2;0;2), C'(0;2;2)$.
Ta có $\overrightarrow{BC'}=(-2;2;2), \overrightarrow{A'C}=(0;2;-2)$
Và: $\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{A'C}=0$.
Vậy $BC'\perp AC'$



Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-5=0$, $(Q): 4x+5y-z+1=0$. Các điểm A, B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ nào sau đây?

A. $\vec{w}=(3;-2;2)$. **B.** $\vec{v}=(-8;11;-23)$. **C.** $\vec{k}=(4;5;-1)$. **D.** $\vec{u}=(8;-11;-23)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=(3;-2;2)$ và $\vec{n'}=(4;5;-1)$ lần lượt là các véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(P), (Q)$.
Do đó $\left[\vec{n},\vec{n'}\right]=(-8;11;23)$ là một véc-tơ chỉ phương của giao tuyến của (P) và (Q).
Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}=(8;-11;-23)$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Khi đó véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

A. $(4;-2;1)$. **B.** $(4;2;-1)$. **C.** $(4;-2;-1)$. **D.** $(4;2;1)$.

Lời giải.

Tọa độ véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(4;-2;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian Oxyz , cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=1-2t\\ y=-2+4t\\ z=1\end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u_4}=(-2;4;1)$. **B.** $\vec{u_1}=(2;4;0)$. **C.** $\vec{u_2}=(1;-2;0)$. **D.** $\vec{u_3}=(1;-2;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2;4;0)$ nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_2} = (1;-2;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$. Gọi Δ' là đường thẳng đối xứng với đường thẳng Δ qua (Oxy). Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ'.

A. $\vec{u} = (-1;3;-1)$. **B.** $\vec{u} = (1;2;-1)$. **C.** $\vec{u} = (1;3;0)$. **D.** $\vec{u} = (1;3;1)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4;11;0)$.
Ta thấy $B(1;2;3) \in \Delta$ và $B'(1;2;-3)$ là điểm đối xứng của điểm B qua mặt phẳng (Oxy).
Đường thẳng Δ' đi qua các điểm A, B'. Ta có $\overrightarrow{AB'} = (-3;-9;-3)$, từ đó suy ra $\vec{u} = (1;3;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ'.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon x - y + 2z - 3 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (P). Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(1;2;2)$. **B.** $H(2;5;3)$. **C.** $H(6;7;8)$. **D.** $H(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Vì H là hình chiếu vuông góc của M lên (P) nên $H(3+t;4-t;5+2t)$.
Điểm H thuộc mặt phẳng (P) nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} & (3+t) - (4-t) + 2(5+2t) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = -1 \\ \Leftrightarrow\ & H = (2;5;3). \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $(P)\colon x - 2y + 2z - 5 = 0$, $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A, song song với (P) sao cho khoảng cách từ B đến d là lớn nhất.

A. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$. **D.** $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z-1}{-7}$.

Lời giải.

Vì $(-3-2\cdot 0+2\cdot 1-5)(1-2\cdot(-1)+2\cdot 3-5)<0$ nên hai điểm A, B khác phía so với (P).

Gọi H là hình chiếu của B lên d.

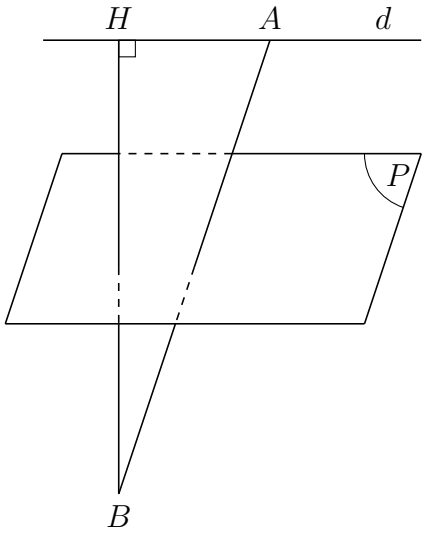
Ta có: $BH \le BA$ nên khoảng cách BH từ B đến d lớn nhất khi và chỉ khi H trùng A.

Khi đó $AB \perp d$.

VTPT của (P) là $\vec{n}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AB}=(4;-1;2)$.

VTCP của d là $\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-2;6;7)$.

Mà d qua $A(-3;0;1)$ nên phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-1}{-7}$.



Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon -x-2y+5z-2017=0$, $(Q)\colon 2x-y+3z+2018=0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}(-1;3;5)$. **B.** $\vec{u}(-1;13;15)$. **C.** $\vec{u}(1;13;5)$. **D.** $\vec{u}(-1;13;5)$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(-1;-2;5)$.

(Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(2;-1;3)$.

Suy ra $[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(-1;13;5)\neq\vec{0}$.

Vậy Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(-1;13;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2+t\\ y=-3+2t\\ z=1+3t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ Oxz. Viết phương trình đường thẳng d'.

A. $\begin{cases}x=2+t\\ y=3-2t\\ z=1+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases}x=0\\ y=-3+2t\\ z=1+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases}x=2+t\\ y=-3+2t\\ z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=0\\ z=1+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

d đi qua $M(2;-3;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$.

Mặt phẳng (Oxz) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;0)$ và có phương trình $y=0$.

Suy ra $[\vec{u},\vec{n}]=(-3;0;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $Oxz \Rightarrow H(2;0;1)$.

Suy ra d' là đường thẳng qua $H(2;0;1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u'}=[\vec{n},[\vec{u},\vec{n}]]=(1;0;3)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình của d': $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1), B(-1;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

A. $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t. \\ z = 1 - t \end{cases}$ **B.** $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t. \\ z = 1 + t \end{cases}$ **C.** $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t. \\ z = 1 - t \end{cases}$ **D.** $\Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Tam giác OAB vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm AB có tọa độ $I(0;1;1)$.
Mặt phẳng (OAB) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (-2;-2;2)$.
Suy ra đường thẳng Δ có $\vec{u} = (1;1;-1)$ và đi qua $I(0;1;1)$. Vậy phương trình đường thẳng Δ là

$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t. \\ z = 1 - t \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$. Mặt phẳng đi qua $A(2;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $2x + y - z - 2 = 0$. **B.** $x + 3y - 2z - 3 = 0$.
C. $x - 3y - 2z + 3 = 0$. **D.** $x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (2;1;-1)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-1;1)$ nhận $\vec{u}$ là véc-tơ pháp tuyến có phương trình
$2(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 2 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-2;0)$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là

A. $\vec{u} = (-1;2;1)$. **B.** $\vec{u} = (1;2;-1)$. **C.** $\vec{u} = (2;-4;2)$. **D.** $\vec{u} = (2;4;-2)$.

Lời giải.

Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2;-4;-2)$. Nhận thấy $\vec{u} = (-1;2;1)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ nên $\vec{u} = (-1;2;1)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S). Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $(Q): x + 2y - 2z - 17 = 0$. **B.** $(Q): 2x + 2y - 2z + 19 = 0$.

C. $(Q): x+2y-2z-35=0$. **D.** $(Q): x+2y-2z+1=0$.

Lời giải.

Ta gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu (S). Khi đó $I(2;1;-2)$ và $R=3$.

Mặt phẳng $(Q) \parallel (P)$ nên (Q) có dạng $x+2y-2z+d=0$.

Vì (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I,(Q))=R$, suy ra $\dfrac{|2+2+4+d|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}}=3 \Rightarrow d=1$ (loại vì trùng mặt phẳng (P)) hoặc $d=-17$.

Vậy $(Q): x+2y-2z-17=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng song song với 2 đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{4}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=1-t \end{cases}$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(-5;6;-7)$. **B.** $\vec{n}=(5;-6;7)$. **C.** $\vec{n}=(-5;6;7)$. **D.** $\vec{n}=(-5;-6;7)$.

Lời giải.

- $\vec{u_1}=(2;-3;4)$ và $\vec{u_2}=(1;2;-1)$.
- (P) có VTPT là $\vec{n}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=(-5;6;7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải.

- $\Delta: \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Đặt $2t=t'$ ta có $\Delta: \begin{cases} x=2+2t' \\ y=-3t' \\ z=-1+t' \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(-3;4;3)$, $C(3;1;-3)$. Số điểm D sao cho 4 điểm A, B, C, D là 4 đỉnh của một hình bình hành là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-1;-2)$. Suy ra A,B,C thẳng hàng. Do đó không có điểm D nào thỏa mãn A,B,C,D là 4 đỉnh của hình bình hành.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0;5;3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1;1;0)$ thuộc đường thẳng AC. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AC?

A. $\vec{u}(1;2;3)$. **B.** $\vec{u}(0;-2;6)$. **C.** $\vec{u}(0;1;-3)$. **D.** $\vec{u}(0;1;3)$.

Lời giải.

• Hình chiếu H của M trên đường phân giác trong góc A có tọa độ: $H\left(\frac{1}{2};4;\frac{9}{2}\right)$.

• M' là điểm đối xứng của M qua H. Từ đây ta tìm được tọa độ $M'(1;3;6)$.

• Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AC chính là véc-tơ $\overrightarrow{NM'}=(0;2;6)$.

Suy ra, đường thẳng AC có một véc-tơ chỉ phương là $(0;1;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(0;1;3)$. **B.** $\vec{u}=(0;1;-3)$. **C.** $\vec{u}=(2;1;-3)$. **D.** $\vec{u}=(2;0;0)$.

Lời giải.

Chọn $A(-3;1;1), B(-1;2;-2)$ thuộc d, ta có các điểm $A'(0;1;1)$, $B'(0;2;-2)$ là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (Oxy), khi đó $\vec{u}=\overrightarrow{A'B'}=(0;1;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả giá trị tham số m để đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-m^2z+m=0$.

A. $m\in\{-2;2\}$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

d qua điểm $M(1;0;1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;2;1)$, (P) có VTPT là $\vec{n}=(2;1;-m^2)$.

Vì $d\parallel(P)$ nên $\vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow m=\pm2$.

☑ Với $m=2$, $(P)\colon 2x+y-4z+2=0\Rightarrow M\in(P)$ (loại).

☑ Với $m=-2$, $(P)\colon 2x+y-4z-2=0\Rightarrow M\notin(P)$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=8$ và hai đường thẳng $d_1\colon \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$, $d_2\colon \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với d_1, d_2.

A. $x-y+2=0$. **B.** $x-y+2=0$ hoặc $x-y+6=0$.

C. $x-y-6=0$. **D.** $x-y+6=0$.

Lời giải.

Ta có (S) có tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

d_1 qua $M(-1;1;1)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(1;1;2)$. d_2 qua $N(-1;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(1;1;1)$.

Mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2 nên có VTPT $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(1;-1;0)$, đo đó (P) có phương trình $x-y+d=0$.

Lại có (P) tiếp xúc (S) nên $\mathrm{d}(I,(P))=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=2\\d=-6\end{array}\right.$.

☑ Với $d=2$, $(P)\colon x-y+2=0\Rightarrow M\in(P)$ (loại).

☑ Với $d=-6$, $(P)\colon x-y-6=0\Rightarrow M,N\notin(P)$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án C □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(0;1;3)$. **B.** $\vec{u}=(0;1;-3)$. **C.** $\vec{u}=(2;1;-3)$. **D.** $\vec{u}=(2;0;0)$.

Lời giải.

Chọn $A(-3;1;1), B(-1;2;-2)$ thuộc d, ta có các điểm $A'(0;1;1)$, $B'(0;2;-2)$ là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (Oyz), khi đó $\vec{u}=\overrightarrow{A'B'}=(0;1;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y+2z+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. d song song với (P). **B.** d nằm trong (P).

C. d cắt và không vuông góc với (P). **D.** d vuông góc với (P).

Lời giải.

Ta có d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;-1;-3)$ và (P) có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(3;-3;2)$.

Nhận thấy $\vec{u}_d\cdot\vec{n}_P=1\cdot 3+(-1)\cdot(-3)+(-3)\cdot 2=0\Rightarrow d\parallel(P)$ hoặc $d\subset(P)$.

Lấy $A(-1;0;1)\in d$. Thay vào phương trình của (P) ta được $3\cdot(-1)-3\cdot 0+2\cdot 1+1=0$

$\Rightarrow A\in(P)$. Suy ra d nằm trong (P).

Cách khác.

Viết lại đường thẳng d ở dạng tham số $\begin{cases}x=-1+t\\ y=-t\\ z=1-3t\end{cases}$.

Xét phương trình $3\cdot(-1+t)-3\cdot(-t)+2\cdot(1-3t)+1=0\Leftrightarrow 0=0$. Kết luận phương trình có vô số nghiệm $\Rightarrow d\subset(P)$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon y+2z-1=0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(\alpha)\perp(Oyz)$. **B.** (α) cắt (Oxy). **C.** $(\alpha)\perp Ox$. **D.** $(\alpha)\parallel Ox$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;2)$

Ta thấy véc-tơ $\vec{n}$ và véc-tơ $\vec{i}=(1;0;0)$ không cùng phương với nhau.

Suy ra $(\alpha)\perp Ox$ không xảy ra.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ và điểm $A(1;-2;3)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là

A. $x-y+2z-9=0$. **B.** $x-2y+3z-14=0$.

C. $x-y+2z+9=0$. **D.** $x-2y+3z-9=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d nên (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $(x-1)-(y+2)+2(z-3)=0\Leftrightarrow x-y+2z-9=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng đi qua điểm $M(0;1;-1)$ và song song với đường thẳng (d) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.
B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Rõ ràng $M\notin(d)$.
Đường thẳng (d) có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;-1)$.
Đường thẳng đi qua $M(0;1;-1)$ và song song với đường thẳng (d) có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.
Chọn đáp án A □

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $A(2;0;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên (Δ) là điểm nào dưới đây?

A. $Q(2;2;3)$. **B.** $M(-1;4;-4)$. **C.** $N(0;-2;1)$. **D.** $P(1;0;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(-1;-4;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(1;2;1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng $(\Delta)\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=-4+2t \\ z=t. \end{cases}$
Gọi P là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ). Khi đó $P\in(\Delta)\Rightarrow P(-1+t;-4+2t;t)$.
Ta có $\overrightarrow{AP}=(-3+t;-4+2t;t-1)$.
Vì $\overrightarrow{AP}\perp\vec{u}_\Delta$ nên $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow 1\cdot(-3+t)+2\cdot(-4+2t)+1\cdot(t-1)=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow P(1;0;2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ và $(d_2):\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

A. (d_1) và (d_2) cắt nhau.
B. (d_1) và (d_2) vuông góc nhau.
C. (d_1) và (d_2) trùng nhau.
D. (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Lời giải.

Gọi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 ta chọn $\vec{u}_1\,(1;2;-1)$, $\vec{u}_2\,(-1;2;3)$. Giả sử $M_1\in d_1$ và $M_2\in d_2$, ta chọn $M_1\,(7;3;9)$ và $M_2\,(-1;2;3)$ suy ra $\overrightarrow{M_1M_2}\,(-8;-1;-6)$. Khi đó

$$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(2\cdot3-2\cdot(-1);(-1)\cdot(-1)-3\cdot1;1\cdot2-(-1)\cdot2)=(8;-2;4)\,.$$

và $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=8\cdot(-8)+(-2)\cdot(-1)+4\cdot(-6)=-86\neq0$.
Do đó d_1, d_2 chéo nhau.
Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(2;1;-1)$, $B\,(0;-1;3)$, $C\,(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với AC có phương trình là

A. $x+y+2z+5=0$. **B**. $x-y-2z+5=0$. **C**. $x-y+2z+5=0$. **D**. $x+y-2z+5=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}(-1;1;2)$ do giả thiết suy ra $\overrightarrow{AC}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Khi đó phương trình của (P) là

$$(-1)(x-0)+(y+1)+2(z-3) \Leftrightarrow x-y-2z+5=0$$

Chọn đáp án B □

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(3;-2;1)$, $B(-4;0;3)$, $C(1;4;-3)$, $D(2;3;5)$. Phương trình của mặt phẳng chứa AC và song song với BD là

A. $12x-10y-21z-35=0$. **B**. $12x+10y-21z+35=0$.

C. $12x+10y+21z+35=0$. **D**. $12x-10y+21z-35=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}(-2;6;-4)$ và $\overrightarrow{BD}(6;3;2)$ khi đó $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]=(24;-20;-42)$. Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng chứa AC và song song với BD suy ra $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]$ và $\vec{n}$ cùng phương. Khi đó ta chọn $\vec{n}(12;-10;-21)$. Do đó phương trình mặt phẳng là

$$12(x-3)-10(y+2)-21(z-1) \Leftrightarrow 12x-10y-21z-35=0$$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S(I;R)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$. Hỏi có bao nhiêu giao điểm giữa mặt cầu (S) với các trục Ox, Oy, Oz?

A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

Dễ thấy mặt cầu tiếp xúc với trục Ox tại $A(1;0;0)$ và tiếp xúc Oy tại $B(0;1;0)$, cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt, tất cả các điểm trên không trùng gốc tọa độ (do O không nằm trên mặt cầu). Vậy có tất cả bốn giao điểm.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+mt\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=1-t'\\y=2+2t'\\z=3-t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$. Giá trị của m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

A. $m=-1$. **B**. $m=1$. **C**. $m=0$. **D**. $m=2$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $A(1;0;-1)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_1}=(m;1;2)$.

Đường thẳng d' đi qua $B(1;2;3)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_2}=(-1;2;-1)$.

Ta có $[\vec{u_1},\vec{u_2}]=(-5;m-2;2m+1)$ và $\overrightarrow{AB}=(0;2;4)$.

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u_1},\vec{u_2}]\cdot AB=0 \Leftrightarrow m=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y-7z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P).

A. $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+7}{4}$. **B.** $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$.

C. $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-7}{4}$. **D.** $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+4}{-7}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-7)$. Véc-tơ này là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d. Do đó, phương trình của d là $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ và $d': \dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y-6}{8}=\dfrac{z-8}{10}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. d vuông góc với d'. **B.** d song song với d'. **C.** d trùng với d'. **D.** d và d' chéo nhau.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_1}=(3;4;5)$ và đi qua điểm $A(1;2;3)$.

Đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_2}=(6;8;10)$.

Dễ thấy $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ cùng phương và điểm $A\in d'$.

Vậy d và d' trùng nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm giao điểm M của d và (P).

A. $M(3;-3;-5)$. **B.** $M(3;3;-5)$. **C.** $M(3;3;5)$. **D.** $M(-3;-3;-5)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2} \end{cases}$.

Giải hệ trên, được nghiệm $(3;3;5)$. Từ đó điểm $M(3;3;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;-2)$ và $B(3;5;-12)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz tại N. Tính tỉ số $\dfrac{BN}{AN}$.

A. $\dfrac{BN}{AN}=4$. **B.** $\dfrac{BN}{AN}=2$. **C.** $\dfrac{BN}{AN}=5$. **D.** $\dfrac{BN}{AN}=3$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{BN}{AN}=\dfrac{d(B,Oyz)}{d(A,Oyz)}=\dfrac{3}{1}=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A\,(1;4;7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-3=0$ là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=4+4t \\ z=7-4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4+t \\ y=3+2t \\ z=-1-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=4+3t \\ z=7+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+4t \\ z=-2+7t \end{cases}$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;2;-2)$.

Do đường thẳng d song song mặt phẳng (P) nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;-2)$.

Phương trình tham số d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 4+4t \\ z = 7-4t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Phương trình nào sau đây là chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$?

A. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$.

B. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{4}$.

D. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua A và B.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2;-3;4)$.

Phương trình chính tắc d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-6}{4}$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d?

A. $M(2;2;2)$. **B.** $M(2;2;4)$. **C.** $M(2;3;4)$. **D.** $M(2;2;10)$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{2-4}{2} = \dfrac{2-5}{3} = \dfrac{2-6}{4} = -1$ nên $M(2;2;2)$ thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d?

A. $Q(-2;-4;7)$. **B.** $P(7;2;1)$. **C.** $M(1;-2;3)$. **D.** $N(4;0;-1)$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{7-1}{3} = \dfrac{2+2}{2} \neq \dfrac{1-3}{-4}$ nên $P(7;2;1)$ không thuộc đường thẳng d.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;1)$ và hai đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1+t \\ z = t \end{cases}$ và d_2: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A, cắt đường thẳng d_1 và vuông góc với đường thẳng d_2. Đường thẳng d đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $N(2;1-5)$. **B.** $Q(3;2;5)$. **C.** $P(-2;-3;11)$. **D.** $M(1;0;-1)$.

Lời giải.

Gọi $B = d_1 \cap d$. $B \in d_1 \Rightarrow B(-1;-1+t;t)$. $\overrightarrow{AB} = (-1;t-2;t-1)$. d_2 có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3;1;1)$. Do $d \perp d_2$ nên $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -3+t-2+t-1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1;1;2)$.

Có $\overrightarrow{AN}=(2;0;6)$, $\overrightarrow{AQ}=(3;1;4)$, $\overrightarrow{AP}=(-2;-4;10)$, $\overrightarrow{AM}=(1;-1;-2)$.
Suy ra đường thẳng d đi qua M.
Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $M(-1;0;0)$ và $N(0;1;2)$ có phương trình là
A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. **C.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng trên đi qua $M(-1;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(1;1;2)$ nên có phương trình dạng chính tắc là $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;-5)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x+6y-3z+4=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là
A. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=\dfrac{361}{49}$. **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=49$.
C. $(x+3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=49$. **D.** $(x+3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=\dfrac{361}{49}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;4;-5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+6y-3z+4=0$ có bán kính

$$R=\mathrm{d}(I,(P))=\frac{|2\cdot 3+6\cdot 4-3\cdot(-5)+4|}{\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}}=7.$$

Vậy $(S)\colon (x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=49$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;2;-2)$ và $B(5;1;-3)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 10x+2y+mz+11=0$.
A. $m=-52$. **B.** $m=52$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-1;-1)$.
Mặt phẳng $(P)\colon 10x+2y+mz+11=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(10;2;m)$.
Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow \dfrac{10}{-5}=\dfrac{2}{-1}=\dfrac{m}{-1}\Rightarrow m=2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z+4}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là
A. $(2;8;-4)$. **B.** $(0;10;-7)$. **C.** $(-1;11;-7)$. **D.** $(5;5;-1)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) thỏa hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z+4}{-1}\\ x+y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-8}{1}\\ \dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z+4}{-1}\\ x+y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10\\ -y-z=-4\\ x+y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=11\\ z=-7.\end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là $(-1;11;-7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=3-5t \\ z=-4+t \end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d.

A. $x+5y+z-11=0$. **B.** $x-5y+z+8=0$.

C. $x+3y-4z-13=0$. **D.** $x-5y+z-8=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng cần tìm qua $A(3;2;-1)$ và nhận $\vec{u}=(1;-5;1)$ là véc-tơ chỉ phương của d làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng là

$$(x-3)-5(y-2)+(z+1)=0 \Leftrightarrow x-5y+z+8=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;3), B(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=-3-2t. \end{cases}$

A. $2x+y+3z+19=0$. **B.** $10x-4y+z-19=0$.

C. $2x+y+3z-19=0$. **D.** $10x-4y+z+19=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-2)$, đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;2;-2)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Theo giả thiết mặt phẳng (P) qua $A(2;1;3)$ và nhận $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\vec{u}]=(10;-4;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$10(x-2)-4(y-1)+(z-3)=0 \Leftrightarrow 10x-4y+z-19=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 75. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-7z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P).

A. $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$. **B.** $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-7}$.

C. $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-7}{3}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+7}{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(2;3;-7)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do $d\perp(P)$ nên d nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng d là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-7}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 150°. **D.** 30°.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d=(1;2;-1)$ và $\vec{n}_{(P)}=(1;-1;2)$.

Do đó $\cos(\vec{u}_d;\vec{n}_{(P)})=\dfrac{|1-2-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$, suy ra góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\Delta\colon\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $\Delta\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

Lời giải.

Vì $\vec{u}_\Delta\cdot\vec{n}_{(P)}=0$ và $\vec{u}_\Delta\cdot\vec{u}_d=0$ nên ta có thể chọn $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d\right]=(-5;-5;10)$. Để cho gọn ta có thể chọn $\vec{u}_\Delta=(1;1;-2)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ là $\Delta\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r=\dfrac{1}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính của $(S)\Rightarrow I(0;0;0)$, $R=1$.

Ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|1|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình của đường thẳng d đi qua hai điểm $M(0;-2;0)$, $N(1;-3;1)$.

A. $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. **C.** $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(0;-2;0)$, $N(1;-3;1)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(1;-1;1)$, suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-9;0)$ và song song với đường thẳng $\Delta\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

A. $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-9}{-2}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+9}{-2}=\dfrac{z}{1}$. **C.** $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-9}{2}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $d\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+9}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-9;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;1)$, do đó d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+9}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z+3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{m}$, với $m\neq 0$. Tìm m để d song song (P).

A. $m=5$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;1)$ và đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;m)$.

Vì $M\in d$ và $M\notin(P)$ nên $d\parallel(P)\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow m=-5$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm đoạn thẳng AB và song song với d?

A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. **C.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm đoạn AB, ta có $M(0;1;-1)$. Khi đó đường thẳng đi qua M và song song với d có phương trình $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. %[HK2 (2017-2018), THPT Tân Hiệp, Kiên Giang]Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+t\\z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và hai điểm $A(5;0;2),B(2;-5;3)$. Tìm điểm M thuộc Δ sao cho $\triangle ABM$ vuông tại A.

A. $M(2;2;3)$. **B.** $M(5;3;6)$. **C.** $M(-4;0;-3)$. **D.** $M(-7;-1;-6)$.

Lời giải.

Điểm M thuộc đường thẳng Δ nên $M\,(-1+3t;1+t;3t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(3t-6;t+1;3t-2)$ và $\overrightarrow{AB}=(-3;-5;1)$.

Tam giác ABM vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow-3(3t-6)-5(t+1)+3t-2=0\Leftrightarrow t=1.$$

Khi đó tọa độ điểm $M(2;2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1\colon\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và đường

thẳng $d_2\colon \begin{cases} x=2s \\ y=1-2s \\ z=6s \end{cases} (s\in\mathbb{R})$. Chọn khẳng định **đúng**.

A. d_1, d_2 chéo nhau. **B.** d_1, d_2 cắt nhau. **C.** $d_1 \parallel d_2$. **D.** $d_1 \equiv d_2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_{d_1}=(1;-1;3)$, $\vec{u}_{d_2}=(2;-2;6)=2\overrightarrow{u_{d_1}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \equiv d_2. \end{array}\right.$

Lấy $A(0;1;0)\in d_2$. Dễ thấy $A\notin d_1 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-2z+1=0$ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và cắt đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=11+2t \\ y=2t \\ z=-4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ tại N. Tính độ dài đoạn MN.

A. $7\sqrt{6}$. **B.** $3\sqrt{11}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Lời giải.

Điểm $N\in(d) \Rightarrow N(11+2t;2t;-4t)$. Mặt khác $N\in(\alpha)$ nên

$$11+2t+2t-2(-4t)+1=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

Điểm $N(9;-2;4) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(8;0;4) \Rightarrow MN=4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$; $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z}{-1}$ và điểm $M(0;3;0)$. Đường thẳng d đi qua M, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(4;a;b)$. Tính $T=a+b$

A. $T=-2$. **B.** $T=4$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=2$.

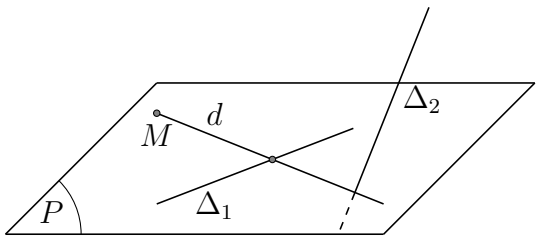
Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa M và Δ_1.

Lấy $A(3;1;1)\in\Delta_1$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến vuông góc với các véc-tơ $\overrightarrow{MA}=(3;-2;1)$ và $\vec{u}_{\Delta_1}=(1;1;2)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}_{\Delta_1}\right]=(-5;-5;5)$.



Một trong các véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$.

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với Δ_2 có $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_{\Delta_2}\right]=(4;-1;3)$. Vậy $a=-1; b=3 \Rightarrow T=a+b=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+3=0$, và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của (P) và Δ.

A. (P) và Δ chéo nhau. **B**. (P) song song Δ.

C. (P) chứa Δ. **D**. (P) cắt Δ.

Lời giải.

☑ Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-1;-1)$.

☑ Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-2;2)$.

Ta có $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2+2-2 = 2 \neq 0$, nên suy ra Δ cắt (P).

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-3mt \\ z = -1+t. \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 4x-4y+2z-5=0$. Giá trị nào của m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B**. $m = \dfrac{2}{3}$. **C**. $m = -\dfrac{5}{6}$. **D**. $m = \dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

☑ Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4;-4;2)$.

☑ Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3m;1)$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi $\vec{n}$ cùng phương với $\vec{u}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{-3m}{-4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3m = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1+t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là

A. $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. **B**. $\sqrt{7}$. **C**. $\sqrt{14}$. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1;1;-1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $B(0;-1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (2;1;1)$.

$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;0)$.

$$[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2;-1;-3).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là

$$\mathrm{d}(d,d') = \frac{\left|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]|} = \frac{|2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+(-3)\cdot 0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Trong không gian với hê tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng

A. 10. **B**. $\sqrt{10}$. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Trục Oy có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;0)$. Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;2;3)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{OA},\vec{u}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&1\\0&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\right)=(-3;0;1)$.

Khoảng cách từ $A(1;2;3)$ đến trục Oy bằng $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}}{1}=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+5=0$. Điểm A nào dưới đây thuộc d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng 3?

A. $A(4;-2;1)$. **B**. $A(2;-1;0)$. **C**. $A(-2;1;-2)$. **D**. $A(0;0;-1)$.

Lời giải.

Vì $A\in(d)$ nên ta có tọa độ điểm $A(2a;-a;a-1)$. Khoảng cách từ A đến (P) là

$$\frac{|2a+2a-2(a-1)+5|}{\sqrt{9}}=3\Leftrightarrow|2a+9|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-\dfrac{9}{2}.\end{array}\right.$$

Với $a=0\Rightarrow A(0;0;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$. Điểm $M\in\Delta$ mà tổng MA^2+MB^2 có giá trị nhỏ nhất có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$. **B**. $(0;-1;4)$. **C**. $(1;0;4)$. **D**. $(1;-2;0)$.

Lời giải.

Vì $M\in(\Delta)$ nên ta có tọa độ điểm $M(1-t;-2+t;2t)$. Ta có

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2&=(-t)^2+(t-6)^2+(2t-2)^2+(2-t)^2+(t-4)^2+(2t-4)^2\\&=12t^2-48t+76\\&=12(t-2)^2+28\\&\geq 28\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của MA^2+MB^2 là 28 khi $t=2\Rightarrow M(-1;0;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;2)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.
C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$.
D. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{4}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 và d_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(1;-4;6)$ và $\vec{u}_2=(2;1;-5)$.
Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.
Do $\begin{cases} \Delta\perp d_1 \\ \Delta\perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}\perp\vec{u}_1 \\ \vec{u}\perp\vec{u}_2 \end{cases}$, chọn $\vec{u}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(14;17;9)$.
Mà Δ đi qua $A(1;-1;2)$, do đó Δ có phương trình là $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y=0$ và $(\alpha')\colon 2x-y+z-15=0$. Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng d và d', biết đường thẳng d' có phương trình $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3. \end{cases}$

A. $I(0;0;-1)$. **B.** $I(0;0;2)$. **C.** $I(1;2;3)$. **D.** $I(4;-4;3)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm I của d và d' thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y+z-15=0 \\ x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t+2+2t=0 \\ 2(1-t)-(2+2t)+3-15=0 \\ x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ x=4 \\ y=-4 \\ z=3 \end{cases}.$$

Suy ra $I(4;-4;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-4}{3}$ và trục Ox.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Đường thẳng d có có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;-4;3)$ và đi qua điểm $M(1;-2;4)$.
Trục Ox có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_{Ox}=(1;0;0)$ và đi qua điểm $N(1;0;0)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng d và trục Ox là
$\mathrm{d}[d, Ox] = \dfrac{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{Ox}] \cdot \overrightarrow{MN}|}{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{Ox}]|} = \dfrac{|(0;3;4) \cdot (0;2;-4)|}{|(0;3;4)|} = 2.$
Chọn đáp án D □

Câu 96. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P) : 2x + y - z - 3 = 0$ và $(Q) : x + y + z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$.
C. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 2 \\ y = -3z - 1 \end{cases}$. Đặt $z = t$ ta suy ra $x = 2t + 2, y = -3t - 1$. Từ đó ta thu được phương trình đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{1}$. Xét điểm $A(2;-1;0) \in d$, ta thấy A chỉ thuộc đường thẳng $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$.
Chọn đáp án B □

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\vec{a}.\vec{c} = 1$. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
C. $\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \dfrac{\left|\vec{b}.\vec{c}\right|}{\left|\vec{b}\right|.|\vec{c}|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.
Chọn đáp án C □

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. $d_1 \parallel d_2$. **B.** d_1 và d_2 chéo nhau. **C.** $d_1 \equiv d_2$. **D.** $d_1 \perp d_2$.

Lời giải.

Ta có các véc-tơ chỉ phương $\vec{u_1} = (2;3;4), \vec{u_2} = (4;6;8)$. Dễ dàng nhận thấy $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$. Do đó $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ song song. Lấy bất kì một điểm $A(1;2;3) \in d_1$, ta thấy $A \in d_2$. Suy ra d_1 và d_2 trùng nhau.
Chọn đáp án C □

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} 6 - 4t \\ -2 - t \\ -1 + 2t \end{cases} (t \in$

$\mathbb{R}$). Hình chiếu của A trên d có tọa độ là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;-3;1)$. **C.** $(2;3;1)$. **D.** $(2;-3;-1)$.

Lời giải.

Gọi $H(6-4t;-2-t;-1+2t)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta có $\overrightarrow{AH}=(5-4t;-3-t;-2+2t)$ và $\vec{u_d}=(4,1,-2)$. Do $AH\perp d$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0$

$\Leftrightarrow 4(5-4t)+1(-3-t)-2(-2+2t)=0$

$\Leftrightarrow t=1$. Vậy tọa độ điểm H là $H(2;-3;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $(P):-x+3z-2=0$. Tìm đáp án đúng

A. $(P)\parallel Oy$. **B.** $(P)\parallel xOz$. **C.** $(P)\supset Oy$. **D.** $(P)\parallel Ox$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_P=(-1;0;3)$, $\vec{u}_{Oy}=(0;1;0)$. Dễ có tích vô hướng $\vec{n}_P.\overrightarrow{u_{Oy}}=0$. Suy ra $(P)\parallel Oy$.

Chọn đáp án A □

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-3t\\y=2t\\z=-2-mt\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-6=0$. Giá trị của m để $d\subset(P)$ là

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Để $d\subset(P)$ thì phương trình $2(1-3t)-(2t)-2(-2-mt)-6=0$ đúng với $\forall t\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow t(-8+2m)=0$ đúng với $\forall t\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $2x+2y+z+2017=0$.

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Lời giải.

d vuông góc với (P) nên d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}_P=(2;2;1)$.

Do đó, phương trình chính tắc đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $2x+y+z+5=0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=1+3t\\y=3-t\\z=2-3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Tìm tọa độ giao điểm của Δ và (α).

A. $(-2;-1;0)$. **B.** $(-5;2;3)$. **C.** $(1;3;2)$. **D.** $(-17;9;20)$.

Lời giải.

Xét phương trình $2(1+3t)+3-t+2-3t+5=0 \Leftrightarrow 2t+12=0 \Leftrightarrow t=-6$.

Với $t=-6 \Rightarrow \begin{cases} x=-17 \\ y=9 \\ z=20 \end{cases}$. Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (α) là $(-17;9;20)$.

Chọn đáp án D □

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d.

A. $(1;0;2)$. **B.** $(-1;-4;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(1;1;2)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M\,(2;0;1)$ và vuông góc với đường thẳng d. Suy ra (P) nhận $\vec{u_d}=(1;2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng $(P):(x-2)+2y+z-1=0 \Leftrightarrow x+2y+z-3=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d, suy ra $H=d\cap(P)$.

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1} \\ x+2y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ y-2z=-4 \\ x+2y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+1=0$, $(\beta)\colon x-2z-3=0$. Góc giữa d và (P) bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

(P), (α), (β) có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_P=(3;4;5)$, $\vec{n}_\alpha=(1;-2;0)$, $\vec{n}_\beta=(1;0;-2)$. Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta]=(4;2;2)$. Gọi φ là góc giữa d và (P), ta có:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}_P\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=60°.$$

Chọn đáp án D □

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d và đồng thời cách đều hai điểm A, B. Khi đó giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

$M\in d\Rightarrow M(1+2t;t;-2t), t\in\mathbb{R}$.

$$MA^2=MB^2\Leftrightarrow(2t-1)^2+(t-1)^2+4t^2\Leftrightarrow t=-1.$$

Vậy $M(-1;-1;2)\Rightarrow a+b+c=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;2)$ và $B(3;-2;-4)$. Khi đó mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-2y-3z-5=0$. **B.** $2x-2y-3z=0$.

C. $2x-2y+3z+1=0$. **D.** $2x+2y-3z-5=0$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;-4;-6)$.

Mặt phẳng trung trực của AB đi qua trung điểm $I(1;0;-1)$ của AB và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;-3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng trung trực của AB: $2x-2y-3z-5=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(-5;3;4)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$. **B.** $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.

C. $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$. **D.** $\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}=(-5;3;4)$ làm véc-tơ chỉ phương là $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 109. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua điểm $M\,(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $4x+3y-7z+2=0$. Phương trình tham số của d là

A. $\begin{cases}x=-1+4t\\y=-2+3t\\z=-3-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=2-4t\\z=3-7t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+4t\\y=-2-3t\\z=-3-7t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có d qua $M\,(1;2;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d=\vec{n}_P=(4;3;-7)$. Vậy d: $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng có phương trình sau

$$(d_1)\colon\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-3+5t\end{cases},\quad (d_2)\colon\begin{cases}x=2-4t\\y=6t\\z=-3-10t\end{cases},\quad (d_3)\colon\begin{cases}x=4+2t\\y=3-6t\\z=2+5t\end{cases}$$

Trong các đường thẳng trên, đường thẳng nào đi qua điểm $M(2;0;-3)$ và nhận véc-tơ $\vec{a}=(2;-3;5)$ làm véc-tơ chỉ phương?

A. Chỉ có d_1, d_2. **B.** Chỉ có d_1, d_3. **C.** Chỉ có d_1. **D.** Chỉ có d_2.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_{d_1}=(2;-3;5)=\vec{a}$; $\vec{u}_{d_2}=(-4;6;-10)=-2(2;-3;5)=\vec{a}$; $\vec{u}_{d_3}=(2;-6;5)\neq\vec{a}$.

Do đó $\vec{u}_{d_1}$, $\vec{u}_{d_2}$ cùng phương với $\vec{a}$ và $\vec{u}_{d_3}$ không cùng phương với $\vec{a}$.

Thay $M(2;0;-3)$ vào d_1; d_2 được $t=0\Rightarrow M\in d_1;\,d_2$.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z+3}{7}$. véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}_2=(-1;-2;3)$. **B.** $\vec{u}_4=(7;-8;5)$. **C.** $\vec{u}_3=(5;-8;7)$. **D.** $\vec{u}_1=(1;2;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z+3}{7}$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(5;-8;7)=\vec{u}_3$.

Chọn đáp án C □

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-6;3)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=t \end{cases}$.

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của M trên d.

A. $H(1;2;1)$. **B.** $H(1;-2;0)$. **C.** $H(4;-4;1)$. **D.** $H(2;2;-2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với d là: $3x-2y+z-21=0$.

Gọi $H(1+3t;-2-2t;t)\in d \Rightarrow H\in(P) \Rightarrow 3(1+3t)-2(-2-2t)+t-21=0 \Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow H(4;-4;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 113. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và đi qua điểm $P(2;-3;5)$.

A. $(\alpha)\colon 3x+2y=0$. **B.** $(\alpha)\colon 2x-3y=0$.

C. $(\alpha)\colon 2x+3y+5=0$. **D.** $(\alpha)\colon -y+2z+7=0$.

Lời giải.

Trục Oz có véc-tơ chỉ phương $\vec{k}=(0;0;1)$ và $\overrightarrow{OP}=(2;-3;5) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=[\vec{k},\overrightarrow{OP}]=(3;2;0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là: $3(x-0)+2(y-0)=0 \Leftrightarrow 3x+2y=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 114. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1)\colon \begin{cases} x=2-2t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$ và $(d_2)\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (d_1) và (d_2) cắt nhau.

B. (d_1) và (d_2) song song với nhau.

C. (d_1) và (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau.

D. (d_1) và (d_2) chéo nhau và không vuông góc với nhau.

Lời giải.

Các véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đã cho là $\vec{u_1}(-2;0;1), \vec{u_2}(1;-1;2)$ và dễ thấy chúng vuông góc với nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 115. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+1=0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos\alpha=\dfrac{4}{9}$. **B.** $\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{4}{9}$. **D.** $\sin\alpha=-\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;2;-1)$, (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;-2)$. Từ đó, $\sin\alpha=|\cos(\vec{u},\vec{n})|=\left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d.

A. $(P)\colon 5x+2y+4z-5=0$. **B.** $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$.

C. $(P)\colon 2x+2y+z-2=0$. **D.** $(P)\colon 5x-2y-4z-5=0$.

Lời giải.

d đi qua điểm $M(1;-2;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(2;1;2)$. Do (P) chứa A và d nên (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-5;2;4)$. Suy ra phương trình của (P) là $5x-2y-4z-5=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 117. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x-2y-6z+5=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Δ song song với (α). **B.** Δ nằm trên (α).

C. Δ vuông góc với (α). **D.** Δ cắt và không vuông góc với (α).

Lời giải.

Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;1;3)$, (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;-3)$. Dễ thấy $\vec{u}=-\vec{n}$ nên Δ vuông góc với (α).

Chọn đáp án C □

Câu 118. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A,B.

A. $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$. **B.** $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=17$.

C. $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$. **D.** $(S)\colon (x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=33$.

Lời giải.

Gọi tâm mặt cầu là $I(1+2t;t;-2t)$. Từ $IA=IB$ ta suy ra

$$(2t-1)^2+(t-1)^2+(-2t)^2=(2t+3)^2+(t-3)^2+(-2t-2)^2\Leftrightarrow t=-1.$$

Suy ra $I(-1;-1;2)$ và $AI^2=17$. Vậy mặt cầu cần tìm là $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$.

Chọn đáp án A □

Câu 119. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm $M(1;4;-2)$ qua đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=1+2t,\\ y=-1-t,\\ z=2t. \end{cases}$

A. $M'(-1;0;-2)$. **B.** $M'(-3;-4;-2)$. **C.** $M'(3;-2;2)$. **D.** $M'(5;-8;6)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của M lên (d) thì H chính là trung điểm của MM'. Vì H thuộc (d) nên tọa độ H có dạng $H(1+2t;-1-t;2t)$. Từ $MH \perp (d)$ ta suy ra $t=-1$. Do đó, $H(-1;0;-2)$ và $M'(-3;-4;-2)$.
Chọn đáp án B □

Câu 120. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua $A(1;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+1=0$.

A. $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Lời giải.

d đi qua $A(1;2;-1)$ và nhận véc-tơ pháp tuyến của (P) làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình là $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Tọa độ giao điểm M của d và (P) là

A. $M(0;0;-2)$. **B.** $M(0;2;0)$. **C.** $M(4;3;-1)$. **D.** $M(1;0;1)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm M của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0 \Leftrightarrow 26t=-78 \Leftrightarrow t=-3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm $M(0;0;-2)$.
Chọn đáp án A □

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-4z+5=0$ là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-4-5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-5+4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-5-4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t. \\ z=4+5t \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận véctơ pháp tuyến của (P) làm véctơ chỉ phương. Do đó phương trình của d là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -5 - 4t. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây **không thuộc** đường thẳng d?

A. $M(-4;-2;-4)$. **B.** $N(1;0;-3)$. **C.** $P(6;2;2)$. **D.** $Q(51;20;7)$.

Lời giải.

Thế tọa độ $P(6;2;2)$ vào phương trình đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 6 = 1 + 5t \\ 2 = 2t \\ 2 = -3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = -5 \end{cases} \text{(vô nghiệm).}$$

Vậy $P(6;2;2)$ không thuộc d.

Chọn đáp án C □

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm $E(1;2;-3)$ và $F(3;-1;1)$.

A. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$.

C. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Đường thẳng qua điểm $E(1;2;-3)$ và $F(3;-1;1)$ có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u} = \overrightarrow{EF} = (2;-3;4).$$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng EF qua $F(3;-1;1)$ là

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 125. Trong không gian $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;0;1)$ trên đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(2;2;3)$. **B.** $H(0;-2;1)$. **C.** $H(1;0;2)$. **D.** $H(-1;-4;0)$.

Lời giải.

Gọi $H(1+t;2t;2+t)$ thuộc đường thẳng d, véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;2;1)$.
Vì H là hình chiếu của điểm M lên d nên ta có

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}_d=0. \qquad (1)$$

Mà $\overrightarrow{MH}=(t-1;2t;t+1)$ nên từ (1) ta có phương trình

$$1(t-1)+2\cdot 2t+1(t+1)=0\Leftrightarrow 6t=0\Leftrightarrow t=0.$$

Với $t=0$ ta được điểm $H(1;0;2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-2}$.
C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.
Đường thẳng qua $M(2;1;0)$ và song song với đường thẳng d cũng nhận $\vec{u}=(2;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương của nó.
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}\Leftrightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon y+3=0$.

A. $\Delta\colon \begin{cases}x=2\\y=-1+t\\z=3\end{cases}$. **B.** $\Delta\colon \begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=-3\end{cases}$. **C.** $\Delta\colon \begin{cases}x=0\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\Delta\colon \begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=3\end{cases}$.

Lời giải.

Do $\Delta\perp(P)\Rightarrow\vec{u}_\Delta\parallel\vec{n}_{(P)}$ nên chọn $\vec{u}_\Delta=(0;1;0)$.
Phương trình đường thẳng Δ là $\Delta\colon \begin{cases}x=2\\y=-1+t\\z=3\end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;1)$. Tính khoảng cách từ A đến trục Oy.

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 3. **D.** 10.

Lời giải.

Hình chiếu của A lên Oy là $H(0;2;0)$. Vậy khoảng cách từ A đến trục Oy bằng

$$AH = \sqrt{(0-3)^2+(2-2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{10}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+3t \\ z = 3t. \end{cases}$ Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d?

A. $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{3}$.

B. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-3}$.

C. $x-2 = y-1 = z$.

D. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2;3;3)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z+3=0$ và điểm $A(1;-2;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P).

A. $d\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t. \\ z = 1+t \end{cases}$ **B.** $d\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-4t. \\ z = 1+3t \end{cases}$ **C.** $d\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t. \\ z = 1+t \end{cases}$ **D.** $d\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t. \\ z = 1+3t \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) nên d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-1;1)$ nên có phương trình là $d\colon \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 1+t. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-3;6)$ và song song với d?

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-6}{-4}$.

B. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+4}{6}$.

C. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+6}{1}$.

D. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-6}{1}$.

Lời giải.

Vì đường thẳng cần tìm song song với d nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-2;1)$.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;-3;6)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;1)$ là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-6}{1}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 132. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d là

A. $x-2y-z-3=0$. **B.** $x-2y-z+4=0$.

C. $x-2y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+3=0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d là:

$$-(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0\Leftrightarrow -x+2y+z-4=0\Leftrightarrow x-2y-z+4=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 133. Đường thẳng đi qua điểm $A(3;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2-t\\y=4+2t\\z=2-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3+t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=1+4t\\z=1-2t\end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét: $\vec{v}=(3-2;2-4;3-2)=(1;-2;1)=\vec{u}$ nên đường thẳng cần tìm cũng đi qua $B(2;4;2)$.
Đường thẳng nhận $\vec{u}=(1;-2;1)$ là véc-tơ chỉ phương nên cũng nhận $(-1;2;-1)$ là véc-tơ chỉ phương.
Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $\begin{cases}x=2-t\\y=4+2t\\z=2-t.\end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=1+t.\end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{n}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;1)$. **C.** $\vec{n}=(-1;-2;1)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2;1)$.

Lời giải.

Từ phương trình tham số, suy ra véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}=(-1;-2;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-2z-3=0$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+7}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-7}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-7}{-7}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-2z-3=0$ nên có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-2)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-2z+5=0$. Tìm tọa độ giao điểm M của d và (P).

A. $M(-3;-4;-4)$. **B.** $M(5;0;8)$. **C.** $M(3;-4;4)$. **D.** $M(-5;-4;-4)$.

Lời giải.

Gọi $M(a;b;c)$. Ta có

$$\begin{cases} M\in d \\ M\in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b+2}{1}=\dfrac{c-2}{3} \\ 3a+b-2c+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=5 \\ 3b-c=-8 \\ 3a+b-2c+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-4 \\ c=-4. \end{cases}$$

Vậy $M(-3;-4;-4)$.

Cách khác: Ta có $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2+3t. \end{cases}$

Xét phương trình $3(1+2t)+(-2+t)-2(2+3t)+5=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow M(-3;-4;-4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+3y-1=0$.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t. \\ z=3+2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=3-t. \\ z=3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=-1+3t. \\ z=3-t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=-1+3t. \\ z=3 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=(1;3;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Vì $d\perp(P)$ nên d nhận $\vec{n}=(1;3;0)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=3. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 138. Cho $A(1;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với d là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $M(-1;2-3)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Véc-tơ $\overrightarrow{MA}=(2;-4;6)$, suy ra $[\overrightarrow{MA},\vec{u}]=(-2;14;10)$.

Bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{|[\overrightarrow{MA},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+14^2+10^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{6}}=5\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.

Chọn đáp án C □

Câu 139. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{-4}$.
B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$.
C. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-1}{2}$.
D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Ta có $M(1;-1;3)$ và $\overrightarrow{AM}=(2;-4;1)$. Phương trình đường thẳng AM là

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Phương trình đường thẳng d' đi qua A, vuông góc và cắt d là

A. $d'\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.
B. $d'\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.
C. $d'\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
D. $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

Gọi $B=d\cap d'$, suy ra $B(t+1;t;2t-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$. Do $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}_d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_d=0$ nên $t=1$. Do đó $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Vậy phương trình $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}, \Delta'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'.

A. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(3;2;1)$, Δ' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;3;-2)$. Gọi d là đường thẳng cần tìm, khi đó d có véc-tơ chỉ phương là $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-7;7;7)$ hay $\vec{u}=(-1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$?

A. $3x-2y+z+12=0$.
B. $x-2y+3z+3=0$.
C. $3x-2y+z-12=0$.
D. $3x+2y+z-8=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc đường thẳng (Δ) nhận véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng qua điểm M có dạng

$$3x-2y+z-12=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+3y-z+5=0$?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P) nhận $\vec{u}=(1;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Đường thẳng d qua A có phương trình là

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+3t \\ z=-t. \end{cases}$$

Với $t=-1$, đường thẳng d đi qua điểm $B(1;0;1)$. Suy ra đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 144. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách h từ điểm $A(-4;3;2)$ đến trục Ox là

A. $h=4$. **B.** $h=\sqrt{13}$. **C.** $h=3$. **D.** $h=2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $H(-4;0;0)$ là hình chiếu của điểm $A(-4;3;2)$ trên trục Ox.

Khoảng cách từ A đến trục Ox là $AH=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

Câu 145. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x+(1-2m)y+m^2z+1=0$

A. $m\in\{-1;3\}$. **B.** $m=3$.

C. Không có giá trị nào của m. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;0)$ và nhận $\vec{u}=(-2;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(2;1-2m;m^2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Ta có $d\parallel(P)\Leftrightarrow\begin{cases} M\notin(P) \\ \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\cdot2+(1-2m)\cdot1+1\neq0 \\ m^2-2m-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq3 \\ \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$

Chọn đáp án D □

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(3;-4;5)$. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình của đường thẳng AB?

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-4-6t. \\ z=1+2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=-4+3t. \\ z=5-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-4-3t. \\ z=5+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-6t. \\ z=3+2t \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-6;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với các véc-tơ có tọa độ $(-1;3;-1)$, $(1;-3;1)$. Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x=3+t \\ y=-4-3t \\ z=5+t. \end{cases}$

Ta thấy điểm $M(1;-4;1)$ không thỏa mãn phương trình đường thẳng AB.

Chọn đáp án A □

Câu 147. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(-1;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

A. $\Delta\colon \begin{cases} x=3+t \\ y=4+t. \\ z=1-t \end{cases}$ **B.** $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=1+t. \\ z=1+t \end{cases}$ **C.** $\Delta\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$. **D.** $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=1+t. \\ z=1-t \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{OB}=(-1;2;1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Rightarrow OA \perp OB$. Do vậy, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $(0;1;1)$.

Lại có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-2;-2;2) \Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{n}=(1;1;-1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=1+t. \\ z=1-t \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 148. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3-y}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u}=(2;3;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;-3;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-2;-3;-2)$. **D.** $\vec{u}=(2;-3;2)$.

Lời giải.

Ta có $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3-y}{3}=\dfrac{z+1}{-2} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Do đó d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 149. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=-2+3t \end{cases}$ **không** đi qua điểm nào sau đây?

A. $P(4;1;-4)$. **B.** $Q(3;1;-5)$. **C.** $M(2;1;-2)$. **D.** $N(0;1;4)$.

Lời giải.

Điểm $P(4;1;-4)$ không thỏa mãn phương trình đường thẳng Δ.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-7z+1=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=-2+3t \\ z=-3-7t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=3-7t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-4t \\ z=3-7t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-1+8t \\ y=-2+6t \\ z=-3-14t. \end{cases}$

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;3;-7)$.

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(4;3;-7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-5=0$ và điểm $A(1;-3;1)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{8}{9}$. **B.** $\dfrac{8}{29}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$. **D.** $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$$\mathrm{d}\left[A,(P)\right]=\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-3)+4\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 152. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+5z=0$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P). Tính $5b+2c$.

A. $5b+2c=16$. **B.** $5b+2c=14$. **C.** $5b+2c=13$. **D.** $5b+2c=15$.

Lời giải.

Đường thẳng (Δ) qua $M(1;2;3)$ vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+5t. \end{cases}$

Toạ độ điểm H là giao điểm của (Δ) và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có

$$(1+t)-2(2-2t)+5(3+5t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{2}{5}.$$

Ta được $H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{14}{5};1\right)\Rightarrow 5b+2a=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$; $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Lời giải.

Gọi $M=\Delta\cap d_2$, do $M\in d_2\Rightarrow M\left(1-t;1+2t;-1+t\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-t;2t-1;t-4)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2;-1;1)$. Do $d_1 \perp \Delta \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
Suy ra $\overrightarrow{AM} = (1;-3;-5)$, do đó $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 154. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;3;2)$, $B(1;4;-2)$?

A. $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 3+t \\ z = 2+4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

B. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+2}{-4}$.

C. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{4}$.

D. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-2;-1;4)$ là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Đường thẳng AB đi qua điểm B nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 155. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1;3;2)$ đến đường thẳng $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$.

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 3.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;3;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$ là

$$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-3) + (-1) \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0.$$

Hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng đã cho có tọa độ là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ x+y-z-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Như vậy $H = (1;1;0)$, do đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng đã cho là

$$\mathrm{d} = MH = \sqrt{(1-1)^2 + (1-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 156. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$ và $d': \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

B. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;-5)$, đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u'}=(3;-2;-1)$.

Gọi Δ đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d', gọi $A=(2+2a;3+3a;-4-5a)$ và $B=(-1+3b;4-2b;4-b)$ lần lượt là giao điểm của Δ với d và d'.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2a+3b-3;-3a-2b+1;5a-b+8)$. Vì Δ đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{u'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u'}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-2a+3b-3)\cdot 2+(-3a-2b+1)\cdot 3+(5a-b+8)\cdot(-5)=0\\ (-2a+3b-3)\cdot 3+(-3a-2b+1)\cdot(-2)+(5a-b+8)\cdot(-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-38a+5b=43\\ -5a+14b=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1.\end{cases}$$

Như vậy $A=(0;0;1)$ và $B=(2;2;3)$, nên $\overrightarrow{AB}=(2;2;2)$. Do đó Δ có một vé-tơ chỉ phương là $\vec{w}=(1;1;1)$, bởi vậy Δ có phương trình là

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$, đường thẳng $d\colon\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$ và điểm $M(1;-1;0)$. Điểm N thuộc (P) sao cho MN song song với d. Độ dài MN là

A. 3. **B.** $\sqrt{59}$. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** 5.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua M song song với d có phương trình $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-3}$. Khi đó tọa độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-3}\\ x+y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\\ z=3.\end{cases}$$

Vậy $MN=\sqrt{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau

$$\Delta_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=2+2t\\ z=-1-t\end{cases}\text{ và }\Delta_2:\begin{cases}x=1-t'\\ y=-t'\\ z=2t'.\end{cases}$$

Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. **C.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2+t=1-t'\\2+2t=-t'\\-1-t=2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=0.\end{cases}$

Thay $t=-1$ vào phương trình của Δ_1 ta suy ra giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là $M(1;0;0)$.

Véc-tơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\vec{u}=(1;2;-1)$ và $\vec{u'}=(-1;-1;2)$.

Ta thấy $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{u'}}{|\vec{u}|\cdot\left|\vec{u'}\right|}=\dfrac{-5}{6}<0$ và $|\vec{u}|=\left|\vec{u'}\right|\Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là $\vec{w}=\vec{u}-\vec{u'}=(2;3;-3)$.

Đường phân giác cần tìm đi qua $M(1;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{w}=(2;3;-3)$ nên phương trình có dạng : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 159. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_\Delta=(2;-2;1)$, $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$. Khi đó $\sin\widehat{(\Delta,(P))}=\dfrac{|\vec{u}_\Delta\cdot\vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_\Delta|\cdot|\vec{n}_{(P)}|}=\dfrac{4}{9}$.

Vì $\cos\widehat{(\Delta,(P))}>0$ nên $\cos\widehat{(\Delta,(P))}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{(\Delta,(P))}}=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $M(1;-1;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(2;-4;1)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AM.

Phương trình của đường thẳng AM là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 161. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d?

A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

C. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần lập phương trình. Ta có

☑ Trung điểm của AB là $I(0;1;-1)$.

☑ Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;-1;2)$.

Đường thẳng Δ đi qua I và nhận $\vec{u}(1;-1;2)$ làm véc-tơ chỉ phương nên $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{x+1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;3;2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận véc-tơ $\vec{a}$ nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

A. $\vec{a}=(1;1;0)$. **B.** $\vec{a}=(-2;2;2)$. **C.** $\vec{a}=(-1;2;1)$. **D.** $\vec{a}=(-1;1;0)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của BC là $M(0;2;1)$, $\overrightarrow{AM}=(-1;1;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 163. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có bán kính $R=\mathrm{d}(A;(P))=\dfrac{|2.2-1+2.1+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2$ và tâm $A(2;1;1)$

$\Rightarrow (S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=3+4t\end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=3+4t\\y=5+6t\\z=7+8t\end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d_1\perp d_2$. **B.** $d_1\parallel d_2$. **C.** $d_1\equiv d_2$. **D.** d_1, d_2 chéo nhau.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;3;4)$ và đi qua $M_1(1;2;3)$.

Đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(4;6;8)$ và đi qua $M_2(3;5;7)$.

Ta có $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương với nhau nên $d_1\parallel d_2$ hoặc $d_1\equiv d_2$. (1)

Thay toạ độ $M_1(1;2;3)\in d_1$ vào d_2 ta có: $\begin{cases}1=3+4t\\2=5+6t\\3=7+8t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M_1\in d_2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $d_1\equiv d_2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-3;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-3z-4=0$. Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình

là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-3}$.

C. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$.

D. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải.

$(P)\colon x-2y-3z-4=0$ có $\vec{n}=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{n}=(1;-2;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương, có dạng: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 166. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1-y}{-m}=\dfrac{2-z}{-3}$ và $d_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $d\perp d_1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d và d_1 lần lượt là $(2;m;3)$ và $(1;1;1)$.

Để $d\perp d_1$ thì $2+m+3=0\Rightarrow m=-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{m}=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;1)$. **C.** $\vec{p}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{q}=(1;2;-1)$.

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;-2;1)=-\vec{q}$.

Chọn đáp án D □

Câu 168. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(4;2;3)$ và $B(-2;6;3)$ là

A. $\begin{cases}x=4+6t\\y=2+4t\\z=3\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-6+4t\\y=4+2t\\z=3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=4+2t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2-6t\\y=6+4t\\z=3+6t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;4;0)$ và thấy $M(1;4;3)$ là trung điểm của đoạn AB

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;4;3)$ nhận $\vec{u}=(-3;2;0)$ làm VTCP.

Nên có phương trình $\begin{cases}x=1-3t\\y=4+2t\\z=3\end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 169. Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2+t\\y=-1+3t\\z=3-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-y-2z+3=0$.

A. $M(3;2;2)$. **B.** $M(4;5;1)$. **C.** $M(1;-4;4)$. **D.** $M(0;-7;5)$.

Lời giải.

Ta có $M \in d \Rightarrow M(2+t;-1+3t;3-t)$

Mà $M \in (\alpha) \Rightarrow 3(2+t)-(-1+3t)-2(3-t)+3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow M(0;-7;5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z+4=0$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t. \\ z=2-3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t. \\ z=3+2t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-2t. \\ z=2+3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t. \\ z=2+3t \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P = (1;-2;3)$

Phương trình đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t. \\ z=2+3t \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-5t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{29}}{29}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$.

Lời giải.

Tọa độ các giao điểm của d và (S) là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x=2-5t \\ y=4+2t \\ z=1 \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0. \qquad (*) \end{cases}$$

Từ $(*)$ ta có: $(2-5t)^2+(4+2t)^2+1^2-2(2-5t)-4(4+2t)+2-3=0$

$\Leftrightarrow 29t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{2}{29}. \end{array}\right.$

Với $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(2;4;1)$ hoặc $t=\dfrac{2}{29} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{48}{29} \\ y=\dfrac{120}{29} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{48}{29};\dfrac{120}{29};1\right)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{10}{29};\dfrac{4}{29};0\right) \Rightarrow AB=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

Chọn đáp án B □

Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là

A. $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$ **B.** $d:\begin{cases}x=1\\y=2+2t\\z=3\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

C. $d:\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$ **D.** $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Lời giải.

Đường thẳng qua $M(1;2;3)$ song song với trục Oy có véc-tơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$ nên nó có phương trình tham số

$$d:\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=3\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z=0$. Tọa độ của M' là

A. $M'\left(2;\frac{5}{2};3\right)$. **B.** $M'(1;3;5)$. **C.** $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M'(3;1;2)$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (α).

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases}$.

Ta có $M'=\Delta\cap(\alpha)$.

Xét phương trình: $2+t-2(3-2t)+1+t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Vậy $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 174. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1)$, $B(2;-1;4)$ và $C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-3;3)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-1;3)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-3;3)$.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ do đó chọn $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d?

A. $4x-2y+2z+4=0$. **B.** $4x+2y+2z+4=0$.

C. $2x-2y+2z+4=0$. **D**. $4x-2y-2z-4=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Xét mặt phẳng $4x-2y+2z+4=0$ có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;2) \Rightarrow \vec{n}=2\vec{v}$.

$\Rightarrow d$ vuông góc với mặt phẳng có phương trình $4x-2y+2z+4=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+5y-z-2=0$ cắt nhau tại điểm $M(a;b;c)$ khi đó $a+b+c$ có giá trị là

A. 5. **B**. -2. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d và (P) thỏa hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3} \\ \dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1} \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ y-3z=6 \\ 3x+5y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-2).$$

Khi đó $a+b+c=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 177. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1)\colon \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$ và $(\Delta_2)\colon \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau và vuông góc nhau. **B**. (Δ_1) cắt và không vuông góc với (Δ_2).

C. (Δ_1) cắt và vuông góc với (Δ_2). **D**. (Δ_1) và (Δ_2) song song với nhau.

Lời giải.

Phương trình tham số của (Δ_2) : $\begin{cases} x=-4+3t' \\ y=-2+2t' \\ z=4-t' \end{cases}$.

Véc-tơ chỉ phương của (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt là $\vec{u_1}=(2;-1;4)$ và $\vec{u_2}=(3;2;-1)$.

Do $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=2\cdot 3+(-1)\cdot 2+4\cdot(-1)=0$ nên $(\Delta_1)\perp(\Delta_2)$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} -3+2t=-4+3t' \\ 1-t=-2+2t' \\ -1+4t=4-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t'=-1 \\ t+2t'=3 \\ 4t+t'=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=1 \end{cases}$.

Vậy (Δ_1) cắt và vuông góc với (Δ_2).

Chọn đáp án C □

Câu 178. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $14x-4y-8z+3=0$. **B**. $14x-4y-8z-1=0$.

C. $14x-4y-8z+1=0$. **D**. $14x-4y-8z-3=0$.

Lời giải.

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$, có VTCP $\vec{u}_1=(2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\vec{u}_2=(2;-1;4)$.
Do (P) cách đều d_1, d_2 nên (P) song song với d_1, d_2
$\Rightarrow \vec{n}_P=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(7;-2;-4)$
PT mặt phẳng (P) có dạng: $7x-2y-4z+D=0$
Do (P) cách đều d_1, d_2 suy ra $\mathrm{d}(A,(P))=\mathrm{d}(B,(P))$
$\Leftrightarrow \dfrac{|7\cdot 2-2\cdot 2-4\cdot 3+d|}{\sqrt{69}}=\dfrac{|7\cdot 1-2\cdot 2-4\cdot 1+d|}{\sqrt{69}}\Leftrightarrow |D-2|=|D-1|\Leftrightarrow D=\dfrac{3}{2}$
Phương trình mặt phẳng P: $14x-4y-8z+3=0$
Chọn đáp án A □

Câu 179. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$. **B**. $(7;1;-1)$. **C**. $(2;1;-2)$. **D**. $(0;2;-5)$.

Lời giải.

Gọi $M(-1+t;-3+2t;-2+2t)\in d\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t-4;2t-5;2t-2)$. Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2;2)$.
Vì $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ nên $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow 1(t-4)+2(2t-5)+2(2t-2)=0\Leftrightarrow t=2$.
Suy ra $M(1;1;2)$, gọi $A'(x;y;z)$ là điểm đối xứng của A qua d thì $\begin{cases}x=2\cdot 1-3=-1\\ y=2\cdot 1-2=0\\ z=2\cdot 2-0=4.\end{cases}$
Do đó $A'(-1;0;4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-4z+1=0$. Đường thẳng (d) qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d).

A. $\begin{cases}x=1+5t\\ y=2-6t\\ z=3+t\end{cases}$. **B**. $\begin{cases}x=t\\ y=2t\\ z=2+t\end{cases}$. **C**. $\begin{cases}x=1+3t\\ y=2+2t\\ z=3+t\end{cases}$. **D**. $\begin{cases}x=1-t\\ y=2+6t\\ z=3+t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $B=d\cap Oz\Rightarrow B(0;0;b)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-1;-2;b-3)$.
Lại có $d\parallel(P)$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}_{(P)}=(2;1;-4)$. Do đó

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow -2-2-4b+12=0\Leftrightarrow b=2.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-1;-2-1)$. Do đó, (d) là đường thẳng qua $B(0;0;2)$ và nhận $\vec{u}=(1;2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Nên (d) có phương trình $\begin{cases}x=t\\ y=2t\\ z=2+t\end{cases}$.
Chọn đáp án B □

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;2)$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d'.

A. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+t \\ z=2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1-7t \\ y=1+7t \\ z=2+7t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d'.

Giả sử $\Delta\cap d=A\Rightarrow A(2+3t;-3+2t;1+t)$.

$\overrightarrow{AM}=(3+3t;-4+2t;-1+t)$.

$\Delta\perp d'\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u_{d'}}=0\Leftrightarrow 3+3t+3(-4+2t)-2(-1+t)=0\Leftrightarrow 7t=7\Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow A(5;-1;2), \overrightarrow{AM}=(6;-2;0)=2(3;-1;0)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=-1+3t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 182. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y=0, (Q)\colon 3x+4y=0$. Đường thẳng đi qua A và song song với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=2 \\ z=3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(2;3;0)$ và (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(3;4;0)$. Ta có $[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=(0;0;2)$. Khi đó, Δ đi qua điểm A và nhận véc-tơ $\vec{u}=(0;0;1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Với $t=-3$ thì điểm $B(1;2;0)$ thuộc Δ. Viết lại phương trình đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 183. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+5z+4$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

A. $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{5}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;-3;5)$.

Đường thẳng Δ qua $M(2;0;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) nên Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \vec{n}(2;-3;5)$.
Từ đó ta có phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5+t \\ y = -2+t \\ z = 4+\sqrt{2}t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P): x - y + \sqrt{2}z - 7 = 0$. Hãy xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(1;1;\sqrt{2})$.
Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;\sqrt{2})$.
Gọi φ là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, khi đó ta có

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2+\sqrt{2}^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+\sqrt{2}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra $\varphi = 30°$.
Chọn đáp án C □

Câu 185. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases}$. Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng d' có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (2;0;1)$. **B.** $\vec{u}_3 = (1;1;0)$. **C.** $\vec{u}_2 = (-2;1;0)$. **D.** $\vec{u}_4 = (2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của d và mp(Oxy): $z = 0 \Rightarrow I(5;2;0)$.
Lấy $A(3;1;1) \in d$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên $(Oxy) \Rightarrow A'(3;1;0)$.
Vì d' là hình chiếu vuông góc của d trên (Oxy) nên d' có 1 VTCP là $\overrightarrow{IA'} = (-2;-1;0)$.
Chọn đáp án D □

Câu 186. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ là

A. $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-4t \\ z = -2t \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-4t \\ z = 2t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $A(1+2t;-1+t;-t)$ là điểm thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{MA}=(2t-1;t-2;-t)$; $\vec{u}_{\Delta}=(2;1;-1)$.

$$MA\perp\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\vec{u}_{\Delta}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-2)-1(-t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Suy ra một vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;-4;-2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 187. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;3)$, $B(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=-3-2t\end{cases}$.

A. $2x+y+3z+19=0$. **B.** $10x-4y+z-19=0$.

C. $2x+y+3z-19=0$. **D.** $10x-4y+z+19=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-2)$ và $\vec{u}_d=(1;2;-2)$.

Do AB nằm trong (P) và d song song với (P) nên $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]=(10;-4;1)$.

Từ đó $(P)\colon 10(x-2)-4(y-1)+(z-3)=0\Leftrightarrow 10x-4y+z-19=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 188. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d\colon \begin{cases}x=-3+t\\y=1-2t\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d\colon \begin{cases}x=3t\\y=2+t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $d\colon \begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d\colon \begin{cases}x=-1-t\\y=3-3t\\z=3-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_{\Delta}]=(-4;3;-1)$.

d đi qua giao điểm của Δ và (P) là A có tọa độ thỏa mãn phương trình của Δ và (P).

Tọa độ A là $(-2;-1;4)$. Nên $d\colon \begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-2t\\y=3\\z=5+3t\end{cases}$. Trong các vec-tơ sau, vec-tơ nào là một vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{a}_1=(1;3;5)$. **B.** $\vec{a}_2=(2;3;3)$. **C.** $\vec{a}_3=(-2;0;3)$. **D.** $\vec{a}_1=(-2;3;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm một vec-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án C □

Câu 190. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0;-3;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+3t\\y=1-2t\\z=3+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình

A. $3x-2y+z-5=0$. **B.** $3x-2y+z-10=0$.

C. $3x-2y+z+5=0$. **D.** $3x-2y+z-7=0$.

Lời giải.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2;1)$.

Mặt phẳng (P) qua điểm $M(0;-3;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\vec{u}$ nên có phương trình:

$3(x-0)-2(y+3)+1(z-1)=0$ hay $3x-2y+z-7=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 191. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1-2t\\y=3+4t\\z=-2+6t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=2+2t'\\z=3t'\end{cases}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d_1\perp d_2$. **B.** $d_1\equiv d_2$. **C.** d_1 và d_2 chéo nhau. **D.** $d_1\parallel d_2$.

Lời giải.

Hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-2;4;6)$ và $\vec{u}_2=(-1;2;3)$.

Suy ra hai véc-tơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương.

Lại có điểm $M(1;3;-2)\in d_1$ nhưng không thuộc d_2.

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 192. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q)\colon x-y-11=0$ bằng bao nhiêu?

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Vì $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=\overrightarrow{OH}=(2;-1;-2)$.

Mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(1;-1;0)$.

Gọi φ là số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), ta có

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{n}_Q|}=\frac{|2\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\varphi=45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm có tọa độ là

A. $(-3;2;0)$. **B.** $(3;-2;0)$. **C.** $(-1;0;0)$. **D.** $(1;0;0)$.

Lời giải.

Ta có tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (Oxy) là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{2}\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=0.\end{cases}$$

Vậy giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (Oxy) là điểm $(1;0;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$. **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

C. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $A(0;0;3)$ và $B(5+t;2t;6-t)$.

Mặt khác $B\in(P)$ nên ta có: $2(5+t)+6\cdot 2t+(6-t)-3=0\Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $B(4;-2;7)$.

Khi đó mặt cầu có tâm $I(2;-1;5)$, $R=AI=\sqrt{2^2+(-1)^2+(5-3)^2}=3$.

Vậy phương trình mặt cầu: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 195. Tìm giao điểm của đường thẳng $d:\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P):\ 2x-y-z-7=0$.

A. $M(3;-1;0)$. **B.** $M(0;2;-4)$. **C.** $M(6;-4;3)$. **D.** $M(1;4;-2)$.

Lời giải.

Dễ thấy điểm $M(3;-1;0)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng d và mặt phẳng (P) nên giao điểm của d và (P) là $M(3;-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 196. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-1;4;2)$. Độ dài đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC là

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{BA}=(2;-3;-1)$, suy ra $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}\right]=(2;1;1)$. Độ dài đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC là

$$d\left(A,BC\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 197. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-3;-1;-1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $A'(a;b;c)$. Khi đó giá trị của $2a+b+c$ là

A. -5. **B**. -4. **C**. -2. **D**. -3.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$ nên hình chiếu của điểm $A(-3;-1;-1)$ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $A'(0;-1;-1)$. Khi đó $2a+b+c=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-3=0$. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **B**. $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **D**. $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(1;-1;2)$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

Đối chiếu đáp án ta có đáp án **A** thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 199. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;1;6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=2t \end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ là

A. $N(1;3;-2)$. **B**. $H(11;-17;18)$. **C**. $M(3;-1;2)$. **D**. $K(2;1;0)$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ tại J. Khi đó J là hình chiếu của A trên (α).

Phương trình mặt phẳng (α): $1(x+1)-2(y-1)+2(z-6)=0\Leftrightarrow x-2y+2z-9=0$.

Ta có $J\in\Delta\Leftrightarrow J(2+t;1-2t;2t)$. $J\in(\alpha)\Leftrightarrow 2+t-2(1-2t)+4t-9=0\Leftrightarrow t=1$.

Vậy $J(3;-1;2)$ là điểm cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 200. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P).

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{1}$. **B**. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. **C**. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{2}$. **D**. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-2;1)$. Đường thẳng cần tìm vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến, do đó có phương trình

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}.$$

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. C	5. A	6. B	7. D	8. C	9. A	10. C
11. D	12. D	13. D	14. A	15. B	16. D	17. B	18. D	19. B	20. A
21. A	22. D	23. C	24. B	25. C	26. B	27. D	28. C	29. A	30. D
31. A	32. C	33. D	34. B	35. D	36. D	37. D	38. A	39. A	40. A
41. A	42. C	43. D	44. D	45. D	46. B	47. C	48. C	49. B	50. B
51. C	52. A	53. A	54. D	55. D	56. B	57. A	58. C	59. C	60. B
61. C	62. C	63. D	64. A	65. C	66. A	67. B	68. D	69. D	70. B
71. C	72. C	73. B	74. B	75. A	76. D	77. C	78. B	79. C	80. B
81. B	82. A	83. A	84. C	85. D	86. D	87. D	88. B	89. A	90. B
91. D	92. A	93. A	94. D	95. D	96. B	97. C	98. C	99. B	100. A
101. A	102. B	103. D	104. A	105. D	106. B	107. A	108. B	109. B	110. A
111. C	112. C	113. A	114. C	115. C	116. D	117. C	118. A	119. B	120. D
121. A	122. C	123. C	124. B	125. C	126. B	127. A	128. B	129. A	130. A
131. D	132. B	133. B	134. C	135. B	136. A	137. D	138. C	139. D	140. D
141. A	142. C	143. A	144. B	145. D	146. A	147. D	148. B	149. A	150. B
151. D	152. A	153. D	154. D	155. C	156. A	157. C	158. A	159. B	160. A
161. A	162. D	163. C	164. C	165. B	166. C	167. D	168. C	169. D	170. D
171. B	172. B	173. C	174. D	175. A	176. B	177. C	178. A	179. A	180. B
181. B	182. D	183. D	184. C	185. D	186. A	187. B	188. C	189. C	190. D
191. D	192. A	193. D	194. B	195. A	196. B	197. C	198. C	199. C	200. A

❸ Mức độ vận dụng thấp

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(4;-1;2)$, $B(1;2;2)$, $C(1;-1;5)$, $D(x_D;y_D;z_D)$ với $y_D>0$. Tính $P=2x_D+y_D-z_D$.

A. $P=-3$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-7$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $G(2;0;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;0;3)\Rightarrow \vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(1;1;1)$ và $AB=3\sqrt{2}$.

Đường thẳng đi qua G vuông góc với (ABC) có phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=3+t.\end{cases}$

Do đó $D(2+t;t;3+t)$. Mà $AD=AB\Rightarrow (t-2)^2+2(t+1)^2=18\Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

Vì $y_D>0\Rightarrow y=2\Rightarrow 2x_D+y_D-z_D=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của (P) và d ta có tọa độ A là nghiệm $\begin{cases}x+y+z-3=0\\\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow A(1;1;1)$.

d có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$, (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$ nên mặt phẳng (Q) qua d vuông góc (P) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=[\vec{u_d},\overrightarrow{n_{(P)}}]=(3;-2;-1)$.

Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là giao tuyến Δ của (P) và (Q), nên Δ qua A và có véctơ chỉ phương là $[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}]=(1;4;-5)$.

Phương trình Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (P) đi qua điểm $A\,(2;1;3)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P sao cho tứ diện $OMNP$ có thể tích nhỏ nhất. Giao điểm của đường thẳng $\mathrm{d}\colon \begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=4+t\end{cases}$ với (P) có toạ độ là

A. $(4;6;1)$. **B.** $(4;1;6)$. **C.** $(-4;6;-1)$. **D.** $(4;-1;6)$.

Lời giải.

Gọi $M\,(a;0;0)$, $N\,(0;b;0)$, $P\,(0;0;c)$. Theo giả thiết, ta có a, b, c là các số dương.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

(P) đi qua điểm $A\,(2;1;3)$ nên $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.

Ta có $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{3}{c}}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow 1\geq\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{abc}\geq 3\sqrt[3]{6}\Leftrightarrow abc\geq 112.$

$V_{OMNP}=\dfrac{abc}{6}\geq 27$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{c}\\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{c}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=3\\ c=9.\end{cases}$

Vậy $(P):\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{9}=1$.

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\\ z=4+t\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{9}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-1\\ z=6\\ t=2.\end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-m}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$, (với m là tham số).

Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

A. $m=4$. **B.** $m=9$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

d_1 đi qua điểm $M_1(1;2;3)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2)$.

d_2 đi qua điểm $M_2(1;m;-2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(2;1;-1)$.

$[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}]=(-1;5;3)$ và $\overrightarrow{M_1M_2}=(0;m-2;-5)$.

d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0\Leftrightarrow -1\cdot 0+5(m-2)-15=0\Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M=(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\ y=1-t,\\ z=-1\end{cases}$

$d_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua diểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2 có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;a;b)$.Tính $a+b$.

A. $a+b=-1$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải.

Gọi A,B lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với d_1,d_2

$A\in d_1\Rightarrow A\,(t_1;1-t_1;-1)\,;B\in d_2\Rightarrow B\,(-1+2t_2;1+t_2;-2+t_2)$.

$M\in\Delta\Leftrightarrow M,A,B$ thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\quad(1)$

$\overrightarrow{MA}=(t_1-1;2-t_1;-3)\,;\overrightarrow{MB}=(2t_2-2;t_2+2;t_2-4)$.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-1=k\,(2t_2-2)\\ 2-t_1=k\,(t_2+2)\\ -3=k\,(t_2-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-2kt_2+2k=1\\ -t_1-kt_2-2k=-2\\ kt_2-4k=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=0\\ kt_2=\dfrac{1}{3}\\ k=\dfrac{5}{6}.\end{cases}$$

Từ $t_1 = 0 \Rightarrow A(0;1;-1)$.Do đường thẳng Δ đi qua điểm A và M nên một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AM} = (1;-2;3)$.
Vậy $a = -2, b = 3 \Rightarrow a + b = 1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x - 2z - 6 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt đồng thời vuông góc với d.

A. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.
C. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Giao điểm I của d và (α) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \\ x - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2;4;-2)$.
Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;0;-2)$; đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$.
Khi đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $[\vec{n}, \vec{u}] = (2;-1;1)$.
Đường thẳng Δ qua điểm $I(2;4;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $[\vec{n}, \vec{u}] = (2;-1;1)$ nên có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $A(0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Phương trình của (P) là

A. $y - 2z + 5 = 0$. **B.** $x - y + 2z - 5 = 0$. **C.** $-y + 2z + 5 = 0$. **D.** $y - 2z - 5 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 3$. $A(0;-1;2)$ là điểm nằm bên trong mặt cầu (S). (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính r.
Gọi H là hình chiếu của O lên (P). Ta có

$$r^2 = R^2 - OH^2. \; r_{\min} \Leftrightarrow OH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv A.$$

Khi đó (P) nhận $\overrightarrow{OA} = (0;-1;2)$ là véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình (P): $y - 2z + 5 = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;;-1)$ và $D(4;1;0)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Hãy viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

A. $4x - y - 9 = 0$. **B.** $4x - y - 26 = 0$.

C. $x+4y+3z-1=0$. **D**. $x+4y+3z+1=0$.

Lời giải.

Gọi tâm của mặt cầu là $I(x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{AI}=(x-6;y+2;z-3)$, $\overrightarrow{BI}=(x;y-1;z-6)$, $\overrightarrow{CI}=(x-2;y;z+1)$, $\overrightarrow{DI}=(x-4;y-1;z)$. Ta có $IA=IB=IC=ID$, suy ra

$$IA^2=IB^2=IC^2=ID^2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+z^2\\x^2+(y-1)^2+(z-6)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+z^2\\(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+z^2\end{cases}\Rightarrow I(2;-1;3).$$

Vậy mặt phẳng cần tìm qua A và vuông góc với IA là $4x-y-26=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B**. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **C**. $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d và H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) thì $d(A,(P))=AH\le AK$ không đổi. Vậy $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$, khi đó (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với AK.

Tìm được $(P):x-4y+z-3=0\Rightarrow \mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{3}{\sqrt{18}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng $(P):x-2y+z-1=0;(Q):x-2y+z+8=0;(R):x-2y+z-4=0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=AB^2+\dfrac{144}{AC^2}$.

A. 24. **B**. 36. **C**. 72. **D**. 144.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Nhận xét $(P)//(Q)//(R)$

+) Sử dụng BĐT Cô-si và định lí Ta-let đánh giá biểu thức T.

Cách giải: Dễ dàng nhận thấy $(P)//(Q)//(R)$. Kẻ đường thẳng qua B vuông góc với cả 3 mặt phẳng $(P),(Q),(R)$, cắt (P) tại H và cắt (Q) tại K.

Ta có $BH=d((Q),(P))=9;HK=d((P),(R))=3$.

Khi đó ta có: $T=AB^2+\dfrac{144}{AC^2}\ge 2\sqrt{AB^2.\dfrac{144}{AC^2}}=24\dfrac{AB}{AC}=24.\dfrac{BH}{HK}=24.\dfrac{9}{3}=72$.

Vậy $T_{\min}=72$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-y-z+1=0$ và $(Q):x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

A. -16. **B**. -8. **C**. 0. **D**. 8.

Lời giải.

Xét giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng $\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$.

Chọn $x=0$ ta được $\begin{cases} -y-z+1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0;1)$.

Chọn $x=-1$ ta được $\begin{cases} -y-z=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow B(-1;2;-2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A, B \Rightarrow \begin{cases} 2+b=0 \\ -a-2-4+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a+4b=-16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải.

Ta có tam giác ABC đều nên C nằm trên mặt phẳng (β) trung trực của AB.

Mặt khác C cũng thuộc mặt phẳng (α) nên $C \in (\alpha) \cap (\beta)$.

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(-1;0;2)$.

Ta có $CI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{6} < \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \dfrac{|-2+4+8|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{10}{3}$.

Suy ra không có điểm C nào thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;-4;-2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases}$.

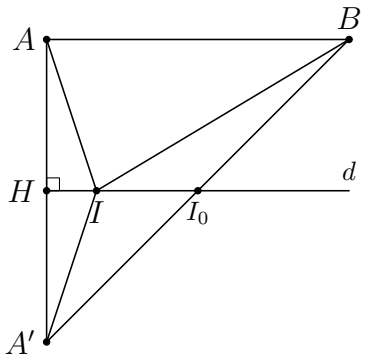
Điểm $I(a;b;c)$ thuộc d là điểm thỏa mãn $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{23}{58}$. **B.** $-\dfrac{43}{58}$. **C.** $\dfrac{65}{29}$. **D.** $-\dfrac{21}{58}$.

Lời giải.

Cách giải:

$d\colon \begin{cases} x=2+4t \\ y=-6t \\ z=-1-8t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-6;-8)$.



$A=(1;-1;2), B=(3;-4;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$ cùng phương với $\vec{u}=(4;-6;-8)$.

Mà $A(1;-1;2) \notin d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel d \Rightarrow A, B, d$ đồng phẳng.

Xét mặt phẳng chứa AB và d. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d, (α) là mặt phẳng qua A, vuông góc với d.

Khi đó, giao điểm H của d với (α) là trung điểm của AA'.

(α) có 1 véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3;-4)$ đi qua $A(1;-1;2)$ có phương trình:

$2(x-1)-3(y+1)-4(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-4z+3=0$.

$H \in d$: $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -6t \\ z = -1-8t \end{cases}$ $\Rightarrow$ giả sử $H(2+4t;-6t;-1-8t)$.

$H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2+4t) - 3(-6t) - 4(-1-8t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 58t + 11 = 0$.

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{11}{58} \Rightarrow H\left(\dfrac{36}{29};\dfrac{33}{29};\dfrac{15}{29}\right)$.

Ta có $IA + IB = IA' + IB' \geq A'B \Rightarrow \min(IA+IB) = A'B$ khi và chỉ khi I trùng với I_0 là giao điểm của $A'B$ và d.

HI_0 là đường trung bình của tam giác $A'AB$

$\Rightarrow \overrightarrow{HI_0} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_0} - \dfrac{36}{29} = \dfrac{1}{2}\cdot 2 \\ y_{I_0} - \dfrac{33}{29} = \dfrac{1}{2}\cdot(-3) \\ z_{I_0} - \dfrac{15}{29} = \dfrac{1}{2}\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_0} = \dfrac{65}{29} \\ y_{I_0} = -\dfrac{21}{58} \\ z_{I_0} = -\dfrac{43}{29} \end{cases}$.

$\Rightarrow I_0\left(\dfrac{65}{29};-\dfrac{21}{58};-\dfrac{43}{29}\right)$.

Vậy để $IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $I\left(\dfrac{65}{29};-\dfrac{21}{58};-\dfrac{43}{29}\right) \Rightarrow a+b+c = \dfrac{65}{29} - \dfrac{21}{58} - \dfrac{43}{29} = -\dfrac{21}{58}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -5.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases}$.

Vì C thuộc d nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t;t;2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;-2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t;t-3;1-t)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (3t-7;-3t-1;3t-3)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(3t-7)^2+(-3t-1)^2+(3t-3)^2}$.

Theo bài ra ta có $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59} = 2\sqrt{2}. \Leftrightarrow 27t^2-54t+59 = 32 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$.

Với $t=1$ thì $C(1;1;1)$ nên $m=1; n=1; p=1$. Vậy giá trị của tổng $m+n+p=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$ cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $A(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Lời giải.

Ta có: d_1 đi qua $M(1;0;5)$ và có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{u_1}=(1;1;-2)$ nên $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=5-2t\end{cases}$

$\Rightarrow M_0(1+t;t;5-2t)\in(d_1)$.

Đường thẳng $d\perp d_1\Rightarrow \vec{u_2}\perp\vec{u_1}$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với d_1 là: $x-1+y-2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y-2z+3=0$.

Gọi $M_0(1+t;t;5-2t)$ là giao điểm của đường thẳng d_1 và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow 1+t+t-2(5-2t)+3=0\Leftrightarrow 6t=6\Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow M_0(2;1;3)$.

$\Rightarrow d$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;0;2)$ và $M_0(2;1;3)$.

$\Rightarrow \vec{u_2}=\overrightarrow{AM}=(1;1;1)\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$.

Thử các đáp án, chỉ có điểm $Q(0;-1;1)$ thuộc đường thẳng d khi $t=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$ và $A\,(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(2;3;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **C.** $\vec{u}=(-3;5;1)$. **D.** $\vec{u}=(4;5;-13)$.

Lời giải.

Gọi $M(-1+2t;t;2+t)$.

Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm của đoạn MN nên ta có $N(3-2t;-2-t;2-t)$.

Lại có $N\in(P)$ nên $3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$.

Một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AM}=(2;3;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (P): $2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M nằm trên mặt phẳng (P) cắt (S) tại A, B, sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. **B.** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{8}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(2;-2;1)$.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=6<R\Leftrightarrow(P)$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm H, bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$, với H là hình chiếu của I trên (P).

Đường thẳng Δ qua M nằm trên mặt phẳng (P) cắt (S) tại A và B sao cho độ dài AB lớn nhất. Khi đó AB là đường kính của đường tròn (C). Do đó Δ đi qua M và H.

Đường thẳng IH nhận $\vec{n}_P$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$.

Do đó ta có $H(2+2t;3-2t;5+t)$. Vì $H \in (P)$ nên $t=-2 \Rightarrow H(-2;7;3)$. Đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$ làm véc-tơ chỉ phương, đi qua M nên có phương trình là $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$.
B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t. \end{cases}$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow$

$t+(-1+2t)+(2-t)-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A(1;1;1)$.

Ta có đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khi đó (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(3;-2;-1)$.

Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Khi đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;4;-5)$.

Vậy hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $(d): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x-z-4=0, (Q): x-2y-2=0$ là

A. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.
B. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\sqrt{5}$.
C. $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=5$.
D. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

Lời giải.

Gọi tâm mặt cầu là $I(a;a+1;a+2) \in (d)$.

Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I;(P))=d(I;(Q))$.

Suy ra $\dfrac{|2a-a-2-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a-2(a+1)-2|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a-6|=|-a-4| \Leftrightarrow a=1$.

Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu là $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

Chọn đáp án A □

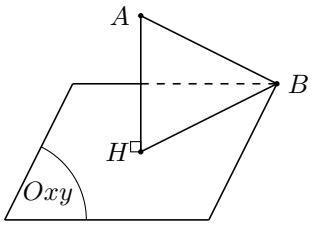
Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(3;-1;0)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên mặt phẳng (Oxy).

A. $d:\begin{cases}x=0\\y=-t\\z=-3+3t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=0\\z=-3+3t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-3+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là $H(1;0;0)$.

Vì $B\in(Oxy)$ nên hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (Oxy) trùng với điểm B.



Phương trình d cần tìm đi qua H và B.

Đường thẳng d đi qua H, có vec-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{HB}=(2;-1;0)$.

Suy ra phương trình tham số của d là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=0.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1\colon\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ và $\Delta_2\colon\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$. Trong mặt phẳng (Δ_1,Δ_2), hãy viết phương trình đường phân giác d của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2.

