

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Q}.$$

a) Chứng minh $f(n) = n + 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn.

Câu 2. (4,0 điểm) Dãy số nguyên hữu hạn $a_1, a_2, \dots, a_n$ được gọi là “đẹp” nếu $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ($n \geq 2$) và tồn tại hai đa thức $P(x), Q(x)$ với hệ số nguyên có bậc dương sao cho:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1 = P(x)Q(x).$$

a) Chứng minh $P(x) = Q(x)$.

b) Tìm tất cả các dãy số nguyên “đẹp”.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giả sử p, r là hai số nguyên tố phân biệt lớn hơn 3. Chứng tỏ rằng mọi ước nguyên tố lớn hơn 3 của hai số $2^p + 1$ và $2^r + 1$ đều khác nhau từng đôi một.

b) Với $p > 3$ là một số nguyên tố, chứng minh $2^p + 1$ có ít nhất một ước số nguyên tố q thỏa mãn $q > p + 5$.

c) Với $k > 1$ là số nguyên dương bất kì, kí hiệu $S(k)$ là tổng các ước nguyên tố của k . Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n ($n > 1$) sao cho $S(2^n + 1) = S(n)$.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC có góc A nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi D là điểm trên tia đối của tia BC , đường thẳng qua C và song song với AB cắt đường thẳng AD tại E . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE .

a) Chứng minh đường thẳng ID đi qua trung điểm CE .

b) K là điểm trên đường thẳng CE sao cho $AK = BK$. Chứng minh OK là phân giác của góc IKD .

c) Gọi M là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $DM = DC$ ($M \neq C$), N là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE sao cho $DN = DE$ ($N \neq E$) và P là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh $\widehat{MDC} = 2\widehat{MPI}$.

Câu 5. (4,0 điểm) Có 49 quả bóng với 7 màu khác nhau, mỗi màu có đúng 7 quả bóng. Ta xếp ngẫu nhiên tất cả 49 quả bóng thành một hàng ngang. Trong hàng ngang đó, một quả bóng F được gọi là “tốt” nếu ở mỗi bên của F tổng số các quả bóng khác màu với F đều là số lẻ.

a) Tìm một cách xếp có đúng 3 quả bóng “tốt”.

b) Tìm số lượng quả bóng “tốt” nhỏ nhất có thể.

c) Nếu bổ sung thêm điều kiện là mỗi quả bóng phải cùng màu với ít nhất một quả bóng kề nó, thì số lượng quả bóng “tốt” nhỏ nhất có thể là bao nhiêu?

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu;

Giám thị không được giải thích gì thêm.

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Huế TST - P1)

Cho hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

- ① Chứng minh $f(n) = n + 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.
- ② Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn.

Lời giải.

- ① Thay $y = 1$ vào phương trình đã cho, ta được $f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1$.

Từ đây suy ra được $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

Lấy $x = 0$ ta có $f(0) = f(1) - 1 = 1$. Với $n \geq 1$, từ $f(1) = 2$ và hệ thức trên, bằng quy nạp ta có $f(n) = n + 1$, kết hợp $f(0) = 1$ suy ra điều phải chứng minh.

- ② Lập lại hệ thức $f(x+1) = f(x) + 1$, ta có $f(x+m) = f(x) + m$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ và $m \in \mathbb{N}$.

Với m là số nguyên dương thì $f(0) = f(-m) + m$, nên $f(-m) = 1 - m$.

Lúc này sử dụng ý 1 để suy ra $f(a) = a + 1$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Xét số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ bất kì, trong đó $a \in \mathbb{Z}$ và $b \in \mathbb{N}^*$.

Thay $x = \frac{a}{b}$, $y = b$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(a) = f\left(\frac{a}{b}\right)f(b) - f\left(\frac{a}{b} + b\right) + 1$$

Do $f(a) = a + 1$, $f(b) = b + 1$ và $f\left(\frac{a}{b} + b\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + b$, đẳng thức trên trở thành

$$a + 1 = bf\left(\frac{a}{b}\right) - b + 1$$

Suy ra $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + 1$ hay $f(q) = q + 1$ với mọi $q \in \mathbb{Q}$.