A. $d\colon\begin{cases}x=-1,\\y=2,\\z=-1+t.\end{cases}$ **B.** $d\colon\begin{cases}x=-1+t,\\y=2,\\z=-1+2t.\end{cases}$ **C.** $d\colon\begin{cases}x=-1+t,\\y=2-2t,\\z=-1-t.\end{cases}$ **D.** $d\colon\begin{cases}x=-1+t,\\y=2+2t,\\z=-1.\end{cases}$

Lời giải.

Hai đường thẳng đã cho cùng đi qua điểm $I(-1;2;-1)$ và có các véc-tơ chỉ phương tương ứng là $\vec{u_1}(1;2;3)$ và $\vec{u_2}(1;2;-3)$.

Ta có $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=-4<0$, suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ là góc tù. Lại có $|\vec{u_1}|=|\vec{u_2}|$. Kết hợp hai điều này, ta suy ra d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\vec{u_1}-\vec{u_2}=(0;0;6)=6(0;0;1)$.

Tóm lại, đường thẳng cần tìm đi qua điểm $I(-1;2;-1)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(0;0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(2;-3;2)$. Đường thẳng nào dưới đây cách đều ba điểm A,B,C?

A. $\begin{cases}x=-8-3t\\y=t\\z=15+7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-8+3t\\y=t\\z=15-7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-8+3t\\y=-t\\z=-15-7t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-8+3t\\y=t\\z=15+7t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;1;-1)$.

Mặt phẳng trung trực của AB là mặt phẳng đi qua trung điểm $I\left(0;\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ của AB. Do đó phương trình mặt phẳng trung trực AB là $(P)\colon 2x-y+z+1=0$.

Tương tự, phương trình mặt phẳng trung trực AC là $(Q)\colon x-4y+z-7=0$.

Đường thẳng d cách đều A, B, C chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và Q.
Lấy điểm $M(-8;0;15)$ thuộc cả hai mặt phẳng (P) và (Q) (bằng cách cho $y=0$ và giải ra x, z).
Một véc-tơ chỉ phương của d là $[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (3;-1;-7) = -(-3;1;7)$.
Vậy phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = -8-3t \\ y = t \\ z = 15+7t \end{cases}$.
Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1), B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d đồng thời cách B một khoảng lớn nhất.

A. $\vec{u} = (4;-3;2)$. **B.** $\vec{u} = (2;0;-4)$. **C.** $\vec{u} = (2;2;-1)$. **D.** $\vec{u} = (1;0;2)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên Δ. Ta có $\mathrm{d}(A;\Delta) = AH \le AB$ và đẳng thức xảy ra khi $H \equiv A$.
Do đó, nếu gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ thì $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\vec{u} \perp \vec{u_d}$, với $\overrightarrow{AB} = (2;0;-4)$ và $\vec{u_d} = (2;2;-1)$.
Khi đó, ta có thể chọn $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u_d} = (8;-6;4) = 2(4;-3;2)$ làm véc-tơ chỉ phương của Δ.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;1;3), N(10;6;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-10=0$. Biết rằng tồn tại điểm $I(-10;a;b)$ thuộc (P) sao cho $|IM-IN|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T = a+b$.

A. $T=5$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=6$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm M và N vào vế trái phương trình mặt phẳng (P), ta có $(0-2+3-10)\cdot(10-12-10) > 0$ nên hai điểm M, N nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P).
Khi đó ta có $|IM-IN| \le MN$ và đẳng thức xảy ra khi $I = MN \cap (P)$.
Phương trình tham số của đường thẳng MN là $\begin{cases} x = 10t \\ y = 1+5t \\ z = 3-3t. \end{cases}$
Tọa độ giao điểm của MN và (P) là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 1+5t \\ z = 3-3t \\ x-2y+2z-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = -4 \\ z = 6. \end{cases}$$

Vậy $T = a+b = 2$.
Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho đường thẳng (d) có phương trình $4x+3y-5=0$ và đường thẳng (Δ) có phương trình $x+2y-5=0$. Phương trình đường thẳng (d') là ảnh của đường thẳng (d) qua phép đối xứng trục (Δ) là

A. $x-3=0$. **B.** $x+y-1=0$. **C.** $3x+2y-5=0$. **D.** $y-3=0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}4x+3y-5=0\\x+2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$, suy ra (d) cắt (Δ) tại $I(-1;3)$. Đường thẳng (d') là ảnh của đường thẳng (d) qua phép đối xứng trục (Δ) nên $I\in(d')$.

Trong 4 đường thẳng đã cho chỉ có đường thẳng có phương trình $y-3=0$ qua I, do đó $(d'):y-3=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=8$ và điểm $M(-1;1;2)$. Hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ đi qua M và tiếp xúc mặt cầu (S) lần lượt tại A,B. Biết góc giữa (d_1) và (d_2) bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$. Tính độ dài AB.

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{11}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 7.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{2};IM=\sqrt{22}$.

Trong tam giác IMA ta có: $MA=MB=\sqrt{IM^2-R^2}=\sqrt{14}$.

Do $\cos\widehat{IMB}=\dfrac{MB}{IM}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{22}}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{IMB}<45^\circ\Rightarrow\widehat{AMB}<90^\circ\Rightarrow\alpha=\widehat{BMA}$.

Trong tam giác MAB ta có: $AB^2=MA^2+MB^2-2\cdot MA\cdot MB\cdot\cos\alpha=7\Rightarrow AB=\sqrt{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $(\Delta)\parallel(P)$ và (Δ) cắt (d).

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Gọi $M=(d)\cap(\Delta)\Rightarrow M(-1+2t;1+t;2+3t)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(2t-2;t;3t+4)$ là một véc-tơ chỉ phương của (Δ).

$(\Delta)\parallel(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}_{(P)}$ với $\vec{n}_{(P)}=(1;-1;-1)$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow2t-2-t-3t-4=0\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-8;-3;-5)$.

Vậy $(\Delta):\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Tìm hình chiếu vuông góc của Δ lên mặt phẳng Oxy.

A. $\begin{cases}x=0\\y=-1-t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$.

Lời giải.

Chọn $M(1;-1;2)\in\Delta$.

Mặt phẳng Oxy có phương trình $z=0$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy), suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{k}\right] = (1;-2;0)$, đồng thời (P) đi qua M nên phương trình của (P) có dạng $x-1-2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x-2y-3=0$.

Hình chiếu Δ' của Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng Oxy nên có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{\Delta'}} = \left[\vec{k}, \overrightarrow{n_P}\right] = (2;1;0)$.

Chọn $N(1,-1,0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} z=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$ nên $N \in \Delta'$.

Vậy phương trình của Δ' cần tìm là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : x+y-2z-1=0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình

A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z}{2}$. **C.** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Lấy $M(2;1;0) \in \Delta \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Ta có Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;2)$ và (β) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;-2)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ và $(\alpha) \perp (\beta)$ nên (α) có véc-tơ pháp tuyến là $[\vec{u}; \vec{n}] = (-4;4;0)$

$\Rightarrow (\alpha) : -x+y+1=0$.

Xét hệ của 2 phương trình mặt phẳng của (α) và $\beta \Rightarrow \begin{cases} -x+y+1=0 \\ x+y-2z-1=0. \end{cases}$

Ta có $A(0;-1;-1), B(1;0;0)$ là hai điểm thuộc giao tuyến d của (α) và (β).

Vậy d đi qua $A(0;-1;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1;1;1) \Rightarrow d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;0;1), B(-3;0;1)$ và điểm D có cao độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O. Khi đó đường thẳng d là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

A. $d : \begin{cases} x=t \\ y=1. \\ z=t \end{cases}$ **B.** $d : \begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$. **C.** $d : \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$. **D.** $d : \begin{cases} x=-1 \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$.

Lời giải.

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right] = (0;-4;0)$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua điểm A và nhận $\vec{n} = (0;1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình $y=0$.

Giả sử $D(x_D, y_D, z_D)$. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right| \\ D\in(ABCD) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-1=0 \\ (x_D-1)^2+y_D^2+(z_D-1)^2=16 \\ y_D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=0 \\ (z_D-1)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=0 \\ \left[\begin{array}{l} z_D=5 \\ z_D=-3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vì D có cao độ âm nên $D(1;0;-3)$.

Khi đó, tâm I của hình vuông $ABCD$ có tọa độ $I(-1;0;-1)$.

Trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ đi qua $I(-1;0;-1)$ và nhận $\vec{n}=(0;1;0)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình $d:\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(2;0;5)$. **B.** $M(1;2;3)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Lời giải.

Gọi $M(m+1;-2m+2;2m+3)\in d$.

Khi đó $MA^2+MB^2=\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2=(m-2)^2+(-2m+4)^2+(2m)^2+m^2+(-2m+2)^2+(2m-2)^2=18m^2-36m+28=18(m-1)^2+10\geq 10$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=1$. Hay $M(2;0;5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$; $d_2\colon\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-5z+1=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-5}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{-5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-13}{-5}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của đường thẳng d với các đường thẳng d_1, d_2. Khi đó, tọa độ của A, B có dạng $A(3+t;-3-t;5+2t)$, $B(4-3s;1+2s;-2+2s)$.

$\overrightarrow{AB}=(1-3s-t;4+2s+t;-7+2s-2t)$.

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-5)$ của mặt phẳng (P). Do đó, ta có

$$\frac{1-3s-t}{2}=\frac{4+2s+t}{3}=\frac{-7+2s-2t}{-5}.$$

Suy ra $s=0$ và $t=-1$. Do đó, $A(2;-2;3)$ và $B(4;1;-2)$.

Đường thẳng d đi qua A và có nhận véc-tơ $\vec{n}$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;-1), B\left(-\frac{4}{3};-\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB). Hỏi Δ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(5;-1;5)$. **B.** $N(3;0;2)$. **C.** $M(1;-1;1)$. **D.** $P(-5;-4;5)$.

Lời giải.

Ta có: $OA=3, OB=4, AB=5$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{AB\cdot x_O+OB\cdot x_A+OA\cdot x_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{5\cdot 0+4\cdot 2+3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{5+4+3}=\dfrac{1}{3} \\ y_I=\dfrac{AB\cdot y_O+OB\cdot y_A+OA\cdot y_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{5\cdot 0+4\cdot(-2)+3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}{5+4+3}=-\dfrac{4}{3} \\ z_I=\dfrac{AB\cdot z_O+OB\cdot z_A+OA\cdot z_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{5\cdot 0+4\cdot(-1)+3\cdot\frac{8}{3}}{5+4+3}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right).$$

$\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-8;-4;-8)=-4(2;1;2)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{y+\frac{4}{3}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{2}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-4y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;5;3)$. Đường thẳng d đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d nhỏ nhất có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{1-y}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;b;c)$.

Phương trình đường thẳng d có dạng $\begin{cases} x=1+t \\ y=bt \\ z=2+ct \end{cases}$.

Do đường thẳng $d \parallel (P)$ nên $1-4b+c=0 \Rightarrow c=4b-1$.

Khoảng cách từ B đến đường thẳng d là

$$d(B,d)=\frac{\left|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{378b^2-216b+54}}{\sqrt{17b^2-8b+2}}$$

Xét hàm số $f(b)=\dfrac{378b^2-216b+54}{17b^2-8b+2}$ có $f'(b)=\dfrac{648b^2-324b}{(17b^2-8b+2)^2}$.

Cho $f'(b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

b	$-\infty$		0		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(b)$	$\dfrac{378}{17}$	$\nearrow$	27	$\searrow$	18	$\nearrow$	$\dfrac{378}{17}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất tại $b = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $\vec{u} = \left(1; \dfrac{1}{2}; 1\right)$, chọn $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

Phương trình đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ hay $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{1-y}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;0)$, $B(3;0;1)$ và song song với $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$, véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (1; -1; 2)$. Theo đề bài, ta suy ra véc-tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (-1; -1; 0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là $x + y - 3 = 0$.

Lấy điểm $M(1; -1; 0)$ nằm trên Δ.

Vì $\Delta \parallel (P)$ nên $d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \dfrac{|1 - 1 - 3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{1}$ và điểm $M(2; -1; 0)$. Gọi S là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm M. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu thỏa mãn?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng Oxy tại điểm M.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$

Khi đó $I = d \cap \Delta$. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = t \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow t = -3 \Rightarrow I(2; -1; -3)$$

Vậy có duy nhất một mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;4)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Tìm hình chiếu vuông góc H của M lên đường thẳng d.

A. $H(1;0;1)$. **B.** $H(-2;3;0)$. **C.** $H(0;1;-1)$. **D.** $H(2;-1;3)$.

Lời giải.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng $d \Rightarrow H \in d$.

do đó $H(t;1-t;-1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (t-1;1-t;2t-5)$.

Vì $MH \perp d$ nên $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1\cdot(t-1) - (1-t) + 2(2t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $H\,(2;-1;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y + z = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Gọi Δ là một đường thẳng chứa trong (P), cắt và vuông góc với d. Véc-tơ $\vec{u} = (a;1;b)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-2;1)$; d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2;2;-1)$.

Ta có: $[\vec{n}, \vec{u}_d] = (0;4;8) = 4(0;1;2)$.

Vậy Δ có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{v} = (0;1;2) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $(d_1) : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$, $(d_2) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$, $(d_3) : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, $(d_4) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải.

Kiểm tra vị trí tương đối giữa hai đường thẳng ta thấy $(d_1) \parallel (d_2)$;(d_4) cắt $(d_2), (d_3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2); (Q) là mặt phẳng chứa (d_3) và (d_4).

Gọi (Δ) là đường thẳng cắt cả 4 đường thẳng trên.

Ta thấy, (Δ) cắt cả $(d_1), (d_2)$ suy ra $(\Delta) \subset (P)$.

(Δ) cắt cả $(d_3), (d_4)$ suy ra $(\Delta) \subset (Q)$. Mà $(d_2), (d_4)$ có điểm chung nên (Δ) là giao tuyến của (P) và (Q), do đó có duy nhất một đường thẳng thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(R)\colon x + y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (R) đồng thời cắt và vuông góc với Δ_1 có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-3t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $H=\Delta_1 \cap (R)$. Khi đó tọa độ H thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1} \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \\ x+y-2z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow H(0;0;1).$$

Ta có véc-tơ chỉ phương của Δ_1 là $\vec{u}_1=(2;1;-1)$, véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) là $\vec{n}=(1;1;-2)$.

Đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (R) và vuông góc với đường thẳng Δ_1 nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2=[\vec{n},\vec{u}_1]=(1;-3;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ_2 là $\begin{cases} x=t \\ y=-3t \\ z=1-t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A\,(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$. **D.** $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Lời giải.

Gọi $I\,(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S).

Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$d\,(I,(Oxy))=d\,(I,(Oyz))=d\,(I,(Oxz)) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R$ (1).

Mặt cầu (S) đi qua $A\,(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=R \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2 \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2 \\ a=c=-b=R>0 \text{ do (1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+9=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1: $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và Δ_2: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Giả sử $M\in\Delta_1$, $N\in\Delta_2$ sao cho MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Tính $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MN}=(5;-5;10)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=(2;-2;4)$. **C.** $\overrightarrow{MN}=(3;-3;6)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=(1;-1;2)$.

Lời giải.

Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(3;-1;-2)$ và Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;3;1)$.

Gọi $M(4+3t;1-t;-5-2t)\in\Delta_1$ và $N(2+s;-3+3s;s)\in\Delta_2$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(-2-3t+s;t+3s-4;2t+s+5)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2s-t-3=0\\ s-8t-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=1\\ t=-1.\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MN}=(2;-2;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P): $x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một véc-tơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(2;3;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **C.** $\vec{u}=(-3;5;1)$. **D.** $\vec{u}=(4;5;-13)$.

Lời giải.

Điểm $M\in d\Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$, A là trung điểm của $MN\Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t)$.

Điểm $N\in(P)\Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2$.

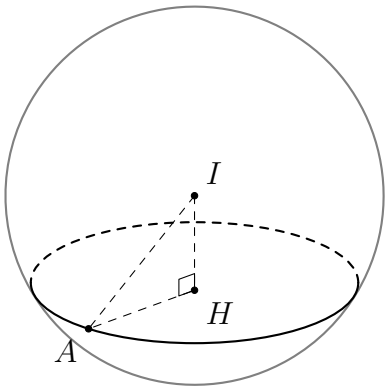
$\Rightarrow M(3;2;4)$, $N(-1;-4;0)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-4;-6;-4)=-2(2;3;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-3=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi (S_2) là mặt cầu đi qua M và chứa đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S_1) với mặt phẳng (Oyz). Tính bán kính R của mặt cầu (S_2).

A. $R=3$. **B.** $R=2\sqrt{2}$. **C.** $R=\sqrt{11}$. **D.** $R=\sqrt{10}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;-2;0)$, bán kính $r=\sqrt{8}$.

Tọa độ các giao điểm của (S_1) với mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-3=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2+4y-3=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

Chọn $y=0$, suy ra $A(0;0;\sqrt{3})$ là một điểm thuộc đường tròn $(C)=(S_1)\cap(Oyz)$.
Gọi H là hình chiếu của tâm cầu I trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0;-2;0)$. Gọi I_2 là tâm mặt cầu (S_2), do mặt cầu (S_2) chứa đường tròn (C) hay $(S_2)\cap(Oyz)=(C)$, suy ra I_2, H, I thẳng hàng.
Đường thẳng I_2H qua H và nhận $\vec{i}(1;0;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến, suy ra I_2H có phương trình là
$\begin{cases} x=t \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$. Do $I_2\in(I_2H) \Rightarrow I_2(t;-2;0)$, mà S_2 đi qua $M(1;1;1)$ và $A(0;0;\sqrt{3}) \Rightarrow I_2A=I_2M$. (1)
Ta có (1) $\Leftrightarrow t^2+4+3=(t-1)^2+9+1 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow I_2(2;-3;0) \Rightarrow R=\sqrt{11}$.
Chọn đáp án C □

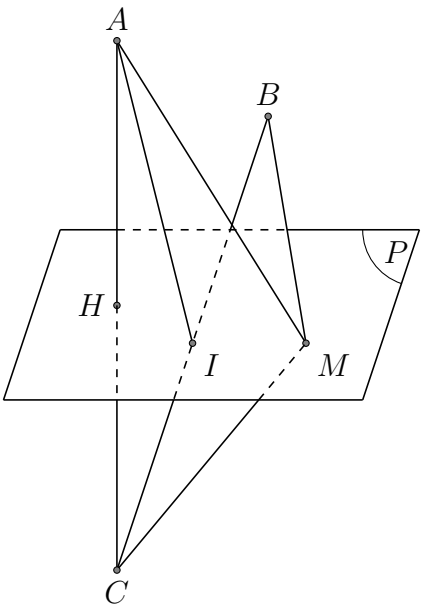
Câu 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-1=0$ và điểm $A(0;-2;3)$, $B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $(0-2\cdot(-2)+3-1)(2-2\cdot0+1-1)=12>0$, nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (P).
Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P).
Khi đó ta có $MA+MB=MC+MB\geq BC$. Dẫn tới $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với I là giao điểm của BC với mặt phẳng (P).
Phương trình đường thẳng AC là $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.
Toạ độ giao điểm H của AC với mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ \frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}, \text{ hay } H(-1;0;2).$$



H là trung điểm AC nên toạ độ C là $C(-2;2;1)$.
Đường thẳng BC đi qua $B(2;0;1)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{BC}=(-4;2;0)$ là $\begin{cases} x=2-4t \\ y=2t \\ z=1 \end{cases}$.
Toạ độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2-4t \\ y=2t \\ z=1 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{4} \\ x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}$, hay $I\left(1;\frac{1}{2};1\right)$.

Vậy ta có $a=1; b=\dfrac{1}{2}; c=1$, dẫn tới $a^2+b^2+c^2=\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

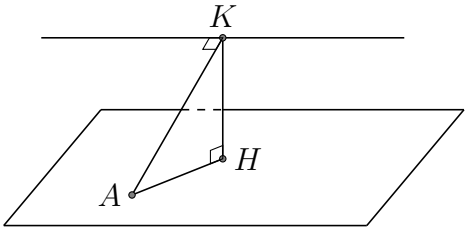
Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng (d) tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-z-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.

C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) có VTCP $\vec{u}=(1;-1;1)$.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Do $K\in d$ nên $K(1+t;1-t;1+t)$ $(t\in\mathbb{R})$.

$\overrightarrow{AK}=(t-1;2-t;t+3)$.

Ta có $AK\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}\perp\vec{u}\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}\cdot\vec{u}=0$.

$\Leftrightarrow t-1-(2-t)+t+3=0\Leftrightarrow t=0$. Vậy $K(1;1;1)$.

Ta có $\mathrm{d}((d),(P))=\mathrm{d}(K,(P))=KH\le KA=14$.

$\max \mathrm{d}((d),(P))=\sqrt{14}\Leftrightarrow (P)$ đi qua A và có VTPT $\overrightarrow{KA}=(-1;2;3)$.

Suy ra mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $3x+z+2=0$ vì có tích vô hướng hai VTPT bằng 0.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x+y-z-2=0$.

C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d, dễ thấy $\mathrm{d}(A,(\alpha))\le AK$, dấu " = " xảy ra khi $\overrightarrow{AK}$ là véc-tơ pháp tuyến của (α).

Ta có $K(2-t;2t-1;t+1)$, $\overrightarrow{AK}=(-t-1;2t;t+1)$, $\overrightarrow{AK}\cdot\vec{u}_{\mathrm{d}}=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $(x-2)+(y+1)-(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-z=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(0;-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt cả d_1 và d_2 là

A. $\dfrac{x}{-\frac{9}{2}}=\dfrac{y+1}{\frac{9}{2}}=\dfrac{z-2}{8}$. **B.** $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{4}$.

C. $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y+1}{-9}=\dfrac{z-2}{16}$. **D.** $\dfrac{x}{-9}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-2}{16}$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa M và d_1, $N(1;-2;3) \in d_1$. Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{d_1} \wedge \overrightarrow{MN} = (1;1;0) \Rightarrow (P)\colon x+y+1=0$. Gọi K là giao điểm của (P) và d_2, $K(2t-1;-t+4;3t-2) \in d_2$, $K \in (P) \Rightarrow 2t-1-t+4+1=0 \Leftrightarrow t=-4$, ta nhận được $K(-9;8;-14)$. Đường thẳng d là đường thẳng đi qua hai điểm M, K có phương trình $\dfrac{x}{9} = \dfrac{y+1}{-9} = \dfrac{z-2}{16}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $(a,b \neq 0)$. Tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm O, A, B là một đường thẳng có phương trình là

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{b}{2} \\ z=t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=at \\ y=bt \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải.

Tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm O, A, B là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB). Dễ thấy tam giác OAB vuông tại O nên $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};0\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{b}{2} \\ z=t \end{cases}.$$

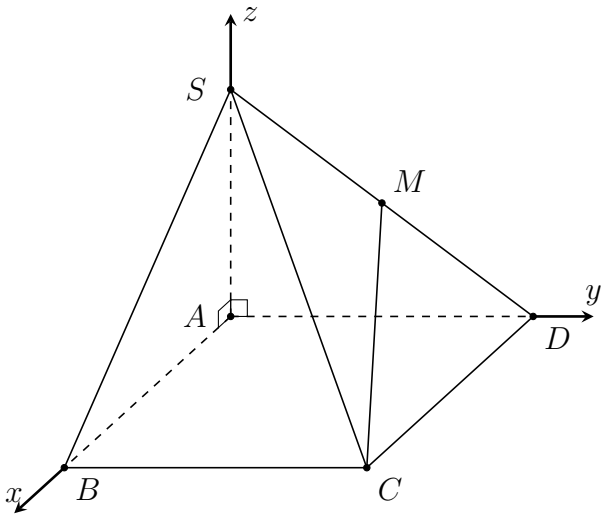
Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm SD. Tính $\mathrm{d}(SB,CM)$.

A. $\mathrm{d}(SB,CM) = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\mathrm{d}(SB,CM) = a\sqrt{2}$.

C. $\mathrm{d}(SB,CM) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\mathrm{d}(SB,CM) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Gắn hình chóp vào hệ trục $Oxyz$ sao cho $A \equiv O(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.
Khi đó $C(2a;2a;0)$, $M\left(0;a;\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{CM}=\left(-2a;-a;\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}=(2a;0;-a)$, $\overrightarrow{BC}=(0;2a;0)$.
Ta tính được $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CM}\right]=(-a^2;a^2;-2a^2)$, $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CM}\right]\cdot\overrightarrow{BC}=2a^3$, $\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CM}\right]\right|=a^2\sqrt{6}$. Vậy khoảng cách giữa SB và CM là

$$\mathrm{d}(SB,CM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CM}\right]\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=\frac{2a^3}{a^2\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2=(y+2)^2+z^2=4$ có tâm I và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+2=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho đoạn thẳng IM ngắn nhất.

A. $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{11}{9};-\dfrac{8}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$. **C.** $(1;-2;2)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=2t\end{cases}$.

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=2t\\2x-y+2z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=2t\\2(1+2t)-(2-t)+2(2t)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=-\dfrac{4}{3}\\z=-\dfrac{4}{3}\\t=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M là $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d'\colon \begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2\end{cases}$.

Đường thẳng đi qua $A\,(0;1;1)$ cắt d' và vuông góc với d có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$. **B.** $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.
C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d, ta chọn $\vec{u}\,(-2;2;1)$. Giả sử $d\cap d'=\{B\}$, khi đó tồn tại $t_0\in\mathbb{R}$ sao cho $B\,(t_0;-t_0;2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}\,(t_0;-t_0-1;1)$. Do giả thiết ta có

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow(-2)t_0+2\,(-t_0-1)+1=0\Leftrightarrow-4t_0-1=0\Leftrightarrow t_0=-\frac{1}{4}.$$

Khi đó $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{4};1\right)$, gọi $\vec{v}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán, ta chọn $\vec{v}\,(-1;-3;4)$. Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song $(P): x-2y+2z+6=0$, $(Q): x-2y+2z-10=0$ và có tâm I trên trục tung là

A. $x^2+y^2+z^2+2y-\dfrac{55}{9}=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2y-\dfrac{55}{9}=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2y-60=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2y+55=0$.

Lời giải.

Giả sử tọa độ $I\,(0;b;0)$ do giả thiết

$$\begin{aligned} d\,(I;(P))=d\,(I;(Q)) &\Leftrightarrow \frac{|-2b+6|}{3}=\frac{|-2b-10|}{3}\\ &\Leftrightarrow |-2b+6|=|-2b-10|\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2b+6=-2b-10\\-2b+6=2b+10\end{array}\right. \Rightarrow b=-1. \end{aligned}$$

Khi đó tọa độ $I\,(0;-1;0)$ và $d(I;(P))=\dfrac{8}{3}$ nên phương trình mặt cầu (S) là

$$x^2+(y+1)^2+z^2=\frac{64}{9}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2y-\frac{55}{9}=0$$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $H\,(3;1;0)$ cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ điểm $M\,(1;1;0)$ đến mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $OH\perp(P)$ nên $\overrightarrow{OH}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Mà $\overrightarrow{OH}\,(3;1;0)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là

$$3\,(x-3)+(y-1)=0\Leftrightarrow 3x+y-10=0$$

Khi đó $\mathrm{d}\,(M;(P))=\dfrac{|3+1-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d)\colon \begin{cases}x=4-t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$.

Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d).

A. $A'(2;3;0)$. **B.** $A'(-2;3;0)$. **C.** $A'(3;0;2)$. **D.** $A'(-3;0;-2)$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;-1;1)$ và điểm A' có tọa độ $A'(4-t;1-t;1+t)$.
Ta có $\overrightarrow{A'A} = (t-3;t;-t)$.
Ta có $\overrightarrow{A'A} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3-t-t-t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Từ đó có $A'(3;0;2)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

A. $\begin{cases} x = 3-6t \\ y = 11-9t \\ z = 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 5+6t \\ y = 11-9t \\ z = 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 5-6t \\ y = 11+9t \\ z = 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 5-6t \\ y = 11-9t \\ z = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-1;2;-3)$ và $B(1;5;-2)$.
Hình chiếu của A và B trên mặt phẳng Oxy lần lượt là $A'(-1;2;0)$ và $B'(1;5;0)$.
véc-tơ $\overrightarrow{A'B'} = (2;3;0)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $A'B'$ nên đường thẳng $A'B'$ có phương trình là $\begin{cases} x = 5-6t \\ y = 11-9t \\ z = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A\,(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $4x+3y-7z+1=0$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-4t \\ z = 3-7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. **B.** $\begin{cases} x = -1+8t \\ y = -2+6t \\ z = -3-14t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

C. $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+3t \\ z = 3-7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. **D.** $\begin{cases} x = -1+4t \\ y = -2+3t \\ z = -3-7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $4x+3y-7z+1=0$ nên đường thẳng Δ nhận véc-tơ $\vec{u} = (4;3;-7)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\,(1;2;3)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = (4;3;-7)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+3t \\ z = 3-7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0;2;0)$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$. Đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$. **C.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của M trên d. Suy ra $H(4+3t;2+t;-1+t)$. Ta có $\overrightarrow{MH}=(4+3t;t;-1+t)$. véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3;1;1)$. Khi đó

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=3(4+3t)+t+(-1+t)=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Suy ra $\overrightarrow{MH}=(1;-1;-2)$ là véc-tơ chỉ phương của d nên phương trình đường thẳng d là

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-10=0$ và điểm $M(1;1;-1)$. Giả sử đường thẳng d đi qua M và cắt (S) tại hai điểm P, Q sao cho độ dài đoạn thẳng PQ lớn nhất. Phương trình của d là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) là $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=4$. Đường thẳng d qua M cắt (S) tại hai điểm P, Q sao cho độ dài PQ lớn nhất khi và chỉ khi đường thẳng d đi qua tâm I của mặt cầu (S). Khi đó đường thẳng d nhận $\overrightarrow{IM}=(2;-1;-2)$ làm véc-tơ chỉ phương. Vậy phương trình đường thẳng d là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2+at\\y=1-bt\\z=2-t\end{cases}$ và $d'\colon\begin{cases}x=2+3t'\\y=3-t'\\z=t'\end{cases}$. Giá trị của a và b sao cho d và d' song song với nhau là

A. $a=-2$, $b=-1$. **B.** $a=3$, $b=2$. **C.** $a=-3$, $b=-1$. **D.** $a=3$, $b=1$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_1=(a;-b;-1)$ và véc-tơ chỉ phương của d' là $\vec{u}_2=(3;-1;1)$. Khi đó

$$d\parallel d'\Leftrightarrow\begin{cases}\exists k\neq 0\colon \vec{u}_1=k\vec{u}_2\\d\neq d'\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{3}=\frac{-b}{-1}=\frac{-1}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-1.\end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+y+z-7=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm thuộc d cách đều hai điểm A và B.

A. $d\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=5+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $d\colon \begin{cases} x=-2+5t \\ y=-1+2t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $d\colon \begin{cases} x=6 \\ y=-3t \\ z=1+3t \end{cases}$. **D.** $d\colon \begin{cases} x=5-2t \\ y=2-t \\ z=3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;0;1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Mặt phẳng (Q) qua $I(1;0;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;4;0)$ sẽ có phương trình $(Q)\colon -2(x-1)+4y=0 \Leftrightarrow x-2y-1=0$.

Tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Do đó đường thẳng cần tìm là giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P).

Mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;-2;0)$.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;1;1)$.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $[\vec{n}_Q,\vec{n}_P]=(-2;-1;3)$.

Chọn điểm $M(5;2;0)\in(P)\cap(Q)\Rightarrow M\in d$.

Vậy phương trình $d\colon \begin{cases} x=5-2t \\ y=2-t \\ z=3t. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $E(1;-2;4), F(1;-2;-3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tổng $ME+MF$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-1;2;0)$. **B.** $M(-1;-2;0)$. **C.** $M(1;-2;0)$. **D.** $M(1;2;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.

Thay tọa độ điểm E,F vào phương trình mặt phẳng (Oxy) ta được $4\cdot(-3)<0$. Vậy E,F nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy).

$ME+MF$ nhỏ nhất khi 3 điểm M,E,F thẳng hàng hay $\overrightarrow{ME}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Do $M\in(Oxy)$ nên đặt $M(a;b;0)$.

$\overrightarrow{ME}=(1-a;-2-b;4)$, $\overrightarrow{EF}=(0;0;-7)$.

Từ đó ta được $\begin{cases} 1-a=0 \\ -2-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Vậy $M(1;-2;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-2;1), B(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-3=0$. Tìm tọa độ giao điểm H của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là

A. $H(0;-5;-1)$. **B.** $H(1;-5;-1)$. **C.** $H(4;1;0)$. **D.** $H(5;0;-1)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(1;3;2)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm A,B có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì H là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) nên H thuộc đường thẳng AB.

Khi đó $H(1+t, -2+3t, 1+2t)$. Vì H cũng thuộc mặt phẳng (P) nên

$1 + t - (-2 + 3t) + 2(1 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy $H(0; -5; -1)$

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và điểm $I(2; 1; -1)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ cắt trục Ox tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $AB = 2\sqrt{6}$. **B.** $AB = 24$. **C.** $AB = 4$. **D.** $AB = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

Lấy điểm $M(-2; 1; 0) \in \Delta$. $\overrightarrow{IM} = (-4; 0; 1)$.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là $\dfrac{|[\overrightarrow{IM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{72}}{3} = 2\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ là

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 8$.

Hoành độ của hai điểm A, B là nghiệm của phương trình

$$(x-2)^2 + (0-1)^2 + (0+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \sqrt{6} + 2 \\ x = -\sqrt{6} + 2 \end{bmatrix}.$$

Từ đó, ta được $A(\sqrt{6} + 2; 0; 0)$ và $B(-\sqrt{6} + 2; 0; 0)$. Vậy độ dài đoạn AB bằng $2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Cho đường thẳng (Δ) đi qua A, cắt (d) và song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ).

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Gọi B là giao điểm của (Δ) với (d) nên tọa độ điểm B có dạng $B(3 + t; 3 + 3t, 2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 + t; 1 + 3t; 1 + 2t)$.

Từ (Δ) song song với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow (2 + t) + (1 + 3t) - (1 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hay $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6}$, $\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OA}\right] = (-4; 0; -4)$.

Khi đó khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ) là $\mathrm{d}(O, \Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

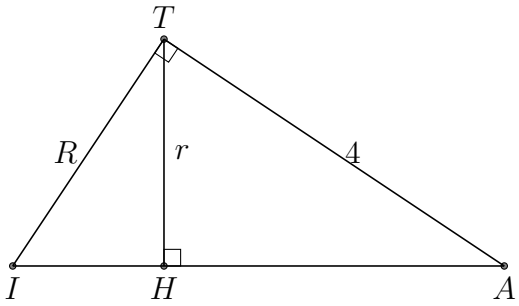
Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 7 = 0$ và điểm $A(1; 3; 3)$. Qua A vẽ tiếp tuyến AT của mặt cầu (T là tiếp điểm), tập hợp các tiếp điểm T là

đường tròn khép kín (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) (phần bên trong mặt cầu).

A. $\dfrac{144}{25}$. **B.** 16π. **C.** 4π. **D.** $\dfrac{144\pi}{25}$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=3$. Khi đó $AT=\sqrt{AI^2-R^2}=4$. Do đó T nằm trên mặt cầu tâm A bán kính 4 nên tập hợp các điểm T là đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S) và $S(A;4)$.



Khi đó (C) có bán kính r được tính bởi công thức

$$r=\frac{AT\cdot R}{\sqrt{AT^2+R^2}}=\frac{4\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}.$$

Diện tích cần tìm bằng $\pi\cdot r^2=\dfrac{144\pi}{25}$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $d_1\parallel d_2$. **B.** d_1 cắt d_2. **C.** d_1 trùng với d_2. **D.** d_1 chéo d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-2;1)$, d_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(-2;1;1)$.

Do $\dfrac{1}{-2}\neq\dfrac{-2}{1}$ nên hai véc-tơ $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương suy ra d_1 và d_2 cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}\\ \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=z\\ y+1=-2z\\ x-1=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+1=0\\ x+y+z-1=0.\end{cases}$$

Hệ vô nghiệm nên d_1 và d_2 chéo nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 6x-2y+z-35=0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Tính OA'.

A. $OA'=5\sqrt{3}$. **B.** $OA'=3\sqrt{26}$. **C.** $OA'=\sqrt{46}$. **D.** $OA'=\sqrt{186}$.

Lời giải.

Đường thẳng AA' qua $A(-1;3;6)$ nhận $\vec{n}_P=(6;-2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra $AA'\colon \dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-6}{1}$. Gọi $H=AA'\cap(P)$.

Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases}\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-6}{1}\\ 6x-2y+z-35=0\end{cases}\Rightarrow H(5;1;7)$.

Ta có H là trung điểm AA' suy ra $A'(11;-1;8)$. Suy ra $OA'=\sqrt{186}$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+5y-z-2=0$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

B. $\begin{cases} x=-8t \\ y=7t \\ z=-2+11t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

D. $\begin{cases} x=-8t \\ y=7t \\ z=2+11t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của d và (P), ta có $A(0;0;-2)$.
Chọn $B(12;9;1)\in d$, gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên (P).
Phương trình BB' là $\dfrac{x-12}{3}=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$.
Tọa độ B' là nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{x-12}{3}=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-1}{-1} \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$.
Khi đó phương trình Δ cũng chính là phương trình của BB'.
Ta có $\Delta\colon \begin{cases} \text{qua } A(0;0;-2) \\ \text{có VTCP } \vec{u}=(62;-25;61) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AB'}=\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{183}{35}\right). \end{cases}$
Suy ra $\Delta\colon \begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ giác $ABCD$ có $A(8;6;-7)$, $B(2;-1;4)$, $C(0;-3;0)$, $D(-8;-2;9)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và cắt tứ diện $ABCD$ thành 2 phần có thể tích bằng nhau, biết (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(7;b;c)$. Tính $b+c$.

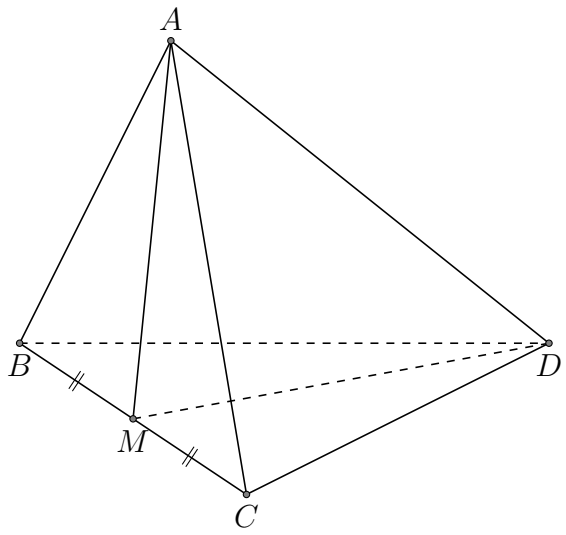
A. 8. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 9.

Lời giải.

Kiểm tra các điểm ta thấy $A, D \in \Delta$. Mặt phẳng chứa Δ và chia tứ diện thành hai phần có thể tích bằng nhau là mặt phẳng đi qua A, D và trung điểm M của BC.
$M(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AM}=(-7;-8;9)$, $\overrightarrow{AD}=(-16;-8;16)$.
Một trong các véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (AMD) bằng

$$\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD}\right]=(-56;-32;-72)=-8(7;4;9).$$

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(7;4;9)$.
Vậy $a=4; b=9$ và $T=a+b=13$.



Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (α) sao cho mọi điểm thuộc d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải.

Do mọi điểm thuộc d đều cách đều A và B nên d nằm trong mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.
Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$.
Mặt phẳng (P) qua M và nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến $\Rightarrow (P)\colon 3x+y-7=0$.
Đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (α) nên tọa độ điểm thuộc d thỏa hệ

$$\begin{cases} x+y+z-7=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$, $B(1;2;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-2}$. Hoành độ của điểm M thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB có giá trị nhỏ nhất có giá trị bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Điểm M thuộc d có tọa độ là $(t;-1-t;2-2t)$ với $t\in\mathbb{R}$.
Khi đó $\overrightarrow{MA}=(-t;t+2;2t-1)$ và $\overrightarrow{MB}=(1-t;t+3;2t-1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]=\left(\begin{vmatrix} t+2 & 2t-1 \\ t+3 & 2t-1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2t-1 & -t \\ 2t-1 & 1-t \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -t & t+2 \\ 1-t & 3+t \end{vmatrix}\right)=(-2t+1;2t-1;-2t-2)$.

Ta có $S_{\triangle MAB} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(2t-1)^2+(2t+2)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{12t^2+6} \geq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 0$. Do đó $\triangle MAB$ có diện tích nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ khi $M(0;-1;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = t \\ y = 8+4t \\ z = 3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z = 7$. Phương trình đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) là

A. $\begin{cases} x = -8+4t \\ y = 15-5t \\ z = t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -8-4t \\ y = 5-5t \\ z = t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -8-4t \\ y = 15-5t \\ z = t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 8+4t \\ y = 15-5t \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0;8;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;4;2)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$.

Ta có $\vec{v} = [\vec{u}, \vec{n}] = \left(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (2;1;-3)$.

Chú ý rằng véc-tơ chỉ phương của d vuông góc với $\vec{n}$ và $\vec{v}$. Do đó véc-tơ chỉ phương của d là

$$[\vec{n}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-4;5;-1).$$

Do $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ nên Δ cắt (P). Giao điểm của (Δ) và (P) có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z = 7 \\ x = t \\ y = 8+4t \\ z = 3+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{4}{7} \\ x = -\dfrac{4}{7} \\ y = \dfrac{40}{7} \\ z = \dfrac{13}{7}. \end{cases}$$

Do đó phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{7} - 4t \\ y = \dfrac{40}{7} + 5t \\ z = \dfrac{13}{7} - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3), B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;0;-2)$. **B.** $M(3;1;-3)$. **C.** $M(5;2;-4)$. **D.** $M(-1;-1;-1)$.

Lời giải.

Vì $M\in\Delta$ nên $M\,(1+2t;t;-2-t)$.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2+2MB^2 &= (2t+1)^2+(t+1)^2+(t+5)^2+2\left[(2t)^2+(t+2)^2+(t+3)^2\right]\\ &= 18t^2+36t+53\\ &= 18(t+1)^2+35\geq 35, \forall t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của MA^2+2MB^2 là 35, xảy ra khi $t=-1$, khi đó $M(-1;-1;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2z-4=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+61=0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 24. **B.** 21. **C.** 3. **D.** 18.

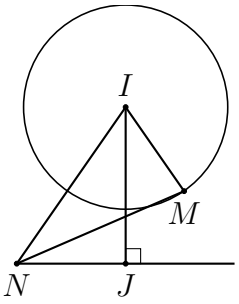
Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I=(2,0,1)$ và bán kính là $R=3$.

Khoảng cách từ I xuống mặt phẳng (P) là

$$\mathrm{d}[I,(P)]=\frac{|2\cdot 2+1\cdot 0-2\cdot 1+61|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=21>R,$$

nên mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.



Gọi J là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) ta có $MN+MI\geq IN\geq IJ$ suy ra $MN\geq IJ-R$.

Do đó $MN_{\min}=IJ-R$.

Mặt khác $IJ=\mathrm{d}[I,(P)]=21$.

Vậy $MN_{\min}=IJ-R=21-3=18$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Phương trình đường thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

A. $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-9}{-4}$. **B.** $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$.

C. $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-9}{4}$. **D.** $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

Lời giải.

Ta có các véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u_1}(1;2;-1)$, $\vec{u_2}(-7;2;3)$. Do Δ vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2 nên $\vec{u_\Delta}=[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}]=(8;4;16)$. Ta thấy véc-tơ $(8;4;16)$ cùng phương với véc-tơ $(2;1;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $E(-2;7;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x-7y+3z+1=0$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=7+7t \\ z=1+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=7-7t \\ z=1-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-t \\ y=7-7t \\ z=1+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=7-7t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng α có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-7;3)$.

Vì $\Delta \perp (\alpha)$ nên Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}=(1;-7;3)$.

Vậy phương trình tham số Δ là $\begin{cases} x=-2+t \\ y=7-7t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, gọi H là hình chiếu của điểm $A(-1;-1;-4)$ lên đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Khi đó hoành độ điểm H là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

$\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=-2t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-2)$.

$H\in(\Delta) \Rightarrow H(1+t;-1+t;-2t)$.

$\overrightarrow{AH}=(2+t;t;4-2t)$.

H là hình chiếu của A lên $\Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow 2+t+t-2\cdot(4-2t)=0 \Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow H(2;0;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-6}{4}$ và $d'\colon \begin{cases} x=5+t \\ y=-1-4t \\ z=20+t \end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm I của d và d'.

A. $I(-3;-2;6)$. **B.** $I(5;-1;20)$. **C.** $I(3;7;18)$. **D.** $I(13;-33;28)$.

Lời giải.

Thế d' vào d ta được:

$$\frac{8+t}{2}=\frac{1-4t}{3}=\frac{14+t}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8+t}{2}=\dfrac{1-4t}{3} \\ \dfrac{1-4t}{3}=\dfrac{14+t}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24+3t=2-8t \\ 4-16t=42+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow t=-2.$$

Vậy $I(3;7;18)$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là giao tuyến của mặt phẳng (Oyz) với mặt phẳng $(P)\colon 6x-3y+2z-6=0$. Phương trình của d là

A. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=-2-2t\\z=3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=2t\\z=3+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=-2+2t\\z=3-3t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $d=(Oyz)\cap(P)$ nên ta suy ra
d đi qua điểm $A(0;0;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d=\left[\vec{i},\vec{n}_P\right]=(0;-2;-3)$ hay $\vec{u'}=(0;2;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=0\\y=2t\\z=3+3t\end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, vuông góc với trục hoành và cắt đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. Phương trình Δ là

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=3+t\\z=4+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=3t\\z=4t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $A=\Delta\cap d\Rightarrow A(1+t;2-t;1-3t)\Rightarrow \overrightarrow{OA}=(1+t;2-t;1-3t)$.
Δ vuông góc với trục hoành $\overrightarrow{OA}.\vec{i}=0\Leftrightarrow 1.(1+t)+0(2-t)+0(1-3t)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Δ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{OA}=(0;3;4)\Rightarrow \Delta\colon \begin{cases}x=0\\y=3t\\z=4t\end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-5)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+5=0$ tiếp xúc nhau. Tìm tiếp điểm H của (S) và (P).

A. $H(1;-1;-2)$. **B.** $H(-3;-1;0)$. **C.** $H(-3;0;-1)$. **D.** $H(3;-3;-1)$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(5;1;3)$.
Gọi d là đường thẳng đi qua qua $I(5;1;3)$ và vuông góc với $(P)\Rightarrow$ VTCP $\vec{u}_d=\vec{n}_P=(1;2;2)$. Phương trình $d\colon \begin{cases}x=5+t\\y=1+2t\\z=3+2t\end{cases}$. Khi đó $H=d\cap(P)$.
Tọa độ điểm H là nghiệm phương trình: $5+t+2(1+2t)+2(3+2t)+5=0\Leftrightarrow t=-2$.
Vậy $H(3;-3;-1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua A, song song với mặt phẳng (P) và

cắt d có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-1-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $B=\Delta\cap d\Rightarrow B(3+t;3+3t;2t)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2+t;1+3t;1+2t)$.
Ta có $\Delta\parallel(P)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_P=0\Leftrightarrow 1(2+t)+1(1+3t)-1(1+2t)=0\Leftrightarrow t=-1$.
Ta suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$.
Vậy $\Delta\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-1-t. \end{cases}$
Chọn đáp án C □

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi M,N lần lượt là các điểm di động trên d_1,d_2. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

d_1 qua $A(2;-1;-3)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(1;2;2)$.
d_2 qua $B(1;1;-1)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(1;2;2)$.
$\overrightarrow{AB}=(-1;2;2)$.
Nhận xét : $d_1\parallel d_2$ nên $MN_{\min}=\mathrm{d}(d_1,d_2)=\mathrm{d}(A,d_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_2\right]\right|}{|\vec{u}_2|}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;0;3)$, $B(0;3;3)$. Điểm $M\in d$ sao cho MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(3;-2;0)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Lời giải.

Giả sử $M(t;t;t)\in d\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}=(-t;-t;3-t) \\ \overrightarrow{MB}=(-t;3-t;3-t) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} MA^2=3t^2-6t+9 \\ MB^2=3t^2-12t+18 \end{cases}$
$\Rightarrow P=MA^2+2MB^2=9t^2-30t+45=(3t-5)^2+20\geq 20\Rightarrow \min P=20\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{3}$. Vậy $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.
Chọn đáp án D □

Câu 86. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, điểm $A(1;1;0)$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$, $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua điểm A, vuông góc với d và cắt Δ.

A. $d'\colon \begin{cases} x=1+t, \\ y=1-2t, \\ z=-2t. \end{cases}$ **B.** $d'\colon \begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+2t, \\ z=t. \end{cases}$ **C.** $d'\colon \begin{cases} x=1+t, \\ y=1+2t, \\ z=-2t. \end{cases}$ **D.** $d'\colon \begin{cases} x=1+t, \\ y=1-4t, \\ z=2t. \end{cases}$

Lời giải.

Gọi B là giao điểm của d' với Δ. Do $B \in \Delta$ nên tọa độ B có dạng $B(1+t;1+2t;-1-t)$. Lại do d' vuông góc với d nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$, trong đó $\vec{u} = (2;1;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d. Từ đó, ta tìm được $t = 1$. d' chính là đường thẳng AB nên có phương trình là $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+2t, \\ z = -2t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 87. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+2=0$ (a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{2}$ và cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-11=0$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $M = a+b+c$.

A. $M=-5$. **B.** $M=-43$. **C.** $M=5$. **D.** $M=43$.

Lời giải.

d đi qua điểm $M(1;0;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-2;2)$, (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;c)$, (S) có tâm là $I(1;-2;-3)$. Vì (P) chứa d nên $a = -2$ và $c = b+1$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P) là $d = \dfrac{|a-2b-3c+2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|5b+3|}{\sqrt{2b^2+2b+5}}$.

Ta chứng minh $\dfrac{|5b+3|}{\sqrt{2b^2+2b+5}} \le \dfrac{113}{9}$. Thật vậy, bằng cách bình phương hai vế và quy đồng mẫu thức, BĐT trên tương đương với $(b-22)^2 \ge 0$, luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi $b = 22$.

Mặt khác, (P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm I đến (P) lớn nhất. Do đó, $b = 22$. Vậy $a = -2, b = 22, c = 23$ và $M = 43$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$ là

A. $6x+2y+z+1=0$. **B.** $6x-2y+2z+2=0$.

C. $6x+8y+z-5=0$. **D.** $6x-8y+z+11=0$.

Lời giải.

Chọn trên d_1 hai điểm $A(-1;1;3)$, $B(2;3;1)$ và trên d_2 hai điểm $C(0;1;-3)$, $D(1;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $6x-8y+z+11=0$. Dễ dàng kiểm tra thấy điểm D thuộc mặt phẳng (ABC).

Vậy phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2 là $6x-8y+z+11=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

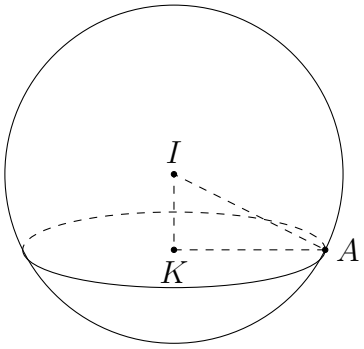
A. $K(3;-2;1)$, $r=10$. **B.** $K(-1;2;3)$, $r=8$.

C. $K(1;-2;3)$, $r=8$. **D.** $K(1;2;3)$, $r=6$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$ và bán kính $R=10$.
Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (P), d có phương trình

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases}.$$



K là giao điểm của d và (P), nên tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow K(-1;2;3).$$

Ta có $\mathrm{h}=\mathrm{d}\,(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 3-2\cdot(-2)-1+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{18}{3}=6$.
Bán kính của (C) là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.
Kết luận $K(-1;2;3),\ r=8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$. Tọa độ hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng (P) là

A. $H(2;2;-3)$. **B.** $H(-1;-2;4)$. **C.** $H(-1;2;0)$. **D.** $H(2;5;3)$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua M qua vuông góc với (P). Phương trình của d là $\begin{cases} x=1+t \\ y=4+t \\ z=2+t \end{cases}.$
Hình chiếu H chính là giao điểm của d và (P), do đó tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=4+t \\ z=2+t \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow H(-1;2;0).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. d_1 cắt d_2. **B.** d_1 và d_2 chéo nhau. **C.** d_1 trùng d_2. **D.** d_1 và d_2 song song.

Lời giải.

d_1 và d_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(-1;2;3)$, $\vec{u}_2=(1;-2;1)$. Do $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương nên loại hai trường hợp $d_1 \parallel d_2$ và $d_1 \equiv d_2$.
Chọn $A(1;2;0)\in d_1$, $B(1;3;1)\in d_2$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$, $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(8;4;0)$ và $\overrightarrow{AB}\cdot[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=4\neq 0$, suy ra d_1 và d_2 chéo nhau.
Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y+2z+6=0$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng?**

A. d cắt và không vuông góc với (P). **B**. d vuông góc với (P).

C. d song song với (P). **D**. d chứa trong (P).

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-3;-1)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-3;2)$. Rõ ràng, $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}$. (1) Ta có

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=1\cdot 3+(-3)\cdot(-3)+(-1)\cdot 2=10\neq 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra d cắt và không vuông góc với (P).

Chọn đáp án A □

Câu 93. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2t\\ y=-t\\ z=-1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+5=0$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng d, biết rằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (P) bằng 3.

A. $H(0;0;-1)$. **B**. $H(-2;1;-2)$. **C**. $H(2;-1;0)$. **D**. $H(4;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi $H(2t;-t;-1+t)$ thuộc đường thẳng d.

Ta có

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(H,(P))=3\\ \Leftrightarrow\ &\frac{|2t-2\cdot(-t)-2\cdot(-1+t)+5|}{\sqrt{1+4+4}}=3\\ \Leftrightarrow\ &\frac{|2t+7|}{3}=3\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&2t+7=9\\ &2t+7=-9\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&t=1\\ &t=-8.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Với $t=1$ ta được $H(2;-1;0)$ và với $t=-8$ ta được $H(-16;8;-9)$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.

A. $H(3;1;-5)$. **B**. $H(-3;0;5)$. **C**. $H(3;0;-5)$. **D**. $H(2;1;-1)$.

Lời giải.

Phương trình (α) qua A và vuông góc với d là $3(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0\Leftrightarrow 3x-y+z-4=0$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2+3t\\ y=1-t\\ z=-1+t.\end{cases}$

Do $H \in d$ nên $H(2+3t; 1-t; -1+t)$.
Mặt khác $H \in (\alpha)$ nên $3(2+3t)-(1-t)+(-1+t)-4=0 \Leftrightarrow 11t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow H(2;1;-1)$.
Chọn đáp án (D) □

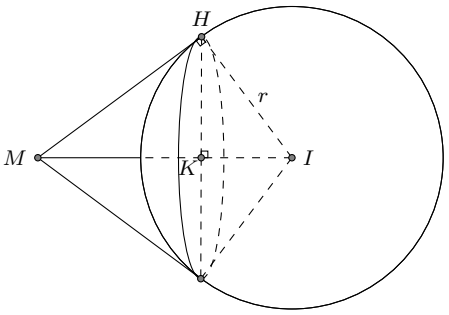
Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-5)$, bán kính $r=4$ và điểm $M(1;3;-1)$. Các đường thẳng qua M tiếp xúc với (S) tại các tiếp điểm thuộc đường tròn có bán kính R bằng bao nhiêu?

A. $R=\dfrac{12}{5}$. **B.** $R=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $R=3$. **D.** $R=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là tiếp điểm của đường thẳng qua M và tiếp xúc (S) và K là tâm của đường tròn.
Ta có $IM=5, r=IH=4 \Rightarrow MH=3$.
Ta giác MHI vuông tại H có HK là đường cao nên

$$R=HK=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 7x+3ky+mz+2=0$ và $(Q)\colon kx-my+z+5=0$. Khi giao tuyến của (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y-2z-5=0$ hãy tính $T=m^2+k^2$.

A. $T=10$. **B.** $T=2$. **C.** $T=8$. **D.** $T=18$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(7;3k;m)$, mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(k;-m;1)$, mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha=(1;-1;-2)$.
Mặt phẳng (P), (Q) có giao tuyến khi và chỉ khi $\vec{n}_P \neq k\vec{n}_Q$. (1)
Do giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với (α) nên $(P)\perp(\alpha)$ và $(Q)\perp(\alpha)$.
Do vậy $\begin{cases}\vec{n}_P\cdot\vec{n}_\alpha=0\\ \vec{n}_Q\cdot\vec{n}_\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7-3k-2m=0\\ k+m-2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=3\\ m=-1\end{cases}$ thỏa điều kiện (1).
Vậy $T=m^2+k^2=10$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-5}{3}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(5;1;-1)$ và tiếp xúc với d.

A. $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=56$. **B.** $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=54$.
C. $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\sqrt{56}$. **D.** $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=110$.

Lời giải.

Đường thẳng d qua $M(1;-3;5)$ và nhận $\vec{u}=(2;-1;3)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Ta có $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(6;-24;-12) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|=6\sqrt{21}$ và $|\vec{u}|=\sqrt{14}$.
Do mặt cầu tiếp xúc với d nên $R=\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3\sqrt{6}$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=54$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2-2t \\ 3 \\ z = t \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

A. $\left(x+\dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y+\dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}$. **B.** $\left(x+\dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y+\dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$.

C. $\left(x-\dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y-\dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z+\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}$. **D.** $\left(x-\dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y-\dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z+\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

Gọi $A(2+t;1-t;2t) \in d_1$, $B(2-2t';3;t') \in d_2$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2t'-t;t+2;t'-2t)$.

d_1 có một VTCP là $\vec{u_1} = (1;-1;2)$, d_2 có một VTCP là $\vec{u_2} = (-2;0;1)$.

Để AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 thì

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2t'-t)-(t+2)+2(t'-2t) = 0 \\ -2(-2t'-t)+(t'-2t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ t' = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $B(2;3;0)$.

Gọi I là trung điểm AB thì $I\left(\dfrac{11}{6};\dfrac{13}{6};-\dfrac{1}{3}\right)$.

Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ là $\left(x-\dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y-\dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(z+\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ và $d_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-9}{3}$. Mặt cầu có một đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $\left(x-\dfrac{16}{3}\right)^2 + \left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2 + (z-14)^2 = 12$. **B.** $\left(x-\dfrac{16}{3}\right)^2 + \left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2 + (z-14)^2 = 3$.

C. $\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2 + (z-7)^2 = 12$. **D.** $\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2 + (z-7)^2 = 3$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2;1;3)$, $\vec{u}_2 = (1;2;3)$.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 với $A \in d_1$, $B \in d_2$.

Suy ra $A(-1+2a;-1+a;-1+3a)$; $B(2+b;2b;9+3b)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-2a+b+3;-a+2b+1;-3a+3b+10)$.

Vì AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14a-13b = 37 \\ 13a-14b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{4}{3};6\right) \\ B\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3};8\right) \end{cases} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Gọi I là tâm mặt cầu (S) có đường kính là AB. Suy ra $I\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};7\right)$ và $R=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A. $\begin{cases}x=-3\\y=-5-t\\z=-3+4t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-5+t\\z=3+4t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3\\y=-5+2t\\z=3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t\end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;-1;4)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P): $x+3=0$.
Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $[\vec{n}_P;\vec{u}_d]=(0;4;1)$.
$\Rightarrow (Q)$: $4y+z+17=0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là $\begin{cases}4y+z+17=0\\x+3=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t.\end{cases}$

Cách 2: Ta có $M\in d\Rightarrow M(1+2t;-5-t;3+4t)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên (P): $x+3=0$.

Suy ra $M'(-3;-5-t;3+4t)$. Suy ra d': $\begin{cases}x=-3\\y=-5-t\\z=3+4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t.\end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z-5=0$ và đường thẳng d: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất là

A. (P): $x-2y-1=0$. **B.** (P): $y-z+4=0$.
C. (P): $x-z+4=0$. **D.** (P): $x-2z+7=0$.

Lời giải.

Vì (P) chứa d nên phương trình của (P) có dạng (P): $a(x+1)+b(y+1)+c(z-3)=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$ và $2a+b+c=0$. Gọi α là góc giữa (P) và (Q), ta có

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{n}_Q|}=\frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{|3(a+b)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}.$$

☑ Nếu $a=0$ thì $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\alpha=30^\circ$.

☑ Nếu $a\neq 0$ thì $\cos\alpha=\frac{|3(1+t)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5+4t+2t^2}}$ với $t=\frac{b}{a}$. Khi đó $0\le\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta có α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ lớn nhất. Do đó $\alpha=30^\circ$ và $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $a=0$, chọn $b=1,c=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$, cắt d và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là phương trình nào dưới đây?

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

☑ **Cách 1:** Gọi $B=d\cap\Delta \Rightarrow \begin{cases} B\in d \\ B\in\Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3+t;3+3t;2t) \\ \overrightarrow{AB}=(2+t;1+3t;2t+1) \text{ là véc-tơ chỉ phương của } \Delta. \end{cases}$

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$.

Vì $\Delta \parallel (P)$ nên $\vec{n}_{(P)}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 2+t+1+3t-2t-1=0\Leftrightarrow 2t=-2\Leftrightarrow t=-1$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$ và nhận véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

☑ **Cách 2:** Gọi (β) là mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$ và song song với (α) nên có phương trình $x+y-z-4=0$.

Gọi $B=d\cap(\beta)$. Khi đó, tọa độ x,y,z của B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2} \\ x+y-z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=6 \\ 2x-z=6 \\ x+y-z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2. \end{cases}$$

Suy ra $B(2;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 103. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-2=0$. Đường thẳng nào dưới đây nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d?

A. $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$.
B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$.
C. $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$.
D. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (α), vuông góc và cắt (d).

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha=(1;1;-1)$ và véc-tơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}_d=(1;2;1)$

$\Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u}=[\vec{u}_d,\vec{n}_\alpha]=(-3;2;-1)$.

Ta có $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$. Thay vào phương trình mặt phẳng (α), ta có

$$1+t+2+2t-3-t-2=0\Leftrightarrow t=1.$$

Tọa độ giao điểm của (d) và (α) là $M(2;4;4)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=2-3u \\ y=4+2u \\ z=4-u. \end{cases}$

Chọn $u=-1 \Rightarrow N(5;2;5) \in \Delta \Rightarrow \Delta\colon \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)4x+y+2z+1=0$ và điểm $M(4;2;1)$. Khi đó điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (P) là

A. $M'(-4;0;-3)$. **B.** $M'(-4;-4;-1)$. **C.** $M'(4;2;1)$. **D.** $M'(-2;0;5)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của M lên (P).

Ta có véc-tơ chỉ phương của AH là $\vec{u}=(4;1;2)$.

Phương trình đường thẳng AH là $\begin{cases} x=4+4t \\ y=2+t \\ z=1+2t. \end{cases}$

Do $H \in (P)$ nên ta có $4(4+4t)+(2+t)+2(1+2t)+1=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $H(0;1;-1)$.

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P).

Suy ra H là trung điểm của MM'.

Suy ra toạ độ điểm $M'(-4;0;-3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;4)$, $B(5;3;-2)$, $C(0;4;2)$, đường thẳng d cách đều ba điểm A, B, C có phương trình là

A. $\begin{cases} x=\dfrac{8}{3}+26t \\ y=\dfrac{5}{3}+22t \\ z=\dfrac{4}{3}+27t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4+26t \\ y=2+22t \\ z=\dfrac{9}{4}+27t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=\dfrac{11}{6}+14t \\ y=\dfrac{1}{6}+22t \\ z=27t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4+26t \\ y=2+38t \\ z=\dfrac{9}{4}+27t \end{cases}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(2;5;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;6;-2)$.

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $M\left(4;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Gọi N là trung điểm của AC suy ra $N\left(\dfrac{3}{2};1;3\right)$.

Mặt phẳng trung trực của AB là $(P)\colon 4x+10y-12z-9=0$.

Mặt phẳng trung trực của AC là $(Q)\colon 6x-12y+4z-9=0$.

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(26;22;27)$.

Điểm $M\left(4;2;\dfrac{9}{4}\right) \in (P)\cap(Q)$.

Chọn đáp án B □

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Có: $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \Rightarrow \begin{cases} I(1;1;0) \\ R=1 \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Ta có: $A(1;0;0) \in (S)$ suy ra nếu tồn tại (P) thì (P) tiếp xúc với (S) tại A.

$\begin{cases} A \in (P) \\ \text{Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là } \overrightarrow{IA} \end{cases} \Rightarrow (P)\colon y=0.$

Ta thấy $B(0;0;2) \in (P)$ suy ra có duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chú ý: Bài toán này thường sẽ có hai mặt phẳng thỏa mãn, nhưng với số liệu của bài này thì chỉ có một mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases}$. Đường thẳng Δ đi qua $A(0;1;1)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$.

B. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{4}$.

C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;2;1)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và d_2, nên $B(t;-t;2)$, suy ra $\overrightarrow{AB}=(t;-t-1;1)$.

Do Δ vuông góc với d_1 nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow -2t+2(-t-1)+1=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4};1\right)$, suy ra Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a}\,(-1;-3;4)$.

Vậy phương trình Δ là: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 108. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=25$. Gọi $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ là hai điểm thuộc mặt cầu thỏa mãn biểu thức $T=2(x_A-x_B)+(y_A-y_B)-2(z_A-z_B)$ đạt giá trị lớn nhất. Trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc mặt phẳng nào sau đây?

A. $-y+4z+5=0$.

B. $-x+5y-6z-10=0$.

C. $x+3y+2z+3=0$.

D. $x+3y-7z+10=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= 2(x_A-x_B)+(y_A-y_B)-2(z_A-z_B) \\ &= 2(x_A-1)+y_A-2(z_A+2)+2(1-x_B)-y_B+2(z_B+2) \\ &\le \sqrt{9\cdot[(x_A-1)^2+y_A^2+(z_A+2)^2]}+\sqrt{9\cdot[(x_B-1)^2+y_B^2+(z_B+2)^2]} \\ &\le 15+15. \quad (1) \end{aligned}$$

Đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A-1}{2}=\dfrac{y_A}{1}=\dfrac{z_A+2}{-2} \\ \dfrac{x_B-1}{2}=\dfrac{y_B}{1}=\dfrac{z_B+2}{-2} \end{cases} \Rightarrow (AB)\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-2t. \end{cases}$

Ta thấy tâm mặt cầu $I(1;0;-2) \in (AB)$.
Do vậy, khi T đạt giá trị lớn nhất thì trung điểm AB là $I(1;0;-2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 109. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính bằng 3 sao cho luôn tiếp xúc với mặt phẳng Oxy. Khi các đường tròn giao tuyến của (S) với hai mặt phẳng tọa độ còn lại có diện tích lớn nhất thì tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng nào?

A. $x+y+z-1=0$. **B.** $x-y+z=0$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $x+y=0$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta được tâm I luôn thuộc trục $Oz \Rightarrow I \in (P)\colon x+y=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{6}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$. Biết đường thẳng d cắt mặt cầu (S) theo dây cung AB. Độ dài AB là

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 4.

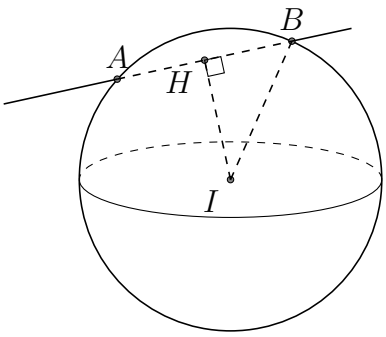
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó

$$AB = 2\sqrt{IB^2-IH^2} = 2\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(I;d)}.$$

d đi qua điểm $M(3;2;0)$ và $\vec{u}_d=(2;3;6)$. Vậy

$$\mathrm{d}(I;d)=\frac{\left|[\overrightarrow{IM};\vec{u}_d]\right|}{|\vec{u}_d|}.$$



Ta có $\overrightarrow{IM}=(2;1;0) \Rightarrow [\overrightarrow{IM};\vec{u}_d]=(6;-12;4)$. Vậy $\left|[\overrightarrow{IM};\vec{u}_d]\right|=14$.
Mà $|\vec{u}_d|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7 \Rightarrow \mathrm{d}(I;d)=2$.
Vậy $AB=2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$.
Chọn đáp án A □

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+(z+3)^2=36$. Số mặt phẳng (P) chứa trục Ox và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 0.

Lời giải.

Gọi $I(-1;4;-3)$ là tâm mặt cầu. Ta có $\mathrm{d}(I;Ox)=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5<R=6$.
Vậy mặt cầu cắt Ox tại hai điểm phân biệt. Khi đó không có mặt phẳng (P) chứa Ox và tiếp xúc với mặt cầu.
Chọn đáp án D □

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=3+t \\ y=3+2t \\ z=-2-t \end{cases}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_3\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Đường thẳng d song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

☑ Ta có (d) có VTCP $\vec{u}_d=\vec{u}_{d_3}=(1;2;3)$. Gọi $H=d\cap d_1$, $K=d\cap d_2$. Khi đó

$$H\left(3+t;3+2t;-2-t\right), K\left(5+3t';-1-2t';2-t'\right).$$
$$\overrightarrow{HK}=\left(2+3t'-t;-4-2t'-2t;4-t'+t\right).$$

☑ Mặt khác $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{HK}$ nên $\dfrac{2+3t'-t}{1}=\dfrac{-4-2t'-2t}{2}=\dfrac{4-t'+t}{3}$.

☑ Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{2+3t'-t}{1}=\dfrac{-4-2t'-2t}{2}\\ \dfrac{2+3t'-t}{1}=\dfrac{4-t'+t}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8t'=-8\\10t'-4t=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=-1\\t=-2\end{cases}\Rightarrow H\left(1;-1;0\right).$$

☑ Vậy phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-19=0$ và điểm $M\left(4;-3;8\right)$. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MA với mặt cầu (S) trong đó A là tiếp điểm. Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Tính diện tích của tam giác MAI.

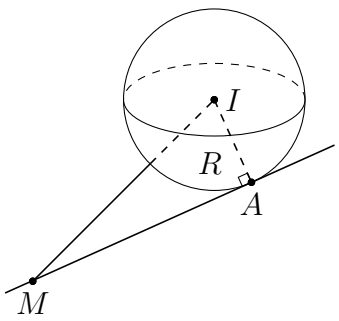
A. 125. **B.** 25. **C.** $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. **D.** 50.

Lời giải.

☑ Mặt cầu (S) có tâm $I\left(1;1;-2\right), R=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2+19}=5$.

☑ $\overrightarrow{MI}=(-3;4;-10)\Rightarrow MI=\sqrt{(-3)^2+4^2+10^2}=5\sqrt{5}$ và $MA=\sqrt{MI^2-IA^2}=\sqrt{125-25}=10$.

☑ Diện tích tam giác MAI là $S_{\Delta MAI}=\dfrac{1}{2}\cdot IA\cdot MA=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$.



Chọn đáp án B □

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=18$ và đường thẳng d: $\begin{cases}x=1\\y=2-t\\z=-4+t\end{cases}$, biết d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm tọa độ hai điểm A và B.

A. $A\left(1;1;-3\right), B\left(1;2;0\right)$. **B.** $A\left(1;1;3\right), B\left(1;-2;0\right)$.

C. $A\left(1;1;-3\right), B\left(1;-2;0\right)$. **D.** $A\left(1;-1;-3\right), B\left(1;-2;0\right)$.

Lời giải.

☑ Xét phương trình $(1+2)^2+(2-t-1)^2+(-4+t)^2=18\Leftrightarrow 2t^2-10t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=4.\end{array}\right.$

☑ Vậy $A(1;1;-3)$, $B(1;-2;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+y-z+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến: $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Điểm $B\in d\Rightarrow B(t+3;3t+3;2t)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t+2;3t+1;2t+1)$.

$\Delta\parallel(\alpha)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow t+2+3t+1-2t-1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$. Do đó phương trình của Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 116. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d=(1;1;-1)$, $\vec{u}_{d_1}=(2;1;-1)$, $\vec{u}_{d_2}=(-1;1;3)$.

Gọi (P) là mặt phẳng song song với d và chứa d_1 thì (P) đi qua $A(-1;-1;2)$ và có một VTPT là $\vec{n}_1=[\vec{u}_d,\vec{u}_{d_1}]=(0;-1;-1)$. Do đó $(P)\colon y+z-1=0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với d và chứa d_2

Ta có (Q) đi qua $B(1;2;3)$ và có một VTPT là $\vec{n}_2=[\vec{u}_d,\vec{u}_{d_2}]=(4;-2;2)$. Do đó $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$.

Khi đó, đường thẳng cần tìm Δ là giao điểm của (P) và (Q), ta có

$$\Delta\colon \begin{cases} y+z-1=0\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

Hay $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+5=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;2;2)$.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;2;1)$.

Ta có $[\vec{u}, \vec{n}] = (2;-3;2)$ là véc-tơ chỉ phương của Δ.

Mặt khác, do Δ cắt d nên Δ đi qua giao điểm M của d và mặt phẳng (P).

Tọa độ giao điểm M của d và (P) là nghiệm hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = t \\ x+2y+2z+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-1;-1).$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 118. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z-3=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $M(2;2;-4)$. **D.** $M(-2;-2;4)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC} = 0 \Rightarrow I(0;0;0)$.

Từ đó:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| = \left|4\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)\right| = 4IM \geq 4IH.$$

với H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Từ đó suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv H$. Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

Tọa độ điểm H là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \\ x+y-2z-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $H = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

Vậy, tọa độ điểm M cần tìm là $M = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=-2+3t. \end{cases}$

Tọa độ giao điểm $A(x;y;z)$ của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=-2+3t \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=1. \end{cases}$$

Như vậy $A(1;1;1)$.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;1)$.

Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d nên Δ có một vec-tơ chỉ phương là

$$[\vec{n},\vec{u}]=(5;-1;-3).$$

Do Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt d nên Δ đi qua điểm $A(1;1;1)$. Phương trình đường thẳng Δ là

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng Oxz. Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0;4;0)$ tới điểm C trong đó C là điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng Oxz là $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Gọi $C=(a;b;c)$, mặt phẳng (P) đi qua C và vuông góc với Δ có phương trình $y-b=0$. Hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng Δ là giao điểm H của mặt phẳng (P) với đường thẳng Δ. Suy ra $H=(0;b;1)$.

Tọa độ hình chiếu vuông góc K của C trên trục Ox là $K=(a;0;0)$.

Theo đề bài: $d(C;\Delta)=d(C;Ox) \Leftrightarrow CH=CK \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(1-c)^2}=\sqrt{b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2=b^2+2c-1$.

Ta có $BC = \sqrt{a^2+(b-4)^2+c^2} = \sqrt{b^2+2c-1+b^2-8b+16+c^2} = \sqrt{2(b-2)^2+(c+1)^2+6} \geq \sqrt{6}$.

Do đó $\min BC = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án C □

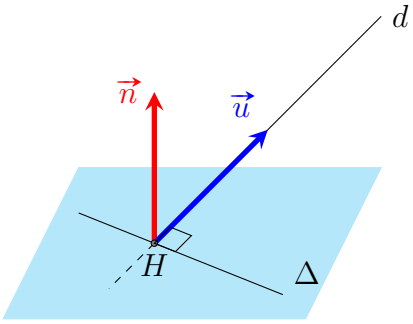
Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d có phương trình

A. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+1}{3}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z+5}{3}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+4}{7} = \dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, H là giao điểm giữa d và (P).



Tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{-3} \\ x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow H(-2;2;5).$$

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-3)$, mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;2)$.

Vì Δ nằm trong (P), cắt và vuông góc với d nên Δ qua H và có một véc-tơ chỉ phương là $[\vec{u},\vec{n}] = (-1;-7;-3) = -(1;7;3)$. Suy ra Δ có phương trình $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-6)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại A, B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{38}$. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải.

Giả sử A, B tồn tại. Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a;1-a;-1+a)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-2+3b;-1+b;2+2b)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (2a-1;2-a;a+5)$, $\overrightarrow{MB} = (3b-4;b;2b+8)$.

Vì M, A, B thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 2a-1 = k(3b-4) \\ 2-a = kb \\ a+5 = k(2b+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3kb+4k = 1 \\ a+kb = 2 \\ a-2kb-8k = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ kb = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $A(3;0;0)$, $B(4;1;6)$ và $AB = \sqrt{(4-3)^2+1^2+6^2} = \sqrt{38}$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ'.

A. $d\colon \dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{7}$.
B. $d\colon \dfrac{x+1}{-6}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{7}$.
C. $d\colon \dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{7}$.
D. $d\colon \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{7}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(2;1;-1)$.
Lấy điểm $B(1;0;3)\in\Delta$.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và đường thẳng Δ, khi đó (P) có hai véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta$ và $\overrightarrow{AB}=(0;1;2)$.
Suy ra véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AB}\right]=(3;-4;2)$.
Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng (P)

$$3(x-1)-4(y+1)+2(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-4y+2z-9=0.$$

Tọa độ giao điểm C giữa (P) và Δ' là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-4y+2z-9=0\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y+2z=9\\ 2x+y=-1\\ x-z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{13}\\ y=\dfrac{-15}{13}\\ z=\dfrac{27}{13}\end{cases}\Rightarrow C\left(\frac{1}{13};\frac{-15}{13};\frac{27}{13}\right).$$

Dễ thấy, đường thẳng d đi qua A, C và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=\overrightarrow{CA}=\left(\dfrac{12}{13};\dfrac{2}{13};-\dfrac{14}{13}\right)=\dfrac{2}{13}(6;1;-7)$.
Vậy phương trình đường thẳng d là $d\colon \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;3;1)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm I và cắt Δ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 6.

A. $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=8$.
B. $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=4$.
C. $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=10$.
D. $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=37$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;3;-1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$. Ta có $\overrightarrow{IM}=(1;0;-2)$, $d(I;\Delta)=\dfrac{|[\vec{u};\overrightarrow{IM}]|}{|\vec{u}|}=1$, từ đây suy ra bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. Do đó, phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=10$.
Chọn đáp án C □

Câu 125. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{-4}$ và mặt phẳng $(P):2x-3y+z-1=0$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P). Tìm toạ độ một véc-tơ chỉ phương của d'.

A. $(9;-10;12)$.
B. $(-46;15;47)$.
C. $(9;10;12)$.
D. $(46;15;-47)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(2;3;-4)$, $\vec{n}=(2;-3;1)$ lần lượt là vec-tơ chỉ phương của d và vec-tơ pháp tuyến của (P). Mặt phẳng $(d;d')$ có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n'}=[\vec{n};\vec{u}]=(9;10;12)$. Đường thẳng d' là giao tuyến của (P) và $(d;d')$ nên có một vec-tơ chỉ chương là $\vec{u'}=[\vec{n'};\vec{n}]=(46;15;-47)$.

Chọn đáp án D □

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và điểm $A(1;1;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là

A. $N(2;2;3)$. **B.** $P(6;6;3)$. **C.** $M(2;1;-3)$. **D.** $Q(1;1;4)$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;2;-1)$.

Gọi điểm $H(4+2t;4+2t;2-t)\in d$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=(3+2t;3+2t;3-t)$.

Để H là hình chiếu của A thì $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 2(3+2t)+2(3+2t)-(3-t)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Ta được hình chiếu $H(2;2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{-4}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-7=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{3}$. **B.** $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d_1 và d_2.

$A=d_1\cap\Delta\Rightarrow A(2a-3;-a-2;-4a-2)$.

$B=d_2\cap\Delta\Rightarrow B(3b-1;2b-1;3b+2)$.

Véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}=(3b-2a+2;2b+a+1;3b+4a+4)$.

$\Delta\perp(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;2;3)$ của mặt phẳng (P)

$\Leftrightarrow \dfrac{3b-2a+2}{1}=\dfrac{2b+a+1}{2}=\dfrac{3b+4a+4}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5a-4b=3\\10a-6b=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\Rightarrow A(-5;-1;2)\\b=-2\Rightarrow B(-7;-5;-4).\end{cases}$

Đường thẳng Δ qua $A(-5;-1;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;3)$ nên $\Delta\colon \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.

Chọn đáp án B □

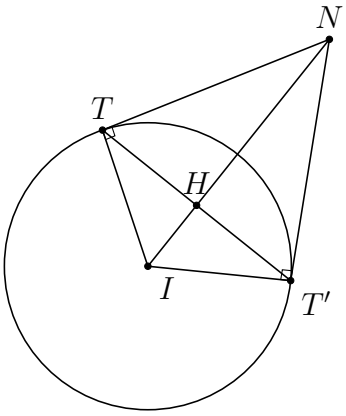
Câu 128. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=1$.

$\begin{cases} IT \perp (P) \Rightarrow IT \perp d \\ IT' \perp (P') \Rightarrow IT' \perp d \end{cases} \Rightarrow d \perp (ITT')$.



Gọi $N = d \cap (ITT') \Rightarrow N$ là hình chiếu của I trên d.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (1;1;-1)$ và có phương trình tham số $\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$

$\Rightarrow N(t, 2+t, -t)$ và $\overrightarrow{IN} = (t-1; 2+t; -t+1)$.

$$\overrightarrow{IN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow N(0;2;0) \Rightarrow \begin{cases} IN = \sqrt{6} \\ \overrightarrow{IN} = (-1;2;1). \end{cases}$$

Ta có $IH \cdot IN = IT^2 \Rightarrow IH = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Phương trình đường thẳng $IN: \begin{cases} x = -u \\ y = 2+2u \\ z = u \end{cases} \Rightarrow H(-u; 2+2u; u)$ và $\overrightarrow{IH} = (-u-1; 2+2u; u+1)$.

$$IH = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow IH^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (-u-1)^2 + (2u+2)^2 + (u+1)^2 = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -\dfrac{5}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right) \\ u = -\dfrac{7}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{7}{6}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{7}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{6}\right). \end{array}\right.$$

Vì $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IN} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 129. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{3}$. Phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2 là

A. $5x-4y-z-16=0$. **B.** $5x-4y+z+16=0$.

C. $5x-4y+z-16=0$. **D.** $5x+4y+z-16=0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Véc-tơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u_1} = (1;1;1)$ và $\vec{u_2} = (1;2;3)$. Suy ra một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (5;-4;1)$.

Mặt khác $M(3;1;5) \in d_2 \subset (P) \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình $(P): 5(x-3)-4(y-1)+1(z-5)=0 \Leftrightarrow 5x-4y+z-16=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 130. Cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với Δ. Véc-tơ chỉ phương của d là

A. $\vec{u} = (-3;0;2)$. **B.** $\vec{u} = (0;3;1)$. **C.** $\vec{u} = (2;-1;2)$. **D.** $\vec{u} = (1;-4;-2)$.

Lời giải.

Gọi H là giao điểm của d và Δ, khi đó giá của $\overrightarrow{MH}$ vuông góc với đường thẳng Δ.
Ta có $H\left(1+2t;-1+t;-t\right), \overrightarrow{MH}=(2t-1;t-2;-t)$ và véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-1)$.
Do $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)+1(t-2)-1(-t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{MH}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ hay $\vec{u}=(1;-4;-2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;1;-3)$, vuông góc với Ox và song song với mặt phẳng (P): $2x-3y+4z-1=0$ là

A. $\begin{cases}x=2\\y=1+4t\\z=-3+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2\\y=-1+4t\\z=3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2t\\y=t+4\\z=-3t+3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2t\\y=-t+4\\z=-3t+3\end{cases}$.

Lời giải.

Vì $d\perp Ox$ và song song với (P) nên có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{i}\right]=(0;4;3)$.
Vậy phương trình của đường thẳng d là $\begin{cases}x=2\\y=1+4t\\z=-3+3t.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 132. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+5}{-1}$. **B.** $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{4}$.

C. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+1}{-5}$.

Lời giải.

Gọi $I=\Delta\cap d$. Khi đó $I(-1+2t;3t;-1-t)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$, $\overrightarrow{AI}=(2t-2;3t-2;-t)$, $\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right]=(8-15t;6t-8;10-12t)$.
Khoảng cách từ B đến d là $\mathrm{d}(B,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AI}\right|}=\sqrt{\dfrac{405t^2-576t+228}{14t^2-20t+8}}$.
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{405t^2-576t+228}{14t^2-20t+8}$.
Ta có $f'(t)=\dfrac{-36t^2+96t-48}{(14t^2-20t+8)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow -36t^2+96t-48=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2}{3}\\t=2.\end{array}\right.$
Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{405}{14}$	$\searrow$	27	$\nearrow$	29	$\searrow$	$\frac{405}{14}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $d(B,d)$ nhỏ nhất khi $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 27 tại $t=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=\left(\dfrac{1}{3};2;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Khi đó véc-tơ $\vec{u}=3\overrightarrow{AI}=(1;6;-5)$ là véc-tơ chỉ phương của d.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+1}{-5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(6;-7;0)$. **B.** $(3;-2;1)$. **C.** $(-3;8;-3)$. **D.** $(0;3;-2)$.

Lời giải.

Ta gọi AB cắt d tại điểm $M(1+2m;-1+m;2-m)\in d$.

$\overrightarrow{AM}=(2m;m-3;3-m)$, theo yêu cầu bài toán AB vuông góc d, ta có

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow 2\cdot 2m+m-3+m-3=0\Rightarrow m=1\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;-2;2).$$

Đường thẳng AB đi qua A nhận $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=(1;-1;1)$ là véc-tơ chỉ phương, ta có phương trình AB là

$$AB\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}.$$

Gọi $B(1+t;2-t;-1+t)\in AB$. Lại có điểm $B\in(P)$ nên

$$1+t+2-t+2(-1+t)+1=0\Rightarrow t=-1.$$

Vậy $B(0;3;-2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Ta có $d_1\colon \begin{cases} x=3-t_1 \\ y=3-2t_1 \\ z=-2+t_1 \end{cases}$. và $d_2\colon \begin{cases} x=5-3t_2 \\ y=-1+2t_2 \\ z=2+t_2 \end{cases}$. Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Giả sử đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại A, B. Tọa độ của A, B có dạng $A(3-t_1;3-2t_1;-2+t_1)$, $B(5-3t_2;-1+2t_2;2+t_2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(2-3t_2+t_1;-4+2t_2+2t_1;4+t_2-t_1)$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;3)$. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên

$$\frac{2-3t_2+t_1}{1}=\frac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\frac{4+t_2-t_1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2} \\ \dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=2 \\ t_2=1. \end{cases}$$

Do đó $A(1;-1;0)$, $B(2;-1;3)$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}=(1;2;3)$ nên có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của cạnh MN.

A. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$.
B. $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.
C. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.
D. $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải.

Giả sử $M(x;y;z)$ và $N(-2+2t;1+t;1-t)$.

Vì $M\in(P)$ và A là trung điểm của MN nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y+z-10=0 \\ x+2t-2=2 \\ y+t+1=6 \\ z-t+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z=10 \\ x=4-2t \\ y=5-t \\ z=3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-2t)-(5-t)+(3+t)=10 \\ x=4-2t \\ y=5-t \\ z=3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ x=8 \\ y=7 \\ z=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(8;7;1)$ và $N(-6;-1;3)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 136. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;0)$, $B(2;2;2)$, $C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để thể tích của tứ diện $MABC$ bằng 3.

A. $M\left(-\dfrac{15}{2};\dfrac{9}{4};-\dfrac{11}{2}\right)$; $M\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.
B. $M\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$; $M\left(-\dfrac{15}{2};\dfrac{9}{4};\dfrac{11}{2}\right)$.
C. $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{9}{4};\dfrac{11}{2}\right)$.
D. $M\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{9}{4};\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;2;1)$, $\vec{n}_{(ABC)}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-3;-6;6)$. Phương trình mặt phẳng $(ABC): x+2(y-1)-2z=0\Leftrightarrow x+2y-2z-2=0$. Dễ thấy tam giác ABC vuông tại A suy ra $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{9}{2}\Rightarrow d(M,(ABC))=\dfrac{3V_{M.ABC}}{S_{ABC}}=2$.

$M\in d\Rightarrow M(2t+1;-t-2;2t+3)$, $d(M,(ABC))=\dfrac{|-4t-10|}{3}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{5}{4}\\ t=-\dfrac{17}{4}\end{array}\right.$.

Với $t=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

Với $t=-\dfrac{17}{4}\Rightarrow M\left(-\dfrac{15}{2};\dfrac{9}{4};-\dfrac{11}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $x+y+z+4=0$. **B.** $2x+2y+2z+8=0$.

C. $x+y+z-4=0$. **D.** $2x+2y+2z-17=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=2$. Ta có điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).
Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in(S)$. Khi đó $\overrightarrow{IM}=(x_0-1;y_0-1;z_0-1)$; $\overrightarrow{AM}=(x_0-2;y_0-2;z_0-2)$.
Ta được hệ:

$$\begin{cases}(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2=1\\ (x_0-1)(x_0-2)+(y_0-1)(y_0-2)+(z_0-1)(z_0-2)=0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0-2y_0-2z_0+2=0\\ x_0^2+y_0^2+z_0^2-3x_0-3y_0-3z_0+6=0\end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta có $x_0+y_0+z_0-4=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;6;-5)$, $B(6;-4;7)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-10=0$. Điểm $M(x;y;z)$ trên (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tổng $x-2y+3z$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải.

Gọi $I(1;1;1)$ là trung điểm của AB khi đó dù M, A, B có thẳng hàng hay không ta đều có $MI^2=\dfrac{MA^2+MB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}\Rightarrow MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$.
Vậy MA^2+MB^2 nhỏ nhất khi MI^2 nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+2t.\\ z=1+t\end{cases}$

Vậy M là giao điểm của d và (P) nên tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y+z-10=0 \\ x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$

$\Rightarrow (1+t)+2(1+2t)+(1+t)-10=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow M(2;3;2) \Rightarrow x-2y+3z=2-2\cdot 3+3\cdot 2=2.$

Chọn đáp án B □

Câu 139. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(0;0;4)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Tìm phương trình tham số của đường thẳng OH.

A. $\begin{cases} x=4t \\ y=3t \\ z=-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=6t \\ y=4t \\ z=3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4t \\ y=3t \\ z=2t \end{cases}$.

Lời giải.

Do tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và H là trực tâm tam giác ABC nên $OH \perp (ABC)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ hay $6x+4y+3z-12=0$.

Vì $OH \perp (ABC)$ nên đường thẳng OH có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(6;4;3)$.

Vậy, phương trình tham số của đường thẳng OH là: $\begin{cases} x=6t \\ y=4t \\ z=3t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 140. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ là

A. a. **B.** $\frac{2a}{5}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{8}$.

Lời giải.

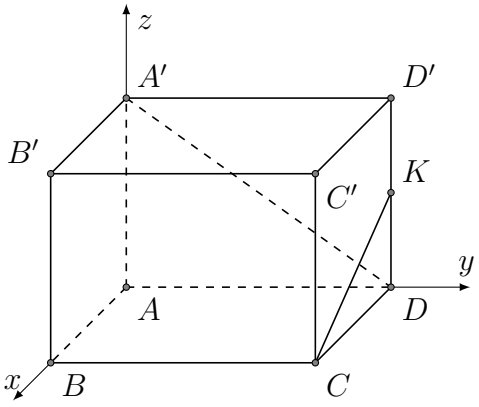
Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình bên

Ta có $A'(0;0;a)$, $D(0;a;0)$, $D'(0;a;a)$, $C(a;a;0)$.

Gọi K là trung điểm $DD' \Rightarrow K\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$

Từ đó $\overrightarrow{CK}=\left(-a;0;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D}=(0;a;-a)$, $\overrightarrow{CD}=(-a;0;0)$

Suy ra $\mathrm{d}(CK,A'D)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CK},\overrightarrow{A'D}\right]\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CK},\overrightarrow{A'D}\right]\right|}=\frac{a}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 141. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$.

Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1), (S_2) đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C và D?

A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. Vô số.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Giả sử $(\alpha): ax+by+cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2>0$.

$\overrightarrow{CD}=(4;2;-4)=2(2;1;-2)$

$(\alpha)\parallel CD \Rightarrow 2a+b-2c=0$.

$\mathrm{d}\,(A,(\alpha))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b-3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$.

$\mathrm{d}\,(B,(\alpha))=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|3a+3b-c+2d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$.

Suy ra $|a+2b-3c+d|=|3a+3b-c+2d|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a+2b-3c+d=3a+3b-c+2d\\ &a+2b-3c+d=-3a-3b+c-2d \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2a+b+2c+d=0\\ &4a+5b-4c+3d=0. \end{aligned}\right.$$

- TH1: $\begin{cases} 2a+b-2c=0\\ 2a+b+2c+d=0\\ |a+2b-3c+d|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2c-2a\\ d=-4c\\ |-3a-3c|=3\sqrt{5a^2-8ac+5c^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2a^2-5ac+2c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a=2c\\ &a=\frac{1}{2}c. \end{aligned}\right.$$

Với $a=2c$, chọn $c=1\Rightarrow a=2$, $b=-2$, $d=-4$. Suy ra $(\alpha): 2x-2y+z-4=0$ (loại vì $CD\subset(\alpha)$).

Với $a=\dfrac{1}{2}c$, chọn $c=2\Rightarrow a=1$, $b=2$, $d=-8$. Suy ra $(\alpha): x+2y+2z-8=0$ (thỏa mãn $CD\parallel(\alpha)$).

- TH2: $\begin{cases} 2a+b-2c=0\\ 4a+5b-4c+3d=0\\ |a+2b-3c+d|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2c-2a\\ d=2a-2c\\ |-a-c|=3\sqrt{5a^2-8ac+5c^2} \end{cases}$

$\Rightarrow 22a^2-37ac+22c^2=0 \Leftrightarrow a=c=0\Rightarrow b=0$ (loại).

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 142. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+(y+2)^2+z^2=5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+m}{1}=\dfrac{z-2m}{-3}$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B**. $m=\pm\dfrac{1}{3}$. **C**. $m=\dfrac{1}{2}$. **D**. $m=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;0)$, bán kính $r=\sqrt{5}$, đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-3)$. Ta thấy $M(1;-m;2m)$ thuộc đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất khi $d(I,\Delta)<r$ và $d(I,\Delta)$ nhỏ nhất. Ta có

$$d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\frac{21m^2+54}{14}}\geq\sqrt{\frac{27}{7}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=0$ và $\sqrt{\dfrac{27}{7}}<\sqrt{5}$. Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình tham số của phân giác góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2.

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1-3t \\ z=3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1+3t \\ z=3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=3t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $d_1 \cap d_2 = I(1;-1;0)$.

Trên d_1 ta lấy điểm $A(3;3;-2)$, trên d_2 lấy điểm B sao cho $IA=IB$ và $\triangle IAB$ cân tại I có đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác.

Gọi $B(2+u;-2-u;2+2u)$. Ta có $IA=IB \Leftrightarrow 6(u+1)^2=24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=-3. \end{array}\right.$

Vậy $B(3;-3;4)$ hoặc $B(-1;1;-4)$.

Chọn điểm $B(-1;1;4)$ để $\widehat{BIA}$ nhọn, gọi $M(1;2;-3)$ là trung điểm của AB suy ra IM là đường phân giác cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 144. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa AM và SB.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{19}}{19}$.

Lời giải.

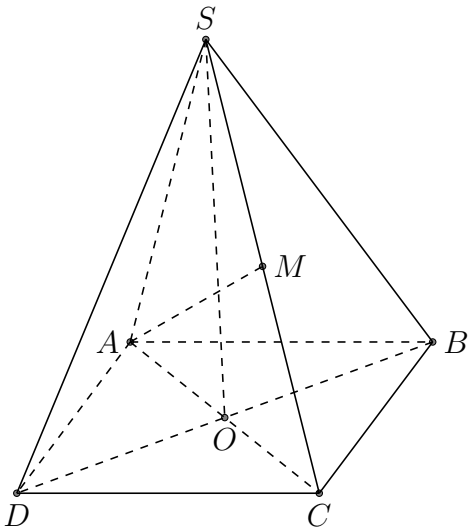
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O là tâm của đáy, $A \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$. Theo đề bài ta có $A(a;0;0), B(0;a;0), C(-a;0;0), S(0;0;a)$.

Vì M là trung điểm của SC nên $M\left(-\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}\left(-\dfrac{3a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right); \overrightarrow{SB}(0;a;-a); \overrightarrow{AS}(-a;0;a)$.

Khi đó $d(AM,SB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AM}\right]\cdot\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AM}\right]\right|}$

$=\dfrac{a^3}{\dfrac{a^2\sqrt{19}}{2}}=\dfrac{2a\sqrt{19}}{19}$.



Chọn đáp án D □

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha)\colon y+2z=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$,

$d_2\colon \begin{cases} x=2-t' \\ y=4+2t' \\ z=4 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong (α) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{4}$.
B. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{-4}$.
C. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.
D. $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1, d_2. Mà Δ nằm trong (α) nên
$A=(\alpha)\cap d_1, B=(\alpha)\cap d_2$
Điểm $A(1-t;t;4t)$ và thỏa mãn phương trình (α) nên $t+2\cdot 4t=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow A(1;0;0)$.
Điểm $B\,(2-t';4+2t';4)$ và thỏa mãn phương trình (α) nên
$4+2t'+2\cdot 4=0\Leftrightarrow t'=-6\Rightarrow B(8;-8;4)$.
Do đó $\overrightarrow{AB}(7;-8;4)$, phương trình Δ là: $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.
Chọn đáp án C □

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S):
$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.
Viết phương trình chính tắc các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng d_1, d_2.

A. $3x-y-z+7=0$.
B. $3x-y-z-15=0$.
C. $3x-y-z-7=0$.
D. $3x-y-z+7=0$ hoặc $3x-y-z-15=0$.

Lời giải.

d_1 có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;1;2)$ đi qua $A(5;-1;1)$.
d_2 có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(1;2;1)$ đi qua $B(-1;0;0)$.
Mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-3;1;1)$.
Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x-y-z+m=0$.
Mặt cầu (S) có tâm và bán kính lần lượt là $I(1;-1;0), R=\sqrt{11}$.
Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có

$$d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|3+1+m|}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}\Leftrightarrow|4+m|=11\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=7\\m=-15\end{bmatrix}$$

.
Với $m=7$ mặt phẳng (P) có dạng $3x-y-z+7=0$, kiểm tra thấy $A(5;-1;1)$ và
$B(-1;0;0)$ không thuộc (P) nên nhận $(P)\colon 3x-y-z+7=0$
Với $m=-15$ mặt phẳng (P) có dạng $3x-y-z-15=0$ thay tọa độ $A(5;-1;1)$ thấy thỏa mãn nên loại trường hợp này.
Vậy $(P)\colon 3x-y-z+7=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $A(2;1;4)$.
Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

A. $T=8$. **B.** $T=62$. **C.** $T=13$. **D.** $T=\sqrt{5}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

$H \in d \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t)$.

Độ dài $AH = \sqrt{(t-1)^2+(t+1)^2+(2t-3)^2} = \sqrt{6t^2-12t+11} = \sqrt{6(t-1)^2+5} \geqslant \sqrt{5}$.

Độ dài AH nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t = 1 \Rightarrow H(2;3;3)$.

Vậy $a = 2$, $b = 3$, $c = 3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 62$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 148. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và điểm $I(2;1;-1)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ cắt trục Ox tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $AB = 2\sqrt{6}$. **B.** $AB = 24$. **C.** $AB = 4$. **D.** $AB = \sqrt{6}$.

Lời giải.

$\Delta\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ qua $A(-2;1;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;2;-1)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ nên bán kính của mặt cầu là

$$R = \mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 2\sqrt{2}.$$

Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 8$.

Mặt cầu (S) cắt trục Ox tại $A\left(2+\sqrt{6};0;0\right)$ và $B\left(2-\sqrt{6};0;0\right)$.

Suy ra độ dài đoạn $AB = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 149. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = t \\ y = -1-4t \\ z = 6+6t \end{cases}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-5}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(1;-1;2)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{17} = \dfrac{z-2}{9}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{4}$.

C. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{u}_{d_1} = (1;-4;6) \\ \vec{u}_{d_2} = (2;1;-5) \end{cases}$. Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với d_1, d_2.

Suy ra $\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = (14;17;9)$. Vậy phương trình $d\colon \dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{17} = \dfrac{z-2}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 150. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;-5;-4)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-z+7 = 0$ tại điểm M. Tìm k, biết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

A. $k = \dfrac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = -2$. **D.** $k = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-7;-7)$, phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-7t\\z=3-7t.\end{cases}$

Gọi $M=AB\cap(P)$ khi đó tạo độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+3y-z+7=0\\x=1-2t\\y=2-7t\\z=3-7t\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{MA}=\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{14}{3}\right)$, $\overrightarrow{MB}=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$.

Chọn đáp án C □

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha):x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2-1)$. Đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Giả sử Δ cắt d tại $B(3+t;3+3t;2t)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(2+t;1+3t;1+2t)$.

Do Δ song song với mặt phẳng (α) suy ra $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 2+t+1+3t-1-2t=0\Leftrightarrow t=-1$.

Từ đó suy ra Δ đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$, suy ra phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 152. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y+z-4=0$ và đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;1)$.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2;1;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=-2+3t.\end{cases}$

Xét phương trình $-1+2t+2t-2+3t-4=0\Leftrightarrow 7t-7=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $A(1;1;1)$. Ta có: $A\in\Delta$.

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_d\right]=(5;-1;-3)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và $d_1\colon \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}$ với t, $t'\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

A. $a=0$. **B.** $a=1$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=2$.

Lời giải.

Xét hệ $\begin{cases} 1+at=1-t' \\ t=2+2t' \\ -1+2t=3-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} at+t'=0 \\ t=2 \\ t'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ t=2 \\ t'=0 \end{cases} \Rightarrow a=0$ thì d cắt d'.

Chọn đáp án A □

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$ cho $(\alpha)\colon y+2z=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$; $d_2\colon \begin{cases} x=2-t' \\ y=4+2t' \\ z=4 \end{cases}$.

Đường thẳng Δ nằm trong (α) và cắt hai đường thẳng d_1; d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{-4}$. **B.** $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$. **C.** $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$. **D.** $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{4}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d_1, d_2 và mặt phẳng (α).

Khi đó $A(1-t;t;4t)$ và $B(2-t';4+2t';4)$ thay vào phương trình (α) ta được $\begin{cases} t=0 \\ t'=-6 \end{cases}$.

$\Rightarrow A(1;0;0)$ và $B(8;-8;4) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-2=0$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d?

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

C. $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$.

$I\in d \Rightarrow I\,(1+t;2+2t;3+t)$.

$I\in(\alpha) \Rightarrow 1+t+2+2t-(3+t)-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I\,(2;4;4)$.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2;1)$.

Véc-tơ chỉ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Ta có $[\vec{u},\vec{n}]=(-3;2;-1)$.

Đường thẳng cần tìm qua điểm $I(2;4;4)$, có một véc-tơ chỉ phương là $[\vec{u},\vec{n}]=(-3;2;-1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

Đường thẳng này trùng với đường thẳng $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x-z-3=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi A là điểm thuộc tia Oz, gọi B là hình chiếu của A lên (α). Biết rằng tam giác MAB cân tại M. Diện tích của tam giác MAB bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{123}}{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi $A(0;0;a)$. Đường thẳng AB qua A và vuông góc với (α) nên có phương trình $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=a-t\end{cases}$.

B là hình chiếu của A lên (α) nên tọa độ B thỏa mãn hệ $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=a-t\\x-z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a+3}{2}\\y=0\\z=\dfrac{a-3}{2}\end{cases}$.

Suy ra $B\left(\dfrac{a+3}{2};0;\dfrac{a-3}{2}\right)$.

Tam giác MAB cân tại M nên

$$MA=MB\Leftrightarrow 1+1+(1-a)^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1+\left(\frac{a-5}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-3.\end{array}\right.$$

☑ Nếu $a=3$ thì tọa độ $A(0;0;3)$, $B(3;0;0)$. Diện tích tam giác MAB là

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

☑ Nếu $a=-3$ thì tọa độ $A(0;0;-3)$ và $B(0;0;-3)$ trùng nhau nên không thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-1=0$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$. **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của d và (α). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}\\\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}\\x+y-z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\y-z=1\\x+y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow A(0;0;-1).$$

Đường thẳng d qua điểm $A(3;3;2)$. Gọi d' là đường thẳng qua A và vuông góc (α), d' có phương trình là $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.
Gọi B là giao điểm của d' và (α). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}\\ \dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}\\ x+y-z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ -y-z=-5\\ x+y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\\ z=3\end{cases}\Rightarrow B(2;2;3).$$

Khi đó, đường thẳng Δ qua A, B chính là hình chiếu vuông góc của d lên (α). Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;4)$. Gọi I là trung điểm AB suy ra $I(1;1;1)$.
Đường thẳng Δ qua I nhận một véc-tơ chỉ phương $\vec{n}=(1;1;2)$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;3)$.
Đường thăng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $I(1;1;1)$.
Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d nên đường thẳng Δ đi qua giao điểm $I(1;1;1)$ của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và nhận $\vec{n}=[\vec{n},\vec{u}]=(5;-1;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Vậy đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

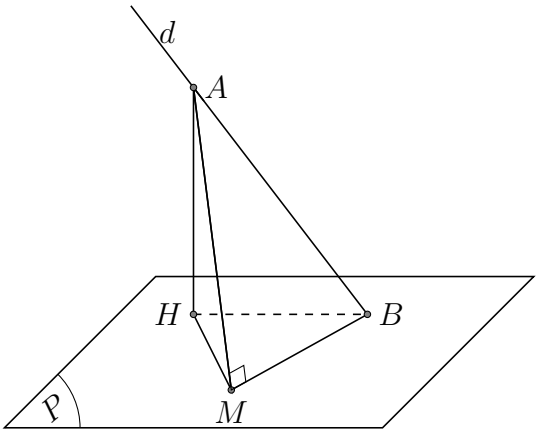
Chọn đáp án A □

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt P tại điểm B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2;-1;3)$. **B.** $I(-1;-2;3)$. **C.** $K(3;0;15)$. **D.** $J(-3;2;7)$.

Lời giải.

Phương trình d: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = -3 - 4t \end{cases}$



Đường thẳng d cắt P tại $B(-2;-2;1)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên (P).

Ta có: $H(-3;-2;-1)$.

Vì $MB \perp MA; MB \perp AH$ nên $MB \perp MH$ suy ra $MB \leq BH$.

Do đó: MB lớn nhất bằng BH khi $M \equiv H$.

Vậy MB đi qua B, nhận $\overrightarrow{BH}$ là vectơ chỉ phương.

Phương trình MB: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ do đó MB đi qua điểm $I(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{3}$; $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = m \end{cases}$.

Gọi S là tập hợp tất cả các số m sao cho d_1, d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. -11. **B**. 12. **C**. -12. **D**. 11.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2 là $\vec{u}_1 = (2;1;3)$, $\vec{u}_2 = (1;1;0)$. Khi đó $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-3;3;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 song song với d_2. Tức là, (P) qua $A(1;0;0)$ và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến. Ta có phương trình (P): $3x - 3y - z - 3 = 0$.

Xét điểm $B(1;2;m) \in d_2$. Do d_1, d_2 chéo nhau nên $B \notin (P) \Leftrightarrow m \neq -6$. Lại có

$$\mathrm{d}(d_1, d_2) = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \mathrm{d}(B, (P)) = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|3 - 6 - m - 3|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -1 \\ m = -11. \end{bmatrix}$$

Vậy tổng các phần tử của S là $-1 - 11 = -12$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $2x+y-2z+9 = 0$ và ba điểm $A(2;1;0), B(0;2;1), C(1;3;$ Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_M + y_M + z_M = 1$. **B**. $x_M + y_M + z_M = 4$. **C**. $x_M + y_M + z_M = 3$. **D**. $x_M + y_M + z_M = 2$.

Lời giải.

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} 2(2-a) - 3a - 4(1-a) = 0 \\ 2(1-b) + 3(2-b) - 4(3-b) = 0 \\ -2c + 3(1-c) - 4(-1-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow I(0;-4;7).$$

Khi đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MI}-4\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IC}\right|=IM.$
Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là hình chiếu của I trên (α).
Do $M(x;y;z)$ là hình chiếu của I trên (α) nên ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{IM}=k\vec{n}\\ M\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\ y+4=k\\ z-7=-2k\\ 2x+y-2z+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\ x=2\\ y=-3\\ z=5.\end{cases}$$

Vậy $M(2;-3;5)\Rightarrow x_M+y_M+z_M=4.$
Chọn đáp án B □

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+3}{4}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

A. $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+9}{-1}.$ **B.** $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}.$
C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}.$ **D.** $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}.$

Lời giải.

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1(1;-1;1)$, $\vec{u}_2(2;-1;4)$.
Gọi Δ là đường vuông góc chung giữa d_1 và d_2, suy ra Δ có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u}_\Delta=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;-2;1).$$

Giả sử Δ giao với d_1, d_2 lần lượt tại $M(3+m;-1-m;4+m)$, $N(2+2n;4-n;-3+4n)$, khi đó ta có $\overrightarrow{MN}=(-m+2n-1;m-n+5;-m+4n-7)$.
Do Δ là đường vuông góc chung, suy ra

$$\begin{cases}\vec{u}_1\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ \vec{u}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3m+7n-13=0\\ -7m+21n-35=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\ n=1\end{cases}.$$

Từ đó suy ra đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ và đi qua điểm $M(1;1;2)$.
Vậy ta có phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}.$
Chọn đáp án C □

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng $(P):x-y-z-1=0$ và cắt đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đó.

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-3}.$ **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{-3}.$
C. $\dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-1}.$ **D.** $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}.$

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;-1)$.
Gọi $N(-1-2n;1+n;1+3n)$ là giao điểm giữa hai đường thẳng Δ và d, suy ra $\overrightarrow{MN}=(-2-2n;n;3+3n)$.

Do $d \parallel (P)$ nên $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow -2-2n-n-3-3n = 0 \Leftrightarrow n = -\dfrac{5}{6}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{2}{6}; -\dfrac{5}{6}; \dfrac{3}{6}\right) = -\dfrac{1}{6}(2;5;-3)$.

Vậy ta có phương trình đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+2}{-3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$; $d_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-6}{3}$ chéo nhau. Đường vuông chung của hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

B. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

D. $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải.

☑ d_1 có 1 VTCP $\vec{u}_1 = (1;1;-1)$ và d_2 có 1 VTCP $\vec{u}_2 = (1;2;3)$.

☑ Lấy $A \in d_1 \Rightarrow A(1+s;-2+s;3-s)$ và $B \in d_2 \Rightarrow B(t;1+2t;6+3t)$.
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1-s+t;3-s+2t;3+s+3t)$.

Ta có AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 khi $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-1-s+t)+1(3-s+2t)-1(3+s+3t)=0 \\ 1(-1-s+t)+2(3-s+2t)+3(3+s+3t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3s = 1 \\ 14t = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -\dfrac{1}{3} \\ t = -1. \end{cases}$$

Đường vuông góc chung của d_1, d_2 nhận $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ làm VTCP và đi qua điểm $B(-1;-1;3)$ nên có phương trình $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 165. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}.$$

Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$ là

A. $x^2+y^2+(z+2)^2 = 16$.

B. $x^2+y^2+(z+2)^2 = 25$.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 16$.

D. $(x+2)^2+y^2+z^2 = 25$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2;3;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;2;-1)$, $\left[\vec{a}, \overrightarrow{AM}\right] = (-7;-2;10)$, $\mathrm{d}(A,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{|\vec{a}|} = 3$.

Mặt cầu tâm A có bán kính $R = \sqrt{\dfrac{BC^2}{4} + \mathrm{d}^2(A,\Delta)} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+(z+2)^2 = 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 166. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

A. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{5}$.
B. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{5}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.
D. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-5}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;0)\Rightarrow AB^2=10$,
$\overrightarrow{AC}=(-3;1;2)\Rightarrow AC^2=14$,
$\overrightarrow{BC}=(-4;-2;2)\Rightarrow BC^2=24$.
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A
$\Rightarrow$ Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm $BC\Rightarrow I(0;2;0)$.
Đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc-tơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(6;-2;10)=2(3;-1;5)$.
Vậy phương trình $d\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{5}\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{5}$
Chọn đáp án A □

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt cầu (S) lần lượt có phương trình là $d\colon \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{2}$; $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-18=0$. Biết d cắt (S) tại hai điểm M,N thì độ dài đoạn MN là
A. $MN=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **B.** $MN=\dfrac{20}{3}$. **C.** $MN=\dfrac{16}{3}$. **D.** $MN=8$.

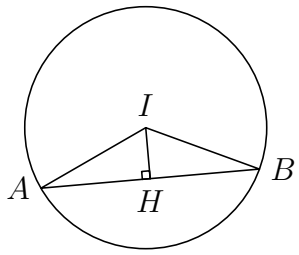
Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2-(-18)}=2\sqrt{6}$ và tâm $I(1;-2;-1)$.
Khoảng cách từ I đến d là $d(I,(d))=\dfrac{|[\overrightarrow{MI},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{116}}{3}$.
Gọi H là trung điểm của MN, theo định lý pytago ta có $HM^2=R^2-IH^2=\dfrac{10}{3}\Rightarrow MN=\dfrac{20}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 168. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-2z-4=0$ và $(\beta)\colon 2x-2y-z+1=0$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B thỏa mãn $AB=8$ khi và chỉ khi
A. $m=12$. **B.** $m=-12$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{13-m}$.



Do $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)\Rightarrow\Delta\colon\begin{cases}x=2t\\y=1+t\\z=-1+2t\end{cases}$
$\Rightarrow\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=(2;1;2)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $\Delta\Rightarrow H(2t;1+t;-1+2t)$
$\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(2t+2;t-2;2t-1)$.
Mà $IH\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow t=0$. Suy ra $IH=3$.
Như vậy $R^2=IH^2+\dfrac{1}{4}AB^2\Rightarrow m=-12$.

Chọn đáp án B □

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị $T=a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 10.

Lời giải.

Vì $S_{\text{MAB}}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot \text{d}(M,AB)$ nên S_{MAB} nhỏ nhất khi $\text{d}(M,AB)$ nhỏ nhất.

Phương trình của $AB\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2 \end{cases}$. Dễ dàng kiểm tra AB và d chéo nhau.

Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng AB. Khi đó $\text{d}(M,AB)=MH$ nhỏ nhất khi MH là đoạn vuông góc chung của d và AB.

Ta có

$M\in d\Rightarrow M(-1+s;s;1+s)$, $H\in AB\Rightarrow H(t;-1+2t;2)$, $\overrightarrow{MH}=(t-s+1;2t-s-1;1-s)$.

Véc-tơ chỉ phương của d và AB theo thứ tự là $\vec{u}=(1;1;1)$, $\vec{v}=(1;2;0)$.

Vì $\begin{cases} \overrightarrow{MH}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{MH}\perp\vec{v} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 1(t-s+1)+1(2t-s-1)+1(1-s)=0 \\ 1(t-s+1)+2(2t-s-1)+0(1-s)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ s=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Vậy $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{3}\right)$. Từ đó $T=\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{4}{3}+3\cdot\dfrac{7}{3}=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-2z+9=0$ và ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;3;-1)$. Điểm $M\in(\alpha)$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_{\text{M}}+y_{\text{M}}+z_{\text{M}}=1$. **B**. $x_{\text{M}}+y_{\text{M}}+z_{\text{M}}=4$. **C**. $x_{\text{M}}+y_{\text{M}}+z_{\text{M}}=3$. **D**. $x_{\text{M}}+y_{\text{M}}+z_{\text{M}}=2$.

Lời giải.

Gọi $G(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Ta có

$\overrightarrow{GA}=(2-a;1-b;-c)$, $\overrightarrow{GB}=(-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{GC}=(1-a;3-b;-1-c)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2-a)+3(-a)-4(1-a)=0 \\ 2(1-b)+3(2-b)-4(3-b)=0 \\ 2(-c)+3(1-c)-4(-1-c)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-4 \\ c=7 \end{cases}\Rightarrow G(0;-4;7).$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}&=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)-4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right) \\ &=\overrightarrow{MG}+\left(2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Từ đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MG}\right|$, đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu của G lên (α).

Phương trình của đường thẳng d qua G và vuông góc với (α) là $\begin{cases} x=2t \\ y=-4+t. \\ z=7-2t \end{cases}$

Điểm M là giao của d và (α). Giải hệ $\begin{cases} x=2t \\ y=-4+t \\ z=7-2t \\ 2x+y-2z+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-3;5).$

Vậy $x_{\mathrm{M}}+y_{\mathrm{M}}+z_{\mathrm{M}}=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$. $H(a;b;c)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{38}{9}$. **B.** $\dfrac{34}{11}$. **C.** $\dfrac{30}{11}$. **D.** $\dfrac{11}{34}$.

Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y-2z+3=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\Delta: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1, d_2.

Khi đó $A(2m-1;-m+1;m+1), B(n+1;n+2;2n-1)$. Do $A, B \in (P)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m-1+m-1-2m-2+3=0 \\ n+1-n-2-4n+2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1. \end{cases}$$

Ta được $A(1;0;-2), B(2;3;1)$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ nhận $\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương, như vậy phương trình Δ là:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(4;3;4)$, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. $2x+y+2z-19=0$. **B.** $2x+y-2z-10=0$.

C. $2x+2y+z-18=0$. **D.** $x-2y+2z-1=0$.

Lời giải.

Ta có Δ đi qua điểm $A(6;2;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta}(-3;2;2)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.

Gọi $\vec{n}_P=(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Do $(P) \parallel (\Delta) \Rightarrow \vec{n}_P.\vec{u}_{\Delta}=0 \Rightarrow a=\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{3}c$.

Phương trình (P) có dạng

$$a(x-4)+b(y-3)+c(z-4)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-4a-3b-4c=0.$$

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $\mathrm{d}(I;(P))=R$, hay:

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b+3c-4a-3b-4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3 \Leftrightarrow |-3a-b-c|=3\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Thay $a=\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{3}c$ vào phương trình trên ta được:

$$2b^2-5bc-2c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{c}{2} \\ b=2c. \end{array}\right.$$

- ☑ $b=\dfrac{c}{2}$. Chọn $c=2$ suy ra $b=1, a=2$, $\vec{n}_P=(2;1;2)$.
  Vậy $(P)\colon 2x+y+2z-19=0$, do $A\notin(P)$ nên (P) tìm được thỏa mãn.
- ☑ $b=2c$. Chọn $c=1\Rightarrow b=2, a=2$ khi đó $(P)\colon 2x+2y+z-18=0$. Mặt phẳng này lại đi qua $A(6;2;2)$ nên không thỏa mãn.

Chọn đáp án A ☐

Câu 174. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1), B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), đường thẳng nào cách B một khoảng cách nhỏ nhất?

A. $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z+1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+2}{26}=\dfrac{y-1}{11}=\dfrac{z+3}{-2}$.

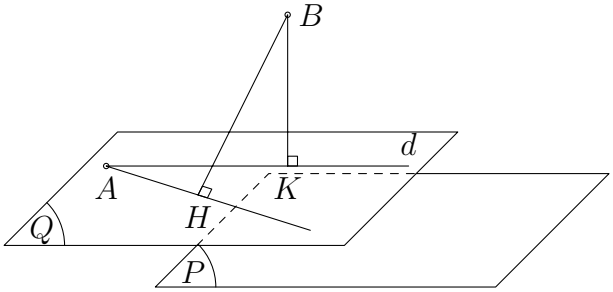
Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua $A(-3;0;1)$ và song song với $(P)\colon x-2y+2z-5=0$.

$\Rightarrow (Q)\colon x-2y+2z+1=0$ và $d\subset(Q)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên d và (Q) thì $BH\geqslant BK$.



Do đó $\mathrm{d}(B;d)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$.

Đường thẳng BK đi qua $B(1;-1;3)$ và vuông góc với $(Q)\Rightarrow BK\colon \left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$.

Ta có $K=BK\cap(Q)\Rightarrow K\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$.

Đường thẳng d qua A và nhận $\overrightarrow{AK}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$ làm véc-tơ chỉ phương

nên $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;0;1)\,, B\,(-1;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).

A. $\Delta\colon \left\{\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=t \\ z=3-t \end{array}\right.$. **B.** $\Delta\colon \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1+t. \\ z=1-t \end{array}\right.$ **C.** $\Delta\colon \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1+t. \\ z=1+t \end{array}\right.$ **D.** $\Delta\colon \left\{\begin{array}{l} x=3+t \\ y=4+t. \\ z=1-t \end{array}\right.$

Lời giải.

$\overrightarrow{OA} = (1;0;1), \overrightarrow{OB} = (-1;2;1) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-2;-2;2)$.

Ta thấy tam giác OAB vuông tại O nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là trung điểm I của AB.

Ta có $I(0;1;1)$, suy ra đường thẳng Δ đi qua $I(0;1;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Vậy Δ có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 3y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{4}$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x+3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{5}$.

B. $\dfrac{x+3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{-5}$.

C. $\dfrac{x-3}{13} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-10}{-5}$.

D. $\dfrac{x-3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{-5}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) cơ véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;3;-1)$.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;4)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần lập phương trình. Theo giả thiết, ta có $[\vec{n}, \vec{u}] = (13;-2;-5)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Gọi A là giao điểm của d với mặt phẳng (P), khi đó $A(-3;-2;-10)$ và Δ đi qua A.

Vậy Δ có phương trình $\dfrac{x+3}{13} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+10}{-5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;3;-1)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-11}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+15}{-2}$. Phương trình mặt cầu tâm I, cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$ có phương trình là

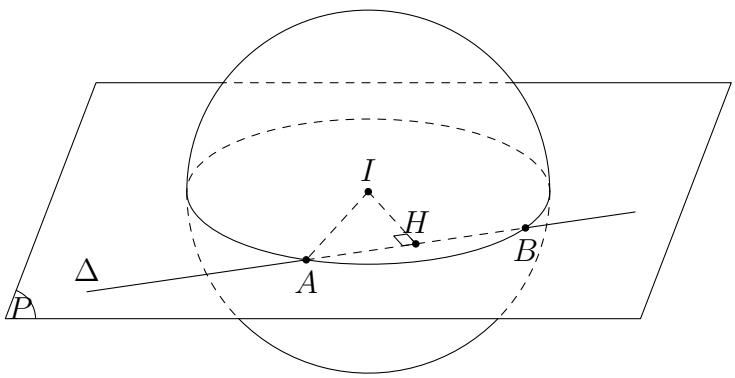
A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{725}{9}$.

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{725}{9}$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{1301}{9}$.

D. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{1301}{9}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB, khi đó $HA = HB = 8$ và $IH \perp AB$.

Dễ thấy $R^2 = IA^2 = IH^2 + HA^2 = 64 + \mathrm{d}^2(I, \Delta)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $K(11;0;-15)$. Ta có $\overrightarrow{IK}=(9;-3;-14)$ và $\vec{u}(2;1;-2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.
Ta có $\left[\overrightarrow{IK},\vec{u}\right]=(20;-10;15)$.
$\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IK},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{725}}{3}$, suy ra $R^2=64+\dfrac{725}{9}=\dfrac{1301}{9}$.
Vậy mặt cầu cần lập có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{1301}{9}$.
Chọn đáp án C □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy).

A. $d'\colon \begin{cases}x=3-t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **B.** $d'\colon \begin{cases}x=-3+t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **C.** $d'\colon \begin{cases}x=-3+t\\y=t\\z=0\end{cases}$. **D.** $d'\colon \begin{cases}x=-3+t\\y=1+t\\z=0\end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(Oxy)\colon z=0\Rightarrow d\cap(Oxy)=A(-3;0;0)$.
Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;1;2)\Rightarrow$ hình chiếu của M lên (Oxy) là $B(-2;1;0)$.
Khi đó d' đi qua $A,B\Rightarrow d'$ có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;1;0)\Rightarrow d'\colon \begin{cases}x=-3+t\\y=t\\z=0.\end{cases}$
Chọn đáp án C □

Câu 179. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và $d_1\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-5}$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt d_1, d_2 có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1\\y=-1+t.\\z=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=\dfrac{3}{7}\\y=-\dfrac{25}{7}+t.\\z=\dfrac{18}{7}\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1\\y=-3+t.\\z=4\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=t\\y=-4+t.\\z=3+t\end{cases}$

Lời giải.

Giả sử $\Delta\cap d_1=A\Rightarrow A(a;a-4;-a+3)$ và $\Delta\cap d_2=B\Rightarrow B(1-2b;-3+b;4-5b)$.
Ta có $\Delta\perp(Oxz)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ với $\vec{n}=(0;1;0)$ là véc-tơ pháp tuyến của (Oxz)
$\Rightarrow\dfrac{a-1+2b}{0}=\dfrac{a-b-1}{1}=\dfrac{-a+5b-1}{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-1=0\\-a+5b-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{7}\\b=\dfrac{2}{7}.\end{cases}$
Khi đó $A\left(\dfrac{3}{7};-\dfrac{25}{7};\dfrac{18}{7}\right)$ và $B\left(\dfrac{3}{7};-\dfrac{19}{7};\dfrac{18}{7}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(0;\dfrac{6}{7};0\right)\Rightarrow\Delta\colon \begin{cases}x=\dfrac{3}{7}\\y=-\dfrac{25}{7}+t.\\z=\dfrac{18}{7}\end{cases}$
Chọn đáp án B □

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S).

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(-1;-1;-1)$.

Gọi $K=AB\cap(P)$.

Ta có đường thẳng AB đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{AB}=(-4;-4;-4)=-4(1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}$.

Vì $K\in AB$ nên $K(1+t;1+t;1+t)$. Mặt khác $K\in(P)\Rightarrow 1+t+(1+t)-(1+t)-3=0\Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $K(3;3;3)\Rightarrow KM=4\sqrt{3}$. Ta cũng có $AB=4\sqrt{3}$.

Xét $\triangle KIC$ vuông tại C ta có $KI^2=KC^2+IC^2$. (1)

Xét $\triangle KIM$ vuông tại M ta có $KI^2=KM^2+IM^2=KM^2+\left(IA^2-\dfrac{AB^2}{4}\right)=IA^2+36$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $KC^2=36\Rightarrow KC=6$.

Từ đó suy ra C thuộc đường tròn tâm K bán kính bằng 6 vẽ trong mặt phẳng (P).

Chọn đáp án B □

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. **D.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;1)$; đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;3)$.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=[\vec{n},\vec{u}_d]=(-5;1;3)$.

Gọi M là giao điểm của d và mặt phẳng (P), khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+2y+z-4=0\\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1.\end{cases}$$

$\Rightarrow M(1;1;1)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}=(-5;1;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 182. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$. Tính bán kính r của mặt cầu (S), biết rằng (S) có tâm I và nó cắt (P) theo một đường tròn (T) có chu vi bằng 10π.

A. $r = 5$. **B.** $r = \sqrt{34}$. **C.** $r = \sqrt{5}$. **D.** $r = 34$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là:

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}(I,(P)) = \frac{|2\cdot(-2) - (1) + 2\cdot 3 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3.$$

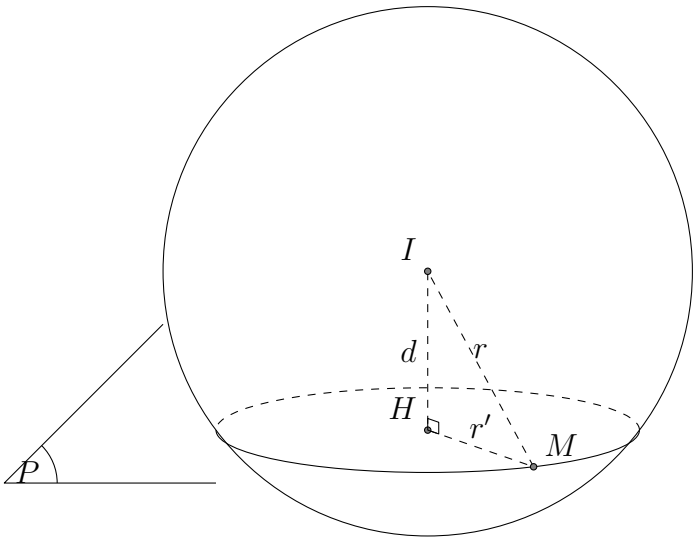
Gọi r' là bán kính đường tròn (T), ta có:

$$2\pi r' = 10\pi \Rightarrow r' = 5.$$

Từ đó ta có:

$$r^2 = r'^2 + \mathrm{d}^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \Rightarrow r = \sqrt{34}.$$

Như vậy mặt cầu (S) có bán kính $r = \sqrt{34}$.



Chọn đáp án B □

Câu 183. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1;1;-1)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng d, khi đó $B = (3+t; 3+3t; 2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2+t; 1+3t; 2t+1)$.

Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) nên:

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow (2+t)\cdot 1 + (1+3t)\cdot 1 + (2t+1)\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó $B=(2;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{BA}=(-1;2;1)$.
Vậy, phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\ \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M, tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=48$. **B.** $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=38$.
C. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=28$. **D.** $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18$.

Lời giải.

Gọi $H(2t-5;7-2t;t)\in d$ là hình chiếu của điểm M trên d. Ta có $\overrightarrow{MH}=(2t-9;6-2t;t-6)$, $\vec{u}_d=(2;-2;1)$. Khi đó

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 2(2t-9)-2(6-2t)+(t-6)=0\Leftrightarrow t=4$$
$$\Rightarrow MH=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3.$$

Từ đó tính được bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{MH^2+\dfrac{AB^2}{4}}=3\sqrt{2}$.
Vậy $(S):\ (x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18$.
Chọn đáp án D □

Câu 185. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y+z-4=0$ và đường thẳng (d): $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là

A. (Δ): $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** (Δ): $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.
C. (Δ): $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **D.** (Δ): $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của (d) và (P). Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+2y+z-4=0\\ x=-1+2t\\ y=t\\ z=-2+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\\ t=1\end{cases}\Rightarrow A(1;1;1).$$

Ta có $\begin{cases}\vec{n}_{(P)}=(1;2;1)\\ \vec{u}_{(d)}=(2;1;3)\end{cases}\Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)}=[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_{(d)}]=(5;-1;-3)$.
Vậy phương trình đường thẳng (Δ): $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 186. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;2;1)$, $B(4;4;2)$, $C(-2;4;-3)$. Đường phân giác trong AD của tam giác ABC có một véc-tơ chỉ phương là

A. $(-2;4;-3)$. **B.** $(6;0;5)$. **C.** $\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$.

Lời giải.

Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là véc-tơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có mô-đun bằng 1.

Gọi $\overrightarrow{u_2}$ là véc-tơ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ và có mô-đun bằng 1.

Theo tính chất hình thoi, véc-tơ chỉ phương của đường phân giác trong AD của tam giác ABC cùng phương với véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2;1) \\ \overrightarrow{AC} = (-4;2;-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{u_2} = \left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{-2}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left(0;1;-\frac{1}{3}\right).$

Chọn đáp án C □

Câu 187. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = mt \\ y = m^2t \\ z = mt \end{cases}$ với m là tham số. Tìm tất cả giá trị của tham số m để đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $m=-2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=0 \end{array}\right.$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$m^2t^2+m^4t^2+m^2t^2-2mt-2m^2t-2mt=0 \qquad (1)$$

Để d là đường thẳng thì $m \neq 0$. Đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi (1) có nghiệm duy nhất, hay $-4m-2m^2=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 188. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;7;0)$ và $B(3;0;3)$. Phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$ là

A. $d\colon \frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{4}$. **B.** $d\colon \frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$. **C.** $d\colon \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$. **D.** $d\colon \frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$.

Lời giải.

Ta có $OA=5\sqrt{2}, OB=3\sqrt{2}$. Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}$.

Khi đó tọa độ điểm M là $\left(\frac{3}{5};\frac{21}{5};0\right)$.

Gọi N là trung điểm của MB thì $N\left(\frac{9}{5};\frac{21}{10};\frac{3}{2}\right)$.

Đường phân giác trong chính là đường thẳng qua hai điểm O, N.

Ta có $\overrightarrow{ON}=\left(\frac{9}{5};\frac{21}{10};\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{10}\times(6;7;5)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $d\colon \frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc

với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

B. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

D. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=-2+3t.\end{cases}$

Gọi I là giao điểm của d và (P). Vì $I\in d$ nên $I(-1+2t;t;-2+3t)$.

Mặt khác $I\in(P)$ nên $-1+2t+2t-2+3t-4=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(1;1;1)$.

Theo giả thiết (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;1)$ và d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3)$.

Ta có $[\vec{n};\vec{u}]=(5;-1;-3)$.

Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d nên Δ đi qua điểm $I(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}_\Delta=(5;-1;-3)$ là véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 190. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-1}{-5}$ và $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d.

A. 3.

B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\dfrac{45}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.

Theo giả thiết Δ đi qua điểm $M(2;3;1)$, có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2;-4;-5)$ và d đi qua điểm $N(1;0;-1)$, có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(1;-2;2)$.

Ta có $[\vec{u}_1;\vec{u}_2]=(-18;-9;0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song với Δ.

Suy ra (P) đi qua N và nhận $\vec{n}=-\dfrac{1}{9}[\vec{u}_1;\vec{u}_2]=(2;1;0)$ là véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+0\cdot(z+1)=0\Rightarrow(P):2x+y-2=0$.

Khoảng cách giữa Δ và d bằng khoảng cách từ M đến (P).

Ta có $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|4+3-2|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 191. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng (P): $x-y+2z-6=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d có phương trình

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z-1}{3}$.

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+5}{3}$.

D. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{3}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{-3} \\ x-y+2z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-6 \\ 3y+z=11 \\ x-y+2z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow M(-2;2;5).$$

(P): $x-y+2z-6=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;2)$, d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-3)$.
Do đó Δ đi qua $M(-2;2;5)$ nhận $\vec{k}=[\vec{n},\vec{u}]=(1;7;3)$ là một véc-tơ chỉ phương.
Vậy Δ: $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 192. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và hai đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$, Δ': $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ' là

A. $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{7}$.
B. $\dfrac{x+1}{-6}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{7}$.
C. $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{7}$.
D. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{7}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta}=(2;1;-1)$.
Đường thẳng Δ' đi qua $N(0;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta'}=(1;-2;1)$.
Gọi đường thẳng cần tìm là d và gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với Δ, Δ'.
Khi đó $\begin{cases} M(1+2m;m;3-m) \\ N(n;-1-2n;2+n) \end{cases}$
Ba điểm A, M, N cùng thuộc đường thẳng d nên thẳng hàng do đó $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$.
Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AM}=(2m;m+1;2-m) \\ \overrightarrow{AN}=(n-1;-2n;1+n) \end{cases}$
Do đó $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \frac{2m}{n-1}=\frac{m+1}{-2n}=\frac{2-m}{1+n} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{2m}{n-1}=\dfrac{m+1}{-2n} \\ \dfrac{2m}{n-1}=\dfrac{2-m}{1+n} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -5mn=-m+n-1 \\ 3mn=-m+2n-2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -10mn=-2m+2n-2 \\ 3mn=-m+2n-2 \end{cases} \\ \Rightarrow & -13mn=-m \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{1}{13}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

TH1. Nếu $m=0 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(0;1;2)$ do đó d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;1;2)$.

TH2. Nếu $n=\dfrac{1}{13}\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\left(-\dfrac{12}{13};-\dfrac{2}{13};\dfrac{14}{13}\right)$.

Do đó véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-6;-1;7)$.

Khi đó phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{7}$.

Chọn đáp án C □

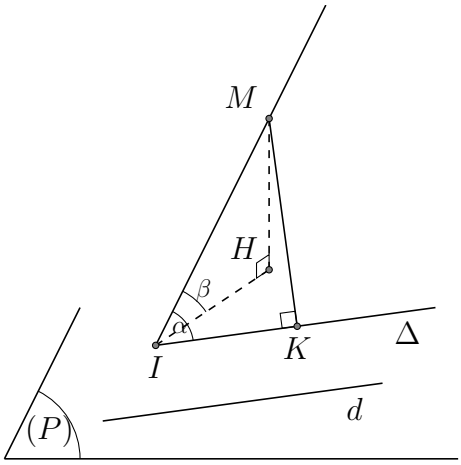
Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất là

A. $x-z+1=0$. **B.** $x-4y+z-7=0$.

C. $3x-2y-2z-1=0$. **D.** $-x+4y-z-7=0$.

Lời giải.

Ta có d và d' là hai đường thẳng chéo nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.



Kẻ đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) thỏa mãn Δ song song với d và Δ cắt d'. Khi đó $(d',d)=(d',\Delta)=\alpha$.

Lấy điểm $M\in d'$ và kẻ $MH\perp(P)$ tại H,

suy ra $(d',(P))=\widehat{MIH}=\beta$.

Ta có $\begin{cases}\sin\beta=\dfrac{MH}{MI}\\ \sin\alpha=\dfrac{MK}{MI}\end{cases}$ mà $MH\le MK$.

Suy ra $\sin\beta\le\sin\alpha\Rightarrow\beta\le\alpha$.

Vậy góc giữa d' và (P) đạt giá trị lớn nhất bằng góc $\alpha=(d,d')$.

Ta có $\cos(d,d')=\dfrac{\vec{u}_d\cdot\vec{u}_{d'}}{|\vec{u}_d|\cdot|\vec{u}_{d'}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $\cos(d',(P))=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\sin(d',(P))=\sqrt{1-\cos^2(d',(P))}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy mặt phẳng (P) cần thỏa mãn

☑ (P) chứa $d\Rightarrow(P)$ chứa $N(1;-1;2)$.

☑ (P) chứa $d\Rightarrow\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_d=0$.

☑ $\sin(d',(P))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\dfrac{\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d'}}{|\vec{n}_{(P)}|\cdot|\vec{u}_{d'}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Dễ thấy chỉ mặt phẳng $x-4y+z-7=0$ thỏa mãn cả ba điều kiện trên.

Chọn đáp án B □

Câu 194. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-5=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{3}$. Gọi A là giao điểm của Δ và (P) và M là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho $AM=\sqrt{84}$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Gọi $\alpha=(\Delta,(P))$.

Khi đó ta có $\cos\alpha = \dfrac{|1\cdot 2+1\cdot 1-2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng α, khi đó $HM = MA\cdot\cos\alpha = \sqrt{84}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{14} = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 195. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$ và hai đường thẳng $(d_1)\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $(d_2)\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

A. $(\alpha)\colon 3x-y-z-15=0$.

B. $(\alpha)\colon 3x-y-z+7=0$.

C. $(\alpha)\colon 3x-y-z-7=0$.

D. $(\alpha)\colon 3x-y-z+7=0$ hoặc $(\alpha)\colon 3x-y-z-15=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$.

Gọi $\vec{v_1}=(1;1;2)$ và $\vec{v_2}=(1;2;1)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2). Do $(\alpha)\parallel(d_1)$ và $(\alpha)\parallel(d_2)$ nên véc-tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=[\vec{v_1},\vec{v_2}]=(-3;1;1)$. Do đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng $(\alpha)\colon 3x-y-z+d=0$.

Hơn nữa, (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$\mathrm{d}\,(I,(\alpha))=R\Leftrightarrow\frac{|3.1-(-1)-0+d|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{11}\Leftrightarrow|d+4|=11\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&d+4=11\\&d+4=-11\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&d=7\\&d=-15.\end{aligned}\right.$$

Suy ra $(\alpha_1)\colon 3x-y-z+7=0$ và $(\alpha_2)\colon 3x-y-z-15$. Tuy nhiên, dễ dàng kiểm tra $(\alpha_2)\supset(d_2)$. Vậy mặt phẳng (α) cần tìm là $(\alpha)\colon 3x-y-z+7=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oyz). Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là

A. $\vec{u}(0;2;0)$. **B.** $\vec{u}(0;2;3)$. **C.** $\vec{u}(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}(1;2;0)$.

Lời giải.

Lấy các điểm $A(2;-3;1)\in d$, $B(3;-1;4)\in d$.

Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (Oyz).

$\Rightarrow M(0;-3;1)\,N(0;-1;4)\Rightarrow \vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN}=(0;2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 197. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ ngắn nhất.

A. $\vec{u}=(3;4;-4)$. **B.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **D.** $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Lời giải.

☑ Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, vuông góc với d có dạng $2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0$ hay $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$.

☑ Phương trình đường thẳng d' qua B và vuông góc với (P) có dạng $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = -3-t \end{cases}$.

☑ Giao điểm của d' và (P) là điểm $M(-3;-2;-1)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (1;0;2)$.

Suy ra, đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng MA có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

A. $\Delta : \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

B. $\Delta : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

C. $\Delta : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

D. $\Delta : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua tâm O.

$\vec{n}_{ABC} = (4;2;1)$.

Vậy ta chọn đáp án $\Delta : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 199. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

A. $Q\left(-2;\dfrac{32}{11};-\dfrac{7}{11}\right)$. **B.** $N\left(-2;\dfrac{32}{11};\dfrac{7}{11}\right)$. **C.** $P\left(2;\dfrac{32}{11};\dfrac{7}{11}\right)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{32}{11};\dfrac{7}{11}\right)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của $\Delta_2 : \begin{cases} x = 3-t' \\ y = 1+2t' \\ z = t' \end{cases}$.

Gọi d là đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2. Gọi $A = d \cap \Delta_1$ nên $A(a;a;2)$, $B = d \cap \Delta_2$ nên $B(3-b;1+2b;b)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3-a-b;1+2b-a;b-2)$.

Do d là đường vuông góc chung nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b = -4 \\ -a+6b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{27}{11} \\ b = \dfrac{10}{11} \end{cases}$.

Suy ra $A\left(\dfrac{27}{11};\dfrac{27}{11};2\right)$ và $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{4}{11};\dfrac{4}{11};-\dfrac{12}{11}\right) = \dfrac{4}{11}\cdot(-1;1;-3)$

Phương trình đường thẳng d đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;1;3)$ là $\begin{cases} x = \dfrac{27}{11} - t \\ y = \dfrac{27}{11} + t \\ z = 2-3t \end{cases}$.

Thay tọa độ các điểm Q, N, P, M ta thấy chỉ có tọa độ điểm P thỏa mãn phương trình d nên đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm P.

Chọn đáp án C □

Câu 200. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-7=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{-4}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{3}$.

B. $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

D. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm, gọi các giao điểm của d với hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là M và N
Do $M\in d_1$ nên tọa độ có dạng $M(2a-3;-a-2;-4a-2)$, do $N\in d_2$ nên tọa độ có dạng $N(3b-1;2b-1;3b+2)$
Ta có $\overrightarrow{MN}=(3b-2a+2;2b+a+1;3b+4a+4)$
$\vec{n}(1;2;3)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Vì $d\perp(P)$ nên $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{n}$ cùng phương nhau nên

$$\frac{3b-2a+2}{1}=\frac{2b+a+1}{2}=\frac{3b+4a+4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}5a-4b=3\\10a-6b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M(-5;-1;2)\\\overrightarrow{MN}=(-2;-4;-6).\end{cases}$$

Từ đó chọn "$\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$".
Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. D	5. D	6. B	7. A	8. B	9. D	10. C
11. A	12. B	13. D	14. C	15. B	16. A	17. D	18. C	19. A	20. C
21. A	22. A	23. A	24. C	25. D	26. A	27. C	28. B	29. D	30. B
31. A	32. A	33. C	34. D	35. D	36. B	37. D	38. C	39. D	40. A
41. B	42. B	43. A	44. C	45. B	46. D	47. A	48. C	49. B	50. D
51. A	52. C	53. A	54. B	55. C	56. D	57. C	58. A	59. D	60. C
61. D	62. C	63. A	64. A	65. B	66. D	67. D	68. D	69. C	70. C
71. A	72. B	73. A	74. D	75. D	76. C	77. D	78. B	79. C	80. C
81. D	82. D	83. C	84. B	85. D	86. C	87. D	88. D	89. B	90. C
91. B	92. A	93. C	94. D	95. A	96. A	97. B	98. D	99. D	100. D
101. B	102. D	103. C	104. A	105. B	106. C	107. D	108. C	109. D	110. A
111. D	112. A	113. B	114. C	115. D	116. B	117. B	118. A	119. A	120. C
121. B	122. B	123. C	124. C	125. D	126. A	127. B	128. A	129. C	130. D
131. A	132. D	133. D	134. A	135. B	136. A	137. C	138. B	139. C	140. C
141. A	142. D	143. A	144. D	145. C	146. A	147. B	148. A	149. A	150. C
151. A	152. A	153. A	154. C	155. C	156. B	157. C	158. A	159. B	160. C
161. B	162. C	163. B	164. C	165. B	166. A	167. B	168. B	169. D	170. B
171. B	172. B	173. A	174. A	175. B	176. B	177. C	178. C	179. B	180. B
181. A	182. B	183. D	184. D	185. C	186. C	187. A	188. D	189. B	190. C
191. D	192. C	193. B	194. C	195. B	196. B	197. B	198. C	199. C	200. B

4 Mức độ vận dụng cao

Câu 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=99$ và điểm $M(1;7;-8)$. Qua điểm M kẻ các tia Ma, Mb, Mc đôi một vuông góc nhau và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $K(x_k;y_k;z_k)$. Tính giá trị $P=x_k+2y_k-z_k$.

A. $P=11$. **B.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=12$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;4;1)$, bán kính $R=\sqrt{99}$.

Ta có $M(1;7;-8)\in(S)$.

Xét hình hộp chữ nhật $AHPQ.MBDC$.

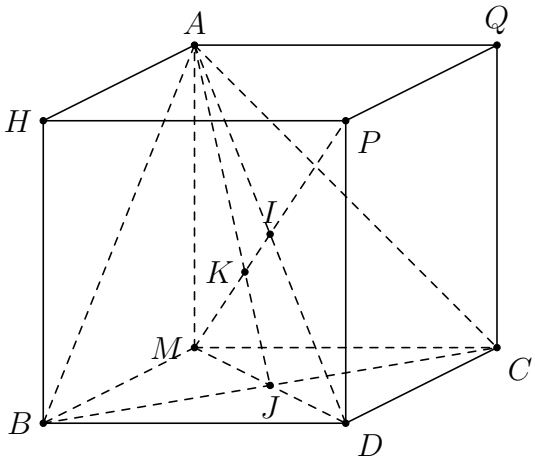
Gọi $J=MD\cap BC$, $K=MP\cap AJ\Rightarrow K\in(ABC)$.

Rõ ràng, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MABC$ là trung điểm của đoạn MP (cũng là tâm của (S)).

Mặt khác K là trọng tâm của tam giác MAD hay $\overrightarrow{MK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}$. Vì M, I cố định nên K cố định. Vậy K chính là điểm cố định mà mặt phẳng (ABC) luôn luôn đi qua.

Ta có $\overrightarrow{MK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MI}\Rightarrow K(-1;5;-2)$

$\Rightarrow P=x_k+2y_k-z_k=-1+2\cdot5-(-2)=11$.

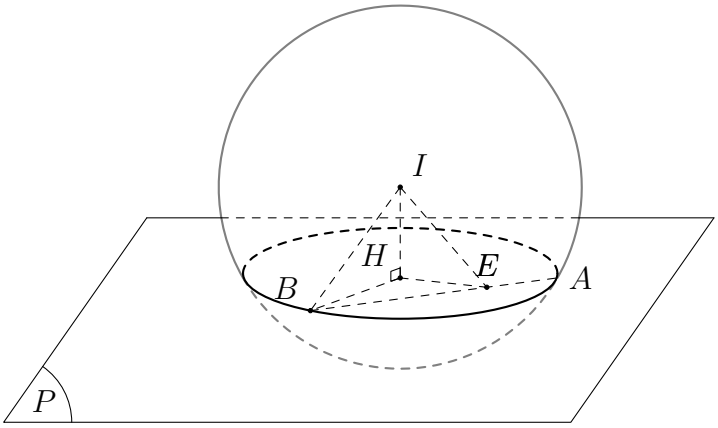


Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=2+9t\\y=1+9t\\z=3+8t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2-5t\\y=1+3t\\z=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=1+3t\\z=3-3t\end{cases}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R=6$. $IE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R$,
suy ra điểm E nằm trong mặt cầu (S).
Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).
Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp OE$, mà $AB\perp IH$ nên $AB\perp(HIE)\Rightarrow AB\perp IE$.
Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}]=(5;-5;0)=5(1;-1;0)$.
Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$
Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t,(t\in\mathbb{R})\\z=-7\end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là:

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$.
C. $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$.
Đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d.
(α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với d. Phương trình mặt phẳng (α) là $2x+y+z-7=0$.
Tọa độ H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\\2x+y+z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow H(3;0;-1)$.
(P) là mặt phẳng chứa d và K là hình chiếu của I trên (P). Đường tròn thiết diện có bán kính r.
Khi đó ta có $IK\le IH$, $\forall K\in(P)$.
Mặt khác $R^2=r^2+IK^2$ nên r nhỏ nhất khi IK lớn nhất bằng IH.
(P) là mặt phẳng qua H và có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (P): $y+z+1=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h;k;1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -2.

Lời giải.

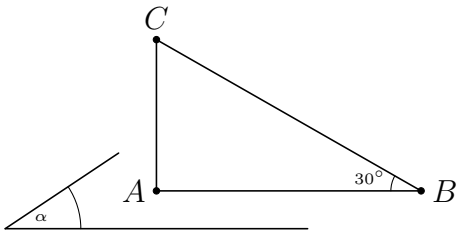
Ta có $H\in\Delta_1\Leftrightarrow H(3+2t;t;1+t)$; $K\in\Delta_2\Leftrightarrow K(1+m;2+2m;m)$.
Suy ra $\overrightarrow{HK}=(m-2t-2;2m-t+2;m-t-1)$.
Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-2)$.

$\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u_d}.\overrightarrow{HK} = 0 \Leftrightarrow m - t + 2 = 0 \Leftrightarrow m = t - 2 \Rightarrow \overrightarrow{HK} = (-t-4; t-2; -3)$.
Ta có $HK^2 = (-t-4)^2 + (t-2)^2 + (-3)^2 = 2(t+1)^2 + 27 \geqslant 27, \forall t \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \min HK = \sqrt{27}$, đạt được khi $t = -1$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = (-3; -3; -3)$, suy ra $\vec{u}(1; 1; 1) \Rightarrow h = k = 1 \Rightarrow h - k = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha) : x + z - 3 = 0$. Biết rằng đỉnh C có cao độ âm. Tìm hoành độ của đỉnh A.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.



Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+7}{-4} \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 3; 1).$$

Do $C \in BC$ nên $C(4+c; 5+c; -7-4c)$. Theo giả thiết $BC = 3\sqrt{2}$ nên

$$18(2+c)^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c = -1 \Rightarrow C(3; 4; -3) \\ c = -3 \Rightarrow C(1; 2; 5) \end{bmatrix}.$$

Mặt khác đỉnh C có cao độ âm nên $C(3; 4; -3)$.

Gọi $A(x; y; 3-x) \in (\alpha)$. Do $\widehat{ABC} = 30^\circ$ nên

$$\begin{cases} AB = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} \\ AC = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 + (2-x)^2 = \dfrac{27}{2} \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 + (6-x)^2 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + \dfrac{7}{2} = 0 \\ 2x^2 - 18x + y^2 - 8y + \dfrac{113}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 2y - 53 = 0 \\ 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + \dfrac{7}{2} = 0. \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $y = \dfrac{53 - 10x}{2}$. Thay vào (2) ta có

$$2x^2 - 8x + \left(\frac{53-10x}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{53-10x}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 108x^2 - 972x + 2187 = 0 \Leftrightarrow (2x-9)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{2}.$$

Vậy $A\left(\frac{9}{2}; 4; -\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R=6$.
$IE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R$, suy ra điểm E nằm trong mặt cầu (S).
Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).
Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(J,\Delta)$ lớn nhất (với J là tâm đường tròn giao tuyến của (P) và (S)), mà $\mathrm{d}(J,\Delta)\le EJ$.
Do đó AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp OE$, mà $AB\perp IH$ nên $AB\perp(HIE)\Rightarrow AB\perp IE$.
Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}\right]=(5;-5;0)=5\,(1;-1;0)$.
Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(P): 2x+y+z-4=0$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất là

A. $(1;0;2)$. **B.** $(0;1;3)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(3;0;2)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của A, B vào vế trái của phương trình mặt phẳng $(P): 2x+y+z-4=0$ ta được: $(2.2+1+1-4)(2.0+3-1-4)=-4<0$
Suy ra A, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P).
Vậy $MA+MB\ge AB$ dấu " $=$ " xảy ra khi $M=AB\cap(P)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-2)$ chọn vtcp của đường thẳng AB : $\vec{u}=(1;-1;1)$.
Vậy phương trình đường thẳng AB : $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+t \end{cases}$.
Tọa độ $(x;y;z)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=1+t \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=1+t \\ 2.(2+t)+1-t+1+t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;0).$$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=4-2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=t' \\ z=-t' \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là

A. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{9}{4}$. **B.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{3}{2}$. **D.** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi $A(4-2t;t;3)\in d_1, B(1;t',-t')\in d_2$ lần lượt là 2 tiếp điểm.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với d_1 và d_2 khi AB nhỏ nhất.

Khi đó AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Ta có hệ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4t+6+t'-t=0 \\ t'-t+t'+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=-1 \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. Bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2), B(-2;0;3), C(0;1;-2)$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=-1$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-3$. **D.** $T=1$.

Lời giải.

Chọn I sao cho $4\cdot\overrightarrow{IA}+3\cdot\overrightarrow{IB}+5\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Ta tính được $I\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{7}{12}\right)$.

Ta thấy $\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) \\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right) \\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right) \end{cases}$.

Ta được $\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA} \end{cases}$.

Khi đó $S=6MI^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}+2\cdot\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}+3\cdot\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}\cdot\left[4\cdot\overrightarrow{IA}+3\cdot\overrightarrow{IB}+5\cdot\overrightarrow{IC}\right]$.

Ta được $S = 6MI^2 + \underbrace{4 \cdot \overrightarrow{IA} + 3 \cdot \overrightarrow{IB} + 5 \cdot \overrightarrow{IC}}_{const}$.

Do vậy, biểu thức S đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của $I\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{7}{12}\right)$ lên $(Oxy) \Rightarrow M\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{12}; 0\right)$.

Ta được $\begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{12} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow T = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;1;-1)$; $C(5;0;-2)$. Tìm tọa độ điểm H sao cho tứ giác $ABCH$ lập thành hình thang cân với hai đáy AB, CH.

A. $H(3;-1;0)$. **B.** $H(7;1;-4)$. **C.** $H(-1;-3;4)$. **D.** $H(1;-2;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1;-2)$; $M\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm AB.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của $AB \Rightarrow (\alpha)\colon 2x + y - 2z - \frac{1}{2} = 0$.

Gọi d là đường thẳng qua C và song song $AB \Rightarrow d\colon \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

Gọi I là hình chiếu của C lên (α). Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \\ 2x + y - 2z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra $I\left(2; -\frac{3}{2}; 1\right)$. Do $ABCH$ là hình thang cân nên H và C đối xứng nhau qua mp(α).

$\Rightarrow I$ là trung điểm $CH \Rightarrow H(-1;-3;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{AM} = (x; y+1; z-2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-2; y+3; z)$, $\overrightarrow{CM} = (x+2; y-1; z-1)$, $\overrightarrow{DM} = (x; y+1; z-3)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)+(y+1)(y+3)+z(z-2)=1 \\ x(x+2)+(y+1)(y-1)+(z-1)(z-3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0 \\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2=2$.

Ta có: $I_1I_2=\sqrt{5}$.

Dễ thấy: $r=\sqrt{R_1^2-\left(\dfrac{I_1I_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) $x+2y+2z-6=0$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm M và xác định điểm N thuộc đường thẳng OM sao cho $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

B. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\dfrac{1}{12}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

C. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z-1=0$.

D. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z+1=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=1\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=1\cdot\overrightarrow{ON}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{ON}}{ON^2}$ (vì $\overrightarrow{ON}\neq\vec{0}$).

Giả sử $N(x;y;z)$ ta được $M\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2};\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2};\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$.

Vì $M\in(P)$ $x+2y+2z-6=0$ nên ta có

$$\begin{aligned} &\frac{x}{x^2+y^2+z^2}+2\cdot\frac{y}{x^2+y^2+z^2}+2\cdot\frac{z}{x^2+y^2+z^2}-6=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}-\frac{z}{3}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$, đường thẳng $(d):\dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Gọi A',B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA',BB' cùng song song với (d). Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

A. $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. **B**. $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$. **C**. $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. **D**. $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ bán kính $R=5$.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

Theo giả thiết $AB=8\Rightarrow d(I,d)=\sqrt{R^2-\dfrac{AB^2}{4}}=3$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$.

Vì AA', BB' song song với đường thẳng d nên $ABB'A'$ là hình thang và $2MN = AA' + BB'$. và $d(I,d) = IM = 3$.

Mặt khác gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P). Ta có

$$\cos\widehat{HMN} = |\cos(\vec{u}_d, \vec{n})| = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

Tam giác HMN vuông tại H nên

$$MN = \frac{MH}{\cos\widehat{HMN}} = \frac{3\sqrt{3}MH}{5} \le \frac{3\sqrt{3}}{5}(IM + d(I,(P))) = \frac{3\sqrt{3}}{5}\left(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Vậy giá trị lớn nhất của $AC + BD$ bằng $\dfrac{24 + 18\sqrt{3}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $(d_1): \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$, $(d_2): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$, $(d_3): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, $(d_4): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

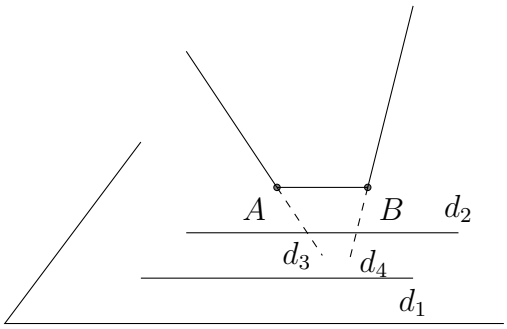
Lời giải.

Ta có $(d_1) \parallel (d_2)$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2) là $(P): x + y + z - 1 = 0$.

Gọi $A = (d_3) \cap (P) \Rightarrow A(1;-1;1)$, $A \notin (d_1)$, $A \notin (d_2)$.

$B = (d_4) \cap (P) \Rightarrow B(0;1;0)$, $B \notin (d_1)$, $B \notin (d_2)$.

Mà $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-1)$ cùng phương với vec-tơ chỉ phương của hai đường thẳng (d_1), (d_2) nên không tồn tại đường thẳng nào đồng thời cắt cả bốn đường thẳng trên.



Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1), N(-1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua M, N cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B, $(A \ne B)$ sao cho $AM = \sqrt{3} \cdot BN$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là một pháp véc-tơ của $mp(\alpha)$ qua M, N thỏa mãn đề bài (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-2;-2;-2) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \ne 0.$

Vì $mp(\alpha)$ cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B nên $a \cdot b \ne 0$.

Khi đó, ta được phương trình $mp(\alpha)$: $ax + by - (a+b)z - b = 0$.

Ta tính được $\begin{cases} A\left(\dfrac{b}{a};0;0\right) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(1 - \dfrac{b}{a};2;1\right) \\ \overrightarrow{BN} = (-1;-1;-1). \end{cases}$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & AM = \sqrt{3} \cdot BN \\ \Leftrightarrow\ & AM^2 = 3 \cdot BN^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2 + 5 = 3 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \dfrac{b}{a} = -1 \\ \dfrac{b}{a} = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $\dfrac{b}{a} = -1$ ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$, ta được $(\alpha)\colon x - y - 1 = 0$.

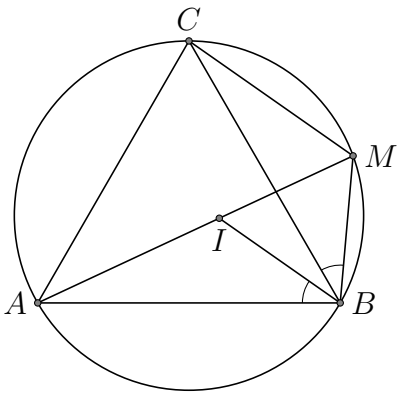
Với $\dfrac{b}{a} = 3$ ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$, ta được $(\alpha)\colon x + 3y - 4z - 3 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;2)$, $B(1;4;2)$, $C(1;1;5)$, đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 7 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 1. **B**. 5. **C**. 7. **D**. 3.

Lời giải.



Nhận xét các điểm A,B,C cùng thuộc (P) và (S) và tam giác ABC có $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$. Nên bài toán trở thành tìm số điểm M trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đều để $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử M thuộc cung nhỏ BC.

Trên đoạn MA lấy I sao cho $MB = MI$ suy ra tam giác MBI đều.

Do $\widehat{ABI} = \widehat{CBM}$ (cùng tổng với góc $\widehat{IBC}$ bằng 60°)

nên $\triangle CAI = \triangle CBM$ (c-g-c) $\Rightarrow AI = BM$.

Khi đó, $MA = MI + IA = MC + MB$.

Hay $MA + MB + MC = 2MA$.

Như vậy $MA + MB + MC$ lớn nhất khi và chỉ khi MA lớn nhất khi đó MA là đường kính đường tròn hay M là trung điểm của cung BC.

Tương tự, cho điểm M trên cung nhỏ AB, AC.

Vậy có 3 vị trí điểm M để $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng d qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=3$. **B.** $AB=2$. **C.** $AB=\sqrt{6}$. **D.** $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải.

d_1 qua điểm $C(1;2;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;3;1)$.

d_2 qua điểm $D(-1;1;2)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-1;2;4)$.

Xét mặt phẳng (P) chứa d_1 và điểm M. Suy ra $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{CM},\vec{u}_1\right]=(7;-4;5)$.

Xét mặt phẳng (Q) chứa d_2 và điểm M. Suy ra $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{DM},\vec{u}_2\right]=(16;-12;10)$.

Đường thẳng d qua M và cắt d_1 nên $d\subset(P)$; Đường thẳng d qua M và cắt d_2 nên $d\subset(Q)$.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)\Rightarrow \vec{u}_d=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(20;10;-20)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

A là giao điểm d và $d_1\Rightarrow A(1;2;0)$; B là giao điểm d và $d_2\Rightarrow B(-1;1;2)$.

Vậy $AB=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$.

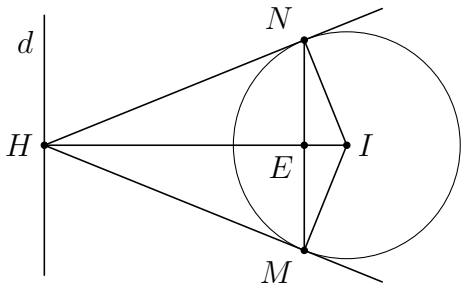
Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc (S). Gọi M và N là hai tiếp điểm. Tính độ dài MN.

A. $MN=2\sqrt{2}$. **B.** $MN=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $MN=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$. Gọi $H(2+2t;-t;4t)$ là hình vuông góc của I xuống d.



Ta có $\overrightarrow{IH}=(2t+1;-t-2;4t-1)$ mà

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}_d=0\\ \Leftrightarrow\ &2(2t+1)-(-t-2)+4(4t-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &t=0.\end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{IH}=(1;-2;-1)$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d bằng $IH=\sqrt{6}$.

Xét mặt phẳng (IMN), mặt phẳng này cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có $IM\perp(P)\Rightarrow IM\perp d$ mà $IH\perp d\Rightarrow d\perp(IMH)$.

Tương tự $d\perp(INH)$, do đó 4 điểm I,M,N,H đồng phẳng (cùng thuộc mặt phẳng qua I và vuông góc với d).

Xét $\triangle IMH$, $HM=\sqrt{IH^2-IM^2}=\sqrt{6-2}=2$ và $ME=\dfrac{IM\cdot HM}{IH}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $MN=2ME=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Cho đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng d đồng thời khoảng cách từ giao điểm I của d với (P) đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Gọi $M(5;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của I trên Δ. Giá trị $P=bc$ bằng bao nhiêu?

A. $P=-10$. **B.** $P=10$. **C.** $P=12$. **D.** $P=-20$.

Lời giải.

Gọi $I(3+2t;-2+t;-1-t)\in d$, vì I thuộc mặt phẳng (P) nên

$$\begin{aligned} & 3+2t+(-2+t)+(-1-t)+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & t=-1 \\ \Rightarrow\ & I(1;-3;0). \end{aligned}$$

Ta có $IM=\sqrt{42}\Leftrightarrow (5-1)^2+(b+3)^2+(c-0)^2=42\Leftrightarrow (b+3)^2+c^2=26 \quad (1)$.

Mà $M(5;b;c)\in(P)\Rightarrow 5+b+c+2=0\Leftrightarrow c=-7-b$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow (b+3)^2+(b+7)^2=26\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2 \\ b=-8. \end{array}\right.$

Với $b=-2\Rightarrow c=-5$ và $b=-8\Rightarrow c=1$.

Vậy $P=bc=10$ hoặc $P=bc=-8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$ và điểm $M(1;2;-1)$. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt (S) tại hai điểm A,B. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $MA+MB$.

A. 8. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{17}$. **D.** $8+2\sqrt{5}$.

Lời giải.

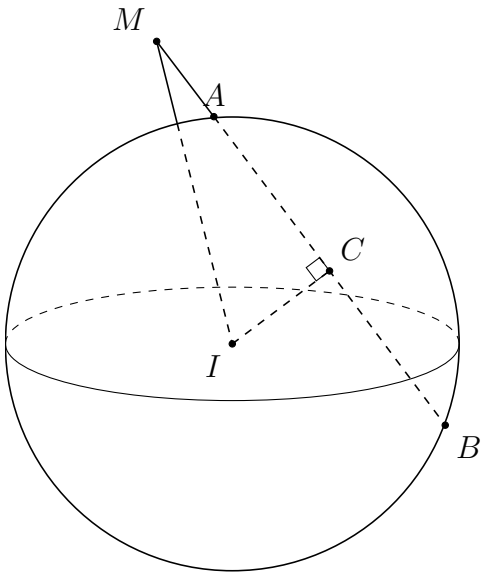
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-2)$ và bán kính $R=3$.

Ta có: $MI^2=17>R^2$ nên M nằm ngoài mặt cầu.

Gọi C là trung điểm AB, khi đó ta có: $MA+MB=2MC$.

Mà $MC\le MI$, nên $MA+MB\le 2MI=2\sqrt{17}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AB đi qua tâm I của (S).

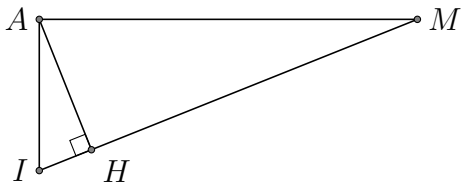


Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M\,(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Mặt cầu có tâm $I\,(1;1;0)$. Gọi A là tiếp điểm của một tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu (S).
Khi đó $IA\perp AM$.
Gọi H là tâm đường tròn (C), thì $HA\perp IM$.
Ta có $IM=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{6}\Rightarrow AM=\sqrt{IM^2-IA^2}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$.
Vậy $r=AH=\sqrt{\dfrac{AI^2\cdot AM^2}{AI^2+AM^2}}=\sqrt{\dfrac{4\cdot 2}{4+2}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q)\colon 3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+5c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x_A+x_B+2x_C}{4}=3\\ y=\dfrac{y_A+y_B+2y_C}{4}=0\\ z=\dfrac{z_A+z_B+2z_C}{4}=1\end{cases}$.
Vậy $I(3;0;1)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2\\&=4\cdot MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2+2IC^2\\&=4\cdot MI^2+IA^2+IB^2+2IC^2.\end{aligned}$$

Vì I,A,B,C cố định nên $IA^2+IB^2+2IC^2$ không đổi.
Do đó $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Q).
Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình $\begin{cases}x=3+3t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$, $M=\Delta\cap(Q)$.

Có $M \in \Delta \Rightarrow M(3+3t;t;1-t)$ mà $M \in (Q)$ nên $3(3+3t)+t-(1-t)+3=0 \Leftrightarrow t=-1$
$\Rightarrow M(0;-1;2) \Rightarrow a+b+5c=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2)$, $B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_2(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB. Biết rằng luôn có một mặt cầu S đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của S.

A. $R=\dfrac{\sqrt{219}}{3}$. **B.** $R=2\sqrt{2}$. **C.** $R=\dfrac{\sqrt{129}}{3}$. **D.** $R=2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua I_1 và vuông góc với mặt phẳng (I_1AB). Khi đó d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_1; d_2 là đường thẳng đi qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng (I_2AB). Do đó d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_2.
Do đó, mặt cầu S đi qua cả hai đường tròn tâm (I_1) và (I_2) có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 và bán kính $R=IA$.
Ta có $\overrightarrow{I_1A}=(-1;1;3)$, $\overrightarrow{I_1B}=(1;-3;1)$.
Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{I_1A},\overrightarrow{I_1B}\right]=(10;4;2)=2(5;2;1)$.
Phương trình đường thẳng d_1 là $d_1:\begin{cases}x=1+5t\\y=1+2t\\z=-1+t.\end{cases}$
Ta có $\overrightarrow{I_2A}=(-3;1;1)$, $\overrightarrow{I_2B}=(-1;-3;-1)$.
Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{I_2A};\overrightarrow{I_2B}\right]=(2;-4;10)=2(1;-2;5)$.
Phương trình đường thẳng d_2 là $d_2:\begin{cases}x=3+s\\y=1-2s\\z=1+5s.\end{cases}$
Xét hệ phương trình $\begin{cases}1+5t=3+s\\1+2t=1-2s\\-1+t=1+5s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\s=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$
Suy ra $I=\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.
Bán kính mặt cầu S là $R=IA=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(2-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(2+\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{129}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(0;3;0)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;1)$ bán kính $R=3$, biết $M(x_0;y_0;z_0)\in(S)$ sao cho $A=2x_0-y_0+2z_0$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN là

A. 3. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.
Từ $A=2x_0-y_0+2z_0$ ta được $A-6=2(x_0-1)-(y_0+2)+2(z_0-1)$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức

Bunyakovsky ta được
$|A-6| = |2(x_0-1)-(y_0+2)+2(z_0-1)|$
$|A-6| \le \sqrt{(2^2+1+2^2)\left((x_0-1)^2+(y_0+2)^2+(z_0-1)^2\right)} = 9$ hay $|A-6| \le 9 \Leftrightarrow -3 \le A \le 15$.
Do đó A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_0-y_0+2z_0=-3 \\ \dfrac{x_0-1}{2}=\dfrac{y_0+2}{-1}=\dfrac{z_0-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-y_0+2z_0=-3 \\ x_0=1+2t \\ y_0=-2-t \\ z_0=1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-1 \\ z_0=-1. \end{cases}$$

Do đó $M(-1;-1;-1)$, khi đó $MN=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P): $2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q): $3x+4y-4z+5=0$ cắt mặt phẳng (P) tại B. Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB.

A. $MB=\sqrt{5}$. **B.** $MB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $MB=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **D.** $MB=\sqrt{41}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với (Q) có dạng là d: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}$.

Khi đó xét phương trình tương giao giữa d và (P) là: $2(1+3t)+2(2+4t)+(3+4t)+9=0$
$\Rightarrow t=-1$. Suy ra tọa độ điểm B là $B(-2;-2;1)$.

Ta có, hình cầu đường kính AB cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn đường kính BM' với M' là hình chiếu của A lên (P). Nên để MB lớn nhất thì M trùng M' hay M là hình chiếu của A lên (P) (khi đó BM là đường kính của hình tròn).

Dễ có phương trình đường thẳng AM là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{cases}$. Đường thẳng này giao với mặt phẳng (P) tại $M(-3;-2;-1)$.

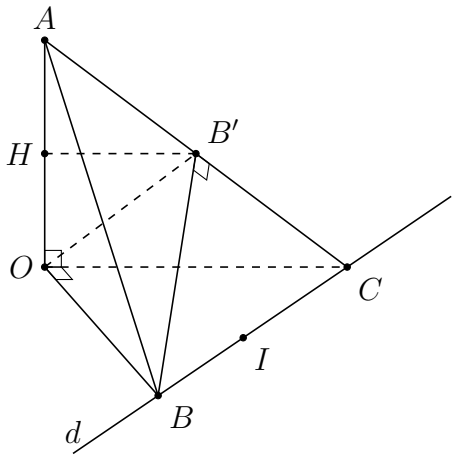
Suy ra $MB=\sqrt{(-3+2)^2+(-2+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B,C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC). Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC. Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **C.** $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{60}}{10}$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;1;1)$, VTCP của d là $\vec{u}=(2;-1;-1)$. Vì $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}=0$ nên $OA\perp d$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa OA và $(P)\perp d$, $I=(P)\cap d\Rightarrow I(0;1;-1)$.
Lại thấy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ nên $OA\perp OI$, suy ra $OA\perp(OBC)$.
Mà $(OAB)\perp(OAC)$ nên $OB\perp OC$, suy ra $OB\perp(OAC)$.
Khi đó ta được $AC\perp(OBB')\Rightarrow AC\perp OB'$.
Gọi $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm OA thì B' thuộc mặt cầu (S) cố định tâm H bán kính $\dfrac{OA}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Mà B' thuộc mặt phẳng $(ABC)\colon 2x+5y-z-6=0$ cố định nên đường tròn cố định quỹ tích của B' là giao tuyến của (S) và (ABC) có bán kính là

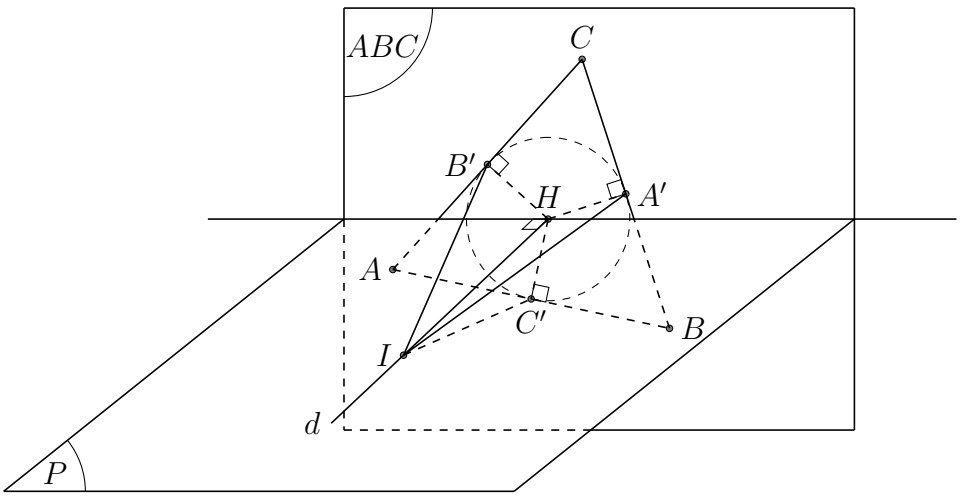
$$r=\sqrt{\left(\frac{OA}{2}\right)^2-\mathrm{d}^2[H,(ABC)]}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{9}{30}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(6;0;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA?

A. 4. **B**. Vô số. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.



Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow x+y+z-6=0$.
Xét phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1 \Leftrightarrow 6x-4y-2z=0$.
Khi đó $(P)\colon 3x-2y-z=0$ là mặt phẳng chứa đường tròn (C) là giao tuyến của (S_1) và (S_2).
Gọi I là tâm của mặt cầu (S); gọi C', A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên AB, BC, CA và H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (ABC).
Vì (S) tiếp xúc với AB, BC, CA nên $IA'=IB'=IC'$. Suy ra $\triangle IHA'=\triangle IHB'=\triangle IHC'$
$\Rightarrow HA'=HB'=HC' \Rightarrow H$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Nhận thấy $\triangle ABC$ đều nên H cũng là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow H(2;2;2)$.
Mặt khác, ta lại thấy $(P)\perp(ABC)$ (do $\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(ABC)}=0$) và $H(2;2;2)\in(P)$.
Suy ra mọi điểm I nằm trên đường thẳng d mà đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC) đều cách đều AB, BC, CA. Vậy có vô số mặt cầu (S) thỏa mãn bài toán.

Nhận xét:

1. Nếu $(P)\perp(ABC)$ và $H\notin(P)$ thì không tồn tại tâm I.
2. Nếu (P) cắt và không vuông góc (ABC) hoặc $(P)\parallel(ABC)$ thì có duy nhất một tâm I.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+6z-5=0$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+3=0$. Gọi M là tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (Q) di động vuông góc với mặt phẳng (P). Tập hợp các điểm M là

A. Đường tròn: $x^2+y^2+z^2+2x-2y+6z-5=0$; $x-2y+2z+9=0$.

B. Mặt phẳng: $x-2y+2z-9=0$.

C. Đường tròn: $x^2+y^2+z^2+2x-2y+6z-5=0$; $x-2y+2z-9=0$.

D. Mặt phẳng: $x-2y+2z+9=0$.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=16$. Gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu suy ra $I(-1;1;-3)$ và $R=4$. Khi đó $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|-1-2-6+3|}{3}=2$ suy ra mặt phẳng (P) luôn cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Do giả thiết suy ra $IM\perp(Q)$ suy ra M thuộc mặt phẳng (α) chứa IM.
Do đó $(\alpha)\parallel(P)$ nên phương trình $(\alpha): x-2y+2z+m=0$ $(m\neq 3)$. Vì $I\in(\alpha)$ nên $-1-2-6+m=0\Leftrightarrow m=9$ suy ra phương trình $(\alpha): x-2y+2z+9=0$. Do đó M thuộc đường tròn là giao của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

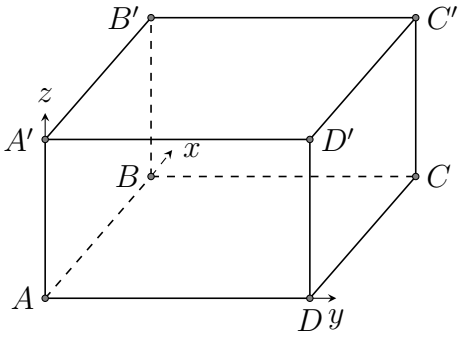
Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M là điểm trên mặt phẳng $(A'BD)$ sao cho $CM^2+C'M^2+B'M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính BM.

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **D**. $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $CC'B$, ta có



$$\begin{aligned} & CM^2+C'M^2+B'M^2 \\ = \ & (\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GM})^2+(\overrightarrow{C'G}+\overrightarrow{GM})^2+(\overrightarrow{B'G}+\overrightarrow{GM})^2 \\ = \ & CG^2+C'G^2+B'G^2+2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{C'G}+\overrightarrow{B'G})+3GM^2 \\ = \ & CG^2+C'G^2+B'G^2+3GM^2. \end{aligned}$$

Vậy $CM^2+C'M^2+B'M^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G lên $(A'BD)$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phương trình mặt phẳng là $(A'BD)\colon x+y+z-1-0$, $C(1;1;0)$, $C'(1;1;1)$, $B'(1;0;1) \Rightarrow G\left(1;\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Phương trình đường thẳng (Δ) qua G và vuông góc với $(A'BD)$ là $\begin{cases} x=1+t \\ y=\frac{2}{3}+t \\ z=\frac{2}{3}+t. \end{cases}$

Có $M=(\Delta)\cap(A'BD)$. Vì $M\in(\Delta) \Rightarrow M\left(1+t;\frac{2}{3}+t;\frac{2}{3}+t\right)$.

Mặt khác $M\in(A'BD) \Rightarrow \frac{4}{3}+3t=0 \Rightarrow t=-\frac{4}{9} \Rightarrow M\left(\frac{5}{9};\frac{2}{9};\frac{2}{9}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{4}{9};\frac{2}{9};\frac{2}{9}\right) \Rightarrow BM=\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

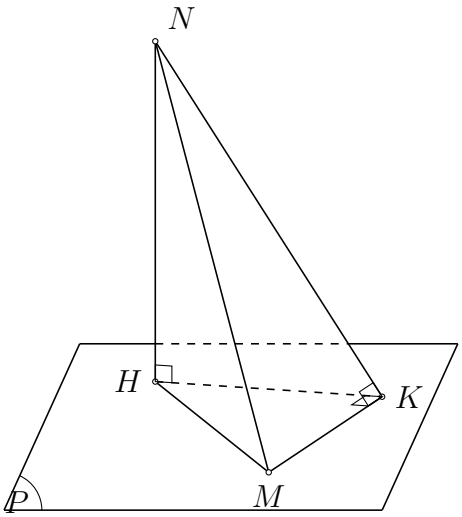
Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}-\frac{z}{-2}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với trục tung góc lớn nhất. Biết rằng phương trình (P) có dạng là $ax+by+cz+9=0$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 9. **B**. 5. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;-2)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và song song với trục Oy. Phương trình tham số của $\Delta\colon \begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=0. \end{cases}$



Lấy điểm $N(1;2;0)\in\Delta$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Khi đó $((P),d)=((P),\Delta)=\widehat{NMH}$. Lại có $\cos\widehat{NMH}=\frac{MH}{NM}\le\frac{MK}{MN}$.

Vậy $\widehat{NMH}$ lớn nhất khi và chỉ khi H trùng với $K \Leftrightarrow (P)$ đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (Q), ((Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Oy).

Véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=[\vec{u},\vec{j}]=(2;0;1)$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{n_Q},\vec{u}]=(1;5;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $1(x-1)+5(y+2)-2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+5y-2z+9=0$. Vậy $a+b+c=4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho m,n là hai số thực dương thỏa mãn $m+2n=1$. Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(P): mx+ny+mnz-mn=0$ với các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Khi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất thì $2m+n$ có giá trị bằng

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** 1.

Lời giải.

$(P): mx+ny+mnz-mn=0$.
Suy ra $A(n;0;0), B(0;m;0), C(0;0;1)$.
Tâm mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ là $K(\frac{n}{2};\frac{m}{2};\frac{1}{2})$.
Bán kính $r=OK=\dfrac{\sqrt{n^2+m^2+1}}{2}$.
r nhỏ nhất khi và chỉ khi n^2+m^2+1 nhỏ nhất.
$m+2n=1 \Leftrightarrow m=1-2n \Rightarrow n^2+m^2+1=5n^2-4n+1$.
Xét $P(n)=5n^2-4n+1=5\left(n-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$.
Suy ra r nhỏ nhất $\Leftrightarrow n=\dfrac{2}{5} \Rightarrow m=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$. Khi đó $2m+n=\dfrac{4}{5}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=-2+t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A, cắt mặt cầu tại B sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$ và B có hoành độ là số nguyên. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là

A. $2x+4y-4z-19=0$. **B.** $3x-6y-6z-62=0$.
C. $2x-4y-4z-43=0$. **D.** $3x+6y-6z-31=0$.

Lời giải.

Vì $A\in\Delta$ nên ta có $A(3+t;-1-t;-2+t)$.
Gọi $B(x,y,z)$.
$\overrightarrow{AM}=(-2-t;3+t;1-t), \overrightarrow{AB}=(x-3-t;y+1+t;z+2-t)$.
Do $\dfrac{AM}{AB}=3$ nên $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AM}\end{array}\right.$.
Trường hợp 1: $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$. Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x-3-t=-6-3t \\ y+1+t=9+3t \\ z+2-t=3-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3-2t \\ y=8+2t \\ z=1-2t \end{cases}.$$
Vì $B\in(S)$ nên
$(-3-2t-2)^2+(8+2t+5)^2+(1-2t+7)^2-14=0$
$\Leftrightarrow 12t^2+40t+244=0$ vô nghiệm.
Trường hợp 2: $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AM}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x-3-t=6+3t \\ y+1+t=-9-3t \\ z+2-t=-3+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9+4t \\ y=-10-4t \\ z=-5+4t \end{cases}.$$

Vì $B \in (S)$ nên

$$(9+4t-2)^2+(-10-4t+5)^2+(-5+4t+7)^2-14=0 \Leftrightarrow 48t^2+112t+64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Vì B có hoành độ nguyên nên $t=-1$. Từ đó, ta được $A(2;0;-3), B(5;-6;-9)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

$2x-4y-4z-43=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(3;2;1), C\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ và M thay đổi sao cho hình chiếu của M lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC và các mặt phẳng $(MAB), (MBC), (MCA)$ hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của OM.

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{28}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (ABC).