Thử lại thấy thỏa mãn, do đó $f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ là nghiệm hàm duy nhất thỏa mãn.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Huế TST - P2)

Dãy số nguyên hữu hạn $a_1, a_2, \dots, a_n$ được gọi là **đẹp** nếu $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ($n \geq 2$) và tồn tại hai đa thức $P(x), Q(x)$ với hệ số nguyên có bậc dương sao cho

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1 = P(x)Q(x)$$

- ① Chứng minh $P(x) = Q(x)$.
- ② Tìm tất cả các dãy số nguyên **đẹp**.

Lời giải.

- ① Thay $x = a_i$ vào đẳng thức đã cho, ta được $P(a_i)Q(a_i) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Vì $P(a_i), Q(a_i)$ là các số nguyên nên $P(a_i) = Q(a_i) = \pm 1$. Do đó, đa thức $P(x) - Q(x)$ có n nghiệm phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Mặt khác, $\deg P + \deg Q = n$ và hai đa thức đều có bậc dương, nên $\deg P, \deg Q \leq n - 1$. Suy ra $P(x) - Q(x)$ là đa thức không, tức là $P(x) = Q(x)$.

2 Theo ý trên, ta có $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1 = P(x)^2$ nên n là số chẵn.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 = 0$ (nếu không ta có thể *tinh tiến* các giá trị).

Khi đó $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ và $a_i \geq i - 1$ với mọi $i = 2, \dots, n$.

Đặt $F(x) = x(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$. Vì $F(x)$ là bình phương của một đa thức và n chẵn, ta có

$$0 \leq F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{(2a_2 - 1)(2a_3 - 1) \cdots (2a_n - 1)}{2^n} \leq 1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2^n}$$

Nếu $n \geq 6$ thì $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2^n} \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} = \frac{945}{64} > 1$, khi đó $F\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, mâu thuẫn.

Vậy ta suy ra được $n = 2$ hoặc $n = 4$.

Trường hợp 1: Nếu $n = 2$ thì $0 \leq F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2a_2 - 1}{4}$, suy ra $a_2 \leq \frac{5}{2}$ nên $a_2 = 1$ hoặc $a_2 = 2$.

◇ Với $a_2 = 1$, đa thức $F(x) = x^2 - x + 1$ không thể là bình phương của một đa thức bậc nhất.

◇ Với $a_2 = 2$, ta có $F(x) = x(x - 2) + 1 = (x - 1)^2$. Do đó, dãy $(0, 2)$ là đẹp.

Trường hợp 2: Nếu $n = 4$ thì $0 \leq F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{(2a_2 - 1)(2a_3 - 1)(2a_4 - 1)}{16}$. Suy ra

$$(2a_2 - 1)(2a_3 - 1)(2a_4 - 1) \leq 16$$

Vì $a_2 \geq 1$ và $a_3 \geq 2$, ta được $3(2a_4 - 1) \leq 16$, tức là $a_4 \leq \frac{19}{6}$. Kết hợp với $a_4 \geq 3$ và a_4 nguyên, suy ra $a_4 = 3$. Vì $0 < a_2 < a_3 < 3$ nên $a_2 = 1, a_3 = 2$.

Khi đó $F(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 1 = (x^2 - 3x + 1)^2$, nên dãy $(0, 1, 2, 3)$ là đẹp.

Tổng quát ta có tất cả dãy đẹp là **$(a, a + 2)$ và $(a, a + 1, a + 2, a + 3)$** với $a \in \mathbb{Z}$ do

$$(x - a)(x - a - 2) + 1 = (x - a - 1)^2$$

$$(x - a)(x - a - 1)(x - a - 2)(x - a - 3) + 1 = ((x - a - 1)(x - a - 2) - 1)^2$$

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Huế TST - P3)

- 1** Giả sử p, r là hai số nguyên tố phân biệt lớn hơn 3. Chứng tỏ rằng mọi ước nguyên tố lớn hơn 3 của hai số $2^p + 1$ và $2^r + 1$ đều khác nhau từng đôi một.
- 2** Với $p > 3$ là một số nguyên tố, chứng minh $2^p + 1$ có ít nhất một ước số nguyên tố q thỏa mãn $q > p + 5$.
- 3** Với $k > 1$ là số nguyên dương bất kì, kí hiệu $S(k)$ là tổng các ước nguyên tố của k . Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n ($n > 1$) sao cho $S(2^n + 1) = S(n)$.