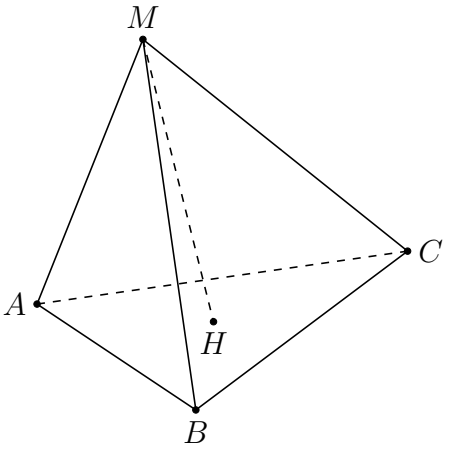
Giả thiết suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên thỏa $BC\cdot\overrightarrow{HA}+AC\cdot\overrightarrow{HB}+AB\cdot\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Ta có $AB=3, AC=4, BC=5$, suy ra

$5\cdot\overrightarrow{HA}+4\cdot\overrightarrow{HB}+3\cdot\overrightarrow{HC}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5(x-1)+4(x-3)+3x+5=0 \\ 5y+4(y-2)+3y-4=0 \\ 5z+4(z-1)+3z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1. \end{cases}$$

Hay H là $H(1;1;1)$.



Phương trình đường thẳng MH nhận $\vec{u}=\vec{n}_{(ABC)}$ làm véc-tơ chỉ phương nên MH: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Khi đó $OM_{\min}=\mathrm{d}(O;MH)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MH},\overrightarrow{OH}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MH}\right|}=\dfrac{|[(1;-2;2),(1;1;1)]|}{|(1;-2;2)|}=\dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

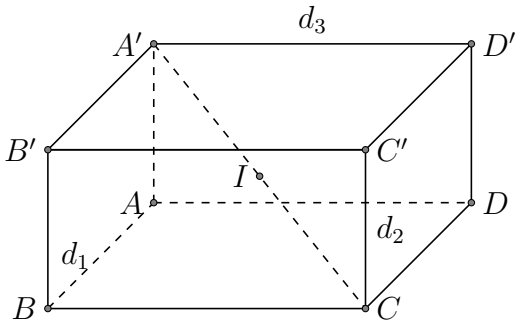
Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$, $(d_2): \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$, $(d_3): \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$. Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=10$. **B.** $S=11$. **C.** $S=12$. **D.** $S=13$.

Lời giải.

Nhận xét: ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc với nhau và cách đều nhau.
Dựng hình lập phương sao cho $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh.
Ta có cạnh hình lập phương là $a = 3$.
Ta có:



$$\mathrm{d}^2(I; d_3) = \mathrm{d}^2(I; (A'B'C'D')) + \mathrm{d}^2(I; (ADD'A')) = u^2 + v^2.$$

Cộng vế theo vế ta được:
$3r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2 \geq \frac{1}{2}(x+u)^2 + \frac{1}{2}(y+t)^2 + \frac{1}{2}(z+v)^2 = \frac{3}{2} \cdot 3^2 \Rightarrow r \geq \frac{9}{2}$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi I là tâm hình lập phương.
Mặt phẳng (P) qua d_1 và vuông góc d_2 có phương trình

$$(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 5 = 0.$$

Mặt phẳng (Q) qua d_1 và vuông góc d_3 có phương trình

$$2(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 1 = 0.$$

Ta có $C = d_2 \cap (P)$ nên có tọa độ là nghiệm $\begin{cases} x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

nên $C(3; -1-2)$.

Ta có $A' = d_3 \cap (Q)$ nên có tọa độ là nghiệm $\begin{cases} 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

nên $A'(4; 4; 1)$.

Theo trên thì I là trung điểm của CA' nên I có tọa độ $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{A'} + x_C}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_I = \dfrac{y_{A'} + y_C}{2} = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z_I = \dfrac{z_{A'} + z_C}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy tọa $S = a + 2b + 3c = 11$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ và ba điểm $A(-1; -3; 1)$, $B(0; -7; 0)$, $C(-2; -1; 1)$. Gọi $D(a; b; c)$ thuộc (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $P = a + b + c$.

A. $P = \frac{1}{3}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = \frac{5}{3}$.

Lời giải.

☑ Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(D, (ABC)) \cdot S_{ABC}$.

☑ Do S_{ABC} cố định nên V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(D, (ABC))$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow D$ là giao điểm của mặt cầu (S) với đường thẳng qua tâm I, vuông góc với mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $\mathrm{d}(D, (ABC)) = \mathrm{d}(I, (ABC)) + R$.

☑ Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$. Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với (ABC).
Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-4;-1), \overrightarrow{AC}=(-1;2;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;-1;-2)$.
Suy ra d: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Giao điểm của d với (S) là $D\left(\frac{7}{3};-\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ hoặc $D\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

☑ Ta có $(ABC)\colon 2x-y-2z-7=0$.
Với $D\left(\frac{7}{3};-\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ ta có $\mathrm{d}(D,(ABC))=\frac{1}{3}$. Với $D\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ ta có $\mathrm{d}(D,(ABC))=\frac{11}{3}$.

☑ Vậy $\mathrm{d}(D,(ABC))$ lớn nhất là $\frac{11}{3}$ khi $D\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right) \Rightarrow a=-\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}, c=\frac{4}{3} \Rightarrow P=\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

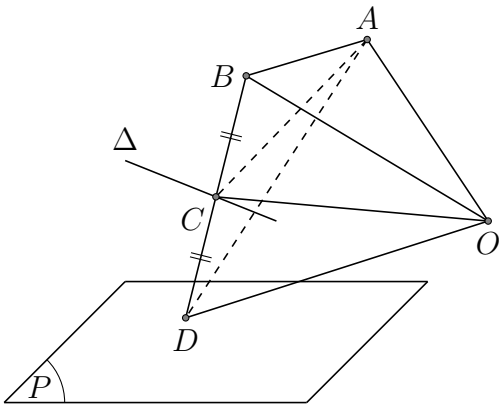
Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-2;1;3), B(3;-2;4)$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-6}{11}=\dfrac{z+1}{-4}$ và mặt phẳng $(P)\colon 41x-6y+54z+49=0$. Đường thẳng (d) đi qua B, cắt đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) lần lượt tại C và D sao cho thể tích của 2 tứ diện $ABCO$ và $OACD$ bằng nhau, biết (d) có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(4;b;c)$. Tính $b+c$.

A. $b+c=11$. **B.** $b+c=6$. **C.** $b+c=9$. **D.** $b+c=4$.

Lời giải.

Ta có

$$1=\frac{V_{OABC}}{V_{OACD}}=\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(O,(ABC))\cdot S_{ABC}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}(O,(ABC))\cdot S_{ACD}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{BC}{CD}.$$



Nên $BC=CD$.
Vì $C\in\Delta \Rightarrow C(2t+1;11t+6;-4t-1)$.
C là trung điểm của BD nên $D(4t-1;22t+14;-8t-6)$.

Điểm $D\in(P)$ nên $41(4t-1)-6(22t+14)+54(-8t-6)+49=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow C(-1;-5;3)$.
$\overrightarrow{CB}=(4;3;1)=\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.
Vậy $b=3$, $c=1 \Rightarrow b+c=4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ và $(S_2)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C).

A. $J\left(\frac{1}{3};\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $J\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $J\left(-\frac{1}{3};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$. **D.** $J\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1), (S_2) có tâm lần lượt là $I_1(1;1;2)$ và $I_2(-1;2;-1)$.
Tọa độ các giao điểm của (S_1) và (S_2) thỏa mãn hệ $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16 \quad (1) \\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9 \quad (2) \end{cases}$.
Lấy phương trình (1) trừ (2) vế với vế ta được phương trình mặt phẳng (P) chứa đường tròn giao tuyến

(C) là $-4x+2y-6z=7$.
Khi đó ta có $J=I_1I_2\cap(P)$, mà $\overrightarrow{I_1I_2}=(-2;1;-3)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng I_1I_2, suy ra $I_1I_2\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$. Do đó tọa độ điểm J là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -4x+2y-6z=7 \\ \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{7}{4} \\ z=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow J\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right).$$

Chọn đáp án D □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$ và tọa độ hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Biết mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng điểm C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $R=4$. **B.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$. **D.** $R=6$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $AB\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.
Gọi $M=AB\cap(P)$. Xét phương trình $1+t+1+t-(1+t)-3=0\Leftrightarrow t=2$. Suy ra $M(3;3;3)$.
Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại C nên MC là tiếp tuyến, suy ra $MC^2=MA\cdot MB$;
mà $MA=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}$ và $MB=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=\sqrt{108}$ nên $MC^2=36$.
Vậy điểm C luôn thuộc đường tròn tâm M bán kính $R=6$ và đường tròn này nằm trong mặt phẳng (P).

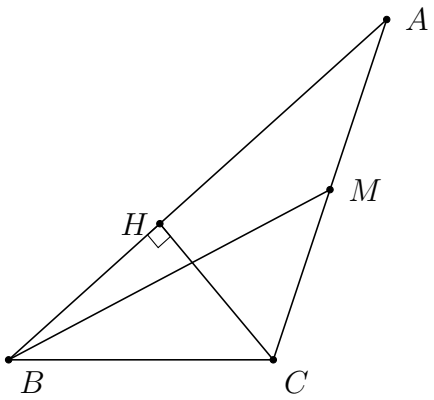
Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;1)$, đường trung tuyến kẻ từ B và đường cao kẻ từ C lần lượt có phương trình $\dfrac{x-8}{10}=\dfrac{y+7}{-9}=\dfrac{z-5}{5}$, $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$. Biết $B\,(a;b;c)$, khi đó $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

Giả sử đường cao là CH: $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$ ta có véc-tơ chỉ phương của CH là $\vec{u}=(2;5;-1)$.
B thuộc đường trung tuyến BM: $\dfrac{x-8}{10}=\dfrac{y+7}{-9}=\dfrac{z-5}{5}$ nên $B(8+10t;-7-9t;5+5t)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(7+10t;-8-9t;4+5t)$.
Vì $CH\perp AB$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow -30t-30=0\Leftrightarrow t=-1$
$\Rightarrow B(-2;2;0)$.
Vậy $a+b+c=0$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0), B(1;-2;4), C(13;1;0)$ và d là đường thẳng mà mọi điểm của d luôn cách đều A,B,C. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=7\\ y=-\dfrac{1}{2}+4t\\ z=2+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=7\\ y=1-8t\\ z=-6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{1}{2}-24t\\ z=2-18t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=5\\ y=48t\\ z=\dfrac{4}{3}+36t\end{cases}$.

Lời giải.

d luôn cách đều A,B,C nên $d\perp(ABC)$ tại tâm I (I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC)
Nhận xét : $\overrightarrow{AB}=(0;-3;4), \overrightarrow{AC}=(12;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A nên I là trung điểm cạnh $BC\Rightarrow I\left(7;-\dfrac{1}{2};2\right)$.

d qua I và có VTCP $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;48;36)$ hay $\vec{u'}=(0;4;3)$. Vậy d: $\begin{cases}x=7\\ y=-\dfrac{1}{2}+4t\\ z=2+3t\end{cases}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=2-t\end{cases}$, biết rằng d và trục Ox chéo nhau. Lập phương trình đường vuông góc chung của d và trục Ox.

A. $\begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=0\\ y=2t\\ z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\ y=2-t\\ z=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi HK là đoạn vuông góc chung của d và trục Ox ($H\in d, K\in Ox$).
Khi đó $H(0;t;2-t), K(t';0;0)\Rightarrow\overrightarrow{HK}=(t';-t;-2+t)$.
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{HK}\cdot\vec{u}_d=0\\ \overrightarrow{HK}\cdot\vec{i}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\cdot t'+1(-t)-1(-2+t)=0\\ t'\cdot1+0(-t)+0(-2+t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\Rightarrow H(0;1;1)\\ t'=0\Rightarrow K(0;0;0)\equiv O\end{cases}$.

Ta suy ra $\overrightarrow{HK} = (0; -1; -1)$.

Đường thẳng (HK) qua O và có VTCP $\overrightarrow{HK} = (0; -1; -1)$. Vậy $(HK): \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(1; 7; -2)$ và $C(1; 4; -2)$. Mặt phẳng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ qua A và thỏa $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $b + c + d$.

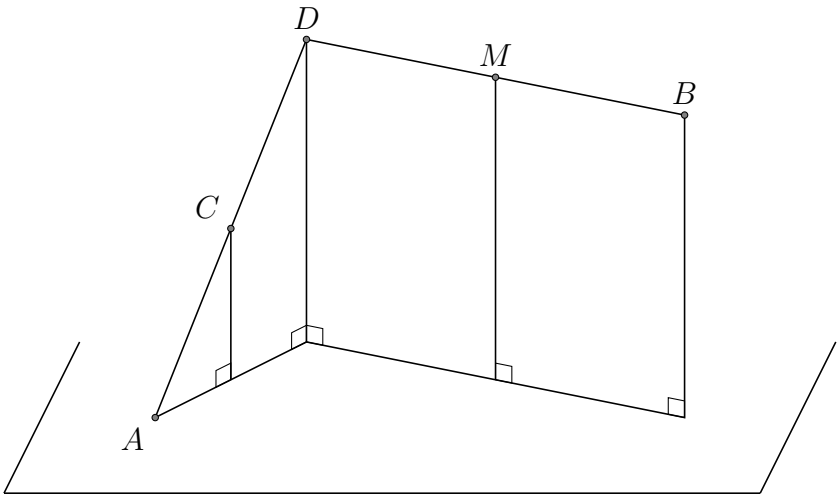
A. 77. **B**. 52. **C**. 10. **D**. 65.

Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng với A qua C và M là trung điểm của BD.
Ta có $D(3; 12; -8)$ và $M\left(2; \frac{19}{2}; -5\right)$.

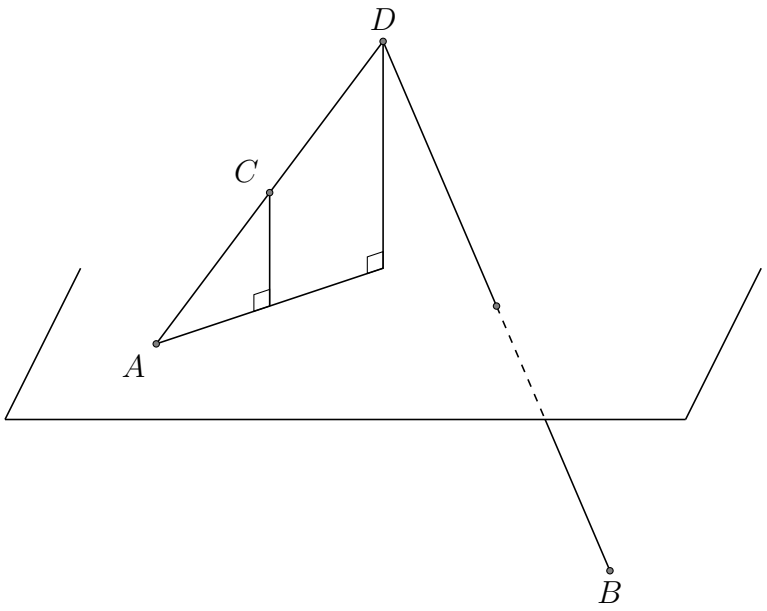
Trường hợp 1. B và C nằm cùng phía so với (P). Khi đó,

$$T = d_{(B,(P))} + 2d_{(C,(P))} = d_{(B,(P))} + d_{(D,(P))} = 2_{d(M,(P))} \leq 2MA = 33.$$



Trường hợp 2. B và C nằm khác phía so với (P). Khi đó,

$$T = d_{(B,(P))} + 2d_{(C,(P))} = d_{(B,(P))} + d_{(D,(P))} \leq BD = \sqrt{65}.$$



Từ đó suy ra T lớn nhất khi $d(M,(P))=MA$, tức $MA\perp(P)$.
Suy ra (P) nhận $\overrightarrow{MA}=\left(3;\dfrac{27}{2};-9\right)$ làm một VTPT và (P) chứa A nên có phương trình

$$(P):3(x+1)+\frac{27}{2}(y+4)-9(z-4)=0 \text{ hay } (P):2x+9y-6z+62=0.$$

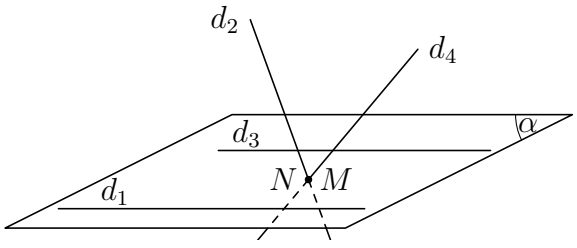
Do đó, $b+c+d=65$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$, $d_3\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-4}{-4}$ và $d_4\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. Có bao nhiêu đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng đã cho?

A. Không có. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có d_1 đi qua $A(1;2;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;2;-2)$.
Ta có d_3 đi qua $B(0;-2;4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_3=(1;-4;4)$.
Suy ra hai đường thẳng d_1 và d_3 song song nhau và $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;4)$.



Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_3, có véc-tơ pháp tuyến

$$\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\vec{u}_1]=(0;-2;-2),\ \text{chọn } \vec{n}=(0;1;1).$$

Suy ra

$$(\alpha)\colon y+z-2=0.$$

Gọi M là giao điểm của d_2 và $(\alpha)\Rightarrow M(4;2;0)$.
Gọi N là giao điểm của d_4 và $(\alpha)\Rightarrow N(4;2;0)$.

Do điểm M và N trùng nhau nên d_2 và d_4 cùng cắt nhau tại một điểm.
Suy ra có vô số đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng đã cho, các đường thẳng này đi qua điểm M.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=3-t' \\ y=t' \\ z=0 \end{cases}$.
Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$.

Lời giải.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2 với $A\in d_1; B\in d_2$.
Gọi $\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2. (S) là mặt cầu tiếp xúc với d_1, d_2 có bán kính nhỏ nhất khi (S) là mặt cầu đường kính AB.
Ta có $A\in d_1 \Leftrightarrow A(2t;t;4), B\in d_2 \Leftrightarrow B(3-t';t';0)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(3-t'-2t;t'-t;-4)$.
AB là đoạn vuông góc chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp d_1 \\ \overrightarrow{AB}\perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_1}=0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}_{d_2}=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t'-5t=-6 \\ 2t'+t=3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=1 \end{cases}.$$

Suy ra $A(2;1;4), B(2;1;0)$. Gọi I là trung điểm AB thì $I(2;1;2); IA=2$.
Vậy mặt cầu (S) tâm I, bán kính IA có phương trình là $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$, $d_2: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u_d}=(1;1;-1)$, $\vec{u_{d_1}}=(2;1;-1)$, $\vec{u_{d_2}}=(-1;1;3)$.
Gọi (P) là mặt phẳng song song với d và chứa d_1 thì (P) đi qua $A(-1;-1;2)$ và có một VTPT là $\vec{n_1}=[\vec{u_d},\vec{u_{d_1}}]=(0;-1;-1)$. Do đó $(P): y+z-1=0$.
Gọi (Q) là mặt phẳng song song với d và chứa d_2 thì (Q) đi qua $B(1;2;3)$ và có một VTPT là $\vec{n_2}=[\vec{u_d},\vec{u_{d_2}}]=(4;-2;2)$. Do đó $(Q): 2x-y+z-3=0$.

Khi đó, đường thẳng cần tìm Δ là giao điểm của (P) và (Q), ta có

$$\Delta : \begin{cases} y+z-1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

Hay $\Delta : \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án (B) □

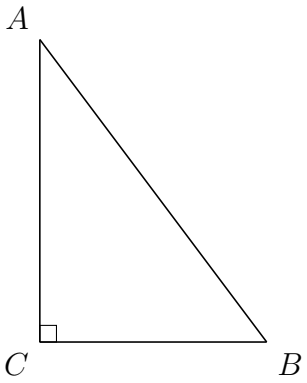
Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại C, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $AB=3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x+z-1=0$. Biết B là điểm có hoành độ dương, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ của C. Tính $a+b+c$.

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 7.

Lời giải.

Ta thấy đường thẳng AB có một VTCP là $\vec{u}=(1;1;-4)$, mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n}=(1;0;1)$ nên góc giữa AB và (α) là φ với

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot1+1\cdot0+(-4)\cdot1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$



Suy ra $\varphi=30^\circ=\widehat{BAC}$.

Hơn nữa, $AC\subset(\alpha)$ và $BC\perp AC$ nên C là hình chiếu của B trên (α).

Ta tìm tọa độ của B.

Ta viết lại $AB: \begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=-8-4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Điểm A là giao điểm của AB và (α).

Xét phương trình $(3+t)+(-8-t)-1=0\Leftrightarrow t=-2$. Vậy $A(1;2;0)$.

Gọi $B(3+t';4+t';-8-4t')$, ta có $AB=3\sqrt{2}\Leftrightarrow(t'+2)^2+(t'+2)^2+(-4t'-8)^2=18$.

Suy ra $t'=-1$ hoặc $t'=-3$. Mà B có hoành độ dương nên ta chọn $t=-1$, khi đó $B(2;3;-4)$.

Đường thẳng BC vuông góc với (α) nên nhận $\vec{n}=(1;0;1)$ làm một VTCP, do đó

$$BC: \begin{cases} x=2+t \\ y=3 \\ z=-4+t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

C chính là giao điểm của BC và (α). Xét phương trình $(2+t)+(-4+t)-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$.

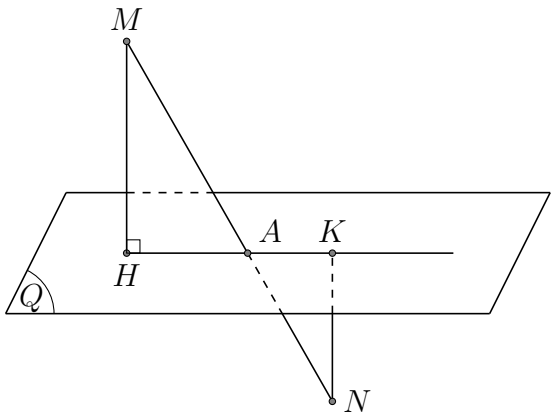
Suy ra $C\left(\dfrac{7}{2};3;-\dfrac{5}{2}\right)$. Vậy $a+b+c=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2;1;0)$, song song với mặt phẳng (P): $x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0)$ và $N(4;0;0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất. Véc-tơ chỉ phương của Δ là

A. $\overrightarrow{u_\Delta}=(0;1;-1)$. **B**. $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;0;1)$. **C**. $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;2;1)$. **D**. $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;1)$.

Lời giải.



Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P).
Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $x-y-z+D=0$, $(D\neq 0)$.
Vì $A\in(Q)\Rightarrow 2-1+D=0\Rightarrow D=-1$. Vậy $(Q)\colon x-y-z-1=0$.
Thay tọa độ các điểm M,N lần lượt vào vế trái phương trình (Q), $VT(M)=-3<0$, $VT(N)=3>0$.
Suy ra M và N nằm khác phía đối với mặt phẳng (Q).
Nhận xét. $\overrightarrow{MA}=(-2;1;0)$, $\overrightarrow{MN}=(4;-2;0)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{MA}\Rightarrow A$ là giao điểm của MN với (Q).
Gọi H,K là hình chiếu vuông góc của M và N trên (Q).Tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0)$ và $N(4;0;0)$ tới đường thẳng Δ đạt giá trị nhỏ nhất khi Δ đi qua H. Khi đó $\overrightarrow{HA}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ.
Phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (Q) có dạng $d\colon\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=-t\end{cases}$. Suy ra $H(t;2-t;-t)$. $H\in(Q)\Rightarrow t-2+t-1=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(1;1;-1)\Rightarrow\overrightarrow{HA}=(1;0;1)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1-1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;-2)$. Giả sử $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=861$ sao cho $P=2MA^2-7MB^2+4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $|a|+|b|+|c|$ bằng
A. 49. **B**. 51. **C**. 55. **D**. 47.

Lời giải.

Gọi K là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{KA}-7\overrightarrow{KB}+4\overrightarrow{KC}=\vec{0}$, suy ra $K(-21;16;10)$. Khi đó

$$P=2MA^2-7MB^2+4MC^2=-MK^2+2KA^2-7KB^2+4KC^2.$$

Suy ra $P_{\min}$ khi và chỉ khi $MK_{\max}$. Do $M\in(S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, nên M là một trong hai giao điểm của đường thẳng KI với mặt cầu. Phương trình đường thẳng $KI\colon\dfrac{x-1}{22}=\dfrac{y}{-16}=\dfrac{z+1}{-11}$. Đường thẳng KI cắt (S) tại hai điểm $K_1(23;-16;-12)$ và $K_2(-21;16;10)$. Vì $KK_1>KK_2$ nên $MK_{\max}\Leftrightarrow K\equiv K_1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(-2;2;3)$. Đường thẳng Δ qua trực tâm H của tam giác ABC và nằm trong mặt phẳng (ABC) cùng tạo với các đường thẳng AB, AC một góc $\alpha<45^\circ$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ với c là số nguyên tố và a, b là số nguyên. Giá trị biểu thức $ab+bc+ca$ bằng bao nhiêu?

A. -67. **B.** 23. **C.** -33. **D.** -37.

Lời giải.

Ta có

- ☑ $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$; $\overrightarrow{AC}=(-3;0;4)$.
- ☑ $\vec{n}_{(ABC)}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-8;-10;-6)$.
- ☑ $\cos(AB,\Delta)=\dfrac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- ☑ $\cos(AC,\Delta)=\dfrac{|-3a+4c|}{5\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Theo đề bài, ta suy ra

$$\begin{aligned}&\cos(AB,\Delta)=\cos(AC,\Delta)\\ \Leftrightarrow\ &5|a-2b+2c|=3|-3a+4c|\\ \Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix}7a-5b-c=0 & (1)\\ 2a+5b-11c=0 & (2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vì $\Delta\subset(ABC)$ nên $\vec{u}\cdot\vec{n}_{(ABC)}=0\Leftrightarrow 4a+5b+3c=0$. (3)

*** Trường hợp 1:** Xét hệ phương trình $\begin{cases}7a-5b=c\\ 4a+5b=-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2c}{11}\\ b=-\dfrac{5c}{11}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left(-\dfrac{2c}{11};-\dfrac{5c}{11};c\right)$.

Chọn $c=11$, ta có $\vec{u}=(-2;-5;11)$ (kiểm tra lại điều kiện $\alpha<45^\circ$ ta thấy $\vec{u}$ đang xét thỏa mãn).

*** Trường hợp 2:** Xét hệ phương trình $\begin{cases}2a+5b-11c=0\\ 4a+5b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-7c\\ b=5c\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=(-7c;5c;c)$.

Chọn $c=2$, ta có $\vec{u}=(-14;10;2)$ (kiểm tra lại điều kiện $\alpha<45^\circ$ ta thấy $\vec{u}$ đang xét không thỏa mãn).

Vậy $ab+bc+ca=-67$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=1+3a+at\\ y=-2+t\\ z=2+3a+(1+a)t\end{cases}$. Biết rằng khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Với mọi $M(1+3a+at;-2+t;2+3a+t+at)\in\Delta$, ta có $M\in(P)\colon x+y-z+3=0$, suy ra $\Delta\subset(P)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Mặt khác với mọi $a\in\mathbb{R}$, đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $A(1;-5;-1)$.

Gọi (S) là mặt cầu (có tâm là I) cố định thỏa mãn yêu cầu bài toán, suy ra mặt cầu (S) luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ khi a thay đổi tại điểm A. Suy ra IA vuông góc với (P) và có phương trình là

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=-5+t\\ z=-1-t.\end{cases}\Rightarrow I(1+t;-5+t;-1-t).$$

Điểm $M(1;1;1) \in (S)$ nên $IM = IA \Leftrightarrow t^2 + (t-6)^2 + (t+2)^2 = t^2 + t^2 + t^2 \Leftrightarrow t = 5$
$\Rightarrow R = IA = \sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = 5\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên (P) và $|MA - MB|$ lớn nhất. Giá trị tích $a \cdot b \cdot c$ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 24. **D.** -24.

Lời giải.

Ta có A, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P).
Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (P).
Ta có $|MA - MB| = |MA - MB'| \le AB'$.
Suy ra $|MA - MB|$ lớn nhất khi M là giao điểm của AB' và mp(P).
Phương trình đường thẳng BB' là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$.
Gọi H là giao điểm của BB' và mp(P).
Suy ra $H\left(\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.
Do H là trung điểm của BB' nên $B'\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.
$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.
Phương trình đường thẳng AB' là $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -3 + 2t \\ z = -4t. \end{cases}$
Tọa độ điểm $M(6;-1;-4)$.
Suy ra $a \cdot b \cdot c = 24$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.
Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $2x + y - 3z + 3 = 0$. **B.** $x + 2y - z - 1 = 0$.
C. $3x + 2y - z + 1 = 0$. **D.** $2x - y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

- Đường thẳng d đi qua $M_0(0;0;1)$ có VTCP $\vec{u}(1;1;1)$.
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và d. Ta có $d(A,(P)) = AH \le AK$. Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$.
Do đó $d(A,(P))_{max} = AK$. Khi đó (P) đi qua $M_0(0;0;1)$ nhận $\overrightarrow{AK}$ làm véc-tơ pháp tuyến.
- Do $K \in d$ nên $K(t;t;1+t)$ và $\overrightarrow{AK} = (t-3;t-2;t+2)$.
Ta có : $\overrightarrow{AK} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $\overrightarrow{AK} = (-2;-1;3)$ nên $(P): 2x+y-3z+3=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc $90°$. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2;-1;3)$. **B.** $I(-1;-2;3)$. **C.** $K(3;o;15)$. **D.** $J(-3;2;7)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}$.

Theo đề bài B là giao điểm của đường thẳng d và (P) nên giá trị tham số t ứng với tọa độ điểm B là nghiệm phương trình:

$2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(-2;-2;1)$.

Ta thấy M nằm trên giao tuyến của mặt cầu đường kính AB với mặt phẳng (P). Do đó MB lớn nhất khi nó là đường kính, hay M là hình chiếu của A trên (P).

Gọi d' là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Đường thẳng $d' \perp (P)$ có VTCP $\vec{m}=(2;2;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=2+2t' \\ z=-3-t' \end{cases}$.

Do M là hình chiếu của A trên (P) nên giá trị tham số t ứng với tọa độ điểm M là nghiệm phương trình $2(1+2t')+2(2+2t')-(-3-t')+9=0 \Leftrightarrow t'=-2$.

Do đó tọa độ điểm $M(-3;-2;-1)$. Từ đó $\overrightarrow{MB}=(1;0;2)$.

Vậy phương trình đường thẳng MB là $\begin{cases} x=-3+a \\ y=-2 \\ z=-1+2a \end{cases}$.

Chỉ có tọa độ điểm $I(-1;-2;3)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng MB.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Hai điểm $A\in d_1$ và $B\in d_2$ sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Khi A, B thay đổi, tập hợp trung điểm của AB là

A. một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

B. một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-5;9;8)$.

C. một mặt phẳng có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-5)$.

D. một mặt phẳng có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;5;-2)$.

Lời giải.

Ta có $A(3a;1-a;-1+a)$, $B(2+b;1-2b;-3+b) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2+b-3a;-2b+a;-2+b-a)$.

Ta có $AB \parallel (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_{(P)}=0 \Rightarrow 2b=3a$.

Toạ độ trung điểm $I\left(\dfrac{2+3a+b}{2};\dfrac{2-a-2b}{2};\dfrac{-4+a+b}{2}\right) \Rightarrow I\left(1+\dfrac{3}{2}b;1-\dfrac{4}{3}b;-2+\dfrac{5}{6}b\right)$.

Vậy tập hợp trung điểm của AB là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-9; 8; -5)$.
Chọn đáp án A □

Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC nhọn có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Gọi I là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua I là

A. $(S)\colon (x+4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=20$. **B.** $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$.
C. $(S)\colon x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=20$. **D.** $(S)\colon (x+2)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

Lời giải.

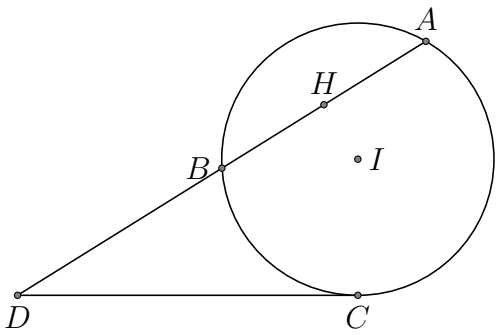
Theo tính chất của hình học phẳng thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HOK.
Do đó $HK\cdot\overrightarrow{IO}+OK\cdot\overrightarrow{IH}+OH\cdot\overrightarrow{IK}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\cdot\overrightarrow{IO}+4\cdot\overrightarrow{IH}+3\cdot\overrightarrow{IK}=\vec{0}\Rightarrow I(0;1;1)$.
Đường thẳng AH có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{IH}=(2;1;0)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=1.+ \end{cases}$
Vì $A\in AH$ nên $A(2t;1+t;1)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(2t;t+1;1)$.
Mà $OI\perp OA$ nên $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA}=0\Leftrightarrow 2t\cdot 0+(1+t)\cdot 1+1\cdot 1=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow A(-4;-1;1)$.
Vậy phương trình mặt cầu tâm A, bán kính AI là $(S)\colon (x+4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=20$.
Chọn đáp án A □

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$ và hai điểm $A(1;2;0)$, $B(2;3;1)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2\sqrt{3}$. **B.** $r=12$. **C.** $r=6$. **D.** $r=\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu S.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1;)\Rightarrow AB\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=t. \end{cases}$
Gọi D là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P), suy ra $D(0;1;-1)$. Ta có $\overrightarrow{DA}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{DB}=(2;2;2)$.
Suy ra $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=6$ (1).



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} &= \left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HA}\right)\\ &= DH^2-HA^2\\ &= DI^2-IH^2-HA^2=DI^2-\left(IH^2+HA^2\right)\\ &= DI^2-IA^2=DI^2-IC^2\\ &= DC^2 \quad (2).\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra $DC=\sqrt{6}$
Chọn đáp án D □

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

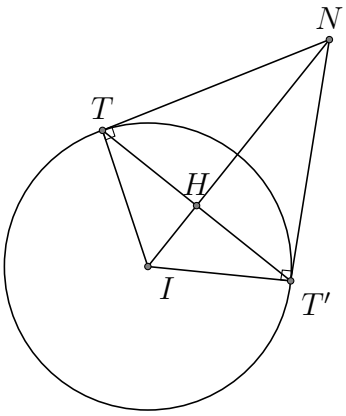
A. $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=1$.

$\begin{cases} IT\perp(P)\Rightarrow IT\perp d \\ IT'\perp(P')\Rightarrow IT'\perp d \end{cases}\Rightarrow d\perp(ITT')$.

Gọi $N=d\cap(ITT')\Rightarrow N$ là hình chiếu của I trên d.



Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow N(t;2+t;-t)$ và $\overrightarrow{IN}=(t-1;2+t;-t+1)$.

$$\overrightarrow{IN}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow N(0;2;0)\Rightarrow\begin{cases} IN=\sqrt{6} \\ \overrightarrow{IN}=(-1;2;1). \end{cases}$$

Ta có $IH\cdot IN=IT^2\Rightarrow IH=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Phương trình đường thẳng $IN:\begin{cases} x=-u \\ y=2+2u \\ z=u \end{cases}\Rightarrow H(-u;2+2u;u)\ u\in\mathbb{R}$

và $\overrightarrow{IH}=(-u-1;2+2u;u+1)$.

$IH=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow IH^2=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow(-u-1)^2+(2u+2)^2+(u+1)^2=\dfrac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=-\dfrac{5}{6}\Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}\right) \\ u=-\dfrac{7}{6}\Rightarrow H\left(\dfrac{7}{6};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{7}{6}\right)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(\dfrac{1}{6};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{6}\right). \end{array}\right.$$

Vì $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IN}\Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=5$.

Lời giải.

Chu vi tam giác ABM đạt giá trị nhỏ nhất khi tổng $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M\in\Delta:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$.

Ta có $MA=\sqrt{(2t-2)^2+(t+4)^2+4t^2}=\sqrt{9t^2+20}$;
$MB=\sqrt{(2t-4)^2+(t+2)^2+(2t-6)^2}=\sqrt{9t^2-36t+56}$.
Như vậy $MA+MB=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$.
Xét hàm số $f(t)=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$ trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(t)=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9t-18}{\sqrt{9t^2-36t+56}}=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$.
$f'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}=-\dfrac{t-2}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}\Leftrightarrow g(t)=g(2-t)$ (1).
Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}$ có $g'(t)=\dfrac{20}{\left(\sqrt{9t^2+20}\right)^3}>0$.
Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow t=2-t\Leftrightarrow t=1$.
Bảng biến thiên của $f(t)$ là

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{29}$	$\nearrow$	$+\infty$

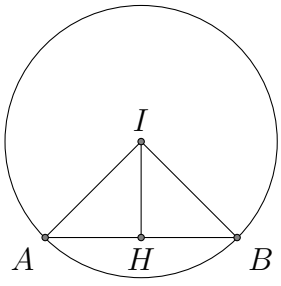
Theo bảng biến thiên, $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1\Rightarrow M(1;0;2)$. Do đó $T=a+b+c=3$

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;5;3)$ cắt đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B với chu vi tam giác IAB bằng $14+2\sqrt{31}$ có phương trình

A. $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=49$. **B.** $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=196$.
C. $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=31$. **D.** $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=124$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d. Đặt $AB=2a$.
Vì $H\in d\Rightarrow H(1+2t;t;2+2t)$. Ta có $\overrightarrow{IH}=(2t-1;t-5;2t-1)$ và $\vec{u}=(2;1;2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.
Ta có $\overrightarrow{IH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow 2(2t-1)+1(t-5)+2(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1$.
Thu được $H(3;1;4)$ và $IH=3\sqrt{2}$.
Theo giả thiết bài toán

$IA+AB+BI=14+2\sqrt{31}\Leftrightarrow 2R+2AH=14+2\sqrt{31}\Leftrightarrow R+\sqrt{R^2-18}=7+\sqrt{31}$.
Giải phương trình trên ta được nghiệm $R=7$.
Vậy phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=49$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d'\colon\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d tạo với đường thẳng d' một

góc lớn nhất.

A. $(P)\colon x-z+1=0$. **B.** $(P)\colon x-4y+z-7=0$.

C. $(P)\colon 3x-2y-2z-1=0$. **D.** $(P)\colon -x+4y-z-7=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d, d' có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(2;1;2)$, $\vec{u}_2=(1;2;1)$.

Lấy điểm $A(1;-1;2)\in d$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt trục hoành tại điểm $B(b;0;0)$.

Khi đó (P) có cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{AB}=(b-1;1;-2)$, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=\left[\vec{u}_1,\overrightarrow{AB}\right]=(-4;2b+2;3-b)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d' và (P), suy ra

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}_P\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{u}_2|}=\frac{|3b+3|}{\sqrt{5b^2+2b+29}\cdot\sqrt{6}}.$$

Đặt $y=\dfrac{b^2+2b+1}{5b^2+2b+29}\geq 0$, suy ra $\sin\varphi=\sqrt{y}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

Nhận thấy, để góc φ lớn nhất thì $\sin\varphi$ lớn nhất, điều đó đồng nghĩa với y phải lớn nhất.

Xét $y=\dfrac{b^2+2b+1}{5b^2+2b+29}\Leftrightarrow(5y-1)b^2+(2y-2)b+(29y-1)=0.$ $(*)$

☑ Trường hợp $y=\dfrac{1}{5}\Rightarrow b=3$.

☑ Trường hợp $y\neq\dfrac{1}{5}$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm b khi và chỉ khi

$$\Delta'=(y-1)^2-(5y-1)(29y-1)\geq 0\Leftrightarrow -144y^2+32y\geq 0\Rightarrow 0\leq y\leq\frac{2}{9}.$$

Từ đó suy ra, để tồn tại b suy ra $0\leq y\leq\dfrac{2}{9}$.

Vậy $y_{\max}=\dfrac{2}{9}$ khi đó $b=7$. Từ đó suy ra $\vec{n}_P=(-4;16;-4)=-4(1;-4;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình

$$1(x-1)-4(y+1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow x-4y+z-7=0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;1;0)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;0)$. **D.** $\vec{u}=(1;2;1)$.

Lời giải.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là đường trung tuyến kẻ từ B, đường phân giác kẻ từ C.

Lấy $C(2+2c;4-c;2-c)\in d_2$, suy ra tọa độ trung điểm của AC là $M\left(2+c;\dfrac{7-c}{2};\dfrac{5-c}{2}\right)$.

Suy ra điểm $M\in d_1$, từ đó ta có $\dfrac{2+c-3}{-1}=\dfrac{\frac{7-c}{2}-3}{2}=\dfrac{\frac{5-c}{2}-2}{-1}\Rightarrow c=1\Rightarrow C(4;3;1)$.

Giả sử mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d_2, suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;-1)$, suy ra phương trình (P) là

$$2(x-2)-(y-3)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z+2=0.$$

Tọa độ giao điểm H giữa (P) và d_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x-y-z+2=0 \\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=-2 \\ x+2y=10 \\ x+2z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow H(2;4;2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d_2, suy ra H là trung điểm của AA', suy ra $A'(2;5;1)$. Do d_2 là đường phân giác góc trong tại C, suy ra $A' \in BC$, suy ra $\overrightarrow{A'C}=(2;-2;0)=2(1;-1;0)$ là một véc-tơ chỉ phương của BC.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2)$, $B(-3;1;0)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=-1+t. \end{cases}$ Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là tâm mặt cầu có bán kính bé nhất trong tất cả các mặt cầu đi qua A, B và tiếp xúc d. Tính tổng $P=x_0+y_0+z_0$.

A. $P=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có $I=(-1;2;1)$, $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;-2)$, suy ra phương trình mặt phẳng trung trực (α) của AB là: $2x+y+z-1=0$. Dễ thấy $d \subset (\alpha)$. Do đó mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán có tâm nằm trên đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc d.

Δ có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=[\vec{u_d};\vec{n_\alpha}]=(-2;2;2)$. Suy ra phương trình của $\Delta\colon \begin{cases} x=-1-t \\ y=2+t \\ z=1+t. \end{cases}$. Ta thấy d cắt Δ tại $H(1;0;-1)$. Điểm $M \in \Delta$ nên $M=(-1-t;2+t;1+t)$.

Ta có $MA=MH \Leftrightarrow (-2-t)^2+(-1+t)^2+(-1+t)^2=(-2-t)^2+(2+t)^2+(2+t)^2 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$. Từ đây suy ra $M=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2}\right)$.

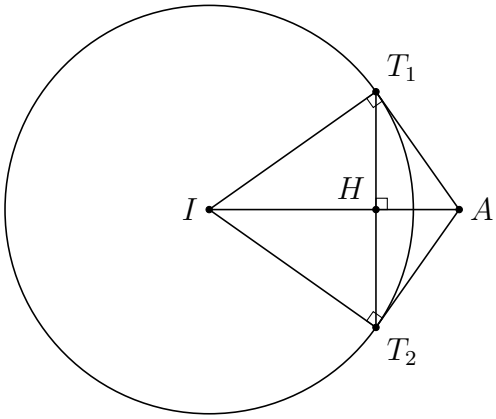
Chọn đáp án B □

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-13}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Qua d dựng các mặt phẳng tiếp xúc với (S) lần lượt tại T_1, T_2. Tìm tọa độ trung điểm H của T_1T_2.

A. $H(7;-4;6)$. **B.** $H(9;6;4)$. **C.** $H(2;10;-2)$. **D.** $H(8;1;5)$.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=9$. Gọi A là hình chiếu của I trên đường thẳng d, khi đó các điểm I, T_1, T_2, A đồng phẳng (cùng thuộc mặt phẳng qua I, vuông góc với đường thẳng d). Do $A\in d$ nên $A(13-t;t-1;4t)$, suy ra $\overrightarrow{IA}=(12-t;t-3;4t-3)$. Vì $IA\perp d$ nên



$$\overrightarrow{IA}\cdot\vec{u}_d=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}.$$

Suy ra $A\left(\frac{23}{2};\frac{1}{2};6\right)$ và $\overrightarrow{IA}=\left(\frac{21}{2};-\frac{3}{2};3\right)$. Ta có

$$\overrightarrow{IH}=\frac{IH}{IA}\overrightarrow{IA}=\frac{IT_1^2}{IA^2}\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}=(7;-1;2)$$

Vậy $H(8;1;5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn MA^4+MB^4 nhỏ nhất. Tìm x_0.

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=2$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AM, ta có $I(2;-1;0)$.

$$\begin{aligned}MA^4+MB^4&=\left(MA^2+MB^2\right)^2-2MA^2\cdot MB^2\\&=\left(2MI^2+\frac{AB^2}{2}\right)^2-2\left(MI^2-\frac{AB^2}{4}\right)^2\\&=4MI^2+2MI^2\cdot AB^2+\frac{AB^4}{4}-2MI^2+MI^2\cdot AB^2-\frac{AB^4}{8}\\&=2MI^4+3MI^2\cdot AB^2+\frac{AB^4}{4}\\&=2\left(MI^2+\frac{3AB^2}{4}\right)^2-\frac{7}{10}AB^4\end{aligned}$$

Do đó MA^4+MB^4 nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên d.

Lấy $M(2+t;-1+2t;3t)\in d\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(t;2t;3t)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow t+4t+9t=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow M(2;-1;0)\equiv I$.

Vậy $x_0=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2;-2;0)$, $B(3;-2;0)$, $C(3;3;0)$, $D(-2;3;0)$, $M(-2;-2;5)$, $N(3;3;5)$, $P(3;-2;5)$, $Q(-2;3;5)$. Hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(5;0;0)$, $\overrightarrow{DC}=(5;0;0)$ nên $ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác, $\overrightarrow{AD}=(0;5;0)\Rightarrow\begin{cases}AB\perp AD\\AB=AD=5\end{cases}$. Vậy $ABCD$ là hình vuông.

Tương tự, $MNPQ$ cũng là hình vuông.
Lại có $\overrightarrow{AM}=(0;0;5)$ nên $AM\perp(ABCD)$ và $AM=AB=AD$.
Vậy 8 điểm trên tạo thành một hình lập phương nên có 9 mặt phẳng đối xứng.
Chọn đáp án B □

Câu 66. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường thẳng

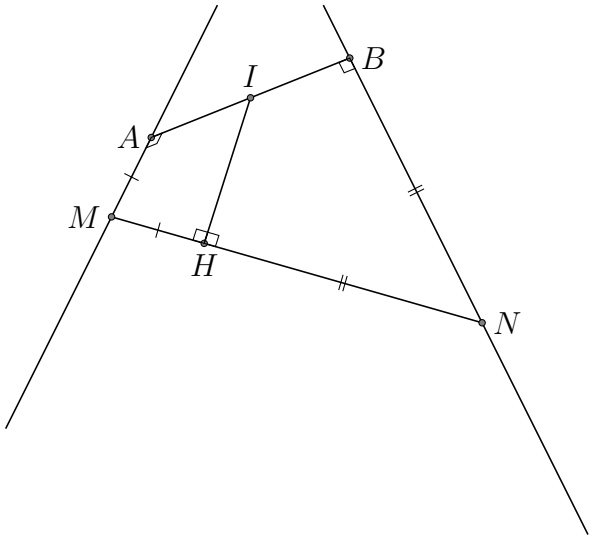
$$\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1},\Delta_2:\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$$

và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-1)$. Trên Δ_1 lấy điểm M, trên Δ_2 lấy điểm N sao cho $AM+BN=MN$. Biết rằng MN luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có bán kính R. Tìm R.

A. 3. **B.** $\frac{\sqrt{11}}{4}$. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A\in\Delta_1;B\in\Delta_2$ và $AB\perp\Delta_1;AB\perp\Delta_2$. Trên MN ta lấy điểm H sao cho $MH=MA;NH=NB$. Gọi (P) là mặt phẳng qua H và vuông góc với MN. Đặt $I=AB\cap(P)$. Khi đó $\triangle IAM=\triangle IHM\Rightarrow AI=HI$ và $\triangle IBN=\triangle IHN\Rightarrow BI=IH=IA$. Do đó I là trung điểm của AB và $d(I,MN)=IH=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{11}}{2}$. Suy ra MN luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm I và bán kính $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1-2t\\y=3+4t\\z=-2+6t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3t\end{cases}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d_1\perp d_2$. **B.** $d_1\equiv d_2$. **C.** d_1 và d_2 chéo nhau. **D.** $d_1\parallel d_2$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(-2;4;6)$ và đi qua điểm $M(1;3;-2)$.
Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(-1;2;3)$.
Do $\overrightarrow{u_1}=2\overrightarrow{u_2}$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song hoặc chéo nhau.
Thay tọa độ điểm $M(1;3;-2)$ vào phương trình đường thẳng d_2 ta có $\begin{cases}1=1-t\\3=2+2t\\-2=3t\end{cases}$ hệ vô nghiệm.
Vậy $d_1\parallel d_2$.
Chọn đáp án D □

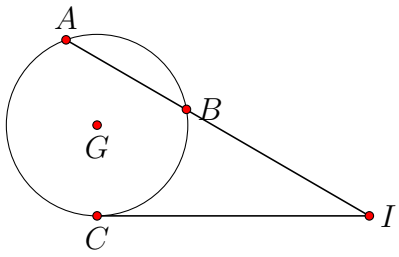
Câu 68. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng

C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $R=12$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=2\sqrt{33}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t. \end{cases}$



Giao điểm của AB và (P) là $I(3;3;3)$.
Suy ra $IA=2\sqrt{3}$ và $IB=6\sqrt{3}$.
Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại C nên IC là tiếp tuyến của mặt cầu (S).
Do đó $IA.IB=IC^2 \Leftrightarrow IC=\sqrt{IA.IB}=6$ (không đổi).

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định nằm trên mặt phẳng (P) với tâm $I(3;3;3)$, bán kính bằng 6.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t. \\ z=2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t. \\ z=2t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t. \\ z=2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t. \\ z=t \end{cases}$

Lời giải.

Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A, B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.
Có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:
$-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-\left(y-\dfrac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+y-7=0.$

Mặt khác $d\subset(\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases} 3x+y-7=0 \\ x+y+z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-3x \\ z=2x. \end{cases}$

Vậy phương trình d: $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t\ (t\in\mathbb{R}). \\ z=2t \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y-2z-15=0$ và ba điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4;-1;0)$. **B.** $M(4;-1;0)$. **C.** $M(4;1;0)$. **D.** $M(1;-4;0)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;2;2)$.

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$
$$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2 \quad \left(\text{ vì } \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\right)$$
Để $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi MG ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của G trên (P).

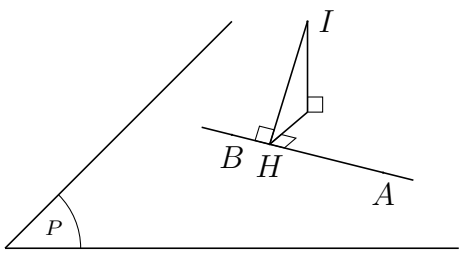
Gọi Δ là đường thẳng qua G và vuông góc mp(P). Khi đó Δ có phương trình tham số $\begin{cases}x=1+3t\\y=2-3t\\z=2-2t\end{cases}$

Điểm M chính là giao điểm của Δ và mp(P).
Xét phương trình $3(1+3t)-3(2-3t)-2(2-2t)-15=0\Leftrightarrow t=1$.
Vậy $M(4;-1;0)$.
Chọn đáp án B □

Câu 71. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$. **B**. $T=5$. **C**. $T=2$. **D**. $T=4$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính 5. Vì $A,B\in(P)$ nên
$$\begin{cases}3a-2b+6c=2\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2c=2\\b=2.\end{cases}\quad(1)$$
Đường tròn giao tuyến thu được có bán kính nhỏ nhất khi khoảng cách từ I đến (P) là lớn nhất. Mặt khác vì B nằm trong mặt cầu (S) nên $d(I,(P))\le d(I,AB)$. Do đó bán kính giao tuyến là nhỏ nhất khi $\overrightarrow{IH}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), với H là hình chiếu của I trên AB. Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, suy ra $H(t;-t+1;2t)$ và $\overrightarrow{IH}=(t-1;-t-1;2t-3)$. Vì AB nằm trên (P) nên
$$IH\perp AB\Rightarrow(t-1)+(-1)(-t-1)+2(2t-3)=0\Rightarrow t=1.$$
Khi đó $\overrightarrow{IH}=(0;-2;-1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P), suy ra
$$\begin{cases}a=0\\\dfrac{b}{-2}=\dfrac{c}{-1}.\end{cases}$$
Kết hợp (1), ta có $a=0$, $b=2$, $c=1$. Vậy $T=a+b+c=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B**. 282. **C**. 256. **D**. 328.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1;1).$

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2\cdot 8+3\cdot 9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=\mathrm{d}(I,(P))=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng

$6MI^2+228=6\cdot 9+228=282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của Δ: $\begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=1-2t.\end{cases}$

Ta có $M=\Delta\cap(P)$. Xét phương trình

$t+2(1+2t)-2(1-2t)-9=0\Leftrightarrow 9t-9=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;3;-1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=4$. **B**. $T=2$. **C**. $T=3$. **D**. $T=5$.

Lời giải.

Ta có (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=(-2;4;-3)\\\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)\end{cases}\Rightarrow d(I,AB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\sqrt{5}<R=5$ nên AB cắt (S) tại hai điểm.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến.

Ta có $r^2=R^2-d^2(I,(P))\Rightarrow r$ nhỏ nhất khi $d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P)\Rightarrow d(I,(P))$ lớn nhất khi H thuộc AB hay H là hình

chiếu vuông góc của I lên AB.
Gọi $H(-3t;1+3t;-6t) \in AB$ do $\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow H(1;0;2)$.
Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \overrightarrow{IH} = (0;-2;-1) \Rightarrow (P): 2y+z-2=0$.
Vậy $T = a+b+c = 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2.

A. $d_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{3}$.
B. $d_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.
C. $d_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-3}$.
D. $d_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $A(1;0;0)$.
Trên d_1 lấy M sao cho $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{2}{\sqrt{6}};-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, trên d_2 lấy N sao cho $\overrightarrow{AN} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}};\dfrac{-1}{\sqrt{6}};\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$.
Khi đó ta có tam giác AMN cân tại A và có $AM = AN = 1$.
$\cos\widehat{MAN} = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{AM \cdot AN} < 0$. Do đó phân giác ứng với góc nhọn có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}};\dfrac{3}{\sqrt{6}};-\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)$. Suy ra $(2;3;-3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường phân giác góc nhọn. Vậy phương trình phân giác là $d_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y-z=2$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3} + \sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-2y+5}$ đạt tại $(x_0;y_0;z_0)$. Tính x_0+y_0.

A. $\dfrac{3}{2}$.
B. $\dfrac{5}{2}$.
C. 3.
D. 4.

Lời giải.

Ta có $A = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+z^2}$. Bài toán trở thành tìm điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (α): $f(x,y,z) = x+y-z-2=0$ sao cho $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất, với $A(1;1;1)$ và $B(2;1;0)$.
Ta có $f(A) = -1 < 0$, $f(B) = 1 > 0$ nên A, B nằm về hai phía đối với (α). Để $MA+MB$ nhỏ nhất thì $M = AB \cap (\alpha)$.
Đường thẳng AB có một VTCP là $\overrightarrow{AB} = (1;0;-1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = -t+1. \end{cases}$
$\Rightarrow M(t+1;1;-t+1) \in (\alpha) \Leftrightarrow t+1+1+t-1-2=0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};1;\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow x_0+y_0 = \dfrac{5}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+6z-1=0$ và hai điểm $A(1;-1;0)$, $B(-1;0;1)$. Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) có độ dài bao nhiêu?

A. $\sqrt{\dfrac{255}{61}}$.
B. $\sqrt{\dfrac{237}{41}}$.
C. $\sqrt{\dfrac{137}{41}}$.
D. $\sqrt{\dfrac{155}{61}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (2;-1;-1)$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AB và (P). Khi đó

$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{n_P}}\right)\right| = \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-1)+6\cdot(-1)|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{246}}.$$

Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) có độ dài bằng

$$AB\cos\alpha = AB\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{6\left(1-\frac{9}{246}\right)} = \sqrt{\frac{237}{41}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+2b+4c$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Lấy $M(2m;-1+m;1-m)\in\Delta$, ta có $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB} = (4+4m;-5+2m;-3-2m) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{24m^2+24m+50}$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi $m=-\dfrac{1}{2}$, từ đó suy ra $M(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2})$.

Vậy $a+2b+4c=2$.

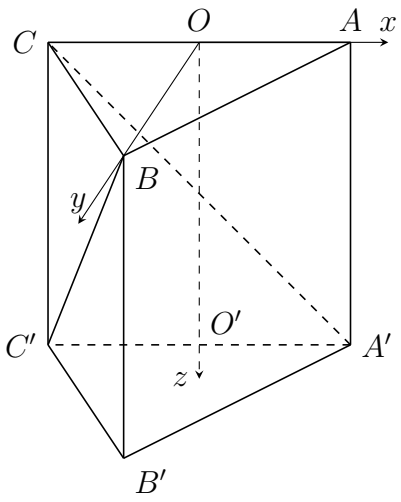
Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M\in A'C, N\in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC'. Tỉ số $\dfrac{NB}{NC'}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{23}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AC, $A'C'$. Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B\left(0;\sqrt{3};0\right)$, $O'(0;0;2)$. Khi đó $C(-1;0;0)$, $A'(1;0;2)$, $C'(-1;0;2)$. Suy ra phương trình của hai đường

thẳng $A'C$ và BC' lần lượt là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = \sqrt{3}t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$$

Do đó ta có thể coi $M\,(t+1;0;t+2)$ và $N\left(t'-1;\sqrt{3}t';-2t'+2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{NM}\left(t-t'+2;-\sqrt{3}t';t+2t'\right)$. Do MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên

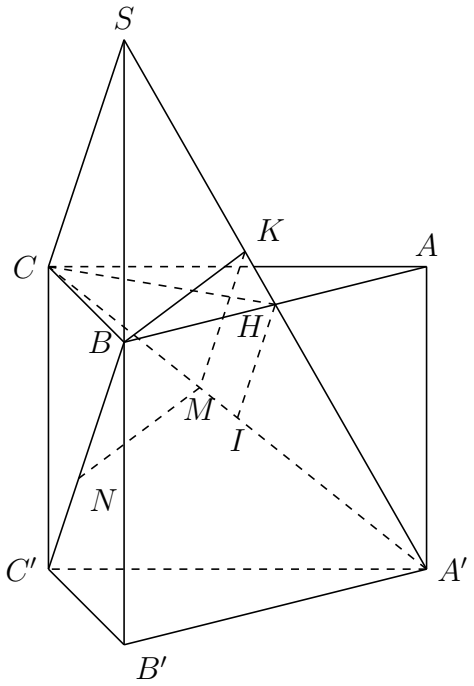
$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{C'B} = 0.$$

hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2t + t' + 2 = 0 \\ t + 8t' - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{6}{5} \\ t' = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $N\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{2\sqrt{3}}{5};\dfrac{6}{5}\right)$, do đó $NB = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$, $NC' = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. Vậy $\dfrac{NB}{NC'} = \dfrac{3}{2}$.

Cách 2.



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, AC'. Suy ra $HI \parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, tia $A'H$ cắt tia $B'B$ tại S, gọi K là hình chiếu của B trên SH. Dễ thấy $BK \perp (SCH)$. Gọi M là hình chiếu của K trên $A'C$, chú ý rằng $CH = HA'$ nên $HI \perp A'C$, do đó $KM \parallel HI \parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(BC'MK)$ lấy điểm N trên BC' sao cho $BKMN$ là hình bình hành. Khi đó MN là đoạn vuông góc chung cần tìm. Ta có

$$\frac{NB}{BC'} = \frac{MK}{2HI} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HK}{A'H}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HK}{HS}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HS^2}\right).$$

Do $2HB = SB$ nên

$$\frac{NB}{BC'} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HB^2 + SB^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HB^2 + 4HB^2}\right) = \frac{3}{5}.$$

Vậy $\dfrac{NB}{NC'} = \dfrac{3}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 2 = 0$, đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ và điểm $A\left(\dfrac{1}{2}; 1; 1\right)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α), song song với d đồng thời cách d một khoảng bằng 3. Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $B \in Oxy$ và $B \in (\alpha)$ nên $B(a; 2-2a; 0)$.
$d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ đi qua $M(-1; -2; -3)$ và có 1 véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$.
Ta có: $\overrightarrow{MB} = (a+1; 4-2a; 3)$, $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MB}\right] = (4a-2; 2a-1; 2-4a)$.
Khi đó

$$\mathrm{d}(BM, d) = 3 \Leftrightarrow \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MB}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 3 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{(2a-1)^2}}{3} = 3 \Leftrightarrow (2a-1)^2 = 9.$$

Vậy $AB = \sqrt{\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (1-2a)^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 9 + 1} = \dfrac{7}{2}$.

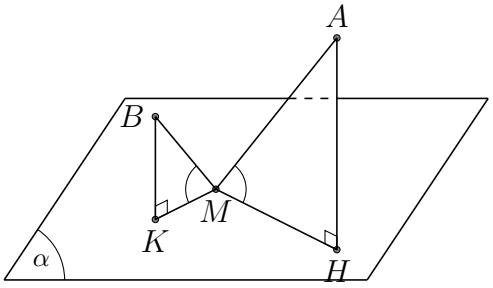
Chọn đáp án A □

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10; 6; -2)$, $B(5; 10; -9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z - 12 = 0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn (ω) cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

A. -4. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α), khi đó:



$$AH = \mathrm{d}(A; (\alpha)) = \frac{|2\cdot 10 + 2\cdot 6 + (-2) - 12|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 6$$
$$BK = \mathrm{d}(B; (\alpha)) = \frac{|2\cdot 5 + 2\cdot 10 + (-9) - 12|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3.$$

Vì MA, MB tạo với với (α) các góc bằng nhau nên $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.
Gọi $M(x; y; z)$, ta có:

$$\begin{aligned} MA = 2MB &\Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \\ &\Leftrightarrow (x-10)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 4\left[(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z+9)^2\right] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{20}{3}x - \frac{68}{3}y + \frac{68}{3}z + 228 = 0. \end{aligned}$$

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{10}{3}; \frac{34}{3}; -\frac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Do đó, đường tròn (ω) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α), nên tâm J của đường tròn (ω) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình: $\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \\ 2x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ z = -\frac{38}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $J = \left(2; 10; -\frac{38}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(15; -1; 4)$, $B(7; 6; 3)$, $C(6; -3; 6)$, $D(8; 14; -1)$ và $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ khi $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 9. **B.** -5. **C.** 16. **D.** 2.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$. Gọi G là điểm thỏa $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Ta có

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 \\ &\geq (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})^2 = (4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})^2 = (4\overrightarrow{MG})^2. \end{aligned}$$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất. Mà MG nhỏ nhất khi M là giao điểm của MI và mặt cầu (S).

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 9 \\ y_G = 4 \\ z_G = 3 \end{cases} \Rightarrow G(9; 4; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{GI} = (8; 6; 0) = 2(4; 3; 0)$. Đường thẳng GI có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng GI và mặt cầu (S) là

$$(1+4t)^2+(-2+3t)^2+3^2-2(1+4t)+4(-2+3t)-6\cdot 3-11=0 \Leftrightarrow 25t^2-25=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=1 \Rightarrow M(5;1;3) \\ t=-1 \Rightarrow M(-3;5;3). \end{bmatrix}$$

- ☑ Với $M(5;1;3) \Rightarrow IM=5=R$ (nhận).
- ☑ Với $M(-3;-5;3) \Rightarrow IM=\sqrt{122}>R$ (loại).

Khi đó $P=5+1+3=9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=4$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB. Suy ra $I(1;1;1)$ và có $\overrightarrow{AB}=(4;2;0)=2(2;1;0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là

$$(P)\colon 2(x-1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0.$$

Ta có $(2x_B+y_B-3)(2x_C+y_C-3)=5\cdot 10=50>0$ nên B,C cùng phía với (P).

Do đó $MB+MC=MA+MC\geq AC$.

Dấu "="xảy ra khi M là giao điểm của AC với (P).

Ta có $\overrightarrow{AC}=(6;3;6)=3(2;1;2)$, phương trình $AC\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=1+2t. \end{cases}$

$M\in AC \Rightarrow M(-1+2t;t;1+2t)$ và $M\in(P)$ nên suy ra $2(-1+2t)+t-3=0 \Leftrightarrow t=1$.

Do đó $M(1;1;3)$ và suy ra $P=a+b+c=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O và điểm $I(0;1;1)$. Gọi S là tập hợp các điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy), cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi S.

A. 36π. **B.** $36\sqrt{2}\pi$. **C.** $18\sqrt{2}\pi$. **D.** 18π.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;1)$ và đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$.

Gọi $M(a;b;0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy), cách Δ một khoảng bằng 6.

Ta có

$$\mathrm{d}(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{\sqrt{2}}=6 \Leftrightarrow 2a^2+b^2=36 \Leftrightarrow \frac{a^2}{36}+\frac{b^2}{72}=1.$$

Như vậy tập hợp điểm M là Elíp (E) trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), có phương trình $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{72}=1$, nên có các trục lần lượt bằng 6 và $6\sqrt{2}$ có diện tích bằng $\pi\cdot 6\cdot 6\sqrt{2}=36\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;0)$; $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Biết rằng, tồn tại một điểm M trên d sao cho chu vi tam giác ABM nhỏ nhất. Khi đó, hãy tìm tọa độ điểm M và tính chu vi của $\triangle ABM$.

A. $M(1;0;2)$; $P=2\sqrt{11}+\sqrt{29}$.
B. $M(1;2;2)$; $P=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$.
C. $M(1;2;2)$; $P=\sqrt{11}+\sqrt{29}$.
D. $M(1;0;2)$; $P=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$.

Lời giải.

Ta có $AB=2\sqrt{11}$.

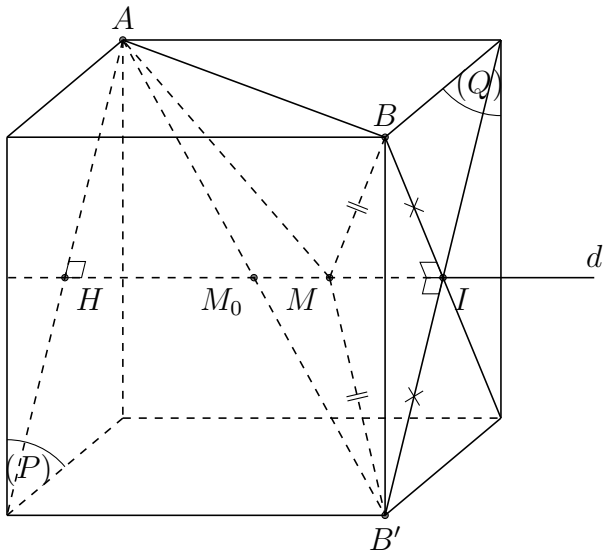
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;2)$.

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng d.

Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với d có phương trình

$$2(x-1)-1(y-5)+2(z-0)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+2z+3=0.$$



Suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-y+2z+3=0\\x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow H(-1;1;0).$$

Tương tự ta có mặt phẳng $(Q):2x-y+2z-15=0$ qua B vuông góc với d tại $I(3;-1;4)$. Từ đó ta có $AH=BI=2\sqrt{5}$. (1)

Trên mặt phẳng $(A;d)$ lấy điểm B' nằm khác phía so với điểm A so với bờ là đường thẳng d sao cho $\begin{cases}B'I=BI\\B'I\perp d\end{cases}$ và gọi M_0 là giao điểm giữa AB' và d.

Xét hai tam giác vuông MIB và MIB' có chung cạnh MI và $IB=IB'$ (do (1)), suy ra $\triangle MIB=\triangle MIB'\Rightarrow MB=MB'$.

Từ đó ta có

$$AB+MA+MB=AB+MA+MB'\geq AB+AB',$$

suy ra chu vi của tam giác MAB nhỏ nhất bằng $AB+AB'$ khi $M\equiv M_0$.

Xét hai tam giác vuông AHM_0 và $B'IM_0$ có $AH=B'I$, $\widehat{AM_0H}=\widehat{BM_0I}$ suy ra $\triangle AHM_0=\triangle B'IM_0$ suy ra $AM_0=B'M_0$ và $HM_0=IM_0$.

Từ đó suy ra $M_0(1;0;2)$ là trung điểm của IH và chu vi nhỏ nhất của tam giác ABM là

$$P_{\min}=AB+AB'=AB+2AM_0=2\sqrt{11}+2\sqrt{29}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ, $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A sao cho tổng khoảng cách từ O đến Δ và khoảng cách từ d đến Δ lớn nhất. Biết $\vec{u}=(2;b;c)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ. Tính $b+c$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d, khi đó $H=(1;2;0)$. Khi đó $d(d,\Delta)\le AH$, ngoài ra ta cũng có $d(O,\Delta)\le OA$. Suy ra $d(d,\Delta)+d(O,\Delta)\le AH+OA$. Dấu bằng khi và chỉ khi $AH\perp\Delta$ và $OA\perp\Delta\Rightarrow[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AH}]=(-2;1;3)$ là một véc-tơ chỉ phương của $\Delta\Rightarrow(2;-1;-3)$ cũng là môt chỉ phương của Δ. Vậy $b+c=-4$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{2}$, $d_2: \dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+5}{-5}$. Biết hai điểm M_1, M_2 thuộc d_1 và hai điểm N_1, N_2 thuộc d_2 sao cho M_1N_1, M_2N_2 song song với (P) đồng thời cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2. Tính $d=M_1N_1+M_2N_2$.

A. $d=6+5\sqrt{2}$. **B.** $d=5\sqrt{2}$. **C.** $d=5+5\sqrt{2}$. **D.** $d=6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của d_1, d_2 là $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-3t \\ z=2t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=5+6t \\ y=4t \\ z=-5-5t \end{cases}$

Giả sử $x-2y+2z+D=0$ là phương trình mặt phẳng cách (P) một khoảng là 2. Ta có $2=\mathrm{d}((P),(Q))=\dfrac{D+1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{D+1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} D=5 \\ D=-7 \end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là $(Q_1): x-2y+2z+5=0$ và $(Q_2): x-2y+2z-7=0$ Không mất tính tổng quát ta có thê giả sử M_1, N_1 là giao của d_1, d_2 với (Q_1) và M_2, N_2 là giao của d_1, d_2 với (Q_2). Suy ra $M_1(1;3;0)$, $N_1(5;0;-5)$ và $M_2(3;0;2)$, $N_2(-1;-4;0)$. Vậy $d=6+5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y-z-1=0$ và điểm $A(1;0;0)\in(P)$. Đường thẳng Δ đi qua A nằm trong (P) và tạo với trục Oz một góc nhỏ nhất. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (Q): $2x+y-2z+1=0$. Tổng $S=x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -5. **B.** 12. **C.** -2. **D.** 13.

Lời giải.

(P) có 1 VTPT $\vec{n}_P=(1;1;-1)$; trục Oz có 1 VTCP $\vec{k}=(0;0;1)$.

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là 1 VTCP của đường thẳng Δ. Điều kiện $a^2+b^2+c^2\ne0\quad(*)$

$\Delta\in(P)\Rightarrow\vec{n}_P\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow a+b-c=0\Leftrightarrow c=a+b$. Suy ra $\vec{u}=(a;b;a+b)$

$$\cos(\Delta,Oz)=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{u}|\cdot\left|\vec{k}\right|}=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+(a+b)^2}}\le\frac{|a+b|}{\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{2}+(a+b)^2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Suy ra góc giữa Δ và Oz nhỏ nhất khi $a=b$. Theo $(*)$, chọn $\vec{u}=(1;1;2)$. $\Rightarrow \Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Tọa độ M thỏa hệ $\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}\\ 2x+y-2z+1=0\end{cases}$ $\Rightarrow M(4;3;6)$. Vậy $S=4+3+6=13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $d\colon \dfrac{x+\frac{4}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{17}{9}}{-2}=\dfrac{z-\frac{19}{9}}{2}$.

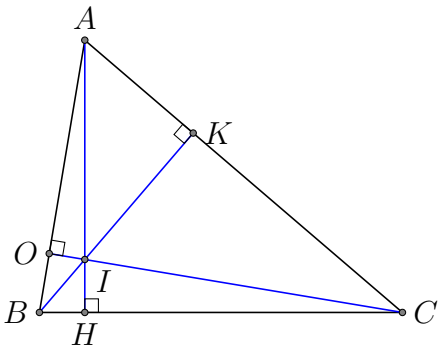
B. $d\colon \dfrac{x-\frac{8}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{3}}{-2}=\dfrac{z+\frac{2}{3}}{2}$.

C. $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z-6}{2}$.

D. $d\colon \dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trực tâm của tam giác OHK. Trước tiên ta chứng minh rằng trực tâm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK.



Các tứ giác $BOKC$, $BOIH$, $CKIH$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{OBI}=\widehat{OHI};\widehat{OBK}=\widehat{OCK};\widehat{KCI}=\widehat{KHI}\Rightarrow\widehat{OHI}=\widehat{KHI}$$

Suy ra HI là phân giác của góc OHK. Tương tự KI cũng là phân giác góc HKO.

Vậy I chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK.

Xét bài toán: Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. (Xem chứng minh ở bài tập số 37 trang 30 sách bài tập hình học 10 nâng cao của NXB Giáo Dục).

Áp dụng bài toán trên cho $\triangle OKH$, ta được $KH\cdot\overrightarrow{IO}+KO\cdot\overrightarrow{IH}+OH\cdot\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ $(*)$.

Ta có $OH=3$, $OK=4$, $HK=5$; Gọi điểm I có tọa độ là (a,b,c).

$\overrightarrow{IO}=(-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IH}=(2-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{IK}=\left(-\dfrac{8}{3}-a;\dfrac{4}{3}-b;\dfrac{8}{3}-c\right)$.

Từ $(*)$ ta có $\begin{cases}-5a+4(2-a)+3\left(-\dfrac{8}{3}-a\right)=0\\ -5b+4(2-b)+3\left(\dfrac{4}{3}-b\right)=0\\ -5c+4(1-c)+3\left(\dfrac{8}{3}-c\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\\ c=1\end{cases}$

Do đó $I(0;1;1)$. Mặt khác, ta có $[\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OK}]=(4;-8;8)$. Suy ra vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng ABC là $\vec{n}=(1;-2;2)$.

Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases}x=2t\\ y=1+t\\ z=1\end{cases}$.

Đường thẳng AB có một vec-tơ chỉ phương là $[\overrightarrow{OI},\vec{n}]=(4;1;-1)$ (do $OI\perp AB$).

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$.

AB cắt IH tại A, suy ra $A(-4;-1;1)$.

Vậy đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$d\colon \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + my + (2m+1)z - (2+m) = 0$, với m là tham số. Gọi điểm $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất.

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=-\frac{1}{2}$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$$d_{[A;(P)]} = \frac{|2+m+3(2m+1)-(2+m)|}{\sqrt{1+m^2+(2m+1)^2}} = \sqrt{\frac{9(2m+1)^2}{1+m^2+(2m+1)^2}}.$$

Xét hàm số $f(m) = \dfrac{(2m+1)^2}{1+m^2+(2m+1)^2} \Rightarrow f'(m) = -\dfrac{2(m-2)(2m+1)}{(5m^2+4m+2)^2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(m)$.

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{4}{5}$	↘	0	↗	$\frac{5}{6}$	↘	$\frac{4}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(m)$ đạt giá trị lớn nhất tại $m=2$.

Khi $m=2$ thì mặt phẳng (P) trở thành $(P)\colon x+2y+5z-4=0$.

Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là $d\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+5t \end{cases}$.

Giao điểm của d và (P) chính là điểm H. Tọa độ của H thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y+5z-4=0 \\ x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t+2(1+2t)+5(3+5t)-4=0 \\ x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=0 \\ z=\frac{11}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 90. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=5$.

Lời giải.

Chu vi tam giác ABM đạt giá trị nhỏ nhất khi tổng $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M \in \Delta\colon \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$.

Ta có $MA = \sqrt{(2t-2)^2+(t+4)^2+4t^2} = \sqrt{9t^2+20}$;

$MB = \sqrt{(2t-4)^2+(t+2)^2+(2t-6)^2} = \sqrt{9t^2-36t+56}$.

Như vậy $MA+MB = \sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$.

<u>Cách 1</u>: phương pháp hàm số

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}} + \dfrac{9t-18}{\sqrt{9t^2-36t+56}} = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}} + \dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}} = -\dfrac{t-2}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$ (1).

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}$ có $g'(t) = \dfrac{20}{\left(\sqrt{9t^2+20}\right)^3} > 0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ là

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{29}$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1$.

<u>Cách 2</u>: phương pháp véc-tơ

Ta có $MA+MB = \sqrt{(3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}+\sqrt{(6-3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}$.

Xét $\begin{cases} \vec{u} = \left(3t;\sqrt{20}\right) \\ \vec{v} = \left(6-3t;\sqrt{20}\right) \end{cases}$. Do $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$ nên ta có

$\sqrt{(3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}+\sqrt{(6-3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2} \geq \sqrt{6^2+\left(2\sqrt{20}\right)^2} = 2\sqrt{29}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = k\vec{v}$ $(k \geq 0) \Leftrightarrow t=1$.

Vậy $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1 \Rightarrow M(1;0;2) \Rightarrow T=3$.

Chọn đáp án (B) □

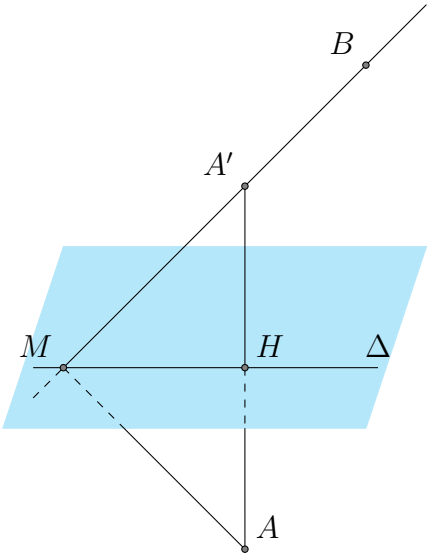
Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi

đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=3$. **B.** $T_{\max}=2\sqrt{6}-3$. **C.** $T_{\max}=\sqrt{57}$. **D.** $T_{\max}=3\sqrt{6}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ qua điểm $K(0;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$. Ta có
$\overrightarrow{KA}=(1;1;-5)$, $\overrightarrow{KB}=(-1;-1;2)$. Suy ra
$\left[\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right]=(-3;3;0)$ và
$\left[\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right]\cdot\vec{u}=(-3)\cdot1+3\cdot1+0\cdot1=0$.
Vậy đường thẳng AB và Δ đồng phẳng.
Gọi H là hình chiếu của A lên Δ
$\Rightarrow H(t;1+t;t)$, $\overrightarrow{AH}=(t-1;t-1;t+5)$.
Từ $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow1\cdot(t-1)+1\cdot(t-1)+1\cdot(t+5)=0$
$\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(-1;0;-1)$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với AH.



Phương trình của (P): $-2(x+1)-2(y-0)+4(z+1)=0\Leftrightarrow x+y-2z-1=0$.
Vì $[1+2-2(-5)-1][-1+0-2\cdot2-1]=12\cdot(-6)<0$ nên hai điểm A và B nằm trái phía đối với (P).
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ thì $A'(-3;-2;3)$.
Ta có

$$T=|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B.$$

Do đó $T_{\max}=A'B=\sqrt{(-1+3)^2+(0+2)^2+(2-3)^2}=3$, xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ và Δ.
Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Biết rằng mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(10;a;b)$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $a>b$. **B.** $a+b=6$. **C.** $a+b=10$. **D.** $2a+b=1$.

Lời giải.

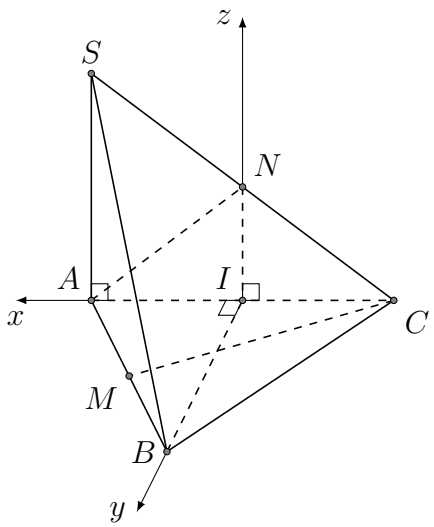
Ta có véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_1=(2;1;-1)$.
Vì (Q) chứa Δ nên $\vec{n}\perp\vec{u}_1\Rightarrow10\cdot2+1\cdot a+(-1)\cdot b=0\Rightarrow b-a=20$.
Ta có véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(2;-1;2)$.
Gọi α là góc tạo với (P) và (Q) thì ta có
$\cos\alpha=\dfrac{|20-a+2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{10^2+a^2+b^2}}=\dfrac{|20-a+2b|}{3\sqrt{10^2+a^2+b^2}}$.
Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên α bé nhất khi $\cos\alpha$ là lớn nhất.
Ta có $|20-a+2b|=\left|\dfrac{1}{6}(20+a-b)+\dfrac{5}{3}\cdot10-\dfrac{7}{6}\cdot a+\dfrac{13}{6}\cdot b\right|=\left|\dfrac{5}{3}\cdot10-\dfrac{7}{6}\cdot a+\dfrac{13}{6}\cdot b\right|$.
Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có
$\left|\dfrac{5}{3}\cdot10-\dfrac{7}{6}\cdot a+\dfrac{13}{6}\cdot b\right|^2\le\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{-7}{6}\right)^2+\left(\dfrac{13}{6}\right)^2\right)(10^2+a^2+b^2)\Rightarrow\cos\alpha\le\dfrac{\sqrt{318}}{18}$
xảy ra khi $\dfrac{10}{\frac{5}{3}}=\dfrac{a}{\frac{-7}{6}}=\dfrac{b}{\frac{13}{6}}\Leftrightarrow a=-7;b=13$ tức là $a+b=6$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN bằng

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{37}}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{37}}{74}$. **D.** $\dfrac{a}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AC. Ta có $IA = IC = \dfrac{a}{2}$, $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $NI = \dfrac{3a}{2}$. Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv I$, tia Ox trùng tia IA, tia Oy trùng tia IB, tia Oz trùng tia IN. Khi đó $A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $N\left(0;0;\dfrac{3a}{2}\right)$. Vì M là trung điểm AB nên $M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$.



Ta có $\mathrm{d}(CM, AN) = \dfrac{|[\vec{u}_{CM};\vec{u}_{AN}]\cdot\overrightarrow{CA}|}{|[\vec{u}_{CM};\vec{u}_{AN}]|}$.

Tính $\overrightarrow{CM} = \left(\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};0\right) \Rightarrow \vec{u}_{CM} = (3;\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{a}{2};0;\dfrac{3a}{2}\right) \Rightarrow \vec{u}_{AN} = (-1;0;3)$.

Suy ra $[\vec{u}_{CM};\vec{u}_{AN}] = (3\sqrt{3};-9;\sqrt{3})$. Ta có $\overrightarrow{CA} = (a;0;0)$.

Vậy $\mathrm{d}(CM, AN) = \dfrac{|3\sqrt{3}a|}{\sqrt{27+81+3}} = \dfrac{3a}{\sqrt{37}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P)\colon x+y-4z=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc (P). Gọi Δ là đường thẳng qua A, nằm trong (P) và cách d một khoảng lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a;b;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=-3$. **B.** $a+2b=0$. **C.** $a+2b=4$. **D.** $a+2b=7$.

Lời giải.

Ta có $\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a+b-4=0 \Leftrightarrow a=4-b$.

Ta có Δ đi qua $A(1;3;1)$, $\vec{u} = (4-b;b;1)$; d đi qua $M(1;-1;3)$, $\vec{u_d} = (2;-1;1)$.

Khi đó: $[\vec{u};\vec{u}_d] = (b+1;b-2;-b-4)$, $\overrightarrow{AM} = (0;-4;2)$ và

$$\mathrm{d}(d;\Delta) = \frac{\left|[\vec{u};\vec{u_d}]\cdot\overrightarrow{AM}\right|}{|[\vec{u};\vec{u_d}]|} = \frac{|6b|}{\sqrt{3b^2+6b+21}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{b^2+2b+7}}.$$

Mà $\dfrac{b^2}{b^2+2b+7} = \dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{(b+7)^2}{b^2+2b+7} \le \dfrac{7}{6}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow b=-7$.

Vậy $\mathrm{d}(d;\Delta)$ lớn nhất khi $b=-7 \Rightarrow a=11 \Rightarrow a+2b=-3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(2;1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+18=0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M và nằm trong mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất là.

A. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Xét mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+18=0$ có tâm $I(3;3;4)$ và bán kính $R=4$.

Ta có $IM=\sqrt{14}<R\Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu hay mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn (C), gọi H là tâm đường tròn đó.

Để dây cung cắt là nhỏ nhất thì $\Delta\perp MH$, khi đó $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{MH},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$.

Đường thẳng IH đi qua tâm I và vuông góc với $(\alpha)\Rightarrow IH:\begin{cases}x=3+t\\y=3+t\\z=4+t.\end{cases}$

H là giao điểm của IH và $(\alpha)\Rightarrow H(1;1;2)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(-1;0;1)\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;2;-1)$.

Khi đó Δ đi qua M và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;1)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 96. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=0$. **B.** $S=\dfrac{14}{5}$. **C.** $S=12$. **D.** $S=\dfrac{12}{5}$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(-6x+6;-6y+24;-6z-18)$.

$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\\z=-3\end{cases}\Rightarrow I(1;4;-3)$.

Gọi K là tâm của mặt cầu (S). Suy ra $K(1;1;1)$.

IK là đường thẳng qua K và nhận $\overrightarrow{IK}$ làm véc-tơ chỉ phương, IK có phương trình $\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\end{cases}$.

Gọi P, Q là giao điểm của IK và (S). Từ hệ $\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\end{cases}$ ta tìm được $P\left(1;\dfrac{8}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

và $Q\left(1;\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{5}\right)$. Suy ra $IP=\left|\overrightarrow{IP}\right|=4$, $IQ=\left|\overrightarrow{IQ}\right|=6$.

Ta có $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$

$=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+2IB^2+IC^2$

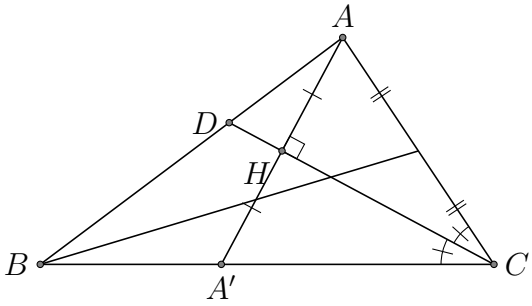
$=6MI^2+3IA^2+2IB^2+IC^2$.

Do đó, T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, lúc đó $MI = \min\{IP; IQ\} = IP$.
Tức $M \equiv P$. Vậy $S = 1 + \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{14}{5}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là
A. $\vec{u}_3 = (2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}_2 = (1;-1;0)$. **C.** $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$. **D.** $\vec{u}_1 = (1;2;1)$.

Lời giải.

Điểm C thuộc đường phân giác trong góc C nên có tọa độ $C(2+2t; 4-t; 2-t)$
Suy ra trung điểm của đoạn thẳng AC là $M\left(2+t; \dfrac{7-t}{2}; \dfrac{5-t}{2}\right)$.
Vì M thuộc đường trung tuyến BM nên suy ra $t = 1$.
Vậy $C(4;3;1)$ và $M(3;3;2)$.
Ta gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường phân giác trong CD, suy ra H là giao điểm của CD với mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với CD (phương trình $(P)\colon 2x - y - z + 2 = 0$).
Từ đó tìm được $H(2;4;2)$.



Gọi A' là đối xứng của A qua CD suy ra A' đối xứng A qua H, từ đó tìm được $A'(2;5;1)$.
Theo tính chất đường phân giác ta có: A' thuộc BC. Vậy BC qua A' và C nên có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'C} = (2;-2;0)$.

$$\Rightarrow BC \text{ có phương trình là } \begin{cases} x = 2+k \\ y = 5-k \\ z = 1. \end{cases}$$

Khi đó B là giao điểm của $A'C$ và BM nên có tọa độ là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1} \\ x = 2+k \\ y = 5-k \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 1. \end{cases}$$

Với $B(2;5;1)$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (0;2;-2) = 2(0;1;-1)$ nên $\vec{u} = (0;1;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Chọn đáp án (C) □

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2;1;-2)$ song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (m;n;1)$. Tính $T = m^2 - n^2$.
A. $T = -5$. **B.** $T = 4$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = -4$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta \parallel (P)$ nên $\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{(P)} \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow n = 2m+2 \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (m; 2m+2; 1)$

Do đó, gọi α góc giữa hai đường thẳng Δ và d, ta có

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_{(d)}\right|}{\left|\vec{u}_\Delta\right| \cdot \left|\vec{u}_{(d)}\right|} = \frac{|4m+5|}{\sqrt{41(5m^2+8m+5)}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}}.$$

Góc α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(m) = \dfrac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(m) = \frac{-72m^2-90m}{(5m^2+8m+5)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{16}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{16}{5}$

Suy ra $\max\limits_{m\in\mathbb{R}} f(m) = f(0) = 5$. Với $m = 0$ suy ra $n = 2$. Do đó $T = 0 - 2^2 = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

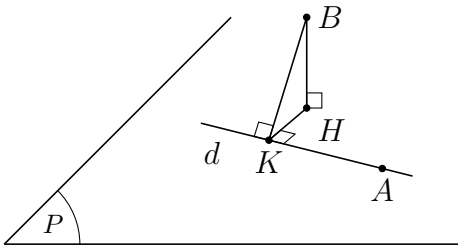
A. $d\colon \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

B. $d\colon \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{-11} = \dfrac{z-1}{2}$.

C. $d\colon \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{2}$.

D. $d\colon \dfrac{x+3}{-26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Lời giải.



Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và song song với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là $x-2y+2z+1=0$. Khi đó, đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Q). Gọi K là hình chiếu của B trên d, H là hình chiếu của B trên (Q). Suy ra

$$d(B,d) = BK \geq BH = d(B,(Q)).$$

Do đó, điểm khoảng cách đến B nhỏ nhất khi d đi qua hình chiếu H của B trên mặt phẳng (Q). Phương trình đường thẳng qua B vuông góc với mặt phẳng (Q) là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{2}.$$

Tọa độ của điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}\\ x-2y+2z+1=0\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right).$$

Suy ra đường thẳng d nhận véc-tơ $\vec{u}=9\overrightarrow{AH}=(26;11;-2)$. Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Chọn đáp án A □

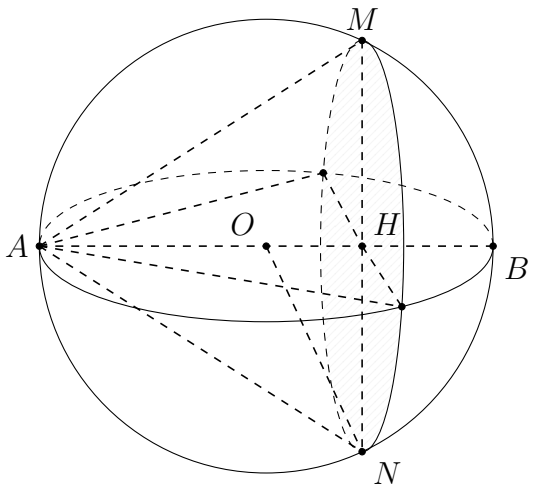
Câu 100. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3), B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là đường tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P)\colon 2x+by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=-18$. **B**. $S=-11$. **C**. $S=-24$. **D**. $S=-14$.

Lời giải.

Gọi O là tâm mặt cầu (S).

Gọi MN là đường kính của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).



Vì khối nón có thể tích lớn nhất nên ta suy ra H thuộc đoạn OB. Đặt $OH=x,(0<x<3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)\Rightarrow AB=6$.

Ta có $\begin{cases}ON=3\\ OH=x\end{cases}\Rightarrow HN^2=9-x^2$.

Thể tích khối nón $V=\dfrac{\pi}{3}\cdot(x+3)\cdot(9-x^2),(0<x<3)$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x+27,(0<x<3)$.

Ta có $f'(x)=-3(x^2+2x-3)$; $f'(x)=0\Rightarrow x=1\Rightarrow\max\limits_{(0;3)}f(x)=f(1)$.

Khi đó ta được $\overrightarrow{AH}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_H=\dfrac{14}{3}\\ y_H=\dfrac{11}{3}\\ z_H=\dfrac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow(P)\colon 2x+2y+z-21=0.$

Vậy ta được $\begin{cases}b=2\\ c=1\\ d=-21\end{cases}\Rightarrow S=-18.$

Chọn đáp án A □

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng

$$d_1\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}, d_2\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-4}, d_3\colon \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}, d_4\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Gọi Δ là đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}_3=(2;0;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(2;1;-1)$. **C.** $\vec{u}_1=(2;1;1)$. **D.** $\vec{u}_4=(1;2;-2)$.

Lời giải.

Nhận thấy $d_1 \parallel d_2$ nên ta giải như sau:
Lấy $A(1;2;0)\in d_1$ và $B(2;2;0)\in d_2$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;0;0)$.
Véc-tơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u_1}=(1;2;-2)$.
Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2. Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u_1}\right]=(0;2;2)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là

$$(P)\colon 1(y-1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow y+z-3=0.$$

Phương trình tham số của d_3 là $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Rightarrow M(2t;t;1+t)\in d_3.$

Phương trình tham số của d_4 là $\begin{cases}x=2+2t'\\ y=2t'\\ z=1-t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})\Rightarrow N(2+2t';2t';1-t')\in d_4.$

Thay vào phương trình của (P) ta được tọa độ giao điểm của d_3 và d_4 với (P) lần lượt là $M\left(1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $N(4;2;0)$.

Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN}=\left(3;\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}(2;1;-1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+1=0$, $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ và điểm $M(a,b,c)\in(P)$ sao cho $S=2MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=3a+2b+c$ bằng

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $\frac{25}{2}$. **C.** $-\frac{25}{4}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $I\left(-1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $BC^2=6$.
Xét tam giác MBC, MI là đường trung tuyến, ta có:

$$MI^2=\frac{MB^2+MC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}\Leftrightarrow MB^2+MC^2=2MI^2+\frac{BC^2}{2}=2MI^2+3.$$

Khi đó, $S=2MA^2+2MI^2+3=2(MA^2+MI^2)+3$.
Gọi J là trung điểm của AI. Ta có $J\left(0;\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$ và $AI^2=\frac{9}{2}$.
Xét tam giác MAI, MJ là đường trung tuyến, ta có:

$$MJ^2=\frac{MA^2+MI^2}{2}-\frac{AI^2}{4}\Leftrightarrow MA^2+MI^2=2MJ^2+\frac{AI^2}{2}=2MJ^2+\frac{9}{4}.$$

Suy ra $S = 2\left(2MJ^2 + \dfrac{9}{4}\right) + 3 = 4MJ^2 + \dfrac{15}{2}$. S nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của J trên mặt phẳng (P).

Đường thẳng qua J và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3}{4} - t \\ z = \dfrac{5}{4} + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow M\left(t; \dfrac{3}{4} - t; \dfrac{5}{4} + t\right)$.

Thay vào (P) ta được $t = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$, từ đó $T = \dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 103. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;3;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất. Xác định $a+b+c$.

A. -3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khi đó, G có tọa độ $(2;2;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Do đó

$$\begin{aligned} 9MG^2 &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2 \\ &= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\right) \quad (1). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MA^2 + MB^2 - AB^2$.

Do đó $2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\right) = 2\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) - \left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.

Thay vào (1) ta có

$$\begin{aligned} & 9MG^2 = 3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) - \left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) \\ \Leftrightarrow\ & MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3}. \end{aligned}$$

Biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Khi đó, M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n} = (1;-2;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua G và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Tọa độ của điểm M cần tìm là nghiệm nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 3 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Khi đó $a=3; b=0; c=0$ nên $a+b+c=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;1;0)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;0)$. **D.** $\vec{u}=(1;2;1)$.

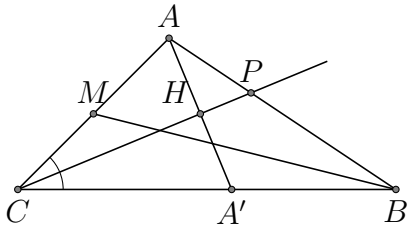
Lời giải.

Gọi P là chân đường phân giác trong của góc C.

Vì C thuộc đường thẳng CP nên tọa độ C có dạng $C(2+2t;4-t;2-t)$.

Gọi M là trung điểm của AC khi đó $M\left(t+2;\dfrac{7-t}{2};\dfrac{5-t}{2}\right)$.

Thay tọa độ của điểm M vào phương trình BM ta được



$$\frac{t+2-3}{-1}=\frac{\frac{7-t}{2}-3}{2}=\frac{\frac{5-t}{2}-2}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4t-4=t-1\\2t-2=1-t\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}C(4;3;1)\\M(3;3;2)\end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với đường thẳng CP có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_{CP}=(2;-1;-1)$.

Khi đó $(P)\colon 2x-y-z+2=0$.

Phương trình tham số của đường phân giác CP là $\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t.\end{cases}$

Gọi $H(2+2t;4-t;2-t)\in CP$ khi đó thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được

$$2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0\Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $H(2;4;2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng CP.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CP khi đó $A'(2;5;1)$, vì CP là đường phân giác nên $A'\in BC$.

Khi đó véc-tơ chỉ phương của CB là $\vec{u}_{CB}=\overrightarrow{CA'}=(-2;2;0)$ hay $\vec{u}_{CB}=(-1;1;0)$.

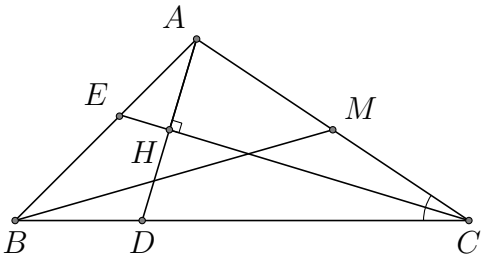
Chọn đáp án (C) □

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Biết rằng $\vec{u}=(m;n;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. $T=1$. **B**. $T=5$. **C**. $T=2$. **D**. $T=10$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC, E là chân đường phân giác trong góc C. Ta có



$$CE\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Rightarrow C(2+2t;4-t;2-t).$$

Do $A(2;3;3)$ nên $M\left(t+2;\dfrac{7-t}{2};\dfrac{5-t}{2}\right)$.

Do M thuộc đường trung tuyến kẻ từ B nên thay tọa độ M vào ta được

$$\frac{2+t-3}{-1}=\frac{\frac{7-t}{2}-3}{2}=\frac{\frac{5-t}{2}-2}{-1}\Rightarrow t=1\Rightarrow C(4;3;1).$$

Kẻ $AH\perp CE$ tại H, cắt BC tại D. Khi đó $\triangle ACD$ cân tại $C\Rightarrow H$ là trung điểm AD.
$H\in CE\Rightarrow H(2+2h;4-h;2-h)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(2h;1-h;-1-h)$.
Véc-tơ chỉ phương của CE là $\vec{u}=(2;-1;-1)$.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0\\\Leftrightarrow\ &4h+h-1+h+1=0\\\Leftrightarrow\ &h=0.\end{aligned}$$

Do $H(2;4;2)\Rightarrow D(2;5;1)\Rightarrow\overrightarrow{CD}=(-2;2;0)$.

Phương trình đường thẳng $CD\colon\begin{cases}x=4-2a\\y=3+2a\\z=1.\end{cases}$

Do $B\in CD$ nên $B(4-2b;3+2b;1)$, mặt khác B thuộc đường trung tuyến kẻ từ B nên

$$\frac{4-2b-3}{-1}=\frac{3+2b-3}{2}=\frac{1-2}{-1}\Rightarrow b=1.$$

Do vậy $B(2;5;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)=2\cdot(0;1;-1)$. Khi đó $m=0,n=1\Rightarrow T=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 106. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta\colon\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=2$. **B**. $T=3$. **C**. $T=4$. **D**. $T=5$.

Lời giải.

Chu vi tam giác ABM đạt giá trị nhỏ nhất khi tổng $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M\in\Delta$: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$.

Ta có $MA=\sqrt{(2t-2)^2+(t+4)^2+4t^2}=\sqrt{9t^2+20}$;

$MB=\sqrt{(2t-4)^2+(t+2)^2+(2t-6)^2}=\sqrt{9t^2-36t+56}$.

Như vậy $MA+MB=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$.

<u>Cách 1</u>: phương pháp hàm số

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9t-18}{\sqrt{9t^2-36t+56}}=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}=-\dfrac{t-2}{\sqrt{9(t-2)^2+20}}$ (1).

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{9t^2+20}}$ có $g'(t)=\dfrac{20}{\left(\sqrt{9t^2+20}\right)^3}>0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ là

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{29}$	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1$.

<u>Cách 2</u>: phương pháp véc-tơ

Ta có $MA+MB=\sqrt{(3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}+\sqrt{(6-3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}$.

Xét $\begin{cases}\vec{u}=\left(3t;\sqrt{20}\right)\\\vec{v}=\left(6-3t;\sqrt{20}\right)\end{cases}$. Do $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ nên ta có

$\sqrt{(3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}+\sqrt{(6-3t)^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}\geq\sqrt{6^2+\left(2\sqrt{20}\right)^2}=2\sqrt{29}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v}$ $(k\geq0)\Leftrightarrow t=1$.

Vậy $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1\Rightarrow M(1;0;2)\Rightarrow T=3$.

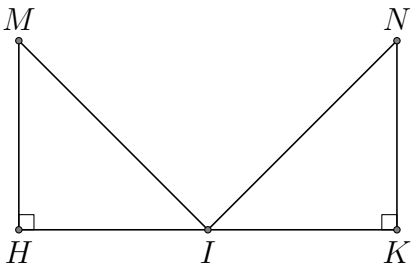
Chọn đáp án (B) □

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3)$, $N(3;4;5)$ và mặt phẳng (P): $x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P), các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên Δ. Biết rằng khi $MH=NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là

A. $\begin{cases}x=1\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=13+2t\\z=-4+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4-t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của HK.
Ta có $\triangle MHI = \triangle NKI \Rightarrow IM = IN$.
$\Rightarrow I$ thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của MN.
Do I thuộc (P) nên I thuộc d là giao tuyến của (P) và (Q).



Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $E(2;3;4)$ của MN, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MN} = (2;2;2)$ là

$$2(x-2)+2(y-3)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x+y+z-9=0.$$

Tọa độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y+3z-14=0 \\ x+y+z-9=0. \end{cases}$
Cho $x=0$ và giải hệ ta được $y=13$, $z=-4$ suy ra $I(0;13;-4)$. Đường thẳng d đi qua $I(0;13;-4)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}] = (1;-2;1)$ có phương trình là $\begin{cases} x = t \\ y = 13-2t \\ z = -4+t. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = -t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $3x-2y-4z-8=0$. **B.** $y+z+1=0$.

C. $x-2y-3=0$. **D.** $x+3y+5z+2=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d.
Suy ra $t_H = -\dfrac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{IM_0}}{\vec{u}^2} = 1 \Rightarrow H(3;0;-1)$. Ta có $r_{\min} = \mathrm{d}(I,(P)) = IH$.
Suy ra (P) đi qua H và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IH} = (0;-1;-1)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $y+z+1=0$.

Chọn đáp án B □

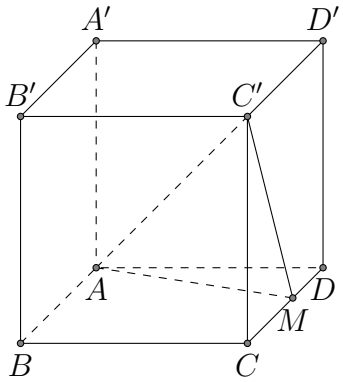
Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(2;-2;2)$, $A'(3;0;-1)$, điểm M thuộc cạnh DC. Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM+MC'$ là

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{17+4\sqrt{6}}$. **C.** $\sqrt{17+8\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{17+6\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'}=(2;0;-2)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$. $\overrightarrow{AD}=(1;-2;1)$.
Theo quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}\Rightarrow C'(5;-1;1).$$



Đường thẳng DC đi qua điểm D và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$ có phương trình: $\begin{cases}x=2+t\\y=-2+t\\z=2+t.\end{cases}$

Gọi $M(2+t;-2+t;2+t)\in DC$. Ta có $AM=\sqrt{3t^2+6}$, $C'M=\sqrt{3t^2-6t+11}=\sqrt{3(1-t)^2+8}$.
Ta có

$$\begin{aligned}AM+C'M&=\sqrt{3t^2+6}+\sqrt{3(1-t)^2+8}\\&\geq\sqrt{(\sqrt{3}t+\sqrt{3}-\sqrt{3}t)^2+(\sqrt{6}+\sqrt{8})^2}\\&=\sqrt{17+8\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Dấu "=" khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3}(1-t)}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\Leftrightarrow t=2\sqrt{3}-3$.
Khi đó $M(2\sqrt{3}-1;2\sqrt{3}-5;2\sqrt{3}-1)$.
Vậy, giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM+MC'$ là $\sqrt{17+8\sqrt{3}}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;0)$, bán kính bằng 3 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(0;1;0)$, bán kính bằng 2. Đường thẳng Δ thay đổi tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm $A(1;1;1)$ đến đường thẳng Δ. Tính $M+m$.

A. 5. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $IJ=2$ nên hai mặt cầu trên cắt nhau. Do đó mọi đường thẳng tiếp xúc với hai mặt cầu đều đi qua điểm M thỏa mãn điều kiện sau đây $2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MJ}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{2x_I-3x_J}{2-3}=-4\\y_M=\dfrac{2y_I-3y_J}{2-3}=1\\z_M=\dfrac{2z_I-3z_J}{2-3}=0\end{cases}$.

Gọi véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(a;b;c)$.
Do Δ tiếp xúc với mặt cầu tâm I nên ta có
$3=\mathrm{d}(I,(\Delta))=\dfrac{|[\overrightarrow{IM},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{36b^2+36c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow 36b^2+36c^2=9(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow a^2=3(b^2+c^2)$.
Ta thấy $a\neq 0$ vì nếu $a=0$ thì $b=c=0$.
Do đó đặt $x=\dfrac{b}{a}$ và $y=\dfrac{c}{a}$. Ta có $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}$ và $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq y\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Khoảng cách từ A đến Δ là $\mathrm{d}=\dfrac{|[\overrightarrow{AM},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{26b^2+(a-5c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Suy ra $\mathrm{d}^2 = \dfrac{26b^2+(a-5c)^2}{4(b^2+c^2)} = \dfrac{26x^2+(1-5y)^2}{4(x^2+y^2)} = \dfrac{\dfrac{26}{3}-26y^2+(1-10y+25y^2)}{4\cdot\dfrac{1}{3}} = f(y).$

Ta thấy $f'(y)=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{5}{2} < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Do đó $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \le f(y) \le f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

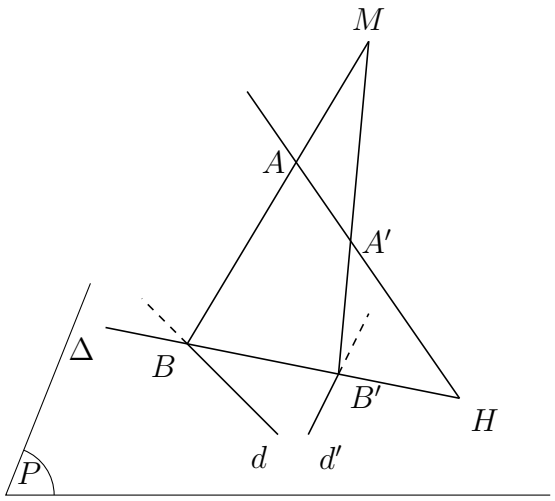
$\Rightarrow \dfrac{25-10\sqrt{3}}{4} \le \mathrm{d}^2 \le \dfrac{25+10\sqrt{3}}{4}.$

Vậy $M+m = \sqrt{\dfrac{25+10\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\dfrac{25-10\sqrt{3}}{4}} = 5.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 111.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-2}{1}, d': \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(a;0;0), A'(0;0;b)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d'; H là giao điểm của đường thẳng AA' và mặt phẳng (P). Một đường thẳng Δ thay đổi trên (P) nhưng luôn đi qua H đồng thời Δ cắt d và d' lần lượt tại B và B'. Hai đường thẳng $AB, A'B'$ cắt nhau tại điểm M. Biết điểm M luôn thuộc một đường thẳng cố định có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(15;-10;-1)$ (tham khảo hình vẽ). Tính $T=a+b$.



A. $T=8$. **B.** $T=9$. **C.** $T=-9$. **D.** $T=6$.

Lời giải.

Ta có d đi qua $N(2;5;2)$, có VTCP $\vec{u}_d=(1;2;1), d'$ đi qua $N'(2;1;2)$, có VTCP $\vec{u}_{d'}=(1;-2;1)$.

Gọi (R) là mặt phẳng chứa A và d, gọi (Q) là mặt phẳng chứa A' và d'.

Từ giả thiết ta nhận thấy điểm M nằm trong các mặt phẳng $(R),(Q)$ nên đường thẳng cố định chứa M chính là giao tuyến của các mặt phẳng $(R),(Q)$.

Vậy (R) đi qua $N(2;5;2)$ có cặp chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;2;1), \vec{u}=(15;-10;-1)$

$\Rightarrow \vec{n}_P=(1;2;-5) \Rightarrow (R): x+2y-5z-2=0.$

(R) đi qua $A(a;0;0) \Rightarrow a=2.$

Tương tự (Q) đi qua $N'(2;1;2)$ có cặp chỉ phương $\vec{u}_{d'}=(1;-2;1), \vec{u}=(15;-10;-1)$

$\Rightarrow (Q): 3x+4y+5z-20=0.$

(Q) đi qua $A'(0;0;b) \Rightarrow b=4.$

Vậy $a+b=6.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{8}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên d và (P) . Khi đó

$$\mathrm{d}[A,(P)] = AH \leq AK.$$

Do đó khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất bằng $AK = \mathrm{d}(A,d)$. Giả sử $K(1+2t;t;2+2t)$, ta có $\overrightarrow{AK} = (2t-1;t-5;2t-1)$. Vì $AK \perp d$ nên

$$2(2t-1)+t-5+2(2t-1)=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Suy ra $\overrightarrow{AK} = (-1;-4;1)$. Phương trình mặt phẳng $(P)\colon x-4y+z-3=0$. Khoảng cách

$$\mathrm{d}[M,(P)] = \frac{11\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;2;-3)$, $N(-4;2;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, nhận $\vec{u} = (a;b;c)$ làm véc-tơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z=0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|$, $|b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau, khi đó $|a|+|b|+|c|$ bằng

A. 13 . **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với $(P) \Rightarrow (\alpha)\colon 2x+y+z-3=0$.
Gọi H là hình chiếu của N lên $(\alpha) \Rightarrow H(-8,10,9)$.
Để khoảng cách từ N đến Δ là nhỏ nhất thì Δ phải đi qua H.
Khi đó vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MH} = (-10;8;12)$. Vậy $a=-5, b=4, c=6$.
Chọn đáp án C □

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;-2)$. Tìm trên mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$ điểm M sao cho tổng $MA^2+2MB^2+3MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{5}{18};-\frac{13}{9};-\frac{5}{18}\right)$. **B.** $M\left(-\frac{5}{18};-\frac{5}{18};-\frac{13}{9}\right)$.

C. $M\left(-\frac{13}{9};-\frac{5}{18};-\frac{5}{18}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{1}{9};-\frac{1}{9};-\frac{16}{9}\right)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, dễ thấy $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$. Khi đó

$$S = MA^2+2MB^2+3MC^2 = 6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2.$$

Ta thấy I là điểm cố định nên S nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).
$MI \perp (P) \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}+t;\frac{2}{3}+t;-\frac{1}{2}+t\right)$, $M \in (P) \Leftrightarrow \frac{2}{3}+t+\frac{2}{3}+t-\frac{1}{2}+t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{17}{18}$.
Vậy $M\left(-\frac{5}{18};-\frac{5}{18};-\frac{13}{9}\right)$.
Chọn đáp án B □

Câu 115. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm $M(1;-1;1)$, $N(0;-1;0)$ và cắt hình cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$ theo thiết diện là hình tròn có diện tích $S=\pi$.

A. $2x+y-2z+1=0$, $3x+y-3z+1=0$. **B.** $3x-y-3z-1=0$, $2x-y-2z-1=0$.

C. $2x+y-2z+1=0$, $2x-y-2z-1=0$. **D.** $3x+y-2z+1=0$, $3x-y-3z-1=0$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(-2;-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$, $S=\pi \Rightarrow r=1$, ta có

$$R^2=r^2+\mathrm{d}^2(I,(\alpha)) \Rightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=\sqrt{5-1}=2.$$

Phương trình đường thẳng MN là $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$, dễ thấy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng $x-z=0$ và $y+1=0$, khi đó $(\alpha)\colon a(x-z)+b(y+1)=0, (a^2+b^2\neq 0)$

$$\mathrm{d}(I,(\alpha))=2 \Leftrightarrow \frac{|-3a|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=-2 \end{array}\right.$$

Với $\dfrac{a}{b}=2$, chọn $a=2$, $b=1$, phương trình $(\alpha)\colon 2x+y-2z+1=0$.

Với $\dfrac{a}{b}=-2$, chọn $a=2$, $b=-1$, phương trình $(\alpha)\colon 2x-y-2z-1=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau

$$(d_1)\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3} \text{ và } (d_2)\colon \frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với (d_1) và (d_2) sao cho khoảng cách từ (d_1) đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ (d_2) đến (P).

A. $x-2y+z+4=0$, $x-2y+z-\dfrac{4}{3}=0$. **B.** $x+2y+z+4=0$, $x+2y+z+\dfrac{4}{3}=0$.

C. $x-2y+z+4=0$, $x-2y+z+\dfrac{4}{3}=0$. **D.** $x+2y+z+4=0$, $x-2y+z+\dfrac{4}{3}=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2=(-4;8;-4)$. Lấy điểm $M(1;2;3)\in(d_1)$, $N(0;1;0)\in(d_2)$, gọi K là điểm thuộc đường thẳng MN sao cho $MK=2NK$, khi đó mặt phẳng đi qua K và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}$ là mặt phẳng cần tìm.

Trường hợp 1: $\overrightarrow{MK}=2\overrightarrow{NK}$, ta tìm được $K(-1;0;-3)$ và $(P)\colon x-2y+z+4=0$.

Trường hợp 2: $\overrightarrow{MK}=-2\overrightarrow{NK}$, ta tìm được $K\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};1\right)$ và $(P)\colon x-2y+z+\dfrac{4}{3}=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 117. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ có bán kính $R=\sqrt{19}$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=5+t \\ y=-2-4t \\ z=-1-4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-y-3z-1=0$. Trong

các số $\{a;b;c;d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a+b+c+d=43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc mặt phẳng (P)?

A. $\{-6;-12;-14;75\}$. **B**. $\{6;10;20;7\}$. **C**. $\{-10;4;2;47\}$. **D**. $\{3;5;6;29\}$.

Lời giải.

Ta có $I\in d\Rightarrow I(5+t;2-4t;-1-4t)$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I;(P))=R=\sqrt{19}\Leftrightarrow |19+19t|=19\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=-2\end{array}\right.$

Mặt khác (S) có tâm $I(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2})$; bán kính $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d}=\sqrt{19}$.

Xét khi $t=0\Rightarrow I(5;-2;-1)\Rightarrow\{a;b;c;d\}=\{-10;4;2;47\}$.

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d\neq 19$ nên ta loại trường hợp này.

Xét khi $t=2\Rightarrow\{a;b;c;d\}=\{-6;-12;-14;75\}$.

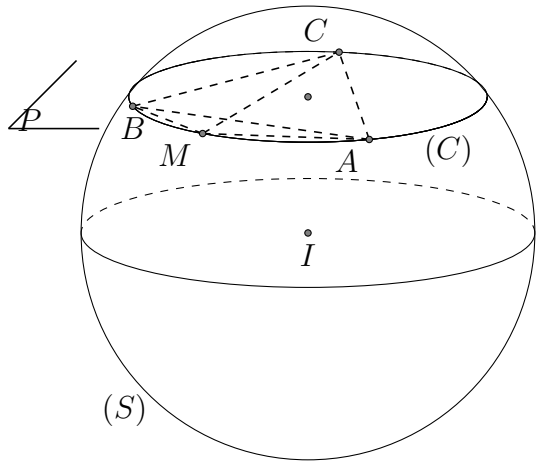
Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=19$ nên $t=2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\,(3;-1;2)$, $B\,(1;1;2)$, $C\,(1;-1;4)$ và đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng $(P):x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x-6z+10=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho $T=MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.



Dễ dàng tính được $AB=AC=BC=2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta ABC$ đều, đồng thời các điểm $A,B,C\in(P)$ và $(S)\Rightarrow\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (C).

Không mất tính tổng quát gọi điểm M thuộc cung nhỏ AB, khi đó $MA+MB+MC=2MC$.

Suy ra $MA+MB+MC$ lớn nhất khi MC lớn nhất khi MC là đường kính $\Rightarrow$ có một điểm M thỏa mãn.

Do vai trò của A,B,C như nhau nên bài toán có 3 điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;2;3)$, $A(7;2;3)$, $B(1;5;3)$, $C(1;2;9)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua 3 điểm A,B,C cắt các đường thẳng MA,MB,MC lần lượt tại

A_1, B_1, C_1. Gọi H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$. Đường thẳng MH luôn thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $x+y-2z+3=0$. **B**. $x+2y+3z-14=0$.

C. $2x+y-3z+5=0$. **D**. $2x-2y-z+5=0$.

Lời giải.

• Ta có $\overrightarrow{MA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{MB}=(0;3;0)$, $\overrightarrow{MC}=(0;0;6)$ nên MA, MB, MC đôi một vuông góc. Do đó, MA_1, MB_1, MC_1 đôi một vuông góc. Điểm H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$ nên $MH \perp (A_1B_1C_1)$ (tính chất của tam diện vuông).

• A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với mặt cầu nên

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MC_1}=6k \text{ với } k\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{MA_1}=(k;0;0)\\ \overrightarrow{MB_1}=(0;2k;0)\\ \overrightarrow{MC_1}=(0;0;k)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{A_1B_1}=(-k;2k;0)\\ \overrightarrow{A_1C_1}=(-k;0;k).\end{cases}$

Do đó A_1B_1, A_1C_1 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u_1}=(1;-2;0)$ và $\vec{u_2}=(1;0;-1)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ có vec-tơ pháp tuyến và $\vec{n}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=(2;1;2)$.

• $MH \perp (A_1B_1C_1)$ nên MH có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;2)$.

• Trong các mặt phẳng đã cho có duy nhất mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+5=0$ chứa điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}=(2;1;2)$. Do đó, có duy nhất mặt phẳng (P) đi qua MH.

Chọn đáp án (D) □

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+4=0$ và các điểm $A(2;1;2)$, $B(3;-2;2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M thuộc một đường tròn (C) cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C).

A. $\left(\frac{10}{3};-3;\frac{14}{3}\right)$. **B**. $\left(\frac{17}{21};-\frac{71}{21};\frac{17}{21}\right)$. **C**. $\left(\frac{74}{27};-\frac{97}{27};\frac{62}{27}\right)$. **D**. $\left(\frac{32}{9};-\frac{49}{9};\frac{2}{9}\right)$.

Lời giải.

• Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $(P)\colon 2x+2y-z+4=0$. Ta có $2a+2b-c+4=0 \quad (1)$.

• $\overrightarrow{AM}=(a-2;b-1;c-2)$ và $\overrightarrow{BM}=(a-3;b+3;c-2)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;-1)$.

$$\begin{aligned}
&MA, MB \text{ tạo với mặt phẳng } (P) \text{ các góc bằng nhau}\\
\Leftrightarrow\ & |\cos\left(\overrightarrow{AM},\vec{n}\right)| = |\cos\left(\overrightarrow{BM},\vec{n}\right)|\\
\Leftrightarrow\ & \frac{|2(a-2)+2(b-1)-(c-2)|}{3\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}} = \frac{|2(a-3)+2(b+2)-(c-2)|}{3\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{|2a+2b-c-4|}{3\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}} = \frac{|2a+2b-c|}{3\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{8}{3\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2}}\\
\Leftrightarrow\ & 4\left((a-3)^2+(b+2)^2+(c-2)^2\right) = (a-2)^2+(b-1)^2+(c-2)^2\\
\Leftrightarrow\ & a^2+b^2+c^2-\frac{20}{3}a+6b-4c+\frac{59}{3}=0.
\end{aligned}$$

Do đó, điểm M thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-\dfrac{20}{3}z+6y-4z+\dfrac{59}{3}=0$ tâm $I\left(\dfrac{10}{3};-3;2\right)$.

• Đường tròn (C) là giao mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) nên tâm của (C) là hình chiếu H của I trên mặt phẳng (P).

• Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P). Ta có $\Delta\colon \begin{cases} x=\dfrac{10}{3}+2t\\ y=-2+2t\\ z=2-t. \end{cases}$

Suy ra $H\left(\dfrac{10}{3}+2t;-2+2t;2-t\right)$. Mặt khác $H\in(P)\Leftrightarrow \dfrac{8}{3}+9t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{8}{27}$.

• Vậy $H\left(\dfrac{74}{27};-\dfrac{97}{27};\dfrac{62}{27}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 121. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+2=0$. Mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất có phương trình dạng $ax+by+cz+34=0$. Tính tích abc.

A. -220. **B.** -240. **C.** 240. **D.** 220.

Lời giải.

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(2;-2;1)$, mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;c)$ trong đó $a^2+b^2+c^2>0$.

(Q) đi qua Δ nên $\overrightarrow{n_Q}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow 2a+b+2c=0$.

• $\cos((P),(Q))=|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})|=\dfrac{|2a-2b+c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|6a+5c|}{3\sqrt{5a^2+8ac+5c^2}}$.

Nếu $a=0$ thì $\cos((P),(Q))=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Nếu $a \neq 0$ thì $\cos((P),(Q)) = \dfrac{\left|6+5\dfrac{c}{a}\right|}{3\sqrt{5+8\dfrac{c}{a}+5\dfrac{c^2}{a^2}}} = \dfrac{|6+5t|}{3\sqrt{5+8t+5t^2}}$ với $t = \dfrac{c}{a}$.

Đặt $f(t) = \dfrac{(6+5t)^2}{5t^2+8t+5}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-100t^2-110+12}{(5t^2+8t+5)^2}$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{10} \\ t = -\dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$\frac{1}{10}$		$+\infty$
$f(t)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{65}{9}$	$\searrow$	5

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\cos((P),(Q)) = \dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

$((P),(Q))$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos((P),(Q))$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow a = 10c$.

Suy ra $b = -22c$. Mặt khác $M(1;2;0) \in (Q)$ nên $a+2b+34 = 0 \Leftrightarrow -34c+34 = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

Suy ra $a = 10, b = -22$.

• Vậy $abc = -220$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z+1=0$ và $(Q)\colon 2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tìm tung độ của điểm M.

A. 4. **B.** 2. **C.** -3. **D.** -5.

Lời giải.

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (Q), suy ra $N(n;0;0)$.

Gọi I thuộc (Q) là trung điểm của đoạn MN suy ra (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

Khi đó MN có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{n}_Q = (2;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng MN là

$$MN\colon \begin{cases} x = n+2t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow I(n+2t;-t;2t).$$

Vì I thuộc (Q) nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình

$$2n+4t+t+4t+4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2n+4}{9}.$$

Khi đó $I\left(\dfrac{5n-8}{9};\dfrac{2n+4}{9};-\dfrac{4n+8}{9}\right)$ suy ra $M\left(\dfrac{n-16}{9};\dfrac{4n+8}{9};-\dfrac{8n+16}{9}\right)$.
Do M thuộc (P) nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình

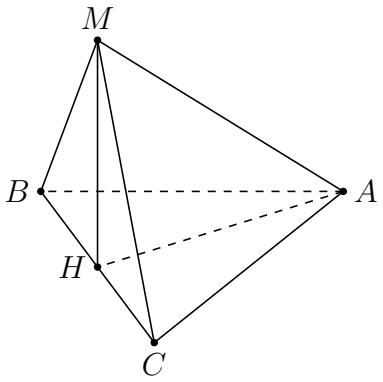
$$\frac{n-16}{9}+2\cdot\frac{4n+8}{9}-\frac{8n+16}{9}+1=0\Leftrightarrow n=7.$$

Vậy tung độ của điểm M bằng $\dfrac{4n+8}{9}=\dfrac{4\cdot 7+8}{9}=4$.
Chọn đáp án A □

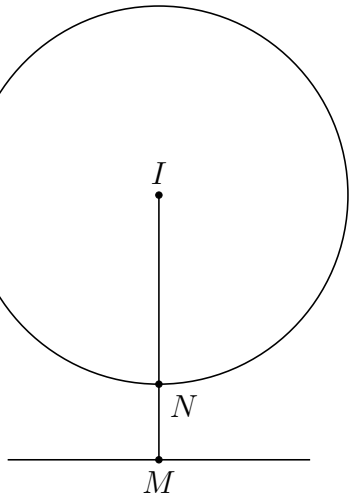
Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;2;4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại A.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (ABC). Ta có
$(MA,(ABC))=(MA,HA)=\widehat{MAH}$;
$(MB,(ABC))=(MB,HB)=\widehat{MBH}$;
$(MC,(ABC))=(MC,HC)=\widehat{MCH}$.
Theo giả thiết $\widehat{MAH}=\widehat{MBH}=\widehat{MCH}$ nên $\triangle MAH=\triangle MBH=\triangle MCH$ (c.g.c).
Do đó $HA=HB=HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và H là trung điểm BC.
Suy ra $H(1;2;2)$. Lại có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-8;8)$, nên $\vec{u}=(1;-1;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của MH.
Phương trình MH là $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=2+t\end{cases}$.
Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;3)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

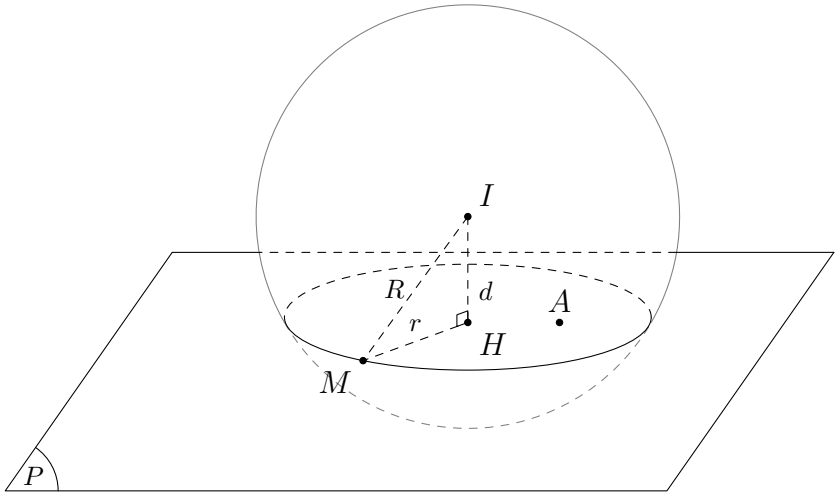


Gọi $K(1+t;2-t;2+t)$ là hình chiếu vuông góc vủa điểm I trên đường thẳng MH. Ta có $\overrightarrow{IK} = (t-2;-t;t-1)$, $\vec{u}(1;-1;1)$.
Vì $IK \perp MH$ nên $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Rightarrow t = 1$. Khi đó $K(2;1;3)$ và $IK = \sqrt{2}$.
Ta có $MN \geq \mathrm{d}(I, MH) - IN = IK - IN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất là

A. $(P)\colon x+2y+3z+6=0$. **B.** $(P)\colon x+2y+z-2=0$.
C. $(P)\colon x-2y+z-6=0$. **D.** $(P)\colon 3x+2y+2z-4=0$.

Lời giải.



Từ phương trình mặt cầu (S) ta có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.
Ta có $IA = \sqrt{6} < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S).
Gọi r, d lần lượt là bán kính đường tròn thiết diện và khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P).
Ta có $r = \sqrt{R^2-d^2}$. Suy ra diện tích thiết diện $S = \pi r^2 = \pi(R^2-d^2) \geq \pi\left(R^2-IA^2\right)$, do $d = IH \leq IA$.

Vậy thiết diện đạt giá trị nhỏ nhất khi H trùng điểm A khi đó mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P)\colon 1(x-0)+2(y-0)+(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+z-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm I và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+24=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-1;0;4)$. **B.** $M(0;1;2)$. **C.** $M(3;4;2)$. **D.** $M(4;1;2)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$. Do $\mathrm{d}(I;(P))=9>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S). Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mặt cầu (S).

Phương trình đường thẳng $IH\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của IH với (S) là $M_1(3;4;2)$ và $M_2(-1;0;4)$. Ta có $M_1H=\mathrm{d}(M_1;(P))=12$; $M_2H=\mathrm{d}(M_2;(P))=6$.

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $M(3;4;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$. Hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=0$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-8x-4z+9=0$ cắt nhau theo một đường tròn $(\mathscr{C})$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$ là

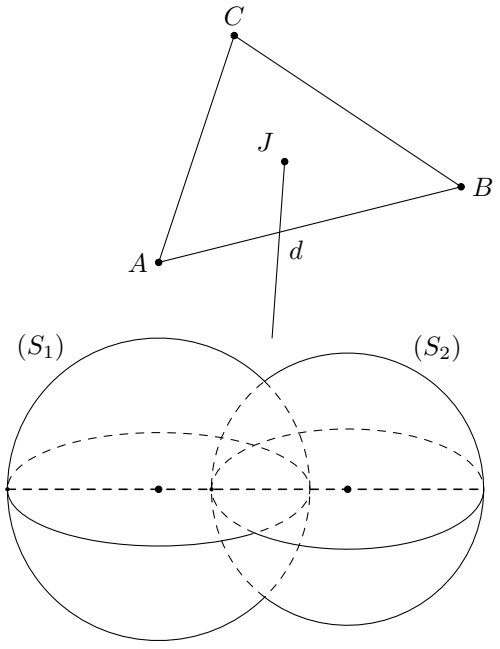
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=x^2+y^2+z^2-8x-4z+9$

$\Leftrightarrow 6x-4y-2z=0 \quad (P)$.

Phương trình $(ABC)\colon x+y+z-3=0$.

Ta thấy $\triangle ABC$ là tam giác đều có tâm là $J(1;1;1)$, đồng thời mp(P) qua J và vuông góc với (ABC) nên (P) chứa trục d của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Mỗi điểm trên d là tâm của một mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA.

Vậy có vô số mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Chọn đáp án B □

Câu 127. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$ và $B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0$ là phương trình mặt cầu (S) sao cho qua hai điểm A, B có duy nhất một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến làm một đường tròn có bán kính bằng 1?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0 \quad (1)$.

(1) là phương trình của mặt cầu $\Leftrightarrow 4+m^2+(m+1)^2-(m^2+2m+8)>0 \Leftrightarrow \hoac{m>\sqrt{3}\\ m<-\sqrt{3}}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-m;m+1)$ và bán kính $R=\sqrt{m^2-3}$.

Trường hợp 1: (P) là (ABI) và (S) có bán kính $R=1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-3}=1$ và A, B, I không thẳng hàng. Từ đó suy ra $m=-2$.

Trường hợp 2: (P) cách I một khoảng lớn nhất, đồng thời $\mathrm{d}^2(I,(P))=R^2-1$.

Gọi H, K là hình chiếu của I lên (P) và AB, ta có $\mathrm{d}(I,(P))=IH\le IK$.

Do đó

$\mathrm{d}_{max}=IK=\mathrm{d}(I,AB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]\right|}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(4m-8;4-2m;4-2m)=(m-2)(4;-2;-2)$.

Suy ra $\mathrm{d}(I,AB)=\dfrac{|m-2|\sqrt{66}}{11}$.

Ta có $\mathrm{d}^2(I,(P))=R^2-1 \Leftrightarrow \dfrac{6}{11}(m-2)^2=m^2-4 \Leftrightarrow \hoac{m=2 & \text{(loại)}\\ m=-\dfrac{34}{5} & \text{(thoả mãn)}}$.

Vậy có hai giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 128. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=4$. **B.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$. **D.** $R=6$.

Lời giải.

Xét mặt cầu (S) bất kì đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;-4;-4)$, suy ra phương trình tham số của đường thẳng AB là $\heva{x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t}$.

Gọi $I=AB\cap(P)$ ta có $I(3;3;3)$ và $IC^2=IA\cdot IB \Rightarrow IC=\sqrt{IA\cdot IB}$.

Mặt khác A, B và (P) cố định nên I cố định. Suy ra C thuộc đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) có tâm I và bán kính $R=\sqrt{IA\cdot IB}=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P)\colon 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$.
B. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+2}{7}$.
C. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{7}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{-7}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(1;-2;2)$.
Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(a;b;c)$.
Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(2;-1;-1)$.
Vì $d\parallel(P)$ nên $\vec{u}_d\perp\vec{n}_P\Leftrightarrow\vec{u}_d\cdot\vec{n}_P=0\Leftrightarrow 2a-b-c=0\Leftrightarrow c=2a-b$.
Ta có $\cos(\Delta,d)=\dfrac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$.
Góc (Δ,d) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos(\Delta,d)$ lớn nhất.

☑ Nếu $b=0$ thì $\cos(\Delta,d)=\dfrac{1}{3}$.

☑ Nếu $b\neq 0$, đặt $t=\dfrac{a}{b}$ thì $\cos(\Delta,d)=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$, với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{100t^2-60t-16}{(5t^2-4t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{5}$ hoặc $t=-\dfrac{1}{5}$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	5	↗	$\frac{25}{3}$	↘	0	↗	5

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}} f(t)=\dfrac{25}{3}$, nên trong trường hợp này $\max\cos(\Delta,d)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$, đạt được khi $t=-\dfrac{1}{5}$, hay $b=-5a$.

Từ hai trường hợp trên, ta có $\max\cos(\Delta,d)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ đạt được khi $b=-5a$.
Chọn $a=1$, $b=-5$, $c=7$. Ta có $\vec{u}_d=(1;-5;7)$.
Phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$.

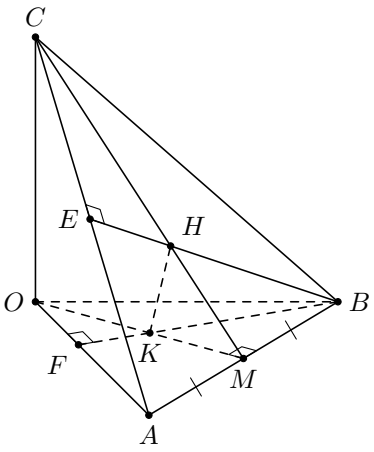
Chọn đáp án A □

Câu 130. Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(5;0;0)$, $B(3;4;0)$.Với C là điểm nằm trên trục Oz, gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz, thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính đường tròn đó là

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.
B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi K là trực tâm của tam giác OAB, M là trung điểm của AB, BE là đường cao $\triangle ABC$ ($E \in AC$), BF là đường cao $\triangle OAB$ ($F \in OA$).



Ta có $OA = OB = 5$ nên $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OM \perp AB$.

Vì $C \in Oz$ và A, $B \in (Oxy)$ nên $OC \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp CO \end{cases} \Rightarrow AB \perp CM \Rightarrow H \in CM$ (vì H là trực tâm $\triangle ABC$).

Vì $AB \perp (COM)$, $HK \subset (COM)$ nên $HK \perp AB$. (1)

Ta có $\begin{cases} BF \perp OA \\ BF \perp CO \end{cases} \Rightarrow BF \perp AC$.

Vì $\begin{cases} AC \perp BE \\ AC \perp BF \end{cases}$ nên $AC \perp (BEF) \Rightarrow HK \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (ABC)$. Suy ra $HK \perp HM$ hay H thuộc đường tròn đường kính KM.

Ta có trung điểm M của AB là $M(4;2;0) \Rightarrow OM\colon \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 0. \end{cases}$

Lại có $K \in OM \Rightarrow K(4t, 2t; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = (4t-5; 2t; 0)$.

Vì K là trực tâm $\triangle OAB$ nên ta có

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 3(4t-5) + 4 \cdot 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow K\left(3; \frac{3}{2}; 0\right).$$

Vậy bán kính đường tròn cần tính là $R = \dfrac{KM}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-2}{7}$.
B. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z+2}{7}$.
C. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{7}$.
D. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-2}{-7}$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u} = (a;b;c) \neq \vec{0}$ là véc-tơ chỉ phương của d.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-1;-1)$.

Vì $d \parallel (P)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$.

Đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{v} = (1;-2;2)$.

Gọi α là góc giữa d và Δ. Ta có

$$\cos\alpha = \frac{|a - 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{a^2+b^2+(2a-b)^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{25a^2 - 40ab + 16b^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}.$$

Nếu $b = 0$ thì do $c = 2a - b$ và $\vec{u} \neq \vec{0}$ nên $a \neq 0$. Khi đó, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Nếu $b \neq 0$ thì $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{25t^2-40t+16}{5t^2-4t+2}}$, với $t = \dfrac{a}{b}$.

Xét hàm $f(t) = \dfrac{25t^2-40t+16}{5t^2-4t+2}$ có $f'(t) = \dfrac{100t^2-60t-16}{(5t^2-4t+2)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{5} \\ t = \dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $f(t)$ như sau

t	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	5	↗	$\frac{25}{3}$	↘	0	↗	5

Suy ra $\cos\alpha \leq \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{25}{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

Kết hợp cả hai trường hợp $b = 0$ và $b \neq 0$ thì $\cos\alpha$ lớn nhất là $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow b = -5a \Rightarrow c = 7a$.

Khi đó, d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1;-5;7)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-2}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. **B.** $M(2;0;5)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I(2;-1;4)$.

Khi đó: $MA^2+MB^2 = \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

$= 2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = 2MI^2+IA^2+IB^2 = MI^2+6$.

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của Itrên đường thẳng d.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$1\cdot(x-2)-2(y+1)+2(z-4) = 0$ hay $(P)\colon x-2y+2z-12 = 0$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+2t \end{cases}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+2t \\ x-2y+2z-12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases}$. Vậy $M(2;0;5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. **B.** $M(2;0;5)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I(2;-1;4)$.

Khi đó: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=2MI^2+IA^2+IB^2=MI^2+6.$

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của Itrên đường thẳng d.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$1\cdot(x-2)-2(y+1)+2(z-4)=0$ hay $(P)\colon x-2y+2z-12=0$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+2t\end{cases}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

$\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+2t\\x-2y+2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=5\\t=1\end{cases}$. Vậy $M(2;0;5)$

Chọn đáp án (B) □

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức a^2+2b^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khi đó x_0+y_0 bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

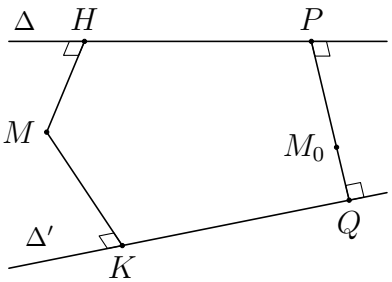
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Δ, Δ' suy ra

$a=MH$, $b=MK$.

Gọi PQ là đoạn vuông góc chung của Δ, Δ'

với $P\in\Delta\Rightarrow P(p;p;p+1)$ và $Q\in\Delta'\Rightarrow Q(1+q;2q;q)$.

Ta có $\overrightarrow{PQ}=(1+q-p;2q-p;q-p-1)$ và đường thẳng Δ, Δ' có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}=(1;1;1)$, $\vec{u'}=(1;2;1)$.



Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0\\\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4q-3p=0\\6q-4p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases}\Rightarrow P(0;0;1);\ Q(1;0;0).$

Ta có $a+b\geq HK\geq PQ=\sqrt{2}$. Mặt khác $a^2+2b^2\geq\dfrac{2}{3}(a+b)^2$ $(*)$.

Thật vậy $(*)\Leftrightarrow 3\left(a^2+2b^2\right)\geq 2(a+b)^2\Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2\geq 0\Leftrightarrow(a-2b)^2\geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=2b$.

Khi đó $a^2+2b^2 \geq \dfrac{4}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi M đặt tại M_0 nghĩa là $\overrightarrow{MP}=-2\overrightarrow{MQ}$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x_0+y_0=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án C □

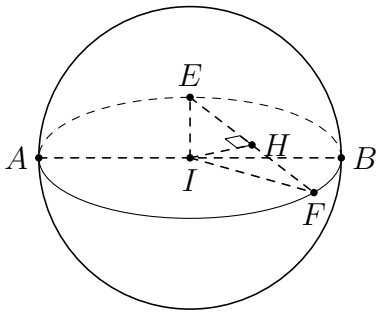
Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-m}{2}$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn thẳng EF lớn nhất khi $m=m_0$. Hỏi m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;2)$ và bán kính bằng 3.

Đường thẳng d không đi qua tâm I, d đi qua điểm $N(1;-1;m)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$.



Gọi H là trung điểm $EF \Rightarrow IH \perp EF$.

Ta có $HE=\sqrt{IE^2-IH^2}=\sqrt{9-[\mathrm{d}(I,\,d)]^2}$.

EF lớn nhất $\Leftrightarrow HE$ lớn nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,\,d)$ nhỏ nhất.

Ta có: $\overrightarrow{IN}=(0;\,-2;\,m-2), \left[\overrightarrow{IN},\,\vec{u}\right]=(-2-m;\,m-2;\,2)$.

Suy ra $\mathrm{d}(I,\,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IN},\,\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(m+2)^2+(m-2)^2+4}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2m^2+12}}{\sqrt{6}}\geq\sqrt{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(I,\,d)$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $m=0$.

Chọn đáp án B □

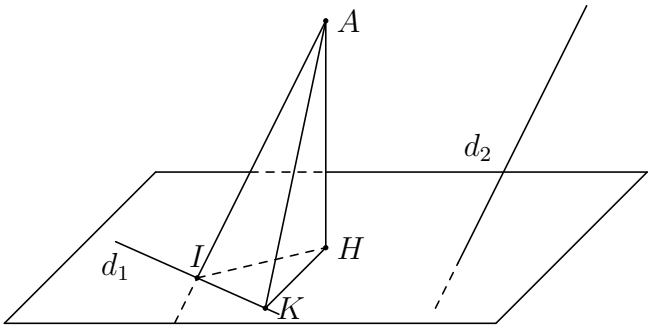
Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của $T=a+c+d$ bằng

A. $T=-6$. **B.** $T=-\dfrac{13}{4}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=0$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I\in d_1$ và $d \parallel d_2$.

Lấy $A\in d$, $A\neq I$ và gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d_1.



Khi đó $\widehat{(d_2;(P))}=\widehat{(d;(P))}=\widehat{AIH}$.

Mà $\cos\widehat{AIH}=\dfrac{IH}{IA}\geq\dfrac{IK}{IA}=const$ nên $\widehat{AIH}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$.

Suy ra mặt phẳng (P) chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng $(d;d_1)$ có véc-tơ pháp tuyến $[\vec{u_1},\vec{u_2}]$.

Vậy mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với d_2 một góc lớn nhất $\Rightarrow (P)$ qua $M=(1;-2;0)\in d_1$ và nhận véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=\left[\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right],\vec{u_1}\right]=(7;-1;5)$.

$\Rightarrow (P)\colon 7x-y+5z-9=0 \Rightarrow a=7, c=5, d=-9$.

Vậy $T=a+c+d=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(h;k;1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có

☑ $H\in\Delta_1\colon \begin{cases} x=3+2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \Leftrightarrow H(3+2t;t;1+t).$

☑ $K\in\Delta_2\colon \begin{cases} x=1+m \\ y=2+2m \\ z=m \end{cases} \Leftrightarrow K(1+m;2+2m;m).$

Khi đó $\overrightarrow{HK}=(m-2t-2;2m-t+2;m-t-1)$.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;1;-2)$.

$$\Delta\perp d\Leftrightarrow \vec{u}_d\cdot\overrightarrow{HK}=0\Leftrightarrow m-t+2=0\Leftrightarrow m=t-2.$$

Suy ra $\overrightarrow{HK}=(-t-4;t-2;-3)$. Ta có

$$HK^2=(-t-4)^2+(t-2)^2+(-3)^2=2(t+1)^2+27\geq 27,\forall t\in\mathbb{R}.$$

Do đó độ dài HK nhỏ nhất là $\min HK=\sqrt{27}$, đạt được khi $t=-1$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HK}=(-3;-3;-3)=-3\,(1;1;1)$, suy ra $\vec{u}=(1;1;1)\Rightarrow h=k=1\Rightarrow h-k=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 138. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A\,(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t>0:\overrightarrow{MN}=t\vec{a}$.

Hơn nữa,

$$MN=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t\cdot|\vec{a}|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t=5.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$.

Gọi $A'\,(x';y';z')$ là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases} x'+4=4 \\ y'-7=-5 \\ z'-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=1 \\ y'=2 \\ z'=3. \end{cases}$$

Do đó $A'(1;2;3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn

nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $AM = A'N$ nên $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy). Do đó

$$\max |AM - BN| = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}.$$

đạt được khi $N = A'B \cap (Oxy)$.

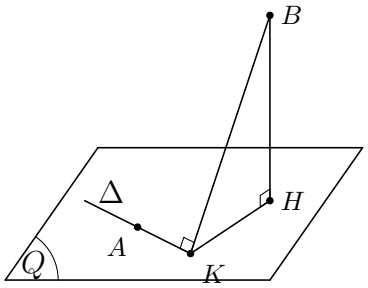
Chọn đáp án A □

Câu 139. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Hỏi Δ nhận véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương?

A. $\vec{u} = (6;3;-5)$. **B.** $\vec{u} = (6;-3;5)$. **C.** $\vec{u} = (6;3;5)$. **D.** $\vec{u} = (6;-3;-5)$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là $x + 2y - 3 = 0$.



Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q), khi đó đường thẳng BH đi qua $B(-1;0;2)$ và nhận $\vec{n}_{(Q)} = (1;2;0)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2. \end{cases}$

Vì $H = BH \cap (Q)$ nên $H \in BH$, từ đó $H(-1+t;2t;2)$ và $H \in (Q)$ nên ta có

$$-1 + t + 2 \cdot 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; 22\right).$$

Khi đó ta có $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{6}{5}; \frac{3}{5}; 1\right) = -\frac{1}{5} \cdot (6;-3;-5)$.

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng Δ, khi đó ta có $\mathrm{d}(B,d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến Δ nhỏ nhất khi $BK = BH$, do đó đường thẳng Δ đi qua A có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (6;-3;-5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 3y + 2x - 15 = 0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải.

Gọi $G(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_A - x_B + x_C}{2} = 1 \\ y_G = \dfrac{2y_A - y_B + y_C}{2} = 2 \\ z_G = \dfrac{2z_A - z_B + z_C}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(1;2;-2).$

Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2 - MB^2 + MC^2 &= 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\ &= 2MG^2 + 2GA^2 - GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) \\ &= 2MG^2 + 2GA^2 - GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Như thế MG nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t. \end{cases}$

Vì $M \in \Delta$ nên $M(1 + 3t; 2 - 3t; -2 + 2t)$.

Mặt khác $M \in (P)$ nên $3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) + 2(-2 + 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $M(4; -1; 0)$ và $a + b + c = 4 + (-1) + 0 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 141. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng lớn nhất. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n} = (1; 0; 2)$. **B.** $\vec{n} = (1; 0; -2)$. **C.** $\vec{n} = (1; 1; 1)$. **D.** $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2; 1; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Khi đó, $H(-1 - 2t; t; 1 + t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (-2 - 2t; t - 2; t - 2)$ và

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow -2(-2 - 2t) + t - 2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(-1; 0; 1).$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Ta có $AK \leq AH$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv H$.

Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $AH \perp (P)$.

Suy ra $\overrightarrow{AH} = (-2; -2; -2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Vậy $\vec{n} = (1; 1; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án C □

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(0; 4\sqrt{2}; 0\right)$, $B\left(0; 0; 4\sqrt{2}\right)$, điểm $C \in (Oxy)$ và tam giác OAC vuông tại C, hình chiếu vuông góc của O trên BC là điểm H. Khi đó điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

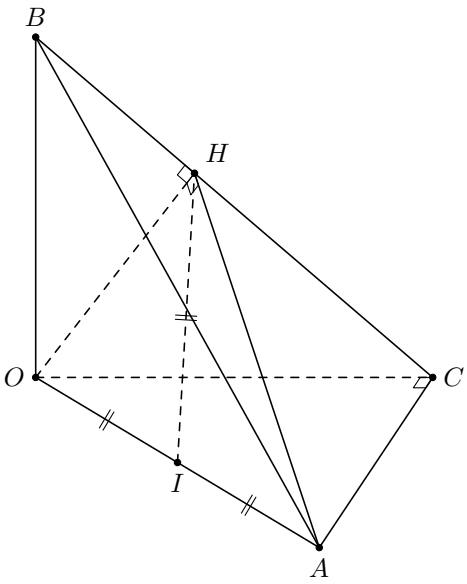
Dễ thấy $B \in Oz$. Ta có $A \in (Oxy)$ và $C \in (Oxy)$, suy ra $OB \perp (OAC)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp OC \\ AC \perp OB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBC)$, mà $OH \subset (OBC)$. Suy ra $AC \perp OH$. (1)

Mặt khác ta có $OH \perp BC$, (theo giả thiết). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AB$ và $OH \perp HA$.

Với $OH \perp AB$ suy ra H thuộc mặt phẳng (P) với (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng AB. Phương trình của (P) là $y - z = 0$.



Với $OH \perp HA \Rightarrow \triangle OHA$ vuông tại H. Do đó H thuộc mặt cầu (S) có tâm $I\left(0; 2\sqrt{2}; 0\right)$ là trung điểm của OA và bán kính $R = \dfrac{OA}{2} = 2\sqrt{2}$.

Do đó điểm H luôn thuộc đường tròn (T) cố định là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S).

Giả sử (T) có tâm K và bán kính r thì $IK = \mathrm{d}\,(I, (P)) = 2$ và $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = 2$.

Vậy điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 143. Trong không gian, cho tam giác ABC có các đỉnh B, C thuộc trục Ox. Gọi $E(6;4;0), F(1;2;0)$ lần lượt là hình chiếu của B, C trên các cạnh AC, AB. Toạ độ hình chiếu của A trên BC là

A. $\left(\dfrac{5}{3}; 0; 0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{7}{3}; 0; 0\right)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $\left(\dfrac{8}{3}; 0; 0\right)$.

Lời giải.

Tứ giác $BHIE$ nội tiếp nên $\widehat{IHE} = \widehat{EBI}$.

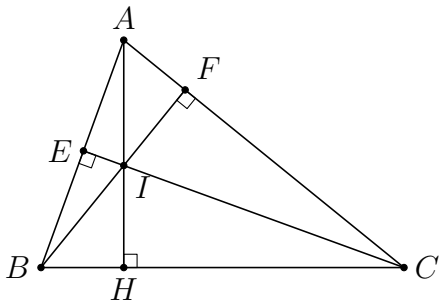
Tứ giác $ABHF$ nội tiếp nên $\widehat{EBI} = \widehat{IHF}$.

Suy ra $\widehat{IHE} = \widehat{IHF}$ (1).

Mà $AH \perp Ox$ nên đường thẳng AH có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{j} = (0;1;0)$.

Gọi $H(x;0;0)$. Ta có

$\overrightarrow{HE} = (6-x; 4; 0)$, $\overrightarrow{HF} = (1-x; 2; 0)$.



Từ (1) ta suy ra

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{HE}; \vec{j}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{HF}; \vec{j}\right)\right| \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{(6-x)^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{(1-x)^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow (6-x)^2 + 16 = 4(1-x)^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{3} \\ x = -4. \end{array}\right.$$

☑ Với $x = -4$ ta có $H(-4;0;0)$, suy ra H, E, F thẳng hàng (loại).

☑ Với $x = \dfrac{8}{3}$ ta có $H\left(-\dfrac{8}{3}; 0; 0\right)$ (thỏa mãn).

Vậy toạ độ hình chiếu của A trên BC là $H\left(-\dfrac{8}{3}; 0; 0\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 144. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S), sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 4. **B**. 6. **C**. 2. **D**. 9.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(2;4;-1)$, bán kính $R=3$.
Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \quad (8-x;5-y;-11-z)-(5-x;3-y;-4-z)-(1-x;2-y;-6-z)=(0;0;0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+x=0 \\ y=0 \\ -1+z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=1. \end{cases}$$

Vậy $I(-2;0;1)$.
Ta có: $OI=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6>R$.
Suy ra I nằm ngoài mặt cầu (S). Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{IM}\right|=IM$.
Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất.
Ta có: $IM\geq IO-OM$. Dấu "$=$" xảy ra khi I,M,O thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng IO. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm IO cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1; M_2.
Khi đó ta có phương trình tham số d: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=2t \\ z=1-t. \end{cases}$
Thay d vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

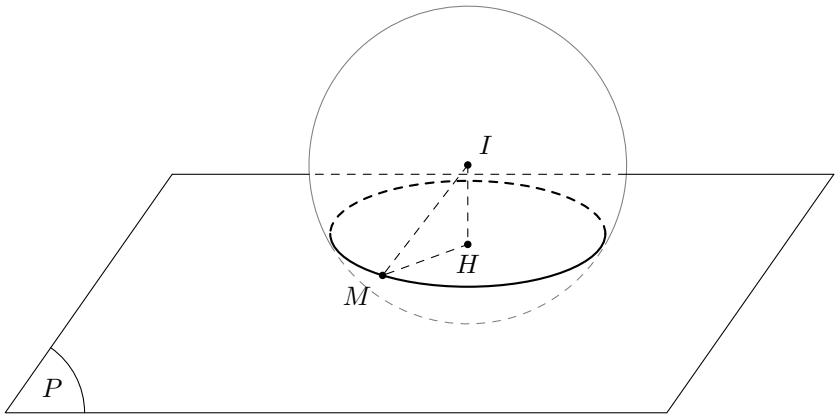
$$(-2+2t-2)^2+(2t-4)^2+(1-t+1)^2=9\Leftrightarrow 9t^2-36t+27=0\Leftrightarrow \begin{cases} t=1\Rightarrow M_1(0;2;0) \\ t=3\Rightarrow M_2(4;6;-2). \end{cases}$$

Ta có: $IM_1=3$; $IM_2=9$.
Do đó $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $M\equiv M_1(0;2;0)\Rightarrow a=0;\ b=2$.
Vậy $a+b=2$.
Chọn đáp án C □

Câu 145. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Biết rằng mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 4. Giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.



Phương trình mặt phẳng $(ABC): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ nên mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $H(1;-1;1)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;3)$, bán kính $R=5$.

Ta có $\overrightarrow{IH}=(1;2;2)\Rightarrow IH=3$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên (ABC).

Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=4$ nên $IK=\sqrt{R^2-r^2}=3\Rightarrow K\equiv H$.

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{IH}$ làm véc-tơ pháp tuyến.

$$\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b=0\\ -a+2c=0\end{cases}\Rightarrow b=c=\frac{a}{2}.$$

Kết hợp $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\Rightarrow a=1, b=c=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a+b-c=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 146. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t\end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Phương trình của (P) là

A. $x+3y+5z+2=0$. **B.** $3x-2y-4z-8=0$.

C. $x-2y-3=0$. **D.** $y+z+1=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$, đường thẳng d qua điểm $M(1;-1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$. Ta có

$$\mathrm{d}(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{2}<R.$$

Suy ra mặt phẳng (P) luôn cắt (S) theo một đường tròn. Gọi r là bán kính của nó, ta có

$$r^2=R^2-\mathrm{d}^2\left(I,(P)\right)$$

nên r nhỏ nhất khi $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi (P) vuông góc với IH, với H là hình chiếu của I trên d.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua I và vuông góc với d, phương trình của (Q) là $2x+y-z-7=0$.
Do H là giao điểm của d và (Q), suy ra $H(3;0;-1)$.
Vậy (P) qua $H(3;0;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$. Suy ra $(P)\colon y+z+1=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 147. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+1=0$, $(Q)\colon x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt (P), (Q) lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-3}{1}$.

Lời giải.

Giả sử $B(a;b;c)$. Vì M là trung điểm cạnh BC nên $C(2-a;4-b;6-c)$.
Theo bài ra ta có
$$\begin{cases} B\in(P)\\ C\in(Q)\\ AM\perp BC \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b-2c+1=0\\ (2-a)-2(4-b)-(6-c)+4=0\\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases} a+b-2c+1=0\\ -a+2b+c-8=0\\ a+2b+c-8=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0\\ b=3\\ c=2. \end{cases}$$ Suy ra $B(0;3;2)$.
Suy ra đường thẳng cần tìm là $BM\colon \dfrac{x-1}{0-1}=\dfrac{y-2}{3-2}=\dfrac{x-3}{2-3}\Leftrightarrow BM\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-3}{1}$.
Chọn đáp án C □

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=1+2t\\ y=2+t\\ z=-2-t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Ta có vectơ chỉ phương của Δ_2 là $\vec{u_2}=(-1;2;2)$.
Gọi B là giao điểm của d và Δ_1. Ta có $B\,(1+2t;2+t;-2-t)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2t+2;t+2;-t-1)$.
Đặt $\varphi=(\Delta_2,d)$. Khi đó $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_2\right)\right|=\dfrac{2|t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}}$.
Ta có φ lớn nhất bằng 90° khi $\cos\varphi=0$. Khi đó $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$.
Phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
Chọn đáp án A □

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;1;3)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P sao cho tứ diện $OMNP$ có thể tích nhỏ nhất. Giao điểm của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+t\\ y=1-t\\ z=4+t \end{cases}$ với (P) có toạ độ là

A. $(4;6;1)$. **B**. $(4;1;6)$. **C**. $(-4;6;-1)$. **D**. $(4;-1;6)$.

Lời giải.

Gọi $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$ với $a,b,c>0$ theo thứ tự là giao điểm của mặt phẳng (P) với các tia Ox, Oy, Oz.
Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Vì $A(2;1;3)\in(P)$ nên $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.
Mặt khác, vì $OMNP$ là tam diện vuông nên $V_{OMNP}=\dfrac{1}{6}OM.ON.OP=\dfrac{1}{6}abc$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Rightarrow 1\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Rightarrow abc\geq 162\Rightarrow V_{OMNP}\geq 27.$$

Do đó thể tích tứ diện $OMNP$ nhỏ nhất bằng 27 khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{c}=1\\ \dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=3\\ c=9.\end{cases}$
Phương trình mặt phẳng (P) là $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{9}=1\Leftrightarrow 3x+6y+2z-18=0$.
Gọi $B=d\cap(P)\Rightarrow B(4;-1;6)$.
Vậy giao điểm của d và (P) là điểm $B(4;-1;6)$.

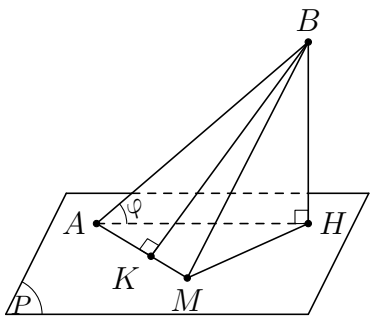
Chọn đáp án (D) □

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ bằng

A. $3\sqrt{3+\sqrt{78}}$. **B**. $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$. **C**. $8\sqrt{2}$. **D**. $6\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;2)$, $AB=2\sqrt{3}$ và $A\in(P)$, $B\notin(P)$.
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và AM.
Trong tam giác ABM, gọi α, β, γ lần lượt là số đo các góc $\widehat{BAM}$, $\widehat{ABM}$, $\widehat{AMB}$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$.
Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (P).
Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;2)$.



Ta tính được $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{78}}{9}\Rightarrow\sin\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\dfrac{9-\sqrt{78}}{18}}$.
Ta có $\sin\alpha=\dfrac{BK}{AB}\geq\dfrac{BH}{AB}=\sin\varphi\Rightarrow\alpha\geq\varphi$.

Khi đó,

$$\begin{aligned}\frac{MA+2\sqrt{3}}{MB} &= \frac{MA+AB}{MB}=\frac{2R\sin\beta+2R\sin\gamma}{2R\sin\alpha}=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}\\ &= \frac{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\\ &\le \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\\ &\le \frac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}=\sqrt{54+6\sqrt{78}}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\beta=\gamma\\ \alpha=\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}MA=AB=2\sqrt{3}\\ K\equiv H.\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ là $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$.

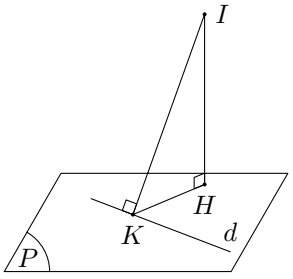
C. $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$, bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và K là hình chiếu vuông góc của I trên d. Xét phương trình

$$(1+2t-3)^2+(-1+t-1)^2+(-t)^2=4\Leftrightarrow 6t^2-12t+4=0. \qquad (1)$$



Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d luôn cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

Do đó, mặt phẳng (P) chứa d luôn cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.

Ta có r nhỏ nhất khi IH lớn nhất, mà $IH\le IK$. Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi H trùng với K.

Gọi $H(1+2t;-1+t;-t)\in d$, khi đó $\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}_d=0$. (2)

Ta có $\overrightarrow{IH}=(2t-2;t-2;-t)$ và $\vec{u}_d=(2;1;-2)$. Từ (2) suy ra

$$2(2t-2)+1(t-2)-2(-t)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Suy ra (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$ và đi qua $H(3;0;-1)$ có phương trình

$$0(x-3)-(y-0)-(z+1)=0\Leftrightarrow y+z+1=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;-3)$, $C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Điểm $D(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Tính $a+b+c$.

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(ABC)\colon -2x+2y-z-1=0$. Mặt cầu có tâm $I(1;0;-1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (ABC) nên $\Delta\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=2t \\ z=-1-t. \end{cases}$

Bây giờ ta tìm hai giao điểm của Δ với (S).

Xét phương trình $(1-2t)^2+(2t)^2+(-1-t)^2-2(1-2t)+2(-1-t)-2 \Leftrightarrow t=\pm\dfrac{2}{3}$.

Với $t=\dfrac{2}{3}$ ta có giao điểm là $M\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$.

Với $t=-\dfrac{2}{3}$ ta có giao điểm là $N\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có $\mathrm{d}\,(M,(ABC))=\dfrac{4}{3}$ và $\mathrm{d}\,(N,(ABC))=\dfrac{8}{3}$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $\mathrm{d}\,(D,(ABC))$ lớn nhất, khi đó D trùng với N.

Vậy $a+b+c=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

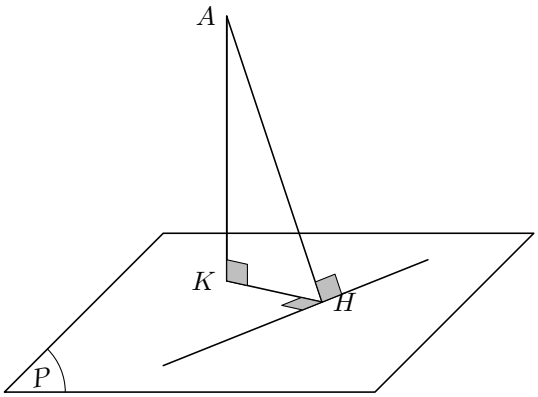
Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Biết rằng phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất, có dạng $ax+by+cz-3=0$ (với a, b, c là các số nguyên). Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -5.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P).



Ta có $\mathrm{d}\,[A,(P)]=AK\le AH=\text{const}$. Dấu "=" khi $K\equiv H$.

Khi đó $H\in(P)$, $AH\perp(P)$. Gọi $H(1+2t;t;2+2t)\in d$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(-1+2t;-5+t;-1+2t)$ và $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$.

Vì $AH\perp d$ nên $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra mặt phẳng (P) đi qua $H(3;1;4)$ và nhận $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ là véc-tơ pháp tuyến có phương trình là $x-4y+z-3=0$.

Do đó $a=1$; $b=-4$; $c=1\Rightarrow a+b+c=-2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tập hợp các điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất là

A. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$.

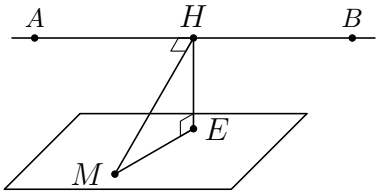
B. $\begin{cases} x-7y-4z+14=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x-7y-4z+5=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

Lời giải.

- ☑ (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(3;1;-1)$, $\overrightarrow{AB}=((1;-1;2)$.
- ☑ A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P).
- ☑ $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_P=0$, suy ra $AB\parallel(P)$.
- ☑ Do A, B cố định nên S_{MAB} nhỏ nhất khi khoảng cách từ M đến AB là nhỏ nhất.



- ☑ Kẻ $MH\perp AB$ tại H và $HE\perp(P)$ tại E. Ta có $HM\geq HE=\mathrm{d}(AB,(P))$. Vậy MH nhỏ nhất khi và chỉ khi $MH\perp(P)$ với $H\in AB$. Suy ra M nằm trên hình chiếu vuông góc của AB lên (P).
- ☑ Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với (P). (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_Q=[\vec{n}_P,\overrightarrow{AB}]=(1;-7;-4).$$

- ☑ $(Q)\colon x-7y-4z+7=0$. Hình chiếu vuông góc của AB lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q). Vậy

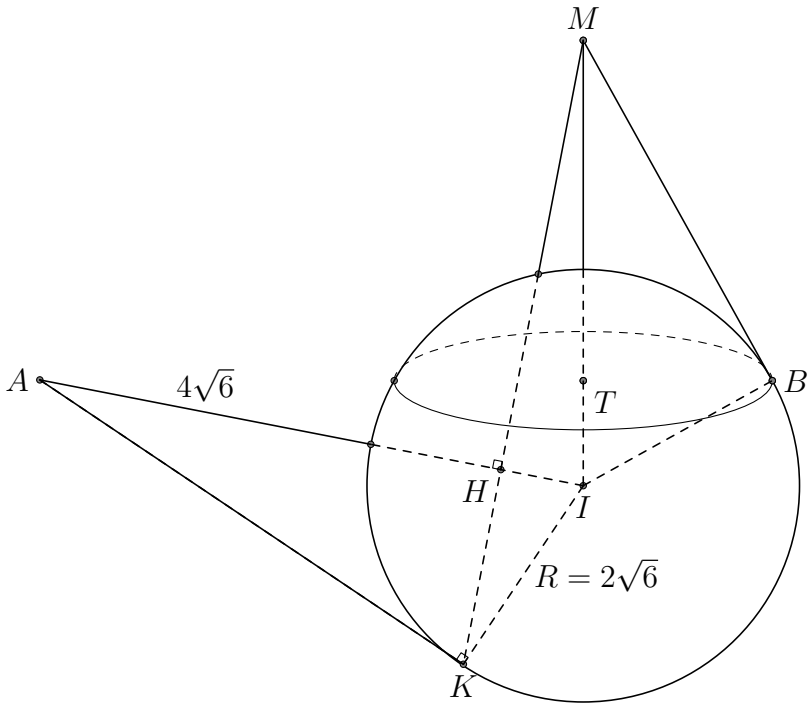
$$M\in\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω) kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết rằng khi hai đường tròn (ω), (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=6\sqrt{2}$. **B.** $r=3\sqrt{10}$. **C.** $r=3\sqrt{5}$. **D.** $r=3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω).
Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;6)$ và có bán kính $R=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. Ta có $IA=\sqrt{4^2+4^2+8^2}=4\sqrt{6}$.
Do hai đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính nên $IM=IA=4\sqrt{6}$. Tam giác IAK vuông tại K nên ta có

$$IK^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IK^2}{IA}=\frac{24}{4\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

Do H là tâm của đường tròn (ω) nên điểm H cố định.
Tam giác IHM vuông tại H nên ta có: $MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=3\sqrt{10}$.
Do H cố định thuộc mặt phẳng (P), M di động trên mặt phẳng (P) và $MH=3\sqrt{10}$ không đổi.
Suy ra điểm M thuộc đường tròn có tâm là H và có bán kính $r=MH=3\sqrt{10}$.

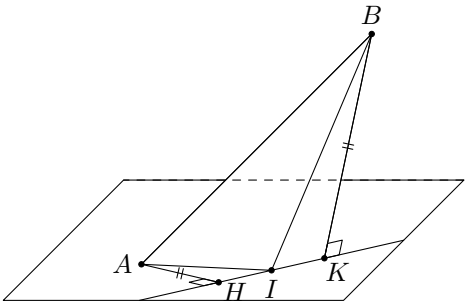
Chọn đáp án (B) □

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là một đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B trên Δ. Biết rằng $AH=BK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=13+2t\\z=-4+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4-t\end{cases}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của HK.



Xét các tam giác AHI và BKI, ta có các tam giác này vuông tại H, K, theo giả thiết $AH = BK, IH = IK \Rightarrow \triangle HIA = \triangle IKB \Rightarrow IA = IB \Rightarrow I$ thuộc mặt phẳng trung trực của AB.

Theo giả thiết $I \in (P) \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của mặt phẳng trung trực (α) của AB với (P).

Mặt phẳng (α): $\begin{cases} \text{Qua } I_0\,(2;3;4) \\ \text{Có véc-tơ pháp tuyến } \overrightarrow{AB} = (1;1;1). \end{cases}$

Suy ra $(\alpha)\colon x + y + z - 9 = 0$.

Tọa độ các điểm $M \in d$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ x + y + z - 9 = 0. \end{cases}$

Đặt $x = t \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ $\Rightarrow$ phương trình của đường thẳng d là $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t. \end{cases}$

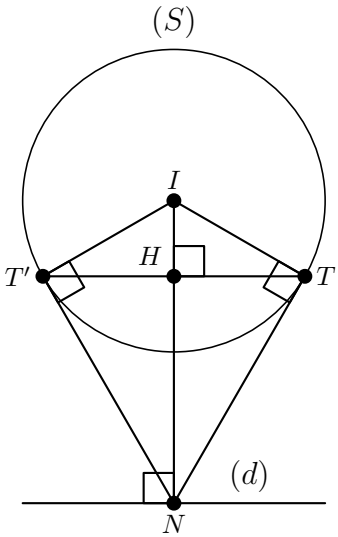
Chọn đáp án (A) □

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 1$ và đường thẳng d có phương trình $x - 2 = y = -z$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d, tiếp xúc với (S) tại T và T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. đáp án khác. **B.** $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{2}{3};\frac{5}{6};-\frac{7}{6}\right)$. **D.** $H\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};-\frac{5}{6}\right)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$.



Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -t. \end{cases}$

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-1)$ và bán kính $R = 1$.

$\overrightarrow{IM} = (2;-1;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right] = (0;3;3)$

và $\mathrm{d}(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{0^2+3^2+3^2}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{6} > R.$

Suy ra đường thẳng d không cắt mặt cầu (S).

Theo giả thiết, ta có $IT \perp d$ và $IT' \perp d$.

Gọi N là hình chiếu của I xuống d. Khi đó, ta có $IN \perp d$ và $IN \subset (ITT')$.

$N \in d \Rightarrow N(2+t;t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (2+t;t-1;-t+1)$.

$\overrightarrow{IN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2+t)\cdot 1 + (t-1)\cdot 1 + (-t+1)\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow N(2;0;0)$.

Suy ra $IN = \sqrt{6}$. Gọi NT, NT' là các tiếp tuyến kẻ từ N của (S) $\Rightarrow \begin{cases} NT = NT' \\ IT = IT'. \end{cases}$

Suy ra giao điểm H của IN và TT' là trung điểm của TT' và $IH \perp TT'$.

Lại có $\triangle ITN$ vuông tại T, đường cao $TH \Rightarrow IH \cdot IN = IT^2 \Rightarrow IH = \dfrac{IT^2}{IN^2} \cdot IN \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{IN}$.

Gọi $H(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (x;y-1;z+1)$.

Do đó $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{6} \cdot \overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \cdot 2 \\ y - 1 = \dfrac{1}{6} \cdot (-1) \\ z + 1 = \dfrac{1}{6} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{6} \\ z = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$.

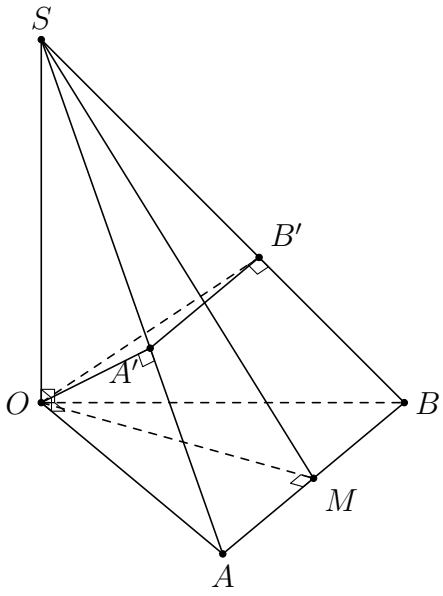
Vậy $H\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{6}; -\dfrac{5}{6}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;c)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên SA, SB. Khi góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(OA'B')$ lớn nhất, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $c \in (-8;-6)$. **B.** $c \in (-9;-8)$. **C.** $c \in (0;3)$. **D.** $c \in \left(-\dfrac{17}{2}; -\dfrac{15}{2}\right)$.

Lời giải.



- ☑ Ta có $A \in Ox$, $B \in Oy$, $S \in Oz$ và $\triangle OAB$ vuông cân tại O, $(SOA) \equiv (xOz)$.
- ☑ Gọi $M(2;2;0)$ là trung điểm của BA, ta có $AB \perp (SOM)$. Khi đó phương trình (SOM) là $-4(x-2) + 4(y-2) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$.
- ☑ Đường thẳng d đi qua $I(1;1;1) \in (SOM)$ và $\vec{u}_d \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, do đó $d \subset (SOM)$.
- ☑ Do $\triangle SOA$, $\triangle SOB$ bằng nhau nên dễ thấy $A'B' \parallel AB$, suy ra $A'B' \perp d$.
- ☑ Do đó $(d, (OA'B')) \leq 90°$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $OA' \perp d$.
  Khi đó $\vec{u}_{OA'} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(SOA)}\right] = (-2;0;1)$.
  Mà $SA \perp OA'$, suy ra $\overrightarrow{SA} \cdot \vec{u}_{OA'} = 0 \Leftrightarrow -8 - c = 0 \Leftrightarrow c = -8$.
- ☑ Suy ra $c \in \left(-\dfrac{17}{2}; -\dfrac{15}{2}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

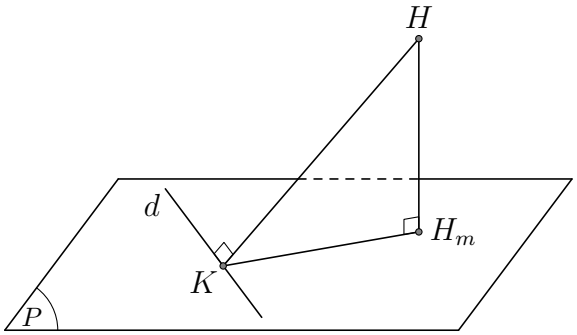
Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $mx + (m+1)y - z - 2m - 1 = 0$, với m là tham số. Gọi (T) là tập hợp các điểm H_m là hình chiếu vuông góc của điểm $H(3;3;0)$ trên (P). Gọi a, b lần lượt là khoảng cách lớn nhất, khoảng cách nhỏ nhất từ O đến một điểm thuộc (T). Khi đó $a + b$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

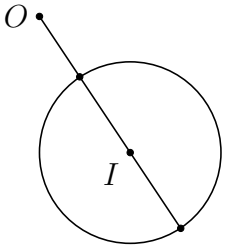
- ☑ Ta có (P): $mx + (m+1)y - z - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m(x + y - 2) + (y - z - 1) = 0$.

☑ Suy ra (P) chứa đường thẳng cố định d: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-1+t. \end{cases}$



☑ Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên d. Khi đó, ta có $(HKH_m) \perp d$.
Gọi (Q) là mặt phẳng qua H và vuông góc với d, ta có $(Q) \equiv (HKH_m)$.
Suy ra $H_m \in (Q)$, mà $\widehat{HH_mK} = 90^\circ$, do đó tập hợp (T) là đường tròn đường kính HK, nằm trong (Q).

☑ Ta lại có $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow OH \perp d$, do đó $O \in (Q)$.



☑ Khi đó, trong (Q), ta xác định H_m trên đường tròn (T) sao cho OH_m đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
Ta xác định được $K(1;1;0)$, (T) có tâm $I(2;2;0)$ là trung điểm của HK, bán kính $R = IH = \sqrt{2}$.
Khi đó $\max(OH_m) = IO + R = 3\sqrt{2}$, $\min(OH_m) = |IO - R| = \sqrt{2}$.

☑ Suy ra $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} \Rightarrow a + b = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $P = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Khi đó $\overrightarrow{IA} = (1-x;4-y;5-z)$, $\overrightarrow{IB} = (3-x;4-y;-z)$ và $\overrightarrow{IC} = (2-x;-1-y;-z)$, từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 1-x+3-x+6-3x=0 \\ 4-y+4-y-3-3y=0 \\ 5-z-z-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ hay $I(2;1;1)$.
Ta có $MA^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = MI^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2$.
Tương tự ta có $MB^2 = MI^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2$ và $MC^2 = MI^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2$.
Suy ra $P = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$.
Tổng P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).
Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng IM là $\vec{n} = (3;-3;-2)$.
Phương trình đường thẳng IM là $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.
Gọi $M(2+3t, 1-3t, 1-2t)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Khi đó $3(2+3t)-3(1-3t)-2(1-2t)-12=0 \Leftrightarrow 22t-11=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra tọa độ điểm M là $M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$. Vậy $a+b+c=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;-2)$ nằm trên mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$. Từ điểm M kẻ ba dây cung MA, MB, MC với (S) có độ dài bằng nhau và đôi một tạo với nhau góc $60°$. Dây cung AB có độ dài bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$ có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=3$.

Giả sử $MA=MB=MC=a$.

Do MA, MB, MC tạo với nhau góc $60°$ nên các tam giác MAB, MBC, MCA là tam giác đều.

Suy ra hình chóp $M.ABC$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng a.

Mặt cầu (S) chính là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $M.ABC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $M.ABC$ cạnh a là

$$R=\frac{MA^2}{2MH}=\frac{a^2}{2\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{4},$$

với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=3 \Rightarrow a=2\sqrt{6}$.

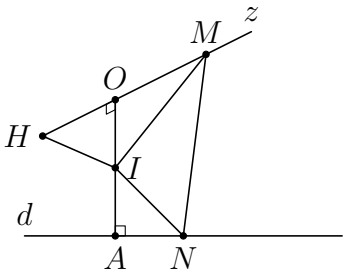
Vậy $AB=2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=4-3t \\ y=3+4t \\ z=0 \end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) có tọa độ là

A. $(4;3;5\sqrt{2})$. **B.** $(4;3;10\sqrt{2})$. **C.** $(4;3;5\sqrt{10})$. **D.** $(4;3;10\sqrt{10})$.

Lời giải.



☑ Ta có M thuộc tia Oz, $M\neq O$, $N\in d$ nên ta có $M(0;0;m)$ $(m>0)$, $N(4-3t;3+4t;0)$.

☑ Vì A là hình chiếu của O trên $d\subset(Oxy)$ nên $MO\perp OA$ và ta xác định được $A(4;3;0)$, $OA=5$.

☑ Ta có

$$MN=OM+AN \Leftrightarrow \sqrt{(4-3t)^2+(3+4t)^2+m^2}=m+5|t|$$
$$\Leftrightarrow 25t^2+25+m^2=m^2+10m|t|+25t^2 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2|t|}\ (A \text{ khác } N \text{ nên } t\neq 0).$$

☑ Trên tia đối tia Oz, lấy điểm H sao cho $OH = AN$. Khi đó, ta có $\triangle IMH = \triangle IMN$ (c.c.c).

☑ Ta có

$$S_{IMN} = S_{IMH} = \frac{1}{2}IO \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (m + 5|t|)$$
$$= \frac{5}{4}\left(\frac{5}{2|t|} + 5|t|\right) \geq \frac{5}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{5}{2|t|} \cdot 5|t|} = \frac{25\sqrt{2}}{4}.$$

Dẳng thức xảy ra khi $\dfrac{5}{2|t|} = 5|t| \Leftrightarrow |t| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Khi đó $m = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

☑ Vậy $M\left(0; 0; \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$. Mặt phẳng (M, d) có một véc-tơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}_d\right] = \left(\frac{20}{\sqrt{2}}; \frac{15}{\sqrt{2}}; 25\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}(4; 3; 5\sqrt{2}).$$

Vậy $(4; 3; 5\sqrt{2})$ là tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (M, d).

Chọn đáp án (A) □

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên d và H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), ta có $AH = \mathrm{d}(A, (P)) \leq \mathrm{d}(A, d) = AK$ trong đó độ dài AK không đổi.

Suy ra $\mathrm{d}(A, (P))$ lớn nhất khi chỉ khi $H \equiv K$. Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với AK.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d, phương trình mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x + y + 2z - 15 = 0$.

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \\ 2x + y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow K(3; 1; 4).$$

Mặt phẳng (P) đi qua $K(3; 1; 4)$ và nhận véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AK} = (1; -4; 1)$, phương trình

$$(P)\colon x - 4y + z - 3 = 0.$$

Do đó, $\mathrm{d}(O, (P)) = \dfrac{3}{\sqrt{18}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 164. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon y - 1 = 0$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1; -3; 11)$, $B\left(\dfrac{1}{2}; 0; 8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\mathrm{d}(M, d) = 2$ và $NA = 2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Vì $\mathrm{d}(M,d)=2$ nên M thuộc mặt trụ tròn xoay (H) có trục là đường thẳng d.

Mặt khác $M\in(P)$ nên M thuộc giao của mặt phẳng (P) và mặt trụ (H).

Lại có, $\begin{cases} d\cap(P)=I(1;1;1) \\ d\perp(P) \end{cases}$ nên giao của mặt phẳng (P) và mặt trụ (H) là đường tròn (C) có tâm I và bán kính $R=2$.

Giả sử $N(x;y;z)$. Vì $NA=2NB$ nên

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2+(z-11)^2}=2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+(z-8)^2} \\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2+z^2-2x-2y-14z+42=0. \end{aligned}$$

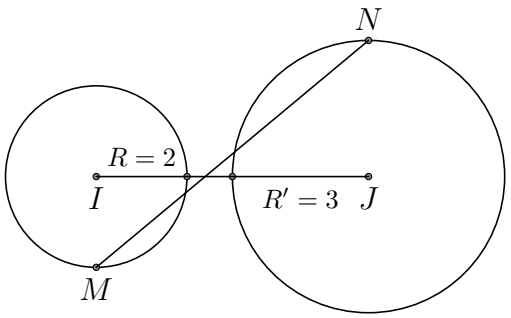
Đây là phương trình mặt cầu (S) có tâm $J(1;1;7)$ và bán kính $r=3$.

Lại có $N\in(P)$ nên N chạy trên giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

Điểm $J\in(P)$ nên giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) là đường tròn (C') có tâm J, bán kính $R'=3$.

Bài toán trở thành: "Trên mặt phẳng (P), cho đường tròn (C) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=2$ và đường tròn (C') có tâm $J(1;1;7)$, bán kính $R'=3$. Điểm $M\in(C)$, $N\in(C')$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN."

Ta có hình minh họa trong mặt phẳng (P) như bên dưới



Rõ ràng, $MN_{\min}=IJ-R-R'=1$.