Lời giải.

1 Đầu tiên với $p > 3$ là số nguyên tố và $q > 3$ là ước nguyên tố của $2^p + 1$ thì $d = \text{ord}_q 2 = 2p$.

Thật vậy, vì $2^p \equiv -1 \pmod{q}$, nên $2^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$, nhưng $2^p \not\equiv 1 \pmod{q}$. Do đó $d \mid 2p$ và $d \nmid p$ suy ra $d = 2$ hoặc $d = 2p$. Nếu $d = 2$ thì $q \mid 2^2 - 1 = 3$, trái với $q > 3$. Vậy $d = 2p$. Đồng thời, từ $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, ta còn có $2p \mid q - 1$.

Bây giờ, nếu một số nguyên tố $q > 3$ là ước chung của $2^p + 1$ và $2^r + 1$, thì nhận xét trên cho ta $d = 2p = 2r$, suy ra $p = r$, trái giả thiết. Vậy hai số không có ước nguyên tố chung nào lớn hơn 3.

- ② Vì $p > 3$ là số nguyên tố, nên $p \equiv 1$ hoặc $p \equiv 5 \pmod{6}$. Để ý nếu $p \equiv 1 \pmod{6}$ thì $2^p + 1 \equiv 3 \pmod{9}$, còn nếu $p \equiv 5 \pmod{6}$ thì $2^p + 1 \equiv 6 \pmod{9}$.

Như vậy $3 \mid 2^p + 1$ nhưng $9 \nmid 2^p + 1$. Mặt khác, $2^p + 1 > 3$, nên $2^p + 1$ phải có một ước nguyên tố $q \neq 3$, để ý thêm q lẻ nên $q > 3$.

Theo ý 1 ta có $2p \mid q - 1$, suy ra $q \geq 2p + 1$. Vì $p \geq 5$, ta có $2p + 1 > p + 5$. Do đó $q > p + 5$.

- ③ Vì n lẻ, $2^n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, nên 3 luôn là một ước nguyên tố của $2^n + 1$.

Giả sử n có các ước nguyên tố lớn hơn 3 là $p_1, \dots, p_t$, với $t \geq 1$. Với mỗi i , do n/p_i là số nguyên dương lẻ, ta có $2^{p_i} + 1 \mid 2^n + 1$.

Theo ý 2, có thể chọn một ước nguyên tố q_i của $2^{p_i} + 1$ sao cho $q_i > p_i + 5$, còn theo ý 1, các số $q_1, \dots, q_t$ đôi một khác nhau. Bởi vậy

$$S(2^n + 1) \geq 3 + q_1 + \dots + q_t > 3 + p_1 + \dots + p_t$$

Vì n lẻ và các ước nguyên tố của n chỉ có thể là $3, p_1, \dots, p_t$, ta có $S(n) \leq 3 + p_1 + \dots + p_t$.

Từ đó ta có điều mâu thuẫn với việc $S(2^n + 1) = S(n)$.

Vậy n không có ước nguyên tố nào lớn hơn 3. Vì $n > 1$ và n lẻ, suy ra $n = 3^\alpha$ với $\alpha \geq 1$.

Nếu $\alpha \geq 2$, thì $9 \mid n$ và $n/9$ lẻ, nên $2^n + 1$ chia hết cho $2^9 + 1 = 513 = 3^3 \cdot 19$.

Do đó $S(2^n + 1) \geq 3 + 19 = 22 > 3 = S(n)$, vô lí.