Chọn đáp án (A) □

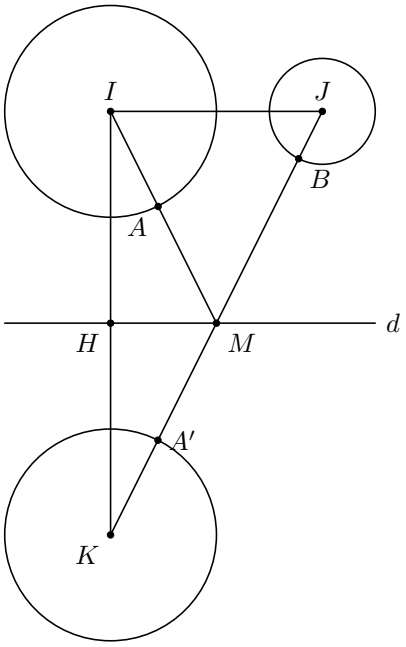
Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S_1)\colon (x-1)^2+y^2+z^2=4$, $(S_2)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=-3t \\ z=-2-t \end{cases}$. Gọi A, B là hai điểm tùy ý thuộc (S_1), (S_2) và M thuộc đường thẳng d. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+MB$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2211}}{11}-3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3707}}{11}-3$.

C. $\dfrac{\sqrt{1771}+2\sqrt{110}}{11}-3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3707}}{11}+7$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;0;0)$, bán kính $R_1 = 2$.
Mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;3;2)$, bán kính $R_2 = 1$.
Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;0;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;-3;-1)$.
Ta có $\overrightarrow{IJ} = (1;3;1)$ cùng phương với $\vec{u}$ và $I \notin d$ nên $IJ \parallel d$.
Gọi (S') là mặt cầu đối xứng của (S_1) qua d; K, A' lần lượt là điểm đối xứng của I và A qua d. Thì K là tâm của (S') và (S') đi qua điểm A'.
Khi đó: $P = MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Suy ra $P_{\min} = A'B = JK - (R_1 + R_2)$.
Ta lại có: $IH = \mathrm{d}(I,d) = \dfrac{3\sqrt{66}}{11} \Rightarrow IK = \dfrac{6\sqrt{66}}{11}$.
Và $IJ = \sqrt{11} \Rightarrow JK = \dfrac{\sqrt{3707}}{11}$. Vậy $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{3707}}{11} - 3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

A. 102. **B.** 105. **C.** 30. **D.** 35.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(1;0;4)$.
Ta có $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$.
Suy ra $T = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\underbrace{\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{2IA^2 + IB^2 - IC^2}_{const}$.
Do đó khi $T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P).
Ta luôn có $IH \leq IM$ nên $IM_{\min} = IH \Rightarrow M \equiv H$.
Khi đó $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{-1} = \dfrac{z-4}{2} \\ 2x - y + 2z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-3;2;0)$.
Khi đó $\overrightarrow{MA} = (5;-4;4)$, $\overrightarrow{MB} = (0;1;-1)$, $\overrightarrow{MC} = (2;-3;-1)$.
Do đó $T = 102$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + z - 7 = 0$ và đi qua điểm $A(1;2;1)$, $B(2;5;3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{470}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{546}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{763}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{345}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu (S). Suy ra $I \in (P)$ và $IA = IB$. Do đó I thuộc mặt phẳng trung trực (Q) của AB.

(Q) đi qua trung điểm $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2};2\right)$ của AB và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = \overrightarrow{AB} = (1;3;2)$ nên có phương trình

$$(Q)\colon 1\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y-\frac{7}{2}\right)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+3y+2z-16=0.$$

Điểm $I\in(P), I\in(Q)\Rightarrow I\in(P)\cap(Q)=d$.
Ta có $\vec{n}_P=(1;2;1)$, $\vec{n}_Q=(1;3;2)\Rightarrow[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(1;-1;1)$.
Suy ra d qua $N(-2;0;9)$ và nhận $\vec{u}_d=(1;-1;1)$ là véc-tơ chỉ phương, do đó d có phương trình
$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=9+t. \end{cases}$$
Bán kính của (S) là $R=IA$, với $I\in d$, do đó R nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu vuông góc của A trên d.
Gọi (α) là mặt phẳng qua $A(1;2;1)$ và vuông góc với d, suy ra (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_d=(1;-1;1)$.
Suy ra $(\alpha)\colon 1(x-1)-1(y-2)+1(z-1)=0\Leftrightarrow x-y+z=0$.
Do I là hình chiếu của A trên d, suy ra $I=d\cap(\alpha)$.
$I\in d\Rightarrow I(-2+t;-t;9+t)$.
$I\in(\alpha)\Rightarrow -2+t+t+9+t=0\Leftrightarrow t=-\frac{7}{3}$.
Suy ra $I\left(\frac{-13}{3};\frac{7}{3};\frac{20}{3}\right)$.
Vậy bán kính nhỏ nhất của (S) là $R=IA=\sqrt{\left(1+\frac{13}{3}\right)^2+\left(2-\frac{7}{3}\right)^2+\left(1-\frac{20}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{546}}{3}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 168. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $d_1\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$, $d_2\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) sao cho d_1, d_2 nằm về hai phía của (P) và cách đều d_1, d_2 là

A. $(P)\colon x+3y+z-8=0$. **B.** $(P)\colon x+3y+z+8=0$.
C. $(P)\colon 4x+5y-3z+4=0$. **D.** $(P)\colon 4x+5y+3z+4=0$.

Lời giải.

☑ Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(2;1;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;-1;2)$.
☑ Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2;3;0)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-1;0;1)$.
Ta có $\vec{n}=[\vec{u}_2,\vec{u}_1]=(1;3;1)$.
Đường thẳng d_1 và d_2 nằm về hai phía của (P) và cách đều mặt phẳng (P) nên (P) song song với d_1, d_2 và $\mathrm{d}(M_1,(P))=\mathrm{d}(M_1,(P))$.
Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(1;3;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình có dạng $x+3y+z+m=0$.

$$\mathrm{d}(M_1,(P))=\mathrm{d}(M_1,(P)) \Leftrightarrow \frac{|2+3+0+m|}{\sqrt{11}}=\frac{|2+9+m|}{\sqrt{11}}$$

$$\Leftrightarrow \quad |5+m| = |11+m| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5+m = 11+m \\ 5+m = -11-m \end{bmatrix} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+3y+z-8=0$.

Chọn đáp án A □

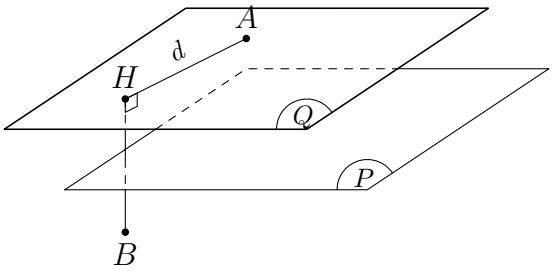
Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$. Đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là nhỏ nhất. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;b;c)$ khi đó $\dfrac{b}{c}$ bằng

A. $\dfrac{b}{c}=11$. **B.** $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{b}{c}=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm A và B lần lượt vào vế trái phương trình mặt phẳng (P) ta được

$VT(A)=-6<0$, $VT(B)=4>0 \Rightarrow A$, B nằm về hai phía của mặt phẳng (P).



Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với $(P) \Rightarrow d \subset (Q)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $(Q) \Rightarrow \mathrm{d}(B,d) \geq BH$.

Vậy khoảng cách từ B đến đường thẳng d nhỏ nhất khi d đi qua A và $H \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của B lên d.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P).

Phương trình $\Delta\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là $x-2y+2z+1=0$.

Có $H=\Delta\cap(Q) \Rightarrow H\in\Delta \Rightarrow H(1+t;-1-2t;3+2t)$.

$H\in(Q) \Rightarrow 1+t-2(-1-2t)+2(3+2t)+1=0 \Leftrightarrow 9t+10=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{10}{9}$.

Suy ra $H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right) \Rightarrow \vec{u}_1=(26;11;-2)$

$\Rightarrow \vec{u}=\left(1;\dfrac{11}{26};-\dfrac{2}{26}\right) \Rightarrow \dfrac{b}{c}=\dfrac{11}{26}\cdot\dfrac{26}{-2}=-\dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ (a, b, c, $d\in\mathbb{Z}$ và $d<-5$), là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Lời giải.

Theo giả thiết mặt cầu có tâm $I\,(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

Trung điểm M của AB có tọa độ $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2};3\right)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)$ suy ra véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B là $\vec{u}=(1;-1;0)$, do đó Δ có phương trình $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}+t\\ y=\dfrac{7}{2}-t\\ z=3.\end{cases}$

Dễ thấy Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $x+y-6=0$ và $z-3=0$.

Suy ra mặt phẳng (P) có dạng $\alpha(x+y-6)+\beta(z-3)=0$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Gọi γ là góc tại đỉnh của hình nón (N), suy ra diện tích của thiết diện qua trục của hình nón là

$$S=\frac{1}{2}R^2\sin\gamma\leq\frac{1}{2}R^2.$$

Do đó $S_{\max}=\dfrac{1}{2}R^2$, dấu "=" xảy ra khi góc tại đỉnh của hình nón vuông, khi đó

$$\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\frac{R}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|-3\alpha|}{\sqrt{2\alpha^2+\beta^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\alpha=\pm\beta.$$

Với $\alpha=\beta\Rightarrow(P)\colon x+y+z-9=0$.

Với $\alpha=-\beta\Rightarrow(P)\colon x+y-z-3=0$ (loại).

Vậy $T=|1+1+1-9|=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có $SC=AB=3\sqrt{2}$, $S(1;3;2)$, đường thẳng AB có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{-1}$ và góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Khi ba điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên cùng một mặt cầu thì mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+y-4z-14=0$.

C. $x-2y-7z-8=0$. **D.** $x+y-4z+14=0$.

Lời giải.

Gọi M,N,P,K lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC,AB.

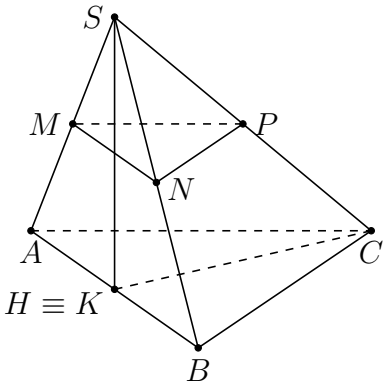
Vì M,N,P,A,B,C nội tiếp mặt cầu nên $SA=SB=SC=AB$.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).

Vì SC hợp với đáy một góc $60°$ nên ta được $SK=SH$.

Vì $H,K\in(ABC)$ nên $H\equiv K$.

Mặt khác, do $\triangle SAB$ đều nên K là hình chiếu của S trên đường thẳng AB.



Ta có $K(1+t;4t;-1-t)\Rightarrow\overrightarrow{SK}=(t;4t-3;-t-3)$.

Vì $\overrightarrow{SK}\perp\vec{u}_{AB}$ nên ta được $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}K\left(\dfrac{3}{2};2;-\dfrac{3}{2}\right)\\ \overrightarrow{SK}=\left(\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{7}{2}\right).\end{cases}$

Vậy $(ABC)\colon x-2y-7z-8=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm $O(-1;2;1)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;-2;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)=IM^2-IA^2=MI^2-72$.

Do đó $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất.

Ta có $\overrightarrow{OI}=(2;-4;-2), IO=\sqrt{2^2+4^2+2^2}=2\sqrt{6}>R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Do đó MI ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn OI và (S).

Đường thẳng IO đi qua $I(1;-2;-1)$ và nhận $\vec{u}=(1;-2;-1)$ là véc-tơ chỉ phương $\Rightarrow OI\colon \begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=-1-t.\end{cases}$

Ta tìm giao điểm M của OI và (S).

Ta có $M(1+t;-2-2t;-1-t)\in(S)\Leftrightarrow(2+t)^2+(4+2t)^2+(2+t)^2=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow|t+2|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{5}{2}\\t=-\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

☑ Với $t=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow MI=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}<OI=2\sqrt{6}\Rightarrow$ điểm này thỏa mãn bài toán.

☑ Với $t=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};3;\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow MI=\dfrac{\sqrt{66}}{2}>OI=2\sqrt{6}\Rightarrow$ điểm này không thỏa mãn.

Vậy với $M\left(-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)$ thì $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất $\Rightarrow a+b+c=-\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{1}{2}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-2), B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$. Điểm $C\in(P)$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Cao độ điểm C bằng

A. 1 hoặc $-\dfrac{2}{3}$. **B.** -1 hoặc $\dfrac{2}{3}$. **C.** -3 hoặc $\dfrac{1}{3}$. **D.** -1 hoặc $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-1;0;-2)$ mặt phẳng (Q) qua B vuông góc với BA có phương trình $x+2z+1=0$.

Ta có C thuộc giao tuyến của $(P),(Q)\Rightarrow\begin{cases}x+2z+1=0\\x+y+z+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=t\end{cases}\Rightarrow C(-1-2t;t;t)$.

Ta có $BA^2=BC^2\Leftrightarrow 5=(-2t)^2+(t-1)^2+t^2\Leftrightarrow 6t^2-2t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

☑ Với $t=1\Rightarrow C(-3;1;1)$.

☑ Với $t=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow C\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Vậy cao độ của C bằng $-\dfrac{2}{3}$ hoặc 1.

Chọn đáp án (A) □

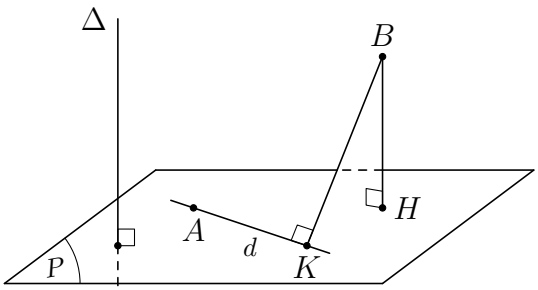
Câu 174. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$. Tìm véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}=(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}=(25;-29;-6)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ.
Phương trình mặt phẳng (P) là

$$2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0.$$



Đường thẳng d đi qua A và vuông góc Δ nên d nằm trong (P).
Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d và (P).
Ta có khoảng cách từ B đến d là $BK\geq BH=\mathrm{d}\,(B,(P))=6$.
Đẳng thức xảy ra khi d đi qua A và H.

Đường thẳng a đi qua $B(1;2;-3)$ và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t.\end{cases}$

Vì $H\in a$ nên $H(1+2t;2+2t;-3-t)$.
Mặt khác $H\in(P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow 9t+18=0\Leftrightarrow t=-2$.
Khi đó, $H(-3;-2;-1)$ và $\overrightarrow{AH}=(-1;0;-2)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.
Vậy một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+5=0$. Gọi A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P); B là điểm thuộc d có hoành độ dương và $AB=\sqrt{6}$. Gọi $C(x;y;z)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Tính giá trị $S=x+y+z$.

A. $S=0$. **B.** $S=7$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải.

Vì A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) nên $A(-3+2a;-1+a;3+a)$.
Tọa độ A thỏa mãn phương trình $(-3+2a)+2(-1+a)-(3+a)+5=0\Leftrightarrow a=1$. Vậy $A(-1;0;4)$.
Gọi $B(-3+2t;-1+t;3+t)\in d,\ \left(t>\dfrac{3}{2}\right)$.

Ta có $AB=\sqrt{6}\Leftrightarrow(-2+2t)^2+(-1+t)^2+(-1+t)^2=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (\text{loại})\\t=2\ (\text{nhận}).\end{array}\right.$

Suy ra $B(1;1;5)$.
Xét $\triangle ABC$ ta có $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}\Leftrightarrow\sin C=\dfrac{AB\cdot\sin B}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=1\Rightarrow\widehat{ACB}=90^\circ$.

Do đó C là hình chiếu vuông góc của B lên (P).

BC qua $B(1;1;5)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_P = (1;2;-1)$, có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 5 - t' \end{cases}$.

Xét phương trình $(1+t') + 2(1+2t') - (5-t') + 5 = 0 \Leftrightarrow t' = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $C\left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{11}{2}\right)$, do đó $x + y + z = \dfrac{1}{2} + 0 + \dfrac{11}{2} = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 176. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;1)$, $B(-7;3;9)$, $C(2;2;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (P) sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2a+b+4c=35$. **B.** $2a+b+4c=15$. **C.** $2a+b+4c=9$. **D.** $2a+b+4c=3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} \\ &= \frac{MA^2+MB^2-AB^2}{2} - 2\cdot\frac{MB^2+MC^2-BC^2}{2} + 3\cdot\frac{MC^2+MA^2-AC^2}{2} \\ &= 2MA^2 - \frac{1}{2}MB^2 + \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + BC^2 - \frac{3}{2}AC^2. \end{aligned}$$

Gọi $I(x;y;z)$ sao cho $2\overrightarrow{IA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{IB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Suy ra tọa độ I thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(3-x) - \dfrac{1}{2}(-7-x) + \dfrac{1}{2}(2-x) = 0 \\ 2(1-y) - \dfrac{1}{2}(3-y) + \dfrac{1}{2}(2-y) = 0 \\ 2(1-z) - \dfrac{1}{2}(9-z) + \dfrac{1}{2}(2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{4} \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{21}{4}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

Khi đó,

$$T = \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)MI^2 + 2IA^2 - \frac{1}{2}IB^2 + \frac{1}{2}IC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + BC^2 - \frac{3}{2}AC^2.$$

Do đó, T nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất. Suy ra M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Đường thẳng IM có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_P = (1;1;1)$ có phương trình là $\begin{cases} x = \dfrac{21}{4} + t \\ y = \dfrac{3}{4} + t \\ z = -\dfrac{3}{4} + t. \end{cases}$

Xét phương trình $\left(\dfrac{21}{4}+t\right) + \left(\dfrac{3}{4}+t\right) + \left(-\dfrac{3}{4}+t\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow M\left(\dfrac{9}{2}; 0; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Vậy $a = \dfrac{9}{2}$, $b = 0$, $c = -\dfrac{3}{2}$. Khi đó $2a+b+4c = 9+0-6 = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc (S). Gọi M và N là hai tiếp điểm. Tính độ dài MN.

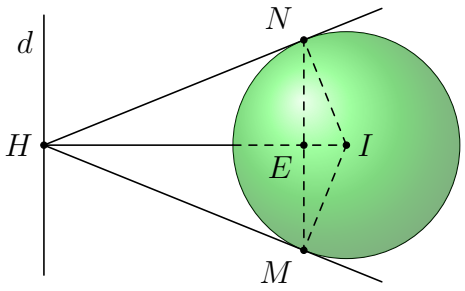
A. $MN = 2\sqrt{2}$. **B.** $MN = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $MN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = 4$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$. Gọi $H(2+2t;-t;4t)$ là hình vuông góc của I xuống d.

Ta có $\overrightarrow{IH} = (2t+1;-t-2;4t-1)$ mà

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cdot(2t+1) - 1\cdot(-t-2) + 4\cdot(4t-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = 0. \end{aligned}$$



Do đó $\overrightarrow{IH} = (1;-2;-1)$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d bằng $IH = \sqrt{6}$.

Xét mặt phẳng (IMN), mặt phẳng này cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có $IM \perp (P) \Rightarrow IM \perp d$ mà $IH \perp d \Rightarrow d \perp (IMH)$.

Tương tự $d \perp (INH)$, do đó 4 điểm I, M, N, H đồng phẳng (cùng thuộc mặt phẳng qua I và vuông góc với d).

Xét $\triangle IMH$, $HM = \sqrt{IH^2 - IM^2} = \sqrt{6-2} = 2$ và $ME = \dfrac{IM \cdot HM}{IH} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $MN = 2ME = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2 = 4$. Hai mặt phẳng phân biệt qua d, tiếp xúc với (S) tại A và B. Đường thẳng AB đi qua điểm có tọa độ

A. $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

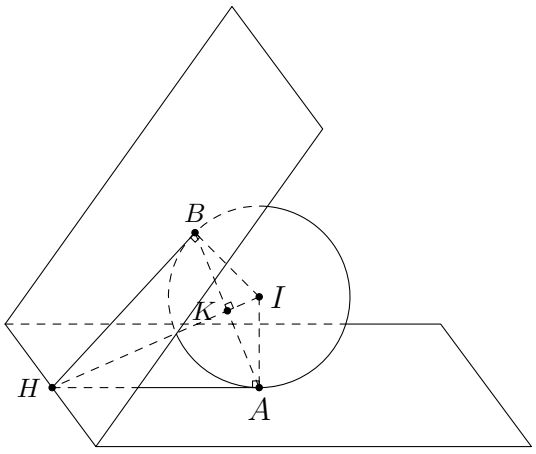
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I và vuông góc với d.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = (-1;1;1)$.

Suy ra phương trình của (P) là $x - y - z = 0$.

Gọi H là hình chiếu của I lên d. Ta có H là giao điểm của d và (P). Tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{1} \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 3 \\ z = 0. \end{cases}$$



Suy ra $H(3;3;0)$.

Ta lại có $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_d$ và $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IH}$ nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $[\vec{u}_d, \overrightarrow{IH}] = (-3;3;-6)$. Suy ra véc-tơ chỉ phương của AB là $\vec{u} = (1;-1;2)$

Gọi $K = IH \cap AB$ ta có $IA^2 = IK \cdot IH \Rightarrow \dfrac{IK}{IH} = \dfrac{IA^2}{IH^2} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{IH} \Rightarrow K\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};0\right)$.

Do đó đường thẳng AB là $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = \dfrac{2}{3} - t \\ z = 2t \end{cases}$. Từ đó ta kiểm tra các điểm thuộc AB.

Chọn đáp án (B) □

Câu 179. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T'. Đường thẳng TT' đi qua điểm có tọa độ

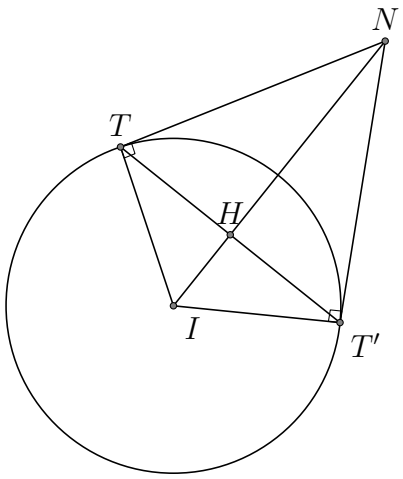
A. $H\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{11}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$. **C.** $H\left(-\dfrac{11}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{6}\right)$. **D.** $H\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=1$.

$\begin{cases} IT \perp (P) \Rightarrow IT \perp d \\ IT' \perp (P') \Rightarrow IT' \perp d \end{cases} \Rightarrow d \perp (ITT')$.

Gọi $N = d \cap (ITT') \Rightarrow N$ là hình chiếu của I trên d.



Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow N(t; 2+t; -t)$ và $\overrightarrow{IN} = (t-1; 2+t; -t+1)$.

$\overrightarrow{IN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow N(0;2;0) \Rightarrow \begin{cases} IN = \sqrt{6} \\ \overrightarrow{IN} = (-1;2;1). \end{cases}$

Ta có $IH \cdot IN = IT^2 \Rightarrow IH = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Phương trình đường thẳng $IN: \begin{cases} x = -u \\ y = 2+2u \\ z = u \end{cases} \Rightarrow H(-u; 2+2u; u) \ u \in \mathbb{R}$

và $\overrightarrow{IH} = (-u-1; 2+2u; u+1)$.

$IH = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow IH^2 = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow (-u-1)^2 + (2u+2)^2 + (u+1)^2 = \dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -\dfrac{5}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right) \\ u = -\dfrac{7}{6} \Rightarrow H\left(\dfrac{7}{6}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{7}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{6}\right). \end{array}\right.$

Vì $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IN} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$.

Đường thẳng TT' đi qua $H\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{6}\right)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\left[\vec{n}_{(ITT')}; \overrightarrow{IN}\right] = (3;0;3)$ nên có

phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{5}{6} + t \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{5}{6} + t \end{cases}$ (*)

☑ Thế $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$ vào (*) ta thấy không thỏa.

☑ Thế $\left(\frac{11}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ vào (*) ta thấy không thỏa.

☑ Thế $\left(-\frac{11}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$ vào (*) ta thấy không thỏa.

☑ Thế $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ vào (*) ta thấy không thỏa.

Chọn đáp án B □

Câu 180. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

A. $6x+8y+11=0$. **B.** $3x+4y+2=0$. **C.** $3x+4y-2=0$. **D.** $6x+8y-11=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính $R=3$.

* Ta tính được $AI=5$, $AM=\sqrt{AI^2-R^2}=4$.

* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2;3;-1)$, bán kính $AM=4$ là

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$.

* M luôn thuộc mặt phẳng $(P)=(S)\cap(S')$ có phương trình: $3x+4y-2=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 181. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{3}$. **B.** 32. **C.** 64. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải.

Đặt $AD=a$, $AB=b$, $AC=c$.

Khi đó, $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD=\frac{1}{6}abc$.

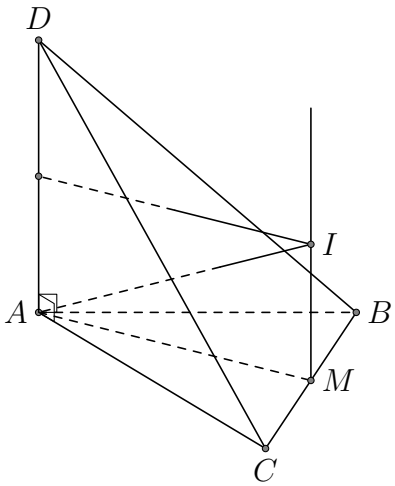
Ta có bán kính mặt cầu (S) là $R=IA=2\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó, $AM=\dfrac{b^2+c^2}{2}$.

Vì tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (S) nên ta có $IM \parallel AD$ và $IM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}a$.

Xét tam giác AIM vuông tại M, ta có

$$AI^2=AM^2+IM^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=48$$



Suy ra $V_{ABCD}^2=\frac{1}{36}a^2b^2c^2\le\frac{1}{36}\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27}=\frac{1024}{9}$ hay $V_{ABCD}\le\frac{32}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 182. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x+2y+2z+15=0$. **B.** $2x+2y+2z-15=0$.

C. $x+y+z+7=0$. **D.** $x+y+z-7=0$.

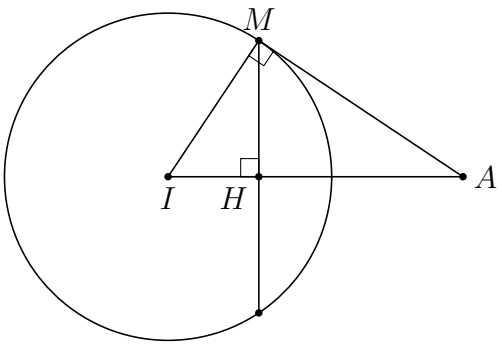
Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)\Rightarrow IA=\sqrt{3}$.

Suy ra điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

Do đó tập hợp tất cả các điểm M nằm trên mặt phẳng cố định (α). Mặt phẳng cố định (α) đi qua điểm H là hình chiếu của điểm M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.



Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên suy ra

$$IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IM^2}{IA}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là $-\left(x-\frac{4}{3}\right)-\left(y-\frac{7}{3}\right)-\left(z-\frac{10}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+y+z-7=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 183. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\ :\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $3x+4y-2=0$. **B.** $3x+4y+2=0$. **C.** $6x+8y+11=0$. **D.** $6x+8y-11=0$.

Lời giải.

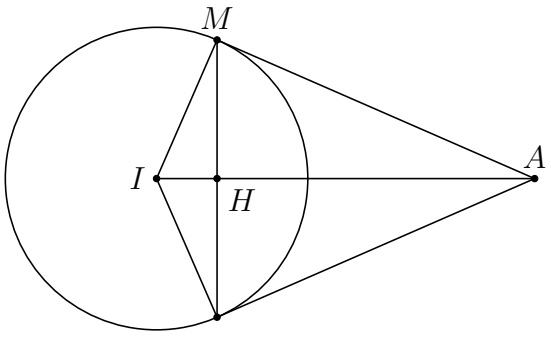
Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ bán kính $R=4$.

Có $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)\Rightarrow IA=5$.

Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm véc-tơ pháp tuyến

Do hai $\triangle MHI$ và $\triangle AMI$ đồng dạng nên $IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IM^2}{IA}=\frac{16}{5}$.

Suy ra $\overrightarrow{IH}=\frac{16}{25}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\frac{2}{25};\frac{11}{25};-1\right)$.



Mặt phẳng cần tìm có phương trình $-3\left(x-\frac{2}{25}\right)-4\left(y-\frac{11}{25}\right)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 184. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-8y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+3z-3=0$. Biết (P) cắt (S) theo một đường tròn, tìm tọa độ tâm I và bán kính của r của đường tròn đó.

A. $I\left(\frac{8}{7};\frac{25}{7};-\frac{16}{7}\right)$ và $r=\frac{2\sqrt{854}}{3}$.

B. $I\left(\frac{8}{7};-\frac{31}{7};-\frac{2}{7}\right)$ và $r=\frac{\sqrt{854}}{5}$.

C. $I\left(-\frac{8}{7};\frac{31}{7};\frac{2}{7}\right)$ và $r=\frac{\sqrt{854}}{7}$.

D. $I\left(-\frac{8}{7};\frac{31}{7};\frac{2}{7}\right)$ và $r=\frac{\sqrt{854}}{3}$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu S là $J(-2;4;-1)$, bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-1)^2-1}=2\sqrt{5}$.

Khoảng cách $\mathrm{d}(J,(P))=\dfrac{|-2\cdot 2+4+3\cdot(-1)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

Khi đó ta có $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(J,(P))}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{7}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{854}}{7}$.

Xét đường thẳng d đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng P có phương trình $\begin{cases}x=-2+2t\\y=4+t\\z=-1+3t\end{cases}$.

Ta có I là giao điểm của đường thẳng d và (P).

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=-2+2t\\y=4+t\\z=-1+3t\\2x+y+3z-3=0\end{cases}$

$$\Rightarrow 2(-2+2t)+4+t+3(-1+3t)-3=0\Rightarrow t=\frac{3}{7}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{8}{7}\\y=\dfrac{31}{7}\\z=\dfrac{2}{7}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{8}{7};\frac{31}{7};\frac{2}{7}\right).$$

Chọn đáp án C □

Câu 185. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-6}{-5}$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2; d là đường thẳng đi qua điểm $M(2;3;1)$ cắt d_1,d_2 lần lượt tại hai điểm B và C sao cho $BC=AB\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng d, biết rằng d không song song với mặt phẳng (Oxz).

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$d_1\colon\begin{cases}x=1+t_1\\y=1+2t_1\\z=1+t_1\end{cases},\ d_2\colon\begin{cases}x=t_2\\y=-1+2t_2\\z=6-5t_2.\end{cases}$$

Gọi d_3 là đường thẳng qua M sao cho $d_3\parallel d_1$. Phương trình d_3 có dạng $d_3\colon\begin{cases}x=2+t_3\\y=3+2t_3\\z=1+t_3\end{cases}$.

Gọi điểm N là giao điểm của d_3 với d_2, ta có tọa độ $N\left(\frac{7}{6};\frac{8}{6};\frac{1}{6}\right)$. Suy ra, độ dài cạnh MN là

$$MN=\sqrt{\left(2-\frac{7}{6}\right)^2+\left(3-\frac{8}{6}\right)^2+\left(1-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

Giả sử tọa độ điểm $C\in d_2$ có dạng $C(t_2;-1+2t_2;6-5t_2)$. Do $MN\parallel AB$ nên $MC=MN\sqrt{6}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}MC^2=6MN^2&\Leftrightarrow (t_2-2)^2+(2t_2-4)^2+(5-5t_2)^2=25\\&\Leftrightarrow 30t_2^2-70t_2+20=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t_2=\frac{1}{3}\\&t_2=2.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Suy ra, tọa độ điểm C là $\left[\begin{aligned}&C\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{13}{3}\right)\\&C(2;3;-4)\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\overrightarrow{MC}=\left(-\frac{5}{3},-\frac{10}{3},\frac{10}{3}\right)\\&\overrightarrow{MC}=(0;0;-5)\end{aligned}\right.$ (loại bởi $\overrightarrow{MC}\nparallel(Oxz)$).

Suy ra, phương trình đường thẳng MC qua điểm $M(2;3;1)$ và nhận véc-tơ $(-1;-2;2)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có dạng $d\colon\begin{cases}x=2-t\\y=3-2t\\z=1+2t\end{cases}$. Từ đây, ta dễ dàng tìm được chân đường cao kẻ từ O đến BC là điểm $H\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$. Suy ra, khoảng cách cần tìm là

$$OH=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{10}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 186. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=1-3t\\y=3+t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. M là điểm di động trên tia Oz, N là điểm di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác IMN bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 5. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $A\in d$ nên $A(1-3t;3+t;0)$. Do A là hình chiếu nên $\overrightarrow{OA}\perp\vec{u}_d\Leftrightarrow -3(1-3t)+(3+t)=0\Leftrightarrow t=0$. Do đó tọa độ A là $(1;3;0)$.

Ta thấy $\vec{u}_d\cdot\vec{k}=0$ nên $d\perp Oz$ hay $AN\perp OM$.

Mặt khác, $\overrightarrow{OA}=(1;3;0)$ nên $\overrightarrow{OA}\perp\vec{u}_d$ và $\overrightarrow{OA}\perp\vec{k}$ nên $OA\perp OM$ và $OA\perp AN$.

Gọi H là hình chiếu của I lên MN.

Kéo dài tia NA một đoạn $AP=OM$.

Ta có $NP=NM$ nên $\triangle IAP=\triangle IOM$ (c.g.c) $\Rightarrow IP=IM$

Do đó $\triangle INM = \triangle INP$.

Suy ra, hai đường cao IH và IA bằng nhau.

Vậy MN tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính IA.

$S_{IMN} = \dfrac{1}{2}MN \cdot IH = \dfrac{1}{2}MN \cdot \dfrac{OA}{2}$. Để S_{IMN} nhỏ nhất thì MN nhỏ nhất.

Ta lại có $MN = OM + AN \geq 2\sqrt{OM \cdot AN} = 2\sqrt{MH \cdot NH} = 2\sqrt{IH^2} = 2IH = OA$.

Vậy $S_{IMN} \geq \dfrac{OA^2}{4} = \dfrac{5}{2}$

Chọn đáp án A □

Câu 187. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-7}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d_1 và d_2 đồng thời đi qua điểm $M(3;10;1)$.

A. $\Delta\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-10}{5} = \dfrac{z-1}{1}$.

B. $\Delta\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-10}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-10}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$.

D. $\Delta\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-10}{-5} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ lần lượt là VTCP của d_1 và d_2.

Lấy $A(2;-1;-3) \in d_1$, $B(3;7;1) \in d_2$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và d_1. Một VTPT của (P) là $\vec{n_1} = \left[\vec{u_1}, \overrightarrow{AM}\right] = (-18;-10;32)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và d_2. Một VTPT của (Q) là $\vec{n_2} = \left[\vec{u_2}, \overrightarrow{BM}\right] = (3;0;3)$.

Suy ra một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-30;150;30)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-10}{5} = \dfrac{z-1}{1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 188. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$, $E(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OMN và vuông góc với mặt phẳng (OMN). Tính khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng Δ .

A. $\dfrac{5\sqrt{17}}{3}$.

B. $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$.

C. $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}$.

D. $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.

$OM = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$.

$ON = \sqrt{\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = 4$.

$MN = \sqrt{\left(-\dfrac{8}{3}-2\right)^2 + \left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2 + \left(\dfrac{8}{3}-1\right)^2} = 5$.

Gọi $I(x,y,z)$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle OMN$.

Ta có $MN \cdot \overrightarrow{IO} + ON \cdot \overrightarrow{IM} + OM \cdot \overrightarrow{IN} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{MN \cdot x_O + ON \cdot x_M + OM \cdot x_N}{MN + ON + OM} = 0 \\ y = \dfrac{MN \cdot y_O + ON \cdot y_M + OM \cdot y_N}{MN + ON + OM} = 1 \\ z = \dfrac{MN \cdot z_O + ON \cdot z_M + OM \cdot z_N}{MN + ON + OM} = 1. \end{cases}$

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right] = (4;-8;8) = 4(1;-2;2)$.

Khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}[E;\Delta]=\frac{\left|[\vec{u};\overrightarrow{IE}]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{4^2+6^2+4^2}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 189. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $(d_1)\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$, $(d_2)\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$, $(d_3)\colon \dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$, $(d_4)\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt bốn đường thẳng đã cho và Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;1)$. Tính $T=a+b$.

A. $T=-3$. **B.** $T=5$. **C.** $T=7$. **D.** $T=-5$.

Lời giải.

Dễ thấy (d_1) và (d_2) có cùng véc-tơ chỉ phương và điểm $M_1(1;-1;2)$ thuộc (d_1) nhưng không thuộc d_2 nên suy ra $d_1 \parallel d_2$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2. Lấy $M_2(-3;2;4)\in d_2$.

Ta có $\vec{n}_\alpha=\left[\overrightarrow{M_1M_2};\vec{u}_{d_1}\right]=(7;16;-10)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là

$$7(x-1)+16(y+1)-10(z-2)=0\Leftrightarrow 7x+16y-10z+29=0.$$

Ta tìm được $d_3\cap(\alpha)=A(-5;1;1)$ và $d_4\cap(\alpha)=B(5;-4;0)$.

Δ là đường thẳng cắt 4 đường thẳng đã cho, nên Δ phải đi qua A và B. Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}=(10;-5;-1)=-(-10;5;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 190. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2-t\\ y=t\\ z=m+t\end{cases}$. Tìm m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

A. $m=0$ hoặc $m=-4$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-4$.

C. $m=0$ hoặc $m=4$. **D.** $m=-1$ hoặc $m=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$. Để (d) cắt (S) tại hai điểm A, B thì phương trình $(t-2)^2+t^2+(m+t)^2-2(t-2)+4(m+t)+1=0\Leftrightarrow 3t^2+2(m+1)t+m^2+4m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hay $\Delta'=-2m^2-10m-2>0\quad(*)$.

Mặt phẳng tiếp diện tại A và B vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}\perp\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0$

$$\Leftrightarrow\quad (x_A-1)(x_B-1)+y_Ay_B+(Z_A+2)(z_B+2)=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x_Ax_B-(x_A+x_B)+1+y_Ay_B+z_Az_B+2(z_A+z_B)+4=0\quad(**).$$

Mặt khác

- ☑ $x_Ax_B=(2-t_1)(2-t_2)=4-2(t_1+t_2)+t_1t_2=\dfrac{1}{3}(17+8m+m^2)$.
- ☑ $x_A+x_B=4-(t_1+t_2)=\dfrac{1}{3}(14+2m)$.

- ☑ $y_A y_B = t_1 t_2 = \dfrac{1}{3}(m^2+4m+1)$
- ☑ $z_A + z_B = 2m + t_1 + t_2 = \dfrac{1}{3}(4m-2)$
- ☑ $z_A z_B = (m+t_1)(m+t_2) = \dfrac{1}{3}(16+20m+4m^2)$

Do đó $(**) \Leftrightarrow 4m^2+20m+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (*)).

Chọn đáp án (B) □

Câu 191. Trong không gian $Oxyz$ cho $(\alpha)\colon x-my+z-3m-3=0$ và $(\beta)\colon mx+y-mz-3m+1=0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng (Δ). Gọi đường thẳng (Δ') là hình chiếu vuông góc của (Δ) lên mặt phẳng Oxy. Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng (Δ') luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc (Oxy). Tính giá trị $P=2a^2+5b^2-6c^2$.

A. $P=73$. **B.** $P=41$. **C.** $P=38$. **D.** $P=56$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-m;1)$.

Mặt phẳng (β) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(m;1;-m)$.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}]=(m^2-1;2m;m^2+1)$.

Tọa độ giao điểm A của đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-my+z-3m-3=0 \\ mx+y-mz-3m+1=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3m^2+2m+3}{m^2+1};-\frac{3m^2+1}{m^2+1};0\right).$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (Δ) và vuông góc với mặt phẳng (Oxy).

Khi đó (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u};\vec{k}\right]=(2m;m^2-1;0)$ với $\vec{k}=(0;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2m\left(x-\dfrac{3m^2+2m+3}{m^2+1}\right)+(m^2-1)\left(y+\dfrac{3m^2+1}{m^2+1}\right)=0$.

Vì đường thẳng (Δ') luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có bán kính R suy ra

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{d}\left(I;\Delta'\right)=\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=\frac{\left|2m\left(a-\dfrac{3m^2+2m+3}{m^2+1}\right)+(m^2-1)\left(b+\dfrac{3m^2+1}{m^2+1}\right)\right|}{m^2+1} \\ &= \frac{\left|2m\left(a-3-\dfrac{2m}{m^2+1}\right)+(m^2-1)\left(b-3+\dfrac{2}{m^2+1}\right)\right|}{m^2+1} \\ &= \frac{|2m(a-3)+(m^2-1)(b-3)-2|}{m^2+1} \\ &= \frac{|m(2a-6)+m^2(b-3)-b+1|}{m^2+1} \end{aligned}$$

Do $R>0$ không đổi nên $R=\left|\dfrac{m(2a-6)+m^2(b-3)-b+1}{m^2+1}\right|$ và không phụ thuộc vào m.

Suy ra ta có hệ $\begin{cases} 2a-6=0 \\ b-3=-b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $I(3;2;0)$ và $P=38$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 192. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên d. Biết giá trị nhỏ nhất của nửa chu vi tam giác MAB là số có dạng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên. Khi đó

A. $a+b=40$. **B.** $a+b=38$. **C.** $|a-b|=10$. **D.** $|a-b|=12$.

Lời giải.

Ta có $AB=2\sqrt{11}$, $M\in d \Rightarrow M(-1+2t;1-t;2t)$, khi đó

$$\begin{aligned} MA+MB &= \sqrt{(2-2t)^2+(4+t)^2+(2t)^2}+\sqrt{(4-2t)^2+(2+t)^2+(6-2t)^2} \\ &= \sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}=f(t) \end{aligned}$$

Ta có $f'(t)=\dfrac{9t}{\sqrt{9t^2+20}}+\dfrac{9(t-2)}{\sqrt{9t^2-36t+56}}$, bảng biến thiên của $f(t)$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{29}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất nửa chu vi tam giác MAB là $\sqrt{11}+\sqrt{29} \Rightarrow a+b=40$.

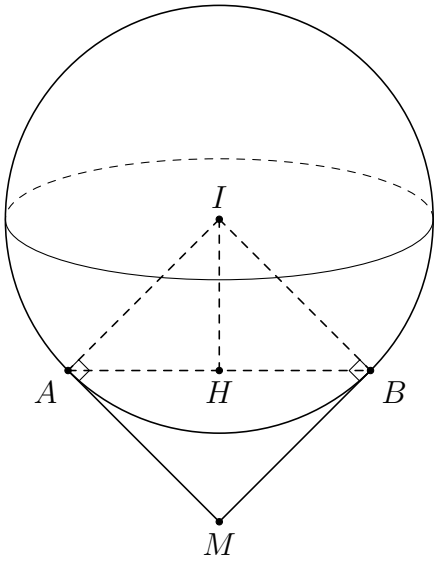
Chọn đáp án A □

Câu 193. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m-1+t \end{cases}$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất có thể. Tính tổng các phần tử của tập hợp T.

A. -3. **B.** -5. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải.

(S) có tâm là $I(1;0;-2)$, bán kính $R=2$.
Tiếp diện tại A, B của (S) là (P) và (P'). Gọi M là hình chiếu của I lên giao tuyến của (P) và $(P') \Rightarrow ((P),(P')) = (AM, BM)$.
Hai mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất $\Leftrightarrow ((P),(P')) = 90^\circ$ hay $IAMB$ là hình vuông cạnh $2 \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d) = IH = \sqrt{2}$.
Mặt khác $\mathrm{d}(I;d) = \dfrac{\sqrt{(m+1)^2+(m+2)^2+1}}{\sqrt{3}}$.
Vậy $\dfrac{\sqrt{(m+1)^2+(m+2)^2+1}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-5}$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t. \\ z=-1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=\dfrac{-25}{7}+t. \\ z=\dfrac{18}{7} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-3+t. \\ z=4 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=-4+t. \\ z=3+t \end{cases}$

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm, $A = d \cap d_1$ và $B = d \cap d_2$.
Ta có tọa độ $A = (u; -4+u; 3-u)$, $B = (1-2v; -3+v; 4-5v)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1-2v-u; 1+v-u; 1-5v+u)$ là véc-tơ chỉ phương của d.
Do $d \perp (Oxz)$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}_{Oxz} = (0;1;0)$ cùng phương.
Từ đó ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = 0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2v-u=0 \\ 1-5v+u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{3}{7} \\ u=\dfrac{2}{7}. \end{cases}$
Nên tọa độ $A(\frac{3}{7}; \frac{-25}{7}; \frac{18}{7})$.
Vậy d đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (0;1;0)$ có phương trình là $\begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=\dfrac{-25}{7}+t \\ z=\dfrac{18}{7}. \end{cases}$

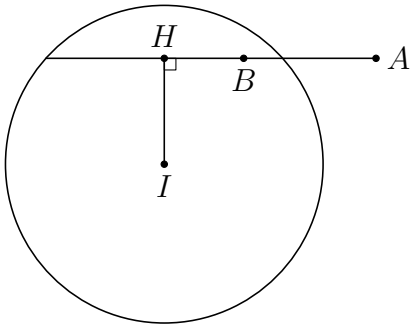
Chọn đáp án (B) □

Câu 195. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Mặt phẳng $(Q)\colon ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = a+b+c$.

A. $P=9$. **B.** $P=12$. **C.** $P=5$. **D.** $P=8$.

Lời giải.

$(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ nên
(S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.
Ta có



- ☑ $\overrightarrow{IA}=(2;-4;3)\Rightarrow IA=\sqrt{29}>R$ nên A nằm ngoài (S).
- ☑ $\overrightarrow{IB}=(-1;-1;-3)\Rightarrow IB=\sqrt{11}<R$ nên B nằm trong (S).

Đường thẳng AB đi qua $B(0;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$ hay $\vec{u}=(1;-1;2)$ nên có phương trình

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2t. \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng AB.
Ta có $H(t;1-t;2t)\in AB\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-1+t;-1-t;-3+2t)$.
Khi đó $\overrightarrow{IH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow \overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow 1\cdot(-1+t)-1\cdot(-1-t)+2\cdot(-3+2t)=0\Leftrightarrow t=1$
$\Rightarrow H(1;0;2)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(0;-2;-1)$.
Ta có $(\mathrm{d}(I,(Q)))^2+r^2=R^2$ nên mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r nhỏ nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(I,(Q))$ lớn nhất.
Lại có $\mathrm{d}(I,(Q))\le IH$ (vì (Q) chứa đường AB).
Do đó $\mathrm{d}(I,(Q))$ lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(I,(Q))=IH$ hay $(Q)\perp IH\Leftrightarrow -2b-c=0$.
Mà $A(3;-2;6)$ và $B(0;1;0)$ thuộc (Q) nên $\begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} a=10 \\ b=2 \\ c=-4. \end{cases}$

Vậy $P=a+b+c=10+2-4=8$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m)\colon (m-1)x+(2-m)y-mz+2m-1=0$ thay đổi. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;0;3)$ lên mặt phẳng (P_m) luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính là

A. $R=1$. **B.** $R=\dfrac{1}{2}$. **C.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi d_m là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P_m).
Gọi A_m là hình chiếu vuông góc của A lên (P_m) suy ra $A_m=d_m\cap(P_m)$. Ta xét

- ☑ Khi $m=0,(P_0)\colon -x+2y-1=0$ suy ra $d_0\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=3 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

  Ta có $A_0(1-t,2t,3)$ với t thỏa $-(1-t)+2\cdot 2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}$.
  Vậy $A_0\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};3\right)$.

☑ Khi $m=1, (P_1)\colon y-z+1=0$ suy ra $d_1\colon \begin{cases} x=1 \\ y=k \\ z=3-k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$.

Ta có $A_1(1,k,3-k)$ với k thỏa $k-(3-k)+1=0 \Leftrightarrow k=1$.

Vậy $A_1\,(1;1;2)$.

☑ Khi $m=2, (P_2)\colon x-2z+3=0$ suy ra $d_2\colon \begin{cases} x=1+l \\ y=0 \\ z=3-2l \end{cases} (l\in\mathbb{R})$.

Ta có $A_2(1+l,0,3-2l)$ với l thỏa $(1+l)-2(3-2l)+3=0 \Leftrightarrow l=\dfrac{2}{5}$.

Vậy $A_2\left(\dfrac{7}{5};0;\dfrac{11}{5}\right)$.

Vì A_m luôn thuộc một đường tròn cố định nên đường tròn đó là đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_0A_1A_2$. Gọi R là bán kính của đường tròn này. Ta đặt

☑ $a=A_0A_1=\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^2+(2-3)^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

☑ $b=A_0A_2=\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(0-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{11}{5}-3\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

☑ $c=A_1A_2=\sqrt{\left(\dfrac{7}{5}-1\right)^2+(0-1)^2+\left(\dfrac{11}{5}-2\right)^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

☑ $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}}{5}$.

Ta có diện tích $\triangle A_0A_1A_2$ là $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{6\sqrt{6}}{25}$.

Mặt khác $S=\dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

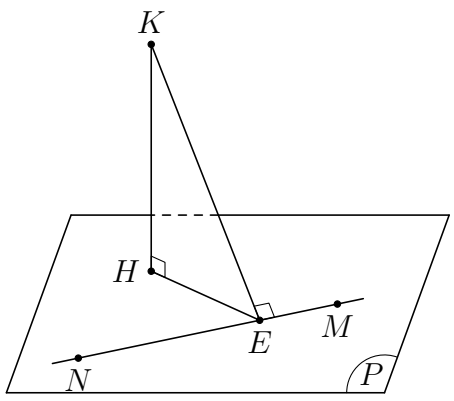
Câu 197. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

A. $\vec{n}=(1;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;1;-1)$. **C.** $\vec{n}=(2;1;-1)$. **D.** $\vec{n}=(2;-1;1)$.

Lời giải.

Gọi H, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên mặt phẳng (P) và đường thẳng MN. Khi đó tam giác KHE vuông tại $H \Rightarrow KH\le KE$.

Lại có $\mathrm{d}(K,(P))=KH$, $\mathrm{d}(K,MN)=KE$ nên khoảng cách từ K đến mặt phẳng (P) lớn nhất khi $H\equiv E$, tức là $\overrightarrow{KE}$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).



Ta có $\overrightarrow{MN}=(-1;2;1)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $MN\colon \begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}$

$\Rightarrow E(-t;-1+2t;2+t) \Rightarrow \overrightarrow{KE}=(-t;-1+2t;t)$.

Vì $\overrightarrow{KE} \perp \overrightarrow{MN}$ nên $t + 2(-1 + 2t) + t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$. Do đó $\overrightarrow{KE} = \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Vậy một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 198. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 \colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$; $d_2 \colon \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P) \colon x + y + 3z - 5 = 0$. Số đường thẳng song song với mặt phẳng (P), cắt cả hai đường d_1, d_2 là

A. 3. **B.** vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Giả sử Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $A = \Delta \cap d_1$, $B = \Delta \cap d_2$. Suy ra $A(3 - t_1; 3 - 2t_1; -2 + t_1)$ và $B(5 - 3t_2; -1 + 2t_2; 2 + t_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2 - 3t_2 + t_1; -4 + 2t_2 + 2t_1; 4 + t_2 - t_1)$.

Vif $\Delta \parallel (P)$ nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 &\Leftrightarrow 1(2 - 3t_2 + t_1) + 1(-4 + 2t_2 + 2t_1) + 3(4 + t_2 - t_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10 + 2t_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t_2 = -5. \end{aligned}$$

Ứng với $t_2 = -5$, có vô số t_1 thỏa. Vậy có vô số đường thẳng thỏa đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 199. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1 \colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$, $d_2 \colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$, $d_3 \colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d_3 và cắt d_1, d_2 tại hai điểm A, B sao cho đoạn thẳng AB ngắn nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm

A. $(0; 5; -2)$. **B.** $(7; -2; -4)$. **C.** $(1; -3; 3)$. **D.** $(2; 1; -4)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2, d_3 lần lượt là $\vec{u_1} = (1; 1; -1), \vec{u_2} = (1; 2; -3), \vec{u_3} = (1; -2; -1)$.

Ta có phương trình tham số của $d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = -3s \end{cases}$.

Dễ thấy $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ không cùng phương và hệ phương trình $\begin{cases} 2 + t = 2 + s \\ 2 + t = -1 + 2s \\ -t = -3s \end{cases}$ vô nghiệm nên d_1 và d_2 chéo nhau.

Gọi MN là đoạn vuông góc chung với $M \in d_1, N \in d_2$.

Suy ra $M\,(2 + t; 2 + t; -t)$, $N\,(2 + s; -1 + 2s; -3s)$.

Khi đó $\begin{cases} \vec{u_1} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u_2} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = 0 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} M(1; 1; 1) \\ N(2; -1; 0). \end{cases}$

Mặt khác $\begin{cases} \vec{u_1} \cdot \vec{u_3} = 0 \\ \vec{u_2} \cdot \vec{u_3} = 0 \end{cases}$ nên $d_3 \perp d_1$ và $d_3 \perp d_2$.

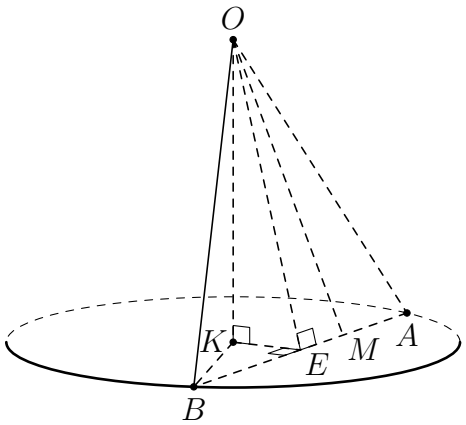
Từ đó để AB ngắn nhất thì mặt phẳng (P) đi qua MN.
Lấy $D(2;1;-1) \in d_3$, ta có véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MD}, \vec{u_3}\right] = (4;1;2)$.
Phương trình (P) chứa d_3 và MN là $4x + y + 2z - 7 = 0$.
Vậy $(1;-3;3) \in (P)$.
Chọn đáp án C □

Câu 200. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;a;b)$. Tính $a - b$.

A. -1. **B**. 0. **C**. -2. **D**. 1.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 3$.
Ta có $OM = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R$.
Suy ra M nằm giữa A và B.
Gọi E là trung điểm AB. Khi đó $SE \perp AB$.
$AB^2 = 4BE^2 = 4(OB^2 - OE^2) = 4(R^2 - OE^2)$.
Suy ra AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow OE$ lớn nhất $\Leftrightarrow E \equiv M$.
Suy ra $\overrightarrow{OM} = (1;1;2)$ là một vec-tơ pháp tuyến của Δ.



Ngoài ra, vì $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{n}_P = (1;1;1)$ cũng là một vec-tơ pháp tuyến của Δ.
Đặt $\vec{u} = [\overrightarrow{OM}, \vec{n}_P] = (-1;1;0)$ thì $\vec{u}$ là một vec-tơ chỉ phương của Δ.
Ta có $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{u'} = (1;-1;0)$.
Suy ra $a = -1; b = 0 \Rightarrow a - b = -1$.
Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. A	5. C	6. C	7. C	8. B	9. A	10. C
11. A	12. B	13. C	14. A	15. B	16. D	17. A	18. B	19. B	20. C
21. A	22. B	23. C	24. C	25. A	26. B	27. B	28. A	29. A	30. D
31. B	32. C	33. A	34. B	35. D	36. D	37. D	38. D	39. A	40. A
41. D	42. D	43. D	44. C	45. B	46. C	47. B	48. B	49. A	50. A
51. C	52. A	53. B	54. A	55. A	56. D	57. A	58. B	59. A	60. B
61. C	62. B	63. D	64. D	65. B	66. D	67. D	68. B	69. A	70. B
71. A	72. B	73. C	74. C	75. B	76. B	77. D	78. A	79. A	80. C
81. A	82. D	83. B	84. D	85. D	86. A	87. D	88. D	89. D	90. B
91. A	92. B	93. A	94. A	95. D	96. B	97. C	98. D	99. A	100. A
101. B	102. A	103. D	104. C	105. A	106. B	107. B	108. B	109. C	110. A
111. D	112. A	113. C	114. B	115. C	116. C	117. A	118. A	119. D	120. C
121. A	122. A	123. C	124. B	125. C	126. B	127. D	128. D	129. A	130. A
131. A	132. B	133. B	134. C	135. B	136. C	137. A	138. A	139. D	140. A
141. C	142. D	143. D	144. C	145. A	146. D	147. C	148. A	149. D	150. B
151. A	152. D	153. C	154. C	155. B	156. A	157. D	158. D	159. D	160. D
161. A	162. A	163. D	164. A	165. B	166. A	167. B	168. A	169. B	170. B
171. C	172. B	173. A	174. B	175. D	176. D	177. B	178. B	179. B	180. C
181. D	182. D	183. A	184. C	185. D	186. A	187. A	188. B	189. B	190. B
191. C	192. A	193. A	194. B	195. D	196. C	197. B	198. B	199. C	200. A

PHẦN

III

ĐỀ THI THQG

5 Đề thi THQG 2019-Mã đề 101

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-1=0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_3=(1;2;-1)$. **B.** $\vec{n}_4=(1;2;3)$. **C.** $\vec{n}_1=(1;3;-1)$. **D.** $\vec{n}_2=(2;3;-1)$.

Lời giải.

Từ phương trình mặt phẳng (P) suy ra một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}_4=(1;2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

A. $2\log_5 a$. **B.** $2+\log_5 a$. **C.** $\dfrac{1}{2}+\log_5 a$. **D.** $\dfrac{1}{2}\log_5 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương nên ta có $\log_5 a^2=2\log_5 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $f'(x)<0,\ \forall x\in(0;2)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=27$ là

A. $x=5$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1}=27\Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. -6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 6.

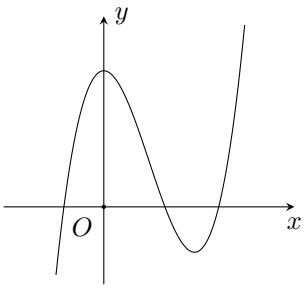
Lời giải.

Ta có $d=u_2-u_1=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 6.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.
C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải.

Đường cong đã cho là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$.
Vậy hàm số thỏa mãn là $y = x^3 - 3x^2 + 3$.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_2 = (2;1;1)$. **B.** $\vec{u}_4 = (1;2;-3)$. **C.** $\vec{u}_3 = (-1;2;1)$. **D.** $\vec{u}_1 = (2;1;-3)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_3 = (-1;2;1)$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$. **D.** $2\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

A. 2^7. **B.** A_7^2. **C.** C_7^2. **D.** 7^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 7 phần tử.
Vậy số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là C_7^2.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;1;0)$. **B.** $(0;0;-1)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(0;1;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên trục Oz là $M'(0;0;z_0)$.
Suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz là $(0;0;-1)$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Biết $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -2-3 = -5.$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A. $3Bh$. **B.** Bh. **C.** $\frac{4}{3}Bh$. **D.** $\frac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là $V = Bh$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $-3-4i$. **B.** $-3+4i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-4+3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $a+bi$ là số phức $a-bi$.

Vậy số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là số phức $3+4i$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm $x=-1$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x+5$ là

A. x^2+5x+C. **B.** $2x^2+5x+C$. **C.** $2x^2+C$. **D.** x^2+C.

Lời giải.

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x+5$ là $F(x) = x^2+5x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

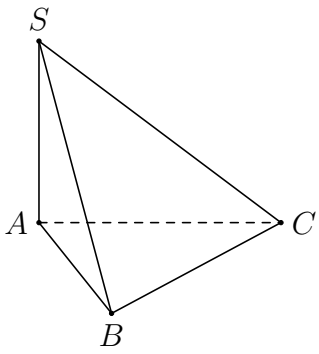
Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ là 4. Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a\sqrt{3}$ và $BC=a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 90°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 60°.

Lời giải.

Ta có $SA\perp(ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó $(SC,(ABC))=(SC,AC)=\widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B, $AB=a\sqrt{3}$ và $BC=a$ nên $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4a^2}=2a$.

Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA}=45°$.

Vậy $(SC,(ABC))=45°$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 16. **B**. 56. **C**. 20. **D**. 26.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình trên ta được $\begin{cases} z_1+z_2=6 \\ z_1z_2=10. \end{cases}$

Khi đó ta có $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=36-20=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Hàm số $y=2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$. **B**. $2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$.

C. $(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}$. **D**. $(x^2-3x)\cdot 2^{x^2-3x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(2^{x^2-3x}\right)'=(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\cdot \ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A. -16. **B**. 20. **C**. 0. **D**. 4.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ có tập xác định $\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2-3$.
Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \in [-3;3]$.
Ta có $f(1)=0; f(-1)=4; f(3)=20; f(-3)=-16$.
Từ đó suy ra $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=f(3)=20$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

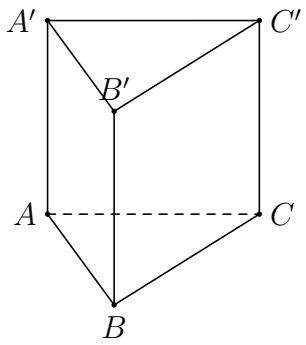
A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải.

$$x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\cdot(-1)\cdot x+2\cdot 0\cdot y-2\cdot 1\cdot z-7=0.$$

Suy ra $a=-1, b=0, c=1, d=-7$.
Vậy tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+7}=3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 22.
Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=\sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{2}$.
C. $\dfrac{a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AA'=a\sqrt{3}$.
Từ đó suy ra $V=a\sqrt{3}\cdot a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3}{4}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	f_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $x=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b = 16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

A. 4. **B**. 2. **C**. 16. **D**. 8.

Lời giải.

Ta có $4\log_2 a + \log_2 b = \log_2 a^4 + \log_2 b = \log_2(a^4b) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

A. $(4; -1)$. **B**. $(-1; 4)$. **C**. $(4; 1)$. **D**. $(1; 4)$.

Lời giải.

Ta có $3z_1 + z_2 = 3(1 - i) + (1 + 2i) = 4 - i$. Suy ra, tọa độ điểm biểu diễn là $(4; -1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\log_3(x + 1) + 1 = \log_3(4x + 1)$ là

A. $x = 3$. **B**. $x = -3$. **C**. $x = 4$. **D**. $x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -\dfrac{1}{4}$. Ta có

$$\log_3(x+1)+1 = \log_3(4x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{-1}{4} \\ 3(x+1) = 4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{-1}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,2 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 1,8 m. **B**. 1,4 m. **C**. 2,2 m. **D**. 1,6 m.

Lời giải.

Gọi R_1, R_2, R lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm, ta có

$$V = V_1 + V_2 = \pi R^2 h \Leftrightarrow \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2$$
$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{1^2 + (1{,}2)^2} \approx 1{,}56 \ \ (\text{m}).$$

Vậy giá trị cần tìm là 1,6 m.

Chọn đáp án D □

Câu 28.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	2	↘	$+\infty$ | -4	↘	-2	↗	$+\infty$

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ suy ra không tồn tại tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-4$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

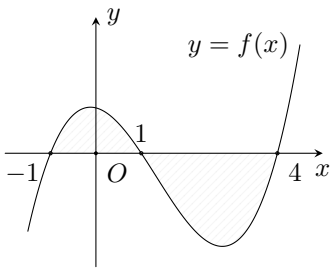
Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên dưới). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Lời giải.

Ta có hàm số $f(x)\geq 0\forall x\in[-1;1]; f(x)\leq 0\forall x\in[1;4]$, nên

$$S=\int_{-1}^{4}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-y-z+5=0$. **B.** $2x-y-z-5=0$.

C. $x+y+2z-3=0$. **D.** $3x+2y-z-14=0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, do đó (P) đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$ của AB, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2;-1;-1)$.

Suy ra $(P)\colon 2(x-3)-1(y-2)-1(z+1)=0\Leftrightarrow 2x-y-z-5=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng$(-1;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}+C$. **B.** $2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$.

C. $2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+C$. **D.** $2\ln(x+1)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left[\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=2\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2\cos^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int(2+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+2x+4$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{4}cos2x+x^2+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-1;3)$, $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-2-4t\\y=-2-3t\\z=2-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=-1+3t\\z=3-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-4+3t\\z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4+2t\\y=3-t\\z=1+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-4;-3;-1)$.

Đường thẳng qua $C(2;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình

$$\begin{cases}x=2+4t\\y=-4+3t\\z=2+t.\end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $3\left(\overline{z}+i\right)-(2-i)z=3+10i$. Mô-đun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$, $(x,\ y\in\mathbb{R})$

$3\left(\overline{z}+i\right)-(2-i)z=3+10i$

$\Leftrightarrow 3(x-yi+i)-(2-i)(x+yi)=3+10i$

$\Leftrightarrow x-y+(x-5y+3)i=3+10i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\x-5y+3=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

Do đó $z=2-i$

Vậy $|z|=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2 \cdot f'(3-2x)$.

Hàm số nghịch biến khi

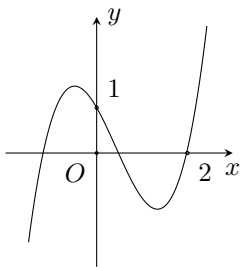
$$y' \le 0 \Leftrightarrow -2 \cdot f'(3-2x) \le 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le 3-2x \le -1 \\ 3-2x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 3 \\ x \le 1. \end{array}\right.$$

Vì hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ nên nghịch biến trên $(-2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi



A. $m \ge f(2) - 2$. **B.** $m \ge f(0)$. **C.** $m > f(2) - 2$. **D.** $m > f(0)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m$.

Đặt $g(x) = f(x) - x$ xét trên khoảng $(0;2)$. Do đó $g'(x) = f'(x) - 1$.

Từ đồ thị ta thấy $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ với mọi $x \in (0;2)$. Suy ra hàm số $g(x) = f(x) - x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m \ge \lim\limits_{x \to 0} g(x) = f(0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{25}$. **C.** $\dfrac{12}{25}$. **D.** $\dfrac{313}{625}$.

Lời giải.

Số cách chọn hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên là $\mathrm{C}_{25}^2 = 300 \Rightarrow n(\Omega) = 300$.

Gọi A là biến cố "Tổng hai số được chọn là một số chẵn". Ta có hai trường hợp

- ☑ Trường hợp 1: Chọn 2 số chẵn từ 12 số chẵn có $\mathrm{C}_{12}^2 = 66$ cách.
- ☑ Trường hợp 2: Chọn 2 số lẻ từ 13 số lẻ có $\mathrm{C}_{13}^2 = 78$ cách.

Do đó $n(A) = 66 + 78 = 144$.

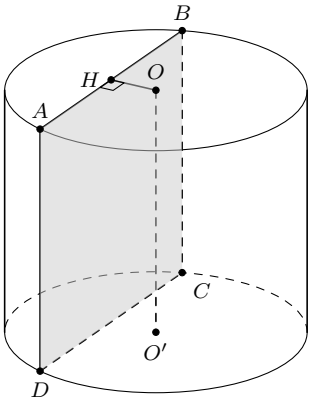
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{144}{300} = \dfrac{12}{25}$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B**. $5\sqrt{39}\pi$. **C**. $20\sqrt{3}\pi$. **D**. $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A,\ B \in (O)$; $C,\ D \in (O')$.
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH = \mathrm{d}(OO', (ABCD)) = 1$.
Vì $S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB \cdot BC = 30$.
Suy ra $AB = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}$.
Bán kính của đáy là $r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2$.
Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. Vô số.

Lời giải.

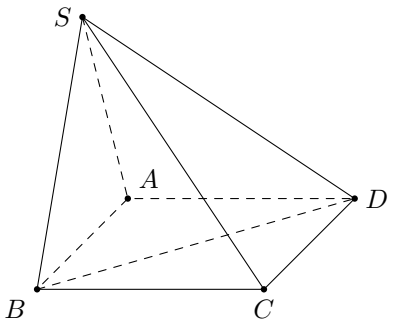
Điều kiện $x > \dfrac{1}{3}$ và $m > 0$.
Phương trình đã cho tương đương: $\log_3 x - \log_3(3x-1) = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{1}{m}$
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ với $x > \dfrac{1}{3}$.
Có $f'(x) = -\dfrac{1}{(3x-1)^2} < 0,\ \forall x > \dfrac{1}{3}$

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m < 3$.
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1, 2\}$.
Chọn đáp án A □

Câu 40.

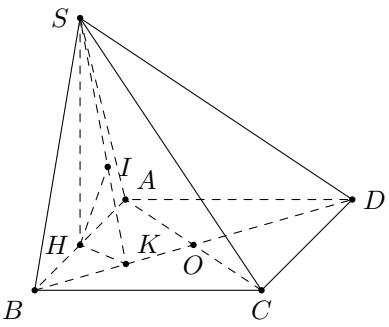
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.



Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).

Kẻ $HI \perp SH$ tại I. Khi đó: $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra: $\mathrm{d}(A,(SBD)) = 2HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\displaystyle\int_0^4 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int_0^1 xf(4x)\,\mathrm{d}x = 1$. Đặt $t = 4x \Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{4}t \cdot f(t) \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow \int_0^4 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 16 \Rightarrow \int_0^4 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 16$.

Xét $I = \displaystyle\int_0^4 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^2 \mathrm{d}f(x)$

Suy ra: $I = x^2 \cdot f(x)\Big|_0^4 - \displaystyle\int_0^4 2x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 4^2 f(4) - 2 \cdot 16 = -16$.

Chọn đáp án (B) □

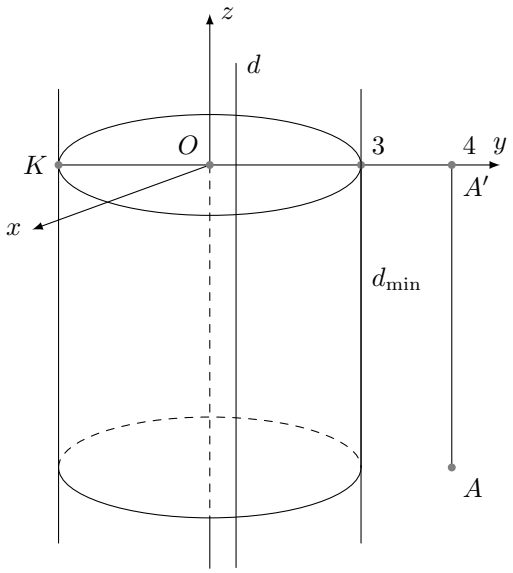
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;0;-3)$. **B.** $M(0;-3;-5)$. **C.** $N(0;3;-5)$. **D.** $Q(0;5;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Gọi I là hình chiếu của A lên Oy, khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất khi d đi qua giao điểm của Oy với mặt trụ là điểm $I(0;3;0)$



Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=t. \end{cases}$

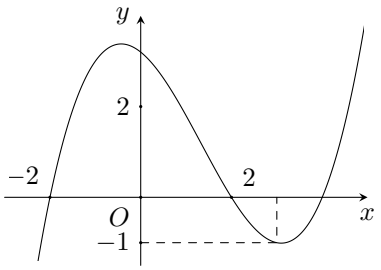
Nên d đi qua điểm $N(0;3;-5)$

Chọn đáp án C ☐

Câu 43.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3-3x)|=\dfrac{4}{3}$ là

A. 3. **B**. 8. **C**. 7. **D**. 4.



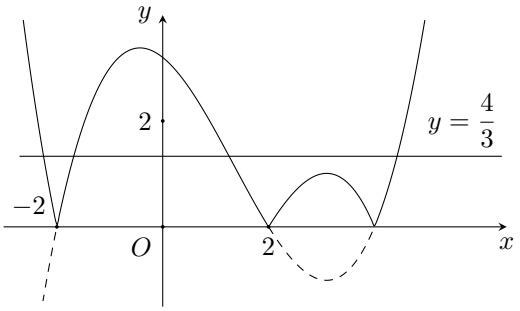
Lời giải.

Đặt $t=x^3-3x \Rightarrow t'=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Khi đó $|f(t)|=\dfrac{4}{3}$ (1). Đồ thị hàm số $y=|f(t)|$ được vẽ thành 2 phần

- ☑ Phần 1 giữ nguyên đồ thị hàm số $y=f(x)$ phía trên trục Ox khi $f(x)\geq 0$.
- ☑ Phần 2 lấy đối xứng của phần còn lại qua trục Ox.



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1<-2$, $-2<t_2<0$, $0<t_3<2$, $t_4>2$.

Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t=x^3-3x$ để tìm nghiệm x. Khi đó

☑ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

☑ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

☑ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

☑ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** 26. **C.** 34. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

$$w = \frac{4 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow (1 + z)w = 4 + iz \Leftrightarrow z(w - i) = 4 - w$$
$$\Leftrightarrow \quad |z| \cdot |w - i| = |4 - w| \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |w - i| = |4 - w|. \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ khi đó thay vào $(*)$ ta có:

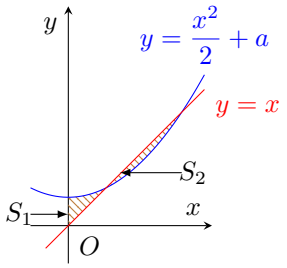
$$\sqrt{2} \cdot |x + yi - i| = |4 - x - yi| \Leftrightarrow 2[x^2 + (y - 1)^2] = (x - 4)^2 + y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 34.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45.

Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{7}\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:
$\dfrac{1}{2}x^2 + a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0$ (1)

Phương trình trên có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a > 0 \\ 2 > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{2}$.

Khi $0 < a < \dfrac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1 < x_2$,

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - x\right) \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - a + x\right) \mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2 = -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_1^3 + ax_1 - \frac{1}{2}x_1^2$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6}x_2^3 - ax_2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 + 6a - 3x_2 = 0.$$

Từ (1) suy ra $2a = -x_2^2 + 2x_2$

Thế vào (2) ta được: $2x_2^2 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_2 = 0 & \text{(loại)} \\ x_2 = \dfrac{3}{2} & \end{array}\right. \Rightarrow a = \dfrac{3}{8} = 0,375 \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right).$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x)$. Từ bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$, ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x^2 - 2x - a = 0,\ a \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x - b = 0,\ b \in (-1; 0) & (2) \\ x^2 - 2x - c = 0,\ c \in (0; 1) & (3) \\ x^2 - 2x - d = 0,\ d \in (1; +\infty) & (4). \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2), (3), (4) đều có hai nghiệm đơn phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2), (3), (4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $27\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{3}$. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{3}$.

Lời giải.

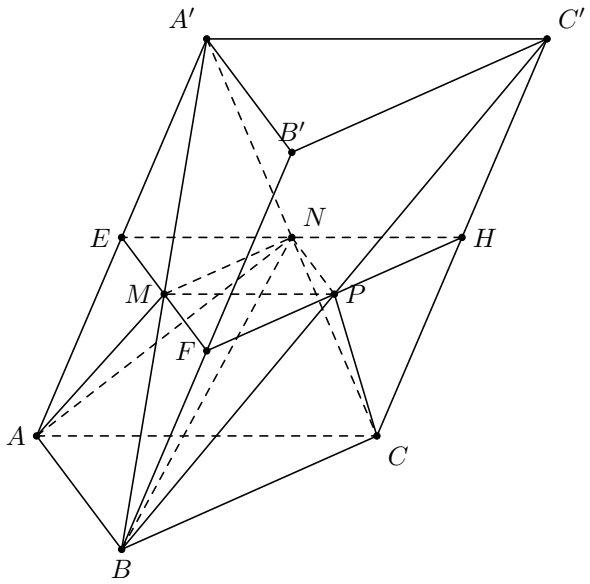
Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
Vì $\triangle ABC$ đều có độ dài cạnh bằng 6 nên

$$S_{\triangle ABC} = 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Thể tích lặng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = h \cdot S_{\triangle ABC} = 8 \cdot 9\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'.
Thể tích khối chóp $A.EMN$ là



$$V_{A.EMN} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(EMN)) \cdot S_{\triangle EMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{24}V.$$

Tương tự, ta có $V_{B.FMP} = V_{C.HNP} = \dfrac{1}{24}V$.
Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ là

$$V_{ABCMNP} = \frac{1}{2}V - 3V_{A.EMN} = \frac{1}{2}V - 3 \cdot \frac{1}{24}V = \frac{3}{8}V = 27\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12. **B**. 8. **C**. 16. **D**. 4.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 3$ có tâm $I\left(0;0;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.
Ta có $A(a;b;c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$.
Dễ thấy (S) cắt mặt phẳng (Oxy) nên từ một điểm A bất kỳ thuộc mặt phẳng (Oxy) và nằm ngoài (S) kẻ tiếp tuyến tới (S) thì các tiếp tuyến đó nằm trên một mặt nón đỉnh A, các tiếp điểm nằm trên một đường tròn được xác định. Còn nếu A thuộc (S) thì ta kẻ các tiếp tuyến đó sẽ thuộc một mặt phẳng tiếp diện của (S) tại điểm A. Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi

- ☑ Hoặc A thuộc $(S) \Leftrightarrow IA = R = \sqrt{3}$.
- ☑ Hoặc các tiếp tuyến tạo thành mặt nón và góc ở đỉnh của mặt nón là $\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \geq 45^\circ$.
  Suy ra $\sin\widehat{MAI} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IA} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{IA} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \leq \sqrt{6}$.

Vậy điều kiện bài toán là $\sqrt{3} \leq IA \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \leq IA^2 \leq 6$.
Ta có $3 \leq IA^2 \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4$ $(*)$.
Do $A(a;b;0)$ có tọa độ nguyên nên ta có điểm thỏa mãn $(*)$ là
$(0;2;0)$, $(0;-2;0)$, $(2;0;0)$, $(-2;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$, $(1;0;0)$, $(-1;0;0)$, $(1;1;0)$, $(1;-1;0)$, $(-1;1;0)$, $(-1;-1;0)$.
Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$\begin{aligned}&\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}=|x+2|-x+m\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-|x+2|+x=m \quad (1)\end{aligned}$$

Hàm số $g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-|x+2|+x$

$$=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-2 & \text{nếu } x\geq -2\\ \dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+2x+2 & \text{nếu } x<-2.\end{cases}$$

Ta có $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in(-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+2>0,\ \forall x<-2.\end{cases}$

Nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{49}{12}$	↗	$+\infty$	↗	$+\infty$	↗	$+\infty$	↗	$+\infty$	↗	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\geq 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ 7^x-m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 7^x\geq m.\end{cases}$

Với m nguyên dương ta có

$$\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ \sqrt{7^x-m}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{-\frac{5}{4}} \\ x=\log_7 m. \end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt có hai trường hợp

- ☑ $2>\log_7 m\geq 2^{-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}}\leq m<7^2$.
  Trường hợp này $m\in\{3;4;5;\ldots;48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m.
- ☑ $\log_7 m=0\Leftrightarrow m=1$. Trường hợp này có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả 47 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (B) □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. C	5. D	6. A	7. C	8. A	9. C	10. B
11. A	12. B	13. C	14. C	15. A	16. C	17. B	18. A	19. A	20. B
21. C	22. A	23. D	24. A	25. A	26. D	27. D	28. D	29. B	30. B
31. B	32. C	33. C	34. C	35. B	36. B	37. C	38. C	39. A	40. B
41. B	42. C	43. B	44. A	45. C	46. C	47. C	48. A	49. B	50. B

6 Đề thi THQG 2019-Mã đề 102

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + 6x + C$. **B.** $2x^2 + C$. **C.** $2x^2 + 6x + C$. **D.** $x^2 + C$.

Lời giải.

$\int (2x + 6)\,\mathrm{d}x = x^2 + 6x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\overrightarrow{n_1} = (2; -1; -3)$. **B.** $\overrightarrow{n_4} = (2; 1; 3)$. **C.** $\overrightarrow{n_2} = (2; -1; 3)$. **D.** $\overrightarrow{n_3} = (2; 3; 1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (2; -1; 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\pi r^2 h$. **B.** $2\pi r^2 h$. **C.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

A. $-5 + 3i$. **B.** $-3 + 5i$. **C.** $-5 - 3i$. **D.** $5 + 3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là $5 + 3i$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

A. $\frac{1}{3}\log_5 a$. **B.** $\frac{1}{3} + \log_5 a$. **C.** $3 + \log_5 a$. **D.** $3\log_5 a$.

Lời giải.

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3; 0; 0)$. **B.** $(3; -1; 0)$. **C.** $(0; 0; 1)$. **D.** $(0; -1; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

A. 5^2. **B.** 2^5. **C.** C_5^2. **D.** A_5^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy có C_5^2 cách.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Biết tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$. Khi đó $\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+(-4) = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z+2}{3}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d

A. $\vec{u} = (2;5;3)$. **B.** $\vec{u} = (2;-5;3)$. **C.** $\vec{u} = (1;3;2)$. **D.** $\vec{u} = (1;3;-2)$.

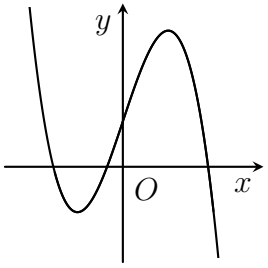
Lời giải.

Dựa vào phương trình đường thẳng suy ra một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;-5;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 10.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a < 0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 4. **B.** -6. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số cộng nên ta có $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 8 - 2 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $V = 3Bh$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = \dfrac{4}{3}Bh$. **D.** $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Lời giải.

Ta có công thức tính thể tích lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1}=27 \Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $(-2;0)$ hàm số đồng biến.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+1)=\log_2\left[2\cdot(x-1)\right] \Leftrightarrow x+1=2x-2 \Leftrightarrow x=3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 20. **B.** 4. **C.** 0. **D.** -16.

Lời giải.

$f'(x)=3x^2-3$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \in [-3;3]$.

Ta có $f(-3)=-16$; $f(-1)=4$; $f(1)=0$; $f(3)=20$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,4m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây

A. 1,7m. **B**. 1,5m. **C**. 1,9m. **D**. 2,4m.

Lời giải.

Gọi chiều cao của các hình trụ là h.
Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ có bán kính đáy $R_1 = 1\text{m}$, $R_2 = 1{,}4\text{m}$.
Gọi V là thể tích của hình trụ dự định làm và có bán kính đáy là R.
Ta có $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \pi R^2 h = \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{2,96} \approx 1{,}72$ m.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 36. **B**. 8. **C**. 28. **D**. 18.

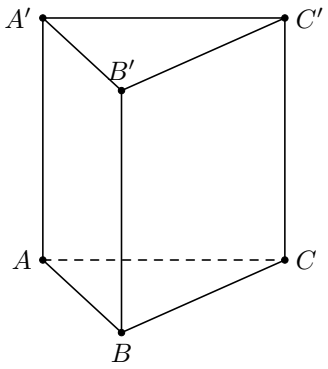
Lời giải.

Ta có $z^2 - 6z + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + \sqrt{5}i \\ z = 3 - \sqrt{5}i \end{array}\right. \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = \left(3 + \sqrt{5}i\right)^2 + \left(3 - \sqrt{5}i\right)^2 = 8.$

Chọn đáp án B □

Câu 21.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao của lăng trụ là $AA' = 2a$

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$

Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải.

Xét phương trình $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = \dfrac{5}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\|\|$	2	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	$\|\|$		-2		

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

A. 5. **B**. 2. **C**. 32. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 a^3b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}$. **B**. $3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

C. $(x^2-3x)\cdot 3^{x^2-3x-1}$. **D**. $(2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \left(3^{x^2-3x}\right)' = (2x-3)\cdot 3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+y+z-4=0$. **B**. $2x-y+z-2=0$. **C**. $x+y+z-3=0$. **D**. $2x-y+z+2=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Suy ra $I(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-2;2)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ pháp tuyến, nên có phương trình là $(\alpha)\colon 2x-y+z-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hai số phức $z_1 = -2+i$ và $z_2 = 1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(3;-3)$. **B**. $(2;-3)$. **C**. $(-3;3)$. **D**. $(-3;2)$.

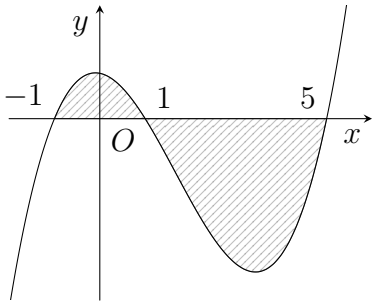
Lời giải.

Ta có: $2z_1+z_2 = -4+2i+1+i = -3+3i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là $(-3;3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ sau). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

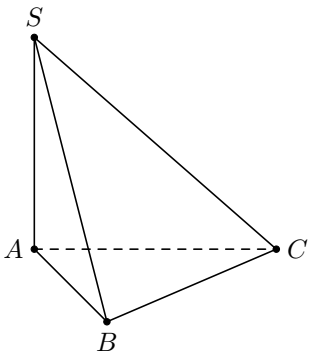
Lời giải.

Ta có: $S = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{5} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 30.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $90°$. **B.** $30°$.

C. $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCA}$.

Mà $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+3a^2}} = 1$. Vậy $\widehat{SCA} = 45°$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho số phức z thoả mãn $3\,(\overline{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i$. Mô-đun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi\,(a;b\in\mathbb{R})$. Theo đề ta có

$$\begin{aligned}
&3(a-bi-i)-(2+3i)(a+bi)=7-16i\\
\Leftrightarrow\ &3a-3bi-3i-2a-2bi-3ai+3b=7-16i\\
\Leftrightarrow\ &(a+3b)+(-3a-5b-3)=7-16i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a+3b=7\\-3a-5b-3=-16\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a+3b=7\\-3a-5b=-13\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a=1\\b=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.
Chọn đáp án A □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(1;2;1)$, $C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1-t\\y=4t\\z=2+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=2+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=4+4t\\z=4+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2-4t\\z=2-2t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;0;-1)$, $\overrightarrow{BD}=(0;-1;2)$ và $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(-1;-4;-2)$.
Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) thì vuông góc với hai đường thẳng BC, BD nên nhận véc-tơ $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(-1;-4;-2)$ là véc-tơ chỉ phương.
Có 2 phương án bị loại. Thay điểm $A(1;0;2)$ vào phương trình của một trong hai phương án còn lại, chẳng hạn thay vào phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=4+4t\\z=4+2t\end{cases}$ ta được $\begin{cases}1=2+t\\0=4+4t\\2=4+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ (thỏa mãn).
Vậy đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) là $\begin{cases}x=2+t\\y=4+4t\\z=4+2t\end{cases}$
Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng?

A. $\dfrac{\pi^2+2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2\cos^2 x+3\right)\,\mathrm{d}x=\int(1+\cos 2x+3)\,\mathrm{d}x=\int(\cos 2x+4)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C.$$

Nên $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+4x+C$.

Lại có $f(0)=4\Rightarrow C=4$. Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+4x+4$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+2x^2+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-1)-\dfrac{2}{x-1}+C$. **B.** $3\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+C$.

C. $3\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}+C$. **D.** $3\ln(x-1)+\dfrac{2}{x-1}+C$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(x-1)+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Với $x>1$ ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x=3\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}+2\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2}=3\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy rằng hàm số $y=f(x)$ có xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $y=f(5-2x)$ có xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(5-2x)$ có $y'=-2f'(5-2x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$y'\le 0\Leftrightarrow f'(5-2x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le 5-2x\le -1\\ 5-2x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le x\le 4\\ x\le 2.\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(3;4)$. Suy ra hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

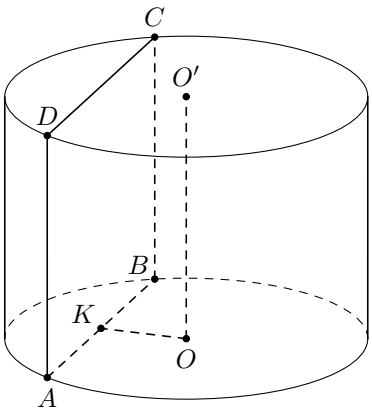
Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $24\sqrt{2}\pi$. **B.** $8\sqrt{2}\pi$. **C.** $12\sqrt{2}\pi$. **D.** $16\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Giả sử hình trụ có hai đáy là các hình tròn tâm O và tâm O'. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).



Do hình trụ có chiều cao là $h = OO' = 4\sqrt{2} \Rightarrow$ nên có độ dài đường sinh $\ell = AD = 4\sqrt{2}$.

Theo bài ra, diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 16 nên

$$AB \cdot CD = 16 \Leftrightarrow AB = \frac{16}{AD} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK \perp AB$, mà $OK \perp AD$ nên $OK \perp (ABCD)$.

Suy ra khoảng cách giữa OO' và $(ABCD)$ là $OK = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông AOK có

$$R = OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi R\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 6. **B**. 5. **C**. Vô số. **D**. 7.

Lời giải.

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ m > 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m \\ \Leftrightarrow\ & \log_3 x + \log_3 m = \log_3(6x-1) \\ \Leftrightarrow\ & mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1 \qquad (1) \end{aligned}$$

- Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).
- Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{6-m}$ nên

$$\frac{1}{6-m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6-m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6 \text{ (thỏa mãn).}$$

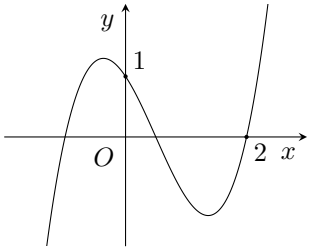
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38.

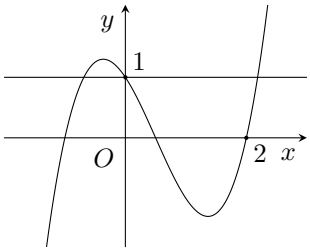
Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi



A. $m \leq f(2) - 2$. **B**. $m < f(2) - 2$.

C. $m \leq f(0)$. **D**. $m < f(0)$.

Lời giải.



Xét bất phương trình $f(x) > x + m \Leftrightarrow m < f(x) - x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ với $x \in (0;2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Từ đồ thị ta thấy trên $(0;2)$ đường thẳng $y = 1$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên $f'(x) < 1$, $\forall x \in (0;2)$ hay $g'(x) < 0$, $\forall x \in (0;2)$.

Ta có bảng biến thiên như sau

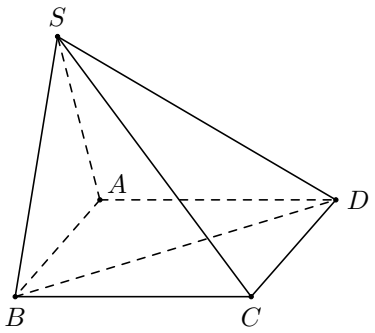
x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình $f(x) > x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m < g(x)$ với $\forall x \in (0;2) \Leftrightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le f(2) - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 39.

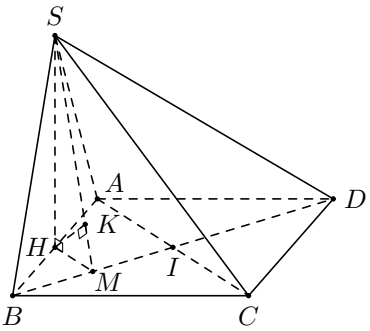
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

C. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BI. Ta có $HM \perp BD$.

Mà $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$

Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$)

$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBD)) = HK$.

Ta có $HM = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HK = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{21}a}{14} = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{13}{27}$. **B.** $\dfrac{14}{27}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{365}{729}$.

Lời giải.

Gọi A là tập hợp 27 số nguyên dương đầu tiên, ta có $A = \{1; 2; 3; \ldots; 26; 27\}$.

Phép thẻ chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ A có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{27}^2 = 351$.

Tổng hai số chọn được là số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đó đều chẵn hoặc đều lẻ. Do đó ta có các khả năng sau:

- ☑ Hai số lấy được từ A là hai số chẵn, có $\mathrm{C}_{13}^2 = 78$ khả năng.
- ☑ Hai số lấy được tà A là hai số lẻ, có $\mathrm{C}_{14}^2 = 91$ khả năng.

Do đó khả năng để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là $78 + 91 = 169$.

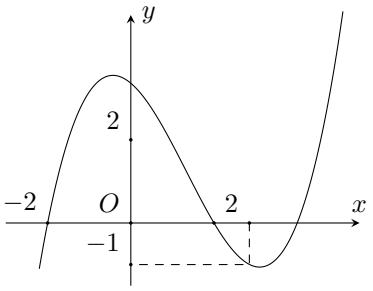
Xác suất cần tìm là $\mathrm{p}(A) = \dfrac{169}{351} = \dfrac{13}{27}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{1}{2}$ là

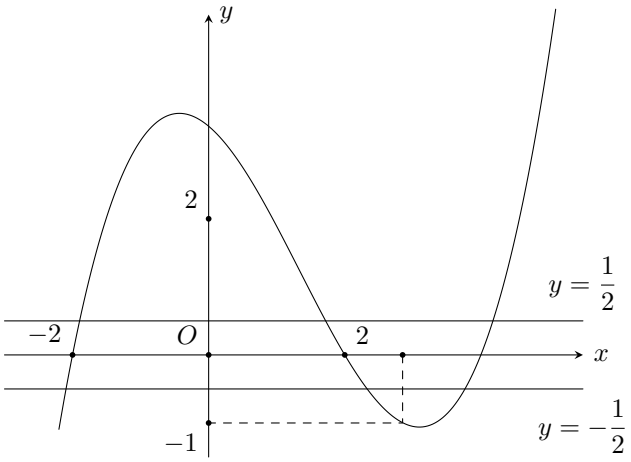
A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.



Lời giải.

Ta có $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^3 - 3x) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ f(x^3 - 3x) = -\dfrac{1}{2} & (2). \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta có



☑ $(1) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 - 3x = \alpha_1 & (-2 < \alpha_1 < 0) \\ x^3 - 3x = \alpha_2 & (0 < \alpha_2 < 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_3 & (\alpha_3 > 2). \end{array}\right.$

☑ $(2) \Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x=\alpha_4 & (\alpha_4<-2) \\ x^3-3x=\alpha_5 & (\alpha_5>2) \\ x^3-3x=\alpha_6 & (\alpha_6>2)\,. \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^3-3x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $y'=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- ☑ Phương trình $x^3-3x=\alpha_1$ có 3 nghiệm.
- ☑ Phương trình $x^3-3x=\alpha_2$ có 3 nghiệm.
- ☑ Mỗi phương trình $x^3-3x=\alpha_3$, $x^3-3x=\alpha_4$, $x^3-3x=\alpha_5$, $x^3-3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\dfrac{123}{5}$. **D.** -25.

Lời giải.

Biến đổi tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^5 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5 x^2d\left(f(x)\right)=x^2\cdot f(x)\Big|_0^5-\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}\left(x^2\right) \\ &= 25\cdot f(5)-0\cdot f(x)-\int_0^5 f(x)\cdot 2x\,\mathrm{d}x=25-2\int_0^5 xf(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $5x=t\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}\mathrm{d}x\Rightarrow 1=\displaystyle\int_0^1 xf(5x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5 \frac{t}{5}f(t)\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{25}\int_0^5 tf(t)\,\mathrm{d}t.$

Suy ra $\displaystyle\int_0^5 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5 tf(t)\,\mathrm{d}t=25.$

Vậy $I=25-2\times 25=-25$.

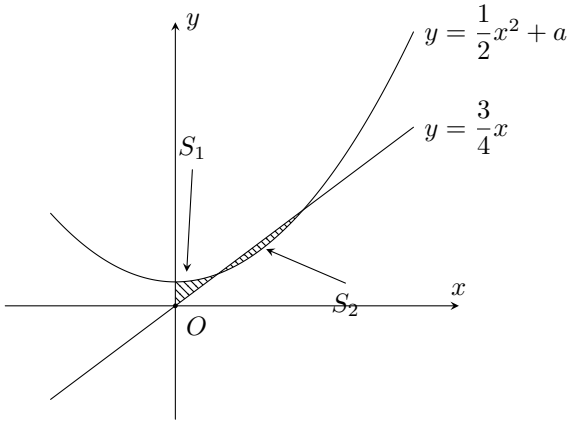
Chọn đáp án (D) □

Câu 43.

Cho đường thẳng $y = \dfrac{3}{4}x$ và parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{32}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{16};\dfrac{7}{32}\right)$.

C. $\left(0;\dfrac{3}{16}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{7}{32};\dfrac{1}{4}\right)$.



Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0.$$

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**). \end{cases}$

Từ đồ thị đề bài, ta có

$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right) \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right) \mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right) \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax\right)\Big|_0^{x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8}. \quad (***)$$

Từ $(*)$ ta suy ra $x_1 = \dfrac{3}{2} - x_2$, thay vào $(**)$ ta được

$$\left(\frac{3}{2} - x_2\right)x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{27}{128}.$$

Vậy $a \in \left(\dfrac{3}{16};\dfrac{7}{32}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{3 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $w = \dfrac{3 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow w + wz = 3 + iz \Leftrightarrow w - 3 = (i - w)z$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$|w - 3| = |(i - w)z| \Leftrightarrow |w - 3| = |(i - w)||z|. \quad (*)$$

Gọi $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$(*) \Leftrightarrow |w - 3| = |(i - w)||z| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0.$$

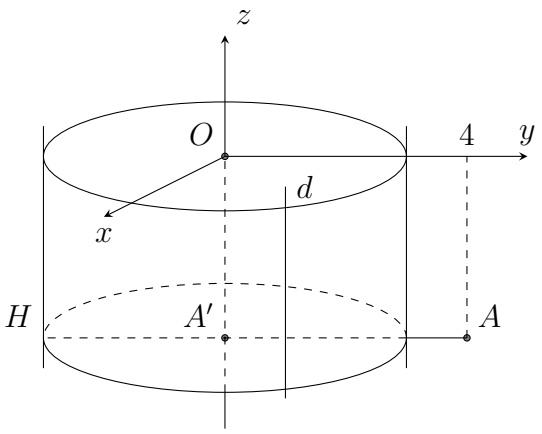
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $P(-3;0;-3)$. **B**. $Q(0;11;-3)$. **C**. $N(0;3;-5)$. **D**. $M(0;-3;-5)$.

Lời giải.



Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của hình trụ có trục là Oz và có bán kính đáy $r = 3$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên trục Oz, dễ thấy $A'(0;0;-3)$ và $AA' = 4$.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của A lên d.

AH lớn nhất khi A, A', H thẳng hàng và $AH = AA' + A'H = AA' + r = 4 + 3 = 7$.

Khi đó $\overrightarrow{AH} = \dfrac{7}{4}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (x;y-4;z+3) = \dfrac{7}{4}(0;-4;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow H(0;-3;-3)$.

Vậy d qua $H(0;-3;-3)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3+t \end{cases}$ suy ra d đi qua điểm $M(0;-3;-5)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + \left(z - \sqrt{2}\right)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ?

A. 12. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 16.

Lời giải.

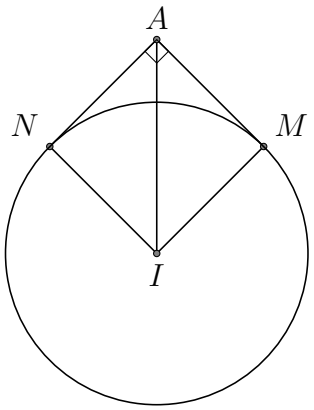
Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;0;\sqrt{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$.

Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán thì ta có hai trường hợp

☑ **TH1:** $A \in (S) \Leftrightarrow IA = R = \sqrt{3}$.

☑

TH2: $A \notin (S)$, khi đó để tồn tại hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì hình nón sinh ra bởi các tiếp tuyến vẽ từ A phải có góc ở đỉnh không nhỏ hơn 90°. Tức là



$$\begin{aligned} & \widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \geq 45^\circ \\ \Leftrightarrow \quad & \sin \widehat{MAI} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{IM}{IA} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{3}}{IA} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \leq \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Do đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{3} \leq IA \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \leq IA^2 \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq a^2+b^2+2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2+b^2 \leq 4.$$

Do a, $b \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

☑ Nếu $a=0$ thì $b \in \{\pm 1, \pm 2\}$

☑ Nếu $b=0$ thì $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$

☑ Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1. \end{cases}$

Vậy có 12 điểm A thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 47. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 79. **B.** 80. **C.** vô số. **D.** 81.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_3 m \end{cases}$.

☑ **TH1:** Với $m = 1$, phương trình trở thành

$$\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ 3^x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Vậy nhận giá trị $m = 1$.

☑ **TH2:** Với $m > 1$, phương trình trở thành

$$\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ 3^x - m = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m. \end{array}\right.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \le m < 3^4$.

Mà $m > 1$ nên ta có $m \in \{3, 4, \ldots, 80\}$, có 78 giá trị của m.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $y' = (2x+2)f'\left(x^2+2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x = a, \quad a < -1 \\ x^2 + 2x = b, \quad -1 < b < 0 \\ x^2 + 2x = c, \quad 0 < c < 1 \\ x^2 + 2x = d, \quad d > 1. \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $y' = 2x + 2$, ta có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích V của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $V=12\sqrt{3}$. **B.** $V=16\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

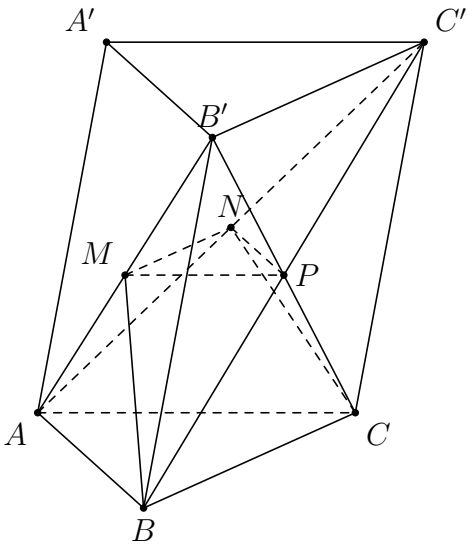
Ta có $V_{ABC.A'B'C'}=8\cdot\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}=32\sqrt{3}$.

Và ta cũng có $V_{C'.ABC}=V_{A.BC'B'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Khối đa diện cần tìm $V=V_{C.ABPN}+V_{M.ANPB}$.

Do N, P là trung điểm của AC' và BC' nên

$$S_{ANPB}=\frac{3}{4}S_{ABC'}$$



Từ đó ta suy ra

$$V_{C.ABPN}=\frac{3}{4}V_{C'.ABC}=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}.$$
$$V_{M.ANPB}=\frac{1}{2}V_{B'ANPB}=\frac{3}{8}V_{B'.ABC'}=\frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}.$$

Vậy thể tích khối cần tìm

$$V=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}+\frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'}=12\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\neq-1\\x\neq-2\\x\neq-3\\x\neq-4.\end{cases}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned}&\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m\\\Leftrightarrow\ &\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+4}\right)=|x-1|-x+m\\\Leftrightarrow\ &x-|x+1|+4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m\quad(*).\end{aligned}$$

Đặt $\mathscr{D}_1=(-1;+\infty)$ và $\mathscr{D}_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$, ta có

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right)=m & \text{khi } x\in\mathscr{D}_1\\2x+5-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right)=m & \text{khi } x\in\mathscr{D}_2.\end{cases}$$

Đặt $f(x)=\begin{cases}3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right) & \text{khi } x\in\mathscr{D}_1\\ 2x+5-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right) & \text{khi } x\in\mathscr{D}_2.\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2} & \text{khi } x\in\mathscr{D}_1\\ 2+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2} & \text{khi } x\in\mathscr{D}_2.\end{cases}$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, ta có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	3

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m\geq 3\Rightarrow m\in[3;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. D	5. D	6. C	7. C	8. C	9. B	10. B
11. D	12. B	13. B	14. C	15. C	16. C	17. D	18. A	19. B	20. B
21. D	22. A	23. C	24. C	25. A	26. D	27. B	28. C	29. B	30. D
31. A	32. C	33. C	34. A	35. B	36. D	37. B	38. A	39. D	40. A
41. B	42. D	43. B	44. D	45. D	46. B	47. A	48. D	49. A	50. D

7 Đề thi THQG 2019-Mã đề 103

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-2=0$. Véc-tơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P).

A. $\vec{n}_3=(-3;1;-2)$. **B.** $\vec{n}_2=(2;-3;-2)$. **C.** $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;1;-2)$.

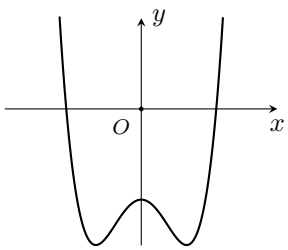
Lời giải.

Ta có véc-tơ $\vec{n}_1=(2;-3;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án C □

Câu 2.

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^4-2x^2-2$.

C. $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị có dạng bậc 4 và $a>0$ nên $y=x^4-2x^2-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

A. A_6^2. **B.** C_6^2. **C.** 2^6. **D.** 6^2.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là C_6^2.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Biết $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=6$, khi đó $\displaystyle\int_1^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=2-6=-4$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=8$ là

A. $x=\dfrac{3}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\dfrac{5}{2}$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x-1}=8\Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là

A. πr^2h. **B.** $\dfrac{4}{3}\pi r^2h$. **C.** $2\pi r^2h$. **D.** $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là

A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Lời giải.

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là số phức $1+2i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $\dfrac{4}{3}Bh$. **B.** $3Bh$. **C.** $\dfrac{1}{3}Bh$. **D.** Bh.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích lăng trụ là Bh.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x=1$, $f'(1)=0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua $x=1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0;0;-1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(2;0;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 3. **B.** -4. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $u_2=6 \Leftrightarrow u_1+d=6 \Leftrightarrow 2+d=4 \Leftrightarrow d=4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

A. $2x^2+C$. **B.** x^2+3x+C. **C.** $2x^2+3x+C$. **D.** x^2+C.

Lời giải.

Ta có $\int (2x+3)\,\mathrm{d}x = x^2+3x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$. Vec-tơ nào dưới đây là một vec-tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u_2} = (1;-3;2)$. **B.** $\vec{u_3} = (-2;1;3)$. **C.** $\vec{u_1} = (-2;1;2)$. **D.** $\vec{u_4} = (1;3;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$ có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u_2} = (1;-3;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

A. $3\log_2 a$. **B.** $\dfrac{1}{3}\log_2 a$. **C.** $\dfrac{1}{3}+\log_2 a$. **D.** $3+\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}(1)$.

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$

tại ba điểm phân biệt.
Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

A. $(2;5)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;2)$. **D.** $(5;3)$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + 2z_2 = (1+i) + 2(2+i) = 5+3i$.
Do đó điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là $(5;3)$.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(x^2-x)\cdot 2^{x^2-x-1}$. **B.** $(2x-1)\cdot 2^{x^2-x}$.
C. $2^{x^2-x}\cdot \ln 2$. **D.** $(2x-1)\cdot 2^{x^2-x}\cdot \ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^2-x)'\cdot 2^{x^2-x}\cdot \ln 2 = (2x-1)\cdot 2^{x^2-x}\cdot \ln 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18. **B.** 2. **C.** -18. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in (-3;3)$
$f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18$.
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3;3]$ là 18.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$
Xét dấu của đạo hàm

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

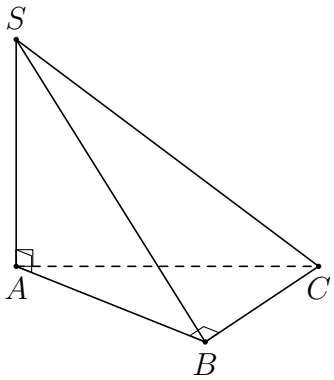
Ta có $2\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2(a^2b^3) = \log_2 16 = 4$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 22.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = \sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

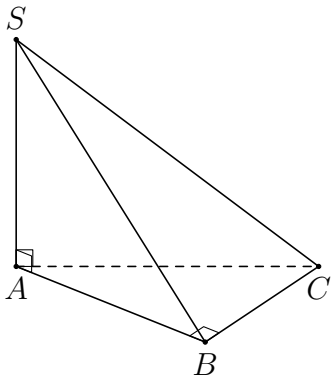


Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA} = \varphi$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45°$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 23. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,8m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây ?

A. $2,8m$. **B**. $2,6m$. **C**. $2,1m$. **D**. $2,3m$.

Lời giải.

Gọi hai bể nước hình trụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h, bán kính r_1, r_2, thể tích là V_1, V_2.

Ta có một bể nước mới có chiều cao h, $V = V_1 + V_2$.

$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot 1,8^2 \cdot h \Leftrightarrow r = \sqrt{1 + 1,8^2} \approx 2,1m$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

A. $x = 3$. **B**. $x = 2$. **C**. $x = -1$. **D**. $x = 1$.

Lời giải.

Điều kiện phương trình $x > \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} & \log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2[(x+1)\cdot 2] = \log_2(3x-1) \\ \Leftrightarrow\ & 2(x+1) = 3x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \text{ (Thỏa mãn điều kiện phương trình).} \end{aligned}$$

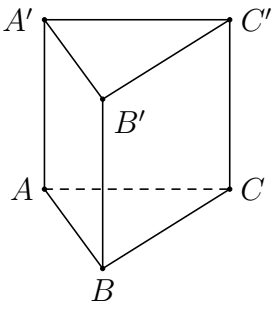
Vậy nghiệm phương trình là $x = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 25.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA' = 3a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $6\sqrt{3}a^3$. **D.** $3\sqrt{3}a^3$.



Lời giải.

Khối lăng trụ đã cho có đáy là tam giác đều có diện tích đáy là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $AA' = 3a$ (do là lăng trụ đứng) nên có thể tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = 3\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 3.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ có bán kính là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 7} = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x + 2y - 3z - 17 = 0$. **B.** $4x + 3y - z - 26 = 0$.

C. $2x + 2y - 3z + 17 = 0$. **D.** $2x + 2y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB là $M(4;3;-1)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (4;4;-6)$ nên có phương trình là

$$\begin{aligned} & 4(x-4) + 4(y-3) - 6(z+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x-4) + 2(y-3) - 3(z+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 2y - 3z - 17 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	1	↘	2	↘		↗	3
		$-\infty$		-3			

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là TCN của đồ thị hàm số.

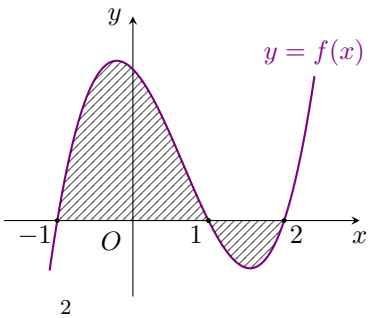
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 29.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$S = \int\limits_{-1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$

nên $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$

nên $\int\limits_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 6. **B**. 8. **C**. 16. **D**. 26.

Lời giải.

$\triangle' = b'^2 - ac = 4 - 5 = -1$.

Phương trình có 2 nghiệm phức $z_1 = -2 + i, z_2 = -2 - i$.

Nên $z_1^2 + z_2^2 = (-2+i)^2 + (-2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 + 4 + 4i + i^2 = 8 + 2i^2 = 8 - 2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(2;1;0), C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **B**. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. **C**. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **D**. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD).

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1;1;-1); \overrightarrow{BD} = (0;-1;-2)$.

Mặt phẳng (BCD) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(BCD)} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right] = (3;2;-1)$.

Gọi $\vec{u}_d$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Vì $d \perp (BCD)$ nên $\vec{u_d} = \vec{n}_{(BCD)} = (3;2;-1)$.

Đáp án $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ có vec-tơ chỉ phương không cùng phương với vec-tơ $\vec{u_d} = (3;2;-1)$ nên loại.

Ta thấy điểm $A(0;0;2)$ không thỏa hệ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ nên loại đáp án $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho số z thỏa mãn $(2+i)z - 4(\overline{z} - i) = -8 + 19i$. Mô-đun của z bằng

A. 13. **B**. 5. **C**. $\sqrt{13}$. **D**. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi $z = a + bi; \overline{z} = a - bi\,(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có

$$\begin{aligned} &(2+i)z - 4(\overline{z} - i) = -8 + 19i \\ \Leftrightarrow &(2+i)(a+bi) - 4(a - bi - i) = -8 + 19i \\ \Leftrightarrow &-2a - b + (a + 6b + 4) = -8 + 19i \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2a - b = -8 \\ a + 6b + 4 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $z = 3 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$.
Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2 \cdot f'(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \leq 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x \leq -3 \\ -1 \leq 3-2x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$.
Vậy hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.
Chọn đáp án A □

Câu 34. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+2) + \dfrac{1}{x+2} + C$. **B.** $2\ln(x+2) - \dfrac{1}{x+2} + C$.
C. $2\ln(x+2) - \dfrac{3}{x+2} + C$. **D.** $2\ln(x+2) + \dfrac{3}{x+2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+4-3}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C$.
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int \left(2\sin^2 x + 1\right)\mathrm{d}x = \int (2-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.
Vì $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$
Hay $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + 4$.
Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4\right)\mathrm{d}x = x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \pi - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0. \end{cases}$

Xét phương trình: $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \quad (1)$.

Cách 1.

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow 5 - \dfrac{1}{x} = m \quad (2)$.

Xét $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(5 - \dfrac{1}{x}\right) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
y'		$+$	
y		$\nearrow$	5
	0		

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x > \dfrac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

Với $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \\ &\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x} = m \\ &\Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (2). \end{aligned}$$

Với $m = 5$, phương trình (2) thành $0 \cdot x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5-m}$.

Xét $x > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5-m} > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{m}{5\cdot(5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

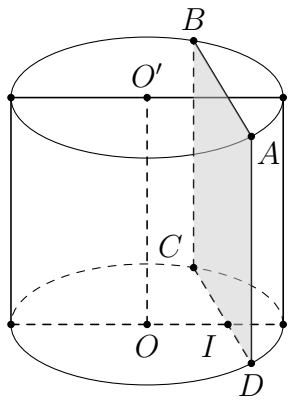
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải.

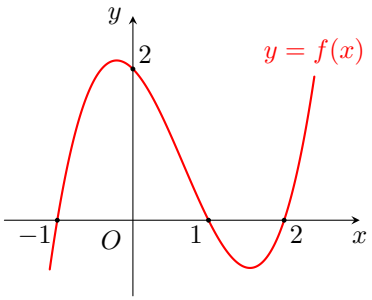
Ta có: $S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot CD$
$\Rightarrow CD = 4$
$\Rightarrow CI = 2$
$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r.$
Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi.$



Chọn đáp án A □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi



A. $m > f(0)$. **B.** $m > f(2) - 4$. **C.** $m \geq f(0)$. **D.** $m \geq f(2) - 4$.

Lời giải.

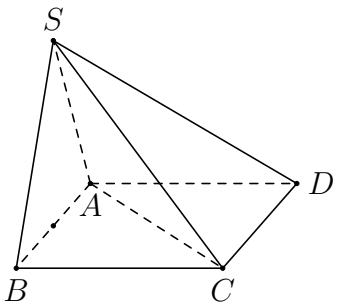
Ta có $f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x \quad (1)$.
Đặt $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in (0;2)$.
$\forall x \in (0;2), g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.
Do đó (1) đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m \geq g(0) = f(0)$.

Chọn đáp án C □

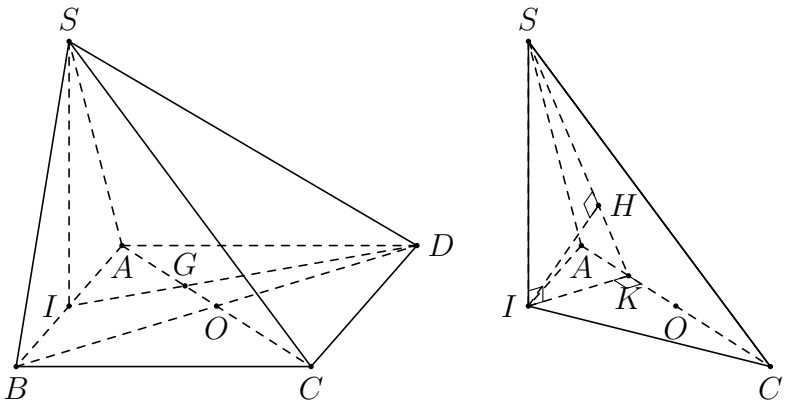
Câu 39.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Lời giải.



* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB.

Ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\dfrac{\mathrm{d}(D;(SAC))}{\mathrm{d}(I;(SAC))} = \dfrac{DG}{IG} = 2$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2 \cdot \mathrm{d}(I;(SAC))$.

* Gọi K là trung điểm của AO suy ra $IK \parallel BO$.

* Do $BO \perp AC$ nên $IK \perp AC$.

* Ta lại có $AC \perp SI$ nên $AC \perp (SIK)$. Do đó $(SAC) \perp (SIK)$.

* Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có $IH \perp SK$.

* Do $(SIK) \cap (SAC) = SK \Rightarrow IH = \mathrm{d}(I,(SAC))$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2 \cdot \mathrm{d}(I;(SAC)) = 2 \cdot IH$.

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có

$SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; IK = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

$\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{16}{2a^2} = \dfrac{28}{3a^2}$.

$\Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAC)) = 2 \cdot IH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{11}{21}$. **B.** $\dfrac{221}{441}$. **C.** $\dfrac{10}{21}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

* Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{21}^2 = 210$.

* Gọi biến cố A: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Trong 21 số nguyên dương đầu tiên có 11 số lẻ và 10 số chẵn.

Để hai số chọn được có tổng là một số chẵn điều kiện là cả hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

$\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{11}^2 = 100$.

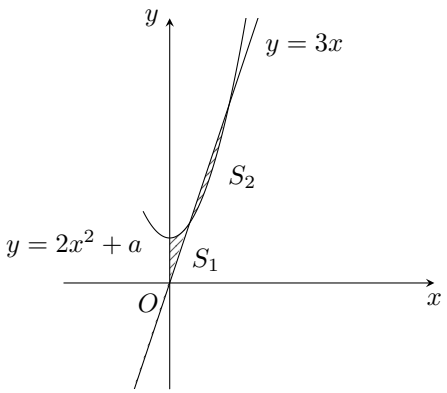
* Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{21}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41.

Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $y=2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2+a=3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+a=0$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9-8a>0 \\ P=\dfrac{a}{2}>0 \\ S=\dfrac{3}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{9}{8} \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8a}}{4}$.

Gọi $x_1=\dfrac{3-\sqrt{9-8a}}{4}$; $x_2=\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & S_1=S_2. \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^{x_1}(2x^2+a-3x)\,\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}(2x^2+a-3x)\,\mathrm{d}x. \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^{x_1}(2x^2+a-3x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}(2x^2+a-3x)\,\mathrm{d}x=0. \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^{x_2}(2x^2-3x+a)\,\mathrm{d}x=0. \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\Big|_0^{x_2}=0. \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}(x_2)^3-\frac{2}{3}(x_2)^2+a(x_2)=0. \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}(x_2)^2-\frac{3}{2}\cdot x_2+a=0 \ (\ do\ x_2\neq 0\ ). \end{aligned}$$

Ta lại có x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên x_2 là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x_2)^2-\dfrac{3}{2}x_2+a=0 \\ 2(x_2)^2-3x_2+a=0. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x_2)^2-\dfrac{3}{2}x_2-2(x_2)^2+3x_2=0 \\ a=-2(x_2)^2+3x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-4}{3}(x_2)^2 + \dfrac{3}{2}x_2 = 0 \\ a = -2(x_2)^2 + 3x_2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{9}{8} \\ a = \dfrac{27}{32}. \end{cases}$$

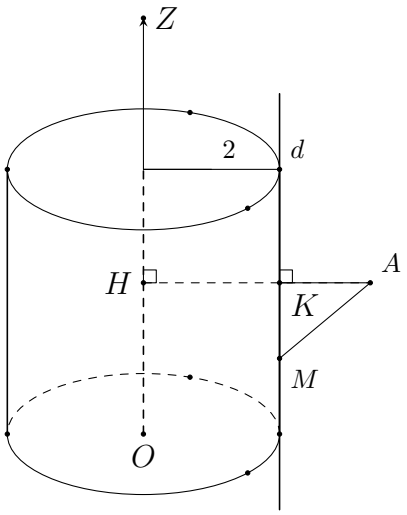
Chọn đáp án A □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-2;0;-2)$. **B.** $N(0;-2;-5)$. **C.** $Q(0;2;-5)$. **D.** $M(0;4;-2)$.

Lời giải.

Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2.



Có $H(0;0;-2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0;3;-2)$ trên Oz.

Có $\overrightarrow{HA} = (0;3;0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz.

M là điểm trên d.

Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).

Dễ thấy $AM \geq AK; AK = AH - \mathrm{d}(OZ;d) = 1 = \mathrm{d}(A;d)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{HA} \Rightarrow K(0;2;-2)$.

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Với $t = -3$ ta thấy d đi qua điểm Q.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi số phức $w = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & w = \frac{2+iz}{1+z}. \\ \Leftrightarrow\ & w(1+z) = 2 + iz. \\ \Leftrightarrow\ & w - 2 = z(i - w). \\ \Rightarrow\ & |w-2| = |z(i-w)|. \\ \Leftrightarrow\ & |w-2| = |z| \cdot |z(i-w)|. \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + y^2 = 2(x^2 + (1-y)^2). \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2+(y-2)^2=10 \quad (*).$$

Từ $(*)$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\displaystyle\int_0^6 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Lời giải.

Theo bài ra $\displaystyle\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=6x \Rightarrow \mathrm{d}t=6\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=6$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow \int_0^6 \frac{1}{6}t\cdot f(t)\frac{\mathrm{d}t}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{36}\int_0^6 t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t=1 \Leftrightarrow \int_0^6 t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t=36.$

Tính $I=\displaystyle\int_0^6 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

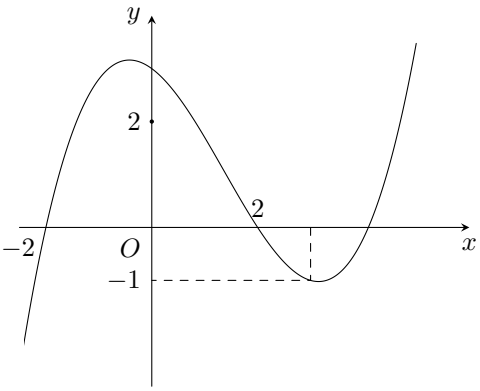
$\Rightarrow I=x^2f(x)\Big|_0^6-\displaystyle\int_0^6 2xf(x)\,\mathrm{d}x=36f(6)-2\int_0^6 xf(x)\,\mathrm{d}x=36\cdot1-2\cdot36=-36.$

Chọn đáp án D □

Câu 45.

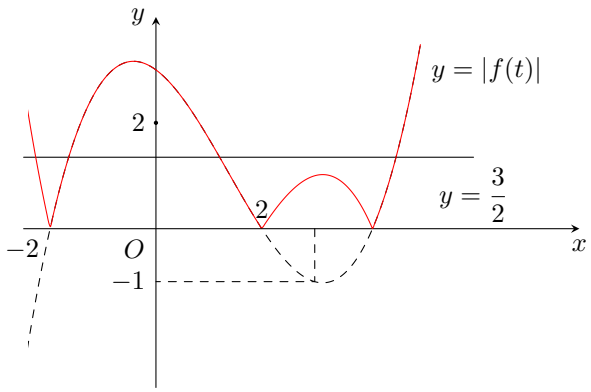
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3-3x)|=\dfrac{3}{2}$ là

A. 8. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.



Lời giải.

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $|f(t)|=\dfrac{3}{2}$ $(*)$.



Từ đồ thị hàm số $y=|f(t)|$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm $t_1<-2<t_2<0<t_3<2<t_4$.

Xét hàm $t=x^3-3x$. Ta có $t'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		0		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

- ☑ Với $t_1<-2$ phương trình: $t_1=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.
- ☑ Với $-2<t_2<0$ phương trình: $t_2=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.
- ☑ Với $0<t_3<2$ phương trình: $t_3=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.
- ☑ Với $2<t_4$ phương trình: $t_4=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 123. **B**. 125. **C**. Vô số. **D**. 124.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 5^x-m\geq 0\,(m>0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\geq \log_5 m. \end{cases}$

$\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0 \\ 5^x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x=\log_5 m. \end{array}\right.$

TH 1. Nếu $m=1$ thì $x=\log_5 m=0$ (loại) nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

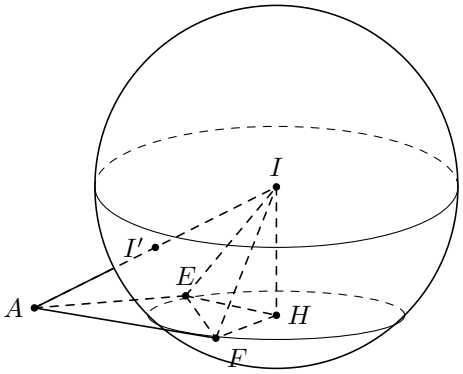
TH 2. Nếu $m>1$ thì phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq \log_5 m<3 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\leq m<125$. Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{3;4;5;\ldots;124\}$. Nên có 123 giá trị m thoả mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S)\colon x^2+y^2+(z+1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)(a,b,c$ là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20. **B**. 8. **C**. 12. **D**. 16.

Lời giải.



Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+1)^2=5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R=\sqrt{5}$

$A(a;b;0)\in(Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI\Rightarrow I'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Gọi E,F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE\perp AF$.

Ta có: E,F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R'=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}$.

Đề tồn tại E,F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R-R'|\le II'\le|R+R'|$

$\Leftrightarrow\left|\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\le\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}$

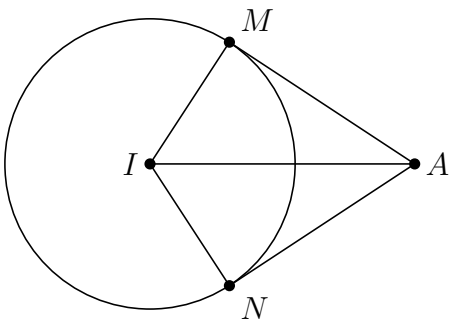
$\Leftrightarrow\sqrt{5}\le\sqrt{a^2+b^2+1}\Leftrightarrow a^2+b^2\ge4(1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE=HF=\sqrt{AI^2-5}$.

Ta có $IH^2=R^2-HF^2=5-(AI^2-5)=10-AI^2\ge0\Leftrightarrow a^2+b^2+1\le10\Leftrightarrow a^2+b^2\le9(2)$

Từ (1) và (2) ta có $4\le a^2+b^2\le9$ mà $a,b,c\in\mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

Cách khác:



Mặt cầu (S) có tâm $I(0,0,-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))}=1<R\Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng(Oxy). Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A\Leftrightarrow AI\ge R(1)$.

Có $A(a,b,c)\in(Oxy)\Rightarrow A(a,b,0),IA=a^2+b^2+1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.
Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.
Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2}(2)$.
Từ $(1), (2) \Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right.$.
Với $y = f(4x^2 - 4x)$, ta có $y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1)(1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0)(2) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1)(3) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty)(4) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2-4x$, ta có $g'(x)=8x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có

- ☑ Vì $a \in (-\infty;-1)$ nên (1) vô nghiệm.
- ☑ Vì $b \in (-1;0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.
- ☑ Vì $c \in (0;1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- ☑ Vì $d \in (1;+\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=f(4x^2-4x)$ có 7 điểm cực trị

Cách khác

Ta có: $y'=(8x-4)\cdot f'(4x^2-4x)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow (8x-4)\cdot f'(4x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x-4=0 \\ f'(4x^2-4x)=0. \end{array}\right.$$

- ☑ $8x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
- ☑ $f'(4x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-4x=a\,(a<-1)\,(1) \\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\,(2) \\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\,(3) \\ 4x^2-4x=\mathrm{d}\,(d>1)\,(4). \end{array}\right.$
- ☑ Phương trình $4x^2-4x=m \Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-4m\geq 0$ hay $m\leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (4) vô nghiệm.

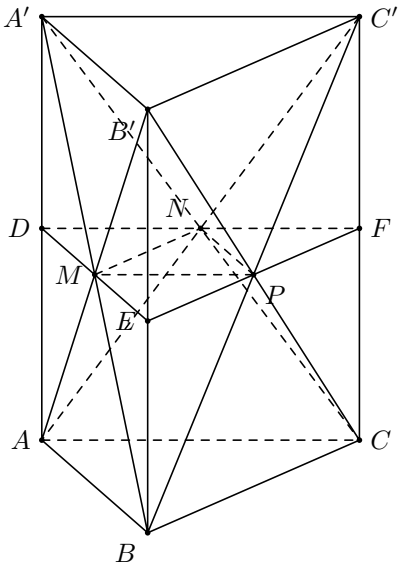
Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 49. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N,P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP).
Dễ chứng minh được $(DEF) \parallel (ABC)$ và D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF} = \dfrac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.
Ta có $V_{ABCPNM} = V_{ABC.DEF} - V_{ADMN} - V_{BMPE} - V_{CPMF}$.
Mặt khác $V_{ADMN} = V_{BMPE} = V_{CPMF} = \dfrac{1}{12}V_{ABC.DEF} \Rightarrow V_{ABCPNM} = \dfrac{3}{4}V_{ABC.DEF} = 9\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[-2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(-2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm
$\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m (1)$
Xét $f(x) = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in \mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$
Ta có $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup \mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup \mathscr{D} = \mathscr{D}_2. \end{cases}$
Có $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in \mathscr{D}_1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in \mathscr{D}_2. \end{cases}$
Dễ thấy $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	2 $-\infty$

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Chọn đáp án (D) □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. A	15. A	16. C	17. D	18. D	19. A	20. C
21. C	22. A	23. C	24. A	25. D	26. D	27. A	28. C	29. C	30. A
31. C	32. C	33. A	34. D	35. C	36. C	37. A	38. C	39. D	40. C
41. A	42. C	43. D	44. D	45. A	46. A	47. A	48. C	49. A	50. D

Đề thi THQG 2019-Mã đề 104

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là

A. C_8^2. **B.** 8^2. **C.** A_8^2. **D.** 2^8.

Lời giải.

Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là: C_8^2.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y+z-1=0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_4=(3;1;-1)$. **B.** $\vec{n}_3=(4;3;1)$. **C.** $\vec{n}_2=(4;-1;1)$. **D.** $\vec{n}_1=(4;3;-1)$.

Lời giải.

$(P)\colon 4x+3y+z-1=0$.

Véc-tơ $\vec{n}_3=(4;3;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án B □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=32$ là

A. $x=3$. **B.** $x=\dfrac{17}{2}$. **C.** $x=\dfrac{5}{2}$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

$2^{2x-1}=32\Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^5\Leftrightarrow 2x-1=5\Leftrightarrow x=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $\dfrac{4}{3}Bh$. **B.** $\dfrac{1}{3}Bh$. **C.** $3Bh$. **D.** Bh.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trục là $V=B\cdot h$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Số phức liên hợp của số phức $3-2i$ là

A. $-3+2i$. **B.** $3+2i$. **C.** $-3-2i$. **D.** $-2+3i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $3-2i$ là số phức $3+2i$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(3;0;-1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=1$ và $u_2=4$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số cộng nên $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A. $2x^2 + 4x + C$. **B.** $x^2 + 4x + C$. **C.** $x^2 + C$. **D.** $2x^2 + C$.

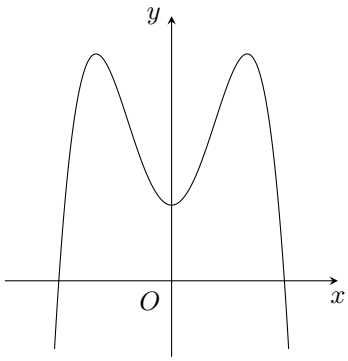
Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x + 4)\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9.

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = 2x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

C. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. **D.** $y = -2x^3 + 3x + 1$.

Lời giải.

Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.

Do đó, chỉ có đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{3}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u_1} = (3;-1;5)$. **B.** $\vec{u_3} = (2;6;-4)$. **C.** $\vec{u_4} = (-2;-4;6)$. **D.** $\vec{u_2} = (1;-2;3)$.

Lời giải.

Ta thấy đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương có tọa độ $\vec{u_2} = (1;-2;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

A. $2\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$. **C.** $\frac{1}{2}\log_2 a$. **D.** $2+\log_2 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $2\pi r^2 h$. **B.** $\pi r^2 h$. **C.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -4$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2+(-4) = -2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hai số phức $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(5;-1)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(5;0)$. **D.** $(0;5)$.

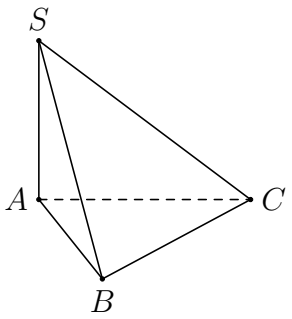
Lời giải.

Ta có $2z_1+z_2 = 5-i$ nên điểm biểu diễn là $(5;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$. (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $90°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}.$

Mà $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA$ nên ΔSAC vuông cân tại A.

Vậy $\widehat{SCA} = 45°$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B**. 3. **C**. 15. **D**. $\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-7)} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$. **B**. $3x + y + z - 6 = 0$.

C. $x + y + 2z - 6 = 0$. **D**. $3x - y - z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng AB. Do đó, phương trình mặt phẳng đó là

$$-6(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 20. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 10. **B**. 8. **C**. 16. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 4 - 7 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = \left(2 + \sqrt{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18. **B**. -18. **C**. -2. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-3;3] \\ x = -1 \in [-3;3]. \end{array}\right.$

Ta lại có $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng -18.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. 1,6 m. **B**. 2,5 m. **C**. 1,8 m. **D**. 2,1 m.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{13}{4}$.

Suy ra $r = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$ m.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-4 ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y = 3$ và $y = 0$.

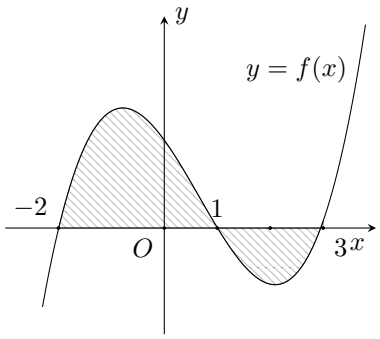
Ta lại có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Vậy hàm số có ba tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 24.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=-\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f\,(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Do $f(x)\geq 0$ với $\forall x\in[-2;1]$ và $f(x)\leq 0$ với $\forall x\in[1;3]$ nên $S=\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Hàm số $y=3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $3^{x^2-x}\cdot\ln 3$.
B. $(2x-1)\cdot 3^{x^2-x}$.
C. $(x^2-x)\cdot 3^{x^2-x-1}$.
D. $(2x-1)\cdot 3^{x^2-x}\cdot\ln 3$.

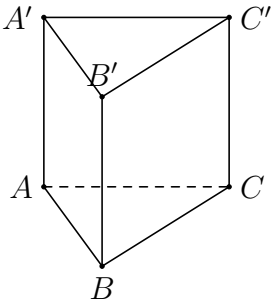
Lời giải.

Ta có: $(a^u)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$ nên $\left(3^{x^2-x}\right)'=(2x-1)\cdot 3^{x^2-x}\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 26.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=\sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$.
B. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.
C. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.
D. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}\cdot AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$ là

A. $x=4$.
B. $x=-2$.
C. $x=1$.
D. $x=2$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(2x+1)=\log_3[3(x-1)] \\ \Leftrightarrow\ & 2x+1=3x-3 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3=8$. Giá trị của $\log_2 a+3\log_2 b$ bằng

A. 8. **B**. 6. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a+3\log_2 b=\log_2 a+\log_2 b^3=\log_2(ab^3)=\log_2 8=3.$

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}.$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$ $y=-\frac{3}{2}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có ba nghiệm

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x+1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘			CT	↗	

Vậy hàm số đã cho có một cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Mô-đun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)\\
\Leftrightarrow\ &(2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i)\\
\Leftrightarrow\ &2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 2x+y+3=2x \\ 2y-x+16=-2y+2 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} y+3=0 \\ -x+4y=-14 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\int f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(2\sin^2 x+3\right)\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos 2x+3)\,\mathrm{d}x\\
&= \int (4-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C.
\end{aligned}$$

Ta có $f(0)=4$ nên $4\cdot 0-\dfrac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$ nên $f(x)=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$ và $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-1-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-2-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)$; $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-2)$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc-tơ chỉ phương là:

$\vec{n}_{(ABC)}=(1;1;-2)$ vậy phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-3-2t.\end{cases}$

Đường thẳng này cũng chính là $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-1-2t.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(5-2x)=-2f'(5-2x)$.

$$y'=0\Leftrightarrow -2f'(5-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5-2x=-3\\5-2x=-1\\5-2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=3\\x=2.\end{array}\right.$$

$$f'(5-2x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5-2x<-3\\-1<5-2x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\end{array}\right.$$

$$f'(5-2x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5-2x>1\\-3<5-2x<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2\\3<x<4.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2) + \dfrac{4}{x-2} + C$.

B. $3\ln(x-2) + \dfrac{2}{x-2} + C$.

C. $3\ln(x-2) - \dfrac{2}{x-2} + C$.

D. $3\ln(x-2) - \dfrac{4}{x-2} + C$.

Lời giải.

Ta có
$f(x) = \dfrac{3x-2}{(x-2)^2} = \dfrac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

Do đó
$\displaystyle\int \frac{3x-2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 5. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ m > 0. \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{x}{4x-1} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{4x-1}$, ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{(4x-1)^2} < 0,\ \forall x > \dfrac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:

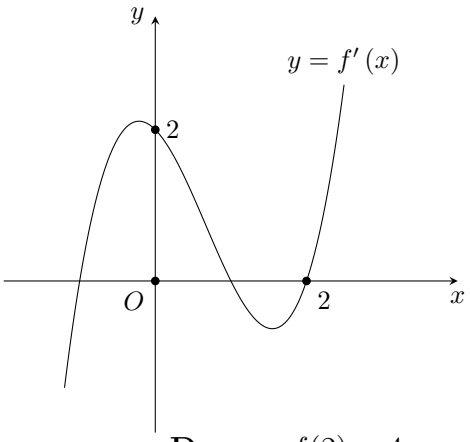
x	$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	
y	‖	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{4}$

Do đó phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m < 4$. Vậy $m \in \{1,2,3\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37.

Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi



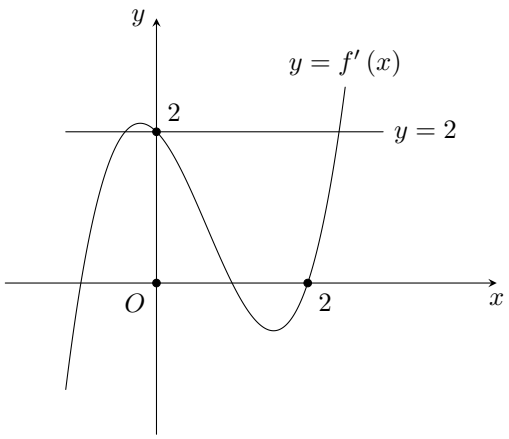
A. $m\le f(2)-4$. **B**. $m\le f(0)$. **C**. $m<f(0)$. **D**. $m<f(2)-4$.

Lời giải.

Hàm số $g(x)=f(x)-2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ vì $g'(x)=f'(x)-2<0,\forall x\in(0;2)$ (quan sát trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y=2$). Suy ra $g(2)<g(x)<g(0),\forall x\in(0;2)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

$$m<g(x),\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m\le g(2)\Leftrightarrow m\le f(2)-4.$$



Chọn đáp án A □

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{11}{23}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{265}{529}$. **D**. $\dfrac{12}{23}$.

Lời giải.

Trong 23 số nguyên dương đầu tiên, có 12 số lẻ và 11 số chẵn.

Chọn 2 số khác nhau từ 23 số, có C_{23}^2 cách chọn nên số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{23}^2$.

Gọi A là biến cố: "Chọn được hai số có tổng là một số chẵn".

Để hai số được chọn có tổng là một số chẵn thì hai số đó phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

+ Trường hợp 1: Chọn hai số chẵn khác nhau từ 11 số chẵn, có C_{11}^2 cách chọn.

+ Trường hợp 2: Chọn hai số lẻ khác nhau từ 12 số lẻ, có C_{12}^2 cách chọn.

Do đó $n(A)=\mathrm{C}_{11}^2+\mathrm{C}_{12}^2$.

Xác suất cần tính là $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{\mathrm{C}_{11}^2+\mathrm{C}_{12}^2}{\mathrm{C}_{23}^2}=\dfrac{11}{23}$.

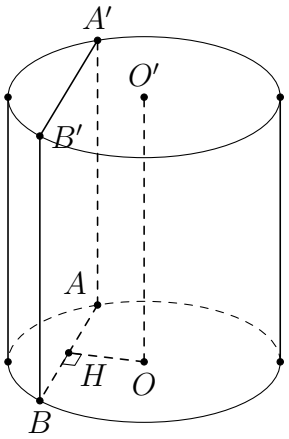
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}\pi$. **B**. $6\sqrt{39}\pi$. **C**. $3\sqrt{39}\pi$. **D**. $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của hình trụ là h.



Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng song song với trục là hình chữ nhật $ABB'A'$.

Gọi H là hình chiếu của O trên AB thì OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(ABB'A')$ nên $OH = 1$.

Diện tích thiết diện là: $S_{td} = AB \cdot AA'$ trong đó $AA' = h = 3\sqrt{3}$ nên $AB = \dfrac{S_{td}}{AA'} = \dfrac{18}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Do tam giác OAB cân nên

$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = OB^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow OB^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4} = 1 + \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = 4$$

$$\Rightarrow OB = 2$$

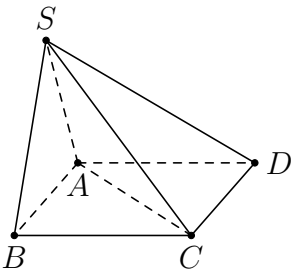
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\pi.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40.

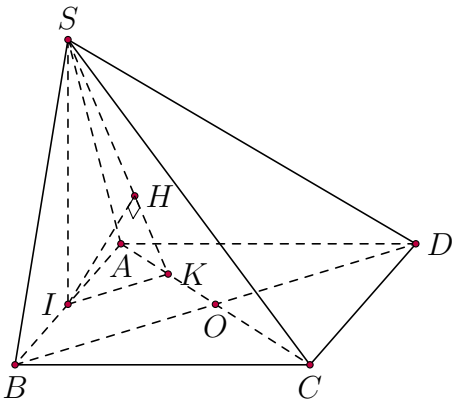
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh hoạ như hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của AB.



Kẻ $IK \parallel BD, K \in AC$; kẻ $IH \perp SK, H \in SK$ (1).

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên

$SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AC$.

Lại có $IK \perp AC$, suy ra $AC \perp (SIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IH \perp (SAC)$.

Suy ra IH là khoảng cách từ I đến đến mặt phẳng (SAC).

Ta có $IK = \dfrac{1}{2}BO = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, tam giác SIK vuông tại I nên

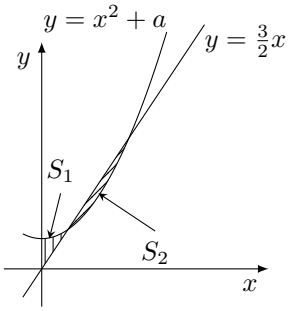
$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}.$$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng hai lần khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $d = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41.

Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{20}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{9}{20};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+a=\dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-3x+2a=0$.

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<\dfrac{9}{16}. \end{cases}$

Gọi hai nghiệm đó là $0<x_1<x_2$ thì $x_2=\dfrac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$.

Để $S_1=S_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_1}\left|x^2+a-\frac{3}{2}x\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left|x^2+a-\frac{3}{2}x\right|\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{x_1}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{x_1}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0\\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0.
\end{aligned}$$

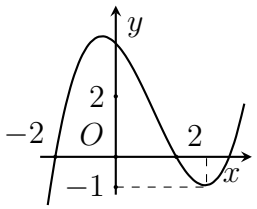
Ta có

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{3}\left(x_2^2-\frac{9}{4}x_2+3a\right)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x_2-a-\frac{9}{4}x_2+3a=0\Leftrightarrow-3x_2+8a=0\\
\Leftrightarrow\ &8a=3\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\Leftrightarrow3\sqrt{9-16a}=32a-9\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{9}{32}<a<\dfrac{9}{16}\\ 1024a^2-432a=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &a=\frac{27}{64}\in\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right).
\end{aligned}$$

Có thể giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $a=0{,}421875$ thuộc khoảng $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{20}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 42.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{2}{3}$ là



A. 6. **B**. 10. **C**. 3. **D**. 9.

Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$ (1).
Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- ☑ $t \in (-2; 2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1).
- ☑ $t \in \{-2; 2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1).
- ☑ $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{2}{3}$ (2) trở thành $|f(t)| = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = \dfrac{2}{3} \\ f(t) = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có:

- ☑ Phương trình $f(t) = \dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3$. Suy ra có 7 nghiệm của phương trình (2).
- ☑ Phương trình $f(t) = -\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6$. Suy ra có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \dfrac{5 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 52. **B**. $2\sqrt{13}$. **C**. $2\sqrt{11}$. **D**. 44.

Lời giải.

Gọi $w = x + yi$ với x, y là các số thực.
Ta có $w = \dfrac{5 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow z = \dfrac{w - 5}{i - w}$.
Lại có

$$\begin{aligned} & |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w - 5}{i - w}\right| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & |w - 5| = \sqrt{2}|w - i| \Leftrightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 2[x^2 + (y - 1)^2] \\ \Leftrightarrow\ & (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 52. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(3x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\displaystyle\int_0^3 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $\dfrac{25}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Suy ra $1 = \displaystyle\int_0^1 xf(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^3 tf(t)\,\mathrm{d}t = 9$.

Đặt $\begin{cases} u = f(t) \\ \mathrm{d}v = t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(t)\,\mathrm{d}t \\ v = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int_0^3 tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^2}{2}f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}f(3) - \frac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t$.

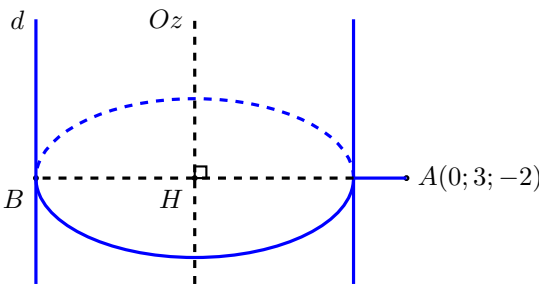
$\Leftrightarrow 9 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t = -9$.

Vậy $\displaystyle\int_0^3 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = -9$.
Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(-2;0;-3)$. **B.** $M(0;8;-5)$. **C.** $N(0;2;-5)$. **D.** $P(0;-2;-5)$.

Lời giải.



Do đường thẳng $d \parallel Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R = 2$.
Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz, suy ra tọa độ $H(0;0;-2)$.
Do đó $d(A, Oz) = AH = 3$.

Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Suy ra $B(0;-2;-2)$.
Vậy $\mathrm{d}(A,\,d)_{\max}=5\Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz.
Phương trình tham số của d: $\begin{cases}x=0\\y=-2\\z=-2+t.\end{cases}$
Kết luận: d đi qua điểm $P(0;-2;-5)$.
Chọn đáp án (D) □

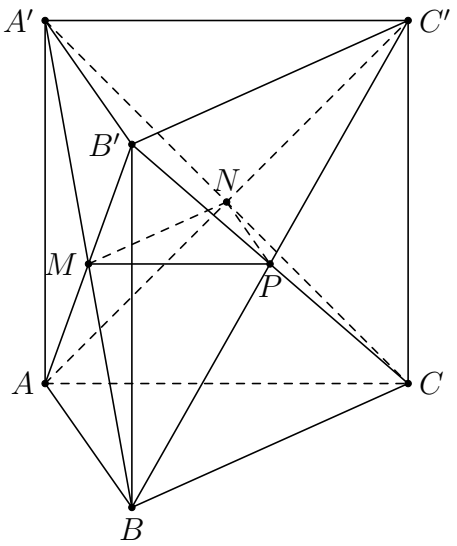
Câu 46. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V=4\cdot\frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}.$$



Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1.
Ta có: $V_1=V_{AMNCB}+V_{BMNP}+V_{BNPC}$.
Dễ thấy $V_{A'ABC}=\frac{1}{3}V$ và $V_{AMNCB}=\frac{3}{4}V_{A'ABC}$.
Suy ra $V_{AMNCB}=\frac{1}{4}V$.
$V_{BA'B'C'}=\frac{1}{3}V$ và $V_{BMNP}=\frac{1}{8}V_{BA'B'C'}$.
Suy ra $V_{BMNP}=\frac{1}{24}V$.
$V_{A'BCB'}=V_{A'B'CC'}=\frac{1}{3}V$ và $V_{BNPC}=\frac{1}{4}V_{BA'B'C}$.
Suy ra $V_{BNPC}=\frac{1}{12}V$.
Vậy $V_1=V_{AMNCB}+V_{BMNP}+V_{BNPC}=\frac{3}{8}V=6\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hai hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=|x+1|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $[-3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ

$$\begin{aligned}&\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=|x+1|-x-m\\\Leftrightarrow\ &\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=-m\quad(1).\end{aligned}$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x)=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}-1, & x>-1\\ \dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+2x+1, & x<-1.\end{cases}$$

Ta có $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}, & x\in(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+2, & x\in(-\infty;-1)\setminus\{-2\}.\end{cases}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=3$.

$\lim\limits_{x\to-2^+}F(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-}F(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+}F(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-}F(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m\le3\Leftrightarrow m\ge-3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho phương trình $\left(2\log_3^2x-\log_3x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. **B**. 62. **C**. 63. **D**. 64.

Lời giải.

Ta có điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x\ge\log_4m\end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2\log_3^2x-\log_3x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0\quad(1)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_3^2x-\log_3x-1=0 & (2)\\ 4^x=m & (3).\end{cases}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3x=1\\ \log_3x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{\sqrt3}{3}.\end{array}\right.$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x=\log_4m$.

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m=1$ thì $\log_4m=0$. Khi đó điều kiện (*) trở thành $x>0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m = 1$.

TH 2: $m \geq 2$, khi đó điều kiện (*) trở thành $x \geq \log_4 m$ (vì $\log_4 m \geq \dfrac{1}{2}$).

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} \leq \log_4 m < 3$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq m < 4^3$

Suy ra $m \in \{3; 4; 5; \ldots; 63\}$.

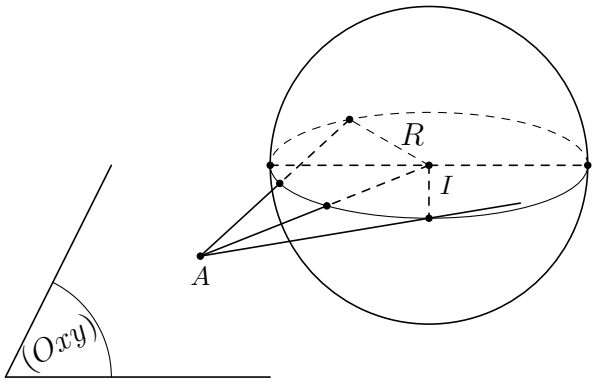
Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63 - 3 + 1 + 1 = 62$ giá trị nguyên dương m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12. **B**. 16. **C**. 20. **D**. 8.

Lời giải.



Mặt cầu có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A, để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90°$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

Vậy $R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0; \pm 2)$; $(0; \pm 3)$; $(\pm 1; \pm 2)$; $(\pm 2; \pm 2)$; $(\pm 2; \pm 1)$; $(\pm 2; 0)$; $(\pm 3; 0)$, 20 bộ số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘		↗	2	↘		↗	$+\infty$
			-3				-1		

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

A. 5. **B**. 9. **C**. 7. **D**. 3.

Lời giải.

Có $(f(4x^2+4x))'=(8x+4)f'(4x^2+4x)$, $(f(4x^2+4x))'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ f'(4x^2+4x)=0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	a_1		a_2	2	a_3		a_4	$+\infty$
			-3				-1		

Từ bảng biến thiên trên ta có $f'(4x^2+4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=a_2\in(-1;0) \\ 4x^2+4x=a_3\in(0;1) \\ 4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty) \end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

- ☑ Phương trình $4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)$ vô nghiệm.
- ☑ Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- ☑ Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- ☑ Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(4x^2+4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. B	9. B	10. A
11. D	12. A	13. C	14. C	15. C	16. A	17. B	18. B	19. D	20. D
21. B	22. C	23. C	24. A	25. D	26. A	27. A	28. D	29. A	30. B
31. C	32. C	33. A	34. B	35. D	36. B	37. A	38. A	39. D	40. C
41. B	42. B	43. B	44. C	45. D	46. C	47. C	48. B	49. C	50. C

9 Đề minh họa THQG 2019

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$. **B**. $2a^3$. **C**. a^3. **D**. $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng $(2a)^3 = 8a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 5.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$. **B**. $(-1;-2;3)$. **C**. $(3;5;1)$. **D**. $(3;4;1)$.

Lời giải.

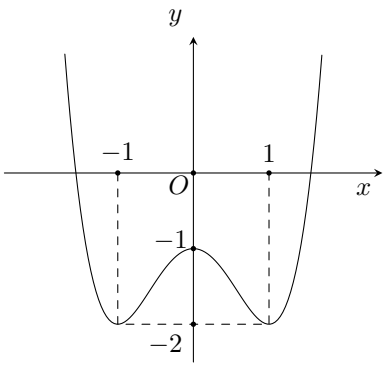
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-1;2+1) = (1;2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(-\infty;-1)$. **C**. $(-1;1)$. **D**. $(-1;0)$.



Lời giải.

Hàm số đồng biến trên khoảng nào thì đồ thị có hướng đi lên trên khoảng đó.

Dựa vào đồ thị đã cho, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng

A. 22. **B**. 17. **C**. 12. **D**. 250.

Lời giải.

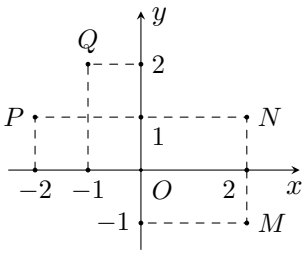
Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17$.

Chọn đáp án B □

Câu 6.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

A. N. **B**. P. **C**. M. **D**. Q.



Lời giải.

Vì $z = -1 + 2i$ nên điểm biểu diễn của số phức z có tọa độ $(-1; 2)$.

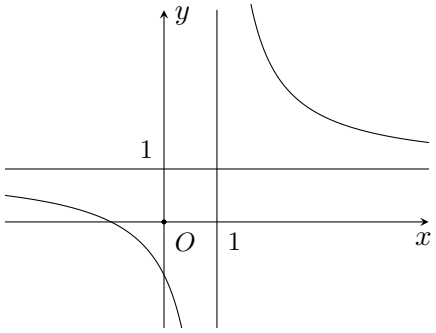
Chọn đáp án D □

Câu 7.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **B**. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y = x^4 + x^2 + 1$. **D**. $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Đường cong có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên nó không thể là đồ thị của hàm đa thức. Ta xét các trường hợp sau:

① Xét $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, có

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Do đó đường cong trên không thể là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

② Xét $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, có

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

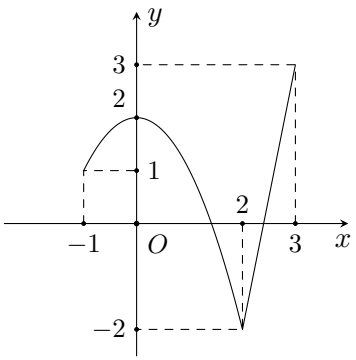
$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó đường cong trên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 8.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục tên đoạn $[-1;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng



A. 0. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 5.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $M=3$, $m=-2$. Do đó $M-m=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B**. 2. **C**. 5. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0$, $b=2$. **B**. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$. **C**. $a=0$, $b=1$. **D**. $a=1$, $b=2$.

Lời giải.

Ta có $2a+(b+i)i=1+2i \Leftrightarrow 2a-1+bi=1+2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1=1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$. **B**. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. **D**. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=IA=\sqrt{5}$ có phương trình là

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Đặt $\log_3 2 = a$, khi đó $\log_{16} 27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4a}$. **C.** $\dfrac{4}{3a}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{16} 27 = \log_{2^4} 3^3 = \dfrac{3}{4}\log_2 3 = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\log_3 2} = \dfrac{3}{4a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 10.

Lời giải.

$$z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{3+\sqrt{11}i}{2} \\ z = \dfrac{3-\sqrt{11}i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q)\colon x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét thấy $(P) \parallel (Q)$.

Trên (P) lấy $M(0;0;5)$. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$\mathrm{d}\left((P),(Q)\right) = \mathrm{d}\left(M,(Q)\right) = \frac{|0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(3;+\infty)$.

C. $(-1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

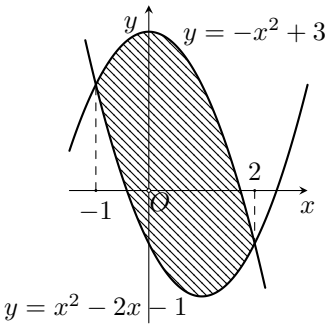
Lời giải.

$3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 16.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^2 - 2x - 4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(-2x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$S = \int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right) - \left(x^2 - 2x - 1\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(-2x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

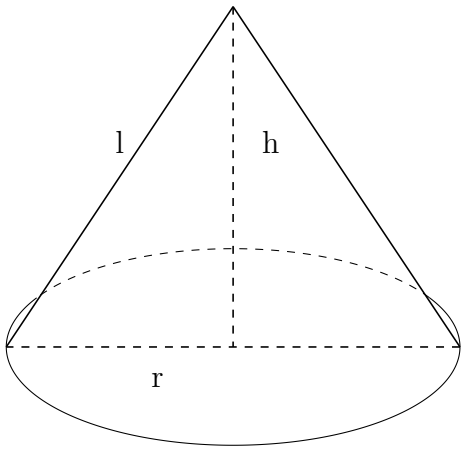
Câu 17. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $l = 2a; r = a$, suy ra $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}a$.

Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$ | 3	↗	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

- ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 5$ suy ra $y = 5$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$ suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số tổng cộng có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

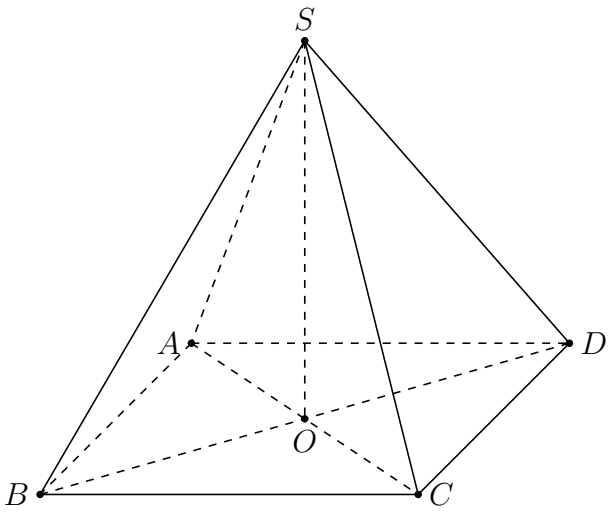
A. $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Do chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AC = BD = 2a\sqrt{2}$. Suy ra $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 20. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. **B.** $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

C. $f'(x) = \dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$. **D.** $f'(x) = \dfrac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)\ln 2} = \dfrac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

$2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

Mà $-2 < -\dfrac{3}{2} < 1$ nên số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là 4.

Chọn đáp án A ☐

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

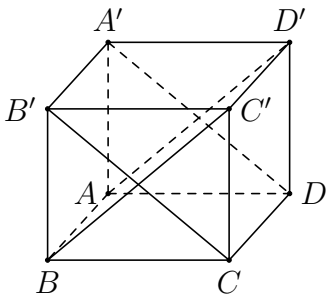
A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

$\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là $90°$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x) = 2-x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải.

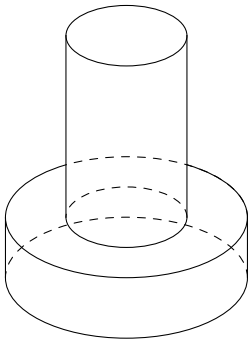
$\log_3(7-3^x) = 2-x \Leftrightarrow 7-3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7-3^x = \dfrac{9}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7\cdot 3^x + 9 = 0. \quad (*)$

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 7 \\ 3^{x_1}\cdot 3^{x_2} = 9 \end{cases} \Rightarrow 3^{x_1+x_2} = 3^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24.

Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1$, $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30\,\text{cm}^3$, thể tích khối trụ (H_1) bằng



A. $24\,\text{cm}^3$. **B.** $15\,\text{cm}^3$. **C.** $20\,\text{cm}^3$. **D.** $10\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối trụ (H_1), (H_2).

Ta có $V_2 = h_2\pi r_2^2 = 2h_1\pi\dfrac{1}{4}r_1^2 = \dfrac{1}{2}h_1\pi r_1^2 = \dfrac{1}{2}V_1$. Mà $V_1 + \dfrac{1}{2}V_1 = 30$ nên $V_1 = 20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x + 3x^2$. **B.** $2x^2\ln x + x^2$. **C.** $2x^2\ln x + 3x^2 + C$. **D.** $2x^2\ln x + x^2 + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 1+\ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = 2x^2. \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2(1+\ln x) - \int 2x\,\mathrm{d}x = 2x^2(1+\ln x) - x^2 + C = 2x^2\ln x + x^2 + C.$

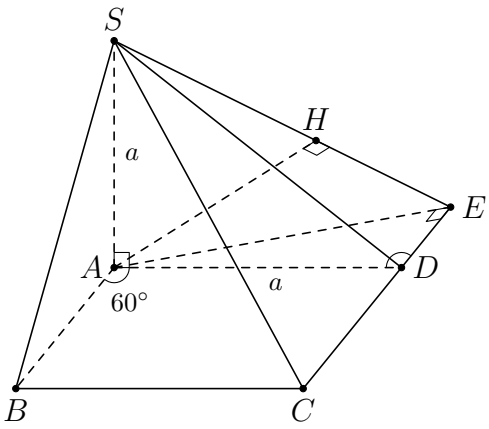
Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.
Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp CD$ tại E.
Trong (SAE), kẻ $AH \perp SE$ tại H (1).
Ta có $\begin{cases} CD \perp AE \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.
Xét tam giác AED vuông tại E
$\Rightarrow AE = AD \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Xét $\triangle SAE$ vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{5}$.
B. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-5}$.
D. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \\ z = 2-t. \end{cases}$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \\ z = 2-t \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow$

$t + (-1+2t) + (2-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1;1;1)$.
Ta có đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1;1;1)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khi đó (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}\right] = (3;-2;-1)$.
Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Khi đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).
Suy ra véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (1;4;-5)$.
Vậy hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)\,x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $(-\infty;0]$. **B.** $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$$\Leftrightarrow -3x^2-12x+4m-9\le 0\Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9,\ \forall x\in(-\infty;-1).$$

Đặt $g(x)=3x^2+12x+9\Rightarrow g'(x)=6x+12$. Giải $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-\infty;-1)$.

x	$-\infty$		-2		-1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $4m\le g(x),\ \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow 4m\le -3\Leftrightarrow m\le -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Xét số phức z thỏa mãn $(z+2i)\,(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;-1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, ta có

$$(z+2i)(\overline{z}+2)=[a+(b+2)i][(a+2)-bi]=[a(a+2)+b(b+2)]+[(a+2)(b+2)-ab]i.$$

$(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a(a+2)+b(b+2)=0\Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có phương trình $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ có tâm $I(-1;-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}&=\int\limits_0^1\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\ln|x+2|\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$. Suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(1)-\mathrm{e}$. **B.** $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $m>f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải.

$f(x)<\mathrm{e}^x+m\Leftrightarrow f(x)-\mathrm{e}^x<m$.

Xét $h(x)=f(x)-\mathrm{e}^x,\forall x\in(-1;1)$.

$h'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<0,\forall x\in(-1;1)$ (Vì $f'(x)<0,\forall x\in(-1;1)$ và $\mathrm{e}^x>0,\forall x\in(-1;1)$).

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)\Rightarrow h(-1)>h(x)>h(1),\forall x\in(-1;1)$.

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\geq h(-1)\Leftrightarrow m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là $6!$.

Xếp học sinh nam thứ nhất có 6 cách, học sinh nam thứ nhì có 4 cách, học sinh nam thứ ba có 2 cách.

Xếp 3 học sinh nữ vào 3 ghế còn lại có $3!$ cách.

Vậy xác suất là $\dfrac{6\cdot4\cdot2\cdot3!}{6!}=\dfrac{288}{720}=\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 135. **B.** 105. **C.** 108. **D.** 145.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2(x_I-2)+3(x_I+3)=0\\2(y_I+2)+3(y_I-3)=0\\2(z_I-4)+3(z_I+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x_1+5=0\\5y_1-5=0\\5z_1-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\y_1=1\\z_1=1\end{cases}\Rightarrow I(-1;1;1).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2+3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 \\ &= 5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB})+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2 = 5MI^2+2IA^2+3IB^2. \end{aligned}$$

Vì A, B, I cố định nên $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{IM}=k\vec{n}_{(P)} \Rightarrow \begin{cases} x_M=2k-1 \\ y_M=-k+1 \\ z_M=2k+1. \end{cases}$$

Mà $M\in(P)\Rightarrow 2(2k-1)-(-k+1)+2(2k+1)-8=0\Leftrightarrow 9k-9=0\Leftrightarrow k=1\Rightarrow M(1;0;3)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2=135$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\overline{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 4. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$$|z|^2=2|z+\overline{z}|+4\Leftrightarrow x^2+y^2=4|x|+4\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4=0,\ x\geq 0 \quad (1) \\ x^2+y^2+4x-4=0,\ x<0 \quad (2). \end{cases}$$

Theo đề ta có

$$\begin{aligned} |z-1-i|=|z-3+3i| &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x=8y+16 \\ &\Leftrightarrow x=2y+4 \quad (3). \end{aligned}$$

+ Thay (3) vào (1) ta được

$$(2y+4)^2+y^2-4(2y+4)-4=0\Leftrightarrow 5y^2+8y-4=0\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{24}{5}\ \text{(nhận)} \\ y=-2\Rightarrow x=0\ \text{(nhận)}. \end{cases}$$

+ Thay (3) vào (2) ta được

$$(2y+4)^2+y^2+4(2y+4)-4=0\Leftrightarrow 5y^2+24y+28=0\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\Rightarrow x=0\ \text{(loại)} \\ y=-\dfrac{14}{5}\Rightarrow x=-\dfrac{8}{5}\ \text{(nhận)}. \end{cases}$$

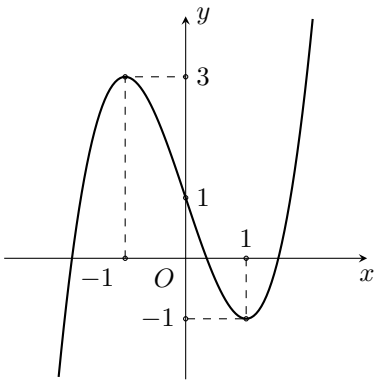
Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35.

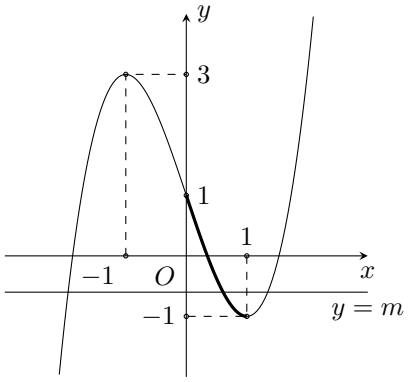
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

A. $[-1;3)$. **B**. $(-1;3)$. **C**. $(-1;3)$. **D**. $[-1;1)$.



Lời giải.

Đặt $t=\sin x$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(0;1]$.
Do đó phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.
Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[-1;1)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 2,22 triệu đồng. **B**. 3,03 triệu đồng. **C**. 2,25 triệu đồng. **D**. 2,20 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.
Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$.
Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r)-m$.
Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r)-m](1+r)=M(1+r)^2-m(1+r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$\left[M(1+r)^2-m(1+r)-m\right](1+r)=M(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n\geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-m(1+r)^{n-2}-\ldots-m(1+r)-m=M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n - \frac{m\left[(1+r)^{n-1}-1\right]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = 1+9t \\ z = 3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2-5t \\ y = 1+3t \\ z = 3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1+3t \\ z = 3-3t \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} < R$, suy ra điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(J,\Delta)$ lớn nhất (với J là tâm đường tròn giao tuyến của (P) và (S)), mà $\mathrm{d}(J,\Delta) \le EJ$.

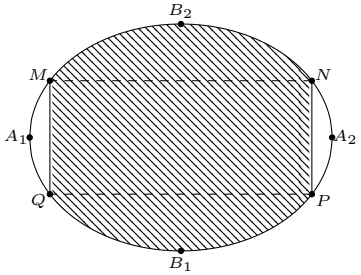
Do đó AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}\right] = (5;-5;0) = 5\,(1;-1;0)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$m, $B_1B_2 = 6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m?

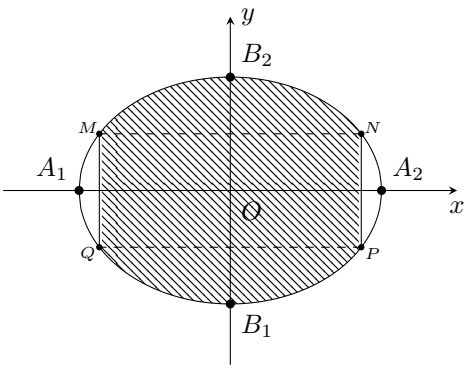


A. 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng. **C.** 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành trùng với trục lớn, trục tung trùng với trục bé của biển quảng cáo.

Khi đó, đường viền của biển quảng cáo có phương trình của dạng elip sau $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (E)\colon \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có: $MQ=3 \Rightarrow \begin{cases} M=d\cap(E) \\ N=d\cap(E) \end{cases}$ với $d\colon y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

Do Elip nhận trục Ox và Oy làm trục đối xứng nên diện tích phần tô màu gấp 4 diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ và các đường thẳng $x=2\sqrt{3}$, trục tung, trục hoành, chính là

$S=4\displaystyle\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $x=4\sin t$, khi đó $\mathrm{d}x=4\cos t\,\mathrm{d}t$. Và với $x=0\Rightarrow t=0$; với $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$S=3\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cdot\cos t\right)\mathrm{d}t=48\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=24\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(24t+12\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$

$8\pi+6\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

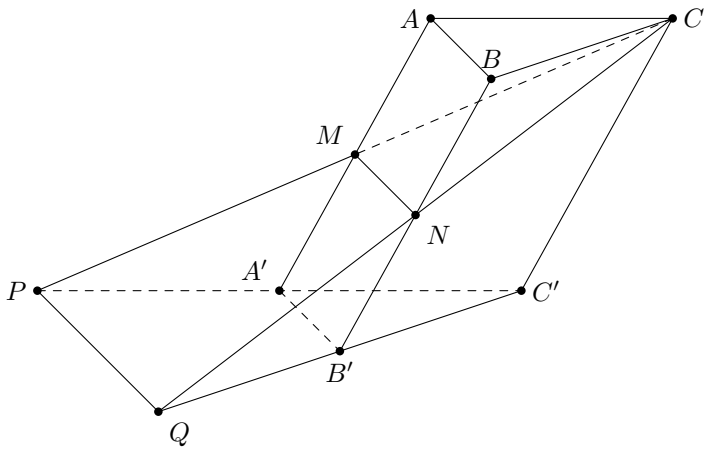
Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là $T=100.000\times\left(4\pi-6\sqrt{3}\right)+200.000\times\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)\approx 7.322.000$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{C.ABNM}=\dfrac{1}{2}V_{C.A'B'BA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{CMNA'B'C'}=\dfrac{2}{3}$.

Do M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên A', B' lần lượt là trung điểm của các đoạn $C'P$, $C'Q$. Do vậy, tam giác $C'QP$ đồng dạng với tam giác $C'B'A'$ với tỉ số 2 nên $S_{\triangle C'QP}=4\cdot S_{\triangle A'B'C'}$.

Suy ra

$$V_{C.CQP}=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}\left(C,(A'B'C)\right)\cdot S_{\triangle C'QP}=4\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(C,(A'B'C)\right)\cdot S_{\triangle A'B'C}=4\cdot V_{C.A'B'C}=\frac{4}{3}.$$

Khi đó

$$V_{A'MPB'NQ}=V_{C.C'PQ}-V_{CMNA'B'C}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 \cdot [f'(x+2) + (1-x^2)]$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

$$f'(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \leq x+2 \leq 3 \\ x+2 \geq 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2. \end{bmatrix}$$

Xét trên khoảng $(-1;1)$, ta có

$$\begin{cases} f'(x+2) \geq 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x+2) + (1-x^2) > 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-1;1).$$

Do đó, hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4-1) + m(x^2-1) - 6(x-1) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} & m^2\left(x^4-1\right) + m\left(x^2-1\right) - 6(x-1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right) + m(x+1) - 6\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = (x-1)\left[m^2\left(x^3+x^2+x+1\right) + m(x+1) - 6\right]$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ m^2\left(x^3+x^2+x+1\right) + m(x+1) - 6 = 0 \quad (1). \end{bmatrix}$

Nếu $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x = 1$ là nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$.

Do vậy $f(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x = 1$.

Suy ra mệnh đề $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai.

Do đó điều kiện cần để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó ta có $4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2}. \end{bmatrix}$

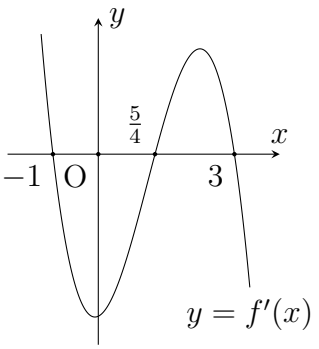
- ☑ Với $m = 1$, ta có $f(x) = (x-1)^2(x^2+2x+4) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ☑ Với $m = -\dfrac{3}{2}$, ta có $f(x) = \dfrac{3}{4}(x-1)^2(3x^2+6x+7) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $S=\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}\Rightarrow$ Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ $(m,n,p,q,r\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.



Lời giải.

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1).

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\dfrac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m\neq 0$ hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n=-\dfrac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x)=r &\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0\\ &\Leftrightarrow x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=3\\ x=-\dfrac{5}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\dfrac{5}{3};0;3\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

A. $2\log a+\log b$. **B.** $\log a+2\log b$. **C.** $2(\log a+\log b)$. **D.** $\log a+\dfrac{1}{2}\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log(ab^2)=\log a+\log b^2=\log a+2\log b$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=5$, khi đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=2-2\cdot 5=-8$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Thể tích khối cầu bán kính a bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu bán kính a là $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\{0; 1\}$. **C.** $\{-1; 0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - x + 2 > 0$, đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $z = 0$. **B.** $x + y + z = 0$. **C.** $y = 0$. **D.** $x = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và nhận $\vec{j} = (0; 1; 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến nên phương trình của mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

A. $\mathrm{e}^x + x^2 + C$. **B.** $\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **C.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $\mathrm{e}^x + 1 + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2; -1; 2)$. **B.** $M(-1; -2; -3)$. **C.** $P(1; 2; 3)$. **D.** $N(-2; 1; -2)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm đã cho vào phương trình của đường thẳng d, ta có

☑ Với $M(-1; -2; -3)$ thì $\dfrac{-1-1}{2} \neq \dfrac{-2-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm M.

☑ Với $N(-2; 1; -2)$ thì $\dfrac{-2-1}{2} \neq \dfrac{1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm N.

☑ Với $P(1; 2; 3)$ thì $\dfrac{1-1}{2} = \dfrac{2-2}{-1} = \dfrac{3-3}{2} = 0$, suy ra d đi qua điểm P.

☑ Với $Q(2; -1; 2)$ thì $\dfrac{2-1}{2} \neq \dfrac{-1-2}{-1}$, suy ra d không đi qua điểm Q.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **B.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. **C.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **D.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{k!(n-k)!}{n!}$.

Lời giải.

Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k và $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chọn đáp án (A) □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. A	4. D	5. B	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. B	12. B	13. A	14. B	15. C	16. D	17. A	18. C	19. A	20. D
21. A	22. D	23. A	24. C	25. D	26. A	27. C	28. C	29. D	30. B
31. C	32. A	33. A	34. B	35. D	36. A	37. C	38. A	39. D	40. C
41. C	42. B	43. B	44. C	45. A	46. B	47. C	48. B	49. C	50. A

10 Đề thi THQG 2018-Mã đề 101

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

A. 2^{34}. **B.** A_{34}^{2}. **C.** 34^2. **D.** C_{34}^{2}.

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 34 phần tử nên số cách chọn là C_{34}^{2}.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(3;2;1)$. **B.** $\vec{n}_3=(-1;2;3)$. **C.** $\vec{n}_4=(1;2;-3)$. **D.** $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

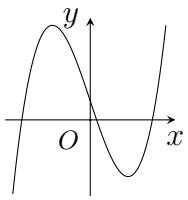
Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3.

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_0^2 |\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\dfrac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln(2a)$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $\ln(5a) - \ln(3a) = \ln\dfrac{5a}{3a} = \ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$. **B.** $3x^2 + 1 + C$. **C.** $x^3 + x + C$. **D.** $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3 = (2;1;3)$. **B.** $\vec{u}_4 = (-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}_2 = (2;1;1)$. **D.** $\vec{u}_1 = (-1;2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (-1;2;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

A. 3. **B.** -7. **C.** -3. **D.** 7.

Lời giải.

Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng 7.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

A. $\dfrac{4}{3}\pi R^2$. **B.** $2\pi R^2$. **C.** $4\pi R^2$. **D.** πR^2.

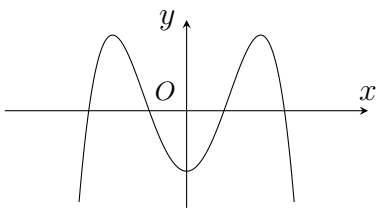
Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11.

Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

Lời giải.

Vì đồ thị có dạng hình chữ M nên không thể là đồ thị hàm số bậc ba.
Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\infty$ nên chọn $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(1;3;2)$. **B.** $(2;6;4)$. **C.** $(2;-1;5)$. **D.** $(4;-2;10)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1;5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+3} = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \dfrac{5}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4a^3$. **B.** $\dfrac{2}{3}a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a.

Lời giải.

Diện tích đáy của hình chóp là $S_{\text{đáy}} = a^2$.
Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{đáy}} \times h = \dfrac{1}{3}a^2 \times 2a = \dfrac{2}{3}a^3$.
Chọn đáp án (B) □

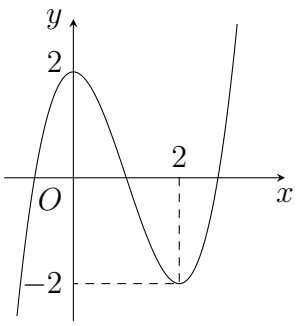
Câu 16. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 9 năm. **C.** 10 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{S_n}{A}\right) \Rightarrow n = \log_{(1+7{,}5\%)}(2) \approx 9{,}6$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17.
Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{3}$.
Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y = -\dfrac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$ là

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

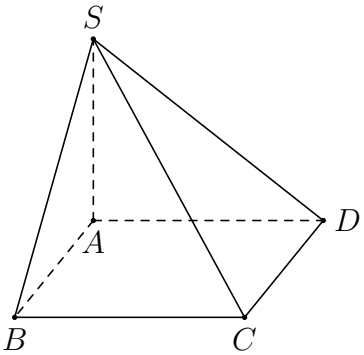
Tập xác định $\mathscr{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.
Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.
Ngoài ra $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = \dfrac{1}{6}$ nên $x = 0$ không phải là một tiệm cận đứng.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.
Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.
Tam giác SAB vuông tại A, $\cos \widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60°$.



Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

A. $2x - y + 3z - 9 = 0$. **B**. $2x - y + 3z + 11 = 0$.
C. $2x - y - 3z + 11 = 0$. **D**. $2x - y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có dạng $2x-y+3z+D=0\,(D\neq 2)$.
$A(2;-1;2)\in(Q)\Rightarrow D=-11$.
Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x-y+3z-11=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 21. Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\dfrac{4}{455}$. **B.** $\dfrac{24}{455}$. **C.** $\dfrac{4}{165}$. **D.** $\dfrac{33}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{15}^{3}=455$ (phần tử).
Gọi A là biến cố: "lấy được 3 quả cầu màu xanh".
Khi đó, $n(A)=\mathrm{C}_{4}^{3}=4$ (phần tử).
Xác suất $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{455}$.
Chọn đáp án A □

Câu 22. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2)$. **B.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$. **C.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$. **D.** $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2)$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2)$.
Chọn đáp án A □

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 201. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 54.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;3]$.
Ta có $y'=4x^3-8x$.
$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-2;3]\\ x=\pm\sqrt{2}\in[-2;3].\end{array}\right.$
Ta có $f(-2)=9$, $f(3)=54$, $f(0)=9$, $f\left(-\sqrt{2}\right)=5$, $f\left(\sqrt{2}\right)=5$.
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$ bằng $f(3)=54$.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1;\ y=-3$. **B.** $x=-1;\ y=-1$. **C.** $x=1;\ y=-1$. **D.** $x=1;\ y=-3$.

Lời giải.

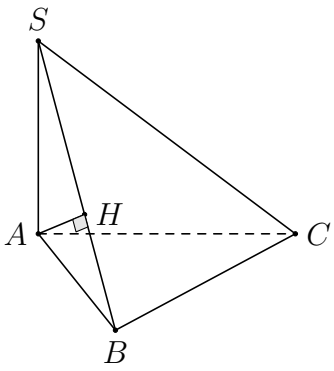
Ta có $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i\Leftrightarrow x+1-(3y+9)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\ 3y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-3.\end{cases}$
Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$.
Do đó khoảng cách cần tìm là AH.
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{5}{4a^2}$ suy ra $AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho $\displaystyle\int_{16}^{55} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a - b = -c$. **B.** $a + b = c$. **C.** $a + b = 3c$. **D.** $a - b = -3c$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x + 9 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.
Đổi cận: $x = 16 \Rightarrow t = 5$; $x = 55 \Rightarrow t = 8$.

$$\text{Ta có } \int_{16}^{55} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}} = \int_{5}^{8} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-9)t} = 2\int_{5}^{8} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-9} = \frac{1}{3}\left(\int_{5}^{8} \frac{\mathrm{d}t}{t-3} - \int_{5}^{8} \frac{\mathrm{d}t}{t+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x-3| - \ln|x+3|\right)\Big|_5^8 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\ln 11.$$

Vậy $a = \dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = -\dfrac{1}{3}$. Mệnh đề $a - b = -c$ đúng.
Chọn đáp án A □

Câu 27. Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 9,7a (đồng). **B.** 97,03a (đồng). **C.** 90,7a (đồng). **D.** 9,07a (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:
$V = B \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0,2) = \dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6}$ m^3.
Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: $V_t = V - V_r = \dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6}\pi$ m^3.
Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:
$0,2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 8a + \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 9,07 \cdot 10^{-6}a$ (triệu đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 28. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

A. -13368. **B.** 13368. **C.** -13848. **D.** 13848.

Lời giải.

Ta có $x(2x-1)^6+(3x-1)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k\cdot(2x)^k\cdot(-1)^{6-k}+\sum\limits_{l=0}^{8}\mathrm{C}_8^l\cdot(3x)^l\cdot(-1)^{8-l}$

$= x\sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k\cdot(2x)^k\cdot(-1)^{6-k}+\sum\limits_{l=0}^{8}\mathrm{C}_8^l\cdot(3x)^l\cdot(-1)^{8-l}$

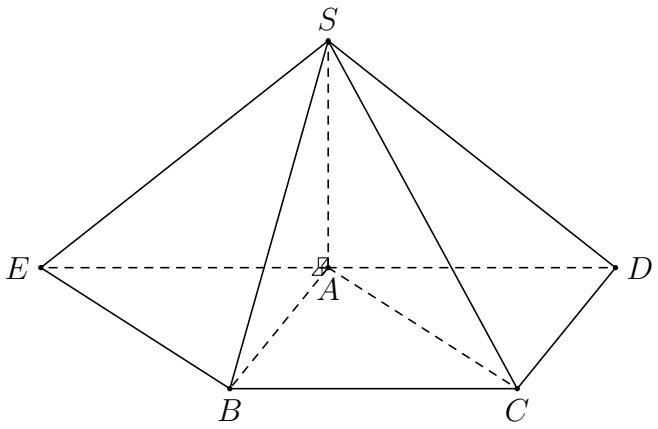
Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $\mathrm{C}_6^4\cdot 2^4\cdot(-1)^{6-4}+\mathrm{C}_8^5\cdot 3^5\cdot(-1)^{6-5}=-13368$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ACBE$ ta có $AC \parallel (SBE)$ nên $\mathrm{d}(AC,SB)=\mathrm{d}(A,(SBE))=h$.