Suy ra $\alpha = 1$, tức là $n = 3$, thử lại thấy thoả mãn. Vậy nghiệm duy nhất cần tìm là **$n = 3$**

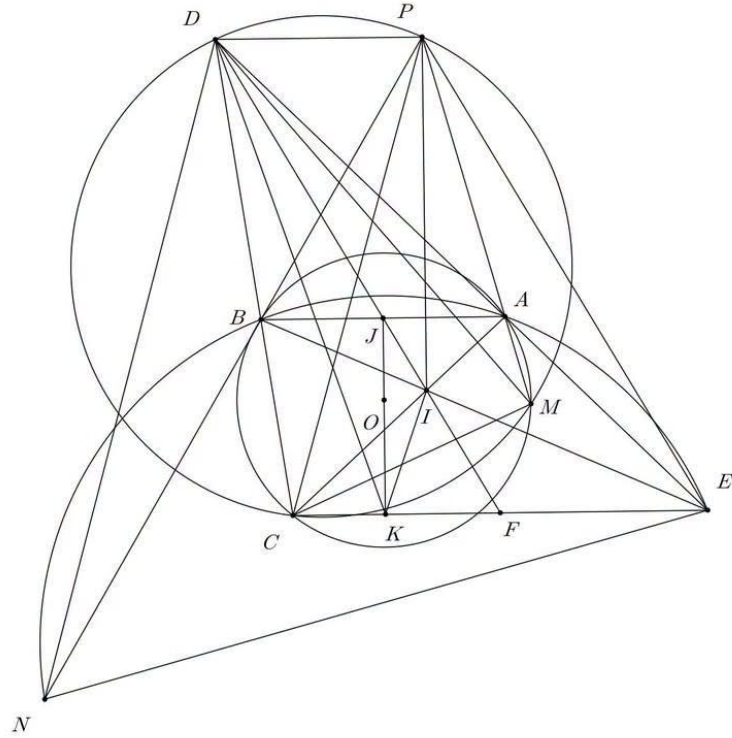
Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Huế TST - P4)

Cho tam giác ABC có góc A nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi D là điểm trên tia đối của tia BC , đường thẳng qua C và song song với AB cắt đường thẳng AD tại E . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE .

- ① Chứng minh đường thẳng ID đi qua trung điểm CE .
- ② K là điểm trên đường thẳng CE sao cho $AK = BK$. Chứng minh OK là phân giác của góc IKD .
- ③ Gọi M là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $DM = DC$ ($M \neq C$), N là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE sao cho $DN = DE$ ($N \neq E$) và P là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh $\widehat{MDC} = 2\widehat{MPI}$.

Lời giải.

- ① Luôn đúng theo bổ đề hình thang.
- ② Theo bổ đề hình thang ta có được DI đi qua trung điểm J của $AB \Rightarrow K, O, J$ thẳng hàng $\Rightarrow K(IDJF) = -1$, mà $KO \perp KF$ do $KO \perp AB \Rightarrow KO$ là phân giác $\angle IKD$.



- ③ Gọi AM cắt đường thẳng qua D song song AB tại $P' \Rightarrow \angle P'DC = \angle CBA = 180^\circ - \angle P'MC$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $DP'MC$ nội tiếp mà $DM = DC \Rightarrow P'D$ là phân giác ngoài $\angle MP'C$.
 Mà $D(P'JBA) = -1 \Rightarrow D(P'ICA) = -1$, hơn nữa $D(P'ICA) = P'(DICA)$.
 $\Rightarrow P'(DICA) = -1$ mà $P'D$ là phân giác ngoài $\angle CP'A$ nên $P'I \perp P'D \Rightarrow P'I \perp AB$.
 Tương tự gọi BN cắt đường thẳng qua D song song AB tại P'' thì ta cũng có $P''I \perp AB$.
 $\Rightarrow P'$ trùng P'' trùng P hay ta có PI là phân giác $\angle MPC$ và tứ giác $MPDC$ nội tiếp nên có

$$\angle MDC = \angle MPC = 2\angle MPI$$

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Huế TST - P5)

Có 49 quả bóng với 7 màu khác nhau, mỗi màu có đúng 7 quả bóng. Ta xếp ngẫu nhiên tất cả 49 quả bóng thành một hàng ngang. Trong hàng ngang đó, một quả bóng F được gọi là **tốt** nếu ở mỗi bên của F tổng số các quả bóng khác màu với F đều là số lẻ.