Do AS, AB, AE đôi một vuông góc nhau nên $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{9}{4a^2}$.

Như vậy $\mathrm{d}(A,(SBE))=h=\dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $(\overline{z}+i)(z+2)=(x-yi+i)(x+yi+2)=(x^2+2x+y^2-y)+(x-2y+2)i$

Vì $(\overline{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo nên ta có: $x^2+2x+y^2-y=0\Leftrightarrow(x+1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

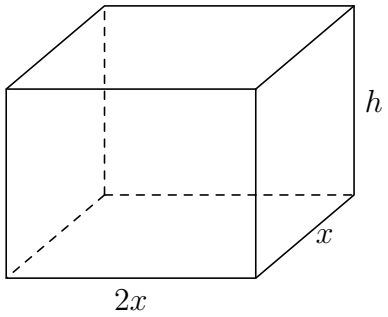
Chọn đáp án C □

Câu 31. Ông A dự định sử dụng hết 6,5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 2,26 m^3. **B**. 1,61 m^3. **C**. 1,33 m^3. **D**. 1,50 m^3.

Lời giải.

Đặt chiều rồng là x (m); chiều cao là h (m) (với $x, h > 0$).



Ta có $2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \dfrac{6,5 - 2x^2}{6x}$.

Do $h > 0$, $x > 0$ nên $6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Lại có $V = 2x^2h = \dfrac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x)$, với $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{13}{6} - 2x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

x	0		$\dfrac{\sqrt{39}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{13\sqrt{39}}{54}$	↘	

Vậy $V \leqslant f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right) = \dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$ m^3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s^2 (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 22 m/s. **B**. 15 m/s. **C**. 10 m/s. **D**. 7 m/s.

Lời giải.

+ Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

+ Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng

$v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

+ Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{10} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \dfrac{3}{2} \cdot 10 = 15$ m/s.

Chọn đáp án B ☐

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B=\Delta\cap Ox\Rightarrow B(b;0;0)$ và $\overrightarrow{BA}=(1-b;2;3)$.

Do $\Delta\perp d$, Δ qua A nên $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u_d}=0\Leftrightarrow 2(1-b)+2-6=0\Leftrightarrow b=-1$.

Từ đó Δ qua $B(-1;0;0)$, có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA}=(2;2;3)$ nên $\Delta\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t. \end{cases}$

Chọn đáp án A ☐

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m\cdot 4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $t=4^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2-4mt+5m^2-45=0$. $(*)$

Với mỗi nghiệm $t>0$ của phương trình $(*)$ sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -m^2+45>0 \\ 4m>0 \\ 5m^2-45>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -3\sqrt{5}<m<3\sqrt{5} \\ m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow 3<m<3\sqrt{5}.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{4;5;6\}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-10)\Leftrightarrow\begin{cases} 5m-2>0 \\ -5m\geqslant -10 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>\dfrac{2}{5} \\ m\leqslant 2 \end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}<m\leqslant 2.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2\}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B**. 5. **C**. 4. **D**. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3$.

Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$. Có 2 trường hợp cần xét liên quan (m^2-4):

☑ Trường hợp 1: $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

+ Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

+ Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

☑ Trường hợp 2: $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.

Ta có x^3 đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0$, do đó

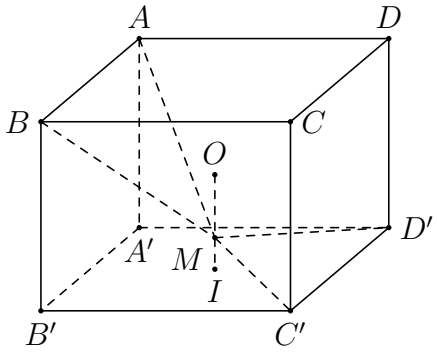
$y' = x^3 \cdot g(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0$.

Kết hợp các trường hợp giải được ta nhận $m \in \{2; 1; 0; -1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37.

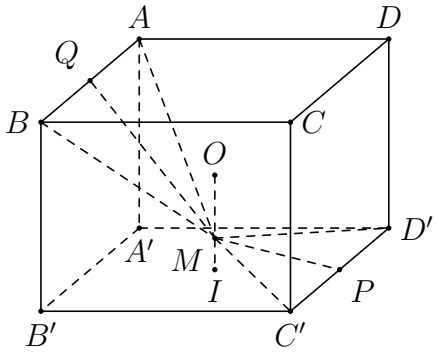
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **B**. $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C**. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D**. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB. Khi đó ta có

$MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$, $PQ = 6\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí cô-sin ta được

$$\cos\widehat{PMQ} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos\alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 38. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có

$|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 5 + i) = 4|z| + (|z| - 2)i$.

Lấy môđun 2 vế ta được

$|z|\sqrt{(|z| - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z| - 2)^2}$.

Đặt $t = |z|, t \geqslant 0$ ta được
$t\sqrt{(t-5)^2+1} = \sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4) = 0.$
Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t \geqslant 0$ vậy có 3 số phức z thoả mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

A. $6x+8y+11=0$. **B.** $3x+4y+2=0$. **C.** $3x+4y-2=0$. **D.** $6x+8y-11=0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính $R=3$.
* Ta tính được $AI = 5$, $AM = \sqrt{AI^2-R^2} = 4$.
* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2;3;-1)$, bán kính $AM = 4$ là
$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 16$.
* M luôn thuộc mặt phẳng $(P) = (S) \cap (S')$ có phương trình: $3x+4y-2=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1-x_2)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

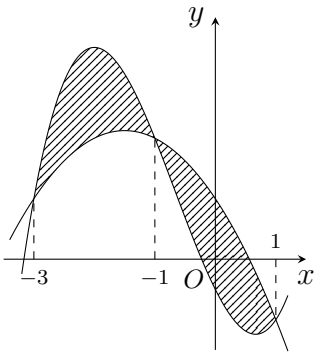
* Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.
* Ta có $y' = x^3 - 7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x = \sqrt{7}. \end{array}\right.$
* Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0;y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc:
$k = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0;y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).
* Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3 (\text{loại}). \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 41.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;\,-1;\,1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Do $(C)\colon y=f(x)$ và $(C')\colon y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3;-1$ và 1 nên

$$f(x)-g(x)=A(x+3)(x+1)(x-1).$$

Từ giả thiết ta có $f(0)-g(0)=-\dfrac{3}{2}$ nên $-3A=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow A=\dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-3}^{-1}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x=2-(-2)=4.$$

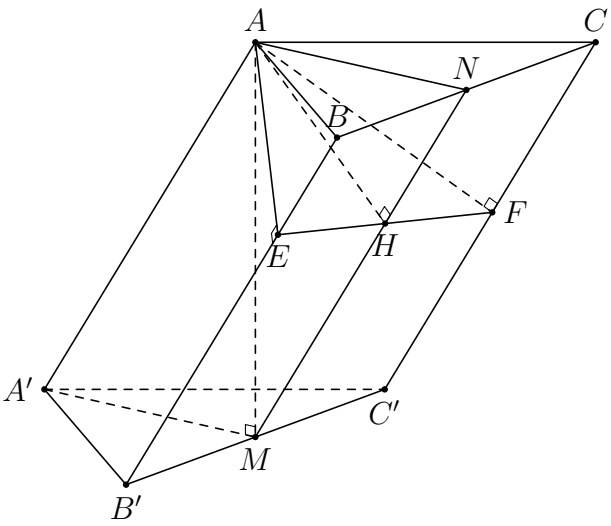
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Dựng $\triangle AEF$ như hình vẽ sao cho $AA'\perp(AEF)$.
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'}$ bằng với thể tích của lăng trụ (T) có mặt đáy AEF và cạnh bên AA'
Tức là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\triangle AEF}\cdot AA'$.
Từ cách dựng ta suy ra $AE=1, AF=\sqrt{3}$ và $EF=2$.
Suy ra $\triangle AEF$ vuông tại A.
Từ đó $S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}AE\cdot AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Gọi N là trung điểm BC và $H=EF\cap MN$ thì $MN\parallel AA'$; H là trung điểm EF và $AH\perp MN$
Từ đó $AH=\dfrac{1}{2}EF=1$.



$\triangle AMN$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AN^2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow AM=2$.

Cuối cùng $AA'=MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\triangle AEF}\cdot AA'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{1728}{4913}$. **B.** $\dfrac{1079}{4913}$. **C.** $\dfrac{23}{68}$. **D.** $\dfrac{1637}{4913}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $17^3=4913$.

Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 17 ta có các nhóm số sau:

$*$ Số chia hết cho 3: có 5 số thuộc tập $\{3;6;9;12;15\}$.

$*$ Số chia cho 3 dư 1: có 6 số thuộc tập $\{1;4;7;10;13;16\}$.

$*$ Số chia cho 3 dư 2: có 6 số thuộc tập $\{2;5;8;11;14;17\}$.

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;17]$ thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì các khả năng xảy ra như sau:

- TH1: Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3=125$ cách.
- TH2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3=216$ cách.
- TH3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3=216$ cách.
- TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, chia cho 3 dư 2 có $5\cdot6\cdot6\cdot3!=1080$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{125+216+216+1080}{4913}=\dfrac{1637}{4913}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Do $a>0, b>0$ nên ta có $\begin{cases}(9a^2+b^2)+1\geqslant 6ab+1 \text{ (bất đẳng thức AM-GM)}\\ 3a+2b+1>1.\end{cases}$

$$\Rightarrow \log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)\geqslant\log_{3a+2b+1}(6ab+1)$$

Từ đó $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)\geqslant\log_{3a+2b+1}(6ab+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)$

$$\geqslant 2 \quad \text{(bất đẳng thức AM-GM).}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a=b>0\\ 3a+2b+1=6ab+1\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ và $b=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(C)\colon y=\dfrac{x-1}{x+2}=1-\dfrac{3}{x+2}$ có $I(-2;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Xét $\begin{cases} A\left(a-2;1-\dfrac{3}{a}\right)\in(C) \\ B\left(b-2;1-\dfrac{3}{b}\right)\in(C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}=\left(a;-\dfrac{3}{a}\right) \\ \overrightarrow{IB}=\left(b;-\dfrac{3}{b}\right) \end{cases}$ và $\begin{cases} IA=\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}} \\ IB=\sqrt{b^2+\dfrac{9}{b^2}}. \end{cases}$

Tam giác ABI đều khi và chỉ khi $\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ \cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=\cos 60^\circ \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2} \\ \dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}}{IA\cdot IB}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\dfrac{9}{a^2}=b^2+\dfrac{9}{b^2} & (1) \\ \dfrac{ab+\dfrac{9}{ab}}{a^2+\dfrac{9}{a^2}}=\dfrac{1}{2}. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra $ab>0$ và $a^2\neq b^2$ (do $A\not\equiv B$).

Từ (1) ta suy ra $(a^2-b^2)\left(1-\dfrac{9}{a^2b^2}\right)=0\Rightarrow ab=3$.

Với $ab=3$, thay vào (2) ta tìm được $a^2+\dfrac{9}{a^2}=12$. Vậy $AB=IA=\sqrt{a^2+\dfrac{9}{a^2}}=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải.

Điều kiện: $x>m$.

Ta có $5^x+m=\log_5(x-m)\Leftrightarrow 5^x+x=x-m+\log_5(x-m)$. (1)

Xét hàm số $f(t)=5^t+t$, $f'(t)=5^t\ln 5+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $x=\log_5(x-m)\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-5^x$, $g'(x)=1-5^x\cdot\ln 5$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_5\dfrac{1}{\ln 5}=-\log_5\ln 5=x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_5\ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(x_0)$	↘	$-\infty$

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m\leqslant g(x_0)\approx -0,92$.

Các giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ là $\{-19;-18;\ldots;-1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

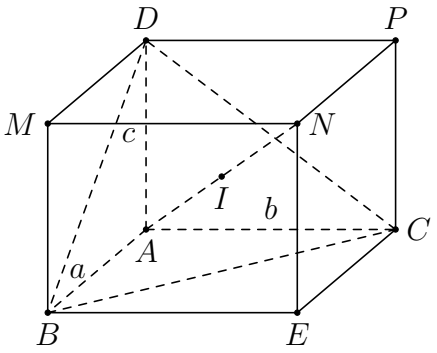
A. 72. **B**. 216. **C**. 108. **D**. 36.

Lời giải.

Đặt $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S).

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2+b^2+c^2=4R^2$.

Xét $V=V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2=\dfrac{1}{36}a^2b^2c^2$.



Mà $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geqslant a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4R^2}{3}\right)^3 \geqslant 36\cdot V^2 \Leftrightarrow V \leqslant R^3\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$

Với $R=IA=3\sqrt{3}$.

Vậy $V_{\max}=36$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ và $f'(x)=2x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{35}{36}$. **B**. $-\dfrac{2}{3}$. **C**. $-\dfrac{19}{36}$. **D**. $-\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x[f(x)]^2 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=2x \Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}=-x^2+C$.

Từ $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ suy ra $C=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f(1)=\dfrac{1}{-1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+3t\\ y=1+4t\\ z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+7t\\ y=1+t\\ z=1+5t\end{cases}$. **B**. $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-10+11t\\ z=-6-5t\end{cases}$. **C**. $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-10+11t\\ z=6-5t\end{cases}$. **D**. $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+4t\\ z=1-5t\end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases}x=1+t'\\ y=1-2t'\\ z=1+2t'.\end{cases}$

Chọn điểm $B(0;3;-1)\in\Delta$ ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-2)$ và $AB=3$.

Chọn điểm $C(4;5;1)\in d$ ta có $\overrightarrow{AC}=(3;4;0)$ và $AC=5$.

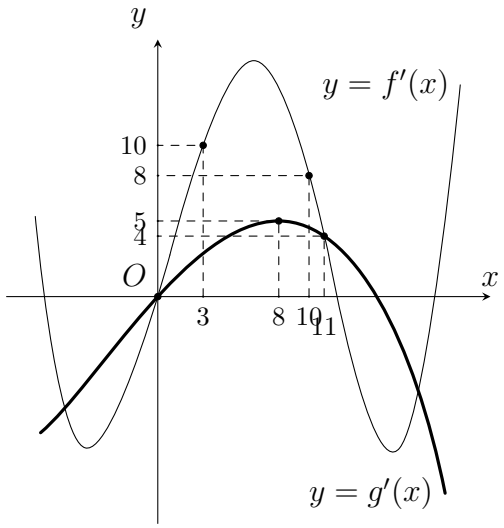
Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5>0\Rightarrow\widehat{BAC}<90^\circ$. Phân giác của góc nhọn $\widehat{BAC}$ có véc-tơ chỉ phương

$$\vec{u}=AC\cdot\overrightarrow{AB}+AB\cdot\overrightarrow{AC}=(4;22;-10).$$

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có một véc-tơ chỉ phương cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC}=(4;22;-10)$. Xét phương án $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-10+11t\\z=6-5t.\end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{v}=(2;11;-5)$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC}=(4;22;-10)$ và đi qua đi qua điểm $A(1;1;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.



Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\dfrac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\dfrac{25}{4}\right)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a\in(8;10)$. Khi đó ta có $\begin{cases}f(x+4)>10 & \text{kh}\\ g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)\leqslant 5 & \text{kh}\end{cases}$

$$\begin{cases}f(x+4)>10 & \text{khi } -1<x<4\\ g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)\leqslant 5 & \text{khi } \dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{25}{4}.\end{cases}$$

Do đó $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0$ khi $\dfrac{3}{4}\leqslant x<4$.

Kiểu đánh giá khác:

Ta có $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x\in\left(\dfrac{9}{4};3\right)$, ta có $\dfrac{25}{4}<x+4<7$, $f(x+4)>f(3)=10$;

$3<2x-\dfrac{3}{2}<\dfrac{9}{2}$, do đó $g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)<f(8)=5$.

Suy ra $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0$, $\forall x\in\left(\dfrac{9}{4};3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{9}{4};3\right)$.

Chọn đáp án B □

——HẾT——

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. A	4. A	5. B	6. C	7. D	8. B	9. D	10. C
11. D	12. C	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. D	19. A	20. D
21. A	22. A	23. D	24. A	25. A	26. A	27. D	28. A	29. B	30. C
31. D	32. B	33. A	34. B	35. A	36. C	37. B	38. B	39. C	40. B
41. C	42. A	43. D	44. C	45. B	46. B	47. D	48. B	49. C	50. B

11 Đề thi THQG 2018-Mã đề 102

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. $\lim \dfrac{1}{5n+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \displaystyle\int_0^2 2^x \mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi \displaystyle\int_0^2 2^{2x} \mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_0^2 2^{2x} \mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi \displaystyle\int_0^2 2^x \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là $S = \displaystyle\int_0^2 2^x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1) = 3$ là

A. $\{-3;3\}$. **B.** $\{-3\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-3;3\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$. **B.** $4x^3 + 1 + C$. **C.** $x^5 + x^2 + C$. **D.** $\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

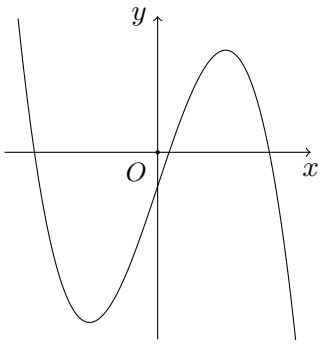
Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(x^4 + x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 5.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án D ☐

Câu 6. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A. $3+4i$. **B.** $4-3i$. **C.** $3-4i$. **D.** $4+3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là $z=3+4i$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 7. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{4}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{16}{3}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $16a^3$.

Lời giải.

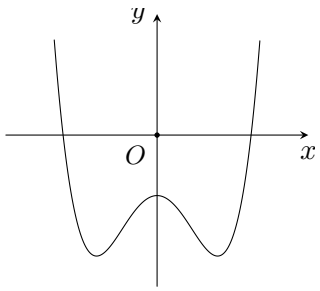
Diện tích đáy là $S=a^2$.

Thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}S\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot a^2\cdot 4a=\dfrac{4a^3}{3}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 8.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=-x^4+2x^2-1$.

C. $y=x^3-x^2-1$. **D.** $y=-x^3+x^2-1$.

Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị ta suy ra hàm số là hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có

- ☑ "Đuôi thăng thiên" nên $a>0$.
- ☑ Cắt trục tung tại điểm nằm phía dưới trục hoành nên $c<0$.
- ☑ Có 3 cực trị nên $a\cdot b<0\Rightarrow b<0$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 9. Thể tích khối cầu bán kính R bằng

A. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $4\pi R^3$. **C.** $2\pi R^3$. **D.** $\dfrac{3}{4}\pi R^3$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối cầu có bán kính R là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $(3;3;-1)$. **B.** $(-1;-1;-3)$. **C.** $(3;1;1)$. **D.** $(1;1;3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2-1;2-1;1-(-2))=(1;1;3)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 11. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log_3(3a)$ bằng

A. $3\log_3 a$. **B.** $3+\log_3 a$. **C.** $1+\log_3 a$. **D.** $1-\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(3a) = \log_3 3 + \log_3 a = 1 + \log_3 a$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh?

A. A_{38}^2. **B.** 2^{38}. **C.** C_{38}^2. **D.** 38^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 38, số cách chọn là C_{38}^2.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{2}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (3;-1;5)$. **B.** $\vec{u}_4 = (1;-1;2)$. **C.** $\vec{u}_2 = (-3;1;5)$. **D.** $\vec{u}_3 = (1;-1;-2)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của của đường thẳng d là $\vec{u} = (1;-1;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y+z-4=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3 = (-1;2;3)$. **B.** $\vec{n}_4 = (1;2;-3)$. **C.** $\vec{n}_2 = (3;2;1)$. **D.** $\vec{n}_1 = (1;2;3)$.

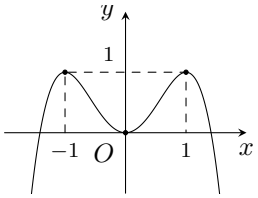
Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3;2;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 16.

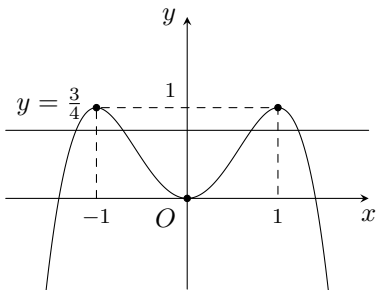
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $4f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{4}$.
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}$.
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, suy ra số nghiệm phương trình là 4.



Chọn đáp án A ☐

Câu 17. Từ một hộp chứa 7 quả cầu mà đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{44}$. **C.** $\dfrac{1}{22}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số cách lấy 3 quả cầu từ hộp là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{12}^3$.
Gọi A: "lấy được 3 viên bi xanh". Ta có $n(A)=\mathrm{C}_5^3$.
Xác suất cần tìm $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+2x^2-7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259. **B.** 68. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+4x-7$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nhận)} \\ x=-\dfrac{7}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.
Mà $y(0)=0$, $y(1)=-4$, $y(4)=68$.
Vậy $\min\limits_{[0;4]} y=-4$.

Chọn đáp án D ☐

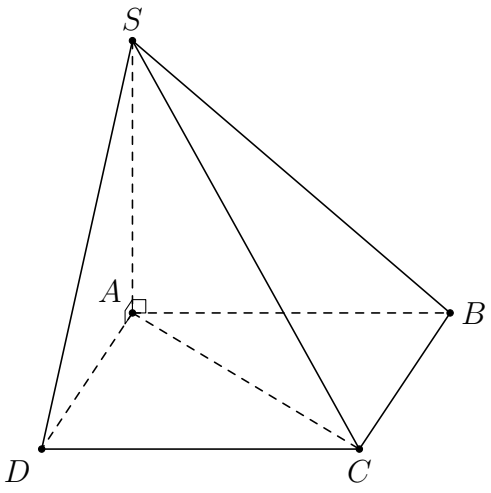
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD)=C \\ SA \perp (ABCD) \text{ tại } A \end{cases}$
$\Rightarrow (SC,(ABCD))=\widehat{(SC,AC)}=\widehat{SCA}$.
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1 \Rightarrow \widehat{SCA}=45^\circ.$$



Chọn đáp án A ☐

Câu 20. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$. **B.** $\mathrm{e}^4-\mathrm{e}$. **C.** $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^4+\mathrm{e})$. **D.** $\mathrm{e}^3-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{3}$ có phương trình là

A. $3x+2y+z-5=0$. **B.** $2x+y+3z+2=0$.

C. $x+2y+3z+1=0$. **D.** $2x+y+3z-2=0$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(2;1;3)$.
Vì mặt phẳng cần tìm vuông góc với đường thẳng Δ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\vec{u}=(2;1;3)$.
Phương trình mặt phẳng cần tìm là $2(x-1)+1(y-2)+3(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x+y+3z+2=0$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 22. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định hàm số $\mathscr{D}=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.
Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y=1$.
Suy ra đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng là $x=-1$.

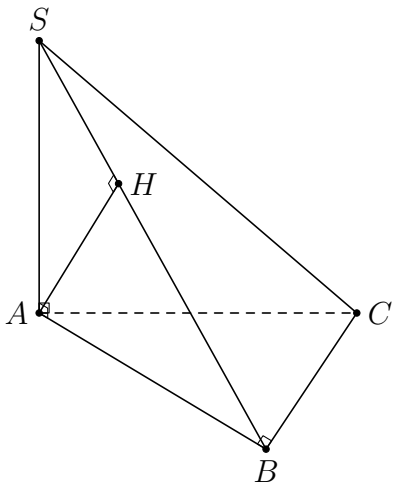
Chọn đáp án D ☐

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên SB.



Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB), AH \subset (SAB)) \end{cases}$$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 9 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải.

Giả sử người ấy gửi số tiền M_0 vào ngân hàng. Khi đó, sau n năm số tiền của người ấy được tính bằng công thức $M = M_0(1+7{,}2\%)^n = M_0 \cdot 1{,}072^n$.

Theo đề bài, ta tìm n thỏa mãn $M \geq 2M_0 \Leftrightarrow M_0 \cdot 1{,}072^n \geq 2M_0 \Leftrightarrow n \geq \log_{1{,}072} 2 \approx 9{,}969602105$.

Vậy sau ít nhất 10 năm người ấy mới thu được số tiền nhiều gấp đôi số tiền vốn ban đầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2;\ y=-2$. **B.** $x=-2;\ y=-1$. **C.** $x=2;\ y=-2$. **D.** $x=2;\ y=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i \Leftrightarrow (3x+2)+(2y+1)i=2x-3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=2x \\ 2y+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Ông A dự định sử dụng hết 6,7 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 1,57 m^3. **B.** 1,11 m^3. **C.** 1,23 m^3. **D.** 2,48 m^3.

Lời giải.

Gọi a, b, c lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể cá $(a,b,c>0)$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} a=2b \\ 2ac+2bc+ab=6{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ c=\dfrac{6{,}7-2b^2}{6b}. \end{cases}$

Thể tích bể cá là $V=abc=\dfrac{2b^2(6{,}7-2b^2)}{6b}=\dfrac{6{,}7b-2b^3}{3}=f(b)$.

Xét hàm số $f(b)=\dfrac{6{,}7b-2b^3}{3}$ với $b>0$.

Ta có $f'(b)=\dfrac{6{,}7-6b^2}{3}$, $f'(b)=0\Leftrightarrow b=\sqrt{\dfrac{67}{60}}$, $f(b)\approx 1{,}57$.

Bảng biến thiên

b	0		$\sqrt{\frac{67}{60}}$		$+\infty$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	$\nearrow$	$1{,}57$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, dung tích lớn nhất của bể cá gần bằng 1,57.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho $\displaystyle\int_5^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow \begin{cases} x=t^2-4 \\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x=5\Rightarrow t=3 \\ x=21\Rightarrow t=5. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_3^5\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{2}\int_3^5\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)\Big|_3^5 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 3-\ln 7+\ln 5). \end{aligned}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $a+b=-2c$.

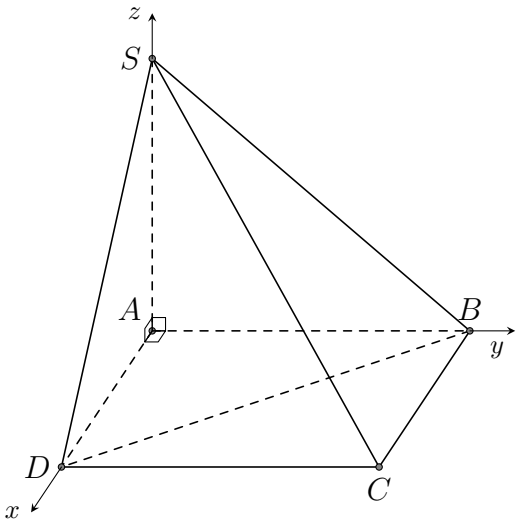
Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}a}{6}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{21}a}{21}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}a}{12}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D(2a;0;0)$, $C(2a;a;0)$ và $S(0;0;a)$.



Ta có

- ☑ $\overrightarrow{BD} = (2a;-a;0)$.
- ☑ $\overrightarrow{SC} = (2a;a;-a)$.
- ☑ $\overrightarrow{SB} = (0;a;-a)$.
- ☑ $[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}] = (a^2;2a^2;4a^2)$ $\Rightarrow \left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\right| = a^2\sqrt{21}$.
- ☑ $\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\cdot\overrightarrow{SB}\right| = 2a^3$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là

$$\mathrm{d}(SC,BD) = \frac{\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\cdot\overrightarrow{SB}\right|}{\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}]\right|} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 3+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+3t \\ z = 3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ có VTCP là $\vec{u} = (1;-2;2)$.

Gọi $M(0;m;0) \in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;m-1;-3)$.

Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2-2(m-1)-6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Do đó, Δ có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (-2;-4;-3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi chỉ khi $\begin{cases} y' < 0,\ \forall x \in \mathscr{D} \\ -5m \notin (10;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \ge -2. \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1mm. Giả định 1m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1m^3 than chì có giá $6a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $84{,}5a$ (đồng). **B**. $78{,}2a$ (đồng). **C**. $8{,}45a$ (đồng). **D**. $7{,}82a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì là

$$V_r = \pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \text{ m}^3.$$

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều là

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}(3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}2 = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ là

$$V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \text{ m}^3.$$

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì là

$$0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi \cdot 6a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\pi\right) a \approx 7{,}82 \cdot 10^{-6}a \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 20 (m/s). **B**. 16 (m/s). **C**. 13 (m/s). **D**. 15 (m/s).

Lời giải.

Từ đề bài, ta suy ra từ lúc chất điểm A chuyển động đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a\,\mathrm{d}t = a \cdot t + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau, nghĩa là

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{12} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 96 = 72a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Do đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(12) = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$ (m/s).

Chọn đáp án B □

Câu 33. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $z=x+yi \Rightarrow \overline{z}=x-yi$ trong đó $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $(\overline{z}+3i)(z-3)=x^2+y^2-3x-3y+(3x+3y-9)i$.

Số phức $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo khi chỉ khi $x^2+y^2-3x-3y=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ bằng

A. -3007. **B.** -577. **C.** 3007. **D.** 577.

Lời giải.

Ta có $(3x-1)^6=\sum\limits_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k 3^k x^k(-1)^{6-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_6^4 3^4(-1)^{6-4}=1215$.

Ta lại có $(2x-1)^8=\sum\limits_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k 2^k x^k(-1)^{8-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_8^5 2^5(-1)^{8-5}=-1792$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ là $1215-1792=-577$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m\cdot 5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 7. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Đặt $t=5^x$, điều kiện $t>0$. Phương trình trở thành $t^2-5mt+7m^2-7=0$ $(*)$.

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

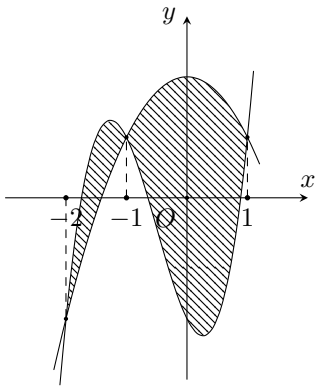
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=-3m^2+28>0\\ 5m>0\\ 7m^2-7>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{\dfrac{28}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}\\ m>0\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 1<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}.$$

Suy ra $S=\{2;3\}$. Vậy có 2 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 36.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;\,-1;\,1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)-g(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4$ (1).
Mặt khác phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ nên

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow(x+2)(x+1)(x-1)=0\Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0\ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(x)-g(x)=2x^3+4x^2-2x-4$.
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_{-2}^{-1}(2x^3+4x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}(2x^3+4x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2+b^2+1)+\log_{10ab+1}(10a+3b+1)=2.$$

Giá trị của $a+2b$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 6. **C.** 22. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thuyết bài toán, ta suy ra $25a^2+b^2+1>1$, $10a+3b+1>1$ và $10ab+1>1$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $25a^2+b^2+1\geq 2\sqrt{25a^2b^2}+1=10ab+1$.
Khi đó,

$$\begin{aligned}&\log_{10a+3b+1}(25a^2+b^2+1)+\log_{10ab+1}(10a+3b+1)\\ \geq\ &\log_{10a+3b+1}(10ab+1)+\log_{10ab+1}(10a+3b+1)\\ \geq\ &2\sqrt{\log_{10a+3b+1}(10ab+1)\cdot\log_{10ab+1}(10a+3b+1)}=2.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi

$$\begin{cases} 5a = b \\ \log_{10a+3b+1}(10ab+1) = \log_{10ab+1}(10a+3b+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 10ab+1 = 10a+3b+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ 50a^2 - 25a = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ (loại)} \\ a = \dfrac{1}{2} \text{ (nhận)} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ a = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow a + 2b = \dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$$

đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B**. 2. **C**. Vô số. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3\left[8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)\right]$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

☑ Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

☑ Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \end{array}\right.$ $\Rightarrow x = 0$ không phải là cực trị.

☑ Nếu $m \neq \pm 1$ thì $x = 0$ là nghiệm đơn.

Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi chỉ khi

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

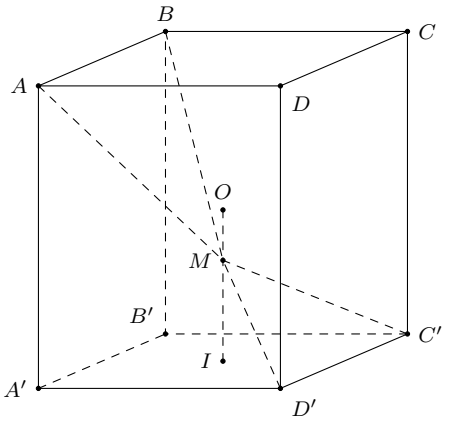
Vậy giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 0$, $m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cô-sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.



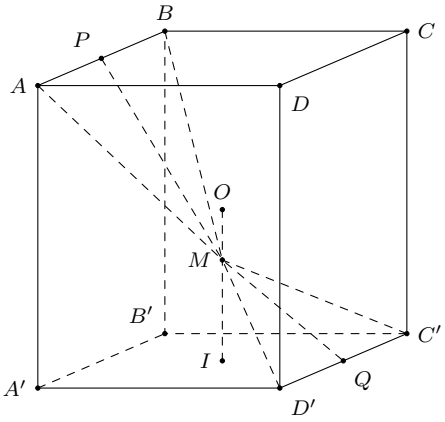
Lời giải.

Giả sử hình lập phương có độ dài cạnh bằng a.

Hai mặt phẳng $(MC'D')$, (MAB) lần lượt chứa hai đường thẳng $C'D'$, AB và $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua M và song song với AB.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$. Các tam giác $MC'D'$, MAB cân ở M nên $MP \perp C'D'$, $MQ \perp AB$.

Do đó, nếu α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) thì $\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}|$ (1)



Ta có

$$MQ = \sqrt{MI^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{6};$$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{4}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \frac{5a}{6}; PQ = AD' = a\sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}| = \left|\frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2\cdot MP\cdot MQ}\right| = \left|\frac{\dfrac{25a^2}{36} + \dfrac{13a^2}{36} - 2a^2}{2\cdot\dfrac{5a}{6}\cdot\dfrac{a\sqrt{13}}{6}}\right| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{1}{3}$ và $f'(x) = x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{9}$. **D.** $-\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = x$.

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & -\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \int x\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \\
\Leftrightarrow\ & f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}.
\end{aligned}$$

Theo giả thuyết, $f(2) = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$.

Suy ra $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{64}{3}$. **B.** 32. **C.** 64. **D.** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải.

Đặt $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$.

Khi đó, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = \dfrac{1}{6}abc$.

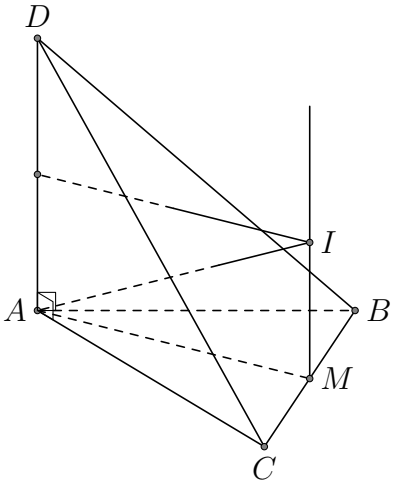
Ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = 2\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó, $AM = \dfrac{b^2 + c^2}{2}$.

Vì tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (S) nên ta có $IM \parallel AD$ và $IM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}a$.

Xét tam giác AIM vuông tại M, ta có

$$AI^2 = AM^2 + IM^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 48$$



Suy ra $V_{ABCD}^2 = \dfrac{1}{36}a^2b^2c^2 \le \dfrac{1}{36}\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27} = \dfrac{1024}{9}$ hay $V_{ABCD} \le \dfrac{32}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

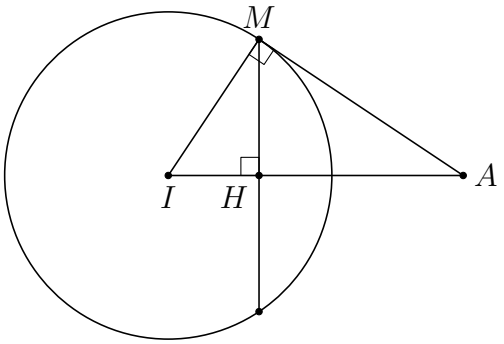
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. **B.** $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.

C. $x + y + z + 7 = 0$. **D.** $x + y + z - 7 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)\Rightarrow IA=\sqrt{3}$.
Suy ra điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).
Do đó tập hợp tất cả các điểm M nằm trên mặt phẳng cố định (α). Mặt phẳng cố định (α) đi qua điểm H là hình chiếu của điểm M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.



Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên suy ra

$$IM^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\frac{IM^2}{IA}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$.
Mặt phẳng cần tìm có phương trình là $-\left(x-\frac{4}{3}\right)-\left(y-\frac{7}{3}\right)-\left(z-\frac{10}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+y+z-7=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết lên bảng một số ngẫu nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{1027}{6859}$. **B.** $\frac{2539}{6859}$. **C.** $\frac{2287}{6859}$. **D.** $\frac{109}{323}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega)=19^3$.
Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$ có 6 số chia hết cho 3, đó là $\{3;6;9;12;15;18\}$, có 7 số chia cho 3 dư 1, đó là $\{1;4;7;10;13;16;19\}$ và có 6 số chia cho 3 dư 2, đó là $\{2;5;8;11;14;17\}$.
Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau

- ☑ **Trường hợp 1.** Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3: có 6^3 cách viết.
- ☑ **Trường hợp 2.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 1: có 7^3 cách viết.
- ☑ **Trường hợp 3.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 2: có 6^3 cách viết.
- ☑ **Trường hợp 4.** Trong ba số viết ra có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia cho 3 dư 1 và 1 chia cho 3 dư 2: có $6\cdot 7\cdot 6\cdot 3!$ cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là $p=\frac{6^3+7^3+6^3+6\cdot 7\cdot 6\cdot 3!}{19^3}=\frac{2287}{6859}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+3t\\y=-3\\z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-2)$. Đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d và Δ là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=6+11t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+7t\\y=3-5t\\z=5+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-3\\z=5+7t\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có điểm $A(1;-3;5)$ thuộc đường thẳng d nên A là giao điểm của d và Δ.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}=(-3;0;-4)$.
Đặt $\vec{u'}=\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $\vec{v'}=\dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}=\left(-\dfrac{3}{5};0;-\dfrac{4}{5}\right)$. Ta có $\vec{u'}\cdot\vec{v'}>0$ nên góc tạo bởi hai véc-tơ $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ.
Suy ra $\vec{w}=\vec{u'}+\vec{v'}=\left(-\dfrac{4}{15};\dfrac{10}{15};-\dfrac{22}{15}\right)=-\dfrac{2}{15}(2;-5;11)$ là véc-tơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Phương trình đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-5t\\z=5+11t.\end{cases}$$

Chọn $t=-2$ suy ra điểm $M(-1;2;-6)$ thuộc đường phân giác. Khi đó, đường phân giác có phương trình

$$\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t.\end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 16. **B**. 9. **C**. 14. **D**. 15.

Lời giải.

Ta có $3^x+m=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x+x=\log_3(x-m)+x-m$ $(*)$.
Xét hàm số $f(t)=3^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3^t\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác, phương trình $(*)$ có dạng $f(x)=f(\log_3(x-m))$. Do đó,

$$f(x)=f(\log_3(x-m))\Leftrightarrow x=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x=x-m\Leftrightarrow 3^x-x=-m\ (**)$$

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=3^x\ln 3-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_3\left(\dfrac{1}{\ln 3}\right)=a$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình $(**)$ có nghiệm khi chỉ khi $m\in(-\infty;-g(a))$.
Mặt khác, $m\in\mathbb{Z}\cap(-15;15)$ nên $m\in\{-14;-13;-12;\ldots;-1\}$ (vì $-g(a)\approx -0{,}9958452485$).
Do đó, có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (C) □

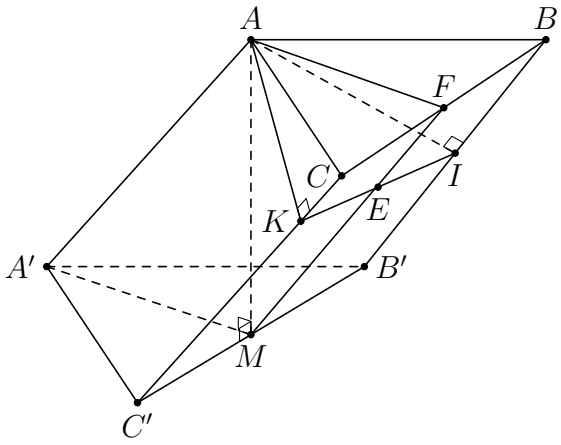
Câu 46. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A

lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$. Khoảng cách từ A đến BB', CC' lần lượt là 1; 2 nên $AI = 1$, $AK = 2$.



Gọi F là trung điểm của BC.

Vì $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Ta có $\begin{cases} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AIK)$

$\Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB'$ nên

$$\mathrm{d}(C, BB') = \mathrm{d}(K, BB') = IK = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Mà $AM \perp (ABC)$ nên $((ABC), (AIK)) = \left(\widehat{EF, AM}\right) = \widehat{AME} = \widehat{FAE}$ ($\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AM}$ là véc-tơ pháp tuyến của của (AKI), (ABC)).

Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$ (AE là đường trung tuyến của tam giác AKI vuông tại A).

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là tam giác AIK nên

$$S_{\triangle AIK} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\widehat{EAF} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle AIK}}{\cos\widehat{EAF}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Xét tam giác AMF vuông tại A, ta có $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{AF}{\tan\widehat{AMF}} = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

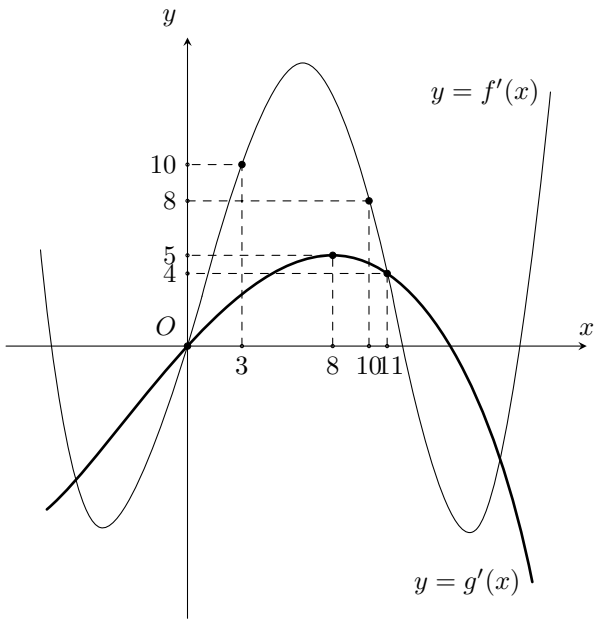
Chọn đáp án (D) □

Câu 47.

Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(2;\dfrac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$.

C. $\left(\dfrac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\dfrac{13}{4}\right)$.



Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$ với $a\in(8;10)$. Khi đó,

$$\begin{cases} f'(x+7)>10 \text{ khi } 3<x+7<a \\ g'\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)\le 5 \text{ khi } 0\le 2x+\dfrac{9}{2}\le 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x+7)>10 \text{ khi } -4<x<1 \\ g'\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)\le 5 \text{ khi } -\dfrac{9}{4}\le x\le \dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

Do đó, $h'(x)=f'(x+7)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0$ khi $-\dfrac{9}{4}\le x<1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn AB có độ dài bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Giao điểm hai đường tiệm cận của (C) là $I(-1;1)$. Hàm số đã cho được viết lại $y=1-\dfrac{2}{x+1}$.

Giả sử $A\left(a;1-\dfrac{2}{a+1}\right)\in(C)$, $A\left(b;1-\dfrac{2}{b+1}\right)\in(C)$. Ta có $\overrightarrow{IA}=\left(a+1;-\dfrac{2}{a+1}\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(b+1;-\dfrac{2}{b+1}\right)$.

Đặt $a_1=a+1$, $b_1=b+1$ (hiển nhiên $a_1\ne 0$, $b_1\ne 0$ và $a_1\ne b_1$).

Tam giác ABI đều khi chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ \cos(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})=\cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+\dfrac{4}{a_1^2}=b_1^2+\dfrac{4}{b_1^2} \\ \dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}}{IA\cdot IB}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1^2-b_1^2)\left(1-\dfrac{4}{a_1^2b_1^2}\right)=0 & (1) \\ \dfrac{a_1b_1+\frac{4}{a_1b_1}}{a_1^2+\frac{4}{a_1^2}}=\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a_1=b_1, \text{ loại vì } A\equiv B. \\ a_1=-b_1, \text{ loại vì không thỏa mãn } (2). \\ a_1b_1=-2, \text{ loại vì không thỏa mãn } (2). \\ a_1b_1=2. \end{array}\right.$

Với $a_1b_1=2$, thay vào (2), ta được $\dfrac{2+\frac{4}{2}}{a_1^2+\frac{4}{a_1^2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a_1^2+\dfrac{4}{a_1^2}=8$.

Vậy $AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z$?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $|z|(z-3-i)+2i = (4-i)z \Leftrightarrow z(4-|z|-i) = -3|z| + (2-|z|)i$.

Đặt $t = |z|$, điều kiện $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy mô-đun hai vế ta được

$$\begin{aligned} t|4-t-i| = |-3t+(2-t)i| &\Leftrightarrow t\sqrt{(4-t)^2+1} = \sqrt{9t^2+(2-t)^2} \\ &\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 7t^2 - t + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t \approx 7{,}081 \\ t \approx 0{,}61146 \\ t \approx -0{,}6928. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do đó, có 3 giá trị t thỏa mãn.

Mặt khác, với mỗi $t \geq 0$, ta có $z = \dfrac{-3t+(2-t)i}{4-t-i}$ nên có duy nhất một số phức z thỏa mãn.

Vậy có 3 số phức thõa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{7}{4}x^2$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1); N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$?

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là $k = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 3$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại $A\left(x_0; \dfrac{1}{8}x_0^4 - \dfrac{7}{4}x_0^2\right)$ có hệ số góc bằng 3. Suy ra

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$$

☑ Với $x_0 = -1$, ta có $A\left(-1; \dfrac{13}{8}\right)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + \dfrac{11}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + \frac{11}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1+\sqrt{3} \Rightarrow A\left(-1; \dfrac{13}{8}\right) \text{ thỏa yêu cầu bài toán.} \\ x = 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

☑ Với $x_0 = 3$ ta có $A\left(3; -\dfrac{171}{8}\right)$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - \dfrac{195}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right) \text{ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

☑ Với $x_0 = -2$, ta có $A(-2; -5)$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow A(-2; -5) \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Vậy có 2 điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

HẾT

ĐÁP ÁN

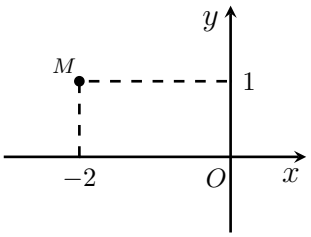
1. B	2. A	3. A	4. D	5. D	6. A	7. A	8. A	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. B	15. C	16. A	17. C	18. D	19. A	20. A
21. B	22. D	23. D	24. D	25. A	26. A	27. A	28. C	29. A	30. C
31. D	32. B	33. D	34. B	35. C	36. A	37. D	38. B	39. D	40. B
41. D	42. D	43. C	44. B	45. C	46. D	47. B	48. C	49. B	50. B

12 Đề minh họa THQG 2018

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.
Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

A. $z=-2+i$. **B.** $z=1-2i$. **C.** $z=2+i$. **D.** $z=1+2i$.



Lời giải.
Điểm $M(-2;1)$ biểu diễn số phức $z=-2+i$.
Chọn đáp án A □

Câu 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A. A_{10}^{8}. **B.** A_{10}^{2}. **C.** C_{10}^{2}. **D.** 10^2.

Lời giải.
Số tập con gồm 2 phần tử của M là số tổ hợp chập 2 của 10 nên bằng C_{10}^{2}.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **C.** $V=Bh$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải.
Dựa vào công thức tính thể tích khối chóp ta có $V=\dfrac{1}{3}Bh$.
Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)<0, \forall x\in(-2;0)$ nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng này.

Chọn đáp án A ☐

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng quanh trục hoành ta có $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$. **B.** $N(0;-1;1)$. **C.** $P(0;-1;0)$. **D.** $Q(0;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

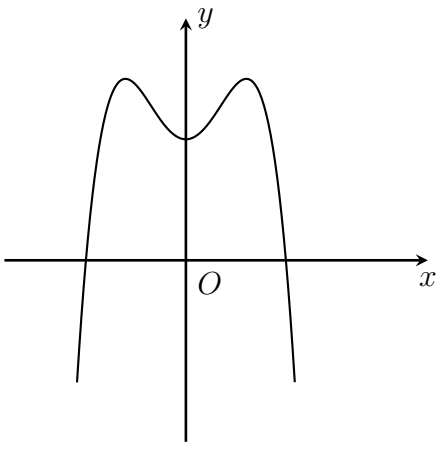
Chọn đáp án B ☐

Câu 8.

Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y=-x^4+2x^2+2$. **B.** $y=x^4-2x^2+2$.

C. $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho là đồ thị của hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có hệ số $a<0$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A ☐

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 2$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(3a) = 3\log a$. **B.** $\log(a^3) = \dfrac{1}{3}\log a$. **C.** $\log(a^3) = 3\log a$. **D.** $\log(3a) = \dfrac{1}{3}\log a$.

Lời giải.

Ta có $\log(a^3) = 3\log a$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3} + x + C$. **C.** $6x + C$. **D.** $x^3 + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(3x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = x^3 + x + C$, với C là hằng số.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u_1} = (-1; 2; 1)$. **B.** $\vec{u_2} = (2; 1; 0)$. **C.** $\vec{u_3} = (2; 1; 1)$. **D.** $\vec{u_4} = (-1; 2; 0)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u_1} = (-1; 2; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0; 6)$. **B.** $(-\infty; 6)$. **C.** $(0; 64)$. **D.** $(6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $3a$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r\ell \Rightarrow \ell = \dfrac{S_{xq}}{\pi r} = \dfrac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=0.$ **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=-1.$ **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1.$ **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1.$

Lời giải.

Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được: $(MNP): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}.$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}.$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}.$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}.$

Lời giải.

☑ Hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$ vì $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty.$

☑ Hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ xác định trên $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, nhưng không có tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1.$

☑ Hàm số $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên không có tiệm cận.

☑ Hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$ xác định trên $\mathscr{D}=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ và

$$\lim_{x\to -1^-}\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}=0$$

nên không có tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Lời giải.

Ta có $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$. Vì $-2<2<4$ nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 50. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 122.

Lời giải.

Hàm xác định và liên tục trên $[-2;3]$. Ta có:

$$y'=4x^3-8x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ta có $f(0)=5, f(-2)=5, f(3)=50, f(\pm\sqrt{2})=1$.
Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=50$ tại $x=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 19. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{5}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_0^2=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

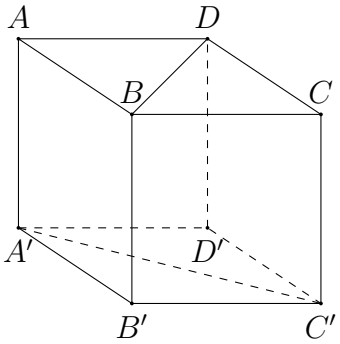
Lời giải.

Ta có $\Delta'=4-12=-8<0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phức là $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy $|z_1|+|z_2|=\left|\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|+\left|\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 21.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $\sqrt{3}a$. **B.** a. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{2}a$.



Lời giải.

Do BD và $A'C'$ lần lượt nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song với nhau nên $d(A'C',BD)=d((ABCD),(A'B'C'D'))$. Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có $d((ABCD),(A'B'C'D'))=AA'=a$. Vậy $d(A'C',BD)=a$.
Chọn đáp án B □

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng. **B**. 102.423.000 đồng. **C**. 102.016.000 đồng. **D**. 102.017.000 đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính lãi kép thì số tiền được lĩnh là

$$T = 100 \cdot (1 + 0,4\%)^6 \approx 102.424.128,4 \text{ (đồng)}$$

Chọn đáp án A □

Câu 23. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả từ hộp đó. Xác suất để hai quả cầu chọn ra cùng màu bằng

A. $\frac{5}{22}$. **B**. $\frac{6}{11}$. **C**. $\frac{5}{11}$. **D**. $\frac{8}{11}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{11}^2 = 55$.
Số cách chọn ra 2 quả cùng màu là $\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_6^2 = 25$.
Vậy xác suất cần tính bằng $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x - y - z - 6 = 0$. **B**. $3x - y - z + 6 = 0$. **C**. $x + 3y + z - 5 = 0$. **D**. $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải.

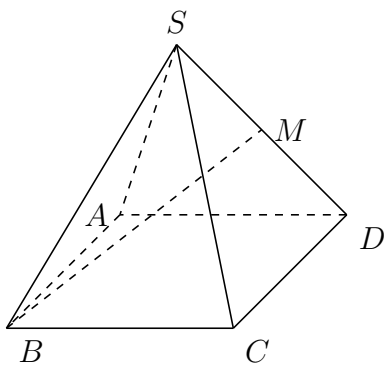
Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(-1;2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$ nên có phương trình $3(x+1) - (y-2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 25.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\frac{2}{3}$. **D**. $\frac{1}{3}$.



Lời giải.

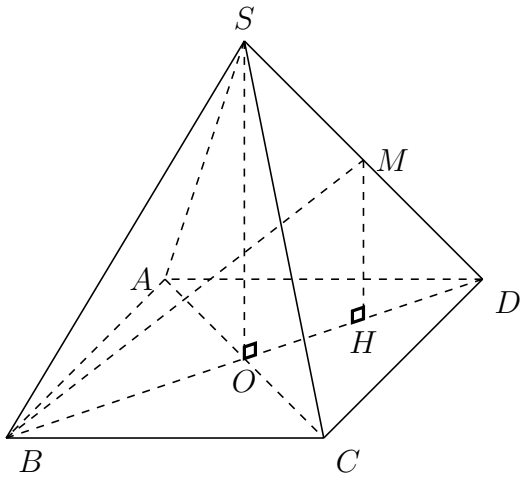
Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm OD.

Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $MH \parallel SO$.

Suy ra $MH \perp (ABCD) \Rightarrow (BM, (ABCD)) = \widehat{MBH}$.

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ và $BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 26. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560. **B**. 3360. **C**. 80640. **D**. 13440.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Ta có $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow n = 10$.

Với $n = 10$ thì $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ có số hạng tổng quát là: $\mathrm{C}_{10}^k (x^3)^{10-k} \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k 2^k x^{30-5k}$. Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Suy ra số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^6 = 13440$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tính tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \dfrac{2}{3}$ bằng

A. $\dfrac{82}{9}$. **B**. $\dfrac{80}{9}$. **C**. 9. **D**. 0.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó:

$$\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right)(\log_3 x)^4 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$$

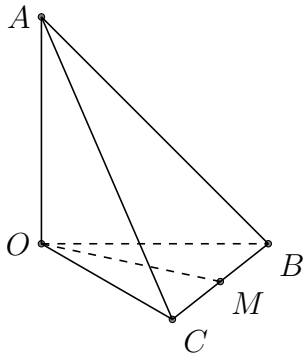
Vậy tổng các nghiệm là $9 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{82}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28.

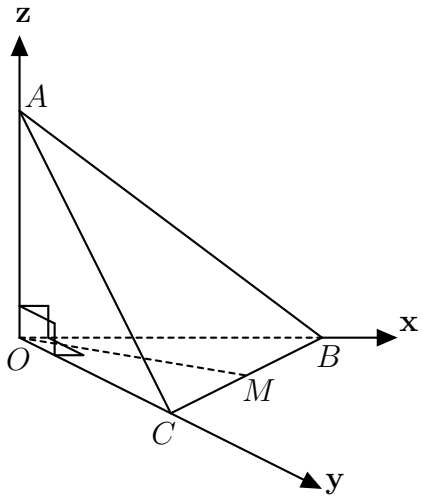
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $90°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.



Lời giải.

Giả sử $OA = OB = OC = 1$. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ sao cho tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với tia OB, OC, OA. Khi đó ta có $O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$. Do đó $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{AB} = (1;0;-1)$.



Ta có $\cos(OM, AB) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{(OM, AB)} = 60°$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1 \colon \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; d_2 \colon \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

và mặt phẳng $(P) \colon x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$. **B**. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$. **D**. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường thẳng cần viết là Δ, A là giao của Δ và d_1, B là giao của Δ và d_2. Khi đó $A(3-t; 3-2t; -2+t)$ và $B(5-3u; -1+2u; 2+u)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} = (2+t-3u; -4+2u+2t; 4+u-t).$$

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n} = (1;2;3)$. Ta có $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương. Do đó:

$$\frac{2+t-3u}{1} = \frac{-4+2u+2t}{2} = \frac{4+u-t}{3} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ u = 1. \end{cases}$$

Suy ra $A(1;-1;0)$, phương trình đường thẳng $\Delta \colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x^3 + mx - \dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. 5. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}$. Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6} = g(x), \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq \min_{x>0} g(x).$$

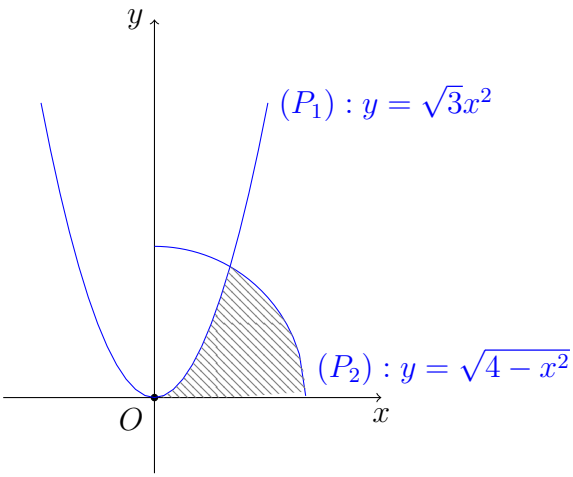
Mà $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \dfrac{1}{x^6}} = 4 \Rightarrow \min\limits_{x>0} g(x) = 4$ khi $x = 1$.

Do đó $-m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$, suy ra có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. **B**. $\dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. **D**. $\dfrac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } 0 \leq x \leq 2).$$

Khi đó

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x = I + J.$$

Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính $J = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x$: Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t \mathrm{d}t$ và $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t \mathrm{d}t = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$ (đvdt).

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}.\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x = \int_2^2 \left(x^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2.\end{aligned}$$

Suy ra $a=32$, $b=12$, $c=2$. Vậy $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện ABCD.

A. $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Ta tính được bán kính đường tròn nội tiếp tam giác BCD là $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, chiều cao tứ diện là $h=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Từ đó $S_{xq}=2\pi\cdot r\cdot h=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình sau có nghiệm dương $16^x-2\cdot 12^x+(m-2)\cdot 9^x=0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $t^2-2t-2+m=0$ với $t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$. Yêu cầu bài toán trở thành, tìm m nguyên dương để phương trình $t^2-2t-2+m=0$ có nghiệm lớn hơn 1. Bằng cách khảo sát sự tương giao của hai đồ thị các hàm số $y=f(t)=t^2-2t-2$ và $g(x)=-m$ ta được $0<m<3$. Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn là $m=1$ hoặc $m=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$ có nghiệm thực.

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{m+3\sin x}$ ta có hệ

$$\begin{cases} t^3=m+3\sin x \\ \sin^3 x=m+3t. \end{cases}$$

Suy ra

$$t^3-\sin^3 x+3(t-\sin x)=0\Leftrightarrow (t-\sin x)\left(t^2+t\sin x+\sin^2 x+3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow t=\sin x\Leftrightarrow \sin^3 x-3\sin x=m.$$

Xét hàm số $f(u)=u^3-3u,\ u\in[-1;1]$ ta có $f'(u)=3u^2-3, f'(u)=0\Leftrightarrow u=\pm 1$.
Bảng biến thiên

x	-1		1
f'	0	$-$	0
f	2	$\searrow$	-2

Từ đó, ta suy ra phương trình $\sin^3 x-3\sin x=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-2\le m\le 2$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của m.
Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có với mọi x thuộc đoạn $[0;2]$ thì $-2\le x^3-3x\le 2\Rightarrow m-2\le x^3-3x+m\le m+2$ với mọi x thuộc đoạn $[0;2]$.
Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=\max\{|m-2|;|m+2|\}$.

- ☑ $m\ge 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y=m+2=3\Leftrightarrow m=1$.
- ☑ $m<0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y=2-m=3\Leftrightarrow m=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có với $x>\frac{1}{2}$ ta có $f(x)=\ln(2x-1)+2$. Khi $x<\frac{1}{2}$, ta có $f(x)=\ln(1-2x)+1$.
Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho số thức $z=a+bi$ với $(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$

A. $P=-1$. **B**. $P=-5$. **C**. $P=3$. **D**. $P=7$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Rightarrow b=a+1 \Rightarrow a^2-2a-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \text{ (loại)} \\ b=4. \end{array}\right.$$

Vậy $a+b=7$.

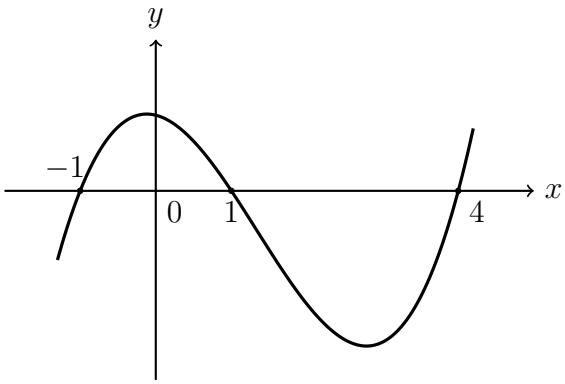
Chọn đáp án D □

Câu 39.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;3)$. **B**. $(2;+\infty)$.

C. $(-2;1)$. **D**. $(-\infty;-2)$.



Lời giải.

Xét hàm số $y=f(2-x)$. Hàm số trên xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Ta có $y'=-f'(2-x)$.

$$y'>0 \Leftrightarrow f'(2-x)<0.$$

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có

$$f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B**. $\dfrac{3}{2}$. **C**. $\dfrac{5}{2}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_0;y_0)$. Phương trình của d là

$$y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}\cdot(x-x_0)+\frac{-x_0+2}{x_0-1}.$$

Đường thẳng d đi qua $A(a;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}1 &= -\frac{1}{(x_0-1)^2}\cdot(a-x_0)+\frac{-x_0+2}{x_0-1}\\ \Leftrightarrow &(x_0-1)^2 = x_0-a+(-x_0+2)(x_0-1)\\ \Leftrightarrow &2x_0^2-6x_0+3+a=0.(1)\end{aligned}$$

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A thì phương trình (1) phải có đúng một nghiệm, hay

$$\Delta' = 9-2(3+a)=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}.$$

hoặc

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ 2-6+3+a=0\end{cases} \Leftrightarrow a=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 8.

Lời giải.

Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Do $OA=OB=OC$ nên ta có $|a|=|b|=|c|$. Suy ra $b=\pm a, c=\pm a$.

☑ Nếu $b=a$ và $c=a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=4.$$

Ta có $(P): x+y+z-4=0$.

☑ Nếu $b=a$ và $c=-a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{-a}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{0}{a}=1 \text{ (vô nghiệm)}.$$

☑ Nếu $b=-a$ và $c=a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}+\frac{z}{a}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=2.$$

Ta có $(P): x-y+z-2=0$.

☑ Nếu $b=-a$ và $c=-a$ thì mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}-\frac{y}{a}-\frac{z}{a}=1$. Vì (P) đi qua M nên

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a}-\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow -\frac{2}{a}=1 \Leftrightarrow a=-2.$$

Ta có $(P): x-y-z+2=0$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247. **B**. 248. **C**. 229. **D**. 290.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1.2^{n-1}$ nên $u_{10} = u_1.2^9$.
Đặt $t = \log u_1$, ta có

$$t+\sqrt{2+t-2t-18\log 2} = 18\log 2+2t \Leftrightarrow 18+t = \sqrt{2-t-18\log 2} \Leftrightarrow t = -18\log 2+1 \Leftrightarrow u_1 = 2^{-17}.5.$$

Suy ra

$$u_n > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18}.5 > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 18 + 99.\log_2 5.$$

Từ đó ta có $n_{\min} = 248$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị

A. 3. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ta có

$$f'(x) = 12x\left(x^2 - x - 2\right),\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 2.$$

Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x) + m$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt, hay $0 < m < 5$ nên ta có 4 số nguyên m.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2,2,1)$, $B\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.
B. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-8}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$.
C. $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$.
D. $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1} = \dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \dfrac{z-\frac{5}{9}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $OA=3, OB=4, AB=5$ suy ra tam giác OAB vuông tại O. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Khi đó ta có

$$OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{0}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{OB.x_A+BA.x_O+AO.x_B}{OA+OB+AB}=0 \\ y_I=\dfrac{OB.y_A+BA.y_O+AO.y_B}{OA+OB+AB}=1 \\ z_I=\dfrac{OB.z_A+BA.z_O+AO.z_B}{OA+OB+AB}=1. \end{cases}$$

Do đó $I(0,1,1)$. Lại có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=4(1,-2,2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm. Thay tọa độ I vào phương án A thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;1)$, $E(1;1;0)$, $F(0;1;0)$. Khi đó ta có $S\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Suy ra thể tích cần tính

$$V=V_{S.ABCD}+V_{S.ABEF}=\frac{1}{3}.\frac{4}{3}.1+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.1=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $T=|z+1-3i|+|z-1+i|$ lớn nhất.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Lời giải.

Gọi $M(z)$ và $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $I(4;3)$. Khi đó $M\in(I,\sqrt{5})$ và $T=MA+MB$. Gọi E là trung điểm AB, ta có $E=(\dfrac{5}{2};1)$ và $ME\le EI+R$. Dấu "=" có khi $M(6;4)$. Khi đó

$$k=4(EI+R)^2+AB^2\le 4ME^2+AB^2=2(MA^2+MB^2)\ge(MA+MB)^2.$$

Suy ra $T\le\sqrt{k}$. Đẳng thức xảy ra khi $M(6;4)$ hay $P=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $BC=2\sqrt{3}$, $AA'=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'C$ và BC. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(AB'C')$ bằng

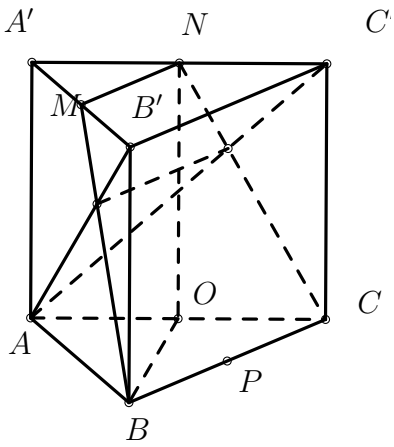
A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao ch O là trung điểm cạnh AC, B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, N thuộc tia Oz. Khi đó $A(0;-\sqrt{3};0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $C'(0;\sqrt{3};2)$, $B(3;0;0)$, $B'(3;0;2)$ và $N(0;0;2)$. Ta có $\overrightarrow{AB'}=\left(3;\sqrt{3};2\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(0;2\sqrt{3};2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AB'}\wedge\overrightarrow{AC'}=\left(-2\sqrt{3};-6;6\sqrt{3}\right)$. Ta chọn $\vec{n}=\left(1;\sqrt{3};-3\right)$ là VTPT của $(AB'C')$. Ta có:

$\overrightarrow{NB}=(3;0;-2)$, $\overrightarrow{NC}\left(0;\sqrt{3};-2\right)\Rightarrow\overrightarrow{NB}\wedge\overrightarrow{NC}=\left(2\sqrt{3};6;3\sqrt{3}\right)$ nên ta cho $\vec{u}=\left(2;2\sqrt{3};3\right)$ là VTPT của (MNP).

Suy ra $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2) và (S_3)

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Xét (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Ta có $AB=AC=\sqrt{13}$, $BC=4$. Gọi I là trung điểm BC; J, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ta có $I(1;-1;1)$, $J\left(\dfrac{7}{3};0;1\right)$, $K\left(-\dfrac{1}{3};0;1\right)$.

Ta có các trường hợp sau

- ☑ Các điểm A, B, C nằm cùng phía so với (P): Có 2 mặt phẳng.
- ☑ Hai điểm B, C nằm cùng phía so với (P) và A, B nằm khác phía so với (P). Trường hợp này ta thấy (P) đi qua hai điểm J, K. Khi đó mặt phẳng $(P):by+c(z-1)=0$.
  Ta có $d(B,(P))=1$ nên $\dfrac{|-b|}{\sqrt{b^2+c^2}}=1\Rightarrow c=0$ nên $(P):y=0$.
- ☑ Hai điểm A, C nằm cùng phía và khác phía điểm B so với (P). Trường hợp này ta thấy (P) đi qua I, J. là tương tự như trên ta có 2 mặt phẳng.
- ☑ Hai điểm A, B nằm cùng phía và khác phía điểm C so với (P). Ta có 2 mặt phẳng.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\dfrac{11}{630}$. **B.** $\dfrac{1}{126}$. **C.** $\dfrac{1}{105}$. **D.** $\dfrac{1}{42}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=10!$.

Số cách xếp 5 bạn lớp 12C là 5!. Với mỗi cách xếp 5 bạn đó ta có hai trường hợp

- ☑ Đứng đầu hàng tính từ trái sang phải là một bạn lớp 12C và đứng cuối không phải là hs lớp 12C, tức là cách xếp có dạng $CXCXCXCXCX$, trong đó X là hs lớp A hoặc B. Khi đó ta có 5! các

xếp 5 học sinh còn lại.

☑ Đứng đầu hàng từ trái sang phải không là hs lớp 12 C và đứng cuối là hs lớp 12C, tức là cách xếp có dạng $XCXCXCXCXC$. Khi đó ta cũng có 5! cách xếp 5 học sinh còn lại.

☑ Có 2 học sinh lớp C đứng hai đầu hàng, tức là cách xếp có dạng $CXCXCXCXYC$. Khi đó ta gép một học sinh lớp B với một học sinh lớp C và xem đó như một phần tử, khi đó còn lại 4 hs nên ta có 4! cách xếp. Do đó trường hợp này có 2.6.4!

Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{(2.5! + 12.4!).5!}{10!} = \dfrac{11}{630}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 7, \int_0^1 x^2 f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2 \,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x) \,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3}. \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) \,\mathrm{d}x.$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 x^3 f'(x) \,\mathrm{d}x = -1.$ (1)

Mặt khác, do $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 7$ nên

$$\int_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right] \mathrm{d}x = 0 = 7 - 14 + 7 = 0.$$

Hay $\displaystyle\int_0^1 \left(f'(x) + 7x^3\right)^2 \mathrm{d}x = 0.$ (2)

Suy ra $f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + C.$

Mà $f(1) = 0$ nên $C = \dfrac{7}{4}$, suy ra $f(x) = \dfrac{7}{4}(1 - x^4)$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{7}{5}.$

Lưu ý. Có thể giải thích vì sao từ (2) suy ra $f'(x) + 7x^3 = 0$, $\forall x \in [0;1]$ như sau: Theo giả thiết ta có hàm số $y = (f'(x) + 7x^3)^2$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;1]$ (do đó, đồ thị hàm số này là một đường nét liền trên đoạn $[0;1]$ và không có điểm nào nằm bên dưới trục Ox). Tích phân ở (2) có giá trị bằng

diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(f'(x)+7x^3\right)^2$, trục hoành, đường thẳng $x=0$, đường thẳng $x=1$. Mà theo (2) thì hình phẳng này có diện tích bằng 0 nên $f'(x)+7x^3=0,\ \forall x\in[0;1]$.

Cách 2 (tiếp nối từ (1)). Ta có bất đẳng thức Bunhiacovski đối với tích phân: Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta luôn có

$$\left[\int_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right).\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $g(x)=kf(x),\ \forall x\in[a;b]$. Trở lại bài toán. Từ (1), ta có:

$$1=\left(\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^6\mathrm{d}x\cdot\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\cdot7=1.$$

Như vậy dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x)=kx^3$. Thay trở lại vào (1), ta được:

$$k\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\frac{k}{7}=-1\Rightarrow k=-7.$$

Vậy $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C\overset{\text{do } f(1)=0}{\Rightarrow}f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. C	4. A	5. A	6. A	7. B	8. A	9. D	10. C
11. D	12. A	13. B	14. B	15. D	16. D	17. B	18. A	19. C	20. D
21. B	22. A	23. C	24. B	25. D	26. D	27. A	28. C	29. A	30. D
31. B	32. D	33. A	34. B	35. A	36. B	37. C	38. D	39. C	40. C
41. A	42. B	43. D	44. A	45. C	46. A	47. B	48. B	49. A	50. A

13 Đề thi THQG 2017-Mã đề 101

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2 - 3 = 0$. **B.** $t^2 + t - 3 = 0$. **C.** $4t - 3 = 0$. **D.** $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$, ta được: $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x \,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$. **B.** $\int \cos 3x \,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 3x}{3} + C$. **D.** $\int \cos 3x \,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$.

Lời giải.

$$\int \cos 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos 3x \,\mathrm{d}(3x) = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. $z = -2 + 3i$. **B.** $z = 3i$. **C.** $z = -2$. **D.** $z = \sqrt{3} + i$.

Lời giải.

Số phức $0 + bi$, $(b \in \mathbb{R})$ được gọi là số thuần ảo.

Vậy số $z = 3i$ là số thuần ảo.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. **D.** Hàm số có hai điểm cực tiểu.

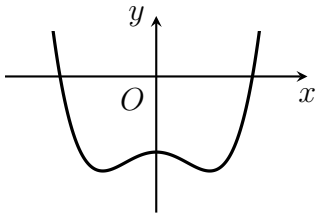
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại bằng 3. Suy ra khẳng định **sai** là "Hàm số có giá trị cực đại bằng 0".

Chọn đáp án C □

Câu 5.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+x^2-1$. **B**. $y=x^4-x^2-1$.

C. $y=x^3-x^2-1$. **D**. $y=-x^4+x^2-1$.

Lời giải.

Đường cong có hình dạng là đồ thị hàm số dạng $y=ax^4+bx^2+c$ với hệ số $a>0$. Suy ra nó là đồ thị là của hàm số $y=x^4-x^2-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I=\log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B**. $I=0$. **C**. $I=-2$. **D**. $I=2$.

Lời giải.

$I=\log_{\sqrt{a}} a=\log_{a^{\frac{1}{2}}} a=2\log_a a=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hai số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=7-4i$. **B**. $z=2+5i$. **C**. $z=-2+5i$. **D**. $z=3-10i$.

Lời giải.

$z=z_1+z_2=(5-7i)+(2+3i)=7-4i$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

$y=x^3+3x+2\Rightarrow y'=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $Q(2;-1;5)$. **B**. $P(0;0;-5)$. **C**. $N(-5;0;0)$. **D**. $M(1;1;6)$.

Lời giải.

Sử dụng chức năng CALC của MTCT tìm được $M(1;1;6)$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$. **B**. $\vec{k}=(0;0;1)$. **C**. $\vec{j}=(0;1;0)$. **D**. $\vec{m}=(1;1;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A. $V = 128\pi$. **B.** $V = 64\sqrt{2}\pi$. **C.** $V = 32\pi$. **D.** $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2.h = \pi.4^2.4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

$y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$.

$\lim\limits_{x \to -4^+} y = +\infty \Rightarrow x = -4$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x \to 4} y = \dfrac{5}{8} \Rightarrow x = -4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(-\infty; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

$y = \dfrac{2}{x^2+1} \Rightarrow y' = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$ và $y' < 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$. **B.** $V = (\pi - 1)\pi$. **C.** $V = (\pi + 1)\pi$. **D.** $V = \pi + 1$.

Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) \, \mathrm{d}x = \pi(2x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi + 1)\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 9 \log_a b$. **B.** $P = 27 \log_a b$. **C.** $P = 15 \log_a b$. **D.** $P = 6 \log_a b$.

Lời giải.

$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3 \log_a b + \dfrac{1}{2}.6 \log_a b = 6 \log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \dfrac{x - 3}{x + 2}$.

A. $D = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$. **B.** $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = (-2; 3)$. **D.** $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \dfrac{x-3}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$.

Vậy $D = (-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = (-\infty;2] \cup [16;+\infty)$. **B.** $S = [2;16]$.

C. $S = (0;2] \cup [16;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;1] \cup [4;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 16 \\ x \leq 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0;2] \cup [16;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 3 mặt phẳng. **C.** 6 mặt phẳng. **D.** 9 mặt phẳng.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật có các mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối $\Rightarrow$ có 3 mặt đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$?

A. $3x - 2y + z + 12 = 0$. **B.** $3x + 2y + z - 8 = 0$.

C. $3x - 2y + z - 12 = 0$. **D.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với Δ nhận $\overrightarrow{u_\Delta} = (3;-2;1)$ làm vtpt $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $3(x-3) - 2(y+1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 12 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;3;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t. \\ z = -t \end{cases}$

Lấy $t=-1 \Rightarrow N(1;0;1)$ thuộc đường thẳng $\Rightarrow$ đáp án đúng là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

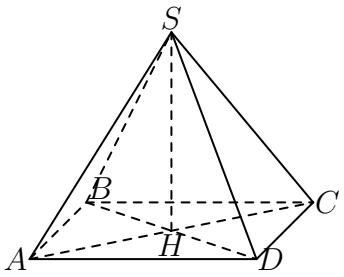
Lời giải.

Cạnh đáy $AB=a \Rightarrow$ diện tích đáy $S_{\text{ABCD}}=a^2$.

Đường chéo $AC=a\sqrt{2} \Rightarrow HA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cạnh bên $SA=2AB=2a \Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích $V=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{14}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.



Chọn đáp án D □

Câu 22. Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm?

A. $z^2+2z+3=0$. **B.** $z^2-2z-3=0$. **C.** $z^2-2z+3=0$. **D.** $z^2+2z-3=0$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-et ta có tổng hai số phức là 2 và tích của chúng là 3 $\Rightarrow$ hai số phức là nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-7x^2+11x-2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m=11$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

Đạo hàm: $y'=3x^2-14x+11$ có nghiệm $x=1\in[0;2]$.

Ta có $y(0)=-2$; $y(1)=3$; $y(2)=0 \Rightarrow m=\min\limits_{[0;2]} y=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(-\infty;1)$. **B.** $D=(1;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x-1>0$ (vì $\frac{1}{3}$ không nguyên) $\Rightarrow x>1 \Rightarrow$ tập xác định $D=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=12$. Tính $I=\displaystyle\int_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=36$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\int\limits_0^6 f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (với } u=3x)$$

$\Rightarrow I=\frac{1}{3}.12=4.$

Chọn đáp án D □

Câu 26. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R=a$. **C.** $R=2\sqrt{3}a$. **D.** $R=a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Cạnh hình lập phương bằng $2a \Rightarrow$ đường chéo hình lập phương bằng $2a\sqrt{3} \Rightarrow$ bán kính mặt cầu bằng $a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=3x+5\cos x+5$. **B.** $f(x)=3x+5\cos x+2$.

C. $f(x)=3x-5\cos x+2$. **D.** $f(x)=3x-5\cos x+15$.

Lời giải.

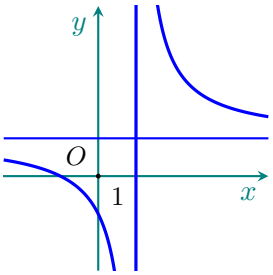
$f(x)=\int(3-5\sin x)\,\mathrm{d}x=3x+5\cos x+C$.

$f(0)=10\Rightarrow 5+C=10\Rightarrow C=5$. Vậy hàm số cần tìm: $f(x)=3x+5\cos x+5$.

Chọn đáp án A □

Câu 28.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

B. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

C. $y'>0,\forall x\neq 1$.

D. $y'<0,\forall x\neq 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Mặt khác hàm số không xác định tại $x=1\Rightarrow y'<0,\forall x\neq 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$. **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=13$.

C. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của M trên Ox là $I(1;0;0)$. Mặt khác $IM=\sqrt{13}\Rightarrow$ phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho số phức $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $Q(1;2)$. **B.** $N(2;1)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $P(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có: $w = iz = i(1-2i) = 2+i \Rightarrow$ điểm biểu diễn w là $N(2;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

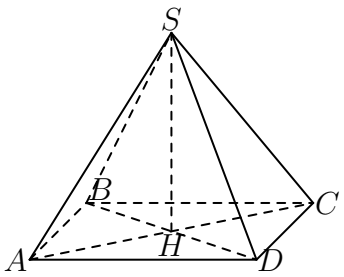
A. $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình nón $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đường chéo hình vuông $ABCD$ có $AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow HA = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a \Rightarrow$ đường cao hình nón $h = a$.

$\Rightarrow$ thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a = \dfrac{a^3\pi}{6}$.



Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -x^2 + 2x + C$. **B.** $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -x^2 + x + C$.

C. $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = x^2 - 2x + C$. **D.** $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -2x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

$F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow 2x = f(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 2x - 2x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m < -1$. **B.** $3 < m \le 4$. **C.** $m > 4$. **D.** $1 \le m < 3$.

Lời giải.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

Với $-1-m > 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(2) \Rightarrow \dfrac{2+m}{1} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ loại.

Với $-1-m < 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) \Rightarrow \dfrac{4+m}{3} = 3 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow m > 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta' : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'?

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Δ và Δ' có các véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u_1} = (3;2;1)$ và $\vec{u_2} = (1;3;-2)$.

Khi đó $[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (-7;7;7) \Rightarrow$ đường thẳng vuông góc với d và Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;1;1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm. **B.** 14 năm. **C.** 12 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải.

Tổng số tiền lĩnh ra sau n năm bằng $50.(1,06)^n$. Dùng máy tính kiểm tra thấy $n = 12$ thì số tiền lớn hơn 100. Vậy chọn phương án C.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = \dfrac{7}{3}$. **B.** $S = -5$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + 1 + (b+3)i - \sqrt{a^2+b^2}.i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy ta có $S = a + 3b = -5$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t, \\ z = 2 \end{cases}$ $d_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

A. $2x - y + 2z + 22 = 0$. **B.** $2x - y + 2z + 13 = 0$.

C. $2x - y + 2z - 13 = 0$. **D.** $2x + y + 2z - 22 = 0$.

Lời giải.

Giao của d_1 và (P) là điểm $M(4;-1;2)$. Các mặt phẳng trong 4 phương án cùng vuông góc với d_2 nhưng chỉ có mặt phẳng ở phương án C đi qua $M(4;-1;2)$ nên chọn C.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 7. **B**. 4. **C**. 6. **D**. 5.

Lời giải.

Đây là hàm số bậc 3 có hệ số $a=-3<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2-3ac\le 0$
$\Leftrightarrow m^2+12m+27\le 0 \Leftrightarrow -9\le m\le -3$.
Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-m\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=81$.

A. $m=-4$. **B**. $m=4$. **C**. $m=81$. **D**. $m=44$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=81$ suy ra $\log_3(x_1.x_2)=4$ hay $\log_3 x_1+\log_3 x_2=4$. Do đó theo định lý Viét ta suy ra $m=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $P(1;0)$. **B**. $M(0;-1)$. **C**. $N(1;-10)$. **D**. $Q(-1;10)$.

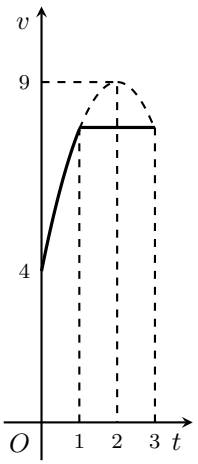
Lời giải.

Dùng máy tính tính được đường thẳng $AB: y=-8x-2$. Từ đó ta thấy chỉ có $N(1;-10)$ thuộc AB.

Chọn đáp án C □

Câu 41.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=23,25$ km. **B**. $s=21,58$ km.
C. $s=15,50$ km. **D**. $s=13,83$ km.

Lời giải.

Dễ dàng tìm được phương trình của vận tốc trong 1 giờ đầu tiên là $v=-\dfrac{5}{4}t^2+5t+4$ còn 2 giờ tiếp theo là $v=\dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường mà vật đi được trong 3 giờ đó là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int_1^3 \frac{31}{4} \mathrm{d}t = \frac{259}{12} \approx 21,58.$$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = \dfrac{7}{12}$. **B.** $P = \dfrac{1}{12}$. **C.** $P = 12$. **D.** $P = \dfrac{12}{7}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{ab} x = \dfrac{1}{\log_x ab} = \dfrac{1}{\log_x a + \log_x b} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$.

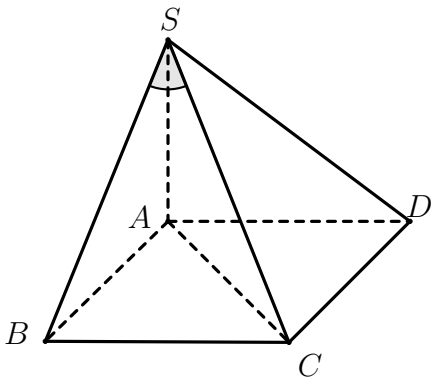
Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V = \sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có góc $\widehat{BSC} = 30° \Rightarrow SB = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{2}a$.
Từ đó suy ra thể tích của khối chóp bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



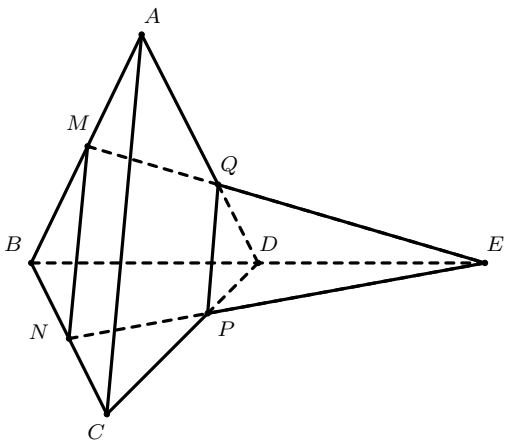
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $V = \dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **B.** $V = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **C.** $V = \dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = X$.
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của NE với CD và ME với AD. Dễ thấy $AQ = CP = \dfrac{2}{3}a$.



Ta dễ dàng tính được $V_{E.BMN} = \dfrac{1}{2}X$. Áp dụng tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_{E.PQD}}{V_{E.BMN}} = \dfrac{2}{9}$. Suy ra $V_{E.PQD} = \dfrac{2}{9}.V_{E.BMN} \Rightarrow V_{BMNEQP} = \dfrac{7}{9}.V_{E.BMN} = \dfrac{7}{18}.X$
Tức là phần khối đa diện không chứa điểm A có thể tích bằng $\dfrac{7}{18}X$, nên phần chứa điểm A có thể tích là $\dfrac{11}{18}X = \dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;a;b)$. Tính $T = a-b$.

A. $T=-2$. **B.** $T=1$. **C.** $T=-1$. **D.** $T=0$.

Lời giải.

Ta thấy M nằm bên trong mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và $M \in (P)$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm $H(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{4})$ trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (P).
Đường thẳng Δ thoả mãn yêu cầu bài toán khi Δ nằm trong (P) và $\Delta \perp HM$ nên Δ nhận $\left[\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HM}\right] = (12;-12;0) = 12(1;-1;0)$ làm véctơ chỉ phương. Suy ra $\vec{u}(1;-1;0)$ nên $T=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $z = x+yi$ là số phức thoả mãn yêu cầu của bài toán. Từ giả thiết suy ra x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x^2-4y+y^2=0 \\ y \neq 0 \\ x^2+(y-3)^2=25 \end{cases}$, ta thấy hệ có hai nghiệm trong đó nghiệm $(x;y)=(4;0)$ bị loại. Vậy chỉ có một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y} = 3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x+y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min} = \dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải.

Với giả thiết bài toán ta có $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y} = 3xy+x+2y-4 \Leftrightarrow \log_3 3(1-xy)+3(1-xy) = \log_3(x+2y)+x+2y$

Vì hàm số $f(x)=x+\log_3 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ trên ta suy ra $3(1-xy)=x+2y \Leftrightarrow 11=(3x+2)(3y+1)$.

Dùng bất đẳng thức $AM-GM$ suy ra $3x+2+3y+1\geq 2\sqrt{11}$.

Suy ra $x+y\geq \dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 3x+2=3y+1 \\ 3(1-xy)=x+2y \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{11}-2}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{11}-1}{3} \end{cases}$.

Vậy phương án đúng là D.

Chọn đáp án D. □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.
B. $m\in\mathbb{R}$.
C. $m\in\left[-\dfrac{5}{4};+\infty\right)$.
D. $m\in(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Nhận thấy đường thẳng $y=mx-m+1$ luôn đi qua điểm uốn $B(1;1)$ của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$, do vậy nếu nó cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A,B,C thì luôn thoả mãn $AB=BC$.

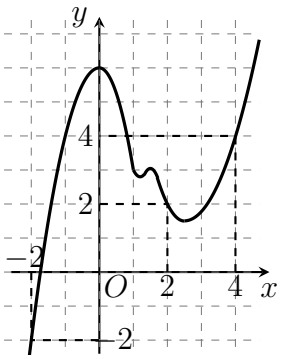
Thử $m=-3$ thì đường thẳng không cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt nên loại trừ các phương án A, B.

Thử $m=-\dfrac{3}{2}$ thì đường thẳng cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt nên loại trừ các phương án C.

Chọn đáp án D. □

Câu 49.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.

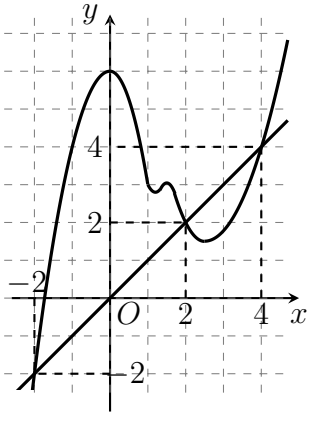


Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $h(4)=h(-2)>h(2)$.
B. $h(4)=h(-2)<h(2)$.
C. $h(2)>h(4)>h(-2)$.
D. $h(2)>h(-2)>h(4)$.

Lời giải.

Ta có $h(x)=2f(x)-x^2$ nên $h'(x)=2\left(f'(x)-x\right)$.



Dựa vào hình vẽ bên và tính chất của tích phân ta thấy $h(2)-h(-2)=\displaystyle\int_{-2}^{2} h'(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{-2}^{2}\left(f'(x)-x\right)\,\mathrm{d}x>0$ nên $h(2)>h(-2)$.

Tương tự ta có $h(4)>h(-2), h(2)>h(4)$, từ đó chọn phương án C.

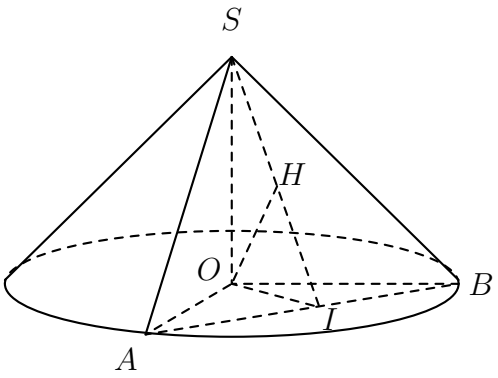
Chọn đáp án C. □

Câu 50. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy hình nón, I là trung điểm của AB, H là chân đường cao của tam giác SOI. Khi đó ta có $d = OH$. Dễ dàng tính được $OS = OI = a$ nên $d = OH = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.



Chọn đáp án D □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. B	4. C	5. B	6. D	7. A	8. C	9. D	10. B
11. B	12. C	13. A	14. C	15. D	16. D	17. C	18. B	19. C	20. B
21. D	22. C	23. C	24. B	25. D	26. D	27. A	28. D	29. A	30. B
31. C	32. D	33. C	34. D	35. C	36. B	37. C	38. A	39. B	40. C
41. B	42. D	43. B	44. B	45. C	46. C	47. D	48. D	49. C	50. D