- ① Tìm một cách xếp có đúng 3 quả bóng **tốt**.
- ② Tìm số lượng quả bóng **tốt** nhỏ nhất có thể.
- ③ Nếu bổ sung thêm điều kiện là mỗi quả bóng phải cùng màu với ít nhất một quả bóng kề nó, thì số lượng quả bóng **tốt** nhỏ nhất có thể là bao nhiêu?

 Lời giải.

Đánh số các vị trí trong hàng từ trái sang phải là $1, 2, \dots, 49$. Với mỗi quả bóng, gọi i là vị trí của nó trong hàng và j là thứ tự của nó trong 7 quả bóng cùng màu (tính từ trái sang phải).

Số bóng khác màu ở bên trái quả bóng đó là $(i - 1) - (j - 1) = i - j$. Tổng số bóng khác màu ở hai bên bằng 42, nên quả bóng đó tốt khi và chỉ khi i, j khác tính chẵn, lẻ.

Kí hiệu A, B, C, D, E, F, G là 7 màu, và A^m thể hiện rằng m quả bóng màu A được xếp liên tiếp.

- ① Xếp các quả bóng theo thứ tự $A^6 B^6 C^6 D^6 E^6 F^6 G^6 ABCDEFG$.

Trong 42 quả bóng đầu, i, j cùng tính chẵn, lẻ nên không có bóng tốt. Còn 7 quả bóng cuối đều có $j = 7$, nên chỉ các quả bóng ở vị trí 44, 46, 48 là tốt. Vậy cách xếp này có đúng 3 quả bóng tốt.

- ② Gọi x, y lần lượt là số bóng tốt ở vị trí chẵn và số bóng tốt ở vị trí lẻ. Khi đó, x quả bóng có i chẵn, j lẻ, còn y quả bóng có i lẻ, j chẵn.

Mỗi màu có 4 quả bóng với thứ tự j lẻ, nên có tất cả $7 \cdot 4 = 28$ quả bóng có j lẻ.

Vì có x quả bóng ở vị trí chẵn, nên có $28 - x$ quả bóng ở vị trí lẻ.

Do hàng có 25 vị trí lẻ, ta được $(28 - x) + y = 25$, suy ra $x = y + 3$.

Vì vậy, tổng số bóng tốt là $x + y = 3 + 2y \geq 3$.

Kết hợp với cách xếp ý 1 cho ta dấu bằng, nên số bóng tốt nhỏ nhất là ③.

- ③ Mỗi quả bóng tốt ở vị trí chẵn phải kề ít nhất một quả bóng cùng màu. Hai quả bóng cùng màu kề nhau có vị trí trong hàng và thứ tự trong màu đều liên tiếp. Vì thế, quả bóng kề đó có i lẻ, j chẵn, tức là một quả bóng tốt ở vị trí lẻ.

Như vậy, mỗi quả bóng thuộc loại x kề ít nhất một quả bóng thuộc loại y , còn mỗi quả bóng thuộc loại y chỉ có thể kề tối đa hai quả bóng thuộc loại x . Suy ra $x \leq 2y$.

Kết hợp với $x = y + 3$, ta được $y \geq 3$. Do đó, số bóng tốt là $x + y = 3 + 2y \geq 9$.

Để đạt dấu bằng, xếp các quả bóng theo thứ tự $A^4 B^4 C^4 D^4 E^4 F^4 G^4 A^3 B^3 C^3 D^3 E^3 F^3 G^3$.

Mỗi quả bóng đều kề ít nhất một quả bóng cùng màu. Trong 28 quả bóng đầu, i, j cùng tính chẵn, lẻ nên không có bóng tốt.

Còn ở phần cuối, bóng đầu của mỗi nhóm có thứ tự $j = 5$ trong màu. Các nhóm B^3, D^3, F^3 bắt đầu ở vị trí chẵn nên cả ba bóng trong mỗi nhóm đều tốt. Các nhóm còn lại bắt đầu ở vị trí lẻ nên không có bóng tốt.

Vậy cách xếp này có đúng $3 \cdot 3 = 9$ quả bóng tốt, nên số bóng tốt nhỏ nhất là ⑨.